Analiz 2: Türev ve İntegral

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

Giriş 13

1 Monoton Fonksiyonlar ve Ters Fonksiyonun Sürekliliği 14
1.1 Kesin Monotonluk 14
1.2 Süreklilik Birebirliği Monotonluğa Zorlar 15
1.3 Monoton Fonksiyonun Görüntüsü ve Süreklilik 16
1.4 Ters Fonksiyon Teoremi 18
1.5 Genel Aralıklarda Ters Fonksiyon 21
1.6 Tanım Kümesi Aralık Değilse 24
1.7 Monoton Fonksiyonların Süreksizlikleri 25
1.8 Alıştırmalar 26

2 Türev Kavramı 29
2.1 Fark Oranı 29
2.2 Bir Noktada Türev 30
2.3 Tanımdan Türev Hesabı 32
2.4 Teğet Doğrusu ve Doğrusallaştırma 33
2.5 Türevin Var Olmadığı Durumlar 35
2.6 Gösterimler 37
2.7 Tek Yönlü Türevler 38
2.8 Türev için Dizisel Ölçüt 40
2.9 Salınımlı Bir Örnek 41
2.10 Alıştırmalar 42

3 Türev Alma Kuralları 45
3.1 Türevlenebilirlik Sürekliliği Gerektirir 45
3.2 Türevin Cebirsel İşlemlerle Uyuşması 47
3.3 Kuvvet Kuralı ve Polinomların Türevi 51
3.4 Rasyonel Fonksiyonların Türevi 53
3.5 Sonlu Çok Çarpanlı Çarpım Kuralı 55
3.6 Alıştırmalar 57

4 Zincir Kuralı ve Ters Fonksiyonun Türevi 60
4.1 Zincir Kuralı 60
4.2 Carathéodory Ölçütü ve İkinci İspat 63
4.3 Leibniz Gösterimi ve Çok Katmanlı Bileşkeler 65
4.4 Zincir Kuralıyla Hesaplar 66

 CC BY-NC-SA 4.0

4.5 Ters Fonksiyonun Türevi . . . 69
4.6 Alıştırmalar . . . 74

5 Temel Fonksiyonların Türevleri . . . 77
5.1 Logaritma Fonksiyonunun Türevi . . . 77
5.2 Üstel Fonksiyonun Türevi . . . 79
5.3 Genel Kuvvet Fonksiyonu . . . 80
5.4 Logaritmik Türev Alma . . . 81
5.5 Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri . . . 83
5.6 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri . . . 85
5.7 Hiperbolik Fonksiyonlar . . . 86
5.8 Ters Hiperbolik Fonksiyonlar . . . 89
5.9 Türev Tablosu . . . 92
5.10 Karma Hesap Örnekleri . . . 93
5.11 Alıştırmalar . . . 95

6 Yüksek Mertebeden Türevler ve Leibniz Kuralı . . . 97
6.1 Yüksek Mertebeden Türevin Tanımı . . . 97
6.2 Sürekli Türevlenebilir Fonksiyon Sınıfları . . . 99
6.3 Yüksek Mertebeden Türevin Lineerliği . . . 100
6.4 Temel Fonksiyonların n. Türevleri . . . 101
6.5 Leibniz Kuralı . . . 104
6.6 Türevlenebilirlik, Süreklilik ve Yüksek Mertebeler . . . 107
6.7 Alıştırmalar . . . 110

7 Ekstremum Noktaları ve Fermat Teoremi . . . 114
7.1 Yerel ve Mutlak Ekstremum Noktaları . . . 114
7.2 Fermat Teoremi . . . 117
7.3 Kritik Noktalar ve Ekstremum Adayları . . . 120
7.4 Kapalı Aralıkta Mutlak Ekstremum Bulma . . . 122
7.5 Bir Uygulama: Optimizasyon . . . 124
7.6 Alıştırmalar . . . 125

8 Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri . . . 129
8.1 Rolle Teoremi . . . 129
8.2 Rolle Teoreminin Genellemeleri . . . 133
8.3 Lagrange Ortalama Değer Teoremi . . . 135
8.4 Ortalama Değer Teoreminin Temel Sonuçları . . . 137
8.5 Cauchy Ortalama Değer Teoremi . . . 141
8.6 Alıştırmalar . . . 145

9 Ortalama Değer Teoreminin Uygulamaları . . . 148
9.1 Eşitsizlik Üretmenin Genel Yordamı . . . 148
9.2 Üstel Fonksiyon: $e^x \geq 1 + x$ . . . 149

 CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Sinüs Eşitsizliği: $|\sin x| \leq |x|$ . . . 150
9.4 Bernoulli Eşitsizliğinin Genel Biçimi . . . 151
9.5 Kuvvet Eşitsizliği ve Young Eşitsizliği . . . 153
9.6 Logaritma Eşitsizlikleri . . . 155
9.7 Arktanjant ve Lipschitz Türü Kestirimler . . . 156
9.8 Yaklaşık Hesap ve Hata Kestirimi . . . 157
9.9 Köklerin Ayrılması . . . 158
9.10 Türev Limiti Teoremi . . . 160
9.11 Alıştırmalar . . . 162

10 Darboux Teoremi: Türevin Ara Değer Özelliği . . . 166
10.1 Türev Sürekli Olmak Zorunda Değildir . . . 166
10.2 Ara Değer Özelliği . . . 168
10.3 Darboux Teoremi . . . 169
10.4 Bir Türevin Süreksizlikleri . . . 172
10.5 Türevin İşareti Aralık Boyunca Değişmez . . . 174
10.6 Monoton Türev Süreklidir . . . 175
10.7 Uygulamalar . . . 176
10.8 Alıştırmalar . . . 177

11 L'Hôpital Kuralı . . . 180
11.1 Belirsiz Biçimler . . . 180
11.2 Basit Hâl: Türevlerin Oranı . . . 181
11.3 Ortak Bir Gözlem: Payda Neden Sıfırlanmaz? . . . 182
11.4 L'Hôpital Kuralı I: $0/0$ Biçimi . . . 183
11.5 L'Hôpital Kuralı II: ∞/∞ Biçimi . . . 186
11.6 Öteki Belirsiz Biçimler . . . 188
11.7 Kuralın Sınırları . . . 191
11.8 Büyüme Hızları . . . 192
11.9 Alıştırmalar . . . 194

12 Taylor Formülü . . . 197
12.1 Doğrusallaştırmadan Taylor Polinomuna . . . 197
12.2 Taylor Teoremi: Lagrange Kalanı . . . 199
12.3 Cauchy Kalanı ve Genel Biçim . . . 201
12.4 Peano Kalanı: Yerel Yaklaşım . . . 202
12.5 Temel Maclaurin Açılımları . . . 204
12.6 Sayısal Hesaplar . . . 211
12.7 Alıştırmalar . . . 213

13 Taylor Formülünün Uygulamaları . . . 216
13.1 Yaklaşık Hesap ve Hata Kestirimi . . . 216
13.2 Limit Hesabında Taylor Açılımı . . . 220

 CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Yüksek Mertebeden Türev Testi . . . 224
13.4 Dönüm Noktası için Yeter Koşul . . . 227
13.5 Taylor Formülüyle Eşitsizlik İspatı . . . 229
13.6 Alıştırmalar . . . 230

14 Monotonluk ve Ekstremum Testleri . . . 233
14.1 Türevin İşareti ile Monotonluk Arasındaki Tam İlişki . . . 233
14.2 İşaret Tablosu: Kritik Noktalar Aralığı Nasıl Böler . . . 235
14.3 Birinci Türev Testi . . . 237
14.4 İkinci Türev Testi . . . 240
14.5 Kapalı Aralıkta Mutlak Ekstremum . . . 243
14.6 Monotonlukla Eşitsizlik İspatlamak . . . 244
14.7 Alıştırmalar . . . 245

15 Konveks ve Konkav Fonksiyonlar . . . 249
15.1 Konvekslik ve Konkavlık . . . 249
15.2 Jensen Eşitsizliği . . . 251
15.3 Konveks Fonksiyonlarda Yerel ve Mutlak Minimum . . . 252
15.4 Grafik Teğetin Üstündedir . . . 253
15.5 Kiriş Eğimlerinin Monotonluğu . . . 255
15.6 Konvekslik ve Birinci Türev . . . 256
15.7 İkinci Türev Ölçütü . . . 257
15.8 Temel Örnekler . . . 258
15.9 Konveks Fonksiyonlar Süreklidir . . . 260
15.10 Uygulama: Ortalama Eşitsizlikleri . . . 261
15.11 Alıştırmalar . . . 262

16 Dönüm Noktaları . . . 265
16.1 Dönüm Noktası Kavramı . . . 265
16.2 Gerek Koşul: İkinci Türev Sıfırlanır . . . 266
16.3 Yeter Koşullar . . . 268
16.4 Türevin Bulunmadığı Dönüm Noktaları . . . 271
16.5 Dönüm Noktasında Teğet Eğriyi Keser . . . 272
16.6 Tam Çözümlü Örnekler . . . 273
16.7 Alıştırmalar . . . 276

17 Asimptotlar ve Grafik Çizimi . . . 280
17.1 Asimptot Kavramı . . . 280
17.2 Rasyonel Fonksiyonlarda Asimptotlar . . . 284
17.3 Grafik Çizim Yordamı . . . 286
17.4 Tam Çözümlü Grafik Çizimleri . . . 287
17.5 Alıştırmalar . . . 294

 CC BY-NC-SA 4.0

18 İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral . . . 299
18.1 İlkel Fonksiyon . . . 299
18.2 İlkel Fonksiyonun Özellikleri . . . 301
18.3 Belirsiz İntegral . . . 303
18.4 İlkeli Olan Fonksiyonlar Ara Değer Özelliğini Taşır . . . 304
18.5 Belirsiz İntegralin Cebirsel Özellikleri . . . 307
18.6 Temel İntegraller Tablosu . . . 310
18.7 Tablonun Doğrudan Uygulamaları . . . 312
18.8 Alıştırmalar . . . 314

19 Değişken Değiştirme ve Kısmi İntegrasyon . . . 318
19.1 Temel İntegraller Listesi . . . 318
19.2 Değişken Değiştirme Yöntemi . . . 319
19.3 Kısmi İntegrasyon . . . 324
19.4 İndirgeme Formülleri . . . 330
19.5 Alıştırmalar . . . 334

20 Rasyonel Fonksiyonların İntegrali . . . 338
20.1 Rasyonel Fonksiyon ve Üç Adımlı Yordam . . . 338
20.2 Dört Ayrışım Kalıbı . . . 342
20.3 Basit Kesirlerin İntegralleri . . . 343
20.4 Katsayıları Belirlemenin İki Yolu . . . 345
20.5 Dört Durumun Örnekleri . . . 346
20.6 Polinom Bölme Gerektiren İntegraller . . . 350
20.7 Tam Kareye Tamamlama Gereken Bir Karma Örnek . . . 352
20.8 Ostrogradski Ayrıştırması . . . 354
20.9 Alıştırmalar . . . 356

21 İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali . . . 361
21.1 Rasyonelleştirme Fikri . . . 361
21.2 Doğrusal Kesirli Köklü İfadeler . . . 362
21.3 Euler Değişimleri . . . 364
21.4 Belirsiz Katsayılar Yöntemi . . . 371
21.5 Binom İntegralleri . . . 374
21.6 Alıştırmalar . . . 379

22 Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali . . . 383
22.1 Çift Kuvvetler ve Derece Düşürme . . . 383
22.2 İndirgeme Formülleri . . . 384
22.3 Sinüs ve Kosinüs Kuvvetlerinin Çarpımı . . . 386
22.4 Tanjant ve Sekant Kuvvetlerinin Çarpımı . . . 388
22.5 Sekant ve Kosekantın İntegrali . . . 390
22.6 Weierstrass Yarım Açı Tanjantı Değişimi . . . 391

 CC BY-NC-SA 4.0

22.7 Çarpımı Toplama Çeviren Formüller . . . 394
22.8 Hiperbolik Fonksiyonların İntegrali . . . 395
22.9 Karma Bir Örnek . . . 398
22.10 Alıştırmalar . . . 399

23 Trigonometrik Dönüşümler ve Temel İntegral Biçimleri . . . 402
23.1 Kökü Yok Eden Üç Dönüşüm . . . 402
23.2 Birinci Dönüşüm: $x = \frac{a}{b}\sin t$ . . . 405
23.3 İkinci Dönüşüm: $x = \frac{a}{b}\tan t$ . . . 407
23.4 Üçüncü Dönüşüm: $x = \frac{a}{b}\sec t$ . . . 409
23.5 Hiperbolik Dönüşümler . . . 410
23.6 Temel İntegral Biçimleri . . . 412
23.7 Tam Kareye Tamamlama . . . 415
23.8 Doğrusal Paylı Karma Biçimler . . . 416
23.9 Alıştırmalar . . . 418

24 Bölünüşler ve Darboux Toplamları . . . 421
24.1 Bölünüşler . . . 421
24.2 Alt ve Üst Darboux Toplamları . . . 422
24.3 Bölünüşün İncelmesi . . . 425
24.4 Toplamların Hesabı: Üç Örnek . . . 428
24.5 Alt İntegral ve Üst İntegral . . . 430
24.6 Salınım . . . 433
24.7 Alıştırmalar . . . 435

25 Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü . . . 439
25.1 Riemann İntegralinin Tanımı . . . 439
25.2 Riemann Ölçütü . . . 442
25.3 Sürekli Fonksiyonlar İntegrallenebilir . . . 444
25.4 Monoton Fonksiyonlar İntegrallenebilir . . . 446
25.5 Süreksizliği Olan Fonksiyonlar . . . 447
25.6 Sonlu Sayıda Değeri Değiştirmek . . . 451
25.7 Alıştırmalar . . . 452

26 Riemann Toplamları ve Darboux Tanımıyla Denkliği . . . 456
26.1 Riemann Toplamı . . . 456
26.2 Sıkıştırma: Riemann Toplamı Alt ve Üst Toplam Arasındadır . . . 457
26.3 Darboux'nun Limit Teoremi . . . 459
26.4 İki Tanımın Denkliği . . . 462
26.5 Riemann'ın Özgün Tanımı . . . 464
26.6 İntegrallenebilir Fonksiyon Sınırlıdır . . . 464
26.7 Sınırlılık Yeter Değildir . . . 465
26.8 Düzgün Bölünüşlerle Limit Hesabı . . . 467

 CC BY-NC-SA 4.0

26.9 Uygulamalar: Toplam Limitlerinden İntegrale . . . 469
26.10 Alıştırmalar . . . 473

27 İntegralin Cebirsel Özellikleri . . . 477
27.1 Gösterim ve Elimizdeki Araçlar . . . 477
27.2 İntegralin Lineerliği . . . 478
27.3 Bileşke Fonksiyonun İntegrallenebilirliği . . . 480
27.4 Çarpım ve Bölüm . . . 483
27.5 Aralık Üzerinde Toplamsallık . . . 486
27.6 Yönlü İntegral . . . 489
27.7 Alıştırmalar . . . 490

28 İntegralde Sıralama ve Temel Eşitsizlikler . . . 493
28.1 Hazırlık: Gösterim ve Yönelim . . . 493
28.2 Sıralama Teoremi . . . 494
28.3 Kaba Sınırlar: İntegrali İki Dikdörtgen Arasına Sıkıştırmak . . . 497
28.4 İntegral için Üçgen Eşitsizliği . . . 498
28.5 Kesin Pozitiflik . . . 501
28.6 Sürekliliğin Vazgeçilmezliği . . . 503
28.7 Sıralamada Eşitlik Hâli . . . 505
28.8 İntegral Kestirimleri . . . 507
28.9 Alıştırmalar . . . 511

29 Analizin Temel Teoremleri . . . 515
29.1 Birinci Temel Teorem: Newton–Leibniz Formülü . . . 515
29.2 İki Hipotez de Gereklidir . . . 519
29.3 İntegral Fonksiyonu . . . 522
29.4 İki Örnek: Teoremin Sınırları . . . 525
29.5 Türev ile İntegral Birbirinin Ters İşlemidir . . . 527
29.6 Hipotezleri Denetlemenin Önemi . . . 528
29.7 Alıştırmalar . . . 529

30 Belirli İntegralde Yöntemler ve Leibniz Formülü . . . 533
30.1 Belirli İntegralde Değişken Değiştirme . . . 533
30.2 Çift ve Tek Fonksiyonların İntegrali . . . 537
30.3 Periyodik Fonksiyonların İntegrali . . . 540
30.4 Belirli İntegralde Kısmi İntegrasyon . . . 541
30.5 Leibniz Formülü: İntegral İşareti Altında Sınırların Türevi . . . 544
30.6 Wallis Formülü . . . 548
30.7 Alıştırmalar . . . 551

31 İntegral için Ortalama Değer Teoremleri . . . 554
31.1 Birinci Ortalama Değer Teoremi . . . 554
31.2 Ortalama Değer ve Geometrik Yorumu . . . 557

 CC BY-NC-SA 4.0

31.3 Sürekliliğin Gerekliliği . . . 559
31.4 İkinci Ortalama Değer Teoremi . . . 561
31.5 Türevin Ortalama Değer Teoremiyle Bağ . . . 567
31.6 Limit Hesabında Kullanım . . . 569
31.7 Eşitsizlik Kurmada Kullanım . . . 570
31.8 Alıştırmalar . . . 572

32 Cauchy–Schwarz ve Minkowski Eşitsizlikleri . . . 575
32.1 Cauchy–Schwarz Eşitsizliği . . . 575
32.2 Cauchy–Schwarz Eşitsizliğinin Uygulamaları . . . 579
32.3 Minkowski Eşitsizliği . . . 581
32.4 Hölder Eşitsizliği . . . 583
32.5 Mutlak Değerle Kestirim . . . 585
32.6 Doğru mu Yanlış mı? . . . 586
32.7 Alıştırmalar . . . 591

33 Belirli İntegralin Uygulamaları . . . 594
33.1 Eğri Altında Kalan Alan . . . 594
33.2 İki Eğri Arasındaki Alan . . . 596
33.3 Dilim Yöntemiyle Hacim . . . 598
33.4 Silindirik Kabuk Yöntemi . . . 601
33.5 Yay Uzunluğu . . . 603
33.6 Dönel Yüzey Alanı . . . 605
33.7 Parametrik Eğriler . . . 608
33.8 Kutupsal Koordinatlarda Alan . . . 610
33.9 Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu . . . 612
33.10 Alıştırmalar . . . 613

34 Serilere Giriş . . . 615
34.1 Seri ve Kısmi Toplamlar Dizisi . . . 615
34.2 Serinin Kalanı . . . 617
34.3 Yakınsaklığın Gerek Koşulu . . . 618
34.4 Seriler için Cauchy Ölçütü . . . 620
34.5 Serilerde Cebirsel İşlemler . . . 621
34.6 Geometrik Seriler . . . 623
34.7 Teleskopik Seriler . . . 625
34.8 Sonlu Sayıda Terimin Değiştirilmesi . . . 629
34.9 Alıştırmalar . . . 630

35 Pozitif Terimli Seriler ve Karşılaştırma Testleri . . . 632
35.1 Negatif Olmayan Terimli Seriler . . . 632
35.2 Karşılaştırma Testi . . . 635

 CC BY-NC-SA 4.0

35.3 Limit Karşılaştırma Testi . . . 643
35.4 Alıştırmalar . . . 649

36 Cauchy Yoğunlaştırma Testi ve p-Serileri . . . 652
36.1 Yoğunlaştırma Fikri . . . 652
36.2 Cauchy Yoğunlaştırma Testi . . . 653
36.3 p-Serileri: Riemann Serileri . . . 656
36.4 Logaritmalı Seriler . . . 658
36.5 İntegral Testi . . . 661
36.6 Kalanın Kestirimi . . . 666
36.7 Alıştırmalar . . . 668

37 Kök ve Oran Testleri . . . 671
37.1 Üst ve Alt Limit: Kullanacağımız İki Özellik . . . 671
37.2 Cauchy Kök Testi . . . 672
37.3 d'Alembert Oran Testi . . . 676
37.4 Kök Testi Oran Testinden Güçlüdür . . . 680
37.5 Alıştırmalar . . . 686

38 Kummer ve Raabe Testleri . . . 689
38.1 Oran Testi Neden ve Nerede Susar . . . 689
38.2 Kummer Testi . . . 690
38.3 Raabe Testi . . . 695
38.4 Bertrand Testi . . . 699
38.5 Testler Arasındaki Güç Sıralaması . . . 703
38.6 Alıştırmalar . . . 705

39 Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık . . . 710
39.1 Keyfi Terimli Seriler: Karşılaştırma Neden Yetmez . . . 710
39.2 Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık . . . 711
39.3 Mutlak Yakınsaklık Yakınsaklığı Gerektirir . . . 712
39.4 Bir Serinin Pozitif ve Negatif Kısımları . . . 714
39.5 Keyfi Terimli Seriler İçin Karşılaştırma Testi . . . 717
39.6 Kök ve Oran Testleri Mutlak Yakınsaklık Testleridir . . . 718
39.7 Alıştırmalar . . . 722

40 Abel, Dirichlet ve Leibniz Testleri . . . 726
40.1 Kısmi Toplamlarla Toplama: Abel Toplamı . . . 726
40.2 Dirichlet Testi . . . 728
40.3 Leibniz Testi: Alterne Seriler . . . 732
40.4 Alterne Serilerde Hata Kestirimi . . . 736
40.5 Abel Testi . . . 739
40.6 Monotonluk Koşulundan Vazgeçilemez . . . 741
40.7 Alıştırmalar . . . 743

 CC BY-NC-SA 4.0

41 Serilerin Yeniden Düzenlenmesi ve Gruplanması 747
41.1 Yeniden Düzenleme Kavramı 747
41.2 Dirichlet Teoremi 748
41.3 Şartlı Yakınsak Bir Seride Toplam Nasıl Değişir? 750
41.4 Riemann Yeniden Düzenleme Teoremi 751
41.5 Serilerin Gruplanması 754
41.6 Gruplamanın Tersi Doğru Değildir 757
41.7 Cauchy Çarpımı 758
41.8 Alıştırmalar 761

42 Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık Yarıçapı 764
42.1 Kuvvet Serisi Kavramı 764
42.2 Yakınsaklık Kümesinin Yapısı 765
42.3 Cauchy–Hadamard Teoremi 768
42.4 Katsayı Oranıyla Yarıçap 770
42.5 Uç Noktalarda Ne Olur? 774
42.6 Eksik Terimli Seriler 776
42.7 Alıştırmalar 777

43 Kuvvet Serilerinin Özellikleri 782
43.1 Düzgün Yakınsaklık: Gerektiği Kadarı 782
43.2 Terim Terim Türev 785
43.3 Terim Terim İntegral 790
43.4 Katsayıların Tekliği 793
43.5 Abel Limit Teoremi 795
43.6 Alıştırmalar 799

44 Taylor ve Maclaurin Serileri 803
44.1 Taylor Serisi ve Maclaurin Serisi 803
44.2 Yakınsaklık Ölçütü: Kalan Sıfıra Gitmelidir 804
44.3 Üstel ve Trigonometrik Açılımlar 806
44.4 Geometrik Seri ve Logaritma 809
44.5 Binom Serisi 812
44.6 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Serileri 816
44.7 Sonsuz Türevlenebilir Olmak Analitik Olmaya Yetmez 817
44.8 Serilerle İşlem Yapmak 820
44.9 Uygulamalar 823
44.10 Alıştırmalar 827
44.11 Analiz 2'nin Sonu 829

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Analiz 2, Analiz 1'de kurulan limit ve süreklilik zemini üzerine değişim ve toplam kavramlarını inşa eder: türev ve türev kuralları, ortalama değer teoremleri, Taylor formülü, belirsiz ve belirli integral, sayı serileri ve kuvvet serileri.
Bu notlar sık sık Analiz 1'deki sonuçlara dayanır; gerekli yerlerde ilgili tanım ve teoremin bulunduğu sayfaya bağlantı verilmiştir.

> **i** Not
>
> Analiz 2'nin bütün başlıklarının notları hazırdır ve aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Dersin dayandığı temel için Analiz 1 notlarına bakılabilir. Dört Analiz dersinin listesi için Analiz sayfasına bakabilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Monoton Fonksiyonlar ve Ters Fonksiyonun Sürekliliği

Analiz 1'i sürekliliğin en ince biçimiyle, **düzgün süreklilik** ile kapatmıştık. Oradaki son büyük sonuç Cantor teoremiydi (bkz. Analiz 1): kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyon, o aralıkta düzgün süreklidir. Yanında Lipschitz koşulunu (bkz. Analiz 1) ve her Lipschitz fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu (bkz. Analiz 1) ispatlamıştık. Elimizde artık reel sayıların tamlığından süzülmüş sağlam bir araç kutusu var: diziler, limit, süreklilik, ara değer teoremi, Weierstrass ekstremum teoremi, kompaktlık.
Küçük bir hatırlatmayla başlayalım; bu bölümde de benzer bir "parçaları birleştirme" düşüncesi kullanacağız. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[1, \infty)$ üzerinde Lipschitz'tir: $x, y \geq 1$ için

$$| \sqrt{x} - \sqrt{y} | = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| = \frac{| x - y |}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} | x - y |,$$

çünkü $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$'dir; Lipschitz sabiti $M = \frac{1}{2}$ alınabilir. Buna karşılık $[0, \infty)$ üzerinde $\sqrt{\cdot}$ **Lipschitz değildir**: $y = 0$ alırsak $\frac{|\sqrt{x} - 0|}{|x - 0|} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ oranı $x \to 0^+$ iken sınırsız büyür, dolayısıyla bütün x, y çiftleri için işe yarayan bir M yoktur. Yine de $\sqrt{\cdot}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde düzgün süreklidir: kompakt $[0, 1]$ aralığında Cantor teoremi, $[1, \infty)$ üzerinde ise Lipschitz koşulu düzgün sürekliliği verir; iki aralık $x = 1$ noktasında birleştiği için bu iki bilgi tanım kümesinin tamamına yapışır. (Yapıştırma şöyle yürür: verilen $\varepsilon > 0$ için iki parçanın $\frac{\varepsilon}{2}$'ye karşılık gelen δ'larının küçüğünü alırız; $x \leq 1 \leq y$ ve $| x - y | < \delta$ ise $| x - 1 | \leq | x - y | < \delta$ ve $| y - 1 | \leq | x - y | < \delta$ olduğundan $| \sqrt{x} - \sqrt{y} | \leq | \sqrt{x} - 1 | + | 1 - \sqrt{y} | < \varepsilon$ çıkar.) Ders boyunca sık kullanacağımız akıl yürütme biçimi budur: yerel bilgileri, örtüşen parçalar üzerinden bütüne taşımak.
Analiz 2 üç büyük başlıktan oluşuyor: **türev**, **integral** ve **seriler**. Türev, bir fonksiyonun bir noktadaki anlık değişim hızını ölçer ve limit kavramı üzerine kurulur; integral, "toplamın limiti" fikriyle alan ve birikim hesaplar; seriler ise sonsuz toplamları anlamlandırır. Üçü de Analiz 1'in limit ve süreklilik makinesini kullanır; bu yüzden yeni bir şey öğrenmeden önce, o makinenin son bir parçasını yerine oturtmamız gerekiyor.
Bu son parça, **monotonluk ile sürekliliğin ilişkisidir**. Bu bölümde şunları öğreneceğiz: bir aralıkta sürekli ve birebir olan bir fonksiyonun kesin monoton olmak zorunda olduğunu; monoton bir fonksiyonun sürekli olmasının, görüntü kümesinin aralık olmasına denk olduğunu; ve bu ikisinden çıkan çok kullanışlı sonucu: **sürekli ve kesin monoton bir fonksiyonun ters fonksiyonu da sürekli ve aynı yönde kesin monotondur.** $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, $\sqrt[n]{\cdot}$ gibi tanıdık fonksiyonların sürekliliği, tek tek ε–δ hesabı yapmadan, doğrudan bu teoremden gelecek. Bölümün sonunda tanım kümesinin aralık olması hipotezinin neden vazgeçilmez olduğunu bir karşı örnekle göreceğiz.

1.1 Kesin Monotonluk

Monoton fonksiyonu Analiz 1'de tanımlamıştık (bkz. Analiz 1): artan fonksiyonlarda $x < y$ iken $f(x) \leq f(y)$, azalanlarda $f(x) \geq f(y)$ olur. Bu bölümde ihtiyacımız olan kavram bir tık daha güçlü: eşitliğe hiç izin vermeyen monotonluk. Nedeni basit; birebirlikle ilgileneceğiz ve artan bir fonksiyon pekâlâ sabit olabilir, sabit fonksiyon ise birebir değildir.

Tanım 1.1 (Kesin Monoton Fonksiyon). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A'daki her $x < y$ çifti için

- $f(x) < f(y)$ oluyorsa f'ye **kesin artan** (strictly increasing),
- $f(x) > f(y)$ oluyorsa f'ye **kesin azalan** (strictly decreasing)

denir. Kesin artan ya da kesin azalan fonksiyonlara **kesin monoton** (strictly monotone) denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım gereği kesin artan bir fonksiyon artandır, kesin azalan bir fonksiyon azalandır; tersi doğru değildir. $\lfloor x \rfloor$ artandır ama $\lfloor 0{,}2 \rfloor = \lfloor 0{,}7 \rfloor$ olduğundan kesin artan değildir. Sabit fonksiyon hem artan hem azalandır, ama kesin monoton değildir (tanım kümesinde en az iki nokta varsa).
Kesin monotonluğun ilk ve en önemli sonucu, ispatı bir satır süren şu gözlemdir.
Kesin monoton her fonksiyon **birebirdir** (bkz. Analiz 1). Gerçekten $x \neq y$ ise ya $x < y$ ya da $y < x$'tir; f kesin artansa birinci hâlde $f(x) < f(y)$, ikinci hâlde $f(y) < f(x)$ olur, her iki durumda da $f(x) \neq f(y)$. f kesin azalansa aynı akıl yürütme eşitsizlikler ters çevrilerek yürür. Demek ki

$$f \text{ kesin monoton} \implies f \text{ birebir} .$$

Bu çıkarımın tersi genel olarak yanlıştır: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonu birebirdir (bunu görmek için $f(x) = f(y)$ ve $x \neq y$ varsayın: x, y aynı türdense $x = y$ ya da $-x = -y$ çıkar; farklı türdense $x = -y$ olur, ama x rasyonel iken $-y$ irrasyoneldir, çelişki) ama hiçbir aralıkta monoton değildir. Ancak bu fonksiyon 0 dışında hiçbir noktada sürekli değil. Bölümün ilk teoremi tam olarak şunu söyleyecek: **süreklilik ekleyince tersi de doğru olur.**

1.2 Süreklilik Birebirliği Monotonluğa Zorlar

Sezgi şöyle: sürekli bir fonksiyonun grafiği "kalem kaldırmadan" çizilir. Grafik bir noktada yükselip sonra alçalıyorsa, tepe noktasının hemen altındaki bir yatay doğruyu **iki kez** keser; ara değer teoremi bu kesişimleri garanti eder. İki kesişim ise iki farklı noktada aynı değer, yani birebirliğin ihlali demektir. Şimdi bu sezgiyi eksiksiz bir ispata çevirelim.

Teorem 1.1 (Birebirlik ve Monotonluk). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f birebir ise f kesin monotondur; yani ya kesin artandır ya da kesin azalandır.*

İspat.
I tek noktadan oluşuyorsa, tanımdaki "$x < y$ olan her çift için" koşulunu sağlayan çift bulunmadığından f boş yere hem kesin artan hem kesin azalandır ve söylenecek bir şey kalmaz. Bundan böyle I'nın en az iki noktası olduğunu varsayalım.
Adım 1: Üç nokta özelliği. *$x < y < z$, I'nın üç noktası olsun. İddiamız şu: $f(y)$ değeri, $f(x)$ ile $f(z)$ **arasındadır**; yani ya $f(x) < f(y) < f(z)$ ya da $f(z) < f(y) < f(x)$'tir.*
f birebir olduğundan $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ sayıları birbirinden farklıdır. Dolayısıyla iddia yanlışsa yalnızca iki olasılık kalır: ya $f(y) > \max\{f(x), f(z)\}$ (orta nokta bir tepe) ya da $f(y) < \min\{f(x), f(z)\}$ (orta nokta bir çukur). İkisini de ayrı ayrı çürütelim.
Birinci durum: *$f(y) > \max\{f(x), f(z)\}$. $\max\{f(x), f(z)\} < c < f(y)$ olacak biçimde bir c sayısı seçelim (iki farklı sayı arasında her zaman bir sayı vardır; örneğin ortalamaları). I bir aralık ve $x, y, z \in I$ olduğundan $[x, y] \subseteq I$ ve $[y, z] \subseteq I$'dır (bkz. Analiz 1); f bu iki kapalı aralıkta da süreklidir.*
$[x, y]$ üzerinde: $f(x) < c < f(y)$'dir, çünkü $c > \max\{f(x), f(z)\} \geq f(x)$ ve $c < f(y)$. Ara Değer Teoremi gereği $f(x_1) = c$ olan bir $x_1 \in (x, y)$ vardır.
$[y, z]$ üzerinde: $f(z) < c < f(y)$'dir, yani c sayısı $f(y)$ ile $f(z)$ arasındadır. Yine Ara Değer Teoremi gereği $f(x_2) = c$ olan bir $x_2 \in (y, z)$ vardır.
Ama $x_1 < y < x_2$ olduğundan $x_1 \neq x_2$'dir ve $f(x_1) = f(x_2) = c$'dir. Bu, f'nin birebirliğiyle çelişir.
İkinci durum: *$f(y) < \min\{f(x), f(z)\}$. Bu kez $f(y) < c < \min\{f(x), f(z)\}$ olacak biçimde bir c seçelim. $[x, y]$ üzerinde $f(y) < c < f(x)$ olduğundan Ara Değer Teoremi $f(x_1) = c$ olan bir $x_1 \in (x, y)$ verir; $[y, z]$ üzerinde $f(y) < c < f(z)$ olduğundan aynı teorem $f(x_2) = c$ olan bir $x_2 \in (y, z)$ verir. Yine $x_1 \neq x_2$ ve $f(x_1) = f(x_2)$; birebirlikle çelişki.*
Her iki durum da imkânsız olduğuna göre iddia doğrudur: $f(y)$, $f(x)$ ile $f(z)$ arasındadır.
Adım 1'in şu kullanışlı sonucunu ayrıca not edelim: $p < q < r$ noktaları I'da ve $f(p) < f(r)$ ise, $f(q)$ değeri $f(p)$ ile $f(r)$ arasında olduğundan zorunlu olarak

$$f(p) < f(q) < f(r)$$

*olur. Buna **(⋆)** diyelim.*
Adım 2: Yön seçimi. *I'nın en az iki noktası olduğundan $a < b$ olan $a, b \in I$ seçebiliriz. f birebir olduğundan $f(a) \neq f(b)$'dir. İki durum var.*

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(a) > f(b)$ ise $g = -f$ fonksiyonuna geçelim. g süreklidir (bkz. Analiz 1), birebirdir ($g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) ve $g(a) < g(b)$'dir. Aşağıda $f(a) < f(b)$ durumunda f'nin kesin artan olduğunu göstereceğiz; bunu g'ye uygularsak g kesin artan çıkar, dolayısıyla $f = -g$ kesin azalan olur. Demek ki $f(a) < f(b)$ durumunu incelemek yeterli.
Bundan böyle $a < b$, $f(a) < f(b)$ olsun. Amacımız: $u < v$ olan her $u, v \in I$ için $f(u) < f(v)$.
***Adım 3: a'nın solu ve b'nin sağı.** Önce iki yardımcı gözlem.*

1. *$x \in I$ ve $x > b$ ise $f(b) < f(x)$'tir. Gerçekten $a < b < x$ üçlüsüne Adım 1'i uygularsak $f(b)$, $f(a)$ ile $f(x)$ arasındadır. $f(a) < f(b)$ olduğundan "$f(x) < f(b) < f(a)$" seçeneği elenir; geriye $f(a) < f(b) < f(x)$ kalır.*
2. *$x \in I$ ve $x < a$ ise $f(x) < f(a)$'dır. Bu kez $x < a < b$ üçlüsüne Adım 1'i uygularız: $f(a)$, $f(x)$ ile $f(b)$ arasındadır. $f(a) < f(b)$ olduğundan $f(x) < f(a) < f(b)$ olmak zorundadır.*

***Adım 4: Genel durum.** $u < v$, I'nın iki noktası olsun. $p = \min\{a, u\}$ ve $r = \max\{b, v\}$ yazalım; $p, r \in I$'dır ve $p \le a < b \le r$ olduğundan $p < r$'dir. I bir aralık olduğundan $[p, r] \subseteq I$; ayrıca $p \le u < v \le r$'dir.*
Önce $f(p) < f(r)$ olduğunu görelim. $p = a$ ise $f(p) = f(a)$; $p < a$ ise Adım 3(2) gereği $f(p) < f(a)$. Her iki hâlde $f(p) \le f(a)$. Benzer biçimde $r = b$ ise $f(r) = f(b)$, $r > b$ ise Adım 3(1) gereği $f(r) > f(b)$; her iki hâlde $f(b) \le f(r)$. $f(a) < f(b)$ olduğundan

$$f(p) \le f(a) < f(b) \le f(r), \qquad \text{yani} \qquad f(p) < f(r).$$

Şimdi u ve v'yi $[p, r]$ içinde konumlarına göre ele alalım.

- *$p < u$ ise, $p < u < r$ üçlüsüne **(⋆)** uygulanır ($f(p) < f(r)$ olduğundan): $f(p) < f(u) < f(r)$.*
- *$p = u$ ise zaten $f(u) = f(p) < f(r)$.*

Her iki durumda da $f(u) < f(r)$ elde edildi. Şimdi v'ye bakalım.

- *$v < r$ ise, $u < v < r$ üçlüsüne **(⋆)** uygulanır ($f(u) < f(r)$ olduğundan): $f(u) < f(v) < f(r)$, özel olarak $f(u) < f(v)$.*
- *$v = r$ ise $f(v) = f(r) > f(u)$.*

Her durumda $f(u) < f(v)$'dir. $u < v$ keyfî seçildiğinden f kesin artandır ve ispat tamamlanır.
■

⚠ Tanım kümesinin aralık olması şart

Teoremdeki "I bir aralıktır" hipotezi atılamaz. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında süreklidir ve birebirdir ($\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$), ama monoton değildir: $-1 < 1$ iken $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$, oysa $1 < 2$ iken $f(1) = 1 > \frac{1}{2} = f(2)$. Fonksiyon $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ parçalarının her birinde kesin azalandır, ama bütünde hiçbir yönde monoton değildir. İspatın kilit adımı olan "$x, y \in I \Rightarrow [x, y] \subseteq I$" özelliği burada çöker: $[-1, 1]$ aralığı tanım kümesinin içinde değildir, dolayısıyla ara değer teoremi uygulanamaz.

1.3 Monoton Fonksiyonun Görüntüsü ve Süreklilik

Sürekli bir fonksiyonun bir aralığı yine bir aralığa götürdüğünü biliyoruz (bkz. Analiz 1). Bu, sürekliliğin bir sonucudur; genel olarak tersi doğru değildir — görüntüsü aralık olan süreksiz fonksiyonlar vardır. Ama fonksiyon **monoton** ise durum tam tersine döner: görüntünün aralık olması, sürekliliğe denk düşer. Nedeni sezgisel olarak açıktır: monoton bir fonksiyonun tek bozulma biçimi **sıçramadır**, sıçrama ise görüntüde bir delik açar.

Teorem 1.2 (Monoton Fonksiyonun Görüntüsü). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon olsun. O hâlde*

$$f(I) \text{ bir aralıktır} \Leftrightarrow f \text{ süreklidir} .$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
I tek noktalıysa her iki taraf da doğrudur (f o tek noktada süreklidir ve $f(I)$ tek noktalı bir aralıktır), ispat biter. I'nın en az iki noktası olduğunu varsayalım.
($\Leftarrow$) f sürekliyse $f(I)$ aralıktır. *Bu yön monotonluğu hiç kullanmaz; Sürekli Fonksiyon Aralığı Aralığa Götürür tam olarak bunu söyler: sürekli bir fonksiyon, ara değer teoremi sayesinde aldığı iki değerin arasındaki her değeri de alır.*
($\Rightarrow$) $f(I)$ aralıksa f süreklidir. *Karşıt tersini kuracağız:* ***f bir noktada süreksizse $f(I)$ aralık değildir.***
Önce yönü sabitleyelim. f azalansa $g = -f$ artandır, g ile f tam olarak aynı noktalarda süreksizdir (bkz. Analiz 1) ve $g(I) = \{-y : y \in f(I)\}$'dır. Bir küme aralıksa negatifi de aralıktır (sıralama ters çevrilir, "arada olma" özelliği korunur); dolayısıyla $g(I)$ aralık değilse $f(I)$ de aralık değildir. Demek ki f'nin ***artan*** *olduğunu varsaymak yeterli.*
f artan ve $x_0 \in I$ noktasında süreksiz olsun. x_0 ya I'nın bir iç noktasıdır ya da I'ya ait bir uç noktasıdır. İki durumu ayrı ayrı yürütelim.
Durum 1: x_0 bir iç noktadır. *Monoton Fonksiyonun Süreksizlikleri Sıçramadır gereği $f(x_0^-)$ ve $f(x_0^+)$ tek yönlü limitleri vardır ve*

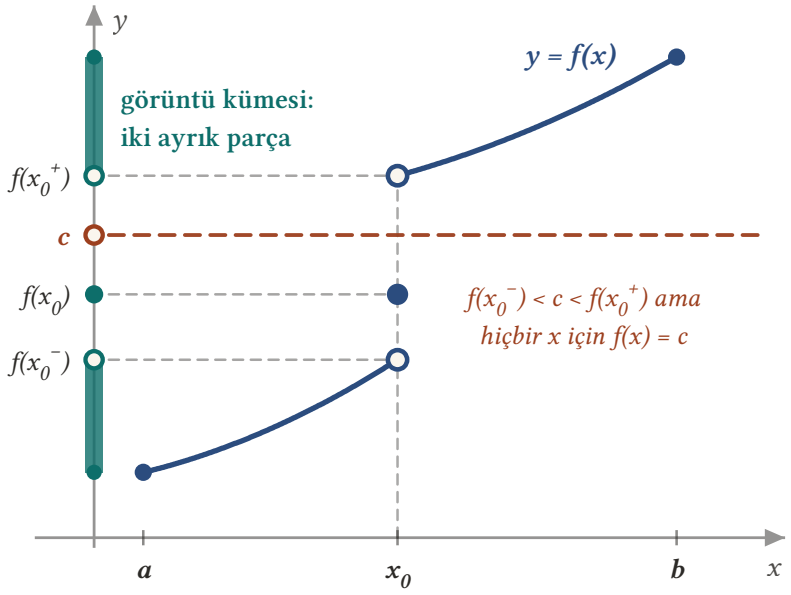
$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$$

sağlanır; ayrıca f süreksiz olduğundan $f(x_0^-) < f(x_0^+)$'dır. O hâlde ya $f(x_0^-) < f(x_0)$ ya da $f(x_0) < f(x_0^+)$ olmalıdır (ikisi birden eşit olsaydı $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ olurdu).
Birinci alt durumda $f(x_0^-) < c < f(x_0)$ olan bir c seçelim. Monoton Fonksiyonun Tek Yönlü Limitleri gereği $f(x_0^-) = \sup\{f(x) : x \in I, x < x_0\}$'dır; dolayısıyla $x < x_0$ olan her $x \in I$ için $f(x) \leq f(x_0^-) < c$'dir. Öte yandan $x \geq x_0$ olan her $x \in I$ için $f(x) \geq f(x_0) > c$'dir. Demek ki $c \notin f(I)$. Ama x_0 iç nokta olduğundan x_0'ın solunda I'nın bir x' noktası vardır ve $f(x') < c$; ayrıca $f(x_0) > c$'dir. Yani $f(I)$ kümesi c'nin hem solunda hem sağında eleman içeriyor ama c'yi içermiyor: $f(I)$ aralık değildir.
İkinci alt durumda $f(x_0) < c < f(x_0^+)$ olan bir c seçeriz. $f(x_0^+) = \inf\{f(x) : x \in I, x > x_0\}$ olduğundan $x > x_0$ olan her $x \in I$ için $f(x) \geq f(x_0^+) > c$; $x \leq x_0$ olan her x için ise $f(x) \leq f(x_0) < c$. Yine $c \notin f(I)$, ama $f(x_0) < c$ ve x_0'ın sağındaki bir x'' için $f(x'') > c$. $f(I)$ aralık değildir.
Durum 2: x_0, I'ya ait bir uç noktadır. *Önce $x_0 = \min I$ olsun; sağ uç noktası durumunu, sıralamayı ters çeviren aynı akıl yürütmeyle hemen ardından ayrıca yazacağız. I'nın en az iki noktası olduğundan x_0'ın sağında I'nın noktaları vardır. Şu kümeyi kuralım:*

$$S = \{f(x) : x \in I, x > x_0\}.$$

S boş değildir ve f artan olduğundan $f(x_0)$ sayısı S için bir alt sınırdır. Tamlık aksiyomu gereği $L = \inf S$ vardır ve $f(x_0) \leq L$'dir. Şimdi $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ olduğunu gösterelim: $\varepsilon > 0$ verilsin; $L = \inf S$ olduğundan $f(x_1) < L + \varepsilon$ olan bir $x_1 \in I$, $x_1 > x_0$ vardır (bkz. Analiz 1). $\delta = x_1 - x_0 > 0$ alalım. $x \in I$ ve $x_0 < x < x_0 + \delta = x_1$ ise f artan olduğundan $f(x) \leq f(x_1) < L + \varepsilon$; ayrıca $f(x) \in S$ olduğundan $f(x) \geq L$. Demek ki $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$; yani $f(x_0^+) = L$ (bkz. Analiz 1).
x_0 sol uç nokta olduğundan I'nın x_0 yakınındaki bütün noktaları x_0'ın sağındadır; bu yüzden f'nin x_0'da sürekli olması, tam olarak $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, yani $L = f(x_0)$ demektir. f süreksiz olduğuna göre $f(x_0) < L$'dir.
$f(x_0) < c < L$ olan bir c seçelim. $x > x_0$ olan her $x \in I$ için $f(x) \in S$, dolayısıyla $f(x) \geq L > c$; ve $f(x_0) < c$. Demek ki $c \notin f(I)$, ama $f(I)$ kümesi c'nin iki yanında da eleman içeriyor. $f(I)$ aralık değildir.
$x_0 = \max I$ durumunda $T = \{f(x) : x \in I, x < x_0\}$ kümesi boş değildir ve $f(x_0)$ ile üstten sınırlıdır; $M = \sup T$ olsun, $M \leq f(x_0)$. Yukarıdakinin aynısıyla ($\varepsilon > 0$ için $f(x_1) > M - \varepsilon$ olan $x_1 < x_0$ seçilir, Supremum için Epsilon Ölçütü; $\delta = x_0 - x_1$ alınır) $f(x_0^-) = M$ bulunur. Süreklilik $M = f(x_0)$ demek olduğundan, süreksizlik $M < f(x_0)$ verir. $M < c < f(x_0)$ seçersek $x < x_0$ olan her x için $f(x) \leq M < c$ ve $f(x_0) > c$ olur; $c \notin f(I)$, ama $f(I)$ kümesi c'nin iki yanında da eleman içerir. Yine $f(I)$ aralık değildir.
Bütün durumlarda $f(I)$ aralık olmadığından karşıt ters ispatlanmıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.1: Artan bir f'nin x_0'daki sıçraması: sol limit $f(x_0^-)$ ile sağ limit $f(x_0^+)$ vardır ama eşit değildir. Aradaki değerler — yalnız $f(x_0)$ dışında — hiç alınmaz; örneğin c seviyesindeki yatay doğru grafiği hiç kesmez. Böylece sıçrama görüntü kümesinde bir delik açar: monoton bir fonksiyonun görüntüsünün aralık olması, sürekliliğe denktir.

■

i Monotonluk hipotezi neden gerekli

Teoremin ($\Rightarrow$) yönü monotonluk olmadan çöker. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. f fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreksizdir ($f(1^-) = 1$, $f(1) = 2$), ama görüntüsü $f([0,1)) \cup f([1,2]) = [0,1) \cup [1,2] = [0,2]$, yani tam bir aralıktır. Süreksiz bir fonksiyonun görüntüsü de aralık olabilir; teoremdeki denkliği kuran şey monotonluktur.

1.4 Ters Fonksiyon Teoremi

Şimdi bölümün ana sonucuna geldik. Bir fonksiyonun tersinin var olması için birebir-örten olması gerekiyordu (bkz. Analiz 1). Buradaki soru daha ince: **ters fonksiyon sürekli midir?** Yanıt, tanım kümesi bir aralık olduğu sürece evettir ve ispatı yukarıdaki iki teoremin birleşiminden ibarettir.

Teorem 1.3 (Ters Fonksiyon Teoremi, Sürekli Sürüm). *$a < b$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin artan olsun. $A = f(a)$, $B = f(b)$ yazalım. O hâlde:*

1. *f, $[a,b]$ aralığını $[A,B]$ aralığı üzerine birebir-örten olarak eşler; yani $f([a,b]) = [A,B]$'dir.*
2. *$f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ ters fonksiyonu vardır.*
3. *f^{-1} süreklidir ve kesin artandır.*

İspat.
(1) *f kesin artan olduğundan birebirdir. $a < b$ olduğundan $A = f(a) < f(b) = B$'dir. Her $x \in [a,b]$ için $a \le x \le b$'dir; f artan olduğundan $A = f(a) \le f(x) \le f(b) = B$, yani $f([a,b]) \subseteq [A,B]$.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Ters kapsama için $y \in [A,B]$ alalım. $y = A$ ise $y = f(a)$; $y = B$ ise $y = f(b)$. $A < y < B$ ise f, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $f(a) < y < f(b)$ olduğundan Ara Değer Teoremi gereği $f(c) = y$ olan bir $c \in (a,b)$ vardır. Her üç hâlde $y \in f([a,b])$; dolayısıyla $[A,B] \subseteq f([a,b])$.
İki kapsamadan $f([a,b]) = [A,B]$ çıkar. $f : [a,b] \to [A,B]$ fonksiyonu birebirdir ve görüntüsü hedef kümenin tamamı olduğundan örtendir; yani birebir-örtendir.
***(2)** Birebir-örten olduğundan Ters Fonksiyonun Varlığı gereği $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ ters fonksiyonu vardır ve her $y \in [A,B]$ için $f^{-1}(y)$, $f(x) = y$ denklemini sağlayan tek $x \in [a,b]$ noktasıdır.*
***(3a) f^{-1} kesin artandır.** $y_1 < y_2$, $[A,B]$'nin iki noktası olsun; $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ yazalım, yani $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Üçlem yasası gereği $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$ ya da $x_1 > x_2$ olmalıdır. $x_1 = x_2$ olsaydı $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ olurdu, oysa $y_1 < y_2$. $x_1 > x_2$ olsaydı f kesin artan olduğundan $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ olurdu, yine çelişki. Geriye $x_1 < x_2$, yani $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ kalır.*
***(3b) f^{-1} süreklidir.** f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi $[A,B]$ bir aralıktır, kendisi (3a) gereği monotondur ve görüntüsü $f^{-1}([A,B]) = [a,b]$, yine bir aralıktır. Teorem 1.2'in ($\Rightarrow$) yönü tam bu durumda uygulanır ve f^{-1}'in sürekli olduğunu verir.*
***İkinci yol: doğrudan ε–δ.** Aynı sonucu teoreme başvurmadan da elde edebiliriz; bu, sürekliliğin nereden geldiğini görmek açısından öğreticidir. $y_0 \in [A,B]$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin; $x_0 = f^{-1}(y_0)$ yazalım. Şu iki sayıyı tanımlayalım:*

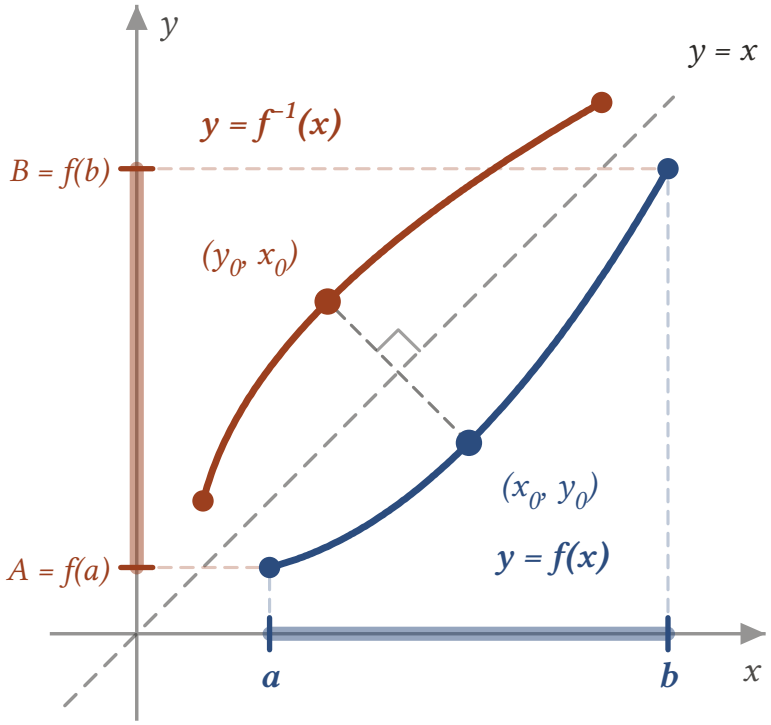
$$\alpha = \max\{a, x_0 - \varepsilon\}, \qquad \beta = \min\{b, x_0 + \varepsilon\}.$$

O hâlde $a \le \alpha \le x_0 \le \beta \le b$'dir ve $x_0 - \alpha \le \varepsilon$, $\beta - x_0 \le \varepsilon$ olur. Ayrıca $a < b$ olduğundan $\alpha < x_0$ ya da $x_0 < \beta$ (belki ikisi birden) doğrudur; gerçekten $\alpha = x_0 = \beta$ olsaydı $x_0 = a$ ve $x_0 = b$, yani $a = b$ çıkardı. Şimdi

$$\delta = \begin{cases} \min\{\, f(x_0) - f(\alpha),\, f(\beta) - f(x_0) \,\}, & \alpha < x_0 \text{ ve } x_0 < \beta, \\ f(x_0) - f(\alpha), & \alpha < x_0 = \beta, \\ f(\beta) - f(x_0), & \alpha = x_0 < \beta \end{cases}$$

alalım; bir önceki cümle gereği bu üç durumdan tam olarak biri gerçekleşir ve f kesin artan olduğundan sağ taraftaki bütün farklar pozitiftir, dolayısıyla $\delta > 0$'dır. Ayrıca $\alpha < x_0$ olan hâllerde $\delta \le f(x_0) - f(\alpha)$, $x_0 < \beta$ olan hâllerde ise $\delta \le f(\beta) - f(x_0)$ olur; aşağıda yalnızca bu iki eşitsizliği kullanacağız.
$y \in [A,B]$ ve $|\, y - y_0 \,| < \delta$ olsun; $x = f^{-1}(y)$ yazalım. Eğer $\alpha < x_0$ ise $y > y_0 - \delta \ge y_0 - (f(x_0) - f(\alpha)) = f(\alpha)$, yani $y > f(\alpha)$; f^{-1} kesin artan olduğundan $x = f^{-1}(y) > f^{-1}(f(\alpha)) = \alpha$. Eğer $\alpha = x_0$ ise zaten $x \ge a = \alpha$'dır. Her iki hâlde $x \ge \alpha$, dolayısıyla $x_0 - x \le x_0 - \alpha \le \varepsilon$. Simetrik olarak, $\beta > x_0$ ise $y < y_0 + \delta \le f(\beta)$ ve $x < \beta$; $\beta = x_0$ ise $x \le b = \beta$. Her iki hâlde $x \le \beta$, dolayısıyla $x - x_0 \le \beta - x_0 \le \varepsilon$.
İki eşitsizliği birleştirirsek $|\, f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \,| = |\, x - x_0 \,| \le \varepsilon$ olur. ε keyfî olduğundan (istenirse baştan ε yerine $\frac{\varepsilon}{2}$ ile çalışılarak katı eşitsizlik de sağlanır) f^{-1}, y_0'da süreklidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.2: Kesin artan sürekli bir f'nin grafiği ile f^{-1}'in grafiği y = x doğrusuna göre birbirinin yansımasıdır: f'nin grafiğindeki her (x_0, y_0) noktasına ters fonksiyonun grafiğindeki (y_0, x_0) noktası karşılık gelir; iki noktayı birleştiren doğru parçası köşegene diktir ve köşegen tarafından ortalanır. Yansıma büyüklük sıralamasını bozmadığından f^{-1} de kesin artandır, bir noktanın komşuluğunu yine bir komşuluğa taşıdığından süreklilik de korunur. Tanım kümesi [a, b] ile değer kümesi [A, B] = [f(a), f(b)] yalnızca yer değiştirir.

■

Kesin azalan durumu için teoremi yeniden ispatlamaya gerek yok; işaret değiştirmek yeterli.

Sonuç 1.1 (Kesin Azalan Durum). *$a < b$ ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin azalan olsun. O hâlde $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$'dır, $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$ birebir-örtendir ve $f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b]$ süreklidir ve kesin azalandır.*

İspat.
$g = -f$ olsun. g süreklidir (bkz. Analiz 1) ve kesin artandır: $x < y$ ise $f(x) > f(y)$, dolayısıyla $g(x) = -f(x) < -f(y) = g(y)$.
Teorem 1.3'i g'ye uygulayalım: $g([a, b]) = [g(a), g(b)] = [-f(a), -f(b)]$ ve $g^{-1} : [-f(a), -f(b)] \to [a, b]$ süreklidir, kesin artandır.
Şimdi $f = -g$ olduğundan

$$f([a, b]) = \{-t : t \in g([a, b])\} = \{-t : -f(a) \leq t \leq -f(b)\} = [f(b), f(a)].$$

f kesin azalan olduğundan birebirdir; görüntüsü $[f(b), f(a)]$ olduğundan $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$ birebir-örtendir ve tersi vardır.
Ters fonksiyonun formülünü bulalım. $y \in [f(b), f(a)]$ olsun. O hâlde $-y \in [-f(a), -f(b)]$, yani $g^{-1}(-y)$ tanımlıdır ve

$$f\left(\, g^{-1}(-y) \,\right) = -g\left(\, g^{-1}(-y) \,\right) = -(-y) = y.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki $f^{-1}(y) = g^{-1}(-y)$'dir; yani f^{-1}, $y \mapsto -y$ ile g^{-1} fonksiyonlarının bileşkesidir. $y \mapsto -y$ süreklidir ve g^{-1} süreklidir; bileşke süreklidir (bkz. Analiz 1). Dolayısıyla f^{-1} süreklidir.
Monotonluk yönü için $y_1 < y_2$ alalım. $-y_1 > -y_2$'dir ve g^{-1} kesin artan olduğundan $g^{-1}(-y_1) > g^{-1}(-y_2)$, yani $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. f^{-1} kesin azalandır.
■

1.5 Genel Aralıklarda Ters Fonksiyon

Kapalı ve sınırlı aralık varsayımı, yukarıdaki teoremde yalnızca görüntü kümesini $[A, B]$ biçiminde yazabilmek için işe yaradı. Açık, yarı açık ya da sonsuz aralıklarda da her şey aynı biçimde çalışır; tek fark, görüntünün uç noktalarının artık **limitlerle** belirlenmesidir. Genel ifadeyi yazalım.

Teorem 1.4 (Genelleştirilmiş Ters Fonksiyon Teoremi). *$I \subseteq \mathbb{R}$ herhangi bir aralık (açık, kapalı, yarı açık, sınırlı ya da sınırsız) ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monoton olsun. O hâlde:*

1. *$J = f(I)$ görüntü kümesi bir aralıktır.*
2. *$f : I \to J$ birebir-örtendir.*
3. *$f^{-1} : J \to I$ ters fonksiyonu vardır, süreklidir ve f ile **aynı yönde** kesin monotondur: f kesin artansa f^{-1} kesin artan, f kesin azalansa f^{-1} kesin azalandır.*

İspat.
(1) *f sürekli ve I bir aralık olduğundan Sürekli Fonksiyon Aralığı Aralığa Götürür gereği $J = f(I)$ bir aralıktır.*
(2) *f kesin monoton olduğundan birebirdir. J tanımı gereği f'nin görüntü kümesi olduğundan $f : I \to J$ örtendir. Demek ki birebir-örtendir ve Ters Fonksiyonun Varlığı gereği $f^{-1} : J \to I$ vardır.*
(3a) Monotonluk. *Önce f'nin kesin artan olduğunu varsayalım. $y_1 < y_2$, J'nin iki noktası ve $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ olsun. $x_1 = x_2$ ise $y_1 = y_2$ olurdu; $x_1 > x_2$ ise f kesin artan olduğundan $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ olurdu. Her ikisi de $y_1 < y_2$ ile çelişir; demek ki $x_1 < x_2$, yani f^{-1} kesin artandır.*
Şimdi f'nin kesin azalan olduğunu varsayalım. Yine $y_1 < y_2$ ve $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ olsun. $x_1 = x_2$ ise $y_1 = y_2$; $x_1 < x_2$ ise f kesin azalan olduğundan $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$. İkisi de çelişki verdiğinden $x_1 > x_2$, yani f^{-1} kesin azalandır.
(3b) Süreklilik. *f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi J, (1) gereği bir aralıktır; f^{-1}, (3a) gereği monotondur; görüntü kümesi ise $f^{-1}(J) = I$, yani yine bir aralıktır. Teorem 1.2'in ($\Rightarrow$) yönü doğrudan f^{-1}'in sürekli olduğunu verir.*
■

Geriye tek bir pratik soru kalıyor: $J = f(I)$ aralığının uçları nedir? Kapalı aralık durumunda yanıt $f(a)$ ve $f(b)$ idi. Genel durumda uçlar, uç noktalardaki **tek yönlü limitlerle** belirlenir; uç nokta tanım kümesine aitse limit yerine değerin kendisi alınır.

Önerme 1.1 (Görüntü Aralığının Uç Noktaları). *I, en az iki noktası olan bir aralık; $\alpha = \inf I \in [-\infty, \infty)$ ve $\beta = \sup I \in (-\infty, \infty]$ olsun (sınırsız uçlarda $\inf I = -\infty$, $\sup I = +\infty$ yazıyoruz). $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin artan olsun. Şu iki genişletilmiş reel sayıyı tanımlayalım:*

$$L = \begin{cases} f(\alpha), & \alpha \in I \\ \lim_{x \to \alpha^+} f(x), & \alpha \notin I \end{cases} \qquad M = \begin{cases} f(\beta), & \beta \in I \\ \lim_{x \to \beta^-} f(x), & \beta \notin I. \end{cases}$$

($\alpha = -\infty$ durumunda $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ yerine $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\beta = +\infty$ durumunda $\lim_{x\to\beta^-} f(x)$ yerine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ okunur.) Bu limitler genişletilmiş anlamda her zaman vardır: $L \in [-\infty, \infty)$ ve $M \in (-\infty, \infty]$. O hâlde $J = f(I)$, uçları L ve M olan aralıktır; üstelik

$$L \in J \Leftrightarrow \alpha \in I, \qquad M \in J \Leftrightarrow \beta \in I.$$

Özel olarak $I = (\alpha, \beta)$ ise

$$f\left(\ (\alpha, \beta)\ \right) = \Big(\lim_{x \to \alpha^+} f(x),\ \lim_{x \to \beta^-} f(x) \Big)$$

olur ve bu limitler $\pm\infty$ olabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$J = f(I)$ kümesi Teorem 1.4 (1) gereği bir aralıktır. Bir aralığın uçları infimumu ve supremumudur; o hâlde $\inf J = L$ ve $\sup J = M$ olduğunu, ayrıca bu değerlerin ne zaman J'ye ait olduğunu göstermek yeterlidir. Üst uçla ilgili iddiaları ispatlayalım; alt uç, bütün eşitsizlikler ters çevrilerek aynı biçimde yürür ve onu da ayrıca yazacağız.
***Durum A:** $\beta \in I$. O hâlde $\beta = \max I$'dır. Her $x \in I$ için $x \leq \beta$ ve f artan olduğundan $f(x) \leq f(\beta)$'dır. Demek ki $f(\beta) = M$, J'nin bir üst sınırıdır ve $M = f(\beta) \in J$ olduğundan $\sup J = M$ ve $M \in J$'dir.*
***Durum B:** $\beta \notin I$. Önce J'nin en büyük elemanı olmadığını gösterelim; ardından $\sup J$ ile tanımdaki M limitinin aynı sayı olduğunu.*
J'nin en büyük elemanı yoktur. Bir $f(x_0)$ değeri J'nin en büyüğü olsaydı, $x_0 \in I$ ve $x_0 < \beta = \sup I$ olduğundan $x_0 < x_1$ olan bir $x_1 \in I$ bulunurdu (aksi hâlde x_0, I için bir üst sınır olur ve $\sup I \leq x_0 < \beta$ çıkardı). f kesin artan olduğundan $f(x_1) > f(x_0)$ olurdu; bu, $f(x_0)$'ın J'nin en büyük elemanı olmasıyla çelişir. Demek ki J'nin en büyük elemanı yoktur; özel olarak $\sup J \notin J$'dir.
Şimdi $M_0 = \sup J \in (-\infty, \infty]$ yazalım (J boş olmadığından $M_0 > -\infty$'dur) ve $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = M_0$ olduğunu gösterelim; bu, tanımdaki M ile M_0'ın aynı sayı olduğunu verir.
M_0 sonluysa: $\varepsilon > 0$ verilsin. Supremum için Epsilon Ölçütü gereği $f(x_1) > M_0 - \varepsilon$ olan bir $x_1 \in I$ vardır. $\beta \notin I$ olduğundan $x_1 < \beta$'dır. $x \in I$ ve $x_1 < x < \beta$ ise f artan olduğundan $f(x) \geq f(x_1) > M_0 - \varepsilon$; ayrıca $f(x) \leq M_0$ (M_0 üst sınır) olduğundan $\mid f(x) - M_0 \mid < \varepsilon$. β sonluysa $\delta = \beta - x_1 > 0$ almak, $\beta = +\infty$ ise $K = x_1$ almak, sırasıyla $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = M_0$ ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = M_0$ tanımlarını sağlar.
$M_0 = +\infty$ ise: $K \in \mathbb{R}$ verilsin. J üstten sınırsız olduğundan $f(x_1) > K$ olan bir $x_1 \in I$ vardır ve $x_1 < \beta$'dır. $x \in I$, $x_1 < x < \beta$ için $f(x) \geq f(x_1) > K$'dır. Bu, β sonluysa $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$, $\beta = +\infty$ ise $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ demektir (bkz. Analiz 1, Sonsuzdaki Limit).
Her iki hâlde de $M = M_0 = \sup J$ bulunur; J'nin en büyük elemanı olmadığını yukarıda gösterdiğimizden $M \notin J$'dir.
***Alt uç.** $\alpha \in I$ ise $\alpha = \min I$'dır ve her $x \in I$ için $f(\alpha) \leq f(x)$ olduğundan $L = f(\alpha) = \min J = \inf J \in J$'dir. $\alpha \notin I$ ise, $L_0 = \inf J$ yazalım; L_0 bir $f(x_0)$ değerine eşit olsaydı $x_0 > \alpha = \inf I$ olduğundan $x_1 < x_0$ olan bir $x_1 \in I$ bulunur ve $f(x_1) < f(x_0) = L_0$ çıkardı, çelişki. Yani $\inf J$ alınmaz. Limit hesabı da simetriktir: L_0 sonluysa, $\varepsilon > 0$ için İnfimum için Epsilon Ölçütü gereği $f(x_1) < L_0 + \varepsilon$ olan bir $x_1 \in I$, $x_1 > \alpha$ vardır ve $\alpha < x < x_1$ olan her $x \in I$ için $L_0 \leq f(x) \leq f(x_1) < L_0 + \varepsilon$ olur; $L_0 = -\infty$ ise her K için $f(x_1) < K$ olan bir x_1 bulunur ve $\alpha < x < x_1$ için $f(x) < K$ olur. Böylece $L = L_0 = \inf J$ ve $L \notin J$.*
***Sonuç.** J bir aralık, $\inf J = L$, $\sup J = M$'dir; ayrıca $L \in J$ olması ancak ve ancak $\alpha \in I$ olmasıyla, $M \in J$ olması ancak ve ancak $\beta \in I$ olmasıyla gerçekleşir. Bir aralık için $(L, M) \subseteq J \subseteq [L, M]$ olduğundan ($L < y < M$ ise $\inf J < y$ ve $\sup J > y$ olduğundan J'de y'nin iki yanında eleman vardır, aralık olma özelliği $y \in J$ verir), J tam olarak uçları L ve M olan, uçları yukarıdaki ölçüte göre içeren ya da içermeyen aralıktır.*
■

Kesin azalan durum

f kesin azalansa aynı sonuç $g = -f$'ye uygulanarak elde edilir; yalnızca uçlar yer değiştirir. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin azalansa

$$f\left(\ (\alpha, \beta)\ \right) = \left(\lim_{x\to\beta^-} f(x),\ \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \right)$$

olur: sol uçtaki limit görüntünün **sağ** ucunu, sağ uçtaki limit ise **sol** ucunu verir.

Teoremi bir hesapta çalıştıralım.

Örnek 1.1 (Bir Polinomun Görüntü Kümesi). $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x + 3$ olsun. f'nin görüntü kümesini bulun ve f^{-1}'in sürekli olduğunu gösterin.

Çözüm.
Süreklilik. f bir polinomdur, dolayısıyla $\mathbb{R}$'de, özel olarak $[0, \infty)$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1).
Kesin artanlık. $0 \leq x < y$ olsun. Bir yandan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y^4 - x^4 = (y-x)(y^3 + y^2x + yx^2 + x^3) > 0$$

olur: $y - x > 0$'dır ve parantez içindeki dört terimin hepsi negatif değildir ($x, y \geq 0$), üstelik $y > x \geq 0$ olduğundan $y > 0$ ve $y^3 > 0$'dır, yani parantez kesin pozitiftir. Öte yandan $2x < 2y$'dir. İkisini toplarsak

$$f(x) = x^4 + 2x + 3 < y^4 + 2y + 3 = f(y).$$

Demek ki f, $[0, \infty)$ üzerinde kesin artandır.
Uç noktalar. Tanım kümesi $I = [0, \infty)$ için $\alpha = 0 \in I$ ve $\beta = +\infty \notin I$'dır. Önerme 1.1 gereği

$$L = f(0) = 0 + 0 + 3 = 3, \qquad M = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Bu limiti hesaplayalım: $x \geq 0$ için $x^4 \geq 0$ olduğundan $f(x) \geq 2x + 3$'tür. Verilen bir K için $x > \frac{K}{2}$ alırsak $f(x) \geq 2x + 3 > K + 3 > K$ olur; dolayısıyla $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, yani $M = +\infty$.
Görüntü. Alt uç tanım kümesine ait, üst uç değil; Önerme 1.1 gereği

$$f\ (\ [0, \infty)\ ) = [3, \infty).$$

Ters fonksiyon. $f : [0, \infty) \to [3, \infty)$ sürekli ve kesin monoton olduğundan Teorem 1.4 gereği birebir-örtendir; $f^{-1} : [3, \infty) \to [0, \infty)$ vardır, süreklidir ve kesin artandır. Bu ters fonksiyonun kapalı bir formülü yoktur (dördüncü dereceden bir denklemin kökü olarak yazılabilir ama pratik değildir); yine de varlığı, sürekliliği ve monotonluğu elimizdedir. Örneğin $f(1) = 1 + 2 + 3 = 6$ olduğundan $f^{-1}(6) = 1$'dir ve $x^4 + 2x + 3 = 6$ denkleminin $[0, \infty)$'daki tek çözümü $x = 1$'dir.
■

Şimdi teoremin en çok kullanılan uygulamasına gelelim: ters trigonometrik fonksiyonların sürekliliği.

Örnek 1.2 (Ters Trigonometrik Fonksiyonların Sürekliliği). arcsin, arccos ve arctan fonksiyonlarının tanımlı ve sürekli olduğunu gösterin.

Çözüm.
arcsin. sin fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1), ama birebir değildir; bu yüzden onu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlarız (bkz. Analiz 1). Bu kısıtlamanın kesin artan olduğunu gösterelim: $-\frac{\pi}{2} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$ olsun. Sinüs farkı özdeşliğinden

$$\sin y - \sin x = 2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\left(\frac{y+x}{2}\right).$$

Burada $0 < \frac{y-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\sin(\frac{y-x}{2}) > 0$'dır. Ayrıca $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$'dir ve uçlara eşitlik ancak $x = y = \pm\frac{\pi}{2}$ olursa gerçekleşir, oysa $x < y$'dir; dolayısıyla $-\frac{\pi}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2}$ ve $\cos(\frac{x+y}{2}) > 0$'dır. İki pozitif çarpanın çarpımı pozitif olduğundan $\sin y > \sin x$.
O hâlde $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin artandır. Teorem 1.3 gereği görüntüsü

$$\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$$

aralığıdır, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ birebir-örtendir ve ters fonksiyonu

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

sürekli ve kesin artandır. Tek satırlık bir ε–δ hesabı bile yapmadık.
arccos. cos fonksiyonunu $[0, \pi]$ aralığına kısıtlayalım. $0 \leq x < y \leq \pi$ için kosinüs farkı özdeşliği

$$\cos y - \cos x = -2 \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

verir. $0 < \frac{y-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ olduğundan ikinci sinüs pozitiftir; $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi$ ve uçlara eşitlik ancak $x = y = 0$ ya da $x = y = \pi$ olursa gerçekleşeceğinden $0 < \frac{x+y}{2} < \pi$ ve birinci sinüs de pozitiftir. Baştaki eksi işaretiyle birlikte $\cos y - \cos x < 0$, yani cos bu aralıkta kesin azalandır. Sonuç 1.1 gereği görüntü $[\cos \pi, \cos 0] = [-1, 1]$'dir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

sürekli ve kesin azalandır.

arctan. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ fonksiyonu, $\cos x \neq 0$ olan her noktada süreklidir (bkz. Analiz 1); özel olarak $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ açık aralığında süreklidir, çünkü orada $\cos x > 0$'dır. Kesin artanlığı gösterelim: $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$ olsun. Ortak paydada topladığımızda

$$\tan y - \tan x = \frac{\sin y \cos x - \cos y \sin x}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(y-x)}{\cos x \cos y}$$

buluruz. Payda pozitiftir ($\cos x, \cos y > 0$); pay da pozitiftir, çünkü $0 < y - x < \pi$'dir. Demek ki $\tan y > \tan x$.

Uç noktalardaki limitleri hesaplayalım. $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ iken $\sin x \to 1$ ve $\cos x \to 0$ olur, üstelik $\cos x > 0$'dır; dolayısıyla $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to +\infty$. Açıkça: verilen $K > 0$ için, sin ve cos sürekli olduğundan $\frac{\pi}{2}$'ye yeterince yakın $x < \frac{\pi}{2}$ noktalarında $\sin x > \frac{1}{2}$ ve $0 < \cos x < \frac{1}{2K}$ sağlanır; bu x'ler için $\tan x > \frac{1/2}{1/(2K)} = K$ olur. Simetrik biçimde $x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$ iken $\sin x \to -1$, $\cos x \to 0^+$ ve $\tan x \to -\infty$ olur (tan tek bir fonksiyondur: $\tan(-x) = -\tan x$, bu yüzden sol uçtaki limit sağ uçtakinin negatifidir).

Önerme 1.1 gereği

$$\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Demek ki $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ sürekli, kesin artan ve birebir-örtendir. Teorem 1.4 gereği

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

vardır, süreklidir ve kesin artandır.

Aynı yöntem $\sqrt[n]{\cdot}$ fonksiyonlarına da uygulanır: n tek ise $x \mapsto x^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve kesin artandır, görüntüsü $\mathbb{R}$'dir, dolayısıyla $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ süreklidir; n çift ise $x \mapsto x^n$, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ve kesin artandır, görüntüsü $[0,\infty)$'dur ve $\sqrt[n]{\cdot} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ süreklidir.

■

1.6 Tanım Kümesi Aralık Değilse

Bütün bu teoremlerde tanım kümesinin **aralık** olduğunu varsaydık. Bu varsayım süslemeden ibaret değildir: kaldırıldığında sonuç gerçekten bozulur. Sürekli ve birebir bir fonksiyonun tersi, tanım kümesi aralık değilse sürekli olmayabilir.

⚠ Hipotez vazgeçilmezdir

"Sürekli birebir fonksiyonun tersi süreklidir" cümlesi **tanım kümesi aralık olmadan yanlıştır.** Aşağıdaki örnekte tanım kümesi iki parçadan oluşur; fonksiyon her noktasında sürekli, kesin artan ve görüntü kümesi üzerine örtendir — buna karşın ters fonksiyon bir noktada sıçrar.

Örnek 1.3 (Tersi Sürekli Olmayan Sürekli Birebir Fonksiyon). $D = [0,1) \cup [2,3]$ olsun ve $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. f'nin sürekli, kesin artan ve $[0,2]$ üzerine birebir-örten olduğunu; buna karşın f^{-1}'in $y = 1$ noktasında sürekli olmadığını gösterin.

Çözüm.

Görüntü kümesi. $x \in [0,1)$ için $f(x) = x$ değerleri $[0,1)$ aralığını taradığından $f([0,1)) = [0,1)$'dir. $x \in [2,3]$ için $f(x) = x - 1$ değerleri $[1,2]$ aralığını taradığından $f([2,3]) = [1,2]$'dir. İki görüntü ayrıktır ve birleşimleri

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(D) = [0,1) \cup [1,2] = [0,2]$$

olur. Görüntü kümesi tam bir aralıktır.
Birebirlik ve kesin artanlık. $x < y$ olan iki nokta alalım. Üç olasılık var. İkisi de $[0,1)$'deyse $f(x) = x < y = f(y)$. İkisi de $[2,3]$'teyse $f(x) = x - 1 < y - 1 = f(y)$. $x \in [0,1)$ ve $y \in [2,3]$ ise $f(x) = x < 1$ ve $f(y) = y - 1 \geq 1$, dolayısıyla $f(x) < f(y)$. Her durumda $f(x) < f(y)$; f kesin artandır, dolayısıyla birebirdir. Görüntüsü $[0,2]$ olduğundan $f : D \to [0,2]$ birebir-örtendir.
Süreklilik. $x_0 \in [0,1)$ olsun. $r = 1 - x_0 > 0$ alırsak $(x_0 - r, x_0 + r) \cap D \subseteq [0,1)$ olur ve bu komşulukta f, birim fonksiyonla çakışır; birim fonksiyon sürekli olduğundan ve süreklilik yerel bir özellik olduğundan (bkz. Analiz 1) f, x_0'da süreklidir. Aynı biçimde $x_0 \in [2,3]$ için $r = 1$ alırsak $(x_0 - 1, x_0 + 1) \cap D \subseteq [2,3]$ olur ve orada $f(x) = x - 1$'dir; bu da süreklidir. Demek ki f, D'nin her noktasında süreklidir.
Ters fonksiyon. $f^{-1} : [0,2] \to D$ fonksiyonunu açıkça yazalım. $y \in [0,1)$ ise $y = f(y)$ ve $y \in D$ olduğundan $f^{-1}(y) = y$'dir. $y \in [1,2]$ ise $y = f(y+1)$ ve $y + 1 \in [2,3]$ olduğundan $f^{-1}(y) = y + 1$'dir. Yani

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y < 1 \\ y + 1, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Süreksizlik. $y_0 = 1$ noktasına bakalım: $f^{-1}(1) = 2$'dir. Soldan yaklaşalım: $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ dizisi $[0,1)$ içindedir ve $y_n \to 1$'dir, ama

$$f^{-1}(y_n) = y_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \neq 2 = f^{-1}(1).$$

Süreklilik için Dizisel Ölçüt gereği f^{-1}, $y_0 = 1$ noktasında süreksizdir. Süreksizlik bir sıçramadır: $f^{-1}(1^-) = 1$, $f^{-1}(1) = f^{-1}(1^+) = 2$.
Neden bozuldu? f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi $[0,2]$ bir aralıktır ve f^{-1} monotondur (kesin artan); ama görüntü kümesi $f^{-1}([0,2]) = D = [0,1) \cup [2,3]$ bir aralık **değildir**. Teorem 1.2'e göre bu durumda f^{-1}'in süreksiz olması zorunludur. Teoremimiz burada da doğruyu söylüyor; yalnızca f'nin tanım kümesi aralık olmadığı için Teorem 1.4 uygulanamıyor.
■

i Tanım kümesi kompaktsa sorun yok

Yukarıdaki $D = [0,1) \cup [2,3]$ kümesi kapalı değildir, dolayısıyla kompakt değildir (bkz. Analiz 1). Bu bir rastlantı değil: tanım kümesi kompakt olduğunda, aralık olmasa bile sürekli bir birebir fonksiyonun tersi süreklidir. Bunu bölüm sonundaki alıştırmada ispatlayacağız.

1.7 Monoton Fonksiyonların Süreksizlikleri

Bölümü, monoton fonksiyonların ne kadar "uslu" olduğunu söyleyen iki olguyu hatırlatarak kapatalım. İkisini de Analiz 1'de ispatladık; burada yalnızca ifade edip nerede ispatlandıklarını belirtiyoruz, çünkü bu bölümdeki teoremlerin arkasındaki sezgiyi tamamlıyorlar: monoton bir fonksiyon bozulduğunda ancak **sıçrayarak** bozulur ve bunu ancak **seyrek** noktalarda yapabilir.

Önerme 1.2 (Monoton Fonksiyonun Süreksizlikleri). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ monoton olsun.*

1. *f, I'nın bir x_0 iç noktasında süreksizse bu süreksizlik **birinci türdendir**, yani bir **sıçrama süreksizliğidir**: $f(x_0^-)$ ve $f(x_0^+)$ tek yönlü limitlerinin ikisi de vardır ve birbirinden farklıdır. Monoton bir fonksiyonda ikinci tür süreksizlik (sonsuz limit ya da salınım) hiçbir zaman görülmez.*
2. *f'nin süreksiz olduğu noktaların kümesi **en çok sayılabilirdir**; yani bu noktalar $d_1, d_2, d_3, \ldots$ biçiminde listelenebilir. Monoton bir fonksiyon, örneğin $(0,1)$ gibi bir aralığın tamamında süreksiz olamaz.*

Birinci madde Monoton Fonksiyonun Süreksizlikleri Sıçramadır olarak, ikincisi Monoton Fonksiyonun Süreksizlikleri En Çok Sayılabilirdir olarak ispatlanmıştı; süreksizlik türlerinin sınıflandırması için sürek-

sizlik çeşitleri tanımına bakılabilir. Birinci maddenin arkasındaki mekanizmayı Teorem 1.2'in ispatında bir kez daha kullandık: sıçrayan bir monoton fonksiyonun atladığı $\left(f(x_0^-), f(x_0^+) \right)$ aralığı, görüntü kümesinde bir delik açar. İkinci madde ise bu deliklerin birbirini "itmesinden" gelir: artan bir fonksiyonda farklı sıçrama noktalarına karşılık gelen açık aralıklar ayrıktır ve her birinde bir rasyonel sayı seçilebilir; rasyoneller sayılabilir olduğundan (bkz. Analiz 1) sıçrama noktaları da sayılabilir çokluktadır.
Bu iki olgunun pratik değeri büyüktür. Örneğin monoton bir fonksiyonun grafiği "her yerde bozuk" olamaz; ileride integral kuramında monoton fonksiyonların **her zaman** integrallenebilir olduğunu göreceğiz ve ispatın kilit noktası tam olarak bu düzenliliktir.

1.8 Alıştırmalar

Alıştırma 1.1 (Monotonluk ve Ters Fonksiyon Üzerine). a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + |\,x\,|}$ olsun. f'nin sürekli ve kesin artan olduğunu gösterin, görüntü kümesini bulun ve f^{-1}'i açıkça yazın.
b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ olsun. f'nin kesin azalan olduğunu türev kullanmadan gösterin, görüntü kümesini bulun ve f^{-1}'in sürekli olduğunu söyleyin.
c) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ olsun. g'nin birebir olmadığını gösterin. g'nin $[1, \infty)$'a kısıtlamasının kesin artan olduğunu ispatlayın, görüntü kümesini bulun ve ters fonksiyonu açıkça yazın.
d) Teorem 1.1'daki "tanım kümesi bir aralıktır" hipotezinin gerekli olduğunu, $[0, 1] \cup [2, 3]$ üzerinde tanımlı sürekli, birebir ama monoton olmayan bir fonksiyon kurarak gösterin.
e) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ $(0 \le x \le \frac{1}{2})$ ve $f(x) = x + 1$ $(\frac{1}{2} < x \le 1)$ olsun. f'nin artan olduğunu, görüntü kümesinin bir aralık olmadığını gösterin ve bunun Teorem 1.2 ile nasıl uyuştuğunu açıklayın.
f) $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt bir küme, $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli ve birebir olsun. $f^{-1} : f(K) \to K$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ispatlayın. (K'nın aralık olması istenmiyor.)

Çözüm.
a) *Süreklilik.* $x \mapsto |\,x\,|$ süreklidir (bkz. Analiz 1); sabit fonksiyonla toplamı $1 + |\,x\,|$ süreklidir ve hiçbir noktada sıfır değildir ($1 + |\,x\,| \ge 1$). Bölüm kuralı (bkz. Analiz 1) gereği f süreklidir.
Kesin artanlık. $x < y$ olsun. Üç durum inceleyelim.
Eğer $0 \le x < y$ ise $|\,x\,| = x, |\,y\,| = y$'dir ve

$$f(y) - f(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y - x}{(1+x)(1+y)} > 0.$$

Eğer $x < y \le 0$ ise $|\,x\,| = -x, |\,y\,| = -y$'dir ve

$$f(y) - f(x) = \frac{y}{1-y} - \frac{x}{1-x} = \frac{y(1-x) - x(1-y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{y - x}{(1-x)(1-y)} > 0$$

(paydadaki iki çarpan da ≥ 1'dir). Eğer $x < 0 < y$ ise $f(x) = \frac{x}{1-x} < 0 < \frac{y}{1+y} = f(y)$'dir. Her durumda $f(x) < f(y)$.
Görüntü. $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ için $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$'dur ve ikisi de I'ya ait değildir. $x > 0$ için $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ olduğundan $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$; $x < 0$ için $f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$ olduğundan $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Önerme 1.1 gereği $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$'dir.
Ters fonksiyon. $y \in (0, 1)$ olsun. $f(x) = y$ denkleminin çözümü pozitif bir x olmalıdır (çünkü f pozitif değerleri yalnızca pozitif noktalarda alır), yani $\frac{x}{1+x} = y$, buradan $x = y + yx$ ve $x(1 - y) = y$, yani $x = \frac{y}{1-y}$. $y \in (-1, 0)$ ise çözüm negatiftir: $\frac{x}{1-x} = y$, buradan $x = y - yx$ ve $x(1 + y) = y$, yani $x = \frac{y}{1+y}$. $y = 0$ için $x = 0$'dır. Üç durumu tek formülde toplarsak

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |\,y\,|}, \qquad y \in (-1, 1).$$

Teorem 1.4 gereği f^{-1} sürekli ve kesin artandır; formülden de doğrudan görülür.
b) $-1 \le x < y \le 1$ olsun. Çarpanlara ayıralım:

$$f(y) - f(x) = (y^3 - x^3) - 3(y - x) = (y - x)\left(y^2 + xy + x^2 - 3 \right).$$

Burada $y - x > 0$'dır. İkinci çarpanı inceleyelim: $|\,x\,| \le 1$ ve $|\,y\,| \le 1$ olduğundan $x^2 \le 1$, $y^2 \le 1$ ve $xy \le |\,x\,|\,|\,y\,| \le 1$'dir, dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y^2 + xy + x^2 \leq 3.$$

Eşitlik ancak $x^2 = 1$, $y^2 = 1$ ve $xy = 1$ olduğunda gerçekleşir; bu da $x = y = 1$ ya da $x = y = -1$ demektir ve $x < y$ olduğundan imkânsızdır. Demek ki $y^2 + xy + x^2 - 3 < 0$ ve $f(y) - f(x) < 0$; yani f kesin azalandır.
f bir polinom olduğundan süreklidir (bkz. Analiz 1). $f(-1) = -1 + 3 = 2$ ve $f(1) = 1 - 3 = -2$'dir. Sonuç 1.1 gereği

$$f([-1, 1]) = [f(1), f(-1)] = [-2, 2]$$

ve $f^{-1} : [-2, 2] \to [-1, 1]$ süreklidir, kesin azalandır.
c) *Birebir değil.* $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ ve $g(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$'dir. $\frac{1}{2} \neq 2$ olduğundan g birebir değildir. (Genel olarak her $x > 0$ için $g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$'tir.)
Kısıtlamanın kesin artanlığı. $1 \leq x < y$ olsun.

$$g(y) - g(x) = (y - x) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = (y - x) - \frac{y - x}{xy} = (y - x) \cdot \frac{xy - 1}{xy}.$$

$x \geq 1$ ve $y > x \geq 1$ olduğundan $xy > 1$, dolayısıyla $\frac{xy-1}{xy} > 0$'dır; $y - x > 0$ olduğundan $g(y) > g(x)$.
Görüntü. g, $[1, \infty)$ üzerinde süreklidir ($x \neq 0$ olduğundan bölüm kuralı geçerlidir, Sürekli Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler). $\alpha = 1 \in [1, \infty)$ olduğundan alt uç $g(1) = 2$'dir. Üst uç için $g(x) \geq x$ olduğundan $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$'dur. Önerme 1.1 gereği $g([1, \infty)) = [2, \infty)$.
Ters fonksiyon. $y \geq 2$ için $x + \frac{1}{x} = y$ denklemini çözelim. $x > 0$ olduğundan x ile çarpabiliriz: $x^2 - yx + 1 = 0$, yani

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

$y \geq 2$ olduğundan karekök tanımlıdır. İki kökün çarpımı 1 olduğundan biri ≤ 1, öteki ≥ 1'dir; $[1, \infty)$'daki çözümü istediğimizden artı işaretli kökü alırız:

$$g^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}, \qquad y \in [2, \infty).$$

Denetim: $y = 2$ için $g^{-1}(2) = 1$ ve gerçekten $g(1) = 2$'dir. Teorem 1.4 gereği g^{-1} sürekli ve kesin artandır.
d) $D = [0, 1] \cup [2, 3]$ ve $h : D \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 5 - x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

olsun. $h([0, 1]) = [0, 1]$ ve $h([2, 3]) = [2, 3]$'tür; iki görüntü ayrık olduğundan ve h her parçada kesin monoton (birinci parçada artan, ikincisinde azalan), dolayısıyla birebir olduğundan h birebirdir. h süreklidir: her $x_0 \in [0, 1]$ noktasının D içindeki küçük bir komşuluğu $[0, 1]$'in içinde kalır ve orada $h(x) = x$'tir; her $x_0 \in [2, 3]$ noktasının D içindeki küçük bir komşuluğu $[2, 3]$'ün içinde kalır ve orada $h(x) = 5 - x$'tir; ikisi de sürekli fonksiyonlardır ve süreklilik yerel bir özelliktir (bkz. Analiz 1).
Buna karşın h monoton değildir: $0 < 1$ ve $h(0) = 0 < 1 = h(1)$ olduğundan azalan olamaz; $2 < 3$ ve $h(2) = 3 > 2 = h(3)$ olduğundan artan da olamaz. Demek ki Teorem 1.1'un sonucu burada geçerli değildir; tek bozulan hipotez tanım kümesinin aralık olmamasıdır. (Nedeni açıktır: $[1, 2] \not\subseteq D$ olduğundan h'nin "aradaki değerleri alma" zorunluluğu yoktur; h, $(1, 2)$ aralığındaki hiçbir değeri almaz.)
e) *Artanlık.* $x < y$ olsun. İkisi de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$'deyse $f(x) = x < y = f(y)$. İkisi de $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$'deyse $f(x) = x + 1 < y + 1 = f(y)$. $x \leq \frac{1}{2} < y$ ise $f(x) = x \leq \frac{1}{2}$ ve $f(y) = y + 1 > \frac{3}{2}$, yani $f(x) < f(y)$. Demek ki f kesin artandır (özel olarak artandır).
Görüntü. $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $f\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right]$'dir. O hâlde

$$f([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right].$$

Bu küme bir aralık değildir: $\frac{1}{2}$ ile 2 kümededir, ama aralarındaki 1 sayısı kümede değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Uyum. Teorem 1.2, monoton bir fonksiyon için "görüntü aralıktır $\Leftrightarrow$ fonksiyon süreklidir" der. Burada görüntü aralık olmadığına göre f süreksiz olmalıdır — ve gerçekten öyledir: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ iken $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{+}\right) = \lim_{x\to(1/2)^{+}}(x+1) = \frac{3}{2}$'dir, yani $x_0 = \frac{1}{2}$ noktasında $\frac{1}{2}$'den $\frac{3}{2}$'ye bir sıçrama vardır. Bu, Önerme 1.2 ile de uyumludur: süreksizlik birinci türdendir ve tektir, dolayısıyla süreksizlik kümesi sonludur. Fonksiyon $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ parçalarının her birinde süreklidir; sorun yalnızca birleşme noktasındadır.
f) f^{-1} fonksiyonunun bir $y_0 \in f(K)$ noktasında sürekli olduğunu, dizisel ölçütle (bkz. Analiz 1) gösterelim: $f(K)$ içinde $y_n \to y_0$ olan her dizi için $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$ olduğunu ispatlamalıyız.
$x_n = f^{-1}(y_n)$ ve $x_0 = f^{-1}(y_0)$ yazalım; bunlar K'nın noktalarıdır ve $f(x_n) = y_n$, $f(x_0) = y_0$'dır. Aksine, $x_n \to x_0$ olmadığını varsayalım. O hâlde öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ ve öyle bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır ki her k için

$$| \, x_{n_k} - x_0 \, | \geq \varepsilon_0.$$

K kompakt olduğundan sınırlıdır (bkz. Analiz 1); dolayısıyla (x_{n_k}) sınırlı bir dizidir ve Bolzano–Weierstrass teoremi (bkz. Analiz 1) gereği yakınsak bir $(x_{n_{k_j}})$ alt dizisi vardır; limitine z diyelim. K kompakt olduğundan kapalıdır (bkz. Analiz 1) ve $x_{n_{k_j}} \in K$ olduğundan $z \in K$'dır.
Bir yandan, $| \, x_{n_{k_j}} - x_0 \, | \geq \varepsilon_0$ eşitsizliğinde limit alırsak $| \, z - x_0 \, | \geq \varepsilon_0 > 0$, yani $z \neq x_0$ buluruz.
Öte yandan, f sürekli olduğundan (yine Süreklilik için Dizisel Ölçüt) $f(x_{n_{k_j}}) \to f(z)$'dir. Ama $f(x_{n_{k_j}}) = y_{n_{k_j}}$ ve (y_n) dizisi y_0'a yakınsadığından her alt dizisi de y_0'a yakınsar; dolayısıyla $f(z) = y_0 = f(x_0)$.
f birebir olduğundan $f(z) = f(x_0)$ eşitliği $z = x_0$ verir; bu, $z \neq x_0$ ile çelişir. Demek ki varsayımımız yanlıştı ve $x_n \to x_0$'dır. Yani $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$; y_0 keyfî olduğundan f^{-1} süreklidir.
Bu sonuç, Örnek 1.3 örneğinin neden mümkün olduğunu da açıklar: orada $D = [0,1) \cup [2,3]$ kümesi kapalı değildi, dolayısıyla kompakt değildi.
■

Artık elimizde sürekliliğin bütün temel araçları ve ters fonksiyonların düzenli davrandığını söyleyen bir teorem var. Bir sonraki bölümde asıl konuya, bir fonksiyonun bir noktadaki anlık değişimini ölçen kavrama geçiyoruz: Türev Kavramı.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Türev Kavramı

Önceki bölümde monoton fonksiyonların ne kadar düzenli davrandığını gördük: süreksizlikleri yalnızca sıçrama türünden olabiliyor, sayıları en çok sayılabilir kalıyor ve sürekli bir monoton fonksiyonun tersi yine sürekli oluyordu. Bütün bu sonuçların ortak aracı limitti. Şimdi limit kavramını bambaşka bir soruyu yanıtlamak için kullanacağız: bir fonksiyon bir noktada **ne hızla** değişiyor?

Ortalama hız kolay bir kavramdır. x_0 ile x arasında fonksiyonun değeri $f(x) - f(x_0)$ kadar değişir, girdi ise $x - x_0$ kadar; bunların oranı, bu aralıktaki ortalama değişimi verir. Ama "x_0 anındaki hız" dediğimizde bir zorlukla karşılaşırız: tek bir noktada değişim de sıfırdır, aralık da sıfırdır ve $\frac{0}{0}$ bir sayı değildir. İşte limit tam da bu tıkanıklığı aşmak için vardır. Ortalama değişim oranını $x \to x_0$ limitine götürüp elde ettiğimiz sayıya **türev** (derivative) diyeceğiz.

Türevin geometrik karşılığı da aynı ölçüde önemlidir. Eğri üzerindeki iki noktayı birleştiren doğruya **kesen** (secant), bu noktalardan biri diğerine yaklaştığında kesenlerin yaklaştığı doğruya **teğet** (tangent) denir. Türev, teğetin eğimidir; teğet doğrusu ise fonksiyonun x_0 civarındaki **en iyi doğrusal yaklaşımıdır**. Bu iki cümle, sonraki bütün bölümlerin — ortalama değer teoremlerinin, Taylor formülünün, ekstremum testlerinin — arkasındaki sezgiyi taşır.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: fark oranının tanımı ve kesen doğrusuyla ilişkisi; bir noktada türevin limit tanımı ve buna denk ε–δ ifadesi; teğet doğrusu, doğrusallaştırma ve yaklaşık hesap; türevin var olmadığı iki tipik geometrik durum (düşey teğet ve köşe); türev için kullanılan dört klasik gösterim; tek yönlü türevler ve türevin varlığının bunlara denkliği; türev için dizisel ölçüt ve onunla türevsizlik gösterme tekniği; son olarak, sonsuz kez salınmasına rağmen bir noktada türevlenebilen — ama türevi orada sürekli olmayan — bir fonksiyon.

2.1 Fark Oranı

Türevi tanımlamadan önce, değişimi ölçen niceliği adlandıralım. Aşağıdaki tanımda I'nin açık olmasını istememizin nedeni, x_0'ın etrafında her iki yönde de fonksiyonun tanımlı olmasını garantilemektir; böylece x_0, $I \setminus \{x_0\}$ kümesinin bir yığılma noktası olur (bkz. Analiz 1, Yığılma Noktası) ve limit almak anlamlı hâle gelir.

Tanım 2.1 (Fark Oranı ya da Newton Oranı). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in I$ sabit bir nokta olsun. Her $x \in I$, $x \neq x_0$ için

$$\varphi_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **fark oranı** (difference quotient) ya da **Newton oranı** (Newton quotient) denir. φ_{x_0}, $I \setminus \{x_0\}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Fark oranının iki okuması vardır ve ikisi de bölüm boyunca kullanılacaktır.

Fiziksel okuma. $f(t)$, bir cismin t anındaki konumu ise $\varphi_{t_0}(t)$, $[t_0, t]$ zaman aralığındaki **ortalama hızdır**: alınan yolun geçen zamana oranı. $t \to t_0$ limiti, "anlık hız" dediğimiz şeyin tam tanımıdır.

Geometrik okuma. $(x_0, f(x_0))$ ve $(x, f(x))$ noktalarından geçen doğruya f'nin **kesen doğrusu** denir. İki noktadan geçen doğrunun eğimi, ordinat farkının apsis farkına oranıdır; yani $\varphi_{x_0}(x)$ tam olarak bu kesenin eğimidir. Kesen doğrusunun denklemi

$$y = f(x_0) + \varphi_{x_0}(x)\,(t - x_0)$$

biçimindedir (burada t, doğru üzerindeki değişken apsistir). x noktasını x_0'a yaklaştırdıkça kesen doğruları döner; eğer eğimlerin bir limiti varsa, kesenler bir "sınır doğrusuna" yerleşir. Bu sınır doğrusu teğet, eğiminin limiti ise türevdir.

Dikkat edilecek tek şey, φ_{x_0}'ın x_0 noktasında **tanımsız** olmasıdır: orada pay da payda da sıfırdır. Bu yüzden x_0'daki değeri değil, x_0'a yaklaşırkenki davranışı sorarız — yani limitini.

 CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Bir Noktada Türev

Tanım 2.2 (Bir Noktada Türev). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme, $f : I \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in I$ olsun. Fark oranının x_0 noktasındaki limiti var **ve bir reel sayı** ise, f'ye x_0 noktasında **türevlenebilir** (differentiable) denir; bu limit değerine f'nin x_0 noktasındaki **türevi** denir ve

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

yazılır.

Tanımdaki "bir reel sayı" vurgusu boş bir titizlik değildir: fark oranının limiti $+\infty$ ya da $-\infty$ olabilir (bkz. Analiz 1) ve bu durumda türev **yoktur**, çünkü türev bir sayıdır. Bu ayrımı birazdan düşey teğet örneğinde göreceğiz.
Türev, bir limit olduğu için tektir: Limitin Tekliği gereği $f'(x_0)$ değeri, varsa, tek biçimde belirlidir. Bu yüzden $f'(x_0)$ gösterimi meşrudur.
Hesaplarda çoğu zaman x yerine x_0'dan olan uzaklığı değişken almak daha rahattır. $x = x_0 + h$ yazalım; $x \to x_0$ ile $h \to 0$ aynı şeydir ve $x - x_0 = h$ olur. O hâlde

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

eşitliği de türevin tanımıdır. Bu iki biçimin gerçekten denk olduğunu görmek için değişken değiştirme teoremine bile gerek yoktur. $J = \{h \in \mathbb{R} : x_0 + h \in I\}$ kümesini ve $\psi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ fonksiyonunu düşünelim; $\psi(h) = \varphi_{x_0}(x_0 + h)$'dir. $h \mapsto x_0 + h$ dönüşümü $J \setminus \{0\}$ kümesini $I \setminus \{x_0\}$ kümesine birebir ve örten biçimde taşır ve $0 < |\, h \,| < \delta$ koşulunu tam olarak $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$ koşuluna çevirir. Dolayısıyla iki limitin ε–δ tanımları harfi harfine aynı ifadedir; biri varsa öteki de vardır ve değerleri eşittir.
Türevlenebilirlik bir noktanın özelliğidir; bir küme üzerinde konuşmak istediğimizde bunu noktasal olarak toplarız.

Tanım 2.3 (Bir Kümede Türevlenebilirlik ve Türev Fonksiyonu). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık, $f : I \to \mathbb{R}$ ve $A \subseteq I$ olsun. f, A'nın her noktasında türevlenebiliyorsa f'ye ***A* üzerinde türevlenebilir** denir. Özel olarak f, I'nin her noktasında türevlenebiliyorsa kısaca "f türevlenebilirdir" denir.
$D \subseteq I$, f'nin türevlenebildiği noktaların kümesi olsun. O zaman

$$f' : D \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f'(x)$$

kuralıyla tanımlanan fonksiyona f'nin **türev fonksiyonu** (ya da kısaca türevi) denir.

f' yine bir fonksiyondur; onun da türevi sorulabilir. Bu yolla ikinci, üçüncü, … türevler elde edilir; bu zinciri Yüksek Mertebeden Türevler ve Leibniz Kuralı bölümünde ele alacağız.

2.2.1 Türevin ε–δ Dili

Bir analiz dersinde "limit var" demek, ε–δ diliyle konuşabilmek demektir. Türev tanımını bu dile çevirelim; çevirinin ikinci biçimi, türevin bütün geometrik anlamını tek satırda taşıyacak.

Önerme 2.1 (Türevin ε–δ Betimlemesi). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki üç ifade denktir.*

1. *f, x_0 noktasında türevlenebilirdir ve $f'(x_0) = L$'dir.*
2. *Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki*

$$x \in I, \quad 0 < |\, x - x_0 \,| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \varepsilon.$$

3. *Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki*

$$x \in I, \quad |\, x - x_0 \,| < \delta \Longrightarrow |\, f(x) - f(x_0) - L(x - x_0) \,| \leq \varepsilon \,|\, x - x_0 \,| \,.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
(1) $\Longleftrightarrow$ (2). *I açık olduğundan x_0, $I \setminus \{x_0\}$ kümesinin bir yığılma noktasıdır ve φ_{x_0}'ın x_0'daki limitinden söz edilebilir. İkinci ifade, $\lim_{x\to x_0} \varphi_{x_0}(x) = L$ eşitliğinin fonksiyon limiti tanımındaki ifadesinin kelimesi kelimesine yazılmış hâlidir; başka bir şey söylemez.*
(2) $\Longrightarrow$ (3). *$\varepsilon > 0$ verilsin ve (2)'deki $\delta > 0$ alınsın. $x \in I$ ve $| x - x_0 | < \delta$ olsun. İki durum var.*

- *$x \neq x_0$ ise $| x - x_0 | > 0$'dır; (2)'deki eşitsizliğin iki yanını bu pozitif sayıyla çarpalım. Mutlak değerin çarpımsallığı gereği*

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L\right| \cdot | x - x_0 | = \left|\frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{x-x_0}\right| \cdot | x - x_0 | = \big| f(x) - f(x_0) - L(x-x_0) \big|,$$

  dolayısıyla $\big| f(x) - f(x_0) - L(x-x_0) \big| < \varepsilon | x - x_0 |$, özel olarak $\leq \varepsilon | x - x_0 |$ olur.
- *$x = x_0$ ise sol taraf $| f(x_0) - f(x_0) - 0 | = 0$, sağ taraf 0'dır; $0 \leq 0$ doğrudur.*

(3) $\Longrightarrow$ (2). *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için (3)'teki $\delta > 0$'ı alalım. $x \in I$ ve $0 < | x - x_0 | < \delta$ olsun. O zaman*

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L\right| = \frac{| f(x) - f(x_0) - L(x-x_0) |}{| x - x_0 |} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2} | x - x_0 |}{| x - x_0 |} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Böylece üç ifadenin denkliği tamamlanır.
■

Üçüncü ifade, türevin bütün anlamını içinde barındırır. $L = f'(x_0)$ ve

$$T(x) = f(x_0) + L\,(x - x_0)$$

olsun; T, eğimi L olan ve $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen doğrunun denklemidir. Üçüncü ifade tam olarak şunu söyler:

$$| f(x) - T(x) | \leq \varepsilon | x - x_0 | \qquad (| x - x_0 | < \delta).$$

Yani f ile T arasındaki hata, x_0'a yaklaşırken $| x - x_0 |$'dan **daha hızlı** sıfıra gider: hatanın $| x - x_0 |$'a oranı sıfıra yakınsar. Kısaca

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x), \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

yazılır. Bu, "f fonksiyonu x_0 civarında T doğrusuyla birinci mertebeden uyumludur" demektir.

! Türev, en iyi doğrusal yaklaşımın eğimidir

f, x_0'da türevlenebilir ve $m \neq f'(x_0)$ olsun. $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ doğrusu için

$$\frac{f(x) - S(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \to f'(x_0) - m \neq 0 \qquad (x \to x_0)$$

olur. Limit sıfırdan farklı olduğundan, x_0'ın yeterince küçük bir delinmiş komşuluğunda

$$| f(x) - S(x) | \geq \frac{| f'(x_0) - m |}{2} | x - x_0 |$$

bulunur: bu doğrunun hatası $| x - x_0 |$ ile **aynı mertebededir**, sıfıra daha hızlı gitmez. Buna karşılık teğetin hatası $| x - x_0 |$'dan daha hızlı sönmektedir. Dahası, bir $c, m \in \mathbb{R}$ çifti için $| f(x) - c - m(x - x_0) | \leq \varepsilon | x - x_0 |$ eşitsizliği her $\varepsilon > 0$'a karşılık gelen bir komşulukta sağlanıyorsa, $x = x_0$ alarak $| f(x_0) - c | \leq 0$, yani $c = f(x_0)$; sonra yukarıdaki hesapla $m = f'(x_0)$ elde edilir. Kısacası f'yi x_0 civarında birinci mertebeden temsil eden **tek** doğru teğettir.

 CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Tanımdan Türev Hesabı

Tanımı ilk kez çalıştırırken en basit fonksiyonlarla başlamak, oranın nasıl sadeleştiğini görmek açısından öğreticidir.

Örnek 2.1 (Sabit, Birim, Doğrusal ve Kare Fonksiyonun Türevi). Aşağıdaki fonksiyonların her $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevini yalnızca tanımı kullanarak hesaplayalım.

a) $f(x) = c$ (sabit fonksiyon).

b) $f(x) = x$ (birim fonksiyon).

c) $f(x) = mx + n$ (doğrusal fonksiyon).

d) $f(x) = x^2$.

Çözüm.
a) Her $x \neq x_0$ için fark oranı

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0$$

olur. Sabit 0 fonksiyonunun limiti 0 olduğundan $f'(x_0) = 0$'dır. Sabit fonksiyonun türevi her noktada sıfırdır; sezgisel olarak, hiç değişmeyen bir büyüklüğün değişim hızı sıfırdır.
b) $x \neq x_0$ için

$$\frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

olduğundan (payda sıfırdan farklı, sadeleştirme meşru) $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$'dir.
c) $x \neq x_0$ için

$$\frac{(mx + n) - (mx_0 + n)}{x - x_0} = \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m$$

ve dolayısıyla $f'(x_0) = m$. Bir doğrunun eğimi her noktada aynıdır; türev de bunu doğrular. Bu hesap ileride önemli olacak: **teğet doğrusunun türevi, teğetin eğimidir.**
d) $x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$ çarpanlamasını kullanalım. $x \neq x_0$ için

$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0.$$

Sağdaki ifade bir polinomdur ve Polinomun Limiti gereği limiti değerine eşittir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Yani $(x^2)' = 2x$'tir.
■

Şimdi biraz daha hüner isteyen iki hesap yapalım: karekök ve ters fonksiyon. İkisinde de fark oranını sadeleştirmenin cebirsel bir hilesi vardır.

Örnek 2.2 (Karekökün ve Tersinin Türevi).

a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ olsun. Her $x_0 > 0$ için $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ olduğunu gösterin.

b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ olsun. Her $x_0 \neq 0$ için $g'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
a) $x_0 > 0$ sabit olsun; karekökün varlığı n-inci Kökün Varlığı ile güvencededir. $x > 0$ ve $x \neq x_0$ için payı eşleniğiyle çarpalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}.$$

Burada $\sqrt{x}+\sqrt{x_0}>0$ olduğundan bölme meşrudur. Karekök fonksiyonu süreklidir (bkz. Analiz 1); dolayısıyla $x\to x_0$ iken $\sqrt{x}\to\sqrt{x_0}$ ve payda $2\sqrt{x_0}\neq 0$'a gider. Limitlerde Cebirsel İşlemler gereği

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Bu formül $x_0\to 0^+$ iken sınırsız büyür; nitekim karekök fonksiyonu 0 noktasında (sağdan) türevlenemez. Gerçekten f'yi $[0,\infty)$ üzerinde düşünürsek, $x>0$ için

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\underset{x\to 0^+}{\to}+\infty$$

olur; limit bir reel sayı olmadığından türev yoktur. Bu, birazdan inceleyeceğimiz **düşey teğet** durumudur.

b) $x_0\neq 0$ sabit olsun. $x\neq 0$, $x\neq x_0$ için payı ortak paydada toplayalım:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\frac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{x-x_0}=\frac{-(x-x_0)}{xx_0(x-x_0)}=-\frac{1}{xx_0}.$$

$x\to x_0$ iken $xx_0\to x_0^2\neq 0$ olduğundan Limitlerde Cebirsel İşlemler gereği

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{xx_0}\right)=-\frac{1}{x_0^2}.$$

Türevin negatif olması, $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu her aralıkta azalan olmasıyla uyumludur. ■

2.4 Teğet Doğrusu ve Doğrusallaştırma

Fark oranı $\varphi_{x_0}(x)$, eğri üzerindeki iki noktayı birleştiren kesenin eğimiydi. $x\to x_0$ limitine geçtiğimizde bu kesenler bir doğruya yerleşir; o doğruyu artık tanımlayabiliriz.

Tanım 2.4 (Teğet Doğrusu). f, x_0 noktasında türevlenebilir olsun. $(x_0,f(x_0))$ noktasından geçen ve eğimi $m=f'(x_0)$ olan

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0),\qquad \text{yani}\qquad y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

doğrusuna, f'nin grafiğinin $(x_0,f(x_0))$ noktasındaki **teğet doğrusu** (tangent line) denir.

Teğet doğrusunu bir fonksiyon olarak düşünmek, sayısal hesapta çok işe yarar.

Tanım 2.5 (Doğrusallaştırma). f, x_0 noktasında türevlenebilir olsun.

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)$$

kuralıyla tanımlanan ve derecesi en çok bir olan $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna, f'nin x_0 noktasındaki **doğrusallaştırması** (linearization) denir. x, x_0'a yakınken

$$f(x)\approx L(x)$$

yaklaşımı kullanılır; Önerme 2.1'nın üçüncü maddesi bu yaklaşımın hatasının $|\,x-x_0\,|$'dan daha hızlı söndüğünü söyler.

L fonksiyonunun iki özelliği tanımdan hemen görülür ve teğeti belirleyen tam da bunlardır: $L(x_0)=f(x_0)$ ve — Örnek 2.1'nin (c) şıkkı gereği — $L'(x_0)=f'(x_0)$. Yani L, x_0 noktasında f ile hem **değer** hem **eğim** bakımından uyuşan tek doğrudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.3 (Teğet Doğrusu Hesapları).

a) $f(x) = x^2$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğetini bulun; kesen eğimlerinin bu teğetin eğimine nasıl yaklaştığını gösterin.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ eğrisinin $x_0 = 4$ noktasındaki teğetini bulun.

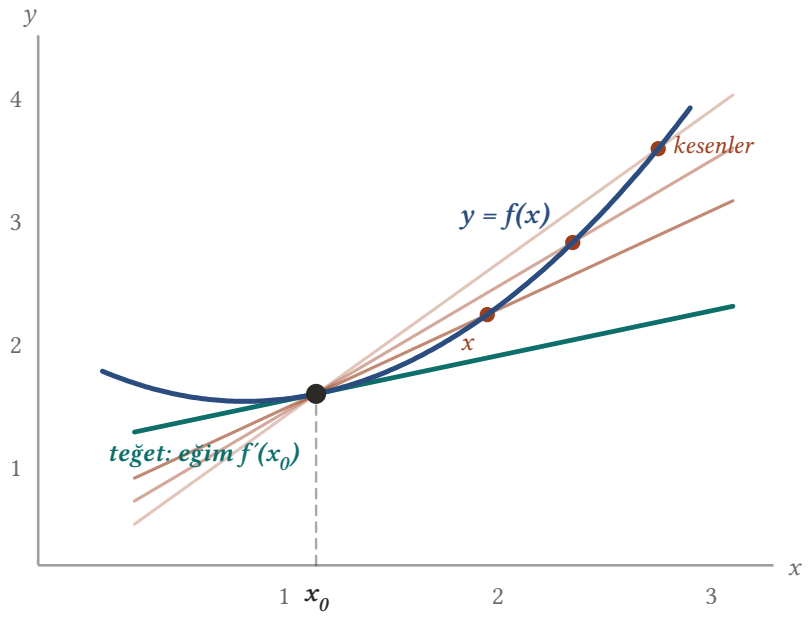
Çözüm.
a) Örnek 2.1'den $f'(x) = 2x$, dolayısıyla $f'(1) = 2$'dir. $f(1) = 1$ olduğundan teğet doğrusu

$$y = 1 + 2(x-1) = 2x - 1.$$

Kesenlerin bu doğruya nasıl yerleştiğini sayılarla görelim. $h \neq 0$ için $(1,1)$ ile $(1+h, (1+h)^2)$ noktalarını birleştiren kesenin eğimi

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h$$

olur. $h = 1$ için eğim 3, $h = \frac{1}{2}$ için 2,5, $h = \frac{1}{4}$ için 2,25, $h = -\frac{1}{4}$ için 1,75'tir. $h \to 0$ iken eğimler 2'ye, yani teğetin eğimine yakınsar. Fark oranının $2 + h$ gibi tam olarak hesaplanabilmesi, limitin varlığını da anında verir.



Şekil 2.1: Fark oranı, $(x_0, f(x_0))$ ile $(x, f(x))$ noktalarından geçen kesenin eğimidir. $x \longrightarrow x_0$ giderken kesenler x_0 noktasındaki teğete yaklaşır; teğetin eğimi tam olarak $f'(x_0)$'dır.

b) Örnek 2.2'ten $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, dolayısıyla $f'(4) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$'tür. $f(4) = 2$ olduğundan teğet doğrusu

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = \frac{x}{4} + 1.$$

Bu doğru aynı zamanda f'nin 4 noktasındaki doğrusallaştırmasıdır: $L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$.
■

Doğrusallaştırmanın klasik kullanımı, hesaplaması zor bir değeri yakınındaki kolay bir değerden tahmin etmektir.

Örnek 2.4 (Yaklaşık Hesap ve Hata Kestirimi).

 CC BY-NC-SA 4.0

a) $\sqrt{4{,}1}$ sayısını doğrusallaştırmayla yaklaşık hesaplayın ve hatayı kestirin.

b) $\dfrac{1}{1{,}02}$ sayısını doğrusallaştırmayla yaklaşık hesaplayın ve hatanın tam değerini bulun.

Çözüm.
a) $f(x)=\sqrt{x}$ ve $x_0=4$ alalım; 4, 4,1'e yakın ve karekökü tam olarak bilinen bir noktadır. Örnek 2.3'nden $L(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)$'tür. O hâlde

$$\sqrt{4{,}1}\approx L(4{,}1)=2+\frac{0{,}1}{4}=2+0{,}025=2{,}025.$$

Hatayı kestirelim. $2{,}025^2=4{,}100625$ olduğundan $4{,}1=2{,}025^2-0{,}000625$'tir. İki kare farkını kullanarak

$$2{,}025-\sqrt{4{,}1}=\frac{2{,}025^2-4{,}1}{2{,}025+\sqrt{4{,}1}}=\frac{0{,}000625}{2{,}025+\sqrt{4{,}1}}<\frac{0{,}000625}{4}=0{,}00015625$$

bulunur (paydayı küçültmek için $\sqrt{4{,}1}>2$ kullanıldı). Yani yaklaşım gerçek değerden büyüktür ama hata 0,00016'dan küçüktür: dört ondalık basamağa kadar $\sqrt{4{,}1}=2{,}0248\ldots$ ile uyumlu. Hatanın bu kadar küçük çıkması şaşırtıcı değildir; Önerme 2.1 gereği hata $\mid x-x_0\mid=0{,}1$'den daha hızlı sönmelidir ve gerçekten 0,1'in yanında 0,00016 çok küçüktür.
Yaklaşımın hep büyük çıkmasının nedeni ileride görülecek: $\sqrt{x}$ konkav bir fonksiyondur, grafiği teğetinin altında kalır.
b) $g(x)=\frac{1}{x}$ ve $x_0=1$ alalım. Örnek 2.2'ten $g'(1)=-1$ ve $g(1)=1$ olduğundan

$$L(x)=1-(x-1)=2-x,\qquad \frac{1}{1{,}02}\approx L(1{,}02)=2-1{,}02=0{,}98.$$

Hatanın tam değeri:

$$\frac{1}{1{,}02}-0{,}98=\frac{1-0{,}98\cdot 1{,}02}{1{,}02}=\frac{1-0{,}9996}{1{,}02}=\frac{0{,}0004}{1{,}02}\approx 0{,}000392.$$

Girdideki 0,02'lik sapmaya karşılık hata 0,0004 mertebesindedir; oran olarak yaklaşık 0,02 katı, yani $\mid x-x_0\mid$ ile birlikte sönen bir çarpan. Bu da tam olarak Önerme 2.1'nın üçüncü maddesinin öngördüğü davranıştır.
■

2.5 Türevin Var Olmadığı Durumlar

Her sürekli fonksiyon türevlenebilir olmak zorunda değildir. Türevin var olmaması, fark oranının limitinin var olmaması demektir ve bunun iki tipik geometrik nedeni vardır: grafiğin o noktada **dikleşmesi** ve grafiğin o noktada **kırılması**.

2.5.1 Düşey Teğet ve Sivri Uç

Fark oranının limiti $+\infty$ ya da $-\infty$ ise türev yoktur — çünkü türev bir reel sayı olmalıdır. Geometrik olarak bu, kesen doğrularının eğimlerinin sınırsız büyümesi, yani kesenlerin **dikleşmesi** demektir. Sınır konumda bir doğru vardır ama bu doğru düşeydir ve düşey doğrunun eğimi yoktur. Dikleşme iki taraftan zıt işaretlerle olursa fark oranı $+\infty$ ya da $-\infty$ türünden bir limite bile yerleşmez; o zaman da grafikte bir **sivri uç** belirir. Aşağıdaki örneğin iki şıkkı tam olarak bu iki durumu gösterir.

Örnek 2.5 (Düşey Teğet ve Sivri Uç).

a) $f(x)=(x-1)^{1/3}$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasında türevi olmadığını gösterin.

b) $g(x)=\sqrt{\mid x\mid}$ fonksiyonunun $x_0=0$ noktasında türevi olmadığını gösterin.

Çözüm.
a) Küp kök negatif sayılar için de tanımlıdır ($t<0$ iken $t^{1/3}=-(-t)^{1/3}$ ile), dolayısıyla f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır ve $f(1)=0$'dır. $x\neq 1$ için fark oranı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x-1)^{1/3}}{x-1}=\frac{(x-1)^{1/3}}{(x-1)^{1/3}\cdot(x-1)^{2/3}}=\frac{1}{(x-1)^{2/3}}$$

olur. Burada $(x-1)^{2/3}=\left(\mid x-1\mid^{1/3}\right)^2=\mid x-1\mid^{2/3}>0$'dır; yani ifade x'in hangi taraftan yaklaştığından bağımsız olarak **pozitiftir**.
Limitin $+\infty$ olduğunu tanımdan görelim (bkz. Analiz 1). $M>0$ verilsin ve $\delta=M^{-3/2}$ alalım. $0<\mid x-1\mid<\delta$ ise, $t\mapsto t^{2/3}$ artan olduğundan

$$\mid x-1\mid^{2/3}<\delta^{2/3}=\left(M^{-3/2}\right)^{2/3}=M^{-1}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\mid x-1\mid^{2/3}}>M$$

bulunur. O hâlde

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty.$$

Buradan fark oranının 1'in hiçbir delinmiş komşuluğunda sınırlı kalmadığı çıkar. Oysa bir noktada **sonlu** bir limiti olan fonksiyon, o noktanın bir delinmiş komşuluğunda sınırlıdır (bkz. Analiz 1). Demek ki fark oranının 1'deki limiti hiçbir reel sayıya eşit olamaz; f, 1 noktasında türevlenebilir **değildir**. Öte yandan f bu noktada süreklidir; grafiğin $x=1$'de bir düşey teğeti vardır ve bu düşey doğrunun denklemi $x=1$'dir.
b) $g(0)=0$'dır. $x\neq 0$ için

$$\frac{\sqrt{\mid x\mid}-0}{x-0}=\frac{\sqrt{\mid x\mid}}{x}.$$

$x>0$ ise $\mid x\mid=x$ ve oran $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\to+\infty$; $x<0$ ise $\mid x\mid=-x$ ve oran $\frac{\sqrt{-x}}{x}=-\frac{\sqrt{-x}}{-x}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}\to-\infty$ olur. Fark oranı bu kez de 0'ın her delinmiş komşuluğunda sınırsızdır; (a) şıkkındaki gerekçeyle — yani Limiti Olan Fonksiyon Nokta Yakınında Sınırlıdır ile — reel bir limiti olamaz ve türev yoktur. Üstelik iki taraf zıt yönlerde büyüdüğünden fark oranının $+\infty$ ya da $-\infty$ türünden bir limiti de bulunmaz; (a) şıkkındaki düşey teğetten farkı budur. Grafik 0 noktasında **sivri uç** (cusp) yapar: iki kol da dikleşir, ama biri yukarı diğeri aşağı bakar.
■

2.5.2 Köşe Noktaları

İkinci durumda fark oranı sınırlı kalır ama sağdan ve soldan farklı değerlere yaklaşır. Bu, grafikte bir **köşe** (corner) bulunması demektir: eğri o noktada ani bir yön değiştirir.

Örnek 2.6 (Mutlak Değer Fonksiyonunun Sıfırda Türevi Yoktur). $f(x)=\mid x\mid$ fonksiyonunun $x_0=0$ noktasında türevlenebilir olmadığını gösterin.

Çözüm.
$f(0)=0$ olduğundan $h\neq 0$ için fark oranı

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\mid h\mid}{h}$$

biçimindedir. Mutlak Değer gereği $h>0$ iken $\mid h\mid=h$, $h<0$ iken $\mid h\mid=-h$'dir. O hâlde

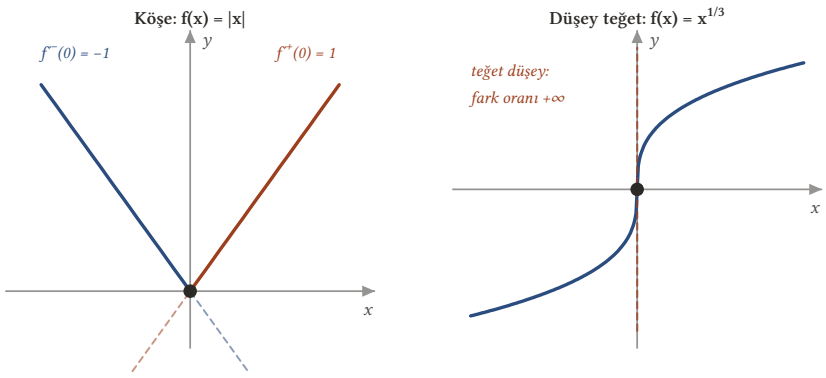
$$\frac{\mid h\mid}{h}=\begin{cases}\frac{h}{h}=1, & h>0\\ \frac{-h}{h}=-1, & h<0.\end{cases}$$

Sağdan yaklaşırken oran sabit 1, soldan yaklaşırken sabit -1'dir; dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|\,h\,|}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|\,h\,|}{h} = -1.$$

İki tek yönlü limit vardır ama eşit değildir; Limitin Yokluğu için Tek Yönlü Ölçüt gereği $\lim_{h\to 0} \frac{|\,h\,|}{h}$ yoktur. Türev de yoktur.
Buna karşılık $f(x) = |\,x\,|$ fonksiyonu 0 noktasında süreklidir: $\big|\,|\,x\,| - 0\,\big| = |\,x\,| \to 0$'dır. Grafiği 0 noktasında keskin bir köşe yapar; sağdan gelen kesenlerin eğimi 1'e, soldan gelenlerinki -1'e yerleşir ve ortak bir teğet doğrusu oluşmaz.



Şekil 2.2: Türevin var olmadığı iki tipik durum. Solda $f(x) = |x|$: sağ ve sol türev vardır (1 ve −1) ama eşit değildir, grafikte köşe oluşur. Sağda $f(x) = x^{1/3}$: fark oranı $+\infty$'a ıraksar, teğet düşeydir; her iki fonksiyon da 0 noktasında süreklidir.

■

> ⚠ Süreklilik türevlenebilirliği getirmez
>
> Yukarıdaki üç fonksiyon — $(x-1)^{1/3}$, $\sqrt{|\,x\,|}$ ve $|\,x\,|$ — ilgili noktalarda **süreklidir**, ama türevlenebilir değildir. Yani süreklilik, türevlenebilirlik için yeterli bir koşul değildir. Ters yön doğrudur: türevlenebilirlik süreklilikten daha güçlü bir koşuldur ve türevlenebilen her fonksiyon o noktada süreklidir. Bu önermeyi bir sonraki bölümde teorem olarak ispatlayacağız; burada yalnızca aklımızda tutalım. Sürekli olup **hiçbir** noktada türevlenemeyen fonksiyonların da var olduğunu ekleyelim; bu tür örnekler, sezginin geometrik resimlerle ne kadar sınırlı olduğunu gösterir.

2.6 Gösterimler

Türev kavramı birden çok gelenekte, birden çok simgeyle yerleşti. Hepsi aynı nesneyi gösterir; hangisini kullanacağımız bağlama göre değişir.

Gösterim	Yazılışı	Vurgusu
Lagrange	$f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(n)}(x)$	En yaygın kullanım; türevi yine bir fonksiyon olarak görür.
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\left.\frac{df}{dx}\right\|_{x=x_0}$	Değişim oranını ve hangi değişkene göre türev alındığını vurgular.
Newton	$\dot{y}$, $\ddot{y}$	Fizikte, zamana göre türev için kullanılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Gösterim	Yazılışı	Vurgusu
Euler	$D_x f$, Df	Türevi bir **işlemci** (operatör) olarak görür.

Leibniz gösterimi, $y = f(x)$ yazıp $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ve $\Delta x = x - x_0$ kısaltmalarıyla fark oranını $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biçiminde yazma alışkanlığından doğdu; $\Delta \to d$ geçişi, "sonsuz küçük" farklara geçişi simgeler.

i dy/dx bir kesir değildir

$\frac{dy}{dx}$ gösterimi bir bölme işlemi gibi görünse de tek parça bir simgedir: bir limitin adıdır, iki sayının oranı değil. Zincir kuralında $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ eşitliğinin "sadeleştirme" gibi görünmesi hoş bir kolaylıktır, ama ispat gerektirir — bunu Zincir Kuralı ve Ters Fonksiyonun Türevi bölümünde yapacağız. Sonsuz küçük büyüklüklerle serbestçe işlem yapmak, ancak bu eşitlikler ayrı ayrı ispatlandıktan sonra güvenlidir.

2.7 Tek Yönlü Türevler

Limitlerde olduğu gibi türevde de bir noktaya sağdan ve soldan ayrı ayrı yaklaşabiliriz. Bu, parçalı tanımlı fonksiyonlarda ve mutlak değer içeren ifadelerde vazgeçilmezdir: her parçanın kendi türevini hesaplar, sonra iki tarafın anlaşıp anlaşmadığına bakarız.

Tanım 2.6 (Sağ ve Sol Türev). $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun.

1. x_0, $A \cap (x_0, \infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. Aşağıdaki tek yönlü limit (bkz. Analiz 1) var ve bir reel sayı ise, bu değere f'nin x_0 noktasındaki **sağ türevi** (right derivative) denir:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. x_0, $A \cap (-\infty, x_0)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. Aşağıdaki limit var ve bir reel sayı ise, bu değere f'nin x_0 noktasındaki **sol türevi** (left derivative) denir:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

İkisine birlikte **tek yönlü türevler** denir.

Tanımda h ile x biçimlerinin denkliği, iki yönlü hâlde yaptığımız gözlemin aynısıdır: $x = x_0 + h$ değiştirmesi $0 < h < \delta$ koşulunu tam olarak $x_0 < x < x_0 + \delta$ koşuluna çevirir; sol taraf için de aynısı geçerlidir.

Uç noktalarda türev

f, $[a, b]$ gibi kapalı bir aralıkta tanımlıysa uç noktalarda iki yönlü limit alınamaz; oralarda "türev" denince tek yönlü türev kastedilir: $f'(a) := f'_+(a)$ ve $f'(b) := f'_-(b)$. Ortalama değer teoremi gibi sonuçlarda "$[a, b]$ üzerinde sürekli, (a, b) üzerinde türevlenebilir" biçimindeki hipotezler tam da bu ayrımı gözetmek içindir.

Şimdi tek yönlü türevlerin ne işe yaradığını söyleyen teoremi ispatlayalım. Tek yönlü limitler için elimizde zaten güçlü bir araç var; yapmamız gereken onu fark oranı fonksiyonuna uygulamaktan ibaret.

Teorem 2.1 (Türevin Varlığı ile Tek Yönlü Türevler). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. O hâlde*

$$f'(x_0) = L \Leftrightarrow f'_+(x_0) \text{ ve } f'_-(x_0) \text{ vardır ve } f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = L.$$

Başka bir deyişle: f, x_0'da türevlenebilirdir ancak ve ancak sağ ve sol türevlerin ikisi de var ve birbirine eşittir; bu durumda $f'(x_0)$ ortak değere eşittir.

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Fark oranı fonksiyonunu yazalım:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Önce ön koşulları kontrol edelim. I açık olduğundan bir $\rho > 0$ için $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) \subseteq I$'dir. Bu durumda her $\delta > 0$ için, $\delta' = \min\{\delta, \rho\}$ alarak, $x_0 + \frac{\delta'}{2} \in I \cap (x_0, x_0 + \delta)$ ve $x_0 - \frac{\delta'}{2} \in I \cap (x_0 - \delta, x_0)$ noktaları bulunur. Yani x_0, hem $I \setminus \{x_0\}$ kümesinin, hem $I \cap (x_0, \infty)$ kümesinin, hem de $I \cap (-\infty, x_0)$ kümesinin bir yığılma noktasıdır; üç limitten de söz etmek anlamlıdır.
Tanımlar gereği

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x), \qquad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \varphi(x), \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \varphi(x)$$

olduğundan iddia, φ fonksiyonuna Limitin Varlığı ile Sağ ve Sol Limitler uygulamaktan ibarettir: bir fonksiyonun bir noktadaki limiti vardır ve L'ye eşittir ancak ve ancak sağ ve sol limitleri var ve L'ye eşitse. Bu teoremin hipotezleri az önce doğrulandı.
Bağımsız okunabilmesi için akıl yürütmeyi açalım.
($\Rightarrow$) $f'(x_0) = L$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in I$ ve $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$ iken $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$'dur. Şimdi $x \in I$ ve $x_0 < x < x_0 + \delta$ ise $0 < x - x_0 = |\, x - x_0 \,| < \delta$ olur, dolayısıyla $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$; bu, aynı δ ile sağ limit tanımının sağlanması demektir, yani $f'_+(x_0) = L$. Benzer biçimde $x \in I$ ve $x_0 - \delta < x < x_0$ ise $0 < x_0 - x = |\, x - x_0 \,| < \delta$ ve yine $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$; yani $f'_-(x_0) = L$.
($\Leftarrow$) $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = L$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Sağ türev tanımından bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $x \in I, x_0 < x < x_0 + \delta_1$ iken $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$; sol türev tanımından bir $\delta_2 > 0$ vardır ki $x \in I$, $x_0 - \delta_2 < x < x_0$ iken $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$'dur. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ alalım ve $x \in I, 0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$ olsun. $|\, x - x_0 \,| > 0$ olduğundan $x \neq x_0$'dır; üçlem yasası gereği ya $x > x_0$ ya $x < x_0$'dır.

- *$x > x_0$ ise $x_0 < x < x_0 + \delta \leq x_0 + \delta_1$ olur ve sağ türevin koşulu $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$ verir.*
- *$x < x_0$ ise $x_0 - \delta_2 \leq x_0 - \delta < x < x_0$ olur ve sol türevin koşulu $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$ verir.*

Her iki hâlde de $|\, \varphi(x) - L \,| < \varepsilon$'dur; bu ise $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = L$, yani $f'(x_0) = L$ demektir.
■

Teoremin karşıt okunuşu, pratikte daha sık kullanılır: **sağ ve sol türevler farklıysa türev yoktur.** Örnek 2.6'te yaptığımız hesap tam olarak buydu; şimdi onu yeni dille yeniden ifade edelim. Orada $f(x) = |\, x \,|$ için

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|\, h \,| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \qquad f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|\, h \,| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

bulmuştuk. Sağ ve sol türevlerin ikisi de vardır — yani fonksiyon her iki taraftan ayrı ayrı "düzgündür" — ama $1 \neq -1$ olduğundan Teorem 2.1 gereği $f'(0)$ yoktur. Grafikteki köşenin cebirsel karşılığı budur: iki tarafın eğimleri arasındaki uzlaşmazlık.
Şimdi tek yönlü türevlerin asıl kullanım alanına gelelim: parçalı tanımlı bir fonksiyonun türevlenebilir olması için parametrelerin nasıl seçilmesi gerektiğini bulmak.

Örnek 2.7 (Parçalı Fonksiyonda Parametre Belirleme). $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. f'nin $x_0 = 1$ noktasında türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır?

Çözüm.
$f(1) = 1^2 = 1$'dir. Teorem 2.1 gereği aranan koşul, $f'_+(1)$ ve $f'_-(1)$'in var ve eşit olmasıdır.
Sol türev. $h < 0$ için $1 + h < 1$, dolayısıyla $f(1 + h) = (1 + h)^2$'dir. O hâlde

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \underset{h \to 0^-}{\to} 2.$$

Yani $f'_-(1) = 2$'dir; bu, x^2'nin 1'deki türeviyle uyumludur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sağ türev. $h > 0$ için $1 + h > 1$, dolayısıyla $f(1+h) = a(1+h) + b$'dir. O hâlde

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{a + ah + b - 1}{h} = a + \frac{a+b-1}{h}.$$

Şimdi $a + b - 1 \neq 0$ olsaydı, $h \to 0^+$ iken $\frac{a+b-1}{h}$ ifadesi $+\infty$ ya da $-\infty$'a giderdi ve sağ türev var olmazdı. Bu adımı bağımsız bir gerekçeyle de görebiliriz: sağ türev varsa, $h > 0$ için

$$f(1+h) - f(1) = h \cdot \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \underset{h \to 0^+}{\to} 0 \cdot f'_+(1) = 0$$

olur (bkz. Analiz 1), yani f mutlaka 1'de sağdan süreklidir. Sağdan süreklilik $\lim_{h \to 0^+} \big(a(1+h) + b \big) = a + b = f(1) = 1$ demektir. Her iki yol da aynı zorunlu koşulu verir:

$$a + b = 1.$$

Bu koşul altında pay sadeleşir ve $h > 0$ için fark oranı sabit a olur; dolayısıyla $f'_+(1) = a$'dır.
Eşitleme. $f'_+(1) = f'_-(1)$ koşulu $a = 2$ verir; $a + b = 1$'den $b = 1 - a = -1$ bulunur. O hâlde

$$a = 2, \qquad b = -1.$$

Doğrulama. Bu değerlerle $f(x) = x^2$ $(x \leq 1)$, $f(x) = 2x - 1$ $(x > 1)$ olur. $x \to 1^+$ iken $2x - 1 \to 1 = f(1)$ olduğundan f süreklidir; sağ ve sol türevler 2'ye eşit olduğundan Teorem 2.1 gereği $f'(1) = 2$'dir. Geometrik olarak, $y = 2x - 1$ doğrusu $y = x^2$ parabolünün $(1, 1)$ noktasındaki teğetidir (Örnek 2.3); parçalı fonksiyon, parabolden tam da teğeti üzerinden çıkmaktadır. Bir eğriden çıkıp başka bir eğriye "kırılmadan" geçmenin anlamı budur.
Yalnızca sürekli olmasını isteseydik tek koşul $a + b = 1$ olurdu ve sonsuz çok (a, b) çifti işe yarardı; örneğin $a = 0$, $b = 1$ seçimi sürekli ama 1'de türevlenemeyen (köşeli) bir fonksiyon verir. Türevlenebilirlik, sürekliliğin üzerine bir koşul daha koyar ve çözümü teke indirir.
■

2.8 Türev için Dizisel Ölçüt

Bir fonksiyonun bir noktada türevlenebilir **olmadığını** göstermek için ε–δ ile uğraşmak ya da tek yönlü türevleri ayrı ayrı hesaplamak her zaman en kısa yol değildir. Çoğu zaman en pratik araç dizilerdir: tek bir uygunsuz dizi bulmak yeter. Analiz 1'de fonksiyon limitleri için ispatladığımız dizisel ölçütü (bkz. Analiz 1, Genel Dizisel Ölçüt) fark oranı fonksiyonuna uygulayalım.

Teorem 2.2 (Türev için Dizisel Ölçüt). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık, $f : I \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in I$ olsun. Aşağıdaki iki ifade denktir.*

1. *f, x_0 noktasında türevlenebilirdir.*
2. *x_0'a yakınsayan, terimleri I içinde olan ve $x_n \neq x_0$ koşulunu sağlayan **her** (x_n) dizisi için*

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

dizisi yakınsaktır.

Bu durumda söz konusu bütün dizi limitleri birbirine ve $f'(x_0)$'a eşittir.

İspat.
Yine $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(x \in I \setminus \{x_0\})$ yazalım. Teorem 2.1'in ispatında gördüğümüz gibi x_0, $I \setminus \{x_0\}$ kümesinin bir yığılma noktasıdır; dolayısıyla istenen türden diziler vardır (örneğin $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) \subseteq I$ için $x_n = x_0 + \frac{\rho}{n+1}$).
(1) $\Longrightarrow$ (2). *f türevlenebilir olsun, yani $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x_0)$ olsun. (x_n), koşulları sağlayan bir dizi olsun. Dizisel Ölçüt (Heine Ölçütü) gereği $\varphi(x_n) \to f'(x_0)$'dır. Böylece hem yakınsaklık hem de ortak limit değeri elde edilir.*
(2) $\Longrightarrow$ (1). *Önce bütün limitlerin **aynı** olduğunu gösterelim; ifade (2) bunu doğrudan söylemiyor, ama içeriyor.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(x_n) ve (y_n), koşulları sağlayan iki dizi olsun; varsayım gereği $\varphi(x_n) \to A$ ve $\varphi(y_n) \to B$ olacak biçimde $A, B \in \mathbb{R}$ vardır. İki diziyi şöyle örelim:

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = y_1, \quad z_3 = x_2, \quad z_4 = y_2, \quad \ldots$$

yani $z_{2k-1} = x_k$ ve $z_{2k} = y_k$ olsun. Her n için $z_n \in I$ ve $z_n \neq x_0$'dır. Ayrıca (z_n) dizisi x_0'a yakınsar: $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $k \geq N_1$ için $\mid x_k - x_0 \mid < \varepsilon$ ve $k \geq N_2$ için $\mid y_k - x_0 \mid < \varepsilon$ olacak biçimde N_1, N_2 seçilir; $N = 2\max\{N_1, N_2\}$ alındığında $n \geq N$ olan her indis, indisi $\max\{N_1, N_2\}$'den küçük olmayan bir x_k ya da y_k terimine karşılık gelir, dolayısıyla $\mid z_n - x_0 \mid < \varepsilon$ olur (bkz. Analiz 1).
O hâlde (z_n) da varsayımın koşullarını sağlar; (2) gereği $\big(\varphi(z_n)\big)$ dizisi yakınsaktır, limiti C olsun. $\big(\varphi(x_n)\big)$ ve $\big(\varphi(y_n)\big)$ dizileri $\big(\varphi(z_n)\big)$'nin birer alt dizisidir; yakınsak bir dizinin her alt dizisi aynı limite yakınsadığından (bkz. Analiz 1) $A = C$ ve $B = C$, yani $A = B$ bulunur.
Demek ki ortak bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı vardır ve koşulları sağlayan her (x_n) dizisi için $\varphi(x_n) \to L$'dir. Bu tam olarak dizisel ölçütün ikinci koşuludur; o hâlde $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = L$'dir. Limit bir reel sayı olduğundan f, x_0'da türevlenebilirdir ve $f'(x_0) = L$'dir.
■

Teoremin türevsizlik göstermedeki kullanımı doğrudandır: **fark oranı dizisi ıraksayan tek bir (x_n) dizisi bulmak, ya da farklı limitler veren iki dizi bulmak yeter.** İkinci yol, ispatın örgü argümanı sayesinde birinciye indirgenir.

Örnek 2.8 (Mutlak Değer Fonksiyonu için Dizisel Ölçüt). $f(x) = \mid x \mid$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında türevlenemez olduğunu dizisel ölçütle gösterin.

Çözüm.
$x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ dizisini alalım ($n \geq 1$). Her n için $x_n \neq 0$'dır ve $\mid x_n \mid = \frac{1}{n} \to 0$ olduğundan $x_n \to 0$'dır; yani dizi Teorem 2.2'ün istediği koşulları sağlar.
Fark oranı dizisini hesaplayalım. $f(0) = 0$ ve $\mid x_n \mid = \frac{1}{n}$ olduğundan

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}{\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$$

bulunur; son adımda $(-1)^n \in \{-1, 1\}$ ve $\frac{1}{-1} = -1$, $\frac{1}{1} = 1$ olduğu kullanıldı.
$\big((-1)^n\big)$ dizisi $-1, 1, -1, 1, \ldots$ biçiminde salınır ve yakınsak değildir: yakınsak olsaydı, çift indisli alt dizinin limiti 1, tek indisli alt dizinin limiti -1 olurdu; Yakınsak Dizinin Her Alt Dizisi Aynı Limite Yakınsar gereği bu iki değer eşit olmak zorunda kalırdı, oysa $1 \neq -1$'dir.
Fark oranı dizisi ıraksadığından, Teorem 2.2 gereği f fonksiyonu 0 noktasında türevlenebilir değildir. Bu, Örnek 2.6'teki sonucu tek bir dizi seçerek yeniden elde etmiş oldu. Buradaki dizinin marifeti, 0'a bir sağdan bir soldan yaklaşmasıdır; böylece iki tarafın uyuşmazlığı tek bir dizinin salınımına dönüşür.
■

2.9 Salınımlı Bir Örnek

Şimdiye kadarki türevsizlik örnekleri, sezgiyi "grafik kırılırsa ya da dikleşirse türev yok" biçiminde şekillendirdi. Bu sezgi eksiktir: bir fonksiyon bir noktanın yakınında sonsuz kez salınabilir, hiçbir aralıkta monoton olmayabilir ve yine de o noktada türevlenebilir olabilir. Aşağıdaki örnek, ileride birçok karşıt örneğin kaynağı olacak.

Örnek 2.9 (Sonsuz Salınan ama Türevlenebilen Bir Fonksiyon).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun 0 noktasında türevlenebilir olduğunu ve $f'(0) = 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
$f(0) = 0$ olduğundan $x \neq 0$ için fark oranı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x}$$

biçimindedir. Her $t \in \mathbb{R}$ için $|\sin t| \leq 1$ olduğundan $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ fonksiyonu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde sınırlıdır; ayrıca $\lim_{x\to 0} x = 0$'dır. Sınırlı Fonksiyon Çarpı Sıfıra Giden Fonksiyon gereği sınırlı bir fonksiyonla sıfıra giden bir fonksiyonun çarpımı sıfıra gider:

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Aynı sonucu sıkıştırmayla da elde edebiliriz: $x \neq 0$ için

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

ve $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$ olduğundan Sıkıştırma Teoremi aynı limiti verir.
Limit var ve bir reel sayı olduğundan f, 0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$f'(0) = 0.$$

Bu, ilk bakışta şaşırtıcıdır: f, 0'ın her komşuluğunda sonsuz kez işaret değiştirir, sonsuz kez yerel maksimum ve minimum yapar, hiçbir aralıkta monoton değildir. Buna rağmen x^2 çarpanı salınımı öyle hızlı bastırır ki grafik, orijinde $y = 0$ doğrusuna birinci mertebeden yapışır: $|f(x) - 0| \leq x^2$ olduğundan hata $|x|$'ten çok daha hızlı söner.
Öte yandan $x \neq 0$ için f'nin türevi — sonraki bölümlerdeki çarpım ve zincir kurallarıyla hesaplanacağı üzere —

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

olur; $x \to 0$ iken ilk terim sıfıra gider ama $\cos \frac{1}{x}$ terimi -1 ile 1 arasında salınmaya devam eder ve bir limiti yoktur. Yani f' fonksiyonu 0 noktasında **sürekli değildir**, üstelik $f'(0)$ vardır. Türevlenebilir bir fonksiyonun türevinin sürekli olmak zorunda olmadığı gerçeğini ilk kez burada görüyoruz; bu ayrımın ayrıntılarını ve C^1 sınıfının tanımını Yüksek Mertebeden Türevler ve Leibniz Kuralı bölümünde ele alacağız.
■

i Üç düzey

Bu bölümdeki örnekler, giderek daralan üç sınıfı ayırt etmemizi sağladı: bir noktada **süreksiz** fonksiyonlar; **sürekli ama türevlenemeyen** fonksiyonlar ($|x|$, $\sqrt{|x|}$, $(x-1)^{1/3}$); **türevlenebilir ama türevi sürekli olmayan** fonksiyonlar ($x^2 \sin \frac{1}{x}$). Analizin ilerleyen bölümlerinde bu basamakların her biri ayrı bir teorem ailesine karşılık gelecek.

2.10 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (Türev Kavramı Üzerine).

a) $f(x) = x^3$ fonksiyonunun her $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevini yalnızca tanımdan hesaplayın.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun $x_0 > 0$ noktasındaki türevini tanımdan hesaplayın.

c) $f(x) = x\,|x|$ fonksiyonunun 0 noktasında türevlenebilir olduğunu gösterin ve f' türev fonksiyonunu bulun.

d) $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = \begin{cases} cx + d, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun 1 noktasında türevlenebilir olması için c ve d ne olmalıdır?

e) $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{Q})$, $f(x) = 0$ $(x \notin \mathbb{Q})$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun 0 noktasında sürekli, ama türevlenebilir olmadığını gösterin.

f) $\dfrac{1}{2{,}01}$ sayısını, $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasındaki doğrusallaştırmasıyla yaklaşık hesaplayın ve hatanın tam değerini bulun.

Çözüm.
a) $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$ çarpanlamasını kullanalım. $x \neq x_0$ için

$$\frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = x^2 + xx_0 + x_0^2.$$

Sağdaki ifade x'in bir polinomudur; Polinomun Limiti gereği

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 3x_0^2.$$

Yani $(x^3)' = 3x^2$'dir.
b) $x, x_0 > 0$ ve $x \neq x_0$ olsun. Payı ortak paydada toplayıp sonra eşlenikle genişletelim:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}}}{x - x_0} = \frac{\frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}\,(x - x_0)}.$$

Şimdi $\sqrt{x_0} - \sqrt{x} = \dfrac{x_0 - x}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}} = \dfrac{-(x - x_0)}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$ yazıp yerine koyalım:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}}}{x - x_0} = \frac{-(x - x_0)}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}\,(x - x_0)\,(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}.$$

Karekök sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) $x \to x_0$ iken payda $\sqrt{x_0} \cdot \sqrt{x_0} \cdot 2\sqrt{x_0} = 2x_0\sqrt{x_0} \neq 0$'a gider. Limitlerde Cebirsel İşlemler ile

$$f'(x_0) = \frac{-1}{2x_0\sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2x_0^{3/2}}.$$

c) $f(0) = 0$'dır. $x \neq 0$ için fark oranı

$$\frac{x \mid x \mid - 0}{x - 0} = \mid x \mid$$

olur ve $\lim_{x \to 0} \mid x \mid = 0$'dır. Limit var ve reel olduğundan f, 0'da türevlenebilirdir ve $f'(0) = 0$'dır. Diğer noktalarda: $x_0 > 0$ ise x_0'ın bir komşuluğunda $f(x) = x^2$'dir ve türev yalnızca x_0 civarındaki değerlere bağlı olduğundan Örnek 2.1 gereği $f'(x_0) = 2x_0$; $x_0 < 0$ ise benzer biçimde $f(x) = -x^2$ ve fark oranı

$$\frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = \frac{-(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = -(x + x_0) \underset{x \to x_0}{\to} -2x_0$$

verir. Üç durumu birleştirirsek

$$f'(x) = 2 \mid x \mid, \qquad x \in \mathbb{R}$$

bulunur. Dikkat: $f' = 2 \mid x \mid$ her yerde süreklidir ama 0'da türevlenemez; yani f birinci mertebeden düzgündür, ikinci mertebeden değil.
d) $f(1) = 1$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sağ türev. $h>0$ için $f(1+h)=\frac{1}{1+h}$ olduğundan

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h}=\frac{-h}{h(1+h)}=\frac{-1}{1+h}\underset{h\to 0^+}{\to}-1.$$

Yani $f'_+(1)=-1$'dir; bu, Örnek 2.2'teki $g'(1)=-1$ sonucuyla uyumludur.
Sol türev. $h<0$ için $f(1+h)=c(1+h)+d$ olduğundan

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{c+ch+d-1}{h}=c+\frac{c+d-1}{h}.$$

Sol türevin var olması için $c+d-1=0$ olmalıdır; aksi hâlde $h\to 0^-$ iken ifade sınırsız büyür. Bu koşul altında $f'_-(1)=c$'dir.
Eşitleme. $c=-1$ ve $c+d=1$'den $d=2$ bulunur. O hâlde $c=-1$, $d=2$'dir ve bu değerlerle $f'(1)=-1$ olur. Beklendiği gibi $y=-x+2$ doğrusu, $y=\frac{1}{x}$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğetidir.
e) *Süreklilik.* Her x için $\mid f(x)\mid\leq\mid x\mid$'tir: x rasyonelse $\mid f(x)\mid=\mid x\mid$, değilse $\mid f(x)\mid=0\leq\mid x\mid$. O hâlde $-\mid x\mid\leq f(x)\leq\mid x\mid$ ve Sıkıştırma Teoremi gereği $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$; yani f, 0'da süreklidir (bkz. Analiz 1).
Türevlenemezlik. $f(0)=0$ olduğundan $x\neq 0$ için fark oranı

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

olur. $x_n=\frac{1}{n}$ dizisi 0'a yakınsar, terimleri sıfırdan farklı ve rasyoneldir; fark oranı dizisi sabit 1, limiti 1'dir. $y_n=\frac{\sqrt{2}}{n}$ dizisi de 0'a yakınsar, terimleri sıfırdan farklı ve irrasyoneldir (rasyonel olsaydı $\sqrt{2}=ny_n$ rasyonel olurdu); fark oranı dizisi sabit 0, limiti 0'dır.
İki dizi farklı limitler verdiğinden, Teorem 2.2'ün ispatındaki örgü argümanı gereği bu iki diziyi ardışık yerleştirerek elde edilen dizi için fark oranları $1,0,1,0,\ldots$ biçiminde salınır ve ıraksar. Dolayısıyla f, 0 noktasında türevlenebilir değildir. (Aynı sonuç doğrudan da görülür: fark oranının 0'daki limiti olsaydı, Dizisel Ölçüt (Heine Ölçütü) gereği bütün diziler aynı limiti vermeliydi.)
f) $g(x)=\frac{1}{x}$ için Örnek 2.2'ten $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$, dolayısıyla $g(2)=\frac{1}{2}$ ve $g'(2)=-\frac{1}{4}$'tür. Doğrusallaştırma

$$L(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)$$

olur ve

$$\frac{1}{2{,}01}\approx L(2{,}01)=\frac{1}{2}-\frac{0{,}01}{4}=0{,}5-0{,}0025=0{,}4975$$

bulunur. Hatanın tam değeri:

$$\frac{1}{2{,}01}-0{,}4975=\frac{1-0{,}4975\cdot 2{,}01}{2{,}01}=\frac{1-0{,}999975}{2{,}01}=\frac{0{,}000025}{2{,}01}\approx 0{,}0000124.$$

Girdideki $0{,}01$'lik sapmaya karşılık hata 10^{-5} mertebesindedir; yaklaşım gerçek değerin altındadır.
■

Türevi tanımdan hesaplamak kavramı anlamak için şarttır, ama her fonksiyon için fark oranını elle sadeleştirmek uzun sürer. Bir sonraki bölümde toplama, çarpma ve bölmenin türevle nasıl uyuştuğunu göstererek bu işi mekanikleştireceğiz: Türev Alma Kuralları.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Türev Alma Kuralları

Türev Kavramı bölümünde türevi bir limit olarak tanımladık (Tanım 2.2): $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme, $f : I \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in I$ olmak üzere

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa f'ye x_0 noktasında **türevlenebilir** (differentiable) diyorduk. Bu tanım kavramın ne olduğunu doğru anlatır; ama her fonksiyonun türevini **fark oranının** (difference quotient) limitinden hesaplamaya kalkarsak, $(x^2+1)(x^3-2x)$ gibi masum bir fonksiyonda bile yarım sayfa hesapla uğraşırız. Oysa bu fonksiyon, türevini zaten bildiğimiz iki parçadan bir çarpma işlemiyle kurulmuştur. İhtiyacımız olan şey, **fonksiyonların üzerindeki cebirsel işlemlerle türev almanın nasıl uyuştuğunu** söyleyen kurallardır.

Bölüme, türevin daha temel bir özelliğiyle başlıyoruz: türevlenebilir bir fonksiyon o noktada zorunlu olarak süreklidir. Bu, sezgiyle uyumludur — grafiği "kopan" bir fonksiyonun kopma noktasında teğet doğrusundan söz edilemez. Bunun karşıtının yanlış olduğunu, yani sürekliliğin türevlenebilirliği getirmediğini iki klasik örnekle göreceğiz: $|\ x\ |$'in orijindeki **köşe noktası** (corner point) ve $\sqrt[3]{x}$'in orijindeki **düşey teğeti** (vertical tangent).

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: türevlenebilirlik ile süreklilik arasındaki tek yönlü ilişkiyi; toplam, fark, sabitle çarpım, çarpım (Leibniz kuralı) ve bölüm kurallarını — hepsinin tam ispatıyla; her tam sayı n için $(x^n)' = nx^{n-1}$ kuvvet kuralını; polinomların ve rasyonel fonksiyonların türevini; ve son olarak sonlu sayıda çarpanın çarpımı için genel çarpım kuralını. Bölümün sonunda, elle kurulabilecek hemen her cebirsel fonksiyonun türevini limit tanımına hiç dönmeden hesaplayabiliyor olacağız.

3.1 Türevlenebilirlik Sürekliliği Gerektirir

Bir fonksiyonun x_0 noktasında türevlenebilmesi, grafiğin o noktada iyi tanımlı bir teğet doğrusu olması demektir. Grafik x_0'da sıçrıyorsa, x_0'a yaklaşan noktalardaki değerler $f(x_0)$'a yaklaşmaz; fark oranının payı sıfıra gitmezken paydası sıfıra gider ve oran patlar. Aşağıdaki teorem bu sezgiyi kesinleştirir.

Teorem 3.1 (Türevlenebilirlik Sürekliliği Gerektirir). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f, bir $x_0 \in I$ noktasında türevlenebiliyorsa f o noktada süreklidir.*

İspat.
I açık olduğundan x_0, I'nın bir iç noktasıdır; dolayısıyla x_0 aynı zamanda I'nın bir yığılma noktasıdır (bkz. Analiz 1) ve aşağıdaki limitlerin hepsi anlamlıdır.
Sürekliliği göstermek için, Yığılma Noktasında Süreklilik ve Limit gereği

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad \text{yani eşdeğer olarak} \qquad \lim_{x \to x_0} \big(\ f(x) - f(x_0)\ \big) = 0$$

*olduğunu göstermek yeter. İşin püf noktası, $f(x) - f(x_0)$ farkını **fark oranı çarpı $x - x_0$** biçiminde yazmaktır. $x \in I$ ve $x \neq x_0$ için $x - x_0 \neq 0$ olduğundan bu ifadeyle bölüp çarpmakta bir sakınca yoktur:*

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Bu özdeşlik x_0'ın delinmiş bir komşuluğundaki her x için geçerlidir; limit alırken zaten yalnızca bu noktalara bakılır. Şimdi $x \to x_0$ için iki çarpanın limitlerine ayrı ayrı bakalım:

- *Birinci çarpanın limiti, türevin tanımı gereği vardır ve $f'(x_0)$'a eşittir.*
- *İkinci çarpanın limiti $\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$'dır.*

İki limit de var olduğundan, çarpımın limiti limitlerin çarpımıdır (bkz. Analiz 1):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{x\to x_0}\big(\,f(x)-f(x_0)\,\big)=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\right)=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Buradan $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ *çıkar; yani* f*,* x_0 *noktasında süreklidir.*
■

İspatın can alıcı noktası şudur: $f'(x_0)$ **sonlu bir reel sayı** olduğu için $f'(x_0)\cdot 0=0$ diyebildik. Fark oranının limiti $+\infty$ olsaydı bu çarpım belirsiz hâle gelirdi; nitekim birazdan göreceğimiz $\sqrt[3]{x}$ örneğinde tam olarak bu olur — fonksiyon süreklidir ama fark oranının limiti sonlu değildir.
Teoremin karşıt tersi (kontrapozitifi) günlük hesapta çok işe yarar: **bir noktada sürekli olmayan fonksiyon o noktada türevlenemez.** Örneğin taban fonksiyonu $\lfloor x\rfloor$ (bkz. Analiz 1) hiçbir tam sayıda sürekli olmadığından hiçbir tam sayıda türevlenebilir değildir; işaret fonksiyonu (bkz. Analiz 1) 0'da süreksiz olduğundan 0'da türevlenemez. Bu noktalarda fark oranının limitini hesaplamaya kalkışmak gereksizdir.

⚠ Karşıtı doğru değildir

Süreklilik türevlenebilirliği **gerektirmez.** Bir fonksiyon bir noktada sürekli olduğu hâlde orada türevlenebilir olmayabilir; dahası, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olup **hiçbir** noktada türevlenemeyen fonksiyonlar da vardır. Yani

$$\text{türevlenebilir}\implies\text{sürekli},\qquad \text{sürekli}\not\Rightarrow\text{türevlenebilir}\ .$$

İki yönlü olmayan bu ilişkiyi ezberlemek yerine, aşağıdaki iki karşı örneği aklınızda tutun: birinde grafik köşe yapar, ötekinde teğet dikleşir.

Örnek 3.1 (Sürekli Ama Türevlenemeyen Fonksiyonlar). Aşağıdaki iki fonksiyonun $x=0$ noktasında sürekli, fakat türevlenebilir olmadığını gösterelim.

$$f(x)=|\,x\,|\qquad\text{ve}\qquad g(x)=\sqrt[3]{x},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Çözüm.
Mutlak değer fonksiyonu. $f(x)=|\,x\,|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1); özel olarak 0'da süreklidir, çünkü $\big|\,|\,x\,|-0\,\big|=|\,x\,|$ ve bu ifade $x\to 0$ iken 0'a gider. Şimdi 0 noktasındaki fark oranını yazalım: $x\neq 0$ için Mutlak Değer gereği

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|\,x\,|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

Bu oran 0'ın sağında sabit 1, solunda sabit -1'dir; dolayısıyla tek yönlü limitleri (bkz. Analiz 1)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x}=-1$$

olur. İki tek yönlü limit birbirinden farklı olduğundan Limitin Yokluğu için Tek Yönlü Ölçüt gereği $\lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|}{x}$ limiti yoktur. O hâlde f, 0 noktasında türevlenebilir değildir.
Burada bilgiyi tamamen kaybetmiş olmuyoruz: f'nin 0'da **sağ türevi** 1, **sol türevi** -1'dir (Tanım 2.6). İkisi de sonlu, ama birbirinden farklı; grafik orijinde bir köşe yapar. $x\neq 0$ noktalarında sorun yoktur: $x>0$ ise x'in tümüyle $(0,\infty)$ içinde kalan bir komşuluğu vardır ve f bu komşulukta $t\mapsto t$ fonksiyonuyla çakışır, dolayısıyla $f'(x)=1$'dir; $x<0$ ise aynı biçimde f, x'in bir komşuluğunda $t\mapsto -t$ ile çakışır ve $f'(x)=-1$ olur.
Küp kök fonksiyonu. $g(x)=\sqrt[3]{x}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır (bkz. Analiz 1 negatif olmayan sayılar için kökün varlığını verir; tek dereceli kökü $x<0$ için $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{-x}$ ile tanımlarız) ve süreklidir: $x\mapsto x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artan ve sürekli olduğundan, ters fonksiyonun sürekliliği üzerine kurduğumuz sonuç gereği tersi olan küp kök de süreklidir (Monoton Fonksiyonlar ve Ters Fonksiyonun Sürekliliği). Özel olarak g, 0'da süreklidir ve $g(0)=0$'dır.
Fark oranını hesaplayalım. $x\neq 0$ için $x=\big(\sqrt[3]{x}\big)^3$ olduğundan

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{x^{2/3}}.$$

Payda $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$ bir karedir; $x \neq 0$ iken $\sqrt[3]{x} \neq 0$ olduğundan bu kare **kesin pozitiftir** ve $x \to 0$ iken (küp kökün sürekliliğinden) 0'a gider. Sıfıra sağdan giden pozitif bir paydanın tersi $+\infty$'a gider; ayrıntılı söyleyelim: her $M > 0$ için $\delta = M^{-3/2}$ alalım. $0 < |\,x\,| < \delta$ ise $|\,x\,|^{2/3} < \delta^{2/3} = M^{-1}$, dolayısıyla

$$\frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{|\,x\,|^{2/3}} > M.$$

Demek ki

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = +\infty$$

olur (bkz. Analiz 1). Fark oranının limiti bir **reel sayı** olmadığından g, 0 noktasında türevlenebilir değildir. Buradaki durum $|\,x\,|$'inkinden farklıdır: burada sağ ve sol türevlerin farklı iki reel sayı olması söz konusu değildir — fark oranı her iki taraftan da sınırsız büyüdüğünden tek yönlü türevlerin ikisi de yoktur. Grafik orijinde köşe yapmaz; kesenler gitgide dikleşir ve sınır konumları $x = 0$ düşey doğrusudur. Bu yüzden bu davranışa **düşey teğet** denir.
■

i Sonlu türev, düşey teğet, köşe

Bir noktada fark oranının limiti üç türlü davranabilir: (i) sonlu bir sayıya yakınsar — fonksiyon türevlenebilirdir; (ii) $+\infty$ ya da $-\infty$'a gider — grafiğin düşey teğeti vardır ama fonksiyon türevlenebilir değildir; (iii) hiç limiti yoktur — sağ ve sol türevler farklıdır (köşe) ya da fark oranı salınır. Türev tanımında limitin **reel** olması istendiği için son iki durumda "türev vardır" demeyiz.

3.2 Türevin Cebirsel İşlemlerle Uyuşması

Şimdi asıl aracımızı kuruyoruz. Elimizde türevini bildiğimiz iki fonksiyon varsa, bunların toplamının, farkının, çarpımının ve bölümünün türevini limit tanımına dönmeden hesaplayabiliriz. Bu kuralları kurmadan önce iki temel taşı hatırlayalım: sabit fonksiyon $f(x) = c$ için fark oranı her $x \neq x_0$'da $\frac{c-c}{x-x_0} = 0$ olduğundan $f'(x_0) = 0$'dır; özdeşlik fonksiyonu $f(x) = x$ için fark oranı $\frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$ olduğundan $f'(x_0) = 1$'dir. Aşağıdaki kurallar bu iki taştan bütün polinomları ve rasyonel fonksiyonları üretecek.

Teorem 3.2 (Türevin Aritmetiği). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme, $f, g : I \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in I$ olsun. f ve g fonksiyonlarının ikisi de x_0 noktasında türevlenebilir olsun. O hâlde:*

1. ***Toplam ve fark kuralı.*** *$f \pm g$ fonksiyonu x_0'da türevlenebilirdir ve*
$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$
2. ***Sabitle çarpım kuralı.*** *Her $c \in \mathbb{R}$ için cf fonksiyonu x_0'da türevlenebilirdir ve*
$$(cf)'(x_0) = c\,f'(x_0).$$
3. ***Çarpım kuralı (Leibniz kuralı).*** *fg fonksiyonu x_0'da türevlenebilirdir ve*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
4. ***Bölüm kuralı.*** *$g(x_0) \neq 0$ ise x_0'ın g'nin hiç sıfırlanmadığı bir $J \subseteq I$ açık komşuluğu vardır; f/g bölümü bu komşulukta tanımlıdır, x_0'da türevlenebilirdir ve*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left[\,g(x_0)\right]^2}.$$

Çarpım kuralı sözle şöyle okunur: birincinin türevi çarpı ikinci, artı birinci çarpı ikincinin türevi.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Dört maddeyi sırayla ispatlayacağız. Her seferinde yaptığımız şey aynıdır: ilgili fonksiyonun x_0 noktasındaki fark oranını, limitlerini bildiğimiz parçalara ayırmak ve limit aritmetiğini (bkz. Analiz 1) uygulamak. I açık olduğundan x_0, I'nın bir yığılma noktasıdır ve bütün limitler anlamlıdır.
(1) Toplam ve fark. *$h = f + g$ yazalım. $x \in I$, $x \neq x_0$ için*

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{\big(\, f(x)+g(x) \,\big) - \big(\, f(x_0)+g(x_0) \,\big)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Sağ taraftaki iki terimin $x \to x_0$ limitleri hipotez gereği vardır ve sırasıyla $f'(x_0)$, $g'(x_0)$'dır. İki limit de var olduğundan toplamın limiti de vardır ve limitlerin toplamına eşittir:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Bu, hem h'nin x_0'da türevlenebilir olduğunu hem de türevinin istenen değere eşit olduğunu söyler. Fark için aynı hesapta $+$ yerine $-$ yazmak yeter; limitin farkı da limitlerin farkıdır.
(2) Sabitle çarpım. *$x \neq x_0$ için*

$$\frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0} = c \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Sağ taraftaki fark oranının limiti $f'(x_0)$ olduğundan, sabitle çarpımın limiti $c\,f'(x_0)$'dır. (Bu madde, aşağıdaki çarpım kuralının $g \equiv c$ sabit fonksiyonu için özel hâli olarak da elde edilebilir: $g'(x_0) = 0$ olduğundan $(cf)'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + c\,f'(x_0) = c\,f'(x_0)$.)
*Ayrıca (1) ve (2) birlikte, türev almanın **lineer** bir işlem olduğunu söyler: her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.*
(3) Çarpım. *Zorluk şuradadır: $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)$ farkında ne f'nin ne de g'nin fark oranı doğrudan görünür. Çare, araya bir terim ekleyip çıkarmaktır. $f(x)g(x_0)$ terimini ekleyip çıkaralım:*

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) &= f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x)\,\big(\, g(x)-g(x_0) \,\big) + g(x_0)\,\big(\, f(x)-f(x_0) \,\big)\,. \end{aligned}$$

Şimdi $x \neq x_0$ için her iki tarafı $x - x_0$'a bölelim:

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Sağ taraftaki üç limiti tek tek okuyalım:

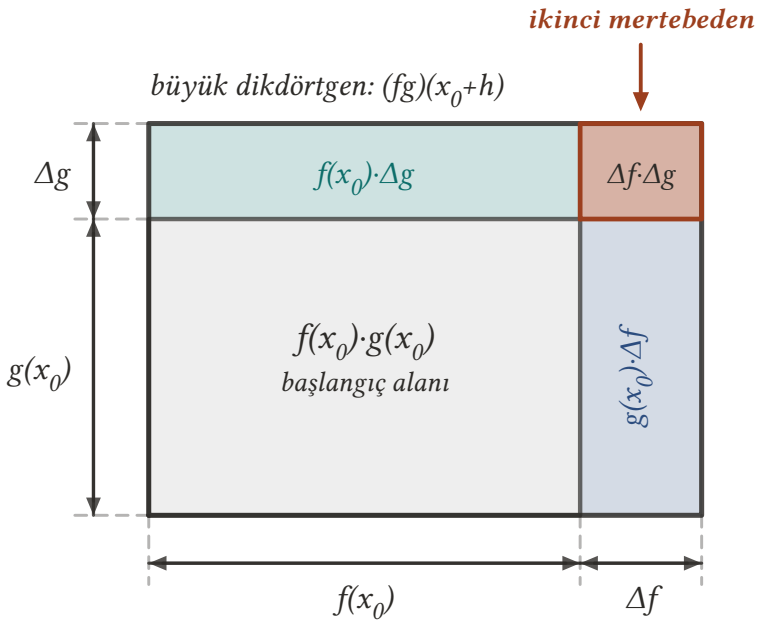
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*'dır. Bunu* ***kullanabilmemizin sebebi*** *Teorem 3.1'tir: f, x_0'da türevlenebilir olduğundan orada süreklidir. Çarpım kuralının ispatında sürekliliğe ihtiyaç duyulan tek yer burasıdır.*
- $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$*, hipotez gereği.*
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$*, hipotez gereği; $g(x_0)$ ise x'ten bağımsız bir sabittir.*

Limit aritmetiği gereği sağ tarafın limiti vardır ve

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

olur. Bu da fg'nin x_0'da türevlenebilir olduğunu ve türevinin iddia edilen değere eşit olduğunu gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.1: Çarpım, kenarları f *ve* g *olan dikdörtgenin alanıdır.* x_o*'dan* x_o+h*'ye geçerken yatay kenar* Δf*, düşey kenar* Δg *kadar uzar;* (fg)(x_o+h) − (fg)(x_o) *farkı, eklenen üç parçanın toplamıdır:* g(x_o)Δf, f(x_o)Δg *ve köşedeki* ΔfΔg. h*'ye bölünüp limit alındığında köşedeki küçük parça sıfıra gider ve geriye* f′(x_o)g(x_o) + f(x_o)g′(x_o) *kalır.*

Bu hesabın arkasında hoş bir geometrik resim vardır: kenarları f ve g olan bir dikdörtgenin alanı fg'dir. Kenarlar Δf ve Δg kadar büyüdüğünde alan artışı $g\,\Delta f + f\,\Delta g + \Delta f\,\Delta g$ olur. Son terim iki küçük sayının çarpımıdır; Δx'e bölünüp limit alındığında yok olur ve geriye Leibniz kuralı kalır.

(4) Bölüm. *İspatı üç adıma bölelim.*

Birinci adım: f/g ifadesinin x_0 yakınında anlamlı olması. *g, x_0'da türevlenebilir olduğundan Teorem 3.1 gereği orada süreklidir. $g(x_0) \neq 0$ olduğundan $\varepsilon = \frac{|\,g(x_0)\,|}{2} > 0$ sayısı için süreklilik tanımından öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $x \in I$ ve $|\,x - x_0\,| < \delta_1$ iken $|\,g(x) - g(x_0)\,| < \frac{|\,g(x_0)\,|}{2}$ olur. Ters üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) bu noktalarda*

$$|\,g(x)\,| \geq |\,g(x_0)\,| - |\,g(x) - g(x_0)\,| > |\,g(x_0)\,| - \frac{|\,g(x_0)\,|}{2} = \frac{|\,g(x_0)\,|}{2} > 0$$

verir. I açık olduğundan $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \subseteq I$ olacak biçimde bir $\delta_2 > 0$ da vardır. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ve $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ alalım: J açıktır, $J \subseteq I$'dır ve J üzerinde g hiç sıfırlanmaz. Dolayısıyla f/g fonksiyonu J üzerinde tanımlıdır. Aşağıdaki bütün limitleri J içinde alıyoruz; limit yerel bir kavram olduğundan bu bir kısıtlama getirmez.

İkinci adım: $1/g$'nin türevi. *$h = 1/g$ diyelim; h, J üzerinde tanımlıdır. $x \in J$, $x \neq x_0$ için paydaları eşitleyerek*

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

elde ederiz. $x \to x_0$ iken $g(x) \to g(x_0)$ ve $g(x_0) \neq 0$ olduğundan $\frac{1}{g(x)g(x_0)} \to \frac{1}{[g(x_0)]^2}$ olur (bölümün limiti; payda limiti sıfırdan farklı). İkinci çarpanın limiti $g'(x_0)$'dır. O hâlde

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[\,g(x_0)]^2}.$$

Üçüncü adım: çarpım kuralı. *Artık $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ yazıp (3) maddesini uygulayabiliriz:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(-\frac{g'(x_0)}{\left[\,g(x_0)\right]^2}\right)\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)}{\left[\,g(x_0)\right]^2} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{\left[\,g(x_0)\right]^2}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left[\,g(x_0)\right]^2}.\end{aligned}$$

Böylece dört kural da ispatlanmış oldu.
■

Bölüm kuralını dolambaçsız, tek hamlede de ispatlayabiliriz; sonuç aynıdır ama hesap biraz daha kalabalıktır. Meraklı okuyucu için: $x \neq x_0$ için

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$$

yazılır ve paya $f(x_0)g(x_0)$ terimi eklenip çıkarılırsa

$$\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = g(x_0)\cdot\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\cdot\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

elde edilir; limit alınca aynı formül çıkar.

⚠ Kurallar tersine işlemez

$f + g$ ya da fg fonksiyonunun bir noktada türevlenebilir olması, f ile g'nin orada türevlenebilir olmasını **gerektirmez.**

- $f(x) = |\,x\,|$ ve $g(x) = -|\,x\,|$ alalım. İkisi de 0'da türevlenemez, ama $(f+g)(x) = 0$ sabit fonksiyonudur ve her yerde türevlenebilirdir.
- $f(x) = g(x) = |\,x\,|$ alalım. İkisi de 0'da türevlenemez, ama $(fg)(x) = |\,x\,|^2 = x^2$ fonksiyonu 0'da türevlenebilirdir.

Aynı biçimde bölüm kuralındaki $g(x_0) \neq 0$ koşulu atılamaz: $f(x) = x$, $g(x) = x$ ve $x_0 = 0$ için f/g fonksiyonu 0'da tanımlı bile değildir. Teoremler "türevlenebilirse şu formülü verir" der; "türevlenebilir olduğunu tespit eder" demez.

Kuralları hemen bir hesapta çalıştıralım. Çarpım kuralının doğruluğunu, çarpımı açıp terim terim türev alarak bağımsız biçimde de doğrulayabiliriz.

Örnek 3.2 (Çarpım Kuralıyla Bir Hesap ve Doğrulaması). $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x)$ fonksiyonunun türevini önce çarpım kuralıyla, sonra çarpımı açarak hesaplayalım ve iki sonucun aynı olduğunu görelim.

Çözüm.
Çarpım kuralıyla. $u(x) = x^2+1$ ve $v(x) = x^3-2x$ diyelim. Birazdan ispatlayacağımız kuvvet kuralını ve toplam kuralını kullanarak $u'(x) = 2x$ ve $v'(x) = 3x^2-2$ buluruz. Teorem 3.2'nin üçüncü maddesi gereği

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\ &= 2x\,(x^3-2x) + (x^2+1)(3x^2-2)\\ &= (2x^4-4x^2) + (3x^4-2x^2+3x^2-2)\\ &= 2x^4-4x^2+3x^4+x^2-2\\ &= 5x^4-3x^2-2.\end{aligned}$$

Çarpımı açarak. Önce çarpımı yapalım:

$$f(x) = (x^2+1)(x^3-2x) = x^5-2x^3+x^3-2x = x^5-x^3-2x.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Toplam ve sabitle çarpım kurallarıyla terim terim türev alalım:

$$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2.$$

İki yol aynı sonucu verdi. Kontrol için bir nokta seçelim: $x = 1$ için $f'(1) = 5 - 3 - 2 = 0$'dır; yani $f(x) = x^5 - x^3 - 2x$ eğrisinin $x = 1$ noktasındaki teğeti yataydır.
Burada iki yol da işe yaradı, çünkü çarpanlar polinomdu. Çarpanlardan biri polinom olmasaydı (örneğin $\sin x$ ya da $\sqrt{x}$ olsaydı) "açıp terim terim türev alma" seçeneği olmayacaktı; çarpım kuralı vazgeçilmez hâle gelirdi.
■

3.3 Kuvvet Kuralı ve Polinomların Türevi

Elimizdeki kurallarla artık türev hesabının en çok kullanılan tek formülünü kurabiliriz. Önce doğal sayı üsler için tümevarımla, sonra negatif tam sayı üsler için bölüm kuralıyla.

Lemma 3.1 (Doğal Sayı Üsler için Kuvvet Kuralı). *Her $n \in \mathbb{N}$ (yani $n \geq 1$) ve her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^n$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

İspat.
n üzerinden tümevarım yapalım (bkz. Analiz 1).
Temel adım. *$n = 1$ için $f(x) = x$'tir. Her x_0 ve $x \neq x_0$ için fark oranı $\frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$'dir; sabit 1 fonksiyonunun limiti 1 olduğundan $f'(x_0) = 1$'dir. Öte yandan $nx^{n-1} = 1 \cdot x^0 = 1$; formül sağlanır.*
Tümevarım adımı. *Formülün n için doğru olduğunu varsayalım: her x için $(x^n)' = nx^{n-1}$. Şimdi $n + 1$ için bakalım. $x^{n+1} = x \cdot x^n$ olduğundan, $u(x) = x$ ve $v(x) = x^n$ fonksiyonlarına çarpım kuralını (Teorem 3.2) uygulayabiliriz; ikisi de türevlenebilirdir (v için tümevarım hipotezi). O hâlde x^{n+1} türevlenebilirdir ve*

$$\left(x^{n+1}\right)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

Sağ taraf tam olarak $(n+1)x^{(n+1)-1}$'dir; formül $n + 1$ için de doğrudur. Tümevarım ilkesi gereği iddia her $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir.
■

Kuvvet kuralı negatif üslere de taşınır; tek fark, tanım kümesinden orijini atmak zorunda olmamızdır.

Sonuç 3.1 (Tam Sayı Üsler için Kuvvet Kuralı). *$n \in \mathbb{Z}$ ve $n < 0$ olsun. $f(x) = x^n$ fonksiyonu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde türevlenebilirdir ve orada*

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

olur. Sonuç olarak, $(x^n)' = nx^{n-1}$ formülü her $n \in \mathbb{Z}$ için geçerlidir: $n \geq 1$ ise $\mathbb{R}$ üzerinde, $n \leq -1$ ise $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde. ($n = 0$ hâlinde $x^0 = 1$ sabit fonksiyonudur ve türevi her yerde 0'dır; formül $x \neq 0$ için yine doğrudur.)

İspat.
$n < 0$ olduğundan $m = -n$ yazarsak $m \geq 1$ bir doğal sayıdır ve $x \neq 0$ için

$$f(x) = x^n = \frac{1}{x^m}.$$

Pay sabit 1 fonksiyonudur, türevi 0'dır; payda $g(x) = x^m$ fonksiyonudur ve Lemma 3.1 gereği $g'(x) = mx^{m-1}$'dir. $x \neq 0$ iken $g(x) = x^m \neq 0$ olduğundan bölüm kuralını (Teorem 3.2) uygulayabiliriz:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot mx^{m-1}}{\left(x^m\right)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m\,x^{m-1-2m} = -m\,x^{-m-1}.$$

Şimdi $-m = n$ olduğundan $-mx^{-m-1} = nx^{n-1}$'dir; istenen elde edilmiş olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Toplam ve sabitle çarpım kuralları, kuvvet kuralıyla birleşince polinomların türevini tek satırda verir.

Sonuç 3.2 (Polinomların Türevi). *$n \geq 1$ ve $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinomu $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1}$$

olur. Özel olarak P' de bir polinomdur; $a_n \neq 0$ ve $n \geq 1$ ise P' polinomunun derecesi $n-1$'dir. Sabit polinomların türevi ise özdeş olarak sıfırdır.

İspat.
$k \geq 1$ için Lemma 3.1 gereği $x \mapsto x^k$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve türevi kx^{k-1}'dir. Teorem 3.2'nin ikinci maddesi gereği $x \mapsto a_k x^k$ de türevlenebilirdir ve türevi $ka_k x^{k-1}$'dir. Sabit terim a_0 için türev 0'dır.
Şimdi toplam kuralını kullanacağız. Toplam kuralı iki fonksiyon için ifade edilmişti; sonlu çok fonksiyona genişletmek tümevarımla olur. Gerçekten m tane türevlenebilir fonksiyonun toplamının türevlenebilir olduğunu ve türevinin türevler toplamına eşit olduğunu varsayalım; $m+1$ tanesi için

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} u_k\right)' = \left(\left(\sum_{k=1}^{m} u_k\right) + u_{m+1}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{m} u_k\right)' + u'_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} u'_k$$

olur; burada ortadaki eşitlik iki fonksiyonluk toplam kuralıdır. Tümevarım tamamlandı.
Bunu $u_k(x) = a_k x^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ fonksiyonlarına uygularsak P türevlenebilirdir ve

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\, a_k x^k\right)' = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1}$$

elde edilir. Derece iddiası açıktır: toplamda x^{n-1} teriminin katsayısı na_n'dir ve $n \geq 1, a_n \neq 0$ olduğundan $na_n \neq 0$'dır.
■

Pratik okuma

Polinom türevinin kuralı tek cümleyle akılda kalır: **her terimde üssü katsayıya çarpan olarak indir, üssü bir azalt; sabit terimi at.** Örneğin $7x^4$ teriminin türevi $28x^3$, $-x$ teriminin türevi -1, 12 teriminin türevi 0'dır.

Örnek 3.3 (Polinom Türevleri). Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

$$P(x) = 4x^5 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 9 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad Q(x) = 2x^3 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} \quad (x \neq 0).$$

Ayrıca $y = P(x)$ eğrisinin $x = 1$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini yazalım.

Çözüm.
Birinci fonksiyon. Sonuç 3.2 gereği terim terim türev alalım:

$$P'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 20x^4 - 9x^2 + 14x - 2.$$

İkinci fonksiyon. Q bir polinom değildir, ama negatif üslü kuvvetlerin bir lineer birleşimidir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$Q(x) = 2x^3 - 5x^{-2} + 3x^{-1}.$$

Sonuç 3.1 gereği $\left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3}$ ve $\left(x^{-1}\right)' = -x^{-2}$'dir. Sabitle çarpım ve toplam kurallarıyla, $x \neq 0$ için

$$Q'(x) = 6x^2 - 5\cdot(-2x^{-3}) + 3\cdot(-x^{-2}) = 6x^2 + \frac{10}{x^3} - \frac{3}{x^2}.$$

Teğet doğrusu. Türev, teğetin eğimidir. Önce değerleri hesaplayalım:

$$P(1) = 4 - 3 + 7 - 2 + 9 = 15, \qquad P'(1) = 20 - 9 + 14 - 2 = 23.$$

Teğet doğrusu $(1, 15)$ noktasından geçer ve eğimi 23'tür:

$$y - 15 = 23(x - 1), \qquad \text{yani} \qquad y = 23x - 8.$$

■

3.4 Rasyonel Fonksiyonların Türevi

İki polinomun oranı olarak yazılan fonksiyonlara **rasyonel fonksiyon** (rational function) denir. Bölüm kuralı, bu ailenin tamamının türevini bir çırpıda verir.

Sonuç 3.3 (Rasyonel Fonksiyonların Türevi). *P ve Q polinomlar ve Q özdeş olarak sıfır olmasın. $D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ kümesi açıktır ve*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad x \in D$$

rasyonel fonksiyonu D'nin her noktasında türevlenebilirdir; türevi

$$R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{\left[\,Q(x)\right]^2}$$

olup yine D üzerinde tanımlı bir rasyonel fonksiyondur.

İspat.
Önce D'nin açık olduğunu görelim. $x_0 \in D$ olsun, yani $Q(x_0) \neq 0$. Polinomlar $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1); dolayısıyla $\varepsilon = \frac{|\,Q(x_0)\,|}{2} > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $|\,x - x_0\,| < \delta$ iken $|\,Q(x) - Q(x_0)\,| < \frac{|\,Q(x_0)\,|}{2}$ olur. Ters üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği bu x'ler için

$$|\,Q(x)\,| \geq |\,Q(x_0)\,| - |\,Q(x) - Q(x_0)\,| > \frac{|\,Q(x_0)\,|}{2} > 0,$$

yani $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$'dir. Her noktası iç nokta olduğundan D açıktır (bkz. Analiz 1). Ayrıca Q özdeş sıfır olmadığından Q'nun kökleri sonlu sayıdadır ve D, $\mathbb{R}$'den sonlu bir küme çıkarılarak elde edilir; özel olarak $D \neq \varnothing$'dir.
Şimdi $x_0 \in D$ sabitleyelim. P ve Q polinomları Sonuç 3.2 gereği x_0'da türevlenebilirdir ve $Q(x_0) \neq 0$'dır. Teorem 3.2'nin bölüm kuralı doğrudan uygulanır ve

$$R'(x_0) = \frac{P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)}{\left[\,Q(x_0)\right]^2}$$

verir. $x_0 \in D$ keyfî olduğundan formül D üzerinde geçerlidir. Sağ taraftaki pay ve payda polinom olduğundan R' de rasyonel bir fonksiyondur; paydası Q^2'dir ve Q^2 tam olarak D üzerinde sıfırdan farklıdır, yani R' ile R aynı kümede tanımlıdır.
■

Formülü bir örnekte çalıştıralım. Aşağıdaki hesabı ikinci bir yolla da doğrulayacağız; bu, bölüm kuralında işaret hatası yapıp yapmadığımızı anlamanın en hızlı yoludur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 3.4 (Bölüm Kuralıyla Bir Hesap). $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ fonksiyonunun ($x \neq 1$) türevini hesaplayalım, sonucu sadeleştirip f''nün sıfır olduğu noktaları bulalım ve hesabı bağımsız bir yolla doğrulayalım.

Çözüm.
Bölüm kuralı. $P(x) = x^3$, $Q(x) = x - 1$ diyelim; $P'(x) = 3x^2$, $Q'(x) = 1$'dir. $x \neq 1$ için $Q(x) \neq 0$ olduğundan Sonuç 3.3 uygulanır:

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{\big[\,Q(x)\big]^2} = \frac{(3x^2)(x-1) - (x^3)(1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

Türevin sıfırları. $x \neq 1$ için payda sıfırdan farklıdır; dolayısıyla $f'(x) = 0$ olması ancak $x^2(2x-3) = 0$ olmasıyla, yani $x = 0$ ya da $x = \frac{3}{2}$ olmasıyla mümkündür. Türevin işaretine bakalım: $x \neq 0$ için $x^2 > 0$, ayrıca $x \neq 1$ için $(x-1)^2 > 0$ olduğundan, $x \neq 0$ noktalarında $f'(x)$'in işareti $2x - 3$ çarpanının işaretiyle aynıdır ($x = 0$ noktasında ise $f'(0) = 0$'dır). Demek ki $f'(x) < 0$ olması $x < \frac{3}{2}$ (ve $x \neq 0, 1$) ile, $f'(x) > 0$ olması $x > \frac{3}{2}$ ile eşdeğerdir. $x = 0$ noktasında türev sıfırdır ama işaret değişmez; $x = \frac{3}{2}$ noktasında işaret $-$'den $+$'ya döner. $f\big(\frac{3}{2}\big) = \frac{27/8}{1/2} = \frac{27}{4}$'tür.
Bağımsız doğrulama. Bölme işlemi yaparak f'yi bir polinom artı basit bir kesir olarak yazalım. $x^3 = (x-1)(x^2 + x + 1) + 1$ olduğundan, $x \neq 1$ için

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Burada polinom kısmının türevi $2x + 1$'dir. Son terim için bölüm kuralını (ya da $\big(\frac{1}{g}\big)' = -\frac{g'}{g^2}$ formülünü) kullanırsak $\big(\frac{1}{x-1}\big)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ bulunur. O hâlde

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(2x+1)(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}.$$

Payı açalım:

$$(2x+1)(x^2 - 2x + 1) - 1 = 2x^3 - 4x^2 + 2x + x^2 - 2x + 1 - 1 = 2x^3 - 3x^2.$$

Bu, birinci yolda bulduğumuz payın aynısıdır; iki hesap örtüşüyor.
■

Sıradaki örnek çarpım ve bölüm kurallarını birlikte kullanmayı gösteriyor. Böyle hesaplarda izlenecek yol bellidir: fonksiyonu en dıştaki işlemine göre parçala, parçaların türevini ayrı ayrı hesapla, sonra kuralı uygula.

Örnek 3.5 (Çarpım ve Bölüm Kurallarının Birlikte Kullanımı). $h(x) = \dfrac{(x^2-1)(x+3)}{x^2+1}$ fonksiyonunun türevini bulalım ve $h'(0)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm.
Fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır, çünkü $x^2 + 1 \geq 1 > 0$'dır. En dıştaki işlem bölmedir; o hâlde

$$N(x) = (x^2-1)(x+3), \qquad D(x) = x^2 + 1$$

diyelim. $D'(x) = 2x$'tir. N'nin türevini **çarpım kuralıyla** hesaplayalım:

$$N'(x) = (2x)(x+3) + (x^2-1)(1) = 2x^2 + 6x + x^2 - 1 = 3x^2 + 6x - 1.$$

(Kontrol: $N(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ açılımından terim terim türev de $3x^2 + 6x - 1$ verir.)
Şimdi bölüm kuralı:

$$h'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{\big[\,D(x)\big]^2} = \frac{(3x^2 + 6x - 1)(x^2+1) - (x^3 + 3x^2 - x - 3)(2x)}{(x^2+1)^2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Payı adım adım açalım:

$$(3x^2+6x-1)(x^2+1) = 3x^4+6x^3-x^2+3x^2+6x-1 = 3x^4+6x^3+2x^2+6x-1,$$
$$(x^3+3x^2-x-3)(2x) = 2x^4+6x^3-2x^2-6x.$$

Farkı alalım:

$$\left(\ 3x^4-2x^4\ \right)+\left(\ 6x^3-6x^3\ \right)+\left(\ 2x^2+2x^2\ \right)+\left(\ 6x+6x\ \right)-1 = x^4+4x^2+12x-1.$$

Sonuç:

$$h'(x) = \frac{x^4+4x^2+12x-1}{(x^2+1)^2}.$$

Özel olarak $h'(0) = \frac{-1}{1} = -1$'dir. Bu değeri kurallara hiç başvurmadan, doğrudan fark oranından da doğrulayabiliriz: $h(0) = \frac{(-1)(3)}{1} = -3$ olduğundan, $x \neq 0$ için

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+1}+3\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3+6x^2-x}{x^2+1} = \frac{x^2+6x-1}{x^2+1}$$

olur; $x \to 0$ iken sağ taraf $\frac{-1}{1} = -1$'e gider. Demek ki grafiğin $(0,-3)$ noktasındaki teğetinin eğimi -1'dir.

■

3.5 Sonlu Çok Çarpanlı Çarpım Kuralı

Çarpım kuralı iki çarpan için ifade edildi; ama pratikte üç, dört, hatta n tane çarpanla karşılaşırız. Kuralı her seferinde ikişer ikişer uygulamak mümkündür, ne var ki sonucun genel biçimini bir kez ve temelli yazmak hem hesabı hızlandırır hem de yapıyı gösterir: **çarpımın türevi, her seferinde bir çarpanın türevlenip diğerlerinin olduğu gibi bırakıldığı n terimin toplamıdır.**

Önerme 3.1 (Sonlu Çok Çarpan için Çarpım Kuralı). *$n \geq 1$ bir doğal sayı, $I \subseteq \mathbb{R}$ açık ve $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının hepsi $x_0 \in I$ noktasında türevlenebilir olsun. O hâlde $F = f_1 f_2 \cdots f_n$ çarpımı x_0'da türevlenebilirdir ve*

$$F'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_0)\cdots f_{k-1}(x_0)\, f_k'(x_0)\, f_{k+1}(x_0)\cdots f_n(x_0)$$

olur. Yani toplamdaki k-ıncı terimde yalnızca k-ıncı çarpanın türevi alınmış, diğerleri x_0'daki değerleriyle bırakılmıştır.

İspat.
n üzerinden tümevarım yapıyoruz (bkz. Analiz 1).
Temel adım. *$n = 1$ için ifade $F = f_1$ ve $F'(x_0) = f_1'(x_0)$ demektir; doğrudur. $n = 2$ için ifade tam olarak çarpım kuralıdır (Teorem 3.2): $F'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)$.*
Tümevarım adımı. *Formülün n çarpan için doğru olduğunu varsayalım. $f_1, \ldots, f_{n+1}$ fonksiyonları x_0'da türevlenebilir olsun ve*

$$F = f_1 f_2 \cdots f_n, \qquad G = F \cdot f_{n+1} = f_1 f_2 \cdots f_{n+1}$$

yazalım. Tümevarım hipotezi gereği F, x_0'da türevlenebilirdir; f_{n+1} de öyledir. İki fonksiyonluk çarpım kuralı G'nin türevlenebilir olduğunu ve

$$G'(x_0) = F'(x_0)f_{n+1}(x_0) + F(x_0)f_{n+1}'(x_0)$$

olduğunu verir. Şimdi $F'(x_0)$ yerine tümevarım hipotezindeki toplamı, $F(x_0)$ yerine de $f_1(x_0)\cdots f_n(x_0)$ çarpımını koyalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$G'(x_0) = \left(\sum_{k=1}^{n} f_1(x_0)\cdots f_k'(x_0)\cdots f_n(x_0)\right) f_{n+1}(x_0) + f_1(x_0)\cdots f_n(x_0)\, f_{n+1}'(x_0)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f_1(x_0)\cdots f_k'(x_0)\cdots f_n(x_0) f_{n+1}(x_0) + f_1(x_0)\cdots f_n(x_0) f_{n+1}'(x_0).$$

Birinci toplamdaki her terim, $k = 1, \ldots, n$ için "yalnızca k-ıncı çarpanı türevlenmiş $n+1$ çarpanlı terim"dir; sondaki tek terim ise $k = n+1$ durumudur. İkisi birleşince

$$G'(x_0) = \sum_{k=1}^{n+1} f_1(x_0)\cdots f_{k-1}(x_0)\, f_k'(x_0)\, f_{k+1}(x_0)\cdots f_{n+1}(x_0)$$

elde edilir; bu da formülün $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. Tümevarım ilkesi gereği iddia her $n \geq 1$ için geçerlidir.
■

i Formülün simetrik yüzü

Bütün çarpanlar x_0'da sıfırdan farklıysa, Önerme 3.1'deki eşitliği $F(x_0) = f_1(x_0)\cdots f_n(x_0) \neq 0$ ile bölerek çok daha kolay akılda kalan bir biçime sokabiliriz:

$$\frac{F'(x_0)}{F(x_0)} = \frac{f_1'(x_0)}{f_1(x_0)} + \frac{f_2'(x_0)}{f_2(x_0)} + \cdots + \frac{f_n'(x_0)}{f_n(x_0)}.$$

"Çarpımın göreli değişimi, çarpanların göreli değişimlerinin toplamıdır." Bu eşitlik ileride logaritmanın türeviyle yeniden karşımıza çıkacak.

Bütün çarpanlar aynı fonksiyona eşit alınırsa, zincir kuralına hiç ihtiyaç duymadan çok kullanışlı bir sonuç elde ederiz.

Sonuç 3.4 (Bir Fonksiyonun Kuvvetinin Türevi). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in I$ noktasında türevlenebilir ve $n \geq 1$ bir doğal sayı olsun. O hâlde f^n fonksiyonu x_0'da türevlenebilirdir ve*

$$\left(f^n\right)'(x_0) = n\left[f(x_0)\right]^{n-1} f'(x_0).$$

İspat.
Önerme 3.1'i $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$ seçerek uygulayalım. Toplamdaki her terim aynıdır: k-ıncı terimde bir tane $f'(x_0)$ ve $n-1$ tane $f(x_0)$ çarpanı bulunur, yani her terim $\left[f(x_0)\right]^{n-1} f'(x_0)$'a eşittir. Toplamda n terim olduğundan

$$\left(f^n\right)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_0)\right]^{n-1} f'(x_0) = n\left[f(x_0)\right]^{n-1} f'(x_0)$$

olur.
■

Örnek 3.6 (Üç Çarpanlı Bir Çarpım ve Bir Kuvvet). Aşağıdaki türevleri hesaplayalım.

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3), \qquad q(x) = (x^2+1)^3.$$

Ayrıca $p'(2)$ değerini bulalım.

Çözüm.
Üç çarpanlı çarpım. Önerme 3.1 gereği, her seferinde bir çarpanı türevleyip diğerlerini bırakırız. Üç çarpanın da türevi 1'dir; dolayısıyla

$$p'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bunu açarsak

$$p'(x) = (x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 4x + 3) + (x^2 - 3x + 2) = 3x^2 - 12x + 11$$

buluruz. Doğrulayalım: $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ açılımından terim terim türev de $3x^2 - 12x + 11$ verir.
Şimdi $p'(2)$'yi hesaplamak için çarpanlı biçim çok daha elverişlidir; $x = 2$'de birinci ve üçüncü terim sıfırlanır:

$$p'(2) = (2-2)(2-3) + (2-1)(2-3) + (2-1)(2-2) = 0 + (1)(-1) + 0 = -1.$$

(Açılmış biçimden de $3 \cdot 4 - 24 + 11 = -1$ gelir.) Genel gözlem: p polinomunun $x = a$ kökü basit bir kökse, $p'(a)$ değeri diğer çarpanların a'daki değerlerinin çarpımına eşittir.
Bir kuvvet. $f(x) = x^2 + 1$ alalım; $f'(x) = 2x$'tir. Sonuç 3.4 gereği $n = 3$ için

$$q'(x) = 3\,\big(\,x^2+1\big)^2 \cdot 2x = 6x\,\big(\,x^2+1\big)^2.$$

Kontrol edelim: $q(x) = (x^2+1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ açılımından (bkz. Analiz 1) $q'(x) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$; öte yandan $6x(x^2+1)^2 = 6x(x^4 + 2x^2 + 1) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$. Aynı sonuç.
■

3.6 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (Türev Kuralları Üzerine).

a) $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)(x^3 + 5)$ fonksiyonunun türevini iki farklı yolla — önce çarpım kuralıyla, sonra çarpımı açarak — hesaplayınız ve sonuçların aynı olduğunu gösteriniz.

b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$ fonksiyonunun türevini bulunuz ve $g'(x) = 0$ denklemini çözünüz.

c) $x \neq 0$ için $h(x) = x^{-3} + \dfrac{4}{x} + 7$ fonksiyonunun türevini bulunuz ve $h'(1)$ değerini hesaplayınız.

d) $\varphi(x) = x\,|\,x\,|$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğunu gösteriniz ve φ' fonksiyonunu bulunuz. φ' fonksiyonu 0'da türevlenebilir midir?

e) "İki fonksiyonun çarpımının türevi, türevlerinin çarpımıdır" iddiasının, yani $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$ eşitliğinin genel olarak yanlış olduğunu bir karşı örnekle gösteriniz. Ardından $f(x) = g(x) = x$ alarak bu eşitliğin sağlandığı bütün x_0 noktalarını bulunuz.

f) $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in I$ noktasında türevlenebilir ve $f(x_0) \neq 0$ olsun. Bölüm kuralına başvurmadan, yalnızca çarpım kuralını ve $\left(\frac{1}{f}\right) \cdot f = 1$ özdeşliğini kullanarak $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$ olduğunu gösteriniz. (Bu yolda $1/f$'nin x_0'da türevlenebilir olduğunu **varsayabilirsiniz**; gösterilmesi istenen yalnızca formüldür.)

Çözüm.
a) $u(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ve $v(x) = x^3 + 5$ diyelim; $u'(x) = 6x - 2$, $v'(x) = 3x^2$'dir. Çarpım kuralıyla

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x-2)(x^3+5) + (3x^2 - 2x + 1)(3x^2) \\ &= \big(\,6x^4 + 30x - 2x^3 - 10\,\big) + \big(\,9x^4 - 6x^3 + 3x^2\,\big) \\ &= 15x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 30x - 10. \end{aligned}$$

Şimdi çarpımı açalım:

$$f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 15x^2 - 10x + 5.$$

Gerçekten $3x^2 \cdot x^3 = 3x^5$, $-2x \cdot x^3 = -2x^4$, $1 \cdot x^3 = x^3$, $3x^2 \cdot 5 = 15x^2$, $-2x \cdot 5 = -10x$, $1 \cdot 5 = 5$'tir. Sonuç 3.2 gereği terim terim türev alırsak

$$f'(x) = 15x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 30x - 10$$

 CC BY-NC-SA 4.0

buluruz; iki yol örtüşüyor.
b) $P(x) = 2x+1$, $Q(x) = x^2+3$ diyelim; $P'(x) = 2$, $Q'(x) = 2x$'tir. Her x için $Q(x) \geq 3 > 0$ olduğundan g, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve türevlenebilirdir (Sonuç 3.3):

$$g'(x) = \frac{2(x^2+3) - (2x+1)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2+6-4x^2-2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2} = \frac{-2\left(x^2+x-3\right)}{(x^2+3)^2}.$$

Payda hiç sıfırlanmadığından $g'(x) = 0$ olması ancak $x^2+x-3 = 0$ olmasıyla mümkündür. Diskriminant $1+12 = 13$ olduğundan kökler

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

sayılarıdır. Bu iki nokta g'nin yerel ekstremum adaylarıdır.
c) Fonksiyonu negatif üslerle yazalım: $h(x) = x^{-3} + 4x^{-1} + 7$. Sonuç 3.1, sabitle çarpım ve toplam kurallarıyla, $x \neq 0$ için

$$h'(x) = -3x^{-4} + 4 \cdot (-1)x^{-2} + 0 = -\frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^2}.$$

Buradan $h'(1) = -3-4 = -7$'dir. Ayrıca $x \neq 0$ iken $x^4 > 0$ ve $x^2 > 0$ olduğundan $h'(x) < 0$'dır: h, tanım kümesinin her iki bileşeninde kesin azalandır.
d) Önce fonksiyonu parçalı yazalım (bkz. Analiz 1):

$$\varphi(x) = x \mid x \mid = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

$x_0 > 0$ noktalarında. x_0'ın $(0,\infty)$ içinde kalan bir komşuluğunda $\varphi(x) = x^2$'dir; türev yerel bir kavram olduğundan Lemma 3.1 gereği $\varphi'(x_0) = 2x_0$'dır.
$x_0 < 0$ noktalarında. Benzer biçimde x_0'ın bir komşuluğunda $\varphi(x) = -x^2$'dir ve $\varphi'(x_0) = -2x_0$'dır.
$x_0 = 0$ noktasında. Fark oranını doğrudan hesaplayalım: $x \neq 0$ için

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{x \mid x \mid}{x} = \mid x \mid .$$

Mutlak değer fonksiyonu 0'da sürekli olduğundan $\lim_{x\to 0} \mid x \mid = 0$'dır. Demek ki φ, 0'da türevlenebilirdir ve $\varphi'(0) = 0$'dır.
Üç durumu birleştirirsek her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi'(x) = 2 \mid x \mid$$

olur; gerçekten $x > 0$ için $2x = 2 \mid x \mid$, $x < 0$ için $-2x = 2 \mid x \mid$ ve $x = 0$ için $0 = 2 \mid 0 \mid$'dır. Son soruya gelince: $\varphi' = 2 \mid x \mid$ fonksiyonu, Örnek 3.1'de gördüğümüz gibi 0'da türevlenebilir değildir (sağ türevi 2, sol türevi -2'dir). Yani φ her yerde türevlenebilirdir ama ikinci türevi 0'da yoktur; türevlenebilirlik, türevin de türevlenebilir olmasını gerektirmez.
e) $f(x) = g(x) = x$ ve $x_0 = 0$ alalım. Bu durumda $(fg)(x) = x^2$ ve Lemma 3.1 gereği $(fg)'(0) = 2 \cdot 0 = 0$'dır. Öte yandan $f'(0) = g'(0) = 1$ olduğundan $f'(0)g'(0) = 1$'dir. $0 \neq 1$ olduğundan iddia yanlıştır.
İkinci kısım: yine $f(x) = g(x) = x$ alalım. Her x_0 için $(fg)'(x_0) = 2x_0$ ve $f'(x_0)g'(x_0) = 1 \cdot 1 = 1$'dir. Eşitlik $2x_0 = 1$, yani yalnızca $x_0 = \frac{1}{2}$ için sağlanır. Demek ki "yanlış kural" tek bir noktada tesadüfen doğru sonuç verebilir; bu, kuralı doğrulamaz.
f) J, x_0'ın f'nin hiç sıfırlanmadığı bir açık komşuluğu olsun; böyle bir komşuluğun varlığı Teorem 3.2'nin bölüm kuralı ispatındaki birinci adımda gösterilmişti (f, x_0'da türevlenebilir olduğundan Teorem 3.1 gereği süreklidir). J üzerinde $\psi = \frac{1}{f}$ fonksiyonu tanımlıdır ve

$$\psi(x)\, f(x) = 1, \qquad x \in J$$

özdeşliği geçerlidir. Sağ taraf sabit fonksiyondur; türevi 0'dır. Sol tarafa çarpım kuralını uygulayalım (ψ'nin x_0'da türevlenebilir olduğunu varsayıyoruz):

$$\psi'(x_0)f(x_0) + \psi(x_0)f'(x_0) = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Burada $\psi(x_0) = \frac{1}{f(x_0)}$'dır. Eşitliği $\psi'(x_0)$ için çözelim; $f(x_0) \neq 0$ olduğundan bölmekte sakınca yoktur:

$$\psi'(x_0) = -\frac{\psi(x_0) f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{1}{f(x_0)} \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{\big[\, f(x_0)\big]^2}.$$

İstenen formül elde edildi. Bu yöntem, bir fonksiyonun türevini "onu tanımlayan özdeşliği türevleyerek" bulmanın ilk örneğidir; aynı fikir ters fonksiyonun türevini bulurken de işimize yarayacaktır.
■

Bu bölümde türev almayı toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleriyle uzlaştırdık; artık her polinomun ve her rasyonel fonksiyonun türevini hiç limit hesabı yapmadan yazabiliyoruz. Geriye cebirsel işlemlerin en güçlüsü kaldı: **bileşke.** Bir sonraki bölümde $f(g(x))$ biçimindeki fonksiyonların türevini veren zincir kuralını ispatlayacak, ardından bu kuralı ters fonksiyonun türevini bulmak için kullanacağız: Zincir Kuralı ve Ters Fonksiyonun Türevi.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Zincir Kuralı ve Ters Fonksiyonun Türevi

Türev Alma Kuralları bölümünde türevin toplama, çarpma ve bölme işlemleriyle nasıl uyuştuğunu gördük. Bu kurallar, elimizdeki fonksiyonları **cebirsel** işlemlerle birleştirdiğimizde işe yarar. Oysa fonksiyonlarla yapılan en doğal işlem cebirsel değildir: **bileşke** (composition). $\sqrt{1+x^2}$, $(3x^2-5x+1)^{10}$, $\sin(x^2)$ gibi ifadelerin hiçbiri toplama–çarpma–bölme ile kısa yoldan parçalanamaz; hepsi "önce içerideki fonksiyonu uygula, sonra dışarıdakini" biçimindedir. Bu bölümün ilk yarısı, bileşkenin türevini veren **zincir kuralını** (chain rule) kurar.

Zincir kuralının sezgisi, türevin "yerel büyütme oranı" yorumundan gelir. x_0 noktasından küçük bir Δx kadar kımıldarsak, $u=f(x)$ değeri $u_0=f(x_0)$'dan yaklaşık $f'(x_0)\,\Delta x$ kadar uzaklaşır; bu kımıltı da g tarafından yaklaşık $g'(u_0)$ katına çıkarılır. İki büyütme oranı **çarpılır**. Formül de tam olarak budur:

$$(g\circ f)'(x_0)=g'\left(\,f(x_0)\,\right)f'(x_0).$$

Ne var ki bu sezgiyi ispata çevirirken beklenmedik bir engel çıkar: "$f(x)-f(x_0)$ ile çarpıp bölelim" demek, $f(x)=f(x_0)$ olan noktalarda anlamsızdır ve böyle noktalar x_0'a istediğimiz kadar yakında bulunabilir. Bu yüzden klasik ispat iki duruma ayrılır. Ardından, durum ayrımını tamamen ortadan kaldıran çok daha temiz bir yol göstereceğiz: **Carathéodory ölçütü**. Bu ölçüt türevlenebilirliği bir limit yerine bir **süreklilik** koşuluna çevirir; zincir kuralı da, ters fonksiyonun türevi de o çeviriden sonra neredeyse kendiliğinden çıkar.

Bölümün ikinci yarısında, Monoton Fonksiyonlar ve Ters Fonksiyonun Sürekliliği bölümünde kurduğumuz zemin üzerine **ters fonksiyonun türevi** teoremini oturtacağız: f birebir, sürekli ve x_0'da $f'(x_0)\neq 0$ ise, f^{-1} de $y_0=f(x_0)$'da türevlenebilirdir ve türevi $1/f'(x_0)$'dır. $f'(x_0)=0$ olduğunda ne olduğunu $f(x)=x^3$ örneğiyle göreceğiz: ters fonksiyonun grafiği o noktada **düşey teğete** sahip olur ve türev yoktur.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: zincir kuralının ifadesi ve iki ayrı ispatı; Carathéodory ölçütü; Leibniz gösterimi $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ve bu gösterimin neden bir "sadeleştirme" olmadığı; çok katmanlı bileşkelerin türevi; ters fonksiyonun türevi ve bunun karekök ile rasyonel kuvvetlere uygulanması.

4.1 Zincir Kuralı

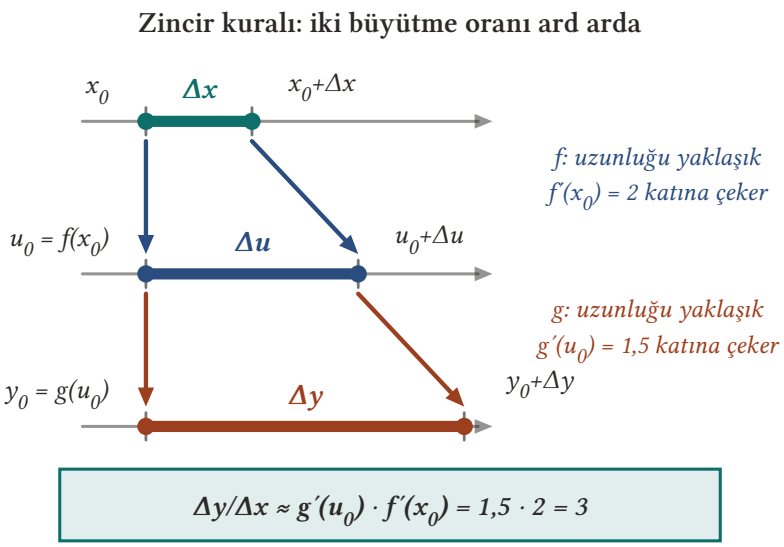
Önce ifadeyi kuralım. f'nin görüntü kümesi g'nin tanım kümesinin içinde kalmalı ki bileşke tanımlı olsun (bkz. Analiz 1). Türev yerel bir kavram olduğu için x_0'ın I'nın **iç** noktası, $y_0=f(x_0)$'ın da J'nin iç noktası olmasını isteyeceğiz; en rahat yol I ve J'yi açık aralık almaktır.

Teorem 4.1 (Zincir Kuralı). *$I,J\subseteq\mathbb{R}$ açık aralıklar, $f:I\to\mathbb{R}$ ve $g:J\to\mathbb{R}$ fonksiyonlar ve $f(I)\subseteq J$ olsun. f, $x_0\in I$ noktasında türevlenebilir ve g, $y_0=f(x_0)$ noktasında türevlenebilir ise, bileşke fonksiyon $h=g\circ f:I\to\mathbb{R}$ de x_0 noktasında türevlenebilirdir ve*

$$h'(x_0)=(g\circ f)'(x_0)=g'\left(\,f(x_0)\,\right)\cdot f'(x_0)$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.1: Zincir kuralının sezgisi budur. f, x_o *çevresindeki küçük bir* Δx *aralığını yaklaşık* $f'(x_o)$ *katına gerer;* g *de elde edilen* Δu *aralığını yaklaşık* $g'(u_o)$ *katına gerer. İki büyütme oranı ard arda uygulandığından çarpılırlar:* $\Delta y/\Delta x \approx g'(u_o)\cdot f'(x_o)$.

İspat.
Türev tanımı gereği hesaplamamız gereken limit

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g\ (\ f(x)\ ) - g\ (\ f(x_0)\ )}{x - x_0}$$

limitidir. İçgüdüsel hamle, payı ve paydayı $f(x) - f(x_0)$ *ile genişletmektir:*

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bu eşitlik, ancak $f(x) \neq f(x_0)$ *olduğunda anlamlıdır.* $f(x) = f(x_0)$ *olan* x*'ler* x_0*'a istediğimiz kadar yakın bulunabileceği için, ispatı iki duruma ayırmak zorundayız.*
Her iki durumda da başlangıç noktamız aynı: f, x_0*'da türevlenebilir olduğundan* x_0*'da süreklidir, yani* $x \to x_0$ *iken* $f(x) \to f(x_0) = y_0$*'dır.*
Durum 1: x_0***'ın delinmiş bir komşuluğunda*** $f(x) \neq f(x_0)$**.** *Yani öyle bir* $\delta_0 > 0$ *vardır ki* $x \in I$ *ve* $0 < |\ x - x_0\ | < \delta_0$ *olan her* x *için* $f(x) \neq f(x_0)$ *olur. Bu* x*'ler için yukarıdaki çarpanlara ayırma geçerlidir.*
İkinci çarpanın limiti tanım gereği $f'(x_0)$*'dır. Birinci çarpanın limitinin* $g'(y_0)$ *olduğunu gösterelim. Bu, "*$y = f(x)$ *koyalım,* $x \to x_0$ *iken* $y \to y_0$ *olur" demekten ibaret görünse de, bileşke fonksiyonların limitinde gizli bir tuzak vardır; bu yüzden adımı* ε*–*δ *diliyle açıkça yürütelim.*
$\varepsilon > 0$ *verilsin.* g *fonksiyonu* y_0*'da türevlenebilir olduğundan, öyle bir* $\eta > 0$ *vardır ki*

$$y \in J, \quad 0 < |\ y - y_0\ | < \eta \Longrightarrow \left| \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) \right| < \varepsilon$$

olur. f *fonksiyonu* x_0*'da sürekli olduğundan, bu* η*'ya karşılık öyle bir* $\delta_1 > 0$ *vardır ki* $x \in I$ *ve* $|\ x - x_0\ | < \delta_1$ *iken* $|\ f(x) - y_0\ | < \eta$ *olur. Şimdi* $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ *alalım ve* $x \in I, 0 < |\ x - x_0\ | < \delta$ *olsun.* $y = f(x)$ *yazarsak:*

- $|\ x - x_0\ | < \delta_1$ *olduğundan* $|\ y - y_0\ | < \eta$*;*
- $0 < |\ x - x_0\ | < \delta_0$ *olduğundan Durum 1'in varsayımı gereği* $y \neq y_0$*.*

Demek ki $0 < |\ y - y_0\ | < \eta$ *ve yukarıdaki çıkarım uygulanabilir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}-g'(y_0)\right|<\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ *keyfî olduğundan*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=g'(y_0)=g'\ (\ f(x_0)\ )$$

bulunur. Artık iki çarpanın da limiti vardır; limitin çarpımla uyuşmasından (bkz. Analiz 1)

$$h'(x_0)=g'\ (\ f(x_0)\ )\cdot f'(x_0)$$

elde edilir.
Durum 2: x_0'a istediğimiz kadar yakın, $f(x)=f(x_0)$ olan $x\neq x_0$ noktaları vardır. *Yani*

$$Z=\{x\in I: x\neq x_0 \text{ ve } f(x)=f(x_0)\}$$

kümesinin bir yığılma noktası x_0'dır (bkz. Analiz 1).
Birinci adım: bu durumda zorunlu olarak $f'(x_0)=0$'dır. *Gerçekten, x_0 kümenin yığılma noktası olduğundan Z içinde x_0'a yakınsayan bir (x_n) dizisi seçilebilir; her n için $x_n\neq x_0$ ve $f(x_n)=f(x_0)$'dır. Bu dizide fark oranı*

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\frac{0}{x_n-x_0}=0$$

olup sabit sıfırdır. $f'(x_0)$ var olduğundan, limitin dizisel ölçütü (bkz. Analiz 1) gereği bu dizideki değerlerin limiti de $f'(x_0)$ olmalıdır; sabit sıfır dizisinin limiti sıfır olduğundan

$$f'(x_0)=0.$$

Dolayısıyla ispatlamamız gereken $h'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot 0=0$ eşitliğidir.
İkinci adım: fark oranının sınırlı çarpanı. *g, y_0'da türevlenebilir olduğundan, türev tanımında $\varepsilon=1$ seçelim: öyle bir $\eta>0$ vardır ki $y\in J$ ve $0<|\ y-y_0\ |<\eta$ iken*

$$\left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0)\right|<1$$

olur. Ters üçgen eşitsizliğinden (bkz. Analiz 1) bu y'ler için

$$\left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\right|<|\ g'(y_0)\ |+1=:M$$

bulunur. Yani y, y_0'a yeterince yakın ve $y\neq y_0$ olduğu sürece, g'nin fark oranı M sabitiyle sınırlıdır. Sınırlılığın kaynağı budur: ***türevlenebilir bir fonksiyonun fark oranının limiti vardır, limiti olan bir fonksiyon ise o noktanın yakınında sınırlıdır*** *(bkz. Analiz 1).*
Üçüncü adım: sıkıştırma. *f, x_0'da sürekli olduğundan yukarıdaki η'ya karşılık öyle bir $\delta>0$ vardır ki $x\in I$, $|\ x-x_0\ |<\delta$ iken $|\ f(x)-y_0\ |<\eta$ olur. Şimdi $x\in I$ ve $0<|\ x-x_0\ |<\delta$ olsun; iki alt durum var:*

- *$f(x)=f(x_0)$ ise $g(f(x))-g(f(x_0))=0$'dır, dolayısıyla h'nin fark oranı da sıfırdır. Aynı anda f'nin fark oranı da sıfırdır; yani*

$$\left|\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right|=0=M\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|.$$

- *$f(x)\neq f(x_0)$ ise $y=f(x)$ için $0<|\ y-y_0\ |<\eta$ olur ve çarpanlara ayırma geçerlidir:*

$$\left|\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right|=\left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leq M\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|.$$

Her iki alt durumda da, $0<|\ x-x_0\ |<\delta$ olan her $x\in I$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0 \le \left|\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right| \le M\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$$

eşitsizliği geçerlidir. Sağ taraf $x \to x_0$ iken $M \cdot |\, f'(x_0)\,| = M \cdot 0 = 0$'a gider (mutlak değerin limitle uyuşması için Mutlak Değerin Limiti). Sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right| = 0, \qquad \text{yani} \qquad h'(x_0) = 0.$$

Öte yandan $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_0)\cdot 0 = 0$'dır. Demek ki bu durumda da

$$h'(x_0) = g'\left(\ f(x_0)\ \right)\cdot f'(x_0).$$

İki durum bütün olasılıkları kapsar: ya x_0'ın delinmiş bir komşuluğunda f hiç $f(x_0)$ değerini almaz (Durum 1), ya da almadığı bir delinmiş komşuluk yoktur; ikinci hâlde her $\delta > 0$ için $0 < |\, x - x_0\,| < \delta$ ve $f(x) = f(x_0)$ olan bir x bulunur, bu da x_0'ın Z'nin yığılma noktası olması demektir (Durum 2). Formül her iki durumda da doğrudur.

■

⚠ Tek satırlık ispat neden yanlıştır

Pek çok kitapta zincir kuralı şöyle "ispatlanır":

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Bu, bir ispat değil bir **hatırlatma**dır. Sorun şudur: sağdaki ilk kesir, $f(x) = f(x_0)$ olan noktalarda $\frac{0}{0}$'dır, yani tanımsızdır; dolayısıyla yazılan eşitlik ancak $f(x) \neq f(x_0)$ olan x'ler için doğrudur. "Ama böyle noktalar azdır" demek işe yaramaz; Örnek 4.3'ta göreceğimiz gibi, x_0'a yakınsayan sonsuz çoklukta $f(x) = f(x_0)$ noktası bulunabilir ve o zaman eşitlik x_0'ın **hiçbir** delinmiş komşuluğunda her noktada geçerli olmaz. Böyle bir durumda sağ taraftaki çarpanların limitleri hesaplansa bile, elde edilen bilgi yalnızca $f(x) \neq f(x_0)$ olan x'ler boyuncadır; geri kalan noktalarda h'nin fark oranının ne yaptığı ayrıca gösterilmelidir. Durum 2 tam olarak bu boşluğu kapatır.

ℹ Hipotezler yeterlidir, gerekli değildir

Zincir kuralı bir **yeter** koşul verir: f ve g ilgili noktalarda türevlenebilirse bileşke de türevlenebilirdir. Karşıtı doğru değildir. $f(x) = x^2$ ve $g(y) = |\, y\,|$ alalım. g, $y_0 = f(0) = 0$ noktasında türevlenebilir değildir; buna karşın

$$(g\circ f)(x) = |\, x^2\,| = x^2$$

fonksiyonu 0'da türevlenebilirdir ve türevi 0'dır. Yani bileşkenin türevlenebilir olması, parçaların türevlenebilir olmasını gerektirmez.

4.2 Carathéodory Ölçütü ve İkinci İspat

Yukarıdaki ispatın bütün zorluğu, fark oranının paydasında $f(x) - f(x_0)$ bulunmasından çıktı. Constantin Carathéodory'nin gözlemi, türevin tanımını **bölme içermeyen** bir biçimde yeniden yazmaktır. Fikir basittir: türev tanımındaki

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

ifadesinde, fark oranını bir fonksiyon olarak adlandıralım ve x_0 noktasında $f'(x_0)$ değerini vererek tanım kümesini x_0'a genişletelim. Ortaya çıkan fonksiyon x_0'da süreklidir ve $f(x) - f(x_0)$ farkını $x - x_0$ ile

 CC BY-NC-SA 4.0

çarpım hâlinde yazmamızı sağlar. Bu çarpım biçimi, $x = x_0$'da bile geçerlidir — çünkü iki taraf da sıfırdır. Bölme ortadan kalkınca durum ayrımı da ortadan kalkar.

Lemma 4.1 (Carathéodory Ölçütü). *$I \subseteq \mathbb{R}$ en az iki noktalı bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in I$ olsun. Aşağıdaki iki önerme denktir:*

1. *f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir.*
2. *Öyle bir $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki φ, x_0 noktasında süreklidir ve her $x \in I$ için*

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)\,(x - x_0)$$

eşitliği sağlanır.

*Bu durumda φ **tektir** ve $\varphi(x_0) = f'(x_0)$'dır; ayrıca $x \neq x_0$ için $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ olmak zorundadır.*

İspat.
I en az iki noktalı bir aralık olduğundan x_0, I'nın bir yığılma noktasıdır; dolayısıyla hem türev hem de x_0'daki süreklilik anlamlıdır.
(1) $\Rightarrow$ (2). *f, x_0'da türevlenebilir olsun. $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \in I,\ x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

kuralıyla tanımlayalım. Çarpım eşitliğini iki hâlde de doğrulayalım: $x \neq x_0$ ise tanım gereği $\varphi(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$; $x = x_0$ ise her iki taraf da 0'dır. Süreklilik için

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0)$$

yazmak yeter; süreklilik ile limitin denkliği (bkz. Analiz 1) gereği φ, x_0'da süreklidir.
(2) $\Rightarrow$ (1). *Böyle bir φ verilmiş olsun. $x \in I$, $x \neq x_0$ için eşitliğin her iki yanını $x - x_0 \neq 0$'a bölersek*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(x)$$

olur. φ, x_0'da sürekli olduğundan $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$'dır. Öyleyse soldaki fark oranının $x \to x_0$ iken limiti vardır ve $\varphi(x_0)$'a eşittir; bu tam olarak f'nin x_0'da türevlenebilir olması ve $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ demektir.
Teklik. *φ ve $\tilde{\varphi}$ ikisi de (2)'yi sağlasın. $x \neq x_0$ için $\varphi(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = \tilde{\varphi}(x)(x - x_0)$ ve $x - x_0 \neq 0$ olduğundan $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$'dır. $x = x_0$ noktasında ise ikisi de sürekli olduğundan*

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0)$$

bulunur. Demek ki $\varphi = \tilde{\varphi}$'dir ve (1) $\Rightarrow$ (2) adımında kurduğumuz formül tek olasılıktır.
■

Lemmanın ilk kazancı bedavadır: (2) koşulunda sağ taraf, x_0'da sürekli iki fonksiyonun çarpımıdır; dolayısıyla $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$ ifadesi x_0'da süreklidir. Yani **türevlenebilirlik sürekliliği gerektirir** sonucu, tek satırda yeniden çıkar.
İkinci kazanç, zincir kuralının durum ayrımı olmayan ispatıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Zincir kuralının ikinci ispatı

Teorem 4.1'nin hipotezleri altında olalım: $f : I \to \mathbb{R}$, x_0'da türevlenebilir; $g : J \to \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$'da türevlenebilir; $f(I) \subseteq J$.
Lemma 4.1'yi f'ye x_0 noktasında uygulayalım: x_0'da sürekli, $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ olan bir $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vardır ve her $x \in I$ için

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)\,(x - x_0).$$

Aynı lemmayı g'ye y_0 noktasında uygulayalım: y_0'da sürekli, $\psi(y_0) = g'(y_0)$ olan bir $\psi : J \to \mathbb{R}$ vardır ve her $y \in J$ için

$$g(y) - g(y_0) = \psi(y)\,(y - y_0).$$

Şimdi $x \in I$ alalım ve ikinci eşitlikte $y = f(x) \in J$ koyalım. Bu **her** x için serbestçe yapılabilir; $f(x) = y_0$ olması bir sakınca doğurmaz, çünkü ortada bölme yoktur:

$$g\,\big(\,f(x)\,\big) - g\,\big(\,f(x_0)\,\big) = \psi\,\big(\,f(x)\,\big)\big(\,f(x) - f(x_0)\,\big) = \underbrace{\psi\,\big(\,f(x)\,\big)\,\varphi(x)}_{=:\,\Phi(x)}(x - x_0).$$

Geriye Φ'nin x_0'da sürekli olduğunu görmek kaldı. φ zaten x_0'da süreklidir. f, x_0'da süreklidir (türevlenebilirlikten) ve ψ, $f(x_0) = y_0$'da süreklidir; bileşkenin sürekliliği (bkz. Analiz 1) gereği $\psi \circ f$ de x_0'da süreklidir. Sürekli iki fonksiyonun çarpımı sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) $\Phi = (\psi \circ f) \cdot \varphi$ fonksiyonu x_0'da süreklidir.
O hâlde $h = g \circ f$ için Lemma 4.1'nin (2) koşulu Φ ile sağlanmıştır; lemmanın (2) $\Rightarrow$ (1) yönü gereği h, x_0'da türevlenebilirdir ve

$$h'(x_0) = \Phi(x_0) = \psi\,\big(\,f(x_0)\,\big)\,\varphi(x_0) = \psi(y_0)\,\varphi(x_0) = g'\,\big(\,f(x_0)\,\big)\,f'(x_0).$$

Durum ayrımı yok, sınırlılık argümanı yok, sıkıştırma yok. Bütün zorluk, türevin tanımını bölmesiz biçimde yazma adımına gömülmüştür.

4.3 Leibniz Gösterimi ve Çok Katmanlı Bileşkeler

Zincir kuralının akılda kalan biçimi Leibniz gösterimindedir. Bir de kural, ikiden fazla katman için tekrar tekrar uygulanabilir; bu iki gözlemi tek bir sonuçta toplayalım.

Sonuç 4.1 (Leibniz Gösteriminde Zincir Kuralı). ***(a)*** *$u = f(x)$ ve $y = g(u)$ olsun; f, x_0'da ve g, $u_0 = f(x_0)$'da türevlenebilir olsun. O hâlde*

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{du}\Big|_{u=u_0} \cdot \frac{du}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

olur; kısaca $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ yazılır.
(b) *$n \geq 1$ ve $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları, bileşkeleri tanımlı olacak biçimde açık aralıklar üzerinde verilsin. x_0 noktasından başlayarak*

$$x_1 = f_1(x_0), \quad x_2 = f_2(x_1), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(x_{n-1})$$

diyelim. Her k için f_k, x_{k-1} noktasında türevlenebilir ise $F = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ bileşkesi x_0'da türevlenebilirdir ve

$$F'(x_0) = f_n'(x_{n-1}) \cdot f_{n-1}'(x_{n-2}) \cdots f_2'(x_1) \cdot f_1'(x_0) = \prod_{k=1}^{n} f_k'(x_{k-1}).$$

> ***İspat.***
> ***(a)*** *Bu, Teorem 4.1'nin gösterim değiştirilmiş hâlidir. y değişkeni x'e $h = g \circ f$ üzerinden bağlıdır; $\frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0}$ simgesi $h'(x_0)$ demektir, $\frac{dy}{du}\big|_{u=u_0}$ simgesi $g'(u_0)$ demektir ve $\frac{du}{dx}\big|_{x=x_0}$ simgesi $f'(x_0)$ demektir. Teoremin eşitliği harfi harfine budur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(b) *n üzerinden tümevarım yapalım (bkz. Analiz 1).*
Temel adım. *$n = 1$ için $F = f_1$ ve iddia $F'(x_0) = f_1'(x_0)$'dır; doğrudur.*
Tümevarım adımı. *İddia $n = m$ için doğru olsun. $f_1, \ldots, f_{m+1}$ verilsin ve $F_m = f_m \circ \cdots \circ f_1$, $F_{m+1} = f_{m+1} \circ \cdots \circ f_1$ yazalım. Bileşkenin birleşme özelliğinden $F_{m+1} = f_{m+1} \circ F_m$'dir. Tümevarım varsayımı gereği F_m, x_0'da türevlenebilirdir ve*

$$F_m'(x_0) = \prod_{k=1}^{m} f_k'(x_{k-1}), \qquad F_m(x_0) = x_m.$$

f_{m+1} ise x_m noktasında türevlenebilirdir. Teorem 4.1'yi F_m ile f_{m+1}'e uygularsak F_{m+1}, x_0'da türevlenebilirdir ve

$$F_{m+1}'(x_0) = f_{m+1}'\left(\, F_m(x_0) \,\right) \cdot F_m'(x_0) = f_{m+1}'(x_m) \cdot \prod_{k=1}^{m} f_k'(x_{k-1}) = \prod_{k=1}^{m+1} f_k'(x_{k-1}).$$

İddia $n = m + 1$ için de doğrudur; tümevarım tamamlanır.
■

Üç katman için (b) maddesi şu somut biçimi alır: $y = g(u)$, $u = f(v)$, $v = p(x)$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \qquad \text{yani} \qquad (g \circ f \circ p)'(x_0) = g'\Big(\, f\left(\, p(x_0) \,\right) \Big) \cdot f'\left(\, p(x_0) \,\right) \cdot p'(x_0).$$

⚠ Bu bir sadeleştirme değildir

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ formülünde du'lar sadeleşiyormuş gibi görünür. Bu görüntü akılda kalıcıdır ama **yanıltıcıdır**; en az dört nedenle:

- $\frac{dy}{du}$ bir kesir değildir. Bölünmüş iki sayı yoktur ortada; simge, "bir limitin değeri" için kullanılan tek parçalı bir addır. dy ile du'nun ayrı ayrı ne anlama geldiğini tanımlamadan sadeleştirmeden söz edilemez.
- Gösterim, **değerlendirme noktasını gizler**. $\frac{dy}{du}$ çarpanı $u = f(x_0)$ noktasında, $\frac{du}{dx}$ çarpanı ise $x = x_0$ noktasında hesaplanır. Bunlar farklı sayı doğrularındaki farklı noktalardır; hesabın yarısı bu ayrımı hatırlamaktan ibarettir. Sadeleştirme sezgisi tam da bu bilgiyi siler.
- Aynı harf hem **fonksiyonu** hem **değişkeni** gösterir. "$y = g(u)$, $u = f(x)$" yazımında y bir kere u'nun, bir kere x'in fonksiyonudur; $\frac{dy}{dx}$ ile $\frac{dy}{du}$'daki "y"ler aslında iki farklı fonksiyondur.
- Sadeleştirme sezgisi **ikinci türevde çöker**. Gerekli ikinci türevlerin var olduğunu varsayıp zincir kuralını bir kez daha uygular ve çarpım kuralıyla birleştirirsek

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

bulunur. Naif sadeleştirme $\frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$ verirdi; bu yanlıştır. Doğru formülde hem bir kare hem de fazladan bir terim vardır.

Leibniz gösterimi mükemmel bir **hatırlatıcıdır**, ama ispat değildir. İspat Teorem 4.1'dir.

4.4 Zincir Kuralıyla Hesaplar

Kuralı işletirken izlenecek yol her zaman aynıdır: bileşkeyi katmanlarına ayır, her katmanın türevini yaz, katmanları **içeriden dışarıya doğru** hesaplanan noktalarda değerlendir ve çarp. Aşağıdaki hesaplarda kuvvet kuralı $(y^n)' = ny^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ ile toplam, çarpım ve bölüm kurallarını Türev Alma Kuralları bölümünden alıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.1 (Zincir Kuralıyla Türev Hesapları). Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız:

$$h_1(x) = (3x^2 - 5x + 1)^{10}, \qquad h_2(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}, \qquad h_3(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5.$$

Çözüm.
Birinci fonksiyon. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ve $g(u) = u^{10}$ alırsak $h_1 = g \circ f$'dir. f bir polinom olduğundan her noktada türevlenebilirdir ve $f'(x) = 6x - 5$; g de her noktada türevlenebilirdir ve $g'(u) = 10u^9$. Teorem 4.1 gereği

$$h_1'(x) = g'\big(\,f(x)\,\big)\,f'(x) = 10\,(3x^2 - 5x + 1)^9\,(6x - 5).$$

Küçük bir denetim: $x = 0$ için $h_1(0) = 1$ ve $h_1'(0) = 10 \cdot 1 \cdot (-5) = -50$. Aynı sonucu, $(3x^2 - 5x + 1)^{10}$ ifadesinin açılımındaki birinci dereceden terimi hesaplayarak da bulabiliriz: $(1 + (3x^2 - 5x))^{10}$ açılımında x'in katsayısı $10 \cdot (-5) = -50$'dir.
İkinci fonksiyon. $h_2(x) = (x^2+1)^{-3}$ yazalım; $f(x) = x^2 + 1, g(u) = u^{-3}$ alalım. Her x için $f(x) \geq 1 > 0$ olduğundan $f(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$ ve g bu kümede türevlenebilirdir: $g'(u) = -3u^{-4}$. $f'(x) = 2x$ olduğundan

$$h_2'(x) = -3\,(x^2+1)^{-4} \cdot 2x = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}.$$

Denetim olarak bölüm kuralını doğrudan uygulayalım: pay 1, payda $(x^2+1)^3$ ve paydanın türevi zincir kuralıyla $3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$'dir; o hâlde

$$h_2'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+1)^3 - 1 \cdot 6x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6} = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}.$$

İki yol aynı sonucu verdi.
Üçüncü fonksiyon. $x \neq -1$ olsun. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ ve $g(u) = u^5$ alalım. Bölüm kuralıyla

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$g'(u) = 5u^4$ olduğundan

$$h_3'(x) = 5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{10\,(x-1)^4}{(x+1)^4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{10\,(x-1)^4}{(x+1)^6}.$$

Dikkat edilecek tek şey, g''nün $\boldsymbol{u = f(x)}$ **noktasında** değerlendirilmesidir; dış çarpan olarak $5\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$ yerine $5x^4$ yazmak, yani g''yü x'te hesaplamak sık yapılan bir hatadır.
■

Şimdi üç katmanlı bir örnek yapalım; Sonuç 4.1 (b) maddesi burada iş görecek.

Örnek 4.2 (Üç Katmanlı Bir Bileşke). $h(x) = \Big(1 + (2x+3)^4\Big)^7$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız ve $h'(-1)$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Fonksiyonu katmanlarına ayıralım:

$$f_1(x) = 2x + 3, \qquad f_2(v) = 1 + v^4, \qquad f_3(w) = w^7,$$

öyle ki $h = f_3 \circ f_2 \circ f_1$'dir. Türevler:

$$f_1'(x) = 2, \qquad f_2'(v) = 4v^3, \qquad f_3'(w) = 7w^6.$$

Sonuç 4.1 (b) gereği, $v = f_1(x) = 2x + 3$ ve $w = f_2(v) = 1 + (2x+3)^4$ ara değerlerinde değerlendirerek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$h'(x) = f_3'(w)\cdot f_2'(v)\cdot f_1'(x) = 7\left(1+(2x+3)^4\right)^6\cdot 4(2x+3)^3\cdot 2$$

yani

$$h'(x) = 56\,(2x+3)^3\left(1+(2x+3)^4\right)^6.$$

Şimdi $x=-1$ koyalım: $2(-1)+3=1$, dolayısıyla $1+1^4=2$ ve

$$h'(-1) = 56\cdot 1^3\cdot 2^6 = 56\cdot 64 = 3584.$$

Leibniz gösterimiyle aynı hesap şöyle özetlenir: $y=w^7$, $w=1+v^4$, $v=2x+3$ için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = 7w^6\cdot 4v^3\cdot 2.$$

Her çarpanın hangi noktada hesaplandığını unutmamak koşuluyla bu yazım da güvenlidir.
■

Son olarak, Teorem 4.1′nin ispatındaki durum ayrımının süs olmadığını gösteren örneği yapalım.

Örnek 4.3 (Durum Ayrımının Kaçınılmaz Olduğu Bir Örnek). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. f'nin 0'da türevlenebilir olduğunu ve $f'(0)=0$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca 0'a yakınsayan ve $f(x_n)=f(0)$ olan bir (x_n) dizisi bulunuz; buradan, zincir kuralının "çarpıp bölme" ispatının bu f için **hiçbir** delinmiş komşulukta yürütülemeyeceğini açıklayınız. Son olarak $g(y)=y^2+y$ için $(g\circ f)'(0)$ değerini hem zincir kuralıyla hem doğrudan hesaplayarak karşılaştırınız.

Çözüm.
Türev. $x\neq 0$ için fark oranı

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x}$$

olur. Her $t\in\mathbb{R}$ için $|\sin t|\le 1$ olduğundan

$$0 \le \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

ve $|x|\to 0$'dır. Sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği fark oranının limiti 0'dır; yani f, 0'da türevlenebilirdir ve

$$f'(0) = 0.$$

(Aynı sonucu, sınırlı bir fonksiyonla sıfıra giden bir fonksiyonun çarpımının sıfıra gitmesinden de okuyabiliriz: Sınırlı Fonksiyon Çarpı Sıfıra Giden Fonksiyon.)
Sıfırların yığılması. $n\in\mathbb{N}$ için $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ alalım. O zaman $\sin\dfrac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0$, dolayısıyla

$$f(x_n) = x_n^2\cdot 0 = 0 = f(0), \qquad x_n\neq 0, \qquad x_n\to 0.$$

Neden durum ayrımı gerekli? Herhangi bir $\delta>0$ alalım. Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $n\pi > \frac{1}{\delta}$ olan bir $n\in\mathbb{N}$ vardır; bu n için $0<x_n<\delta$'dır. Demek ki 0'ın **her** delinmiş komşuluğunda $f(x)=f(0)$ olan noktalar bulunur. Sonuç olarak

$$x\mapsto \frac{g(f(x))-g(f(0))}{f(x)-f(0)}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ifadesi 0'ın **hiçbir** delinmiş komşuluğunda her noktada tanımlı değildir: her komşulukta paydayı sıfırlayan x_n noktaları vardır. Dolayısıyla "çarpıp bölme" eşitliği 0'ın hiçbir delinmiş komşuluğunda her yerde geçerli olmaz; bu ifadenin $f(x) \neq f(0)$ olan noktalar boyunca limiti hesaplansa bile, h'nin fark oranının geri kalan noktalarda ne yaptığı buradan okunamaz. Teorem 4.1'nin Durum 1'i burada uygulanamaz; ispat Durum 2 üzerinden yürümek zorundadır. Nitekim Durum 2'nin ilk adımında gösterdiğimiz gibi, böyle bir durumda zorunlu olarak $f'(0) = 0$ çıkar — yukarıda bunu doğrudan da hesapladık.

Zincir kuralıyla hesap. $g(y) = y^2 + y$ her noktada türevlenebilirdir ve $g'(y) = 2y + 1$; özellikle $g'(f(0)) = g'(0) = 1$. Zincir kuralı gereği

$$(g \circ f)'(0) = g'\left(\, f(0) \,\right) f'(0) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Doğrudan hesap. $h = g \circ f$ fonksiyonu $x \neq 0$ için

$$h(x) = f(x)^2 + f(x) = x^4 \sin^2 \frac{1}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x},$$

$x = 0$ için $h(0) = 0$'dır. Fark oranı:

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = x^3 \sin^2 \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}.$$

Her iki terim de mutlak değerce sırasıyla $|\, x \,|^3$ ve $|\, x \,|$ ile sınırlanır; ikisi de $x \to 0$ iken 0'a gider. Öyleyse $h'(0) = 0$. İki hesap uyuşuyor: zincir kuralı, "çarpıp bölme" gerekçesi çökse bile geçerlidir. ■

4.5 Ters Fonksiyonun Türevi

Şimdi bölümün ikinci ana teoremine geçelim. Bir f fonksiyonunun tersi f^{-1}'in grafiği, f'nin grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre yansımasıdır. Bir doğruyu bu doğruya göre yansıtırsak eğimi $m \neq 0$ olan doğru, eğimi $1/m$ olan doğruya dönüşür. Teğetler de doğru olduğuna göre, f'nin (x_0, y_0) noktasındaki teğetinin eğimi $f'(x_0)$ ise f^{-1}'in (y_0, x_0) noktasındaki teğetinin eğimi $1/f'(x_0)$ olmalıdır. Aşağıdaki teorem bu geometrik tahmini kanıtlar; $m = 0$ hâlinin dışarıda bırakılması da yansımanın düşey bir doğru vermesinden gelir.

İspatta ihtiyaç duyacağımız tek dış bilgi, f^{-1}'in sürekliliğidir: bir aralık üzerinde tanımlı sürekli ve birebir bir fonksiyonun tersi de süreklidir. Bunu Monoton Fonksiyonlar ve Ters Fonksiyonun Sürekliliği bölümünde kurmuştuk: bir aralık üzerinde sürekli ve birebir olan bir fonksiyon zorunlu olarak kesin monotondur (Teorem 1.1); kesin monoton ve sürekli bir fonksiyonun görüntü kümesi $J = f(I)$ bir aralıktır ve tersi bu aralık üzerinde süreklidir (Teorem 1.4).

Teorem 4.2 (Ters Fonksiyonun Türevi). *$I \subseteq \mathbb{R}$ en az iki noktalı bir aralık ve $f : I \to J$ sürekli, birebir ve örten bir fonksiyon olsun ($J = f(I)$). f, $x_0 \in I$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise, ters fonksiyon $f^{-1} : J \to I$ de $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve*

$$\left(\, f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(\, f^{-1}(y_0) \,\right)}$$

olur.

İspat.
f birebir ve örten olduğundan $f^{-1} : J \to I$ tanımlıdır (bkz. Analiz 1) ve $f^{-1}(y_0) = x_0$'dır. I en az iki noktalı bir aralık, f sürekli ve birebir olduğundan f kesin monotondur (Teorem 1.1) ve $J = f(I)$ de en az iki noktalı bir aralıktır; dolayısıyla y_0, J'nin bir yığılma noktasıdır ve f^{-1}'in y_0'daki türevinden söz etmek anlamlıdır. Ayrıca Teorem 1.4 gereği f^{-1}, J üzerinde süreklidir; özellikle y_0'da süreklidir.
Hesaplamak istediğimiz limit

$$\left(\, f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

limitidir. $y \in J$, $y \neq y_0$ için $x = f^{-1}(y)$ yazalım; o hâlde $y = f(x)$'tir. f^{-1} birebir olduğundan $y \neq y_0$ olması $x \neq x_0$ olmasını gerektirir. Bu değişken adlandırmasıyla fark oranı

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

biçimini alır (payda $x \neq x_0$ olduğu için sıfırdan farklıdır: f birebirdir).
Şimdi yardımcı fonksiyonu adlandıralım. $Q : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

olsun. Türev tanımı gereği $\lim_{x\to x_0} Q(x) = f'(x_0)$'dır ve varsayımımız $f'(x_0) \neq 0$'dır. Yukarıdaki hesap, $y \in J$, $y \neq y_0$ için

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{Q\left(\ f^{-1}(y)\ \right)}$$

demektir.
$y \to y_0$ iken $Q(f^{-1}(y)) \to f'(x_0)$ olduğunu gösterelim; bunu doğrudan ε–δ ile yapalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x\to x_0} Q(x) = f'(x_0)$ olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$x \in I, \quad 0 < |\ x - x_0\ | < \delta \Longrightarrow |\ Q(x) - f'(x_0)\ | < \varepsilon.$$

f^{-1}, y_0'da sürekli olduğundan bu δ'ya karşılık öyle bir $\sigma > 0$ vardır ki $y \in J$ ve $|\ y - y_0\ | < \sigma$ iken $|\ f^{-1}(y) - x_0\ | < \delta$ olur. Şimdi $y \in J$ ve $0 < |\ y - y_0\ | < \sigma$ olsun; $x = f^{-1}(y)$ için $|\ x - x_0\ | < \delta$ ve ayrıca $y \neq y_0$ olduğundan $x \neq x_0$, yani $0 < |\ x - x_0\ | < \delta$. Öyleyse

$$\left|\ Q\left(\ f^{-1}(y)\ \right) - f'(x_0)\ \right| < \varepsilon.$$

Bu tam olarak

$$\lim_{y\to y_0} Q\left(\ f^{-1}(y)\ \right) = f'(x_0)$$

demektir. Limit sıfırdan farklı olduğundan, limitin bölmeyle uyuşması (bkz. Analiz 1) gereği

$$\left(\ f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{Q\left(\ f^{-1}(y)\ \right)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Son olarak $x_0 = f^{-1}(y_0)$ yerine konursa

$$\left(\ f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(\ f^{-1}(y_0)\ \right)}$$

bulunur. Bu, ispatı tamamlar.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Ters fonksiyon teoreminin Carathéodory ile ispatı

Aynı sonuç Lemma 4.1 ile de, tek bir hesap satırında çıkar. f'ye x_0'da lemmayı uygulayalım: x_0'da sürekli, $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ olan bir $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vardır ve her $x \in I$ için $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$'dır.
$\varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ olduğundan ve φ, x_0'da sürekli olduğundan, sürekliliğin işaret koruma özelliği (bkz. Analiz 1) gereği x_0'ın bir $U = (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \cap I$ komşuluğunda $\varphi(x) \neq 0$'dır. f^{-1} süreklidir, dolayısıyla y_0'ın J içinde öyle bir V komşuluğu vardır ki $f^{-1}(V) \subseteq U$ olur; V'yi J'nin bir alt aralığı seçebiliriz.
Şimdi $y \in V$ alalım ve $x = f^{-1}(y) \in U$ yazalım. $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ eşitliği

$$y - y_0 = \varphi\left(\, f^{-1}(y)\,\right)\left(\, f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\,\right)$$

olur. $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$ olduğundan bölebiliriz:

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi\left(\, f^{-1}(y)\,\right)}\,(y - y_0), \qquad y \in V.$$

Sağdaki katsayı fonksiyonu $y \mapsto \dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$, y_0'da süreklidir: f^{-1}, y_0'da; φ, x_0'da süreklidir (bileşke için Bileşke Fonksiyonun Sürekliliği) ve payda y_0'da sıfırdan farklıdır (bkz. Analiz 1). Türevlenebilirlik yerel bir özellik olduğundan Lemma 4.1'yi V aralığı üzerinde f^{-1}'e uygulayabiliriz: f^{-1}, y_0'da türevlenebilirdir ve

$$\left(\, f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{\varphi\left(\, f^{-1}(y_0)\,\right)} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pratik gösterim

Leibniz gösteriminde ters fonksiyonun türevi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

biçiminde yazılır. Burada da aynı uyarı geçerlidir: bu bir kesir işlemi değildir, iki türevin **farklı noktalarda** hesaplandığını unutmamak gerekir. $\frac{dy}{dx}$ türevi $x = x_0$'da, $\frac{dx}{dy}$ türevi $y = y_0 = f(x_0)$'da hesaplanır. Gösterimin sağladığı tek şey, formülü akılda tutmaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Türev sıfırsa ters türevlenebilir olmayabilir

Teorem 4.2'deki $f'(x_0) \neq 0$ koşulu vazgeçilmezdir. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ alalım.
Bu fonksiyon kesin artandır: $a < b$ ise

$$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2) = (b-a)\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] > 0$$

olur, çünkü köşeli parantez içi ancak $a = b = 0$ hâlinde sıfırdır, o da $a < b$ ile çelişir. Ayrıca f süreklidir ve $\mathbb{R}$ üzerine örtendir: $y \geq 0$ için $y^{1/3}$ kökü vardır (bkz. Analiz 1) ve $f\left(\, y^{1/3}\,\right) = y$'dir; $y < 0$ için ise $f\left(-\mid y \mid^{1/3}\right) = -\mid y \mid = y$ olur. Yani f birebir, örten ve süreklidir; tersi $f^{-1}(y) = y^{1/3}$'tür ve süreklidir.
Ne var ki $f'(x) = 3x^2$ ve $f'(0) = 0$'dır. $y_0 = f(0) = 0$ noktasında f^{-1}'in fark oranını hesaplayalım: $y \neq 0$ için

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} = \frac{y^{1/3}}{y} = \frac{1}{y^{2/3}}.$$

$y \to 0$ iken $y^{2/3} \to 0^+$ olduğundan bu ifade $+\infty$'a gider; sonlu bir limiti yoktur. Demek ki f^{-1}, 0 noktasında **türevlenebilir değildir**. Geometrik okuması şudur: $y = x^3$ eğrisinin orijindeki teğeti x eksenidir (eğim 0); $y = x$ doğrusuna göre yansıtınca bu teğet y eksenine döner, yani f^{-1}'in grafiği orijinde **düşey teğete** sahiptir. Düşey doğrunun eğimi olmadığı için türev de yoktur.
Kısacası: $f'(x_0) = 0$ olduğunda formüldeki $\frac{1}{f'(x_0)}$ ifadesi tanımsızdır ve bu, hesabın bir kusuru değil, gerçeğin kendisidir.

ℹ Bütün aralıkta türevlenebilirlik

Teorem 4.2 noktasal bir ifadedir; ama hemen bütün aralığa yayılan bir sonuç doğurur. I en az iki noktalı bir aralık ve $f : I \to J$ sürekli, birebir ve örten olsun ($J = f(I)$). f, I'nın her noktasında türevlenebilir ve her $x \in I$ için $f'(x) \neq 0$ ise, f^{-1} de J'nin her noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\, f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

olur. Gerçekten her $y \in J$ için $x = f^{-1}(y)$ alıp teoremi $x_0 = x$ ile uygulamak yeter.

Şimdi teoremi çalıştıralım. İlk uygulama, kareköktür.

Örnek 4.4 (Karekökün ve Rasyonel Kuvvetlerin Türevi). $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$'dir. $\left(\, \sqrt{y}\right)'$ türevini hesaplayınız. Ardından aynı yöntemle her $n \in \mathbb{N}$ için $y \mapsto y^{1/n}$ fonksiyonunun türevini, sonra da zincir kuralı yardımıyla rasyonel kuvvetlerin türevini bulunuz. Son olarak $\left(\, \sqrt{1+x^2}\right)'$ türevini hesaplayınız.

Çözüm.
Karekök. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde kesin artandır ($0 < a < b$ ise $a^2 < b^2$), süreklidir ve $(0,\infty)$ üzerine örtendir (her $y > 0$ için $\sqrt{y}$ vardır: n-inci Kökün Varlığı). Dolayısıyla birebir ve örtendir; tersi $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$'dir.
$f'(x) = 2x$ ve $x > 0$ olduğundan $f'(x) \neq 0$'dır. Teorem 4.2 gereği her $y > 0$ için $\sqrt{\cdot}$ fonksiyonu y'de türevlenebilirdir ve $x = \sqrt{y}$ yazarak

$$\left(\, \sqrt{y}\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Sıfırdaki durum. Karekök fonksiyonu 0 noktasında da tanımlıdır; oraya bakmak için f'yi $[0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ biçiminde genişletelim. Bu genişletmede $x_0 = 0$ uç noktasında (sağdan) $f'(0) = 0$ olduğundan Teorem 4.2'in hipotezi sağlanmaz ve formül çöker. Nitekim $y > 0$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{0}}{y-0}=\frac{\sqrt{y}}{y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\underset{y\to 0^+}{\to}+\infty$$

olduğundan karekök fonksiyonunun 0'da (sağdan bile) sonlu bir türevi yoktur; grafiğin orijindeki teğeti düşeydir.

***n*'inci kök.** Aynı akıl yürütme $f(x)=x^n$ için de yürür: $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ kesin artan, sürekli ve örtendir; tersi $f^{-1}(y)=y^{1/n}$'dir. $f'(x)=nx^{n-1}$ ve $x>0$ için $f'(x)\neq 0$'dır. O hâlde her $y>0$ için

$$\left(y^{1/n}\right)'=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n\left(y^{1/n}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n\,y^{(n-1)/n}}=\frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Yani kuvvet kuralı $\left(y^{\alpha}\right)'=\alpha y^{\alpha-1}$, $\alpha=\frac{1}{n}$ için de doğrudur.

Rasyonel kuvvetler. $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ ve $\alpha=\frac{m}{n}$ olsun. $y>0$ için $y^{m/n}=\left(y^{1/n}\right)^m$ yazalım; bu, $u=y^{1/n}$ ve $u\mapsto u^m$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Teorem 4.1 gereği

$$\left(y^{m/n}\right)'=m\left(y^{1/n}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}\,y^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}\,y^{\frac{m}{n}-1}=\alpha\,y^{\alpha-1}.$$

Demek ki kuvvet kuralı bütün rasyonel üsler için geçerlidir (üs negatifse $y>0$ koşulu zaten gereklidir).

Bir bileşke. $u(x)=\sqrt{1+x^2}$ olsun. İçerideki fonksiyon $v(x)=1+x^2$ her x için $v(x)\geq 1>0$ eşitsizliğini sağlar; dışarıdaki karekök $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir. Zincir kuralı gereği

$$u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Kontrol: $x=0$'da $u'(0)=0$ çıkar; gerçekten u çift bir fonksiyondur ve $x=0$'da en küçük değerini alır, teğetin yatay olması beklenir.

■

Ters fonksiyonun türevi teoreminin asıl gücü, tersin formülünü **hiç bulmadan** türevini hesaplayabilmesidir. Aşağıdaki örnek bunu gösteriyor.

Örnek 4.5 (Tersi Açıkça Çözülemeyen Bir Fonksiyon). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$ olsun. f'nin birebir ve örten olduğunu gösteriniz, sonra f^{-1}'in $y=10$, $y=2$ ve $y=0$ noktalarındaki türevlerini hesaplayınız. Ayrıca $\left(f^{-1}\right)'(y)$ için genel bir ifade yazınız.

Çözüm.

Bire birlik. $a<b$ olsun. Yukarıda gördüğümüz çarpanlara ayırmayı kullanalım:

$$f(b)-f(a)=(b^3-a^3)+(b-a)=(b-a)\left(b^2+ab+a^2+1\right).$$

İkinci çarpan $b^2+ab+a^2+1=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+1\geq 1>0$'dır. $b-a>0$ olduğundan $f(b)>f(a)$'dır; yani f kesin artandır ve özellikle birebirdir.

Örtenlik. f bir polinom olduğundan süreklidir (bkz. Analiz 1). $y\in\mathbb{R}$ verilsin ve $t=|\,y\,|+1\geq 1$ diyelim. O zaman

$$f(t)=t^3+t>t=|\,y\,|+1>y,\qquad f(-t)=-t^3-t<-t=-|\,y\,|-1<y.$$

f, $[-t,t]$ üzerinde sürekli ve $f(-t)<y<f(t)$ olduğundan ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $f(c)=y$ olan bir $c\in(-t,t)$ vardır. Demek ki f örtendir.

Böylece $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir bijeksiyondur; tersi $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vardır ve süreklidir.

Türevler. $f'(x)=3x^2+1\geq 1>0$'dır; yani f' hiçbir noktada sıfır olmaz. Teorem 4.2 her noktada uygulanabilir. Şimdi tek yapmamız gereken, verilen y değerlerine karşılık gelen x'leri **tahmin etmek**tir:

- $y=10$: $f(2)=8+2=10$ olduğundan $f^{-1}(10)=2$'dir. O hâlde

$$\left(f^{-1}\right)'(10)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3\cdot 4+1}=\frac{1}{13}.$$

- $y=2$: $f(1)=1+1=2$ olduğundan $f^{-1}(2)=1$'dir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}.$$

- $y = 0$: $f(0) = 0$ olduğundan $f^{-1}(0) = 0$'dır ve

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Genel ifade. Her $y \in \mathbb{R}$ için, $x = f^{-1}(y)$ yazarak

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{3\left(f^{-1}(y)\right)^2 + 1}.$$

Burada dikkat çekici olan şudur: $x^3 + x = y$ üçüncü derece denklemini x için çözmedik. Cardano formülüyle çözülebilirdi, ama sonuç iç içe köklerden oluşan hantal bir ifade olurdu ve türevini almak ayrı bir sıkıntı doğururdu. Ters fonksiyon teoremi, tersin **varlığını** ve **bir noktadaki değerini** bilmenin türev için yettiğini söylüyor.
Son bir gözlem: $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{3(f^{-1}(y))^2 + 1} \leq 1$'dir; yani f^{-1}'in grafiği hiçbir yerde $45°$'den dik değildir. Bu beklenen bir sonuçtur, çünkü $f' \geq 1$'dir ve yansıma eğimleri tersine çevirir.
■

4.6 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (Zincir Kuralı ve Ters Fonksiyonun Türevi Üzerine).

a) $h(x) = \left(1 + (1+x^2)^4\right)^3$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

b) $u(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız ve $u'(x) > 0$ olduğunu gözlemleyiniz.

c) $f(x) = x^5 + 3x + 1$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bir bijeksiyon olduğunu gösteriniz ve $\left(f^{-1}\right)'(5)$ değerini hesaplayınız.

d) Lemma 4.1'yi kullanarak çarpım kuralını ispatlayınız: f ve g, x_0'da türevlenebilir ise fg de x_0'da türevlenebilirdir ve $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$'dır.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve **tek** bir fonksiyon olsun (yani her x için $f(-x) = -f(x)$). f' fonksiyonunun **çift** olduğunu gösteriniz. Benzer biçimde f çift ise f''nün tek olduğunu gösteriniz.

f) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir, $g(0) = 0$ ve $g'(0) = 2$ olsun. $h = g \circ g \circ g$ için $h'(0)$ değerini bulunuz.

Çözüm.
a) Katmanlar: $f_1(x) = 1 + x^2$, $f_2(v) = 1 + v^4$, $f_3(w) = w^3$ ve $h = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Türevler $f_1'(x) = 2x$, $f_2'(v) = 4v^3$, $f_3'(w) = 3w^2$'dir. Sonuç 4.1 (b) gereği, $v = 1 + x^2$ ve $w = 1 + (1+x^2)^4$ ara değerlerinde değerlendirerek

$$h'(x) = 3\left(1 + (1+x^2)^4\right)^2 \cdot 4(1+x^2)^3 \cdot 2x = 24x\,(1+x^2)^3\left(1 + (1+x^2)^4\right)^2.$$

Denetim: $x = 0$'da $h'(0) = 0$; gerçekten h çift bir fonksiyondur ve $x = 0$'da en küçük değerini alır.
b) Önce paydanın türevini yazalım. Örnek 4.4'te hesapladığımız gibi $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$'dir. Bölüm kuralıyla

$$u'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Payda her zaman pozitif olduğundan $u'(x) > 0$'dır. Aynı sonucu $u(x) = x\,(1+x^2)^{-1/2}$ yazıp çarpım kuralı ile zincir kuralını birlikte kullanarak da bulabiliriz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$u'(x) = (1+x^2)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-3/2} \cdot 2x$$
$$= (1+x^2)^{-3/2} \left[\, (1+x^2) - x^2 \, \right] = (1+x^2)^{-3/2}$$

c) *Bire birlik.* Önce $t \mapsto t^5$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artan olduğunu görelim. $a < b$ olsun ve üç hâli ayıralım:

- $0 \leq a < b$ ise, negatif olmayan sayılarda kuvvet alma sıralamayı koruduğundan $a^5 < b^5$'tir.
- $a < b \leq 0$ ise $0 \leq -b < -a$ olur; önceki maddeden $(-b)^5 < (-a)^5$, yani $-b^5 < -a^5$, yani $a^5 < b^5$.
- $a < 0 \leq b$ ise $a^5 < 0 \leq b^5$'tir.

Her hâlde $a^5 < b^5$'tir. Öyleyse $a < b$ için

$$f(b) - f(a) = (b^5 - a^5) + 3(b-a) > 0,$$

yani f kesin artandır ve birebirdir.
Örtenlik. f süreklidir (bkz. Analiz 1). $y \in \mathbb{R}$ verilsin ve $t = \mid y \mid + 1 \geq 1$ alalım. $t \geq 1$ olduğundan $t^5 \geq 1$ ve

$$f(t) = t^5 + 3t + 1 \geq 3t + 2 > t = \mid y \mid + 1 > y,$$

$$f(-t) = -t^5 - 3t + 1 \leq -3t \leq -t = - \mid y \mid - 1 < y.$$

f, $[-t, t]$ aralığında sürekli ve $f(-t) < y < f(t)$ olduğundan ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $f(c) = y$ olan bir $c \in (-t, t)$ vardır. Demek ki f örtendir.
Türev. $f(1) = 1 + 3 + 1 = 5$ olduğundan $f^{-1}(5) = 1$'dir. $f'(x) = 5x^4 + 3$ ve $f'(1) = 8 \neq 0$'dır. Teorem 4.2 gereği

$$\left(\, f^{-1} \right)'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{8}.$$

d) Lemma 4.1'yi f ve g'ye x_0 noktasında uygulayalım: x_0'da sürekli φ ve ψ fonksiyonları vardır, $\varphi(x_0) = f'(x_0)$, $\psi(x_0) = g'(x_0)$ ve her x için

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \qquad g(x) - g(x_0) = \psi(x)(x - x_0).$$

Şimdi fg farkını "ekle–çıkar" hilesiyle parçalayalım:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) &= f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x) \left[\, g(x) - g(x_0) \, \right] + g(x_0) \left[\, f(x) - f(x_0) \, \right] \\ &= \Big(\, f(x)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x) \, \Big) \, (x - x_0). \end{aligned}$$

$\Theta(x) = f(x)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x)$ diyelim. f, x_0'da süreklidir (lemmanın kendisinden: $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$); φ ve ψ de x_0'da süreklidir. Sürekli fonksiyonların çarpımı ve toplamı sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) Θ, x_0'da süreklidir. Lemma 4.1'nin (2) $\Rightarrow$ (1) yönü gereği fg, x_0'da türevlenebilirdir ve

$$(fg)'(x_0) = \Theta(x_0) = f(x_0)\psi(x_0) + g(x_0)\varphi(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

e) f tek olsun ve $s(x) = -x$ yazalım; $s'(x) = -1$'dir. Hipotez, her x için

$$f \, \left(\, s(x) \, \right) = -f(x)$$

demektir. Sol taraf $f \circ s$ bileşkesidir ve Teorem 4.1 gereği türevlenebilirdir:

$$(f \circ s)'(x) = f' \, \left(\, s(x) \, \right) s'(x) = -f'(-x).$$

Sağ tarafın türevi ise $-f'(x)$'tir. İki fonksiyon her yerde eşit olduğundan türevleri de eşittir:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Longrightarrow f'(-x) = f'(x).$$

Demek ki f' çifttir.

 CC BY-NC-SA 4.0

f çift ise, yani $f(-x) = f(x)$ ise, aynı hesap $-f'(-x) = f'(x)$, yani $f'(-x) = -f'(x)$ verir; bu da f''nün tek olması demektir.
f) Katmanların değerlendirileceği noktaları bulalım: $x_0 = 0$, $x_1 = g(0) = 0$, $x_2 = g(x_1) = g(0) = 0$. Üç katmanın hepsi 0 noktasında değerlendirilecek. Sonuç 4.1 (b) gereği

$$h'(0) = g'(x_2)\, g'(x_1)\, g'(x_0) = g'(0)^3 = 2^3 = 8.$$

$g(0) = 0$ koşulunun kritik olduğuna dikkat edelim: $g(0) \neq 0$ olsaydı g''yü üç ayrı noktada bilmemiz gerekirdi.
■

Zincir kuralı ile ters fonksiyonun türevi, elimizdeki türev alma araçlarını tamamladı: artık cebirsel işlemlerle **ve** bileşkeyle kurulmuş her fonksiyonun türevini, parçalarının türevlerinden hesaplayabiliyoruz. Geriye tek bir eksik kalıyor — parçaların kendisi. Bir sonraki bölümde üstel, logaritmik, trigonometrik ve ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini, çoğunu tam da bu bölümün iki teoremiyle, tek tek hesaplayacağız: Temel Fonksiyonların Türevleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Temel Fonksiyonların Türevleri

Önceki bölümlerde türev almanın bütün cebirsel altyapısını kurduk: toplam, çarpım ve bölüm kuralları, zincir kuralı ve ters fonksiyonun türevi. Bu kurallar bir makinenin dişlileri gibidir; ama makineyi çalıştırmak için ham maddeye, yani **temel fonksiyonların** türevlerine ihtiyacımız var. Elimizde şimdilik yalnızca $(x^n)' = nx^{n-1}$ var; onunla ancak polinom ve rasyonel fonksiyonların türevini alabiliyoruz.
Bu bölümde bu boşluğu kapatacağız. Sırasıyla logaritma, üstel fonksiyon, genel kuvvet fonksiyonu x^r (r herhangi bir reel sayı), trigonometrik fonksiyonlar, ters trigonometrik fonksiyonlar, hiperbolik fonksiyonlar ve ters hiperbolik fonksiyonların türevlerini **ispatlarıyla birlikte** hesaplayacağız. Bölümün sonunda, kalan derslerde sürekli başvuracağımız toplu bir türev tablosu elde etmiş olacağız.
Yöntem hemen hemen her seferinde aynıdır ve şu üçlüye dayanır: fark oranının limiti (yalnızca ln ve sin için), ters fonksiyonun türevi kuralı (üstel ve bütün "ters" fonksiyonlar için) ve zincir kuralı ile bölüm kuralı (geri kalan her şey için). Yani bölümün tamamı iki gerçek limite dayanıyor — $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ ve $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ — geri kalanı bu ikisinin cebirsel sonucudur.
Ayrıca **logaritmik türev alma** adı verilen, hem tabanı hem üssü değişken olan $u(x)^{v(x)}$ biçimindeki ifadelerin türevini almayı sağlayan tekniği öğreneceğiz.

5.1 Logaritma Fonksiyonunun Türevi

Bütün zinciri başlatan tek bir limit vardır. Onu ayrı bir lemma olarak yazalım, çünkü hem burada hem de ileride tekrar tekrar kullanacağız.
Analiz 1'de e sayısını $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizi limiti olarak tanımlamıştık (bkz. Analiz 1, e Dizisi Artan ve Sınırlıdır). Burada ihtiyacımız olan, aynı ifadenin **sürekli değişkenli** sürümüdür: $n \in \mathbb{N}$ yerine $t \to 0$ olan reel bir değişken koyduğumuzda da aynı sayıya ulaşırız.

Lemma 5.1 (Üstel Limitin Sürekli Değişkenli Biçimi).

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$$

İspat.
Limiti sağdan ve soldan ayrı ayrı hesaplayacağız.
Sağ limit. *$0 < t < 1$ olsun ve $n = \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ yazalım (bkz. Analiz 1). Taban fonksiyonunun tanımı gereği*

$$n \le \frac{1}{t} < n+1, \qquad \text{yani} \qquad \frac{1}{n+1} < t \le \frac{1}{n}.$$

$0 < t < 1$ olduğundan $\frac{1}{t} > 1$, dolayısıyla $n \ge 1$'dir. Şimdi $1+t > 1$ olduğundan $s \mapsto (1+t)^s$ fonksiyonu artandır; üsleri $n \le \frac{1}{t} < n+1$ eşitsizliğiyle karşılaştırırsak

$$(1+t)^n \le (1+t)^{1/t} \le (1+t)^{n+1}$$

elde ederiz. Şimdi tabanı da sınırlayalım: soldaki ifadede $1+t > 1+\frac{1}{n+1}$, sağdaki ifadede $1+t \le 1+\frac{1}{n}$ kullanabiliriz (taban büyüdükçe pozitif üslü kuvvet büyür):

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le (1+t)^{1/t} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Alt ve üst sınırların ikisi de $n \to \infty$ iken e'ye gider:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \to \frac{e}{1} = e, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e\cdot 1 = e,$$

burada e Dizisi Artan ve Sınırlıdır ve Limit Aritmetiği kullanıldı.

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi dizisel ölçütü uygulayalım (bkz. Analiz 1). $t_k \to 0$, $t_k > 0$ olan herhangi bir dizi alalım ve $n_k = \left\lfloor \frac{1}{t_k} \right\rfloor$ yazalım. $\frac{1}{t_k} \to +\infty$ ve $n_k > \frac{1}{t_k} - 1$ olduğundan $n_k \to \infty$'dur. Yukarıdaki iki taraflı eşitsizlik her k için geçerli olduğundan ve iki uç dizi de e'ye yakınsadığından, sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) $(1 + t_k)^{1/t_k} \to e$ verir. Dizi keyfî seçildiğinden

$$\lim_{t \to 0^+} (1 + t)^{1/t} = e.$$

Sol limit. *$-1 < t < 0$ olsun ve $t = -u$ yazalım; burada $0 < u < 1$'dir. $s = \dfrac{u}{1-u}$ tanımlayalım. Bu durumda $u = \dfrac{s}{1+s}$ ve $1 - u = \dfrac{1}{1+s}$, ayrıca $\dfrac{1}{u} = \dfrac{1+s}{s}$'dir. O hâlde*

$$(1 + t)^{1/t} = (1 - u)^{-1/u} = \left(\frac{1}{1+s} \right)^{-\frac{1+s}{s}} = (1 + s)^{\frac{1+s}{s}} = (1 + s)^{1/s} (1 + s).$$

$s(u) = \frac{u}{1-u}$ dönüşümü $(0, 1)$ üzerinde süreklidir, kesin artandır, $u \to 0^+$ iken $s(u) \to 0^+$ olur ve $u > 0$ iken $s(u) > 0$'dır. Bileşke limiti teoremi (bkz. Analiz 1) ile birlikte sağ limit için bulduğumuz sonucu kullanırsak

$$\lim_{u \to 0^+} \big(1 + s(u) \big)^{1/s(u)} = \lim_{s \to 0^+} (1 + s)^{1/s} = e, \qquad \lim_{u \to 0^+} \big(1 + s(u) \big) = 1,$$

dolayısıyla $\lim_{t \to 0^-} (1 + t)^{1/t} = e \cdot 1 = e$.
Sağ ve sol limitler var ve eşit olduğundan (bkz. Analiz 1) iki taraflı limit vardır ve e'ye eşittir.
■

Artık logaritmanın türevini hesaplayabiliriz. Fark oranını yazdığımızda logaritmanın çarpımı toplama çevirme özelliği devreye girecek ve karşımıza tam da yukarıdaki limit çıkacak.

Teorem 5.1 (Logaritma Fonksiyonunun Türevi). *$a > 0$, $a \neq 1$ olsun. $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ve $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları her $x > 0$ noktasında türevlenebilirdir ve*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

İspat.
$x > 0$ sabit olsun. $| h | < x$ koşulunu sağlayan $h \neq 0$ için $x + h > 0$'dır, dolayısıyla $\ln(x + h)$ tanımlıdır. Fark oranını yazalım ve logaritmanın $\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$ özelliğini kullanalım:

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right).$$

Şimdi $t = \dfrac{h}{x}$ değişken değiştirmesi yapalım. $x > 0$ sabit olduğundan $h \to 0$ ile $t \to 0$ denktir ve $h \neq 0$ ile $t \neq 0$ denktir. $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{xt}$ olduğundan

$$\frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{xt} \ln(1 + t) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x} \big[\ln(1 + t)^{1/t} \big],$$

son adımda $r \ln A = \ln A^r$ kuralı kullanıldı. Lemma 5.1 gereği $t \to 0$ iken $(1 + t)^{1/t} \to e$'dir. $\ln$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde süreklidir (kesin artan ve sürekli olan $\exp$ fonksiyonunun tersi olduğundan; bunu ters fonksiyonun sürekliliği bölümünde görmüştük), özel olarak e noktasında süreklidir. Bileşke limiti (bkz. Analiz 1) ile

$$\lim_{t \to 0} \big[\ln(1 + t)^{1/t} \big] = \ln e = 1.$$

O hâlde

$$(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci formül için taban değiştirme kuralını kullanalım: her $u > 0$ için $\log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$'dır. $\dfrac{1}{\ln a}$ bir sabit olduğundan, sabitle çarpma kuralıyla

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Son olarak $\log_a e = \dfrac{\ln e}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}$ *olduğundan* $\dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$*'tir; iki gösterim aynıdır.*
■

i Doğal logaritmanın doğallığı

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ formülündeki $\ln a$ çarpanı ancak $a = e$ iken 1 olur. Yani türev formülünü en sade hâline getiren taban e'dir; "doğal logaritma" adı buradan gelir. Aynı gözlem üstel fonksiyonda da karşımıza çıkacak.

Türevin mutlak değerli sürümü, ileride belirsiz integralde çok işe yarayacak. Küçük ama önemli bir gözlemdir.

Önerme 5.1 (Mutlak Değerli Logaritmanın Türevi). *$x \neq 0$ olmak üzere $g(x) = \ln|x|$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve*

$$\big(\ln|x|\big)' = \frac{1}{x}.$$

İspat.
İki durum var.
Eğer $x > 0$ ise x'in bir komşuluğunda $|x| = x$'tir, dolayısıyla g bu komşulukta $\ln x$ ile çakışır; türev yerel bir kavram olduğundan Teorem 5.1 gereği $g'(x) = \frac{1}{x}$.
Eğer $x < 0$ ise x'in bir komşuluğunda $|x| = -x > 0$'dır, yani $g(x) = \ln(-x)$. Zincir kuralıyla, dış fonksiyon $\ln$ ve iç fonksiyon $u(x) = -x$ alınarak

$$g'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

İki durumda da sonuç aynıdır.
■

5.2 Üstel Fonksiyonun Türevi

Üstel fonksiyon a^x, logaritmanın ters fonksiyonudur. Önceki bölümde ispatladığımız Teorem 4.2 burada tam da beklediğimiz işi görecek: logaritmanın türevini bildiğimize göre, tersinin türevini bir bölme işlemiyle elde edeceğiz.

Teorem 5.2 (Üstel Fonksiyonun Türevi). *$a > 0, a \neq 1$ olsun. $f(x) = a^x$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevlenebilirdir ve*

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Özel olarak $a = e$ için

$$(e^x)' = e^x.$$

İspat.
$g(y) = \log_a y$ fonksiyonunu $(0, \infty)$ üzerinde düşünelim. Bu fonksiyon kesin monotondur ($a > 1$ ise artan, $0 < a < 1$ ise azalan), süreklidir ve $(0, \infty)$'u $\mathbb{R}$ üzerine birebir örten olarak resmeder; tersi tam olarak $f(x) = a^x$'tir (bkz. Analiz 1).

 CC BY-NC-SA 4.0

$x \in \mathbb{R}$ verilsin ve $y = a^x > 0$ yazalım; bu durumda $x = g(y)$'dir. Teorem 5.1 gereği g, y noktasında türevlenebilirdir ve

$$g'(y) = \frac{1}{y \ln a} \neq 0$$

olur, çünkü $y > 0$ ve $a \neq 1$ olduğundan $\ln a \neq 0$'dır. Teorem 4.2'in bütün hipotezleri sağlandığından $f = g^{-1}$ fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

$a = e$ alındığında $\ln e = 1$ olduğundan $(e^x)' = e^x$ bulunur.
■

Kendi türevine eşit olan fonksiyon

e^x, türevi kendisine eşit olan fonksiyondur. Bu özellik onu neredeyse tek yapar: ileride ortalama değer teoremini kullanarak, $f' = f$ ve $f(0) = 1$ koşullarını sağlayan **tek** türevlenebilir fonksiyonun $f(x) = e^x$ olduğunu göstereceğiz. Kanıtın fikri şudur: $h(x) = f(x)e^{-x}$ alınırsa $h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$ olur, yani h sabittir.

Zincir kuralıyla birleştirildiğinde bu iki teorem, üstel–logaritmik ifadelerin tamamını kapsar. Hemen birkaç örnekte çalıştıralım.

Örnek 5.1 (Logaritmik ve Üstel Türevler). Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $h(x) = \log_2(3^x + 1)$

c) $p(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Çözüm.
a) Dış fonksiyon $\ln u$, iç fonksiyon $u(x) = x^2 + 1 > 0$'dır. Zincir kuralıyla

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

b) Önce $(3^x)' = 3^x \ln 3$ olduğunu not edelim. Dış fonksiyon $\log_2 u$, iç fonksiyon $u(x) = 3^x + 1 > 0$:

$$h'(x) = \frac{1}{(3^x + 1)\ln 2} \cdot 3^x \ln 3 = \frac{3^x \ln 3}{(3^x + 1)\ln 2}.$$

c) Zincir kuralıyla $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$ olduğundan

$$p'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Buradaki p fonksiyonunun adı $\sinh x$, türevi olarak bulduğumuz $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ifadesinin adı ise $\cosh x$'tir; bölümün ilerleyen kısmında bu ikiliye ayrıntısıyla döneceğiz.
■

5.3 Genel Kuvvet Fonksiyonu

Şimdiye kadar $(x^n)' = nx^{n-1}$ kuralını yalnızca n tam sayı iken ispatlamıştık: pozitif tam sayılar için tümevarımla, negatif tam sayılar için bölüm kuralıyla. Oysa $x^{1/2}$, x^{π}, $x^{-\sqrt{2}}$ gibi ifadelerin de türevini almak istiyoruz. Bunun anahtarı, reel üslü kuvvetin **tanımını** hatırlamaktır: $x > 0$ ve $r \in \mathbb{R}$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^r := e^{r \ln x}.$$

Bu tanımla artık x^r, tanıdığımız iki fonksiyonun bileşkesidir; zincir kuralı gerisini halleder.

Teorem 5.3 (Genel Kuvvet Fonksiyonunun Türevi). *$r \in \mathbb{R}$ olsun. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$ fonksiyonu her $x > 0$ noktasında türevlenebilirdir ve*

$$(x^r)' = r\, x^{r-1}.$$

İspat.
Tanım gereği $f(x) = e^{r \ln x}$'tir. Dış fonksiyon $u \mapsto e^u$, iç fonksiyon $u(x) = r \ln x$'tir; her ikisi de $x > 0$ için türevlenebilirdir. Teorem 5.2 ve Teorem 5.1 ile zincir kuralını uygularsak

$$f'(x) = e^{r \ln x} \cdot (r \ln x)' = e^{r \ln x} \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x}.$$

Son adımda üslerin toplanması kuralını kullanalım: $x > 0$ olduğundan $\dfrac{x^r}{x} = x^r x^{-1} = x^{r-1}$'dir. O hâlde

$$f'(x) = r\, x^{r-1}.$$

■

> ⚠ Tanım kümesine dikkat
>
> $x^r = e^{r \ln x}$ yazımı yalnızca $x > 0$ için anlamlıdır; $x \le 0$ iken $\ln x$ tanımsızdır. Bu yüzden Teorem 5.3'nin doğal tanım kümesi $(0, \infty)$'dur.
> Bu, $x < 0$ için hiçbir şey söyleyemeyeceğimiz anlamına gelmez: $r = n \in \mathbb{Z}$ ise x^n zaten $x \neq 0$ olan her yerde tanımlıdır ve $(x^n)' = nx^{n-1}$ kuralını daha önce cebirsel olarak ispatlamıştık. Benzer biçimde $r = \frac{p}{q}$, q tek ise $x^{1/q}$ negatif x'ler için de tanımlıdır ve kural yine geçerlidir. Genel bir irrasyonel r içinse $x < 0$ bölgesinde x^r diye bir reel sayı yoktur.

> ⚠ Kuvvet fonksiyonu ile üstel fonksiyonu karıştırmayın
>
> x^r ile a^x birbirine hiç benzemeyen iki fonksiyondur; türevleri de öyledir:
>
> $$(x^r)' = r\, x^{r-1} \qquad \text{ama} \qquad (a^x)' = a^x \ln a.$$
>
> Birincide **taban** değişkendir, üs sabittir; ikincide **üs** değişkendir, taban sabittir. Örneğin $(x^3)' = 3x^2$ iken $(3^x)' = 3^x \ln 3$'tür. Hem tabanın hem üssün değişken olduğu durumda ise ikisinden hiçbiri geçerli değildir; sıradaki başlık tam bu durumu ele alıyor.

5.4 Logaritmik Türev Alma

$y = u(x)^{v(x)}$ biçimindeki bir ifadenin türevi için elimizde hazır bir kural yok. İki çıkış yolu var ve ikisi de aynı kapıya çıkıyor: ya ifadeyi $e^{v \ln u}$ olarak yeniden yazarız, ya da her iki tarafın logaritmasını alıp türev alırız. İkinci yöntemin adı **logaritmik türev alma**dır ve yalnızca kuvvet ifadelerinde değil, uzun çarpım–bölüm zincirlerinde de hesabı çok kısaltır.

Tanım 5.1 (Logaritmik Türev). *f, bir I aralığında türevlenebilir ve her $x \in I$ için $f(x) \neq 0$ olsun. Önerme 5.1 ve zincir kuralı gereği $\ln|f|$ fonksiyonu I üzerinde türevlenebilirdir ve*

$$\big(\ln|f(x)|\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

olur. Bu orana f'nin **logaritmik türevi** (logarithmic derivative) denir. Bir fonksiyonun türevini, önce logaritmasının türevini hesaplayıp sonra f ile çarparak bulma yöntemine **logaritmik türev alma** (logarithmic differentiation) adı verilir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f'(x) = f(x) \cdot \big(\ln|\ f(x)\ |\ \big)'.$$

Yöntemi $u(x)^{v(x)}$ biçimindeki ifadelere uygulayalım.

Önerme 5.2 (Tabanı ve Üssü Değişken Olan İfadelerin Türevi). *u ve v, bir I aralığında türevlenebilir olsun ve her $x \in I$ için $u(x) > 0$ olsun. $y(x) = u(x)^{v(x)}$ fonksiyonu I üzerinde türevlenebilirdir ve*

$$y'(x) = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

İspat.
Reel üslü kuvvetin tanımı gereği $u(x) > 0$ olduğundan

$$y(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

yazabiliriz. İç fonksiyon $w(x) = v(x) \ln u(x)$'tir; $u > 0$ ve u, v türevlenebilir olduğundan w de türevlenebilirdir ve çarpım kuralı ile zincir kuralından

$$w'(x) = v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Şimdi $y = e^w$ bileşkesine zincir kuralını uygularsak

$$y'(x) = e^{w(x)}\, w'(x) = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

bulunur.
*Aynı sonuca logaritmik türevle de ulaşılır: $y > 0$ olduğundan $\ln y = v \ln u$ yazıp iki tarafın türevini alırsak $\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$ olur; y ile çarpmak yeter. Ancak bu ikinci yolda y'nin türevlenebilir olduğunu **önceden** bilmek gerekir; yukarıdaki birinci yol bunu da ispatladığı için daha eksiksizdir.*
■

Formülün yapısı öğreticidir: köşeli parantezin içindeki iki terimden birincisi "üssü değişken, tabanı sabit tut" (yani a^x kuralı), ikincisi "tabanı değişken, üssü sabit tut" (yani x^r kuralı) hesabından gelir. Gerçekten de u sabit alınırsa birinci terim $u^v \ln u \cdot v'$, yani üstel kural; v sabit alınırsa ikinci terim $v\, u^{v-1} u'$, yani kuvvet kuralı çıkar.
Yöntemin en klasik örneği olan x^x'i şimdi yapalım.

Örnek 5.2 (x Üssü x Fonksiyonu). $y = x^x$, $x > 0$ fonksiyonunun türevini bulunuz ve y'nin en küçük değerini aldığı noktayı belirleyiniz.

Çözüm.
Türev. $u(x) = x$, $v(x) = x$ alalım; $x > 0$ için $u(x) > 0$'dır. $y > 0$ olduğundan iki tarafın doğal logaritmasını alabiliriz:

$$\ln y = x \ln x.$$

Sol tarafın türevi $\frac{y'}{y}$, sağ tarafın türevi çarpım kuralıyla

$$(x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

olur. Böylece $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$ ve buradan

$$y' = x^x (\ln x + 1).$$

Aynı sonucu Önerme 5.2 ile doğrudan da yazabilirdik: $v' = 1$, $u' = 1$ olduğundan $y' = x^x \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x (\ln x + 1)$.

 CC BY-NC-SA 4.0

En küçük değer. $x^x > 0$ olduğundan y' ile $\ln x + 1$ aynı işaretlidir. $\ln x + 1 = 0$ denklemi $\ln x = -1$, yani $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ verir. $0 < x < \frac{1}{e}$ iken $\ln x < -1$ olduğundan $y' < 0$, $x > \frac{1}{e}$ iken $y' > 0$'dır. Demek ki y fonksiyonu $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ üzerinde azalıyor, $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ üzerinde artıyor; en küçük değerini $x = \frac{1}{e}$ noktasında alıyor ve bu değer

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} = e^{-1/e} \approx 0{,}6922$$

olur.
■

Logaritmik türevin ikinci kullanım alanı, çok çarpanlı ifadelerdir: $f(x) = \dfrac{(x-1)^3\sqrt{x^2+2}}{(x+4)^5}$ fonksiyonunun türevini doğrudan çarpım ve bölüm kurallarıyla almak uzun sürer; oysa logaritma çarpımı toplama çevirdiğinden $\ln|\,f(x)\,| = 3\ln|\,x-1\,| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - 5\ln|\,x+4\,|$ yazıp türev almak neredeyse anında sonuç verir:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x-1} + \frac{x}{x^2+2} - \frac{5}{x+4} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = f(x)\left[\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x^2+2} - \frac{5}{x+4}\right].$$

5.5 Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

Trigonometrik türevlerin tamamı tek bir limite dayanır: Analiz 1'de ispatladığımız

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

eşitliğine (bkz. Analiz 1). Bunun yanına bir tane daha limit gerekiyor; onu ayrı bir lemma olarak ispatlayalım.

Lemma 5.2 (Kosinüsün Sıfırdaki Fark Oranı).

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

İspat.
Yarım açı özdeşliğinden başlayalım: her h için $\cos h = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2}$, yani

$$\cos h - 1 = -2\sin^2\frac{h}{2}.$$

$h \neq 0$ için bölelim ve payda ile payı $\frac{h}{2}$ üzerinden düzenleyelim:

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h} = -\sin\frac{h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Şimdi iki çarpanı ayrı ayrı inceleyelim. sin *fonksiyonu süreklidir (bkz. Analiz 1), dolayısıyla $h \to 0$ iken $\sin\frac{h}{2} \to \sin 0 = 0$'dır. İkinci çarpan için $u = \frac{h}{2}$ yazalım: $h \to 0$ ile $u \to 0$ denktir ve $h \neq 0$ ile $u \neq 0$ denktir; Sinüs x Bölü x Limiti ve bileşke limiti (bkz. Analiz 1) gereği*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1.$$

Limitin çarpımla uyumundan (bkz. Analiz 1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = -0\cdot 1 = 0$$

elde edilir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu iki limitle bütün trigonometrik türevleri kurabiliriz.

Teorem 5.4 (Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri). *Aşağıdaki eşitlikler, sol taraflar tanımlı olduğu her noktada geçerlidir:*

1. $(\sin x)' = \cos x$, *her* $x \in \mathbb{R}$ *için.*
2. $(\cos x)' = -\sin x$, *her* $x \in \mathbb{R}$ *için.*
3. $(\tan x)' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *için.*
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$, $x \neq k\pi$ *için.*
5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *için.*
6. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$, $x \neq k\pi$ *için.*

Burada $k \in \mathbb{Z}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$*'tir.*

İspat.
1. Sinüs. $x \in \mathbb{R}$ *sabit olsun. Toplam formülü* $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$*'yi fark oranında kullanalım:*

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

Burada $\sin x$ *ve* $\cos x$*,* h*'den bağımsız sabitlerdir. Lemma 5.2 ile birinci terimin limiti* $\sin x \cdot 0 = 0$*, Sinüs x Bölü x Limiti ile ikinci terimin limiti* $\cos x \cdot 1 = \cos x$*'tir. Toplamın limiti limitlerin toplamı olduğundan*

$$(\sin x)' = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

2. Kosinüs. *Aynı yöntem:* $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ *toplam formülünden*

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \to \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

3. Tanjant. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *ve* $\cos x \neq 0$ *olan noktalarda bölüm kuralı uygulanabilir:*

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Aynı ifadeyi $\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ $= 1 + \tan^2 x$ *biçiminde de yazabiliriz; iki gösterim özdeştir.*
4. Kotanjant. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *ve* $\sin x \neq 0$ *olan noktalarda*

$$(\cot x)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x).$$

5. Sekant. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ *olduğundan, bölüm kuralıyla (ya da* u^{-1} *bileşkesine zincir kuralıyla)*

$$(\sec x)' = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x.$$

6. Kosekant. *Benzer biçimde* $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ *için*

$$(\csc x)' = \frac{0 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

i İşaretleri hatırlamanın kolay yolu

Adı "ko-" ile başlayan fonksiyonların (cos, cot, csc) türevlerinde eksi işareti vardır; diğerlerinde (sin, tan, sec) artı. Ayrıca sin ile cos'un türevleri dörtlü bir döngü oluşturur:

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x.$$

Bu döngü, yüksek mertebeden türevleri hesaplarken çok işimize yarayacak.

5.6 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

Ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini ters fonksiyonun türevi kuralıyla hesaplayacağız. Burada dikkat edilecek tek şey **işaret seçimidir**: hesabın bir yerinde $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$ gibi bir adım geçiyor ve iki işaretten hangisinin doğru olduğunu, y'nin hangi aralıkta olduğuna bakarak belirlemek zorundayız. Ters fonksiyonun tanımlı olabilmesi için ana fonksiyonu bir aralığa kısıtlamıştık; o aralık burada karşımıza çıkacak.
Hatırlatalım:

- sin, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ üzerine kısıtlandığında $[-1,1]$'e birebir örtendir; tersi $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$'dir.
- cos, $[0,\pi]$ üzerine kısıtlandığında $[-1,1]$'e birebir örtendir; tersi $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$'dir.
- tan, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ üzerine kısıtlandığında $\mathbb{R}$'ye birebir örtendir; tersi $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$'dir.
- cot, $(0,\pi)$ üzerine kısıtlandığında $\mathbb{R}$'ye birebir örtendir; tersi $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$'dir.

Teorem 5.5 (Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri). *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ *için.*
2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ *için.*
3. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, *her* $x \in \mathbb{R}$ *için.*
4. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, *her* $x \in \mathbb{R}$ *için.*

Ayrıca arcsin *ve* arccos *fonksiyonları* $x = \pm 1$ *uç noktalarında türevlenebilir değildir.*

İspat.
1. Arksinüs. $-1 < x < 1$ *olsun ve* $y = \arcsin x$ *yazalım; bu durumda* $x = \sin y$ *ve* $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$*'dir (uç değerler* $y = \pm\frac{\pi}{2}$ *ancak* $x = \pm 1$ *iken oluşur, onları dışarıda bıraktık).*
$f(y) = \sin y$ *fonksiyonu* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *üzerinde süreklidir ve bu aralığı* $[-1,1]$ *üzerine birebir örten olarak resmeder; ayrıca* y *noktasında türevlenebilirdir ve* $f'(y) = \cos y$*'dir. Şimdi kritik adım:* $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *olduğundan* $\cos y > 0$*'dır. Bu yüzden* $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ *özdeşliğinden karekök alırken* ***pozitif*** *işaret seçilir:*

$$\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0.$$

$f'(y) \neq 0$ *olduğundan Teorem 4.2 uygulanabilir:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$x \to 1^-$ *ve* $x \to -1^+$ *iken bu ifade* $+\infty$*'a gider. Uç noktalarda* $\cos y = 0$ *olduğundan Teorem 4.2'in hipotezi zaten bozulur; türevin orada gerçekten var olmadığını aşağıda ayrıca göstereceğiz.*
2. Arkkosinüs. $-1 < x < 1$ *olsun,* $y = \arccos x$ *yazalım;* $x = \cos y$ *ve* $y \in (0,\pi)$*'dir.* $g(y) = \cos y$ *için* $g'(y) = -\sin y$*'dir. Bu kez işaret kararı* $\sin y$ *üzerinedir:* $y \in (0,\pi)$ *olduğundan* $\sin y > 0$*, dolayısıyla*

$$\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0$$

ve $g'(y) = -\sqrt{1-x^2} \neq 0$*'dır. Teorem 4.2 gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(\arccos x)' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Uç noktalar. *Şimdi* arcsin *ile* arccos *fonksiyonlarının $x = \pm 1$ noktalarında türevlenemediğini doğrudan fark oranından görelim. Önce bir eşitsizlik hazırlayalım:* $1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$ *ve* $\left|\sin \frac{u}{2}\right| \leq \frac{|u|}{2}$ *olduğundan her u için*

$$0 \leq 1 - \cos u \leq \frac{u^2}{2}$$

olur; ayrıca $0 < u < \pi$ iken $\cos u < 1$, yani $1 - \cos u > 0$'dır, dolayısıyla aşağıdaki bölmeler meşrudur. $x = 1$ noktasındaki (soldan) fark oranını $y = \arcsin x$ ve $u = \frac{\pi}{2} - y$ değişkenleriyle yazalım. $x \to 1^-$ iken $u \to 0^+$'dır ve $x = \sin y = \cos u$ olduğundan

$$\frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = \frac{-u}{\cos u - 1} = \frac{u}{1 - \cos u} \geq \frac{u}{\frac{u^2}{2}} = \frac{2}{u} \underset{u \to 0^+}{\to} +\infty.$$

Demek ki fark oranının sonlu bir limiti yoktur; arcsin *fonksiyonu $x = 1$'de türevlenemez.* arcsin *bir tek fonksiyon olduğundan* ($\arcsin(-x) = -\arcsin x$) *$x = -1$ noktasındaki fark oranı $x \mapsto -x$ değişken değiştirmesiyle aynı ifadeye dönüşür ve sonuç değişmez.*
arccos *için $y = \arccos x$ alalım: $x = 1$ durumunda $u = y \to 0^+$, $x = -1$ durumunda $u = \pi - y \to 0^+$ yazmak yeter. Her iki durumda da fark oranı*

$$-\frac{u}{1 - \cos u} \leq -\frac{2}{u} \underset{u \to 0^+}{\to} -\infty$$

olur, yani türev yine yoktur. Geometrik okuması şudur: bu dört noktada grafiğin teğeti düşeydir.
3. Arktanjant. *$x \in \mathbb{R}$ olsun, $y = \arctan x$ yazalım; $x = \tan y$ ve $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$'dir. Teorem 5.4 gereği $(\tan y)' = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$'dir. Bu ifade her zaman $\geq 1 > 0$ olduğundan sıfırdan farklıdır ve işaret sorunu hiç doğmaz; Teorem 4.2 gereği*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Arkkotanjant. *$y = \operatorname{arccot} x$, yani $x = \cot y$, $y \in (0, \pi)$ olsun.* $(\cot y)' = -(1 + \cot^2 y) = -(1 + x^2) \neq 0$ *olduğundan, Teorem 4.2 gereği*

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{-(1 + \cot^2 y)} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

■

Birinci ile ikinci, üçüncü ile dördüncü formülün yalnızca işaretçe farklı olması tesadüf değildir.

i Toplamları sabittir

Her $x \in [-1, 1]$ için $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$'dir. Bu eşitliklerin türevini alırsak sol taraf 0 verir; işte türev formüllerinin işaretçe zıt olmasının nedeni budur. Tersten okursak: $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$ olduğundan bu toplam bir sabittir ve $x = 0$ koyarak sabitin $0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ olduğu görülür. (Türevi her yerde sıfır olan bir fonksiyonun sabit olduğunu ortalama değer teoremi bölümünde ispatlayacağız.)

5.7 Hiperbolik Fonksiyonlar

Üstel fonksiyonun çift ve tek parçalarına ayrılması, trigonometrik fonksiyonlara şaşırtıcı derecede benzeyen yeni bir aile üretir. Bu ailenin üyeleri fizikte (asma köprü kablosunun aldığı şekil, özel görelilik), mühendislikte ve integral hesabında sürekli karşımıza çıkar. Türevleri, üstel fonksiyonun türevinden birkaç satırda elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 5.2 (Hiperbolik Fonksiyonlar). Her $x \in \mathbb{R}$ için **hiperbolik sinüs** (hyperbolic sine) ve **hiperbolik kosinüs** (hyperbolic cosine)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ile tanımlanır. Bunlardan yola çıkarak **hiperbolik tanjant**, **hiperbolik kotanjant**, **hiperbolik sekant** ve **hiperbolik kosekant** şöyle tanımlanır:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ (x \in \mathbb{R}), \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \ (x \neq 0),$$

$$\operatorname{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} \ (x \in \mathbb{R}), \qquad \operatorname{csch}\, x = \frac{1}{\sinh x} \ (x \neq 0).$$

$\cosh x \geq 1 > 0$ olduğundan tanh ve sech bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır; $\sinh x = 0$ eşitliği yalnızca $x = 0$ için sağlandığından coth ve csch yalnızca orada tanımsızdır.

Adlandırmanın nedeni, aşağıdaki temel özdeşliktir: $(\cos t, \sin t)$ noktası $u^2 + v^2 = 1$ çemberini tararken, $(\cosh t, \sinh t)$ noktası $u^2 - v^2 = 1$ hiperbolünün sağ kolunu tarar.

Önerme 5.3 (Hiperbolik Fonksiyonların Temel Özdeşlikleri). *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler geçerlidir:*

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
2. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ *ve* $x \neq 0$ *için* $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$.
3. $\sinh(-x) = -\sinh x$ *(tek fonksiyon),* $\cosh(-x) = \cosh x$ *(çift fonksiyon).*
4. $\cosh x \geq 1$ *ve eşitlik yalnızca* $x = 0$ *için sağlanır.*
5. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ *ve* $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

İspat.
1. $a = e^x$, $b = e^{-x}$ *yazalım;* $ab = e^x e^{-x} = e^0 = 1$*'dir.* $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ *özdeşliğinden*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab = 1.$$

2. *Birinci maddeyi* $\cosh^2 x > 0$*'a bölersek* $1 - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$*, yani* $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ *çıkar.* $x \neq 0$ *için birinci maddeyi* $\sinh^2 x > 0$*'a bölersek* $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$ *elde edilir.*
3. $e^{-(-x)} = e^x$ *olduğundan*

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x, \qquad \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x.$$

4. $t = e^x > 0$ *yazalım.* $\cosh x = \dfrac{t + \frac{1}{t}}{2}$*'dir. Pozitif sayılar için aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliği (ya da doğrudan* $\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \geq 0$ *açılımı)* $t + \frac{1}{t} \geq 2$ *verir; eşitlik yalnızca* $t = 1$*, yani* $x = 0$ *iken sağlanır. O hâlde* $\cosh x \geq 1$*'dir.*
5. *Sağ tarafı açalım:*

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4}.$$

Payı açtığımızda birinci çarpımdan $e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}$*, ikinciden* $e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}$ *gelir. Toplarsak karışık terimler birbirini götürür ve* $2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}$ *kalır. Dörde bölersek*

$$\frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y).$$

cosh *formülü de aynı hesapla, bu kez artı işaretli terimlerin sağ kalmasıyla elde edilir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} = \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4} = \cosh(x+y).$$

■

⚠ Trigonometriyle benzerlik tam değildir

Özdeşlikler trigonometrik olanlara çok benzer ama **işaretler her yerde aynı değildir**: $\cos^2 + \sin^2 = 1$ iken $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$'dir; $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ iken $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$'dir. Türevlerde de aynı ayrım karşımıza çıkacak: $(\cos x)' = -\sin x$ ama $(\cosh x)' = +\sinh x$.

Teorem 5.6 (Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri). *Aşağıdaki eşitlikler, sol taraflar tanımlı olduğu her noktada geçerlidir:*

1. $(\sinh x)' = \cosh x$.
2. $(\cosh x)' = \sinh x$. *(Trigonometrik durumun aksine burada eksi işareti yoktur.)*
3. $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$.
4. $(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x = 1 - \coth^2 x$, $x \neq 0$ *için.*
5. $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$.
6. $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$, $x \neq 0$ *için.*

İspat.
Önce tek bir ara sonuç: zincir kuralı ve Teorem 5.2 gereği $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$*'tir.*
1. *Toplam ve sabitle çarpma kurallarıyla*

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

2. *Aynı biçimde*

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

3. $\cosh x > 0$ *olduğundan bölüm kuralı her* x *için uygulanabilir; sonra Önerme 5.3'in birinci maddesini kullanırız:*

$$(\tanh x)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.$$

Aynı ifade $\dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ *biçiminde de yazılır.*
4. $x \neq 0$ *için* $\sinh x \neq 0$*'dır ve*

$$(\coth x)' = \frac{(\cosh x)' \sinh x - \cosh x (\sinh x)'}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x.$$

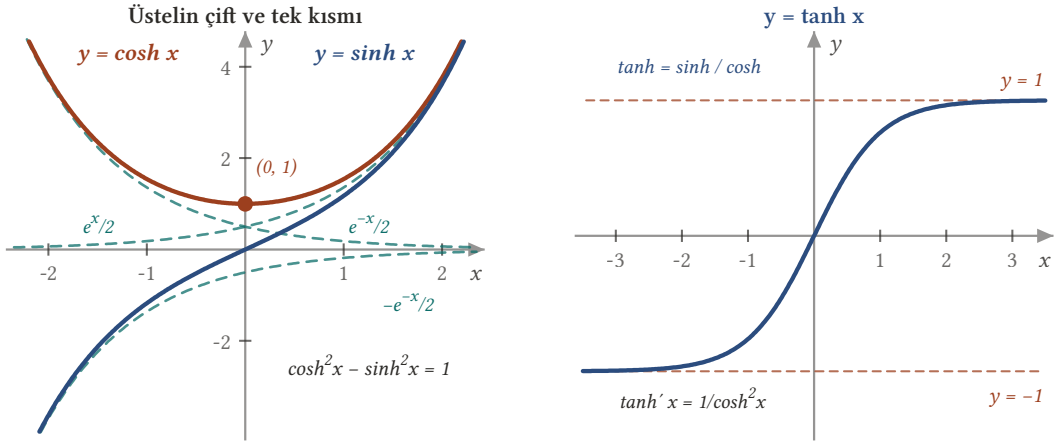
$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$ *olduğundan bu değer* $1 - \coth^2 x$*'e de eşittir.*
5. $\operatorname{sech} x = (\cosh x)^{-1}$ *bileşkesine zincir kuralı:*

$$(\operatorname{sech} x)' = -(\cosh x)^{-2} \cdot \sinh x = -\frac{1}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x.$$

6. *Aynı biçimde* $x \neq 0$ *için*

$$(\operatorname{csch} x)' = -(\sinh x)^{-2} \cdot \cosh x = -\frac{1}{\sinh x} \cdot \frac{\cosh x}{\sinh x} = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.1: Hiperbolik fonksiyonlar üstel fonksiyonun çift ve tek kısımlarıdır: cosh x = (eˣ + e⁻ˣ)/2, sinh x = (eˣ − e⁻ˣ)/2. Solda x büyürken iki eğri de eˣ/2 kesiklisine yapışır; x küçülürken cosh e⁻ˣ/2'ye, sinh ise −e⁻ˣ/2'ye yaklaşır. Sağda tanh x = sinh x/cosh x her yerde artar ve −1 ile 1 doğrularının arasında kalır. cosh²x − sinh²x = 1 özdeşliği de, (sinh)′ = cosh ve (cosh)′ = sinh türev kuralları da doğrudan bu tanımdan çıkar.

■

5.8 Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

Hiperbolik fonksiyonlar üstel fonksiyondan üretildiğine göre, terslerinin de logaritma cinsinden **açık** bir formülü olmalıdır. Trigonometrik fonksiyonlarda böyle bir şansımız yoktu; arcsin'i temel fonksiyonlarla yazamayız. Burada ise ikinci dereceden bir denklem çözerek her tersi kapalı biçimde bulabiliriz.

Önerme 5.4 (Ters Hiperbolik Fonksiyonların Logaritmik Biçimi). *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

1. $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *birebir örtendir ve* $\operatorname{arcsinh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $\cosh$ *fonksiyonunun* $[0,\infty)$*'a kısıtlaması* $[1,\infty)$ *üzerine birebir örtendir ve* $\operatorname{arccosh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \geq 1$.
3. $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ *birebir örtendir ve* $\operatorname{arctanh}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $|\,x\,| < 1$.
4. $\coth : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ *birebir örtendir ve* $\operatorname{arccoth}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, $|\,x\,| > 1$.

İspat.
1. $y = \sinh x$ *denklemini* x *için çözelim.* $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ *eşitliğini* $2e^x$ *ile çarparsak,* $t = e^x > 0$ *yazımıyla*

$$t^2 - 2yt - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

$\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |\,y\,| \geq y$ *olduğundan* $y - \sqrt{y^2+1} < 0$*'dır; oysa* $t = e^x > 0$ *olmak zorundadır. Demek ki tek geçerli kök* $t = y + \sqrt{y^2+1}$*'dir ve bu kök her* $y \in \mathbb{R}$ *için pozitiftir. Böylece her* y *için tek bir* $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ *vardır; yani* sinh *birebir örtendir ve tersi iddia edilen fonksiyondur.*
2. $y = \cosh x$, $x \geq 0$ *olsun. Aynı hesapla* $t = e^x$ *için*

$$t^2 - 2yt + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

bulunur; reel çözüm için $y \geq 1$ *gerekir (zaten Önerme 5.3 gereği* $\cosh x \geq 1$*'dir). İki kökün çarpımı* 1*'dir, yani biri* ≥ 1*, diğeri* ≤ 1*'dir.* $x \geq 0$ *istediğimizden* $t = e^x \geq 1$ *olmalıdır; bu da* $t = y + \sqrt{y^2-1}$ *kökünü seçtirir. O hâlde* $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$*. Her* $y \geq 1$ *için böyle tek bir* $x \geq 0$ *bulunduğundan,* cosh *fonksiyonunun* $[0,\infty)$*'a kısıtlaması* $[1,\infty)$ *üzerine birebir örtendir ve tersi iddia edilen fonksiyondur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

3. $y = \tanh x = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ *yazalım (pay ve paydayı* e^x *ile çarparak).* $s = e^{2x} > 0$ *dersek* $y(s+1) = s - 1$*, yani* $s(y-1) = -1-y$ *ve buradan*

$$s = \frac{1+y}{1-y}.$$

Bu ifadenin pozitif olması için $-1 < y < 1$ *gerekir ve yeter; gerçekten* $\mid y \mid < 1$ *iken pay ve payda birlikte pozitiftir. O hâlde* $2x = \ln\dfrac{1+y}{1-y}$*, yani* $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$*. Bu, her* $y \in (-1,1)$ *için tek bir* x *verdiğinden* $\tanh$*,* $\mathbb{R}$*'yi* $(-1,1)$ *üzerine birebir örten olarak resmeder.*

4. $x \neq 0$ *için* $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$*'tir ve bu durumda* $\tanh x \neq 0$*'dır. Dolayısıyla* $y = \coth x$ *eşitliği* $\tanh x = \dfrac{1}{y}$ *eşitliğine denktir. Üçüncü madde gereği bu denklemin bir çözümü ancak ve ancak* $\left|\frac{1}{y}\right| < 1$*, yani* $\mid y \mid > 1$ *iken vardır ve bu çözüm tektir:*

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}} = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1},$$

burada son adımda pay ve payda $y \neq 0$ *ile çarpıldı.* $\mid y \mid > 1$ *iken* $y+1$ *ile* $y-1$ *aynı işaretli olduğundan* $\dfrac{y+1}{y-1} > 0$*'dır, yani logaritma tanımlıdır. Ayrıca* $\tanh x = \frac{1}{y} \neq 0$ *olduğundan bulunan* x *sıfırdan farklıdır. Demek ki* $\coth$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *kümesini* $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ *üzerine birebir örten olarak resmeder ve tersi iddia edilen fonksiyondur.*

■

Türevleri iki yoldan da hesaplayabiliriz: ya yukarıdaki açık formüllerin türevini alarak, ya da ters fonksiyonun türevi kuralıyla. İkisini de yapalım; birbirini doğrulaması öğreticidir.

Teorem 5.7 (Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri). *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

1. $(\operatorname{arcsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$*, her* $x \in \mathbb{R}$ *için.*
2. $(\operatorname{arccosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$*,* $x > 1$ *için.*
3. $(\operatorname{arctanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$*,* $\mid x \mid < 1$ *için.*
4. $(\operatorname{arccoth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$*,* $\mid x \mid > 1$ *için.*

İspat.

1. Ters fonksiyon kuralıyla. $y = \operatorname{arcsinh} x$*, yani* $x = \sinh y$ *olsun. Teorem 5.6 gereği* $(\sinh y)' = \cosh y$*'dir ve* $\cosh y \geq 1 > 0$ *olduğundan bu türev hiçbir yerde sıfır olmaz.* $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ *ve* $\cosh y > 0$ *olduğundan işaret seçimi kesindir:*

$$\cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}.$$

Önerme 5.4 gereği $\sinh$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde sürekli ve birebir örtendir; o hâlde Teorem 4.2 uygulanabilir ve*

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Açık formülle doğrulama. $\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ *olduğundan, önce iç fonksiyonun türevini alalım:*

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Zincir kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

çünkü paydaki $\sqrt{x^2+1}+x$ *ile soldaki paydadaki* $x+\sqrt{x^2+1}$ *sadeleşir (bu ifade her* x *için pozitiftir, dolayısıyla sadeleştirme meşrudur). İki yol aynı sonucu verdi.*
2. $y = \operatorname{arccosh} x$*, yani* $x = \cosh y$*,* $y > 0$ *olsun (*$x > 1$ *alındığı için* $y = 0$ *dışlanır).* $(\cosh y)' = \sinh y$ *ve* $y > 0$ *iken* $\sinh y > 0$*'dır; ayrıca* $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$ *olduğundan*

$$\sinh y = +\sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1} > 0.$$

Teorem 4.2 gereği

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Açık formül de aynı sonucu verir. Gerçekten $x > 1$ *için*

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

olduğundan, zincir kuralıyla

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

bulunur; $x > 1$ *iken* $x+\sqrt{x^2-1} > 0$ *olduğundan sadeleştirme meşrudur. Son olarak* $x \to 1^+$ *iken türev* $+\infty$*'a gider;* $x = 1$ *noktasında* arccosh *türevlenebilir değildir.*
3. $y = \operatorname{arctanh} x$*, yani* $x = \tanh y$ *olsun.* $(\tanh y)' = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2$*'dir ve* $|x| < 1$ *olduğundan* $1 - x^2 > 0$*, özel olarak sıfırdan farklıdır. Teorem 4.2 gereği*

$$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Açık formülden de doğrulayalım. $|x| < 1$ *için* $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$*'tir; bu biçimde her iki logaritmanın argümanı pozitiftir. Türev alalım:*

$$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

4. $|x| > 1$ *için* $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\left[\ln|x+1| - \ln|x-1|\right]$ *yazabiliriz. Önerme 5.1 gereği*

$$(\operatorname{arccoth} x)' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Teorem 4.2 de aynı sonucu verir: $x = \coth y$ *için* $(\coth y)' = 1 - \coth^2 y = 1 - x^2$*'dir ve* $|x| > 1$ *olduğundan bu türev sıfırdan farklıdır; dolayısıyla* $(\operatorname{arccoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$*'dir.*
■

⚠ Aynı formül, ayrı fonksiyonlar

arctanh ile arccoth fonksiyonlarının türevi aynı cebirsel ifadeye, $\frac{1}{1-x^2}$'ye eşittir. Bu bir çelişki değildir: birincisinin tanım kümesi $(-1,1)$, ikincisininki $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$'dur. İki fonksiyonun tanım kümeleri kesişmediği için "türevleri eşit olan fonksiyonlar sabit farklıdır" ilkesi burada uygulanamaz. Aynı uyarı, integral hesabında $\int \frac{dx}{1-x^2}$ ifadesinin hangi aralıkta çalışıldığına göre farklı yazılmasının da nedenidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.3 (Hiperbolik Fonksiyonlarla Türev Hesapları). Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

a) $f(x) = \cosh(x^2+1)$

b) $g(x) = \ln(\cosh x)$

c) $h(x) = \operatorname{arcsinh}\,(e^x)$

d) $\varphi(x) = \operatorname{arctanh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Çözüm.
a) Dış fonksiyon $\cosh u$, iç fonksiyon $u(x) = x^2+1$. Zincir kuralıyla

$$f'(x) = \sinh(x^2+1)\cdot 2x = 2x\sinh(x^2+1).$$

b) $\cosh x > 0$ olduğundan $\ln(\cosh x)$ her x için tanımlıdır. Zincir kuralıyla

$$g'(x) = \frac{1}{\cosh x}\cdot \sinh x = \tanh x.$$

Bu, ileride $\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x) + C$ sonucunu verecek olan hesaptır.
c) Teorem 5.7'in birinci maddesi ve zincir kuralıyla

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(e^x)^2}}\cdot e^x = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

d) Önce iç fonksiyonun tanım kümesini kontrol edelim: her x için $\left|\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| < 1$'dir, çünkü $x^2 < 1+x^2$'dir. Dolayısıyla bileşke bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır.
İç fonksiyonun türevi, bölüm kuralıyla:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Dış türev için $u = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ alırsak $1-u^2 = 1-\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$'dir. O hâlde

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = (1+x^2)\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

İlginç bir sonuç: φ ile arcsinh fonksiyonlarının türevleri aynı çıktı. Gerçekten de $\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arcsinh} x$ özdeşliği geçerlidir; $x = \sinh t$ koyup $\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ olduğunu görmek yeter.
■

5.9 Türev Tablosu

Bu bölümde ispatladığımız bütün formülleri tek bir yerde toplayalım. Tablodaki her satır, sağ sütundaki ifadenin tanımlı olduğu her noktada geçerlidir. Kalan derslerde bu tabloyu bir başvuru listesi gibi kullanacağız.

$f(x)$	$f'(x)$	Geçerlilik
c (sabit)	0	$x \in \mathbb{R}$
x^r	$r\,x^{r-1}$	$x > 0,\ r \in \mathbb{R}$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$x \neq 0,\ n \in \mathbb{Z}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(x)$	$f'(x)$	Geçerlilik
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$
$\ln\lvert\, x \,\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cot x$	$-\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$x \neq k\pi$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1 + x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$	$x \in \mathbb{R}$
$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x = 1 - \coth^2 x$	$x \neq 0$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$	$x \neq 0$
$\operatorname{arcsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$x > 1$
$\operatorname{arctanh} x$	$\dfrac{1}{1 - x^2}$	$\lvert\, x \,\rvert < 1$
$\operatorname{arccoth} x$	$\dfrac{1}{1 - x^2}$	$\lvert\, x \,\rvert > 1$
$u(x)^{v(x)}$	$u^v \left[v' \ln u + \dfrac{v\, u'}{u} \right]$	$u(x) > 0$

5.10 Karma Hesap Örnekleri

Tablo tek başına yetmez; onu zincir kuralı, çarpım kuralı ve logaritmik türevle birlikte kullanmayı alışkanlık hâline getirmek gerekir. Aşağıdaki örnekler bu birleşimlerin tipik kalıplarını içeriyor.

Örnek 5.4 (Karma Türev Hesapları). Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$

 CC BY-NC-SA 4.0

b) $g(x) = x^{\ln x} + (\ln x)^x$, $x > 1$

c) $h(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \neq 1$

d) $p(x) = \operatorname{arctanh}\,(\sin x)$, $\cos x \neq 0$

e) $q(x) = e^{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$

Çözüm.
a) Taban $x^2+1 > 0$ olduğundan Önerme 5.2 doğrudan uygulanabilir. $u(x) = x^2+1$, $v(x) = \sin x$, $u'(x) = 2x$, $v'(x) = \cos x$:

$$f'(x) = (x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x \ln(x^2+1) + \frac{2x \sin x}{x^2+1}\right].$$

b) İki terimi ayrı ayrı ele alalım; ikisi de $x > 1$ için tanımlıdır ($\ln x > 0$ olduğundan).
Birinci terim: $x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$'dir. Zincir kuralıyla

$$\left(x^{\ln x}\right)' = e^{(\ln x)^2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}\, x^{\ln x}.$$

İkinci terim: $(\ln x)^x = e^{x \ln(\ln x)}$'tir. İç fonksiyonun türevi

$$\big(\, x\ln(\ln x)\big)' = \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

olduğundan

$$\big(\, (\ln x)^x\big)' = (\ln x)^x\left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right].$$

Toplayalım:

$$g'(x) = \frac{2\ln x}{x}\, x^{\ln x} + (\ln x)^x\left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right].$$

c) $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ yazalım. Bölüm kuralıyla

$$u'(x) = \frac{(1)(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Ayrıca

$$1 + u^2 = \frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1-x)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x)^2}.$$

Zincir kuralıyla

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Şaşırtıcı bir sonuç: h ile arctan fonksiyonlarının türevleri aynıdır. Aslında $\dfrac{1+x}{1-x} = \tan\!\left(\dfrac{\pi}{4} + \arctan x\right)$ olduğundan $h(x) = \arctan x + \dfrac{\pi}{4}$'tür — ama yalnızca $x < 1$ aralığında; $x > 1$ aralığında sabit fark $-\dfrac{3\pi}{4}$ olur. Sabitin aralıktan aralığa değişmesi, tanım kümesinin bağlantılı olmamasındandır.
d) $|\sin x| < 1$ olması için $\cos x \neq 0$ olması yeter ve gereklidir; bu koşul altında bileşke tanımlıdır. Teorem 5.7 ve zincir kuralıyla

$$p'(x) = \frac{1}{1-\sin^2 x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Yani $\operatorname{arctanh}\,(\sin x)$, $\sec x$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonudur; bu, integral hesabında sıkça kullanılan $\int \sec x\, dx$ formülünün kısa bir türetimidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

e) Çarpım kuralını uygulayalım. Birinci çarpanın türevi zincir kuralıyla

$$\left(e^{\arcsin x}\right)' = e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ikinci çarpanın türevi ise

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

olur. O hâlde

$$q'(x) = e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} + e^{\arcsin x} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

■

5.11 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Temel Fonksiyonların Türevleri Üzerine).

a) $f(x) = \log_3(x^2+1)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

b) $g(x) = (\sin x)^x$, $0 < x < \pi$ fonksiyonunun türevini logaritmik türev alma yöntemiyle bulunuz.

c) $h(x) = \arctan(x^2) + \operatorname{arccot}(x^2)$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız ve sonucu yorumlayınız.

d) $u(x) = \operatorname{arccosh}(2x)$ fonksiyonunun tanım kümesini belirleyip türevini bulunuz.

e) $y = x^{x^x}$, $x > 0$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

f) $a > 0, a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ fonksiyonunun her noktada kendi türevine eşit olması için a'nın hangi değeri gerektiğini belirleyiniz.

g) $\varphi(x) = \operatorname{arcsinh}(\tan x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm.
a) Teorem 5.1 ve zincir kuralıyla, dış fonksiyon $\log_3 u$, iç fonksiyon $u(x) = x^2+1 > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln 3} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}.$$

b) $0 < x < \pi$ aralığında $\sin x > 0$ olduğundan hem $\ln(\sin x)$ hem de $(\sin x)^x$ tanımlıdır ve $g(x) > 0$'dır. Logaritma alalım:

$$\ln g(x) = x \ln(\sin x).$$

İki tarafın türevini alalım; sol tarafta Tanım 5.1, sağ tarafta çarpım ve zincir kuralı:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \ln(\sin x) + x\cot x.$$

Buradan

$$g'(x) = (\sin x)^x \left[\ln(\sin x) + x\cot x\right].$$

c) Teorem 5.5 ve zincir kuralıyla

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^4} + \left(-\frac{2x}{1+x^4}\right) = 0$$

bulunur. Türev her $x \in \mathbb{R}$ için sıfırdır; bu, h'nin $\mathbb{R}$ üzerinde sabit olduğunu düşündürür. Gerçekten de $\arctan t + \operatorname{arccot} t = \frac{\pi}{2}$ özdeşliği gereği $h(x) = \frac{\pi}{2}$'dir; $x = 0$ koyarak $h(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ olduğu

 CC BY-NC-SA 4.0

doğrudan görülür. ($\mathbb{R}$ bir aralık olduğu için türevi sıfır olan fonksiyonun sabit olduğu sonucu meşrudur; tanım kümesi arccoth'ta olduğu gibi ayrık iki parçadan oluşsaydı bu adım geçerli olmazdı.)
d) arccosh t ifadesi $t \geq 1$ için tanımlı olduğundan $2x \geq 1$, yani $x \geq \frac{1}{2}$ olmalıdır. Türev ise $2x > 1$, yani $x > \frac{1}{2}$ olan noktalarda vardır. Zincir kuralıyla

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 1}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 1}}, \qquad x > \frac{1}{2}.$$

$x = \frac{1}{2}$ noktasında ifade tanımsızdır; orada teğet düşeydir, yani u türevlenebilir değildir.
e) Önce x^{x^x} ifadesinin $x^{(x^x)}$ anlamına geldiğini belirtelim: kuvvet kuleleri yukarıdan aşağıya doğru hesaplanır, yani üstteki x^x önce yorumlanır; $(x^x)^x = x^{x^2}$ ifadesi bundan farklıdır. $y > 0$ olduğundan logaritma alabiliriz:

$$\ln y = x^x \ln x.$$

Sağ tarafın türevini çarpım kuralıyla alalım. Örnek 5.2 gereği $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$'dir:

$$\frac{y'}{y} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x\left[\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right].$$

O hâlde

$$y' = x^{x^x} \cdot x^x\left[\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right] = x^{x^x + x}\left[\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right].$$

f) Teorem 5.2 gereği $f'(x) = a^x \ln a$'dır. Her x için $f'(x) = f(x)$ olması, her x için $a^x \ln a = a^x$ demektir. $a^x > 0$ olduğundan bu eşitliği a^x'e bölebiliriz:

$$\ln a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = e.$$

Demek ki türevi kendisine eşit olan tek üstel fonksiyon e^x'tir. (Aslında $f(0) = 1$ koşulunu ekleyerek daha güçlü bir şey söylenebilir: $f' = f$ ve $f(0) = 1$ koşullarını sağlayan tek türevlenebilir fonksiyon e^x'tir; bunu ortalama değer teoremi bölümünde ispatlayacağız.)
g) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ aralığında $\tan x$ tanımlıdır ve arcsinh bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olduğundan bileşke sorunsuzdur. Teorem 5.7 ve zincir kuralıyla

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|}.$$

Verilen aralıkta $\cos x > 0$, dolayısıyla $\sec x > 0$ ve $|\sec x| = \sec x$'tir. O hâlde

$$\varphi'(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Bu, Örnek 5.4'nın **d)** şıkkıyla aynı sonucu verdi: $\operatorname{arcsinh}(\tan x)$ ile $\operatorname{arctanh}(\sin x)$ fonksiyonlarının türevi aynıdır, dolayısıyla bu iki fonksiyon verilen aralıkta yalnızca bir sabitle farklıdır. $x = 0$ koyarsak her ikisi de 0 değerini aldığından sabit sıfırdır: iki ifade özdeştir.
■

Artık elimizde, karşılaşacağımız hemen her fonksiyonun türevini alacak eksiksiz bir araç takımı var. Bir sonraki adım, aynı işlemi tekrar tekrar uygulamaktır: bir fonksiyonun türevinin de türevi alınabilir ve bu, fonksiyonun geometrisi hakkında yeni bilgiler taşır. Şimdi bu konuya geçiyoruz: Yüksek Mertebeden Türevler ve Leibniz Kuralı.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. Yüksek Mertebeden Türevler ve Leibniz Kuralı

Bir fonksiyonun türevi yine bir fonksiyondur. Bu basit gözlem, türev almayı bir kez yapıp bırakmak yerine aynı işlemi **tekrar tekrar** uygulamamıza izin verir: f'nin türevi f', f''nün türevi f'', onun türevi f''' ve böyle sürer. Temel Fonksiyonların Türevleri bölümünde bütün temel fonksiyonların türevlerini hesaplamıştık; artık elimizde bu işlemi istediğimiz kadar yineleyebilecek bir alet çantası var.

Yüksek mertebeden türevler yalnızca teknik bir merak değildir. İleride göreceğimiz Taylor formülü bir fonksiyonu $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ sayılarından kurulan bir polinomla yaklaştırır; konvekslik ve dönüm noktaları ikinci türevin işaretiyle okunur; diferansiyel denklemler zaten baştan yüksek mertebeden türevler üzerine kurulur. Bunların hepsinde önce şu soruyu yanıtlamamız gerekir: bir fonksiyonun n. türevi ne demektir, ne zaman vardır ve nasıl hesaplanır?

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: yüksek mertebeden türevin özyineli tanımını ve gösterimlerini; n kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların oluşturduğu $C^n(I)$ sınıflarını ve bu sınıflar arasındaki kapsamaların **kesin** olduğunu; temel fonksiyonların n. türevlerinin kapalı formüllerini; çarpımın n. türevini binom açılımına şaşırtıcı ölçüde benzeyen bir formülle veren **Leibniz kuralı**nı. Bölümün sonunda, türevlenebilir olduğu hâlde türevi sürekli olmayan bir fonksiyon kurup "türev almanın" her adımda ne kadar düzgünlük yitirdiğini somut olarak göreceğiz.

6.1 Yüksek Mertebeden Türevin Tanımı

$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I'nın **her** noktasında türevlenebilir olsun. O hâlde her $x \in I$ noktasına $f'(x)$ sayısını karşılık getiren yeni bir

$$f' : I \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu doğar. Bu fonksiyonun kendisinin de bir noktada ya da bütün I üzerinde türevi olup olmadığını sormak son derece doğaldır; varsa buna f'nin **ikinci türevi** deriz. İşlemi durdurmak için bir neden yoktur: aynı soruyu f'' için, sonra f''' için sorabiliriz. Tanımı bu yüzden özyineli (tümevarımlı) biçimde veriyoruz.

Tanım 6.1 (Yüksek Mertebeden Türev). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. **Yüksek mertebeden türevler** (higher-order derivatives) şöyle tanımlanır:

1. $f^{(0)} := f$ alınır; yani sıfırıncı mertebeden türev fonksiyonun kendisidir.
2. $n \geq 1$ olsun. $f^{(n-1)}$ türevi I üzerinde tanımlıysa ve $x_0 \in I$ noktasında türevlenebiliyorsa, f'ye x_0 noktasında $\boldsymbol{n}$ **kez türevlenebilir** denir ve

$$f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)} \right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

   sayısına f'nin x_0 noktasındaki $\boldsymbol{n}$**. mertebeden türevi** denir.
3. f, I'nın her noktasında n kez türevlenebiliyorsa, f'ye $\boldsymbol{I}$ **üzerinde** $\boldsymbol{n}$ **kez türevlenebilir** denir; bu durumda $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyondur.

Küçük mertebeler için üs yerine kesme işareti kullanılır:

$$f^{(1)} = f', \qquad f^{(2)} = f'', \qquad f^{(3)} = f'''.$$

Leibniz gösteriminde ise

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(f(x) \right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yazılır; özel olarak $f''(x) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ ve $y = f(x)$ ise $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ gösterimi de kullanılır.

Gösterimde iki inceliğe dikkat edelim. Birincisi, $f^{(n)}$ ile f^n **aynı şey değildir**: ilki n. türev, ikincisi f'nin n. kuvvetidir; bu yüzden mertebe her zaman parantez içine alınır. İkincisi, $\frac{d^n f}{dx^n}$ yazımındaki üsler simgeseldir: pay d'nin n kez, payda dx'in n kez uygulandığını hatırlatır, bir kesir hesabı değildir.
Tanımın yapısı üzerinde bir an duralım. $f^{(n)}(x_0)$'dan söz edebilmek için $f^{(n-1)}$'in **yalnızca x_0 noktasında** değil, x_0'ın bir komşuluğundaki bütün noktalarda tanımlı olması gerekir; çünkü türev bir limittir ve limit almak için fark oranının x_0'a yakın noktalarda anlamlı olması şarttır. Bu, yüksek mertebeden türevlerin doğası gereği "yerel ama nokta-üstü" bir kavram olduğunu söyler.

> ⚠ Mertebe arttıkça istenen ön koşul da artar
>
> $f''(x_0)$'ın var olması için f'nin x_0'da türevlenebilir olması yetmez: f''nün x_0'ı içeren bir aralıkta **tanımlı** olması, yani f'nin o aralığın her noktasında türevlenebilir olması gerekir. Benzer biçimde $f^{(n)}(x_0)$'ın varlığı, $f^{(n-1)}$'in x_0'ın bir komşuluğunda var olmasını gerektirir. Bu yüzden yüksek mertebeden türev tanımlarını hep açık bir aralık üzerinde kuruyoruz.

Tanımı birkaç somut fonksiyonda çalıştıralım.

Örnek 6.1 (Ardışık Türev Hesapları). Aşağıdaki fonksiyonların ardışık türevlerini hesaplayalım.

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$.

b) $f(x) = \sin x$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Çözüm.
a) Polinomların türevi terim terim alınır:

$$\begin{aligned} P'(x) &= 8x^3 - 15x^2 + 1, \\ P''(x) &= 24x^2 - 30x, \\ P'''(x) &= 48x - 30, \\ P^{(4)}(x) &= 48, \\ P^{(5)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Beşinci türev sabit sıfır fonksiyonu olduğundan $n \geq 5$ olan her n için $P^{(n)}(x) = 0$'dır. Genel kural şudur: $\deg P = m$ ve baş katsayı a_m ise $P^{(m)} \equiv m!\, a_m$ sabittir, $n > m$ için ise $P^{(n)} \equiv 0$'dır. Burada gerçekten $4! \cdot 2 = 48$ bulduk.
b) Sinüsün türevleri dörder dörder tekrarlanır:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x = f(x).$$

Dördüncü türev başlangıç fonksiyonuna döndüğünden, her $n \geq 0$ için $f^{(n+4)} = f^{(n)}$ olur; dolayısıyla $\sin x$'in n. türevi yalnızca n'in 4 ile bölümünden kalana bağlıdır. Bu dört durumu tek bir formülde toplamanın yolunu birazdan (Önerme 6.3) göreceğiz.
c) $f(x) = x^{-1}$ için kuvvet kuralını art arda uygulayalım:

$$f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3}, \quad f'''(x) = -6x^{-4}, \quad f^{(4)}(x) = 24x^{-5}.$$

Katsayılar $1, 2, 6, 24$ yani $1!, 2!, 3!, 4!$ ve işaretler sırayla değişiyor. Bu bizi

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$$

tahminine götürür. Tahmini Önerme 6.3'nde tümevarımla ispatlayacağız.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Sürekli Türevlenebilir Fonksiyon Sınıfları

Bir fonksiyondan "kaç kez türevlenebildiği" kadar, elde edilen türevlerin **düzgünlüğü** de önemlidir. Analizde sık sık "f'' vardır" demek yetmez; "f'' süreklidir" gerekir. Bu ayrımı adlandıralım.

Tanım 6.2 (C üssü n Sınıfı). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık olsun.

1. I üzerinde sürekli olan bütün fonksiyonların kümesi $C^0(I)$ ile gösterilir.
2. $n \geq 1$ bir doğal sayı olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde n kez türevlenebiliyor **ve** $f^{(n)}$ fonksiyonu I üzerinde sürekliyse, f'ye I üzerinde $\boldsymbol{n}$ **kez sürekli türevlenebilir** (continuously differentiable of order n) denir ve $f \in C^n(I)$ yazılır. Böyle fonksiyonların kümesine $\boldsymbol{C^n}$ **sınıfı** denir.
3. Her $n \geq 0$ tam sayısı için $f \in C^n(I)$ oluyorsa, yani f her mertebeden türevlenebiliyorsa, f'ye **sonsuz kez türevlenebilir** ya da **düzgün** (smooth) denir ve $f \in C^\infty(I)$ yazılır. Tanım gereği

$$C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I).$$

Tanımdaki "$f^{(n)}$ süreklidir" koşulu ilk bakışta fazladan görünebilir, ama değildir; birazdan tam olarak bu koşulun sağlanmadığı örnekler kuracağız. Öte yandan bir noktayı hemen belirtelim: $f \in C^n(I)$ ise $f^{(n)}$ dışındaki bütün türevler zaten süreklidir.

> **i** Neden yalnızca son türevin sürekliliği isteniyor?
>
> f, I üzerinde n kez türevlenebilir olsun. $0 \leq k \leq n-1$ için $f^{(k)}$ fonksiyonu I üzerinde türevlenebilirdir (türevi $f^{(k+1)}$'dir), türevlenebilirlik sürekliliği gerektirdiğinden $f^{(k)}$ süreklidir. Yani ilk $n-1$ türevin sürekliliği bedavadır; tek şüpheli olan **en son** türev $f^{(n)}$'dir. Tanımdaki tek ek koşulun onun sürekliliği olmasının nedeni budur.

Bu gözlemin doğrudan bir sonucu, sınıfların iç içe geçmiş bir zincir oluşturmasıdır:

$$C^\infty(I) \subseteq \cdots \subseteq C^{n+1}(I) \subseteq C^n(I) \subseteq \cdots \subseteq C^2(I) \subseteq C^1(I) \subseteq C^0(I).$$

Gerçekten $f \in C^{n+1}(I)$ ise f, $n+1$ kez türevlenebilirdir; özel olarak n kez türevlenebilirdir ve $f^{(n)}$ türevlenebilir olduğundan süreklidir, yani $f \in C^n(I)$'dir.
Polinomlar, e^x, $\sin x$, $\cos x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde C^∞ sınıfındadır; $\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde, rasyonel fonksiyonlar ise paydanın sıfır olmadığı her açık aralıkta C^∞ sınıfındadır. Bu yüzden günlük hesaplarda karşılaşılan fonksiyonların çoğu zincirin en tepesinde oturur. Ancak zincirin katları gerçekten farklıdır: her basamakta, bir öncekinde olup bu basamakta olmayan fonksiyonlar vardır.

Önerme 6.1 (Kapsamalar Kesindir). *Her $n \geq 0$ tam sayısı için $C^{n+1}(\mathbb{R}) \subsetneq C^n(\mathbb{R})$'dir. Daha somut olarak,*

$$f_n(x) = x^n \mid x \mid$$

fonksiyonu $C^n(\mathbb{R})$ sınıfındadır ama $f_n^{(n+1)}(0)$ var olmadığından $C^{n+1}(\mathbb{R})$ sınıfında değildir.

> ***İspat.***
> *Önce bir yardımcı hesap yapalım. $m \geq 1$ tam sayısı için $u_m(x) = x^m \mid x \mid$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$'nin her noktasında türevlenebilir olduğunu ve*
>
> $$u_m'(x) = (m+1)\, x^{m-1} \mid x \mid$$
>
> *sağladığını gösterelim.*
>
> - *$x > 0$ ise $\mid x \mid = x$, yani $u_m(x) = x^{m+1}$ ve $u_m'(x) = (m+1)x^m$. Öte yandan $(m+1)x^{m-1} \mid x \mid = (m+1)x^{m-1} \cdot x = (m+1)x^m$; eşitlik sağlanır.*
> - *$x < 0$ ise $\mid x \mid = -x$, yani $u_m(x) = -x^{m+1}$ ve $u_m'(x) = -(m+1)x^m$. Öte yandan $(m+1)x^{m-1} \mid x \mid = (m+1)x^{m-1} \cdot (-x) = -(m+1)x^m$; yine sağlanır.*
> - *$x = 0$ noktasında doğrudan fark oranına bakalım. $h \neq 0$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{u_m(h)-u_m(0)}{h}=\frac{h^m \mid h \mid}{h}=h^{m-1}\mid h \mid .$$

$m\geq 1$ olduğundan $\left| h^{m-1}\mid h\mid\right|=\mid h\mid^m\to 0$ olur; yani $u_m'(0)=0$. Formülün $x=0$'daki değeri de $(m+1)\cdot 0^{m-1}\cdot 0=0$'dır ($m=1$ için $0^0=1$ okunur ve değer $2\mid 0\mid=0$ çıkar). Eşitlik burada da doğrudur.

Şimdi asıl iddiaya geçelim. $n\geq 1$ olsun ve $f_n(x)=x^n\mid x\mid$ alalım. $0\leq k\leq n$ için

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}x^{n-k}\mid x\mid$$

olduğunu k üzerinden tümevarımla gösterelim (bkz. Analiz 1).
$k=0$ için sağ taraf $\frac{(n+1)!}{(n+1)!}x^n\mid x\mid=x^n\mid x\mid=f_n(x)$'tir; doğrudur.
$k<n$ olacak biçimde bir k için formül doğru olsun. O hâlde $m:=n-k\geq 1$'dir ve yukarıdaki yardımcı hesap $x^m\mid x\mid$ fonksiyonuna uygulanabilir:

$$f_n^{(k+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}\cdot(m+1)\,x^{m-1}\mid x\mid=\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}(n-k+1)\,x^{n-k-1}\mid x\mid=\frac{(n+1)!}{(n-k)!}x^{n-(k+1)}\mid x\mid .$$

Bu tam olarak $k+1$ için istenen ifadedir; tümevarım tamamlanır.
Özel olarak $k=n$ alırsak

$$f_n^{(n)}(x)=\frac{(n+1)!}{1!}\,x^0\mid x\mid=(n+1)!\mid x\mid .$$

Mutlak değer fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan $f_n^{(n)}$ süreklidir; yani $f_n\in C^n(\mathbb{R})$'dir.
Öte yandan $f_n^{(n)}(x)=(n+1)!\mid x\mid$ fonksiyonu 0'da türevlenemez: fark oranı

$$\frac{(n+1)!\mid h\mid-0}{h}=(n+1)!\,\frac{\mid h\mid}{h}$$

olup $h>0$ için $(n+1)!$, $h<0$ için $-(n+1)!$ değerini alır; sağ ve sol limitler farklı olduğundan limit yoktur. Demek ki $f_n^{(n+1)}(0)$ tanımsızdır ve $f_n\notin C^{n+1}(\mathbb{R})$'dir.
*$n=0$ durumu da aynı formüle uyar: $f_0(x)=\mid x\mid$ süreklidir ($f_0\in C^0$) ama 0'da türevlenemez, dolayısıyla $f_0\notin C^1(\mathbb{R})$'dir. Böylece her n için $C^{n+1}(\mathbb{R})\subsetneq C^n(\mathbb{R})$'dir; yani kapsama **kesindir**.*
■

En küçük örneği akılda tutmakta yarar var: $f_1(x)=x\mid x\mid$ her yerde türevlenebilirdir ve $f_1'(x)=2\mid x\mid$ süreklidir, ama $f_1''(0)$ yoktur. Yani "türevi sürekli" olmak, ikinci türevin varlığı hakkında hiçbir şey söylemez.

6.3 Yüksek Mertebeden Türevin Lineerliği

Türev almanın en temel özelliği lineerliktir: toplamın türevi türevlerin toplamı, sabit katın türevi türevin sabit katıdır. Bu özellik yüksek mertebelere olduğu gibi taşınır; ispat, tanımın özyineli yapısını izleyen kısa bir tümevarımdır.

Önerme 6.2 (Yüksek Mertebeden Türev Lineerdir). *$I\subseteq\mathbb{R}$ açık bir aralık, $f,g:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonları I üzerinde n kez türevlenebilir ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ olsun. O hâlde $\alpha f+\beta g$ fonksiyonu da I üzerinde n kez türevlenebilirdir ve*

$$(\alpha f+\beta g)^{(n)}(x)=\alpha\,f^{(n)}(x)+\beta\,g^{(n)}(x),\qquad x\in I$$

sağlanır. Özel olarak $C^n(I)$ ve $C^\infty(I)$ birer vektör uzayıdır.

İspat.
n üzerinden tümevarım yapalım (bkz. Analiz 1).
Temel adım. *$n=0$ için ifade $\alpha f+\beta g=\alpha f+\beta g$ olur; doğrudur. $n=1$ durumu ise toplam ve sabit kat kurallarının birleşimidir: $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Tümevarım adımı. *İfade n için doğru olsun ve f, g fonksiyonları I üzerinde $n+1$ kez türevlenebilir olsun. O hâlde f, g özel olarak n kez türevlenebilirdir ve tümevarım varsayımı gereği I üzerinde*

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

eşitliği ***fonksiyon olarak*** *geçerlidir. Sağ taraftaki $f^{(n)}$ ve $g^{(n)}$ fonksiyonları I üzerinde türevlenebilirdir (türevleri sırasıyla $f^{(n+1)}$ ve $g^{(n+1)}$'dir). O hâlde sağ taraf türevlenebilirdir; dolayısıyla sol taraf da türevlenebilirdir, yani $\alpha f + \beta g$ fonksiyonu $n+1$ kez türevlenebilirdir. Her iki tarafın türevini alıp $n = 1$ durumunu (yani bilinen toplam ve sabit kat kurallarını) uygularsak*

$$(\alpha f + \beta g)^{(n+1)} = \left(\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}\right)' = \alpha \left(f^{(n)}\right)' + \beta \left(g^{(n)}\right)' = \alpha f^{(n+1)} + \beta g^{(n+1)}$$

elde ederiz. Tümevarım tamamlanır.
Vektör uzayı iddiası bunun doğrudan sonucudur: $f, g \in C^n(I)$ ise $\alpha f + \beta g$ fonksiyonunun n. türevi $\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$'dir ve sürekli fonksiyonların lineer birleşimi sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) bu türev de süreklidir. Aynı akıl yürütme her n için geçerli olduğundan $C^\infty(I)$ da lineer birleşimler altında kapalıdır.
■

Lineerlik, n. türev hesabını "parçala ve topla" stratejisine indirger: bir fonksiyonu n. türevini bildiğimiz parçaların lineer birleşimi olarak yazabilirsek iş biter. Rasyonel fonksiyonlarda basit kesirlere ayırma, trigonometrik çarpımlarda toplam–çarpım dönüşümleri tam bu amaca hizmet eder. Çarpımda ise durum başkadır ve bölümün asıl teoremi olan Leibniz kuralını gerektirir.

6.4 Temel Fonksiyonların n. Türevleri

Şimdi en sık karşılaşılan fonksiyonların n. türevlerini kapalı formüllerle verelim. Hepsinin ispatı n üzerinden tümevarımdır ve hepsinde tümevarım adımı, bilinen bir birinci türev hesabından ibarettir.

Önerme 6.3 (Temel n inci Türev Formülleri). *Aşağıdaki eşitlikler, sağ tarafların tanımlı olduğu her noktada ve her $n \geq 1$ tam sayısı için geçerlidir.*
(a) Kuvvet. *$m \in \mathbb{N}$ ve $f(x) = x^m$ ise*

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n}, & n \leq m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

Daha genel olarak $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$ ise $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\, x^{\alpha-n}$'dir.
(b) Üstel. *$a \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = e^{ax}$ ise $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$'tir. Ayrıca $b > 0$, $b \neq 1$ ve $f(x) = b^x$ ise $f^{(n)}(x) = b^x (\ln b)^n$'dir.*
(c) Sinüs. *$f(x) = \sin x$ ise $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.*
(d) Kosinüs. *$f(x) = \cos x$ ise $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.*
(e) Logaritma. *$x > 0$ ve $f(x) = \ln x$ ise $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.*
(f) Basit kesir. *$a \in \mathbb{R}$ ve $x \neq a$ için $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ ise $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}}$.*
(g) Doğrusal iç fonksiyon. *f fonksiyonu n kez türevlenebilir, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $g(x) = f(ax+b)$ ise g de n kez türevlenebilirdir ve $g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b)$'dir.*

İspat.
Bütün ispatlar n üzerinden tümevarımdır (bkz. Analiz 1).
(a) *Önce $n \leq m$ durumu. $n = 1$ için kuvvet kuralı $f'(x) = mx^{m-1}$ verir; formülün $n = 1$'deki değeri $\frac{m!}{(m-1)!}x^{m-1} = mx^{m-1}$'dir, doğrudur. Formül $n < m$ olan bir n için doğru olsun. Yine kuvvet kuralıyla*

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}\right) = \frac{m!}{(m-n)!}\,(m-n)\,x^{m-n-1} = \frac{m!}{(m-n-1)!}\,x^{m-(n+1)}$$

bulunur; bu, $n+1$ için istenen ifadedir. $n = m$ alındığında $f^{(m)}(x) = \frac{m!}{0!}x^0 = m!$, yani sabit fonksiyon çıkar. Sabitin türevi sıfır olduğundan $f^{(m+1)} \equiv 0$'dır ve sıfır fonksiyonunun bütün türevleri de sıfır olduğundan $n > m$ için $f^{(n)} \equiv 0$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerçel üslü durumda kuvvet kuralı $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ biçimindedir; aynı tümevarım, $n=1$'de $\alpha x^{\alpha-1}$ verir ve adımda

$$\frac{d}{dx}\Big(\,\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\,\Big) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)\,x^{\alpha-n-1}$$

çıkar; bu da $n+1$ çarpanlı ifadedir. $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ ise çarpımda $(\alpha - m) = 0$ çarpanı belirdiğinden formül birinci duruma indirgenir.
(b) *$n=1$ için zincir kuralı $\big(\,e^{ax}\big)' = ae^{ax}$ verir. Formül n için doğruysa*

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\,\big(\,a^n e^{ax}\,\big) = a^n \cdot ae^{ax} = a^{n+1}e^{ax}$$

olur. İkinci ifade için $b^x = e^{x\ln b}$ yazıp $a = \ln b$ alalım; birinci ifade doğrudan $f^{(n)}(x) = (\ln b)^n e^{x\ln b} = b^x(\ln b)^n$ verir.
(c) *$n=1$ için $(\sin x)' = \cos x$ ve $\cos x = \sin\!\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan formül doğrudur. Formül n için doğru olsun. Sinüsün türevi kosinüs olduğundan ve $\cos\theta = \sin\!\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ özdeşliğinden*

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\sin\!\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\!\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\!\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\!\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

elde edilir. Bu tek formül, Örnek 6.1'nde dört ayrı satırda yazdığımız dört durumu birleştirir: $n \equiv 0,1,2,3 \pmod 4$ için sırasıyla $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ verir.
(d) *Aynı yöntem: $n=1$ için $(\cos x)' = -\sin x$ ve $-\sin\theta = \cos\!\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan formül doğrudur. Adımda*

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\cos\!\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = -\sin\!\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\!\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

(e) *$n=1$ için $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ve formülün $n=1$ değeri $\frac{(-1)^0\cdot 0!}{x} = \frac{1}{x}$'tir. Formül n için doğruysa, (a) şıkkındaki gerçel üslü kuvvet kuralıyla*

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\,\Big(\,(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\,\Big) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(-n)\,x^{-n-1} = \frac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}$$

bulunur; bu $n+1$ için istenen ifadedir.
(f) *$n=1$ için $\left(\frac{1}{x-a}\right)' = -\frac{1}{(x-a)^2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x-a)^2}$'dir. Formül n için doğruysa*

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\,\Big(\,(-1)^n n!(x-a)^{-(n+1)}\,\Big) = (-1)^n n!\cdot\big(\,-(n+1)\,\big)\,(x-a)^{-(n+2)} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$$

olur. Burada $x \mapsto x-a$ dönüşümünün türevi 1 olduğu için ek çarpan çıkmaz. $a=0$ alındığında Örnek 6.1'nin (c) şıkkındaki tahmin ispatlanmış olur: $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
(g) *$n=1$ için zincir kuralı $g'(x) = af'(ax+b)$ verir. Formül n için doğru olsun; yani $g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b)$ olsun. f fonksiyonu $n+1$ kez türevlenebilirse $f^{(n)}$ türevlenebilirdir ve zincir kuralı uygulanabilir:*

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\,\Big(\,a^n f^{(n)}(ax+b)\,\Big) = a^n\cdot f^{(n+1)}(ax+b)\cdot a = a^{n+1}f^{(n+1)}(ax+b).$$

Tümevarım tamamlanır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Formülleri birleştirmenin yolu

(g) şıkkı, tabloyu tek başına iki katına çıkarır: $\sin(3x)$, e^{-5x}, $\ln(2x+7)$, $\frac{1}{4x-1}$ gibi "içi doğrusal" fonksiyonların n. türevini ayrıca ispatlamaya gerek yoktur; temel formülü yazıp a^n çarpanını eklemek yeter. Lineerlikle (Önerme 6.2) birleştiğinde bu iki araç, çok geniş bir fonksiyon ailesinin n. türevini hesaplamaya yeter.

Örnek 6.2 (Kapalı Formüllerin Kullanımı). Aşağıdaki fonksiyonların n. türevlerini bulalım.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

b) $f(x) = \ln(3+2x)$, $x > -\dfrac{3}{2}$.

c) $f(x) = \sin 3x \cos x$.

Çözüm.
a) Paydayı çarpanlarına ayırıp basit kesirlere ayıralım. $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ olduğundan sabit A, B için

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

yazalım. Paydaları eşitleyip payları karşılaştırırsak $1 = A(x+1) + B(x-1)$ elde edilir. $x=1$ koyarsak $1 = 2A$, yani $A = \frac{1}{2}$; $x=-1$ koyarsak $1 = -2B$, yani $B = -\frac{1}{2}$'dir. O hâlde

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Lineerlik (Önerme 6.2) ve Önerme 6.3'nin (f) şıkkıyla

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$

Denetleyelim: $n=1$ için sağ taraf, paydalar ortaklaştırılınca

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

verir; bölüm kuralıyla doğrudan hesaplanan f' ile aynıdır.
b) Önce bir kez türev alalım: $f'(x) = \dfrac{2}{3+2x}$. Şimdi $n \geq 1$ için $f^{(n)} = \left(f'\right)^{(n-1)}$'dir. $\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3/2}$ olduğundan Önerme 6.3'nin (f) şıkkını $a = -\frac{3}{2}$ ile kullanabiliriz, ya da doğrudan (g) şıkkını uygulayabiliriz. İkincisini seçelim: $u(t) = \frac{1}{t}$ ve $f'(x) = 2\,u(3+2x)$'tir; (g) şıkkında $a=2$, $b=3$ alarak, $k \geq 0$ için

$$\left(f'\right)^{(k)}(x) = 2\cdot 2^k u^{(k)}(3+2x) = 2^{k+1}\cdot\frac{(-1)^k k!}{(3+2x)^{k+1}}.$$

$k = n-1$ koyarsak, her $n \geq 1$ için

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,2^n}{(3+2x)^n}$$

bulunur. Denetim: $n=1$ için sağ taraf $\frac{2}{3+2x}$'tir, doğru. $n=2$ için $-\frac{4}{(3+2x)^2}$ çıkar; gerçekten $\left(\frac{2}{3+2x}\right)' = -\frac{4}{(3+2x)^2}$'dir.
c) Çarpımı toplama çevirelim. $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$ özdeşliğinde $A = 3x$, $B = x$ alırsak

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sin 4x + \sin 2x\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Artık lineerlik ile (c) ve (g) şıkları yeter:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(4^n \sin\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

Denetim: $n = 1$ için sağ taraf $\frac{1}{2}\left(\, 4\cos 4x + 2\cos 2x \,\right) = 2\cos 4x + \cos 2x$'tir. Doğrudan çarpım kuralıyla $f'(x) = 3\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$ bulunur; çarpımları toplama çeviren özdeşlikler bu ifadeyi de $2\cos 4x + \cos 2x$'e dönüştürür.
Bu üç örnekteki ortak strateji şudur: **çarpımı ya da karmaşık bir ifadeyi, n. türevini bildiğimiz parçaların lineer birleşimine dönüştür.** Böyle bir dönüşüm her zaman mümkün değildir; işte Leibniz kuralı tam bu durumlar için vardır.
■

6.5 Leibniz Kuralı

İki fonksiyonun çarpımının **birinci** türevini biliyoruz: $(fg)' = f'g + fg'$. Peki ya onuncu türevi? İkinci türevi hesaplayarak başlayalım:

$$(fg)'' = \left(\, f'g + fg' \right)' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

Bir adım daha:

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

Katsayılar $1;\ 1,2,1;\ 1,3,3,1$ — bunlar Pascal üçgeninin satırlarıdır. Yani çarpımın n. türevi, $(a+b)^n$ binom açılımının (bkz. Analiz 1) türev karşılığı gibi davranıyor: a'nın kuvvetleri yerine f'nin türev mertebeleri, b'nin kuvvetleri yerine g'nin türev mertebeleri geçiyor. Bu benzerlik tesadüf değildir ve bir teorem hâline getirilebilir.

Teorem 6.1 (Leibniz Kuralı). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f, g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I üzerinde n kez türevlenebilir olsun. O hâlde $f \cdot g$ çarpımı da I üzerinde n kez türevlenebilirdir ve her $x \in I$ için*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\binom{n}{k}$ binom katsayısı (binomial coefficient) ve $f^{(0)} = f$, $g^{(0)} = g$'dir.

İspat.
*n üzerinden tümevarım yapalım (bkz. Analiz 1). Tümevarım önermesi şudur: "I üzerinde n kez türevlenebilen **her** f ve g çifti için fg de n kez türevlenebilirdir ve yukarıdaki eşitlik geçerlidir."*
Temel adım ($n = 1$). *Bu tam olarak çarpım kuralıdır: f ve g türevlenebilirse fg türevlenebilirdir ve $(fg)' = f'g + fg'$'dür. Formülün $n = 1$ hâli*

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(1-k)} g^{(k)} = \binom{1}{0} f'g + \binom{1}{1} fg' = f'g + fg'$$

olduğundan eşitlik doğrudur. (İstenirse $n = 0$ da temel adım olarak alınabilir: $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$.)
Tümevarım adımı. *Önerme n için doğru olsun. Şimdi f ve g fonksiyonları I üzerinde $n+1$ kez türevlenebilir olsun. Özel olarak ikisi de n kez türevlenebilirdir; tümevarım varsayımı gereği fg fonksiyonu n kez türevlenebilirdir ve I üzerinde fonksiyon eşitliği olarak*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

geçerlidir; bu eşitliğe kısaca $(*)$ diyelim.
Sağ taraftaki her terime bakalım: $0 \le k \le n$ için $n - k \le n$ ve $k \le n$ olduğundan, f ve g fonksiyonlarının $n+1$ kez türevlenebilir olması $f^{(n-k)}$ ve $g^{(k)}$ fonksiyonlarının I üzerinde türevlenebilir olmasını (türevlerinin sırasıyla $f^{(n-k+1)}$ ve $g^{(k+1)}$ olmasını) sağlar. İki türevlenebilir fonksiyonun çarpımı türevlenebilir,

 CC BY-NC-SA 4.0

sonlu toplamı da türevlenebilir olduğundan $(*)$'ın sağ tarafı türevlenebilirdir. O hâlde sol taraf, yani $(fg)^{(n)}$ de türevlenebilirdir; bu tam olarak fg'nin $n+1$ kez türevlenebilir olması demektir.
Şimdi $(*)$'ın iki tarafının da türevini alalım. Toplamın türevi türevlerin toplamıdır; her terime çarpım kuralını uygularsak

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)} \right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)}}_{S_2}$$

elde ederiz. Şimdi asıl iş: bu iki toplamı ortak bir biçime sokmak.
*S_2'de **indis kaydırması** yapalım. $j := k+1$ diyelim; k değişkeni 0'dan n'ye giderken j değişkeni 1'den $n+1$'e gider ve $k = j-1$'dir. Terimdeki üsler $f^{(n-k)} = f^{(n-(j-1))} = f^{(n+1-j)}$ ve $g^{(k+1)} = g^{(j)}$ olur. Katsayı ise $\binom{n}{k} = \binom{n}{j-1}$'dir. Böylece*

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(n+1-j)} g^{(j)}.$$

Toplam değişkeninin adı önemsiz olduğundan j yerine yeniden k yazalım:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)} g^{(k)}.$$

Artık S_1 ve S_2'nin terimleri aynı biçimdedir: her ikisinde de $f^{(n+1-k)} g^{(k)}$ çarpımı geçer; yalnızca toplama aralıkları ve katsayılar farklıdır. S_1'de k değişkeni 0'dan n'ye, S_2'de 1'den $n+1$'e gider. Ortak aralık $1 \le k \le n$'dir. S_1'den $k=0$ terimini, S_2'den $k=n+1$ terimini ayıralım:

$$S_1 = \binom{n}{0} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

Toplayıp ortak $\sum_{k=1}^{n}$ terimlerini birleştirelim:

$$(fg)^{(n+1)} = \binom{n}{0} f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \binom{n}{n} f\, g^{(n+1)}.$$

Köşeli parantezdeki ifade için Pascal özdeşliğini (bkz. Analiz 1) kullanalım:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Ayrıca uç terimlerdeki katsayılar da yerine oturur: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ ve $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Bunları yerine koyarsak

$$(fg)^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

elde ederiz; çünkü ayrılmış iki uç terim tam olarak toplamın $k=0$ ve $k=n+1$ terimleridir. Bu, formülün $n+1$ için de doğru olduğunu gösterir ve tümevarım tamamlanır.
■

i Binom teoremiyle koşutluk

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ açılımıyla Leibniz kuralını yan yana koyun: a^{n-k} yerine $f^{(n-k)}$, b^k yerine $g^{(k)}$ yazmak yeter. İki ispat da aynı iskelete oturur — tümevarım, indis kaydırma, Pascal özdeşliği. Bu, formülü hatırlamayı kolaylaştırır; ama koşutluğu bir "kanıt" saymayın: benzerlik yalnızca her iki işlemin de çarpım kuralına uymasından doğar.

 CC BY-NC-SA 4.0

> ⚠ Sıraya dikkat
>
> $\binom{n}{k}$ katsayısının yanında f'nin türev mertebesi $n-k$, g'ninki k'dir. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ olduğundan f ile g'nin rollerini değiştirmek sonucu bozmaz, yalnızca terimleri ters sırada yazar; buna karşılık tek bir terimin içinde mertebeleri karıştırmak formülü bozar.

Leibniz kuralının asıl gücü, çarpanlardan birinin türevlerinin bir yerden sonra **sıfırlanması** durumunda ortaya çıkar. Bir polinom çarpanı varsa toplamdaki $n+1$ terimin yalnızca birkaçı hayatta kalır.

Örnek 6.3 (Leibniz Kuralının Uygulamaları). Aşağıdaki türevleri hesaplayalım.

a) $y=x^2e^x$ için $y^{(n)}$, $n\geq 2$.

b) $y=x^2\sin x$ için önce genel $y^{(n)}$, sonra $y^{(20)}$.

c) $y=x^2\ln x$ $(x>0)$ için $y^{(n)}$, $n\geq 3$.

Çözüm.
a) Leibniz kuralında hangi çarpanı f, hangisini g seçeceğimiz sonucu değiştirmez ama hesabı kolaylaştırabilir. Türevleri tükenen çarpanı g seçmek işimize yarar: $f(x)=e^x$, $g(x)=x^2$ alalım. O hâlde

$$g(x)=x^2,\quad g'(x)=2x,\quad g''(x)=2,\quad g^{(k)}(x)=0\ \ (k\geq 3)$$

ve her $m\geq 0$ için $f^{(m)}(x)=e^x$'tir. Leibniz kuralında $k\geq 3$ olan terimler sıfır olduğundan yalnızca üç terim kalır:

$$y^{(n)}=\binom{n}{0}f^{(n)}g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}g'+\binom{n}{2}f^{(n-2)}g''=e^x x^2+ne^x(2x)+\frac{n(n-1)}{2}e^x\cdot 2.$$

Yani

$$y^{(n)}(x)=e^x\left(\,x^2+2nx+n(n-1)\,\right),\qquad n\geq 2.$$

Denetleyelim: $n=1$ için formül $e^x(x^2+2x)$ verir ve gerçekten $\left(\,x^2e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$'tir; $n=0$ için de $e^x x^2$ çıkar. Demek ki formül aslında her $n\geq 0$ için geçerlidir ($n<2$ olduğunda $\binom{n}{2}=0$ okunur).
b) Bu kez $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$ alalım. Önerme 6.3'nin (c) şıkkı gereği $f^{(m)}(x)=\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$'dir. Yine yalnızca $k=0,1,2$ terimleri kalır:

$$y^{(n)}(x)=x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right),\qquad n\geq 2.$$

Şimdi $n=20$ koyalım. Üç sinüs değerini tek tek sadeleştirelim; sin fonksiyonunun 2π periyotlu olduğunu kullanacağız:

$$\sin\left(x+\frac{20\pi}{2}\right)=\sin(x+10\pi)=\sin x,$$

$$\sin\left(x+\frac{19\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+9\pi\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x,$$

$$\sin\left(x+\frac{18\pi}{2}\right)=\sin(x+9\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin x.$$

İkinci ve üçüncü satırda 8π'nin periyodun katı olduğunu ve $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ özdeşliğini kullandık. Katsayılar $2n=40$ ve $n(n-1)=380$ olduğundan

$$y^{(20)}(x)=x^2\sin x-40x\cos x-380\sin x.$$

c) Bu kez türevleri "tükenen" çarpan yine x^2'dir, ama diğer çarpanın türevleri $\ln x$ değil $\frac{1}{x}$'in kuvvetleridir. $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^2$ alalım. $n\geq 3$ olsun; bu koşul, aşağıda geçen bütün $f^{(m)}$'lerde $m=n,n-1,n-2\geq 1$ olmasını, yani (e) şıkkındaki formülün kullanılabilmesini garanti eder:

$$f^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}, \qquad m \geq 1.$$

Leibniz kuralı üç terim verir:

$$y^{(n)} = \binom{n}{0}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\cdot x^2 + \binom{n}{1}\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}\cdot 2x + \binom{n}{2}\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}\cdot 2.$$

$(-1)^{n-2} = (-1)^n = -(-1)^{n-1}$ ve $(-1)^{n-3} = (-1)^{n-1}$ olduğunu kullanıp $(-1)^{n-1}x^{2-n}$ ortak çarpanını dışarı alalım. $\binom{n}{1} = n$ ve $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğundan

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}x^{2-n}\left[\,(n-1)! - 2n(n-2)! + n(n-1)(n-3)!\,\right].$$

Köşeli parantezi sadeleştirelim. Önce $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$ yazıp ilk iki terimi birleştirelim:

$$(n-1)(n-2)! - 2n(n-2)! = (n-2)!\,\big(\,n-1-2n\,\big) = -(n+1)(n-2)!.$$

Şimdi her şeyi $(n-3)!$ cinsinden yazalım; $(n-2)! = (n-2)(n-3)!$ olduğundan

$$-(n+1)(n-2)(n-3)! + n(n-1)(n-3)! = (n-3)!\left[-(n^2-n-2) + (n^2-n)\right] = 2\,(n-3)!.$$

Böylece $n \geq 3$ için

$$y^{(n)}(x) = \frac{2\,(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$$

bulunur. Küçük mertebeler formülün kapsamı dışındadır ve doğrudan hesaplanır:

$$y' = 2x\ln x + x, \qquad y'' = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3.$$

Denetim: $n = 3$ için formül $\frac{2\cdot 0!}{x} = \frac{2}{x}$ verir ve gerçekten $y''' = (2\ln x + 3)' = \frac{2}{x}$'tir.
■

6.6 Türevlenebilirlik, Süreklilik ve Yüksek Mertebeler

Şimdi bölümün başında verdiğimiz C^n tanımındaki "türev süreklidir" koşulunun neden fazladan bir istek olduğunu görelim. Bir fonksiyon her noktada türevlenebilir olabilir, ama türev fonksiyonu **sıçramadan** değil, **salınarak** bozulabilir: türevin bir noktada limiti hiç olmayabilir. Böyle bir fonksiyon türevlenebilirdir ama C^1 sınıfında değildir; dolayısıyla ikinci türevinden söz edilemez.

Örnek 6.4 (Türevi Sürekli Olmayan Türevlenebilir Bir Fonksiyon). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. f'nin $\mathbb{R}$'nin her noktasında türevlenebilir olduğunu, $f'(0) = 0$ olmasına karşın f''nün 0'da sürekli olmadığını ve dolayısıyla $f''(0)$'ın var olmadığını gösterelim.

Çözüm.
Sıfırdan farklı noktalarda türev. $x_0 \neq 0$ olsun. x_0'ın 0'ı içermeyen bir komşuluğunda $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$'tir ve bu ifade türevlenebilir fonksiyonların çarpımı ve bileşkesidir. Çarpım ve zincir kurallarıyla

$$f'(x_0) = 2x_0\sin\frac{1}{x_0} + x_0^2\cos\frac{1}{x_0}\cdot\left(-\frac{1}{x_0^2}\right) = 2x_0\sin\frac{1}{x_0} - \cos\frac{1}{x_0}.$$

Sıfırda türev. Burada kural uygulanamaz, çünkü f'nin 0'daki tanımı ayrıdır. Doğrudan fark oranına bakalım: $h \neq 0$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

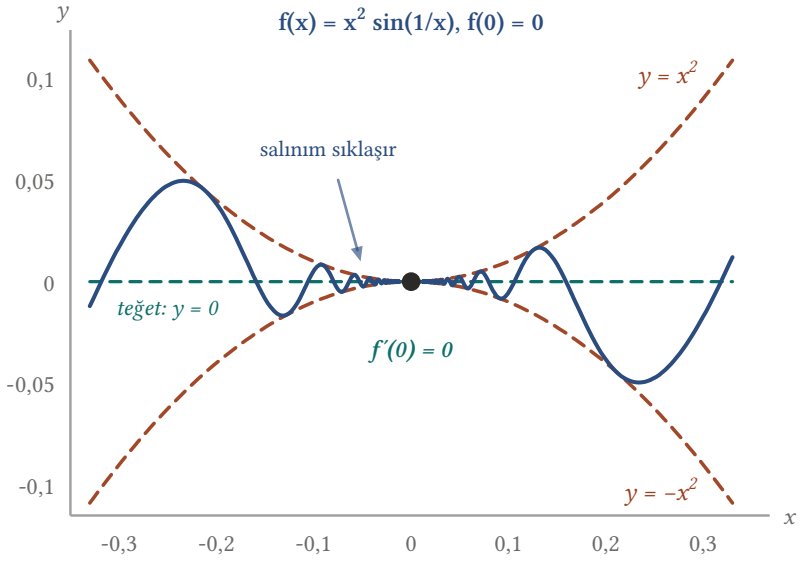
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = h\sin\frac{1}{h}.$$

Her $h \neq 0$ için $\left|\sin\frac{1}{h}\right| \leq 1$ olduğundan $\left|h\sin\frac{1}{h}\right| \leq |\,h\,|$'dir. $h \to 0$ iken $|\,h\,| \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) ya da doğrudan "sınırlı çarpı sıfıra giden" kuralı (bkz. Analiz 1) gereği

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$$

olur. Demek ki f her noktada türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Şekil 6.1: $f(x) = x^2\sin(1/x)$ grafiği, $y = x^2$ ile $y = -x^2$ zarfları arasında sıkışır; 0'a yaklaşırken salınım sonsuz kez tekrarlanır ama genlik x^2 hızıyla erir. $|f(x) - f(0)| / |x| \leq |x|$ olduğundan fark oranı 0'a gider: f sıfırda türevlenebilirdir, $f'(0) = 0$ ve teğet yataydır. Buna karşın $x \neq 0$ için $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ olup $x \to 0$ iken limiti yoktur; yani türev 0 noktasında sürekli değildir.

Türev 0'da sürekli değil. f''nün 0'daki limitine bakalım. $2x\sin\frac{1}{x}$ terimi, yukarıdaki hesabın aynısıyla $x \to 0$ iken 0'a gider. Geriye $-\cos\frac{1}{x}$ terimi kalır ve bu terimin $x \to 0$ iken limiti yoktur. Bunu dizisel ölçütle (bkz. Analiz 1) gösterelim. İki dizi seçelim:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \qquad n \geq 1.$$

Her ikisi de sıfırdan farklıdır ve $n \to \infty$ iken 0'a yakınsar. Değerleri hesaplayalım:

$$f'(x_n) = 2x_n\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = 2x_n \cdot 0 - 1 = -1,$$

$$f'(y_n) = 2y_n\sin\big(\,(2n+1)\pi\,\big) - \cos\big(\,(2n+1)\pi\,\big) = 2y_n \cdot 0 - (-1) = 1.$$

Yani $\big(\,f'(x_n)\,\big)$ dizisi sabit -1, $\big(\,f'(y_n)\,\big)$ dizisi sabit 1'dir. Sıfıra yakınsayan iki farklı dizide f' değerleri farklı limitlere gittiğinden $\lim_{x\to 0} f'(x)$ **yoktur**. Özel olarak bu limit $f'(0) = 0$'a eşit olamaz; dolayısıyla f' fonksiyonu 0 noktasında süreksizdir (bkz. Analiz 1). Süreksizlik türü de ikinci türdendir: sağ ve sol limitlerin ikisi de yoktur, salınım vardır.

İkinci türev 0'da yoktur. Türevlenebilirlik sürekliliği gerektirir. f' fonksiyonu 0'da sürekli olmadığından 0'da türevlenebilir de olamaz; yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h\sin\frac{1}{h} - \cos\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(2\sin\frac{1}{h} - \frac{\cos\frac{1}{h}}{h} \right)$$

limiti yoktur. (Doğrudan da görülebilir: $h = \frac{1}{2n\pi}$ alındığında ifade $-2n\pi \to -\infty$'a gider, $h = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ alındığında $+(2n+1)\pi \to +\infty$'a gider.) Demek ki $f''(0)$ tanımsızdır.
Sonucu doğru cümlelerle özetleyelim: f fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin her noktasında türevlenebilirdir, ama $f \notin C^1(\mathbb{R})$'dir. f ikinci kez türevlenebilir bir fonksiyon **değildir**, çünkü f'' fonksiyonu 0 noktasında tanımlı değildir. Buna karşılık $x \neq 0$ noktalarında f'' pekâlâ vardır ve hesaplanabilir:

$$f''(x) = 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Yani "bu fonksiyonun yüksek mertebeden türevi yoktur" demek yerine, kusurun **yalnızca** 0 noktasında olduğunu söylemek gerekir: f fonksiyonu $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ üzerinde C^∞ sınıfındadır; bütün sorun tek bir noktada, orijinde toplanmıştır.
■

⚠ Türevlenebilir olmak C¹ olmak değildir

Örnek 6.4, tanımlardaki iki koşulun gerçekten farklı olduğunu gösterir. $D^n(I)$ ile I üzerinde n kez türevlenebilen fonksiyonların kümesini gösterirsek

$$D^{n+1}(I) \subsetneq C^n(I) \subsetneq D^n(I)$$

zinciri geçerlidir ve **her iki kapsama da kesindir**. Sağdaki kapsamanın kesinliğini yukarıdaki $x^2\sin\frac{1}{x}$ örneği ($n=1$ için), soldakinin kesinliğini Önerme 6.1'deki $x^n \mid x \mid$ örneği verir.

Üsteki kuvveti bir artırırsak salınım daha hızlı sönümlenir ve türev sürekli hâle gelir; ama bozulma bir mertebe yukarı ötelenmekten başka bir şey yapmaz.

Örnek 6.5 (Türevi Sürekli, İkinci Türevi Olmayan Bir Fonksiyon). $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$g(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $g \in C^1(\mathbb{R})$ olduğunu, buna karşılık $g''(0)$'ın var olmadığını, yani $g \notin C^2(\mathbb{R})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Türev. $x \neq 0$ için çarpım ve zincir kurallarıyla

$$g'(x) = 3x^2\sin\frac{1}{x} + x^3\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}.$$

$x = 0$ noktasında fark oranı

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^3\sin\frac{1}{h}}{h} = h^2\sin\frac{1}{h}$$

olup $\left|h^2\sin\frac{1}{h}\right| \leq h^2 \to 0$ olduğundan $g'(0) = 0$'dır. Demek ki g her noktada türevlenebilirdir.
g' süreklidir. $x \neq 0$ noktalarında g', sürekli fonksiyonların cebirsel işlemleri ve bileşkesi olduğundan süreklidir. Geriye 0 noktası kalır. Her $x \neq 0$ için

$$|g'(x) - g'(0)| = \left|3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right| \leq 3x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right| + |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 3x^2 + |x|$$

yazabiliriz. $x \to 0$ iken sağ taraf 0'a gittiğinden sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0 = g'(0)$'dır. Yani g' fonksiyonu 0'da da süreklidir ve $g \in C^1(\mathbb{R})$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci türev 0'da yok. Tanıma dönelim:

$$g''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(h) - g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 \sin\frac{1}{h} - h\cos\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3h\sin\frac{1}{h} - \cos\frac{1}{h}\right).$$

Birinci terim $h \to 0$ iken 0'a gider ($\left|3h\sin\frac{1}{h}\right| \le 3 \mid h \mid$). O hâlde limitin var olması, ancak ve ancak $\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$ limitinin var olmasıyla mümkündür. Bu limit ise yoktur: $h_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ için $\cos\frac{1}{h_n} = \cos(2n\pi) = 1$, $t_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$ için $\cos\frac{1}{t_n} = \cos((2n+1)\pi) = -1$'dir. Dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği limit yoktur; karşılık gelen fark oranı dizileri de -1 ve $+1$ değerlerine gider. Dolayısıyla $g''(0)$ tanımsızdır.
Sonuç. $g \in C^1(\mathbb{R})$ ama $g \notin C^2(\mathbb{R})$'dir; hatta g fonksiyonu 0'da iki kez türevlenebilir bile değildir. Bu, $C^2(\mathbb{R}) \subsetneq C^1(\mathbb{R})$ kapsamasının kesinliğinin bir başka tanığıdır — Önerme 6.1'deki $x \mid x \mid$ örneğinden farklı olarak burada bozulma köşeden değil, sönümlü ama duramayan bir salınımdan gelir.
Genel örüntü şudur: $x^m \sin\frac{1}{x}$ (ve $x = 0$'da 0) biçiminde tanımlanan fonksiyonda üsteki her iki birimlik artış, düzgünlük merdiveninde bir basamak kazandırır. Alıştırmalarda $m = 4$ durumunu inceleyeceğiz.
■

Bu iki örnek, C^n sınıflarının neden ayrı ayrı adlandırıldığını açıklar. "Türevlenebilir" demek, "türevi güzel davranıyor" demek değildir; ilerleyen bölümlerde kuracağımız ortalama değer teoremleri ve Taylor formülü, hipotezlerinde tam olarak hangi mertebeye kadar türev istendiğini ve o türevin sürekli olup olmadığını titizlikle belirtir. Bu titizliğin nedeni işte bu örneklerdir.

6.7 Alıştırmalar

Alıştırma 6.1 (Yüksek Mertebeden Türevler Üzerine).

a) $f(x) = xe^{2x}$ fonksiyonunun n. türevini bulunuz.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ fonksiyonunun n. türevini bulunuz.

c) $f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun n. türevini bulunuz ($n \ge 1$).

d) $f(x) = x^2\cos x$ fonksiyonu için $f^{(10)}(x)$ ifadesini bulunuz.

e) $f(x) = e^x \sin x$ fonksiyonu için $f^{(n)}(x) = 2^{n/2}e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.

f) $f(x) = x^4 \sin\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ olarak tanımlansın. f'nin $\mathbb{R}$ üzerinde iki kez türevlenebilir olduğunu, $f''(0) = 0$ bulunduğunu, buna karşılık f'''nün 0'da sürekli olmadığını, yani $f \notin C^2(\mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.

g) $y = \arctan x$ olsun. $(1+x^2)y' = 1$ eşitliğinden yola çıkıp Leibniz kuralıyla, her $n \ge 1$ için

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)} + 2nx\,y^{(n)} + n(n-1)\,y^{(n-1)} = 0$$

bağıntısını elde ediniz ve bunu kullanarak $y^{(n)}(0)$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm.
a) $f = u\cdot v$ yazalım: $u(x) = e^{2x}$, $v(x) = x$. Önerme 6.3'nin (b) şıkkı gereği $u^{(m)}(x) = 2^m e^{2x}$'tir. Ayrıca $v' = 1$ ve $k \ge 2$ için $v^{(k)} = 0$'dır. Leibniz kuralında (Teorem 6.1) yalnızca $k = 0$ ve $k = 1$ terimleri kalır:

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}u^{(n)}(x)\,v(x) + \binom{n}{1}u^{(n-1)}(x)\,v'(x) = 2^n e^{2x}\,x + n\,2^{n-1}e^{2x}.$$

Yani

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}e^{2x}\,(2x+n), \qquad n \ge 1.$$

Denetim: $n = 1$ için $e^{2x}(2x+1)$ çıkar ve doğrudan $\left(xe^{2x}\right)' = e^{2x} + 2xe^{2x}$ hesabı da aynı sonucu verir.
b) Paydayı çarpanlara ayıralım: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Longrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1).$$

$x = 1$ için $1 = -A$, yani $A = -1$; $x = 2$ için $1 = B$'dir. O hâlde

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Lineerlik (Önerme 6.2) ve Önerme 6.3'nin (f) şıkkıyla

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right), \qquad x \neq 1, x \neq 2.$$

Denetim: $n = 1$ için sağ taraf, paydalar ortaklaştırılınca

$$-\frac{(x-1)^2 - (x-2)^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$$

verir; bölüm kuralıyla doğrudan hesaplanan f' ile aynıdır.
c) Doğrudan Leibniz kuralı uygulamak yerine ifadeyi lineerleştirelim. Yarım açı özdeşliğiyle

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

$n \geq 1$ için sabit terimin türevi sıfırdır. Önerme 6.3'nin (d) ve (g) şıkları gereği $\left(\cos 2x\right)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$'dir. O hâlde

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad n \geq 1.$$

Denetim: $n = 1$ için $-2^0 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin 2x) = \sin 2x$ çıkar; gerçekten $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$'tir.
d) $u(x) = \cos x$, $v(x) = x^2$ alalım. $v^{(k)} = 0$ $(k \geq 3)$ olduğundan Leibniz kuralı üç terim verir ve Önerme 6.3'nin (d) şıkkıyla, $n \geq 2$ için

$$f^{(n)}(x) = x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1) \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

$n = 10$ için üç kosinüsü sadeleştirelim:

$$\cos(x + 5\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \cos(x + 4\pi) = \cos x.$$

Burada cos fonksiyonunun 2π periyotlu olmasını kullandık: $5\pi = \pi + 4\pi$ ve $\frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\pi$. Katsayılar $2n = 20$, $n(n-1) = 90$ olduğundan

$$f^{(10)}(x) = -x^2 \cos x - 20x \sin x + 90 \cos x.$$

e) n üzerinden tümevarım yapalım (bkz. Analiz 1).
Temel adım. $n = 1$ için çarpım kuralıyla $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$'tir. Öte yandan

$$2^{1/2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^x \left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}\, e^x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin x + \cos x \right) = e^x(\sin x + \cos x)$$

olduğundan formül $n = 1$ için doğrudur.
Tümevarım adımı. Formül n için doğru olsun. Türev alalım:

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n/2} \left[e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \right] = 2^{n/2} e^x [\sin\theta + \cos\theta], \quad \theta := x + \frac{n\pi}{4}.$$

Temel adımdaki hesabın aynısı $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ verir. O hâlde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n/2}\cdot 2^{1/2}\, e^x \sin\!\left(x + \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 2^{(n+1)/2} e^x \sin\!\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right)$$

bulunur; tümevarım tamamlanır.

f) Önce birinci türev. $x \neq 0$ için çarpım ve zincir kurallarıyla

$$f'(x) = 4x^3 \sin\frac{1}{x} + x^4 \cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}.$$

$x = 0$ noktasında $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = h^3 \sin\frac{1}{h}$ ve $\left|\, h^3 \sin\frac{1}{h}\,\right| \le |\,h\,|^3 \to 0$ olduğundan $f'(0) = 0$'dır.
Şimdi ikinci türev. $x = 0$ noktasında fark oranı

$$\frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \frac{4h^3 \sin\frac{1}{h} - h^2\cos\frac{1}{h}}{h} = 4h^2 \sin\frac{1}{h} - h\cos\frac{1}{h}$$

olur ve $\left|\, 4h^2 \sin\frac{1}{h} - h\cos\frac{1}{h}\,\right| \le 4h^2 + |\,h\,| \to 0$ olduğundan $f''(0) = 0$'dır. Demek ki f fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin her noktasında iki kez türevlenebilirdir ($x \neq 0$ noktalarında bu zaten açıktır, çünkü orada f düzgün fonksiyonların cebirsel işlemleri ve bileşkesidir).
$x \neq 0$ için f'''yü hesaplayalım:

$$f''(x) = 12x^2 \sin\frac{1}{x} + 4x^3\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2x\cos\frac{1}{x} - x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

yani

$$f''(x) = 12x^2\sin\frac{1}{x} - 4x\cos\frac{1}{x} - 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} = 12x^2\sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}.$$

$x \to 0$ iken ilk iki terim 0'a gider ($\left|\, 12x^2\sin\frac{1}{x}\,\right| \le 12x^2$ ve $\left|\, 6x\cos\frac{1}{x}\,\right| \le 6\,|\,x\,|$), ama üçüncü terim $-\sin\frac{1}{x}$'in limiti yoktur: $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ için $\sin\frac{1}{x_n} = 0$, $z_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi} \to 0$ için $\sin\frac{1}{z_n} = \sin\!\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$'dir. Dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği $\lim_{x\to 0} f''(x)$ yoktur; özel olarak bu limit $f''(0) = 0$'a eşit olamaz. Yani f'' fonksiyonu 0'da süreksizdir ve $f \notin C^2(\mathbb{R})$'dir. Buna karşılık $f \in C^1(\mathbb{R})$'dir: $|\,f'(x)\,| \le 4\,|\,x\,|^3 + x^2 \to 0 = f'(0)$ olduğundan f', 0'da süreklidir.

g) $y = \arctan x$ için $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$'dir; iki tarafı $1+x^2$ ile çarparsak

$$(1+x^2)\,y'(x) = 1$$

elde ederiz. Şimdi bu eşitliğin iki tarafının da n. türevini alalım. Sağ taraf sabit olduğundan $n \ge 1$ için türevi sıfırdır. Sol tarafa Leibniz kuralını (Teorem 6.1) $u(x) = y'(x)$ ve $v(x) = 1+x^2$ ile uygulayalım. $v' = 2x$, $v'' = 2$ ve $k \ge 3$ için $v^{(k)} = 0$ olduğundan yalnızca üç terim kalır:

$$0 = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v''.$$

$u^{(m)} = \big(\,y'\big)^{(m)} = y^{(m+1)}$ olduğundan bu

$$0 = (1+x^2)\,y^{(n+1)} + n\,(2x)\,y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot y^{(n-1)},$$

yani istenen

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)} + 2nx\,y^{(n)} + n(n-1)\,y^{(n-1)} = 0$$

bağıntısıdır. ($n = 1$ için son terim sıfırdır ve $u^{(n-2)}$ hiç geçmez; $n \ge 2$ içinse bütün terimler anlamlıdır.)
Şimdi $x = 0$ koyalım. $1 + 0^2 = 1$ ve $2n\cdot 0 = 0$ olduğundan

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)\,y^{(n-1)}(0), \qquad n \ge 1.$$

Başlangıç değerleri: $y(0) = \arctan 0 = 0$ ve $y'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$'dir. Bağıntıyı $n = 1$ ile kullanırsak $y''(0) = -1\cdot 0\cdot y^{(0)}(0) = 0$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bağıntı, mertebeyi ikişer ikişer atlattığı için çift ve tek mertebeler birbirinden bağımsız iki zincir oluşturur.
Çift mertebeler. $y(0)=0$ ve $y''(0)=0$'dır; bağıntı her çift mertebeyi bir öncekinin katı yaptığından tümevarımla $y^{(2m)}(0)=0$ olur.
Tek mertebeler. $y'(0)=1$'dir ve $n=2m$ alarak

$$y^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)\,y^{(2m-1)}(0)$$

yazarız. Buradan sırasıyla

$$y'''(0) = -2\cdot 1\cdot 1 = -2, \qquad y^{(5)}(0) = -4\cdot 3\cdot(-2) = 24, \qquad y^{(7)}(0) = -6\cdot 5\cdot 24 = -720$$

bulunur. Örüntüyü görmek için değerleri faktöriyellerle karşılaştıralım: $1=0!$, $-2=-2!$, $24=4!$, $-720=-6!$. Tümevarımla

$$y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m\,(2m)!$$

olduğunu gösterelim. $m=0$ için $y'(0)=1=(-1)^0 0!$; doğru. Formül m için doğruysa

$$y^{(2m+3)}(0) = -(2m+2)(2m+1)\,y^{(2m+1)}(0) = -(2m+2)(2m+1)\,(-1)^m(2m)! = (-1)^{m+1}(2m+2)!$$

çıkar; istenen budur. Özetle

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift},\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1. \end{cases}$$

Bu sayılar, Taylor formülü bölümünde karşımıza çıkacak olan $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ açılımının katsayılarını verir: $\frac{y^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{(-1)^m(2m)!}{(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}$.
■

Artık elimizde bir fonksiyonu istediğimiz mertebeye kadar türetecek araçlar var. Bundan sonraki adım, bu türevleri fonksiyonun davranışını **okumak** için kullanmaktır; işe en temel soruyla, bir fonksiyonun en büyük ve en küçük değerlerini nerede aldığı sorusuyla başlıyoruz: Ekstremum Noktaları ve Fermat Teoremi.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Ekstremum Noktaları ve Fermat Teoremi

Buraya kadar türevi bir **hesap aracı** olarak kurduk: tanımını verdik, aritmetiğini çıkardık, zincir kuralını ve ters fonksiyonun türevini ispatladık, temel fonksiyonların türevlerini hesapladık ve son olarak Yüksek Mertebeden Türevler ve Leibniz Kuralı bölümünde türev almayı yineleyerek f'', f''', $f^{(n)}$'e ulaştık. Bu bölümle birlikte kitabın yönü değişiyor. Artık soru "türev nasıl hesaplanır" değil, **"türev fonksiyon hakkında ne söyler"**dir.

Türevin en eski ve en somut kullanımı, bir fonksiyonun en büyük ya da en küçük değerini nerede aldığını bulmaktır. Pierre de Fermat, henüz türev kavramı bugünkü biçimiyle tanımlanmadan önce, 1630'lu yıllarda maksimum ve minimum noktalarını bulmak için bir yöntem geliştirmişti; bu yöntemin arkasındaki fikir tam olarak bu bölümde ispatlayacağımız teoremdir. Fikir çok basittir: bir tepe noktasında grafiğe çizilen teğet **yataydır**, çünkü teğetin eğimi pozitif olsaydı grafik o noktadan sağa doğru yükselmeye devam ederdi, negatif olsaydı sola doğru yükselirdi; her iki durumda da o nokta bir tepe olmazdı.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: bir noktanın **yerel** ya da **mutlak** ekstremum noktası olması ne demektir; Fermat teoremi bu noktalarda türev hakkında ne söyler ve teoremin hipotezlerinden hangisi kaldırılamaz; teoremin **karşıtının** neden doğru olmadığı; türevin var olmadığı noktalarda ve tanım kümesinin uç noktalarında ne yapılacağı; ve son olarak, kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun mutlak ekstremumlarını sonlu sayıda adayı karşılaştırarak bulmayı sağlayan yordam. Bölümün sonunda bu yordamı somut bir optimizasyon problemine uygulayacağız. Fermat teoremi bundan sonraki bütün bölümlerin taşıyıcı sütunudur — Rolle teoremi doğrudan ondan, ortalama değer teoremi de Rolle'den çıkar — bu yüzden teoremin kendisi kadar **sınırlarını** da iyi anlamak gerekir.

7.1 Yerel ve Mutlak Ekstremum Noktaları

Bir fonksiyonun "en büyük değeri" derken iki farklı şey kastedebiliriz. Birincisi, o noktanın **çevresindeki** noktalarla karşılaştırıldığında en büyük olmasıdır; bir dağ silsilesinde her tepe, kendi yakın çevresinin en yükseğidir ama silsilenin en yükseği olmak zorunda değildir. İkincisi ise fonksiyonun **bütün tanım kümesindeki** en büyük değeridir. İlkine yerel, ikincisine mutlak diyoruz.

Tanımlarda x_0 noktasının ε-komşuluğu (bkz. Analiz 1) gösterimini kullanacağız:

$$V_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \mid x - x_0 \mid < \varepsilon\}.$$

Tanım 7.1 (Yerel Maksimum ve Yerel Minimum). $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun.

1. Öyle bir $\varepsilon > 0$ varsa ki $V_\varepsilon(x_0) \cap A$ kümesindeki her x için
$$f(x) \leq f(x_0)$$
oluyorsa, x_0 noktasına f'nin bir **yerel maksimum noktası** (local maximum point), $f(x_0)$ değerine de bir **yerel maksimum değeri** denir.
2. Öyle bir $\varepsilon > 0$ varsa ki $V_\varepsilon(x_0) \cap A$ kümesindeki her x için
$$f(x) \geq f(x_0)$$
oluyorsa, x_0 noktasına f'nin bir **yerel minimum noktası** (local minimum point), $f(x_0)$ değerine de bir **yerel minimum değeri** denir.

Bu iki tür nokta topluca **yerel ekstremum noktaları** (local extrema points) diye adlandırılır.

Tanımdaki ε'un x_0'a bağlı olduğuna dikkat edin: her yerel maksimum noktasının kendi "yeterince küçük" komşuluğu vardır. Ayrıca karşılaştırma yalnızca $V_\varepsilon(x_0)$'un **tanım kümesiyle kesişiminde** yapılır; A'nın dışında kalan noktalar için f tanımlı bile değildir. A bir açık aralık ve x_0 onun bir noktası ise ε yeterince küçük seçilerek $V_\varepsilon(x_0) \subseteq A$ sağlanabileceğinden, kesişim yazmaya gerek kalmaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi aynı karşılaştırmayı tanım kümesinin tamamında yapalım.

Tanım 7.2 (Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum). $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun.

1. Her $x \in A$ için $f(x) \leq f(x_0)$ ise, x_0 noktasına f'nin A üzerindeki bir **mutlak maksimum noktası** (absolute maximum point) denir. Bu durumda $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$'tir.
2. Her $x \in A$ için $f(x) \geq f(x_0)$ ise, x_0 noktasına f'nin A üzerindeki bir **mutlak minimum noktası** (absolute minimum point) denir. Bu durumda $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$'tir.

Bu iki tür nokta topluca **mutlak ekstremum noktaları** (absolute extrema points) diye adlandırılır. "Mutlak" yerine "global" de denir.

İki tanım arasındaki ilişki tek yönlüdür ve hemen görülür: x_0 bir mutlak maksimum noktası ise, $f(x) \leq f(x_0)$ eşitsizliği A'nın **her** noktasında geçerli olduğundan, özel olarak $V_\varepsilon(x_0) \cap A$'nın da her noktasında geçerlidir; yani x_0 aynı zamanda bir yerel maksimum noktasıdır. Burada ε'u istediğimiz gibi, örneğin $\varepsilon = 1$ seçebiliriz. Ters yön doğru değildir: bir tepe, silsilenin en yükseği olmayabilir. Bunu birazdan örnekte açıkça göreceğiz.

> **i** Nokta mı, değer mi?
>
> Dikkat edilecek tek şey, **ekstremum noktası** ile **ekstremum değeri**ni karıştırmamaktır. Ekstremum noktası tanım kümesinde bir x_0'dır (x ekseninde durur); ekstremum değeri ise $f(x_0)$ sayısıdır (y ekseninde durur). Bir fonksiyonun mutlak maksimum **değeri** varsa tektir — çünkü $\max_{x \in A} f(x)$ bir sayıdır ve Kümenin Maksimumu ve Minimumu gereği tek olarak belirlenir — ama bu değerin alındığı **noktalar** birden fazla olabilir. Örneğin sabit fonksiyonun mutlak maksimum değeri tektir, ama tanım kümesinin her noktası bir mutlak maksimum noktasıdır.
> Ayrıca sabit fonksiyonda her nokta hem mutlak maksimum hem mutlak minimum noktasıdır; tanımda **kesin** eşitsizlik istenmediği için bu tamamen olağandır. Eşitsizliğin $x \neq x_0$ için kesin olması istenirse **kesin yerel maksimum** (strict local maximum) terimi kullanılır; biz aksi söylenmedikçe kesin olmayan tanımı kullanacağız.

Şimdi bütün bu ayrımların aynı anda görüldüğü bir örnek üzerinde çalışalım. Örnek özellikle seçilmiştir: içinde bir uç nokta, bir mutlak minimum, türevin var olmadığı bir tepe ve fonksiyonun sabit kaldığı bütün bir yarı doğru vardır.

Örnek 7.1 (Parçalı Bir Fonksiyonun Bütün Ekstremumları). $A = [-1, +\infty)$ ve $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 2, \\ 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

olsun. f'nin bütün yerel ve mutlak ekstremum noktalarını belirleyiniz.

Çözüm.
Önce fonksiyonun genel gidişini belirleyelim. $[-1, 0]$ üzerinde $f(x) = x^2$ kesin azalandır, $[0, 2)$ üzerinde kesin artandır, $[2, +\infty)$ üzerinde ise sabittir. Ayrıca

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 = f(2)$$

olduğundan f, $x = 2$ noktasında da süreklidir; yani f bütün A üzerinde süreklidir. Görüntü kümesi $f(A) = [0, 4]$'tür: x^2 ifadesi $x \in [-1, 2)$ için $[0, 4)$ aralığının bütün değerlerini alır, 4 değeri de $x \geq 2$ için alınır.
$x_0 = -1$ bir yerel maksimum noktasıdır. Burası tanım kümesinin sol uç noktasıdır, dolayısıyla karşılaştırma yalnızca sağdaki noktalarla yapılır. $\varepsilon = 1$ alalım. $x \in V_1(-1) \cap A = [-1, 0)$ ise $-1 \leq x < 0$, buradan $|\, x \,| \leq 1$ ve

$$f(x) = x^2 = |\, x \,|^2 \leq 1 = f(-1)$$

olur. Demek ki $f(x) \leq f(-1)$ eşitsizliği -1'in bir komşuluğunda sağlanır: $x_0 = -1$ yerel maksimum noktasıdır. Yerel minimum noktası **değildir**, çünkü $-1 < x < 0$ olan her x için $f(x) = x^2 < 1 = f(-1)$'dir. Mutlak maksimum noktası da değildir, çünkü $f(3) = 4 > 1 = f(-1)$'dir. İşte "yerel olup mutlak olmayan" bir ekstremumun somut örneği.

 CC BY-NC-SA 4.0

$x_0 = 0$ mutlak minimum noktasıdır. Her $x \in [-1,2)$ için $f(x) = x^2 \geq 0$ ve her $x \geq 2$ için $f(x) = 4 > 0$'dır. Öyleyse her $x \in A$ için

$$f(x) \geq 0 = f(0),$$

yani $x_0 = 0$ mutlak minimum noktasıdır; mutlak minimum değeri 0'dır. Üstelik bu değerin alındığı tek nokta 0'dır: $x \neq 0$ ve $x \in [-1,2)$ ise $x^2 > 0$, $x \geq 2$ ise $f(x) = 4 > 0$. Mutlak minimum olduğundan aynı zamanda yerel minimumdur.
$x_0 = 2$ bir yerel maksimum noktasıdır. $f(2) = 4$'tür. $\varepsilon = 1$ alalım ve $x \in V_1(2) \cap A = (1,3)$ olsun. İki durum var:

- $1 < x < 2$ ise $f(x) = x^2 < 4 = f(2)$;
- $2 \leq x < 3$ ise $f(x) = 4 = f(2)$.

Her iki durumda da $f(x) \leq f(2)$; demek ki $x_0 = 2$ yerel maksimum noktasıdır. Yerel minimum noktası değildir, çünkü solundaki noktalarda f daha küçük değerler alır: örneğin $f(1{,}5) = 2{,}25 < 4$.
Burada durup bir adım daha atalım. Yukarıda $f(A) = [0,4]$ olduğunu gördük; yani her $x \in A$ için $f(x) \leq 4 = f(2)$'dir. Bu, Tanım 7.2'un tam olarak istediği koşuldur: $x_0 = 2$ yalnızca yerel değil, **mutlak maksimum noktasıdır** da. Fonksiyonun değerlerinin supremumu $\sup_{x\in A} f(x) = 4$'tür ve bu supremum gerçekten **alınmaktadır** — bu yüzden $\max_{x\in A} f(x) = 4$ diye yazma hakkımız vardır. Ne var ki 2 bu değerin alındığı **tek** nokta değildir: $x \geq 2$ olan her nokta da mutlak maksimum noktasıdır. Mutlak maksimum değeri tekti, mutlak maksimum noktası değil.
$x_0 > 2$ olan her nokta hem yerel maksimum hem yerel minimum noktasıdır. $x_0 > 2$ olsun ve $\varepsilon = x_0 - 2 > 0$ alalım. O zaman

$$V_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = (2{,}2x_0 - 2) \subseteq (2, +\infty) \subseteq A$$

olur; bu komşuluğun her noktasında $f(x) = 4 = f(x_0)$'dır. Eşitlik hem $f(x) \leq f(x_0)$ hem $f(x) \geq f(x_0)$ eşitsizliklerini sağladığından x_0 hem yerel maksimum hem yerel minimum noktasıdır. Fonksiyon bu noktanın çevresinde **sabit** olduğu için ikisi birden olur; bu, kesin olmayan tanımın doğal bir sonucudur. Aynı noktalar mutlak maksimum noktalarıdır ama mutlak minimum noktaları değildir ($f(0) = 0 < 4$).
Geri kalan noktalar ekstremum değildir. $-1 < x_0 < 0$ olsun. f bu civarda x^2'dir ve $[-1,0]$ üzerinde kesin azalandır; dolayısıyla x_0'ın yeterince küçük her komşuluğunda hem $f(x) > f(x_0)$ olan (solda) hem $f(x) < f(x_0)$ olan (sağda) noktalar bulunur. Böyle bir nokta ne yerel maksimum ne yerel minimum olabilir. $0 < x_0 < 2$ durumu simetriktir: f orada kesin artandır, yine solda küçük sağda büyük değerler vardır.
Özet.

Nokta	Yerel maks.	Yerel min.	Mutlak maks.	Mutlak min.
$x = -1$	evet	hayır	hayır	hayır
$-1 < x < 0$	hayır	hayır	hayır	hayır
$x = 0$	hayır	evet	hayır	evet
$0 < x < 2$	hayır	hayır	hayır	hayır
$x = 2$	evet	hayır	evet	hayır
$x > 2$	evet	evet	evet	hayır

■

Bu örnek, bundan sonra söyleyeceğimiz her şeyin mihenk taşı olacak. Şimdiden bir gözlem yapalım: bulduğumuz ekstremum noktaları birbirinden çok farklı üç türdendir. $x = -1$ tanım kümesinin uç noktasıdır ve orada türev (sağdan) vardır ama sıfır değildir; $x = 2$ noktasında türev hiç yoktur (soldan türev 4, sağdan türev 0'dır); buna karşılık $x = 0$ noktasında ve $x > 2$ olan her noktada türev vardır ve sıfırdır. Yani "türev sıfırdır" durumu ekstremum noktalarının yalnızca bir bölümünde ortaya çıkar. Bölümün gerisi tam olarak bu üç durumu birbirinden ayırmakla ilgilidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

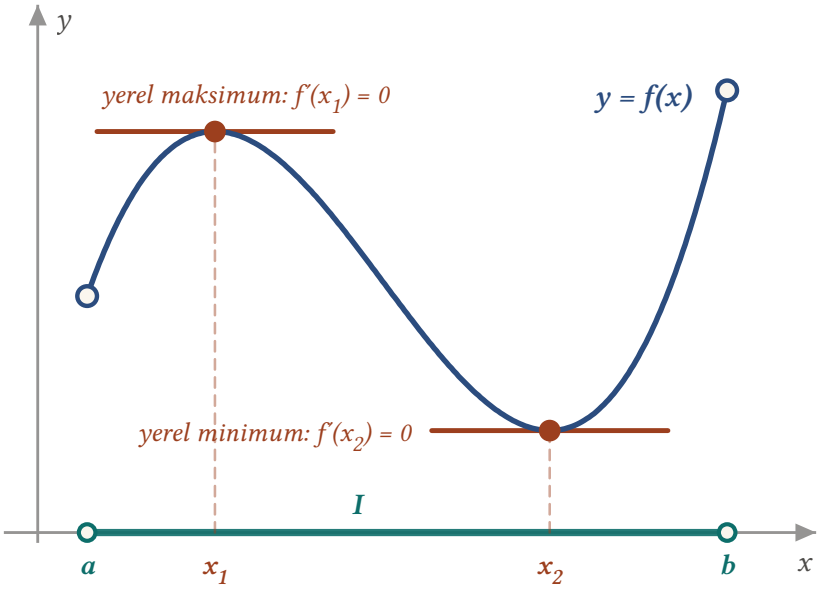
7.2 Fermat Teoremi

Şimdi ekstremum noktaları ile türev arasındaki temel bağlantıyı kuralım. Sezgi şudur: x_0 bir yerel maksimum noktası ise, oradan sağa gidildiğinde fonksiyon artamaz, sola gidildiğinde de artamaz. "Sağa doğru artmama" fark oranını negatif tarafa iter, "sola doğru artmama" ise pozitif tarafa. Türev varsa bu iki baskı aynı sayıya uygulanır ve tek çıkış yolu o sayının sıfır olmasıdır.

Teorem 7.1 (Fermat Teoremi). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin bir $x_0 \in I$ noktasında yerel ekstremumu (maksimum ya da minimum) varsa ve f bu noktada türevlenebiliyorsa,*

$$f'(x_0) = 0$$

olur.



Şekil 7.1: Fermat teoremi: açık bir I *aralığının* iç *noktasında yerel bir ekstremum varsa ve türev orada mevcutsa, teğet yataydır — x_1'de yerel maksimum, x_2'de yerel minimum ve her ikisinde de $f' = 0$. Nedeni fark oranının işaretidir: sağdan yaklaşınca oran ≤ 0, soldan yaklaşınca ≥ 0 çıkar, dolayısıyla limit hem ≤ 0 hem ≥ 0, yani sıfırdır. Aralık açık olduğu için* a *ve* b *uçları dışarıda kalır; orada yalnızca tek yanlı fark oranı vardır ve bu argüman yürümez.*

İspat.
I açık olduğundan ve $x_0 \in I$ olduğundan, $V_{\varepsilon_0}(x_0) \subseteq I$ olacak biçimde bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır (bkz. Analiz 1). Yerel ekstremum tanımındaki ε'u gerekirse küçülterek $\varepsilon \le \varepsilon_0$ alabiliriz; böylece $V_\varepsilon(x_0) \subseteq I$ olur ve ekstremum eşitsizliği bu komşuluğun her noktasında geçerlidir. f türevlenebilir olduğundan, Teorem 2.1 gereği x_0'da her iki tek yönlü türev de vardır ve

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

eşitlikleri sağlanır. İki durumu ayrı ayrı ele alıyoruz.
Durum 1: x_0 bir yerel maksimum noktası. *O hâlde her $x \in V_\varepsilon(x_0)$ için $f(x) \le f(x_0)$, yani*

$$f(x) - f(x_0) \le 0.$$

Sağdan yaklaşma. *$x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ olsun. Bu durumda $x - x_0 > 0$'dır ve pozitif bir sayıya bölme eşitsizliğin yönünü değiştirmez:*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Fark oranı (Tanım 2.1) x_0'ın sağındaki bütün noktalarda ≤ 0 olduğundan, sağdan limit alındığında bu eşitsizlik korunur (bkz. Analiz 1; sabit 0 fonksiyonuyla karşılaştırıyoruz). Sağdan limit tam olarak sağdan türevdir (Tanım 2.6):

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Soldan yaklaşma. *Şimdi $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ olsun. Bu kez $x - x_0 < 0$'dır;* ***negatif*** *bir sayıya bölmek eşitsizliğin yönünü ters çevirir. Pay yine ≤ 0 olduğundan*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

elde ederiz. Aynı gerekçeyle soldan limit de ≥ 0 olur:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Sonuç. *Aynı $f'(x_0)$ sayısı hem ≤ 0 hem ≥ 0'dır. Hem ≤ 0 hem ≥ 0 olan tek reel sayı 0 olduğundan $f'(x_0) = 0$.*

Durum 2: x_0 bir yerel minimum noktası. *Bu kez her $x \in V_\varepsilon(x_0)$ için $f(x) \geq f(x_0)$, yani*

$$f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

Sağdan yaklaşma. *$x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ için $x - x_0 > 0$ olduğundan*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0.$$

Soldan yaklaşma. *$x_0 - \varepsilon < x < x_0$ için pay ≥ 0, payda < 0 olduğundan*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0.$$

Sonuç. *Yine $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, yani $f'(x_0) = 0$.*
Her iki durumda da $f'(x_0) = 0$ bulundu.
■

> **İkinci durum için kestirme yol**
>
> İkinci durumu birinciye indirgemek de mümkündür. x_0, f için bir yerel minimum noktası ise, $g = -f$ fonksiyonu için bir yerel maksimum noktasıdır: $f(x) \geq f(x_0)$ eşitsizliğini -1 ile çarpınca $g(x) \leq g(x_0)$ olur. g de x_0'da türevlenebilirdir ve Teorem 3.2 gereği $g'(x_0) = -f'(x_0)$'dır. Durum 1'i g'ye uygularsak $g'(x_0) = 0$, yani $-f'(x_0) = 0$ ve buradan $f'(x_0) = 0$ çıkar. Yukarıda ikinci durumu yine de baştan yazdık, çünkü eşitsizliklerin hangi adımda yön değiştirdiğini bir kez daha görmek Fermat teoreminin ruhunu iyi anlatıyor.

Teoremin geometrik anlamı açıktır: **bir yerel ekstremum noktasında grafiğe çizilen teğet, varsa, yataydır.** Fermat'nın 1638'e uzanan yönteminin özü buydu; Fermat teğet kavramını değil, "maksimumun yakınında fonksiyonun değeri neredeyse değişmez" gözlemini kullanıyordu.
Teoremin **üç** hipotezi vardır ve hiçbiri süs değildir: I açık olmalı (yani x_0 bir **iç nokta** olmalı), x_0 bir yerel ekstremum olmalı, ve f bu noktada **türevlenebilir** olmalı. Şimdi bunları tek tek yoklayacağız. Önce iç nokta koşulunun tam olarak neyi sağladığını görelim.

Önerme 7.1 (İç Noktada Tek Yönlü Türev Koşulu). *$A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve x_0, A'nın bir iç noktası olsun (yani bir $\varepsilon_0 > 0$ için $V_{\varepsilon_0}(x_0) \subseteq A$). f'nin x_0'da her iki tek yönlü türevi de var olsun.*

1. *x_0 bir yerel maksimum noktası ise $f'_-(x_0) \geq 0 \geq f'_+(x_0)$ olur.*
2. *x_0 bir yerel minimum noktası ise $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$ olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
İspat, Teorem 7.1'nın ispatındaki hesabın türevin varlığı kullanılmadan yazılmış hâlidir. $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ seçelim ki ekstremum eşitsizliği $V_\varepsilon(x_0) \subseteq A$ üzerinde geçerli olsun.
(1) x_0 yerel maksimum ise $V_\varepsilon(x_0)$ üzerinde $f(x) - f(x_0) \leq 0$'dır. $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ için payda pozitiftir, fark oranı ≤ 0 olur ve sağdan limitte $f'_+(x_0) \leq 0$ elde edilir. $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ için payda negatiftir, fark oranı ≥ 0 olur ve soldan limitte $f'_-(x_0) \geq 0$ elde edilir. İkisi birlikte $f'_-(x_0) \geq 0 \geq f'_+(x_0)$ verir.
(2) x_0 yerel minimum ise $f(x) - f(x_0) \geq 0$'dır. Sağda payda pozitif olduğundan fark oranı ≥ 0 ve $f'_+(x_0) \geq 0$; solda payda negatif olduğundan fark oranı ≤ 0 ve $f'_-(x_0) \leq 0$. Yani $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$.
■

Bu önerme Fermat teoremini de içerir: f türevlenebilirse $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$ olduğundan (1) hâlinde $f'(x_0) \geq 0 \geq f'(x_0)$, (2) hâlinde $f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0)$ çıkar ve her iki durumda da $f'(x_0) = 0$ olur. Önermenin asıl değeri, türevin var olmadığı köşe noktalarında da bir şey söylemesidir. Örnek 7.1'ndeki $x_0 = 2$ noktasını yoklayalım: orada

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4, \qquad f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{4-4}{x-2} = 0$$

olduğundan $f'_-(2) = 4 \geq 0 \geq 0 = f'_+(2)$; önermenin yerel maksimum koşulu gerçekten sağlanıyor. İki tek yönlü türev eşit olmadığı için f bu noktada türevlenebilir değildir ve Fermat teoremi uygulanamaz — ama nokta yine de bir yerel maksimumdur.
Şimdi de iç nokta olmama durumuna, yani tanım kümesinin uçlarına bakalım. Kapalı bir $[a, b]$ aralığında a ve b noktalarında yalnızca tek yönlü yaklaşma mümkün olduğundan, elde edebileceğimiz bilgi de tek yönlüdür.

Sonuç 7.1 (Uç Noktalarda Tek Yönlü Türev Koşulu). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.*

1. *f'nin a noktasında yerel maksimumu varsa ve $f'_+(a)$ mevcutsa, $f'_+(a) \leq 0$ olur.*
2. *f'nin a noktasında yerel minimumu varsa ve $f'_+(a)$ mevcutsa, $f'_+(a) \geq 0$ olur.*
3. *f'nin b noktasında yerel maksimumu varsa ve $f'_-(b)$ mevcutsa, $f'_-(b) \geq 0$ olur.*
4. *f'nin b noktasında yerel minimumu varsa ve $f'_-(b)$ mevcutsa, $f'_-(b) \leq 0$ olur.*

*Özel olarak, uç noktalardaki tek yönlü türevlerin sıfır olması **gerekmez**.*

İspat.
(1) a noktasında yerel maksimum olsun: bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon(a) \cap [a, b]$ kümesinin her noktasında $f(x) \leq f(a)$'dır. $\delta = \min\{\varepsilon, b - a\} > 0$ diyelim; a'nın solundaki noktalar tanım kümesinde olmadığından bu kesişim $[a, a + \delta)$ aralığını kapsar. Demek ki $a < x < a + \delta$ olan her x için

$$f(x) - f(a) \leq 0, \qquad x - a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

$x \to a^+$ limitine geçersek, sıralama limitte korunacağından (bkz. Analiz 1)

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

bulunur. Soldan bir bilgi elde edemeyiz, çünkü a'nın solunda fonksiyon tanımlı değildir; bu yüzden ters yönlü eşitsizlik yoktur ve sıfıra sıkıştırma gerçekleşmez.
(2) a noktasında yerel minimum olsun. Aynı δ ile $a < x < a + \delta$ için $f(x) - f(a) \geq 0$ ve $x - a > 0$, dolayısıyla fark oranı ≥ 0'dır. Limitte $f'_+(a) \geq 0$.
(3) b noktasında yerel maksimum olsun. Bu kez, aynı $\delta = \min\{\varepsilon, b - a\}$ ile, $V_\varepsilon(b) \cap [a, b]$ kesişimi $(b - \delta, b]$ aralığını kapsar. $b - \delta < x < b$ olan her x için $f(x) - f(b) \leq 0$ ve $x - b < 0$ olduğundan, negatife bölme yönü çevirir:

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq 0.$$

(4) b noktasında yerel minimum olsun. $b - \delta < x < b$ için pay ≥ 0, payda < 0, dolayısıyla fark oranı ≤ 0 ve limitte $f'_-(b) \leq 0$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Son iddia için bir örnek yeter: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ *fonksiyonu* 0*'da mutlak minimuma,* 1*'de mutlak maksimuma sahiptir; buna karşılık* $f'_+(0) = f'_-(1) = 1 \neq 0$*'dır. Bu, (1)–(4) ile tutarlıdır:* 0 *bir yerel minimum ve* $f'_+(0) = 1 \geq 0$*;* 1 *bir yerel maksimum ve* $f'_-(1) = 1 \geq 0$*.*
■

Bu sonucu şöyle akılda tutmak kolaydır: **uçta ekstremum varsa, fonksiyon aralığın içine doğru "yanlış yöne" gidemez.** Sol uçta maksimum ise içeri doğru artamaz, bu yüzden $f'_+(a) \leq 0$; sağ uçta maksimum ise içeriden gelirken düşmemiş olmalıdır, bu yüzden $f'_-(b) \geq 0$.
İspatta $[a,b]$ aralığının öteki ucunun varlığı yalnızca δ seçiminde kullanıldı; hesabın geri kalanı, uç noktaya **tek yönlü** yaklaşılabilmesinden ibarettir. Bu yüzden aynı sonuç, $[a,+\infty)$ ya da $(-\infty,b]$ gibi tek yanı kapalı aralıklar için de geçerlidir; orada yalnızca $\delta = \varepsilon$ almak yeter.
Örnek 7.1'ndeki $x_0 = -1$ uç noktasını yoklayalım; orada tanım kümesi $[-1,+\infty)$'dur ve -1 onun sol ucudur. $f(x) = x^2$ olduğundan $f'_+(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$'dir ve gerçekten $-2 \leq 0$; sonucun (1) şıkkı doğrulanmış oldu. Türev sıfır değildir ama bu bir çelişki yaratmaz, çünkü -1 tanım kümesinin iç noktası değildir.

⚠ Fermat teoreminin üç hipotezi de gereklidir

Aşağıdaki üç örnekten her biri, hipotezlerden **yalnızca birini** ihlal eder ve sonuç bozulur.

- **İç nokta olma koşulu.** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. $x_0 = 1$ noktası mutlak (dolayısıyla yerel) maksimumdur, f orada soldan türevlenebilirdir, ama $f'_-(1) = 1 \neq 0$'dır. 1 bir iç nokta olmadığı için teorem uygulanamaz.
- **Türevlenebilirlik koşulu.** $f(x) = |\,x\,|$ fonksiyonunun $x_0 = 0$'da mutlak minimumu vardır, 0 bir iç noktadır, ama f orada türevlenebilir değildir; "$f'(0) = 0$" cümlesi anlamsızdır.
- **Ekstremum olma koşulu.** $f(x) = x^3$ için $f'(0) = 0$'dır ama 0 bir ekstremum noktası değildir. Bu, teoremin karşıtının doğru olmadığını gösterir; birazdan ayrıntılı bakacağız.

7.3 Kritik Noktalar ve Ekstremum Adayları

Fermat teoremi bize bir **eleme** aracı verir: türevlenebilir bir fonksiyonun iç noktalardaki ekstremumları, ancak türevin sıfırlandığı yerlerde olabilir. Bu, sonsuz sayıda adayı genellikle sonlu bir listeye indirir. Türevin sıfırlanmadığı ya da var olmadığı yerleri toparlayan kavrama bir ad verelim.

Tanım 7.3 (Kritik Nokta). $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve x_0, A'nın bir iç noktası olsun. Eğer

1. f bu noktada türevlenebilir ve $f'(x_0) = 0$ ise, ya da
2. f bu noktada türevlenebilir değilse,

x_0 noktasına f'nin bir **kritik noktası** (critical point) denir. Birinci türden noktalara ayrıca **durağan nokta** (stationary point) da denir.

Bu tanımla birlikte Fermat teoremi ve Sonuç 7.1 şu tek cümlede toplanır:

> Bir ekstremum noktası ya bir kritik noktadır ya da tanım kümesinin bir uç noktasıdır.

Gerçekten de x_0 bir ekstremum noktası olsun. İki seçenek vardır. x_0 bir iç nokta ise: ya f orada türevlenebilir değildir (ikinci türden kritik nokta), ya da türevlenebilirdir ve Teorem 7.1 gereği $f'(x_0) = 0$ olur (birinci türden kritik nokta). x_0 bir iç nokta değilse, tanım kümesinin uç noktalarından biridir. Başka olasılık yoktur.
Dolayısıyla ekstremum ararken bakılacak **üç aday kaynağı** vardır:

1. **Türevin sıfırlandığı noktalar:** $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri.
2. **Türevin var olmadığı noktalar:** köşeler, düşey teğet noktaları, süreksizlik noktaları.
3. **Tanım kümesinin uç noktaları:** $[a,b]$ için a ve b; genel olarak tanım kümesinin iç noktası olmayan noktaları.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 7.1'nde bu üç kaynağın üçü de temsil edilmişti: $x = 0$ birinci kaynaktan ($f'(0) = 0$), $x = 2$ ikinci kaynaktan (soldan ve sağdan türevler farklı), $x = -1$ üçüncü kaynaktan (sol uç nokta) geliyordu. $x > 2$ noktaları ise birinci kaynaktandır, çünkü orada f sabittir ve $f'(x) = 0$'dır.
Ama listenin **aday** listesi olduğunu unutmamak gerekir: her aday ekstremum olmak zorunda değildir. Şimdi bu tuzağı iki örnekle görelim.

Örnek 7.2 (Türevi Sıfır Olan Nokta Ekstremum Olmayabilir). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunu ele alalım. $f'(0) = 0$ olmasına karşın $x_0 = 0$'ın ne yerel maksimum ne de yerel minimum noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kuvvet kuralı gereği $f'(x) = 3x^2$'dir, dolayısıyla

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0.$$

Yani 0 bir kritik (durağan) noktadır. Şimdi ekstremum olmadığını gösterelim. $\varepsilon > 0$ ne kadar küçük seçilirse seçilsin, $V_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ komşuluğu hem pozitif hem negatif noktalar içerir. Örneğin $x_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ ve $x_2 = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$ noktalarını alalım:

$$f(x_1) = \frac{\varepsilon^3}{8} > 0 = f(0), \qquad f(x_2) = -\frac{\varepsilon^3}{8} < 0 = f(0).$$

Demek ki 0'ın **hiçbir** komşuluğunda "$f(x) \le f(0)$ her yerde" ya da "$f(x) \ge f(0)$ her yerde" diyemeyiz: her komşulukta $f(0)$'dan büyük de küçük de değerler vardır. Tanım 7.1 gereği 0 ne yerel maksimum ne yerel minimumdur.
Aslında daha fazlası doğrudur: $f(x) = x^3$ bütün $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır. $x < y$ ise

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2) = (y - x)\left[\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}\right] > 0$$

olur; köşeli parantezin içi ancak $x = 0$ **ve** $y = 0$ iken sıfır olabilir, oysa $x < y$ olduğundan ikisi birden sıfır olamaz. Kesin artan bir fonksiyonun hiçbir noktası ekstremum olamaz. Grafiğin teğetini kestiği, yani teğetin bir yanında altında öteki yanında üstünde kaldığı bu tür noktalara **dönüm noktası** (inflection point) denir; $f(x) = x^3$ için $x = 0$ noktasında grafik konkavlıktan konveksliğe geçer. Dönüm noktalarını ileride ayrıca inceleyeceğiz.
■

⚠ Karşıtı doğru değildir

Teorem 7.1 "ekstremum ⇒ türev sıfır" der; **"türev sıfır ⇒ ekstremum" demez.** $f(x) = x^3$ örneği bunu kesin biçimde gösterir. Aynı biçimde $f(x) = x^5$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ya da $f(x) = \sin x - x$ fonksiyonlarında da türevin sıfırlandığı ama ekstremum olmayan noktalar vardır.
Bu yüzden Fermat teoremi tek başına bir **test** değildir; bir **eleme kuralı**dır. Adayları bulduktan sonra her adayın gerçekten ekstremum olup olmadığı ayrıca araştırılmalıdır. Bunun sistemli yolunu (birinci ve ikinci türev testlerini) ortalama değer teoremini kurduktan sonra vereceğiz.

Örnek 7.3 (Ekstremum Noktasında Türev Olmayabilir). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x_0 = 0$'da mutlak minimumu olduğunu, ama bu noktada türevlenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Mutlak minimum. Mutlak değerin tanımı gereği (bkz. Analiz 1) her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \ge 0$'dır ve $f(0) = |0| = 0$'dır. Demek ki her x için

$$f(x) = |x| \ge 0 = f(0),$$

yani $x_0 = 0$ bir mutlak minimum noktasıdır (Tanım 7.2). Üstelik $x \neq 0$ için $|x| > 0$ olduğundan bu değeri veren tek noktadır. Mutlak minimum olduğu için yerel minimumdur da.
Türevin yokluğu. Fark oranını hesaplayalım. $x > 0$ için $|x| = x$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|\,x\,|}{x}=\frac{x}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}1=1.$$

$x<0$ için $|\,x\,|=-x$ olduğundan

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-x}{x}=-1 \quad\Rightarrow\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1.$$

$f'_-(0)=-1\neq 1=f'_+(0)$ olduğundan Teorem 2.1 gereği f, 0'da türevlenebilir değildir. Grafik bu noktada bir **köşe** yapar: soldan gelen doğrunun eğimi -1, sağdan gidenin eğimi $+1$'dir ve tek bir teğet doğrusu yoktur.
Bu, Fermat teoremiyle çelişmez: teorem türevlenebilirliği **varsayar**; varsayım sağlanmadığında teoremin söyleyecek bir şeyi yoktur. Buna karşılık Önerme 7.1 uygulanabilir ve doğrulanır: 0 bir yerel minimum olduğundan $f'_-(0)\le 0\le f'_+(0)$ beklenir; gerçekten $-1\le 0\le 1$'dir.
Türev yokluğunun bambaşka bir biçimde ortaya çıktığı bir örnek de $g(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$'tür. Her x için $g(x)\ge 0=g(0)$ olduğundan 0 mutlak minimumdur; ama $x>0$ için

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{x^{2/3}}{x}=x^{-1/3}\underset{x\to 0^+}{\to}+\infty$$

olduğundan sağdan türev (sonlu bir sayı olarak) yoktur. Burada grafik köşe değil, **düşey teğetli sivri uç** yapar.
■

7.4 Kapalı Aralıkta Mutlak Ekstremum Bulma

Şimdi bütün parçaları birleştirip pratik bir yordam kuralım. Bir fonksiyonun mutlak maksimumunu ararken iki ayrı soru vardır: **var mı?** ve **nerede?** Birinci soruyu Analiz 1'in Weierstrass ekstremum teoremi yanıtlar, ikincisini Fermat teoremi.
Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1), kapalı ve sınırlı bir $[a,b]$ aralığında sürekli olan bir f fonksiyonunun bu aralıkta hem mutlak maksimumunu hem mutlak minimumunu **aldığını** söyler; yani öyle $x_{\min},x_{\max}\in[a,b]$ noktaları vardır ki her $x\in[a,b]$ için

$$f(x_{\min})\le f(x)\le f(x_{\max}).$$

Varlık güvence altına alındıktan sonra iş, bu noktaları bulmaya kalır. Fermat teoremi ve Sonuç 7.1, aranan noktanın nerede olabileceğini üç seçeneğe indirger.

i Kapalı aralıkta mutlak ekstremum yordamı

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli olsun.

1. **Varlık.** Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği f mutlak maksimumunu ve mutlak minimumunu $[a,b]$ üzerinde alır. Bu adım atlanamaz: aradığımız şeyin var olduğunu bilmeden aday karşılaştırmak anlamsızdır.
2. **Adaylar.** Mutlak maksimumun alındığı $x_{\max}$ noktasını düşünelim. Ya $x_{\max}\in(a,b)$'dir ya da $x_{\max}\in\{a,b\}$'dir. Birinci durumda $x_{\max}$ bir iç noktadır ve yereldir de; f orada türevlenebilirse Teorem 7.1 gereği $f'(x_{\max})=0$, türevlenebilir değilse ikinci türden kritik noktadır. Demek ki aday listesi şudur:
   - (a,b) içinde $f'(x)=0$ olan noktalar,
   - (a,b) içinde $f'(x)$'in var olmadığı noktalar,
   - uç noktalar a ve b.
3. **Karşılaştırma.** f'yi bütün adaylarda hesapla. Elde edilen sonlu sayı listesinin **en büyüğü** mutlak maksimum değeri, **en küçüğü** mutlak minimum değeridir; bu değerleri veren adaylar da aranan noktalardır.

Üçüncü adımın geçerliliği ikinci adımdan gelir: mutlak maksimumun alındığı nokta listede mutlaka bulunduğuna göre, listedeki en büyük değer mutlak maksimum değeridir. Aynı akıl yürütme minimum için de geçerlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yordamın işleyişini tam çözümlü bir örnekte çalıştıralım.

Örnek 7.4 (Kübik Bir Fonksiyonun Kapalı Aralıktaki Ekstremumları). $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini, bu değerlerin alındığı bütün noktalarla birlikte bulunuz.

Çözüm.
1. adım: varlık. f bir polinomdur, dolayısıyla $\mathbb{R}$'de ve özel olarak $[-2, 3]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1). $[-2, 3]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olduğundan Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği f bu aralıkta mutlak maksimumunu ve mutlak minimumunu alır. Öyleyse aramamız boşa çıkmayacaktır.
2. adım: adaylar. f bir polinom olduğundan her noktada türevlenebilirdir; ikinci türden kritik nokta yoktur. Türevi

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

olduğundan

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \;\text{ veya }\; x = -1.$$

Her iki kök de $(-2, 3)$ açık aralığının içindedir, dolayısıyla ikisi de adaydır. Uç noktaları da ekleyerek aday listesini yazalım:

$$x = -2, \qquad x = -1, \qquad x = 1, \qquad x = 3.$$

3. adım: karşılaştırma. Fonksiyonu bu dört noktada hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 3(-2) = -8 + 6 = -2, \\ f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2, \\ f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2, \\ f(3) &= 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18. \end{aligned}$$

Listedeki sayılar -2, 2, -2, 18'dir. En büyüğü 18, en küçüğü -2'dir. Öyleyse

$$\max_{x \in [-2,3]} f(x) = f(3) = 18, \qquad \min_{x \in [-2,3]} f(x) = f(-2) = f(1) = -2.$$

Sonucun okunması. Mutlak maksimum değeri 18'dir ve yalnızca $x = 3$ uç noktasında alınır; dikkat edilirse burası türevin sıfırlandığı bir nokta değildir ($f'(3) = 24 \neq 0$), bu yüzden uç noktaları listeye almak zorunluydu. Sonuç 7.1 (3) ile tutarlıdır: sağ uçta maksimum var ve $f'_-(3) = 24 \geq 0$.
Mutlak minimum değeri -2'dir ve **iki** noktada birden alınır: $x = -2$ (sol uç nokta) ve $x = 1$ (durağan nokta). Bu, mutlak ekstremum **değerinin** tek, ekstremum **noktasının** tek olmak zorunda olmadığını bir kez daha gösterir. Sol uç için Sonuç 7.1 (2) doğrulanır: $f'_+(-2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9 \geq 0$.
Kalan aday $x = -1$ ise mutlak ekstremum değildir, ama yerel maksimumdur. Bunu doğrudan çarpanlara ayırarak görebiliriz: $f(-1) = 2$ olduğundan

$$f(x) - f(-1) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$$

olur (sağ taraf açıldığında $x^3 - 3x - 2$ elde edilir). $\varepsilon = 1$ alalım: $x \in V_1(-1) = (-2, 0)$ ise $(x + 1)^2 \geq 0$ ve $x - 2 < 0$'dır, dolayısıyla çarpım ≤ 0, yani $f(x) \leq f(-1) = 2$'dir. Demek ki $x = -1$ bir yerel maksimum noktasıdır; mutlak maksimum ise değildir, çünkü $f(3) = 18 > 2$'dir. $x = -1$ noktası, "yerel ama mutlak olmayan ekstremum" örneğidir.
Aynı fonksiyon, farklı aralık. Aralığın seçiminin ne kadar belirleyici olduğunu görmek için aynı f'yi $[-2, 2]$ üzerinde düşünelim. Adaylar $-2, -1, 1, 2$ olur ve $f(2) = 8 - 6 = 2$'dir. Değerler -2, 2, -2, 2; bu kez mutlak maksimum değeri 2'dir ve **iki** noktada alınır: $x = -1$ (durağan nokta) ve $x = 2$ (uç nokta). Aralığı $[-2, 3]$'ten $[-2, 2]$'ye daraltmak $x = -1$'i yerelden mutlağa yükseltmiştir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Weierstrass'ın hipotezleri kaldırılamaz

Yordamın birinci adımı bir formalite değildir. Aşağıdaki üç fonksiyonun hiçbirinde mutlak maksimum yoktur; üçünde de Weierstrass teoreminin bir hipotezi ihlal edilmiştir.

- **Aralık kapalı değil.** $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Fonksiyon süreklidir ama $x \to 0^+$ iken $f(x) \to +\infty$ olduğundan üstten sınırlı bile değildir; mutlak maksimum yoktur. (Mutlak minimum vardır: $f(1) = 1$.)
- **Aralık sınırlı değil.** $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Sürekli ve tanım kümesi kapalı, ama sınırlı değil; mutlak maksimum yoktur.
- **Fonksiyon sürekli değil.** $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x < 1$ için $f(x) = x$ ve $f(1) = 0$. Tanım kümesi kapalı ve sınırlı, ama f, 1 noktasında sürekli değil. Değerler kümesi $[0, 1)$ olduğundan supremum 1'dir ve alınmaz; mutlak maksimum yoktur.

Buna karşılık aday listesi eksiksizdir: mutlak ekstremum **varsa**, mutlaka listededir. Yordamın sıralaması bu yüzden "önce varlık, sonra yer" biçimindedir.

7.5 Bir Uygulama: Optimizasyon

Kapalı aralık yordamının klasik kullanım alanı, "verilen kısıt altında en iyi değeri bul" biçimindeki optimizasyon problemleridir. Böyle bir problemi çözerken izlenen yol hep aynıdır: en büyük ya da en küçük yapılacak nicelik tek bir değişkenin fonksiyonu olarak yazılır, değişkenin geometrik olarak anlamlı olduğu aralık belirlenir, sonra yordam uygulanır.

Örnek 7.5 (Çevresi Verilen Dikdörtgenlerin En Büyük Alanı). Çevresi 40 metre olan dikdörtgenler arasında alanı en büyük olanını bulunuz. Ayrıca aynı çevre için alanın alabileceği en küçük değeri de tartışınız.

Çözüm.
Modelleme. Dikdörtgenin kenar uzunlukları x ve y olsun; her ikisi de pozitiftir. Çevre koşulu

$$2x + 2y = 40 \quad \Rightarrow \quad y = 20 - x$$

verir. $y > 0$ olması için $x < 20$ gerekir; $x > 0$ zaten gerekiyordu. Alan

$$A = xy = x(20 - x) = 20x - x^2$$

olur. Böylece problem tek değişkenli hâle geldi: $A(x) = 20x - x^2$ fonksiyonunun $(0, 20)$ aralığındaki en büyük değerini arıyoruz.
Aralığın kapatılması. $(0, 20)$ açık bir aralık olduğundan Weierstrass teoremi doğrudan uygulanamaz. Bu güçlüğü aşmanın standart yolu, fonksiyonu uçları da içine alacak biçimde genişletmektir: $A(x) = 20x - x^2$ ifadesi $[0, 20]$ kapalı aralığında da tanımlı ve süreklidir. Uçlarda $A(0) = 0$ ve $A(20) = 0$'dır; bunlar "yozlaşmış dikdörtgenler"e karşılık gelir (bir kenar sıfır olur), yani geometrik olarak kabul edilmezler. Ama alan pozitif olabildiğine göre — örneğin $A(5) = 75 > 0$ — mutlak maksimum uçlarda alınamaz; dolayısıyla $[0, 20]$ üzerinde bulacağımız maksimum nokta zorunlu olarak $(0, 20)$ içinde kalır ve gerçek bir dikdörtgene karşılık gelir.
Yordam. A bir polinomdur; $[0, 20]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1) ve Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği mutlak maksimumunu alır. Her yerde türevlenebilir olduğundan ikinci türden kritik nokta yoktur:

$$A'(x) = 20 - 2x, \qquad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Adaylar: $x = 0$, $x = 10$, $x = 20$. Değerler:

$$A(0) = 0, \qquad A(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100, \qquad A(20) = 400 - 400 = 0.$$

En büyüğü 100'dür. Öyleyse mutlak maksimum $x = 10$'da alınır ve o zaman $y = 20 - 10 = 10$ olur.
Sonuç. Çevresi 40 m olan dikdörtgenler arasında alanı en büyük olan, kenarı 10 m olan **karedir**; en büyük alan $100\ \text{m}^2$'dir.
Türevsiz doğrulama. Sonucu tam kareye tamamlayarak da görebiliriz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A(x) = 20x - x^2 = 100 - (x^2 - 20x + 100) = 100 - (x-10)^2 \le 100,$$

ve eşitlik ancak $x = 10$ iken sağlanır. Bu, türev kullanmadan aynı sonucu verir ve hesabımızı doğrular. **En küçük alan.** $[0, 20]$ üzerinde mutlak minimum değeri 0'dır ve $x = 0$ ile $x = 20$ uç noktalarında alınır. Ama bu noktalar geometrik olarak dikdörtgen vermez. Gerçek dikdörtgenlerle sınırlı kalırsak, yani $x \in (0, 20)$ alırsak, alanın **en küçük değeri yoktur**: x küçüldükçe $A(x) = x(20 - x)$ değeri 0'a yaklaşır ama hiçbir zaman 0'a eşit olmaz. Nitekim $\inf_{x\in(0,20)} A(x) = 0$'dır ve bu infimum alınmaz. Bu, açık aralıklarda mutlak ekstremumun var olmayabileceğinin bir örneğidir; yukarıdaki uyarıda söylediğimiz olgunun somut hâli.

■

Optimizasyon problemlerinde yol haritası

1. **Değişkeni seç ve kısıtı yaz.** Hangi büyüklüğün serbest olduğuna karar ver, geri kalanları kısıt denkleminden onun cinsinden ifade et.
2. **Hedef fonksiyonunu kur.** En büyük/en küçük yapılacak nicelik tek değişkenin fonksiyonu olarak yazılmalıdır.
3. **Anlamlı aralığı belirle.** Geometrik ya da fiziksel kısıtlar değişkenin hangi aralıkta gezebileceğini söyler. Mümkünse bu aralığı kapalı ve sınırlı hâle getir; uçlardaki değerlerin problemin çözümü olamayacağı ayrıca gerekçelendirilir.
4. **Yordamı uygula.** Süreklilikle varlığı garantile, kritik noktaları ve uçları listele, değerleri karşılaştır.
5. **Cevabı probleme çevir.** Bulunan x değerini kısıt denklemine koyup öteki büyüklükleri de hesapla ve sonucu cümleyle yaz.

7.6 Alıştırmalar

Alıştırma 7.1 (Ekstremum Noktaları ve Fermat Teoremi Üzerine).

a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini, alındıkları noktalarla birlikte bulunuz.

b) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\, x^2 - 1 \,|$ fonksiyonunun bütün kritik noktalarını belirleyiniz ve mutlak ekstremumlarını bulunuz.

c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun bir mutlak minimumu olduğunu gösteriniz ve minimum değerini bulunuz. Mutlak maksimumu var mıdır?

d) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonunun $[0, 1]$ üzerinde hem mutlak maksimumu hem mutlak minimumu vardır, ama $f'(x) = 1$ hiçbir noktada sıfır olmaz. Bunun Teorem 7.1 ile çelişmediğini açıklayınız ve Sonuç 7.1'in ilgili şıklarını doğrulayınız.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ olsun. $f'(1) = 0$ olduğunu gösteriniz ve $x = 1$ noktasının ekstremum olmadığını türev testi kullanmadan, doğrudan tanımdan kanıtlayınız.

f) Kenar uzunluğu 12 cm olan kare biçiminde bir kartonun dört köşesinden kenar uzunluğu x olan kareler kesilip kalan kısım yukarı katlanarak üstü açık bir kutu yapılıyor. Kutunun hacmini en büyük yapan x değerini ve en büyük hacmi bulunuz.

g) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimumunu bulunuz.

Çözüm.
a) f bir polinomdur; $[-2, 2]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1) ve Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği mutlak ekstremumlarını alır. Her yerde türevlenebilirdir, dolayısıyla adaylar yalnızca durağan noktalar ve uçlardır:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1),$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}.$$

Üç kök de $(-2, 2)$ içindedir. Adaylar: $-2, -1, 0, 1, 2$. Değerler:

$$f(-2) = 16 - 8 = 8,\ f(-1) = 1 - 2 = -1, f(0) = 0,$$
$$f(1) = 1 - 2 = -1, \quad f(2) = 16 - 8 = 8.$$

En büyük değer 8, en küçük değer -1'dir. Öyleyse mutlak maksimum değeri 8'dir ve $x = -2$ ile $x = 2$ uç noktalarında alınır; mutlak minimum değeri -1'dir ve $x = -1$ ile $x = 1$ durağan noktalarında alınır.
Kalan aday $x = 0$ yerel maksimumdur ama mutlak maksimum değildir: $f(0) = 0$ ve

$$f(x) - f(0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$$

olduğundan, $x \in V_1(0) = (-1, 1)$ için $x^2 \geq 0$ ve $x^2 - 2 < 0$, yani $f(x) \leq f(0)$'dır; buna karşılık $f(2) = 8 > 0 = f(0)$'dır. Fonksiyon çift olduğundan ($f(-x) = f(x)$) ekstremumların 0'a göre simetrik çıkması beklenen bir durumdur.
b) Önce mutlak değeri açalım. $x^2 - 1 \geq 0$ olması $\mid x \mid \geq 1$ demektir; öyleyse

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, 1 \leq \mid x \mid \leq 2, \\ 1 - x^2, \mid x \mid < 1. \end{cases}$$

f süreklidir: her parça polinomdur ve $x = \pm 1$ noktalarında iki parçanın değeri de 0'dır. Türevi parça parça hesaplayalım. $1 < \mid x \mid < 2$ için $f'(x) = 2x$; $\mid x \mid < 1$ için $f'(x) = -2x$. Bu iki ifade $\mid x \mid < 1$ bölgesinde yalnızca $x = 0$'da sıfırlanır ($1 < \mid x \mid < 2$ bölgesinde $2x \neq 0$'dır).
$x = 1$ noktasında türev var mıdır? Tek yönlü türevleri hesaplayalım:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x - 1} = -2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2.$$

Eşit olmadıklarından f, $x = 1$'de türevlenebilir değildir (Teorem 2.1); burası ikinci türden bir kritik noktadır. f çift fonksiyon olduğundan $x = -1$'de de aynı durum geçerlidir: $f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$.
Öyleyse kritik noktalar $x = -1, 0, 1$'dir; uç noktalarla birlikte aday listesi $-2, -1, 0, 1, 2$ olur. Değerler:

$$f(-2) = 3, \quad f(-1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 3.$$

Mutlak maksimum değeri 3'tür ve $x = \pm 2$ uç noktalarında alınır; mutlak minimum değeri 0'dır ve $x = \pm 1$ türevsiz noktalarında alınır. Minimum noktalarında türevin var olmaması Teorem 7.1 ile çelişmez, hatta Önerme 7.1 (2) ile tam uyumludur: $x = 1$ bir yerel minimum ve $f'_-(1) = -2 \leq 0 \leq 2 = f'_+(1)$.
c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$x > 0$ olduğundan $f'(x) = 0$ ancak $x^2 = 1$, yani $x = 1$ için olur ($x = -1$ tanım kümesinde değildir). Tanım kümesi açık olduğundan Weierstrass teoremi doğrudan uygulanamaz; varlığı elle göstermeliyiz. Her $x > 0$ için

$$f(x) - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0,$$

çünkü pay bir tam karedir ve payda pozitiftir. Demek ki her $x > 0$ için $f(x) \geq 2 = f(1)$, yani $x = 1$ bir mutlak minimum noktasıdır ve mutlak minimum değeri 2'dir. Eşitlik ancak $(x-1)^2 = 0$, yani $x = 1$ iken olduğundan bu tek minimum noktasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Mutlak maksimum yoktur: her $M > 0$ için $x > M$ seçildiğinde $f(x) = x + \dfrac{1}{x} > x > M$ olur, yani f üstten sınırlı değildir. Üstten sınırlı olmayan bir fonksiyonun mutlak maksimumu olamaz. (Aynı sonuç $x \to 0^+$ tarafından da görülür: $f(x) > \dfrac{1}{x}$ istenildiği kadar büyük olur.)

d) Çelişki yoktur, çünkü Teorem 7.1'nın hipotezlerinden biri sağlanmıyor: teorem x_0'ın **açık** bir aralığın noktası, yani tanım kümesinin bir **iç** noktası olmasını ister. Burada $f(x) = x$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde mutlak minimumunu $x = 0$'da, mutlak maksimumunu $x = 1$'de alır; her iki nokta da $[0,1]$'in uç noktasıdır ve iç noktası değildir. $(0,1)$ açık aralığının hiçbir noktası ekstremum olmadığından da teoremin sonucuna ihtiyaç duyulan bir durum ortaya çıkmaz.

Tek yönlü türevler:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1, \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Sonuç 7.1 (2), sol uçtaki yerel minimum için $f'_+(0) \geq 0$ öngörür; gerçekten $1 \geq 0$'dır. Aynı sonucun (3) şıkkı, sağ uçtaki yerel maksimum için $f'_-(1) \geq 0$ öngörür; gerçekten $1 \geq 0$'dır. Görüldüğü gibi uç noktalarda elde edilen bilgi bir **eşitsizlik**tir, eşitlik değil.

e) Türevi hesaplayalım:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2,$$

dolayısıyla $f'(1) = 3 \cdot 0^2 = 0$'dır: $x = 1$ bir durağan noktadır. Şimdi ekstremum olmadığını gösterelim. Fonksiyonu $x - 1$ cinsinden yazalım. $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ olduğundan

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x = (x-1)^3 + 1.$$

$f(1) = 1$ olduğundan her x için

$$f(x) - f(1) = (x-1)^3.$$

Küp fonksiyonunun işareti tabanının işaretiyle aynıdır: $x > 1$ ise $(x-1)^3 > 0$, $x < 1$ ise $(x-1)^3 < 0$. Öyleyse $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun $V_\varepsilon(1)$ komşuluğunda hem $f(x) > f(1)$ olan noktalar (örneğin $x = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$) hem $f(x) < f(1)$ olan noktalar (örneğin $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$) vardır. Tanım 7.1 gereği $x = 1$ ne yerel maksimum ne yerel minimumdur. Bu da "türev sıfır $\Rightarrow$ ekstremum" çıkarımının yanlış olduğunu gösteren bir başka örnektir.

f) Kesilen karelerin kenarı x olsun. Katlamadan sonra kutunun tabanı kenarı $12 - 2x$ olan bir kare, yüksekliği ise x olur. Anlamlı olması için $x > 0$ ve $12 - 2x > 0$, yani $0 < x < 6$ gerekir. Hacim:

$$V(x) = x(12-2x)^2, \qquad x \in [0,6].$$

Uçlarda $V(0) = 0$ ve $V(6) = 0$'dır; bunlar yozlaşmış hâllerdir ama fonksiyonu kapalı aralığa genişletmek varlık için işimize yarar. V bir polinomdur, $[0,6]$ üzerinde süreklidir ve Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği mutlak maksimumunu alır. Türevini çarpım kuralıyla (Teorem 3.2) ve zincir kuralıyla (Teorem 4.1) hesaplayalım:

$$V'(x) = (12-2x)^2 + x \cdot 2(12-2x)\cdot(-2) = (12-2x)\,\big[\,(12-2x) - 4x\,\big] = (12-2x)(12-6x).$$

Kökler: $12 - 2x = 0$ için $x = 6$; $12 - 6x = 0$ için $x = 2$. Adaylar $x = 0, 2, 6$'dır. Değerler:

$$V(0) = 0, \qquad V(2) = 2 \cdot (12-4)^2 = 2 \cdot 64 = 128, \qquad V(6) = 0.$$

En büyüğü 128'dir. Öyleyse kesilecek karelerin kenarı $x = 2$ cm olmalıdır; en büyük hacim 128 cm ^{3}'tür. Bu değer $(0,6)$ açık aralığının içinde alındığından gerçek bir kutuya karşılık gelir. Elde edilen kutunun tabanı 8×8 cm, yüksekliği 2 cm'dir.

g) Tanım kümesi $[0, +\infty)$ sınırlı olmadığından Weierstrass teoremi uygulanamaz; varlığı yine elle göstereceğiz. Payda hiç sıfırlanmadığından f her noktada türevlenebilirdir; bölüm kuralıyla (Teorem 3.2)

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$x \geq 0$ için $f'(x) = 0$ ancak $x = 1$'de olur. Adaylar $x = 0$ (uç nokta) ve $x = 1$'dir; değerler $f(0) = 0$ ve $f(1) = \frac{1}{2}$'dir.
Maksimum. Her $x \geq 0$ için $(x-1)^2 \geq 0$, yani $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, yani $2x \leq 1 + x^2$'dir. Her iki yanı pozitif olan $2(1+x^2)$ ile bölersek

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Öyleyse her $x \geq 0$ için $f(x) \leq \frac{1}{2} = f(1)$'dir: $x = 1$ mutlak maksimum noktasıdır ve mutlak maksimum değeri $\frac{1}{2}$'dir. Eşitlik ancak $x = 1$ iken sağlandığından bu tek maksimum noktasıdır.
Minimum. $x \geq 0$ ve $1 + x^2 > 0$ olduğundan her $x \geq 0$ için $f(x) \geq 0 = f(0)$'dır: $x = 0$ mutlak minimum noktasıdır ve mutlak minimum değeri 0'dır. Bu bir uç nokta olduğundan türevin sıfır olması beklenmez; nitekim $f'_+(0) = 1 \neq 0$'dır ve Sonuç 7.1 (2) uyarınca $f'_+(0) = 1 \geq 0$ olması yeterlidir.
■

Bu bölümde Fermat teoremini kurduk ve bir ekstremum noktasında türevin (varsa ve nokta içerideyse) sıfırlandığını gördük. Teorem bir eleme aracıdır: adayları verir, ama hangi adayın gerçekten ekstremum olduğunu söylemez. Bu boşluğu doldurmak için türevin **iki nokta arasındaki** davranışını konuşan bir araca ihtiyacımız var; onu da Fermat teoreminin en zarif sonucundan, Rolle teoreminden türeteceğiz: Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri

Önceki bölümde Fermat teoremini kanıtladık: bir fonksiyon bir iç noktada yerel ekstremuma sahipse ve o noktada türevlenebiliyorsa, türev orada sıfırdır. Bu, **yerel** bir bilgiden **yerel** bir sonuç çıkaran bir teoremdir; ekstremum noktalarını aramaya yarar, fonksiyonun bütünü hakkında bir şey söylemez.

Bu bölümde yön değiştiriyoruz. Sorumuz artık şudur: **türev hakkındaki bilgi, fonksiyonun bir aralık üzerindeki davranışı hakkında ne söyler?** Türev bir noktadaki anlık değişimi ölçer; buna karşılık $f(b) - f(a)$ farkı, aralığın tamamındaki toplam değişimdir. Bu ikisi arasında köprü kuran teorem **ortalama değer teoremi**dir (mean value theorem) ve türev hesabının en çok kullanılan aracıdır. Bir fonksiyonun türevi her yerde sıfırsa neden sabittir, türevi pozitifse neden artar, türevi sınırlıysa neden fazla hızlı değişemez — bütün bu soruların yanıtı aynı teoremden çıkar.

Yolu iki adımda kat edeceğiz. Önce, iki ucunda aynı değeri alan bir fonksiyonun arada mutlaka yatay teğeti olduğunu söyleyen **Rolle teoremi**ni (Rolle's theorem) ispatlayacağız; bu, Weierstrass ekstremum teoremi ile Fermat teoreminin doğrudan bir bileşimidir. Sonra Rolle teoremini uygun bir **yardımcı fonksiyon** (auxiliary function) yardımıyla "eğik" duruma taşıyıp Lagrange'ın ortalama değer teoremini elde edeceğiz. Aynı fikir bir kez daha uygulandığında iki fonksiyonu birlikte ele alan Cauchy ortalama değer teoremine ulaşacağız; bu teorem ileride L'Hôpital kuralının ve Taylor formülünün temelini oluşturacak.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Rolle teoreminin ifadesi, ispatı ve hipotezlerinin vazgeçilmezliği; Rolle teoreminin iki genellemesi; Lagrange ortalama değer teoremi ve geometrik anlamı; teoremin dört temel sonucu (sabitlik, sabit farkla ayrılma, monotonluk testi, Lipschitz koşulu); ve Cauchy ortalama değer teoremi ile parametrik eğri yorumu.

8.1 Rolle Teoremi

Bir fonksiyonun grafiğini, bir aralığın iki ucunda **aynı yükseklikte** olan sürekli bir eğri olarak düşünelim. Eğri baştaki yükseklikten ayrılırsa — ister yukarı ister aşağı — sonunda aynı yüksekliğe dönmek zorundadır. Dönüş için bir yerde "yön değiştirmesi" gerekir; o dönüş noktasında teğet yataydır. Rolle teoremi bu sezgiyi kesin bir ifadeye çevirir. İspatın tamamı iki büyük teoremden ibarettir: kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyon en büyük ve en küçük değerini gerçekten alır (Weierstrass), ve alındığı nokta içerideyse türev orada sıfırdır (Fermat).

Teorem 8.1 (Rolle Teoremi). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

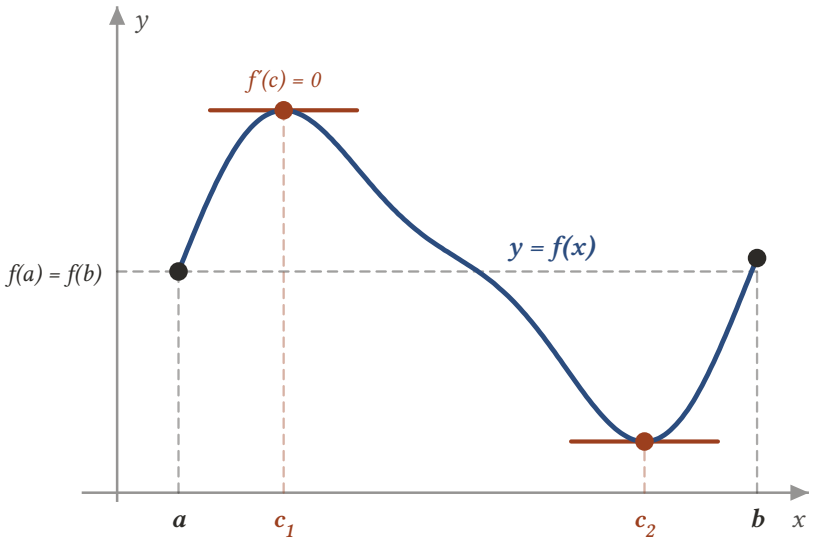
1. *$[a, b]$ kapalı aralığında sürekli,*
2. *(a, b) açık aralığında türevlenebilir*

olsun. Ayrıca $f(a) = f(b)$ olsun. O hâlde

$$f'(c) = 0$$

olan en az bir $c \in (a, b)$ noktası vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: Rolle teoremi: uçlarda aynı değeri alan türevlenebilir bir eğrinin, aralığın içinde en az bir yerde yatay teğeti vardır. Weierstrass teoremi bir maksimum ve bir minimum noktası verir; uç değerler eşit olduğundan bunlardan biri iç noktadadır ve orada Fermat teoremi gereği türev sıfırdır.

İspat.
*f kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan, Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bu aralıkta bir en büyük ve bir en küçük değerini **alır**: öyle $x_M, x_m \in [a,b]$ noktaları vardır ki her $x \in [a,b]$ için*

$$m := f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) =: M.$$

$f(a) = f(b)$ ortak değerine k diyelim. İki durum ayırt edeceğiz.
Durum 1: $M = m$. *Bu durumda her $x \in [a,b]$ için $m \leq f(x) \leq M = m$, yani $f(x) = m$ olur; f sabit fonksiyondur. Sabit fonksiyonun türevi her noktada sıfırdır, dolayısıyla (a,b) aralığındaki **her** c noktası işi görür. (Bu, teoremin c'nin tekliğini iddia etmediğini gösteren en uç örnektir.)*
Durum 2: $M > m$. *M ile m farklı olduğuna göre bunlardan en az biri uç değer k'ye eşit olamaz: eğer hem $M = k$ hem $m = k$ olsaydı $M = m$ olurdu. İki alt durumu ayrı ayrı görelim.*

- *$M \neq k$ olsun. $f(x_M) = M \neq k = f(a) = f(b)$ olduğundan $x_M \neq a$ ve $x_M \neq b$'dir; yani $c := x_M$ noktası (a,b) açık aralığındadır. Bu nokta f'nin $[a,b]$ üzerindeki mutlak maksimum noktası olduğundan, özel olarak bir **yerel maksimum** noktasıdır: c'nin (a,b) içinde kalan bir komşuluğundaki her x için $f(x) \leq f(c)$'dir. Hipotez gereği f, c noktasında türevlenebilirdir. Fermat teoremi gereği $f'(c) = 0$ olur.*
- *$m \neq k$ olsun. Bu kez $c := x_m$ noktası aynı gerekçeyle (a,b) içindedir, bir yerel minimum noktasıdır ve f orada türevlenebilirdir; Fermat teoremi yine $f'(c) = 0$ verir.*

Her iki alt durumda da aranan c bulundu. Böylece ispat tamamlanır.
■

İspatın yapısı akılda tutmaya değer: **süreklilik ekstremumun varlığını, uç değerlerin eşitliği ekstremumun içeride olmasını, türevlenebilirlik de Fermat teoreminin uygulanabilmesini sağlar.** Üç hipotezin her biri bu zincirde ayrı bir halkadır; birini koparırsanız sonuç çöker. Bunu birazdan örneklerle göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Geometrik yorum

Rolle teoremi şunu söyler: **türevlenebilir bir eğri, bir yatay doğruyu iki kez kesiyorsa, bu iki kesim noktası arasında en az bir yatay teğeti vardır.** Grafiğin ucundan ucuna giderken net bir yükselme ya da alçalma yoksa, yol boyunca "anlık eğim"in en az bir kez sıfırlanması gerekir.
Teorem c'nin **varlığını** söyler; ne tekliğini ne de yerini. Yukarıdaki şekilde üç ayrı yatay teğet noktası vardır; sabit fonksiyonda ise sonsuz çoktur.

8.1.1 Hipotezler vazgeçilmez midir?

Bir teoremin hipotezlerini gerçekten anlamanın tek yolu, her birini tek tek düşürüp sonucun bozulduğunu görmektir. Rolle teoreminde üç hipotez vardır ve üçü de gereklidir.

⚠ Hipotezlerin her biri gereklidir

Aşağıdaki üç örnekte, hipotezlerden **yalnızca biri** sağlanmıyor ve her seferinde teoremin sonucu yanlış çıkıyor. Özellikle birinci örnekte türevin var olmadığı **tek bir** nokta bulunmasının bile yeterli olduğuna dikkat edin: hipotezler "hemen hemen her yerde" sağlanmakla yetinmez.

Örnek 8.1 (Hipotezlerin Gerekliliği). Aşağıdaki fonksiyonların her biri için Rolle teoreminin hangi hipotezinin sağlanmadığını belirleyiniz ve sonucun gerçekten bozulduğunu gösteriniz.
a) $f(x) = |\,x\,|$, $[-1,1]$ üzerinde.
b) $f(x) = x$, $[0,1]$ üzerinde.
c) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ $(0 \le x < 1)$ ve $f(1) = 0$.

Çözüm.
a) Türevlenebilirlik bozuluyor. Mutlak değer fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir; ayrıca $f(-1) = 1 = f(1)$'dir. Yani süreklilik ve uç değerlerin eşitliği hipotezleri sağlanıyor. Buna karşılık f, 0 noktasında türevlenebilir değildir: sağ ve sol türevler

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|\,h\,| - 0}{h} = 1, \qquad f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|\,h\,| - 0}{h} = -1$$

biçiminde farklıdır (Teorem 2.1). Sonuç da bozulur: $x > 0$ için $f'(x) = 1$, $x < 0$ için $f'(x) = -1$ olduğundan $(-1,1)$ aralığında türevin tanımlı olduğu hiçbir noktada türev sıfır değildir. Türevin var olmadığı **tek bir** nokta, teoremin sonucunu geçersiz kılmaya yetti.
b) Uç değerlerin eşitliği bozuluyor. $f(x) = x$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli ve $(0,1)$ üzerinde türevlenebilirdir; ilk iki hipotez sağlanıyor. Ancak $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$'dir. Sonuç da bozulur: her x için $f'(x) = 1 \neq 0$ olduğundan $f'(c) = 0$ olan bir c yoktur.
c) Kapalı aralıkta süreklilik bozuluyor. Bu fonksiyon için $f(0) = 0$ ve $f(1) = 0$, yani $f(0) = f(1)$'dir; ayrıca $(0,1)$ açık aralığında $f(x) = x$ olduğundan f orada türevlenebilirdir ve $f'(x) = 1$'dir. Eksik olan tek şey **kapalı** aralıkta sürekliliktir: $x \to 1^-$ iken $f(x) = x \to 1$ olmasına karşın $f(1) = 0$'dır, dolayısıyla f, 1 noktasında sürekli değildir (bkz. Analiz 1). Sonuç yine bozulur: $(0,1)$ üzerinde $f'(x) = 1 \neq 0$'dır.
Üç örnek birlikte, Rolle teoreminin hiçbir hipotezinin gereksiz olmadığını gösterir.
■

Uç noktalarda türevlenebilirlik istenmez

Teoremin ifadesindeki asimetri kasıtlıdır: süreklilik **kapalı** $[a,b]$ aralığında, türevlenebilirlik ise yalnızca **açık** (a,b) aralığında istenir. Örneğin $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde sürekli, $f(-1) = f(1) = 0$ ve $(-1,1)$ üzerinde $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$'dir; uç noktalarda $|\,f'(x)\,| \to +\infty$ olduğundan türev yoktur, ama teorem yine de uygulanır ve $f'(0) = 0$'dır: yarım çemberin tepesinde teğet yataydır.

 CC BY-NC-SA 4.0

8.1.2 Rolle teoreminin doğrulanması

Şimdi teoremi somut bir fonksiyonda çalıştıralım. Bu tür bir "doğrulama" alıştırması iki adımdan oluşur: önce üç hipotez tek tek denetlenir, sonra sonucun vaat ettiği c noktası fiilen hesaplanır.

Örnek 8.2 (Bir Polinom Üzerinde Doğrulama). $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonu $\left[0, \sqrt{3}\right]$ aralığında Rolle teoreminin hipotezlerini sağlıyor mu? Sağlıyorsa teoremin verdiği c noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Hipotezlerin denetimi.

- f bir polinomdur; polinomlar $\mathbb{R}$'nin tamamında süreklidir (bkz. Analiz 1), özel olarak $\left[0, \sqrt{3}\right]$ üzerinde süreklidir.
- Polinomlar $\mathbb{R}$'nin tamamında türevlenebilirdir (Teorem 3.2); özel olarak $\left(0, \sqrt{3}\right)$ üzerinde türevlenebilirdir.
- Uç değerler:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0, \qquad \left(f\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0.$$

Demek ki $f(0) = \left(f\sqrt{3}\right) = 0$'dır. Üç hipotez de sağlanıyor.
Sonucun doğrulanması. Türev $f'(x) = 3x^2 - 3$'tür. $f'(c) = 0$ denklemini çözelim:

$$3c^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ ya da } c = -1.$$

Bu iki kökten $c = -1$ aralığın dışındadır ve bizi ilgilendirmez; teorem yalnızca $\left(0, \sqrt{3}\right)$ içindeki bir nokta vaat etmektedir. $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ olduğundan $0 < 1 < \sqrt{3}$'tür, yani $c = 1$ aranan noktadır. Gerçekten $f'(1) = 3 - 3 = 0$'dır ve teorem doğrulanmış olur.
Bu noktada $f(1) = 1 - 3 = -2$ olup, f'nin $\left[0, \sqrt{3}\right]$ üzerindeki mutlak minimum değeridir; Rolle teoreminin ispatındaki "içeride bir ekstremum" senaryosu tam olarak gerçekleşmiştir.
■

8.1.3 Kök sayısının denetimi: Rolle ile ara değer teoremi birlikte

Rolle teoreminin en sık kullanılan biçimi, teoremin kendisi değil **karşıt tersi**dir. Şöyle okuyalım: f' bir aralıkta hiç sıfırlanmıyorsa, f o aralıkta iki kez aynı değeri alamaz — çünkü alsaydı Rolle teoremi türevi sıfırlayan bir nokta üretirdi. Özel olarak, f' hiç sıfırlanmayan bir fonksiyonun **en çok bir** kökü vardır. Bunu ara değer teoremiyle birleştirdiğimizde çok kullanışlı bir şablon elde ederiz:

- **Varlık** ara değer teoremiyle (işaret değişimi) gösterilir: *en az bir* kök vardır.
- **Teklik** Rolle teoremiyle gösterilir: *en çok bir* kök vardır.

İkisi birlikte "tam olarak bir kök" sonucunu verir.

Örnek 8.3 (Tam Bir Reel Kök). $x^3 + 3x + 1 = 0$ denkleminin tam olarak bir reel çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = x^3 + 3x + 1$ olsun. f bir polinom olduğundan $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli (bkz. Analiz 1) ve türevlenebilirdir.
Adım 1: En az bir kök vardır (ara değer teoremi). Uygun iki noktada fonksiyonun değerine bakalım:

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 1 = -1 - 3 + 1 = -3 < 0, \qquad f(0) = 0 + 0 + 1 = 1 > 0.$$

f, $[-1, 0]$ kapalı aralığında süreklidir ve uçlardaki değerleri zıt işaretlidir. Ara değer teoremi (bkz. Analiz 1), daha doğrusu onun sıfır yeri biçimi (bkz. Analiz 1) gereği

$$f(k) = 0$$

olan bir $k \in (-1, 0)$ vardır. Demek ki denklemin en az bir reel kökü vardır.
Adım 2: En çok bir kök vardır (Rolle teoremi). Aksini varsayalım: f'nin $\alpha < \beta$ olacak biçimde iki farklı reel kökü olsun, yani $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

 CC BY-NC-SA 4.0

f bir polinom olduğundan $[\alpha, \beta]$ üzerinde sürekli, (α, β) üzerinde türevlenebilirdir ve $f(\alpha) = f(\beta)$'dır. Teorem 8.1 gereği

$$f'(x_0) = 0$$

olan bir $x_0 \in (\alpha, \beta)$ bulunmalıdır. Oysa türevi hesaplayalım:

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ olduğundan $f'(x) \geq 3 > 0$'dır; yani f' hiçbir noktada sıfır olmaz. Bu, $f'(x_0) = 0$ ile çelişir. Öyleyse başlangıçtaki varsayım yanlıştır: f'nin iki farklı kökü olamaz.
Sonuç. En az bir ve en çok bir kök olduğuna göre, denklemin tam olarak bir reel kökü vardır; bu kök $(-1, 0)$ aralığındadır.
■

Aynı akıl yürütme yalnızca polinomlar için değil, türevi hiç sıfırlanmayan her fonksiyon için işler. Rolle teoremi ayrıca kök **sayısını sınırlamak** için de kullanılır: f' bir aralıkta en çok n kez sıfırlanıyorsa, f o aralıkta en çok $n + 1$ kez sıfırlanabilir; çünkü f'nin ardışık her iki kökü arasında f''nin bir kökü bulunmak zorundadır.

8.2 Rolle Teoreminin Genellemeleri

Rolle teoreminde uç noktalarda **değerlerin** eşit olması istenir. Peki fonksiyon uç noktalarda tanımlı değilse, ama oralarda aynı **limite** yaklaşıyorsa ne olur? Sezgi, sonucun değişmemesi gerektiğini söyler: uç noktalardaki değerlerin kendisi değil, eğrinin iki ucunun aynı yükseklikte "kapanması" önemlidir. Aşağıdaki önerme bunu doğrular ve üstelik limitlerin sonsuz olduğu duruma da izin verir.

Önerme 8.1 (Rolle Teoreminin Limitli Biçimi). *$-\infty \leq a < b \leq +\infty$ olsun ve $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Aşağıdaki iki durumdan biri gerçekleşsin:*

1. *$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = L$ olacak biçimde bir $L \in \mathbb{R}$ vardır;*
2. *$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$'dur (ya da her ikisi de $-\infty$'dur).*

O hâlde $f'(c) = 0$ olan bir $c \in (a, b)$ vardır.

İspat.
Durum 1: sonlu ortak limit. *Önce a ve b'nin sonlu olduğunu varsayalım. $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu*

$$F(x) = \begin{cases} L, & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ L, & x = b \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. F'nin (a, b) üzerindeki sürekliliği f'nin türevlenebilirliğinden gelir (Teorem 3.1). Uç noktalarda ise

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L = F(a), \qquad \lim_{x \to b^-} F(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = L = F(b)$$

olduğundan F, a'da sağdan ve b'de soldan süreklidir. Demek ki F, $[a, b]$ kapalı aralığında süreklidir. Ayrıca (a, b) üzerinde $F = f$ olduğundan F orada türevlenebilirdir ve $F' = f'$'dür. Son olarak $F(a) = L = F(b)$'dir. Teorem 8.1 gereği $F'(c) = 0$, yani $f'(c) = 0$ olan bir $c \in (a, b)$ vardır.
$a = -\infty$ ya da $b = +\infty$ ise ortada genişletilecek bir $[a, b]$ kapalı aralığı yoktur ve bu yol kapanır. Bu durumda doğrudan bir kompaktlık argümanı kurarız; aşağıdaki akıl yürütme a ile b'nin sonlu olduğu duruma da olduğu gibi uygulanır.
f sabitse her $c \in (a, b)$ noktası işi görür. f sabit değilse $f(d) \neq L$ olan bir $d \in (a, b)$ vardır. Önce $f(d) > L$ olduğunu varsayalım ve $\varepsilon := f(d) - L > 0$ diyelim. $x \to a^+$ iken $f(x) \to L$ olduğundan (a sonluysa Sağ Limit ve Sol Limit, $a = -\infty$ ise Sonsuzdaki Limit anlamında) öyle bir $\alpha \in (a, d)$ vardır ki

$$|\, f(\alpha) - L \,| < \varepsilon, \qquad \text{özel olarak} \qquad f(\alpha) < L + \varepsilon = f(d)$$

olur. Aynı gerekçeyle $x \to b^-$ iken $f(x) \to L$ olduğundan $f(\beta) < f(d)$ olan bir $\beta \in (d, b)$ vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi $[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$ kapalı ve sınırlı aralığını ele alalım. f, (a,b) üzerinde türevlenebilir olduğundan orada süreklidir (Teorem 3.1); Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği f bu aralıkta ***maksimum*** *değerini bir $c\in[\alpha,\beta]$ noktasında alır. $d\in(\alpha,\beta)$ olduğundan*

$$f(c)\geq f(d)>f(\alpha),\qquad f(c)\geq f(d)>f(\beta)$$

olur; dolayısıyla $c\neq\alpha$ ve $c\neq\beta$, yani $c\in(\alpha,\beta)$'dır. Bu nokta f'nin bir yerel maksimum noktasıdır ve f orada türevlenebilirdir; Fermat teoremi gereği $f'(c)=0$'dır.
$f(d)<L$ durumu, f yerine $-f$ alınarak buna indirgenir: $-f$ de (a,b) üzerinde türevlenebilirdir, uç limitleri $-L$'dir, $(-f)(d)=-f(d)>-L$'dir ve $(-f)'(c)=0$ ile $f'(c)=0$ eşdeğerdir.
Durum 2: her iki limit de $+\infty$. *Herhangi bir $d\in(a,b)$ noktası seçelim ve $K=f(d)$ diyelim. $\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ olduğundan, öyle bir $\alpha\in(a,d)$ vardır ki $f(\alpha)>K$'dır. Benzer biçimde $\lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty$ olduğundan, öyle bir $\beta\in(d,b)$ vardır ki $f(\beta)>K$'dır.*
f, (a,b) üzerinde türevlenebilir olduğundan orada süreklidir (Teorem 3.1); özel olarak $[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$ kapalı ve sınırlı aralığında süreklidir. Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği f bu aralıkta ***minimum*** *değerini bir $c\in[\alpha,\beta]$ noktasında alır. $d\in(\alpha,\beta)$ olduğundan*

$$f(c)\leq f(d)=K<f(\alpha),\qquad f(c)\leq f(d)=K<f(\beta)$$

olur; dolayısıyla $c\neq\alpha$ ve $c\neq\beta$, yani $c\in(\alpha,\beta)$'dır. Bu c noktası f'nin (α,β) açık aralığındaki bir yerel minimum noktasıdır ve f orada türevlenebilirdir. Fermat teoremi gereği $f'(c)=0$ olur ve $c\in(\alpha,\beta)\subseteq(a,b)$'dir.
Her iki limitin $-\infty$ olduğu durum, f yerine $-f$ alınarak buna indirgenir: $-f$ türevlenebilirdir, uç limitleri $+\infty$'dur ve $(-f)'(c)=-f'(c)=0$ ile $f'(c)=0$ eşdeğerdir.
■

Bu genelleme, klasik Rolle teoreminin ulaşamadığı durumlarda iş görür. Örneğin $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x\to0^+$ ile $x\to+\infty$ iken $f(x)\to+\infty$'dur; uç noktalarda değer bile tanımlı olmadığı hâlde önerme $f'(c)=0$ olan bir c vaat eder ve gerçekten $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ türevi $c=1$'de sıfırlanır.
İkinci genelleme, Rolle teoremini art arda uygulamaktan doğar ve ileride Taylor formülünün ispatında kilit rol oynayacaktır.

i Rolle teoreminin art arda uygulanması

f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde $n-1$ kez türevlenebilir (Tanım 6.1) ve $[a,b]$ içinde $n\geq2$ tane farklı noktada sıfır olsun. Bu n sıfırın belirlediği $n-1$ ardışık alt aralığın her birinde Teorem 8.1 uygulanırsa, f' fonksiyonunun (a,b) içinde $n-1$ tane farklı sıfırı olduğu görülür. $n\geq3$ ise f' de (a,b) üzerinde türevlenebilirdir, dolayısıyla orada süreklidir (Teorem 3.1) ve aynı işlem ona uygulanabilir: f'' için $n-2$ sıfır elde edilir. Böylece $n-1$ adım sonra

$$f^{(n-1)}(c)=0$$

olan bir $c\in(a,b)$ bulunur.
Bu gözlemin karşıt tersi kök sayısını üstten sınırlamaya yarar: $f^{(n-1)}$ bir aralıkta hiç sıfırlanmıyorsa, f o aralıkta en çok $n-1$ kez sıfırlanabilir. Örneğin derecesi en çok $n-1$ olan ve sıfır polinomu olmayan bir p polinomunun n farklı kökü olamaz. Gerçekten $p(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ polinomunun n farklı kökü olsaydı, yukarıdaki gözlem gereği $p^{(n-1)}$ bir noktada sıfırlanırdı; oysa $p^{(n-1)}(x)=(n-1)!\,a_{n-1}$ sabit fonksiyonudur, dolayısıyla $a_{n-1}=0$ olurdu. Bu kez p'nin derecesi en çok $n-2$'dir ve hâlâ n (özel olarak $n-1$) farklı kökü vardır; aynı akıl yürütme $a_{n-2}=0$ verir. Adımı yineleyerek sırayla bütün katsayıların sıfır olduğu, yani p'nin sıfır polinomu olduğu sonucuna varırız — bu bir çelişkidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Lagrange Ortalama Değer Teoremi

Rolle teoremi, uç değerlerin eşit olmasını istiyordu. Bu ciddi bir kısıtlamadır; çoğu fonksiyon için $f(a) \neq f(b)$'dir. Ama bu durumda da doğru olmasını beklediğimiz bir şey vardır: eğri a'dan b'ye giderken **ortalama** olarak

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

eğimiyle yükselmiştir; ve yol boyunca anlık eğimin en az bir kez bu ortalamaya eşit olması gerekir. Sürekli hızlanıp yavaşlayan bir araç, iki saatte 180 km yol aldıysa, bir anda hızının tam olarak 90 km/sa olması gerekir. Bu, ortalama değer teoreminin tam ifadesidir ve Rolle teoreminin "eğik" biçimidir.
İspatın fikri şudur: grafiğin **kirişini** (chord) çıkararak eğriyi yatay duruma getiririz; kalan fonksiyon Rolle teoreminin koşullarını sağlar.

Teorem 8.2 (Lagrange Ortalama Değer Teoremi). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu*

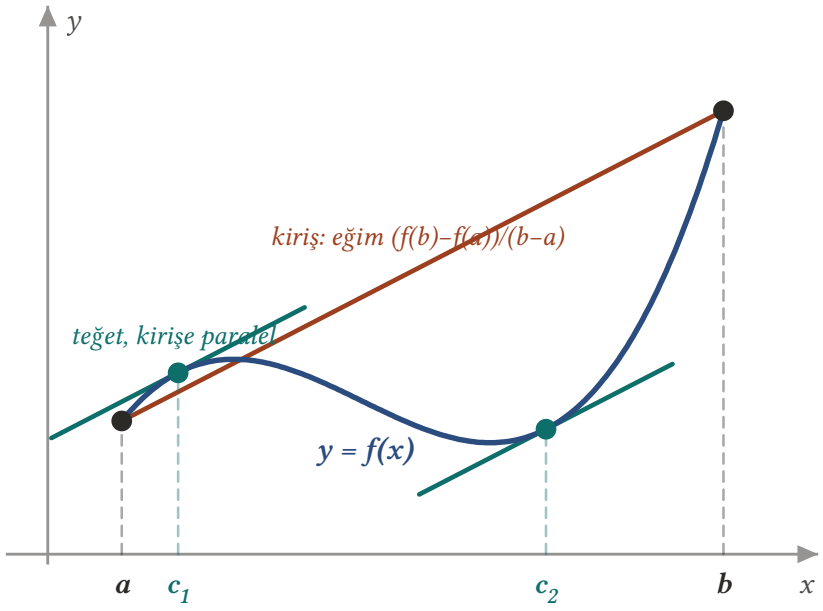
1. *$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli,*
2. *(a,b) açık aralığında türevlenebilir*

olsun. O hâlde

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olan en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. Eşdeğer olarak

$$f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a).$$



Şekil 8.2: Ortalama değer teoremi: uç noktaları birleştiren kirişe paralel *bir teğetin çizilebildiği en az bir* c *noktası vardır. İspat, eğri ile kiriş arasındaki düşey farkı ölçen yardımcı fonksiyona Rolle teoremini uygulamaktan ibarettir.*

İspat.
Yardımcı fonksiyonun kurulması. *$(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen kirişin denklemi*

$$y = \ell(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

doğrusudur. Eğri ile bu doğru arasındaki ***düşey farkı*** *ölçen fonksiyonu tanımlayalım:*

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - \ell(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a) \right].$$

Rolle teoreminin hipotezlerinin denetimi.

- *ℓ bir birinci dereceden polinomdur; $\mathbb{R}$'de süreklidir ve türevlenebilirdir. f ise hipotez gereği $[a,b]$'de sürekli, (a,b)'de türevlenebilirdir. Sürekli fonksiyonların farkı sürekli (bkz. Analiz 1), türevlenebilir fonksiyonların farkı türevlenebilir olduğundan (Teorem 3.2), g de $[a,b]$'de sürekli ve (a,b)'de türevlenebilirdir.*
- *Uç değerler:*

$$g(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 0 \right] = f(a) - f(a) = 0,$$

$$g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(b-a) \right] = f(b) - \left[\, f(a) + f(b) - f(a) \,\right] = f(b) - f(b) = 0.$$

Demek ki $g(a) = g(b) = 0$'dır.
Rolle teoreminin uygulanması. *Teorem 8.1 gereği $g'(c) = 0$ olan bir $c \in (a,b)$ vardır. Öte yandan ℓ'nin türevi sabit olan eğimidir:*

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \qquad x \in (a,b).$$

Bu ifadeyi $x = c$'de sıfıra eşitleyelim:

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Her iki tarafı $b-a \neq 0$ ile çarparak ikinci biçimi elde ederiz. İspat tamamlanmıştır.
■

i Geometrik yorum

Teorem geometrik olarak şunu söyler: **eğrinin üzerinde, teğetin kirişe paralel olduğu en az bir nokta vardır.** Kirişin eğimi $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c noktasındaki teğetin eğimi ise $f'(c)$'dir; teorem bu iki eğimin bir yerde eşitlendiğini söyler.
Kirişi yatay yapmak için $f(a) = f(b)$ alırsak, sağ taraf sıfır olur ve ifade tam olarak Teorem 8.1'e dönüşür. Yani Rolle teoremi ortalama değer teoreminin özel bir hâlidir; ilginç olan, ispatın ters yönde işlemesidir: özel hâlden genel hâl çıkarılmıştır.

Teoremin iki ek okunuşu ileride sık işimize yarayacak.
Fark biçimi. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ eşitliği, fonksiyonun iki noktadaki değerleri arasındaki farkı, **tek bir noktadaki türev** cinsinden verir. Türev hakkında bildiğimiz her şey (işareti, sınırlılığı) böylece doğrudan fark hakkında bilgiye dönüşür. Bölümün geri kalanındaki bütün sonuçlar bu gözlemin çeşitlemeleridir.
Ara parametreli biçim. $c \in (a,b)$ noktası $c = a + \theta\,(b-a)$ biçiminde yazılabilir; burada $\theta \in (0,1)$'dir. $b = a + h$ alınırsa teorem

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

biçimini alır. Bu, Taylor formülünün $n = 0$ mertebesindeki hâlidir; ileride h'nin yüksek kuvvetlerini de içerecek biçimde genelleştireceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Teorem yalnızca varlık söyler

Ortalama değer teoremi c'nin varlığını garanti eder; c'nin tek olduğunu söylemez ve nerede olduğunu belirtmez. Uygulamalarda c'yi hesaplamaya çalışmak çoğu zaman gereksizdir; önemli olan, c'nin (a,b) içinde olmasıdır. Bu bilgi, f' hakkında (a,b) üzerinde geçerli bir eşitsizlik biliyorsak, $f(b)-f(a)$ için de bir eşitsizlik elde etmemize yeter.

Örnek 8.4 (Ortalama Değer Teoreminin Sayısal Doğrulanması). $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu için $[0,4]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini denetleyiniz ve teoremin verdiği c noktasını bulunuz.

Çözüm.
Hipotezler. Karekök fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde süreklidir; özel olarak $[0,4]$ kapalı aralığında süreklidir. $(0,4)$ açık aralığında ise türevlenebilirdir ve

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x>0$$

olur (Teorem 5.3). $x=0$ noktasında türev yoktur: fark oranı

$$\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}} \underset{h\to 0^+}{\to} +\infty$$

biçiminde sonsuza gider. Bu bir sorun değildir; teorem türevlenebilirliği yalnızca **açık** $(0,4)$ aralığında ister. Bu örnek, hipotezlerdeki asimetrinin neden yararlı olduğunu bir kez daha gösterir.
Ortalama eğim. Kirişin eğimi

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4}=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.
***c*'nin hesaplanması.** Teoremin denklemi $f'(c)=\dfrac{1}{2}$'dir:

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{c}=2\Leftrightarrow \sqrt{c}=1\Leftrightarrow c=1.$$

$c=1$ gerçekten $(0,4)$ aralığındadır ve teorem doğrulanmıştır. Geometrik olarak: $y=\sqrt{x}$ eğrisine $(1,1)$ noktasında çizilen teğet, $(0,0)$ ile $(4,2)$ noktalarını birleştiren kirişe paraleldir.
■

8.4 Ortalama Değer Teoreminin Temel Sonuçları

Ortalama değer teoremi, **yerel** bir bilgiyi (her noktadaki türev) **global** bir bilgiye (fonksiyonun aralık üzerindeki davranışı) çeviren bir makinedir. Aşağıdaki dört sonuç bu makinenin en çok kullanılan çıktılarıdır ve hepsi aynı iki satırlık hesaba dayanır: iki nokta seç, aralarında ortalama değer teoremini uygula, türev hakkında bilinen şeyi kullan.

8.4.1 Türevi sıfır olan fonksiyon sabittir

Türevin sıfır olması "hiç değişmiyor" demektir; sezgi bunun sabitlik anlamına gelmesi gerektiğini söyler. Ama dikkat: bu **ispatlanması gereken** bir önermedir, tanım gereği doğru değildir. Türev bir noktadaki bilgidir; sabitlik ise iki nokta arasındaki ilişkidir. Aradaki köprüyü kuran şey ortalama değer teoremidir.

Sonuç 8.1 (Türevi Özdeş Sıfır Olan Fonksiyon Sabittir). *$I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık, $f:I\to\mathbb{R}$ bu aralıkta sürekli ve I'nın her iç noktasında türevlenebilir olsun. Her iç nokta x için $f'(x)=0$ ise, f fonksiyonu I üzerinde sabittir: bir $C\in\mathbb{R}$ vardır ki her $x\in I$ için $f(x)=C$'dir.*

İspat.
$x_1,x_2\in I$ ve $x_1<x_2$ olsun. I bir aralık olduğundan $[x_1,x_2]\subseteq I$'dır (bkz. Analiz 1). Bu durumda:

- f, $[x_1, x_2]$ *üzerinde süreklidir (hipotez gereği I'nın tamamında sürekli);*
- f, (x_1, x_2) *üzerinde türevlenebilirdir, çünkü bu aralığın noktaları I'nın iç noktalarıdır.*

Teorem 8.2 gereği öyle bir $c \in (x_1, x_2)$ vardır ki

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1).$$

c bir iç nokta olduğundan hipotez gereği $f'(c) = 0$'dır. Öyleyse

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0, \qquad \text{yani} \qquad f(x_2) = f(x_1).$$

x_1 ve x_2 noktaları I'da keyfî seçildiğinden, f bütün I üzerinde aynı değeri alır. Herhangi bir $x_0 \in I$ sabitleyip $C := f(x_0)$ dersek her $x \in I$ için $f(x) = C$ olur.

■

> ⚠ Tanım kümesi bir aralık olmalıdır
>
> Sonuçtaki "aralık" koşulu süs değildir; ispatta $[x_1, x_2] \subseteq I$ adımında kullanıldı. Tanım kümesi kopuk parçalardan oluşuyorsa sonuç yanlıştır.
> Örneğin $I = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ üzerinde tanımlı
>
> $$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$
>
> fonksiyonunu (yani sgn fonksiyonunun 0 dışındaki kısıtlamasını) ele alalım. Bu fonksiyon tanım kümesinin her noktasında türevlenebilirdir ve türevi özdeş olarak sıfırdır; buna karşılık sabit değildir. Doğru ifade şudur: **türevi özdeş sıfır olan fonksiyon, tanım kümesinin her bağlantılı parçası (her aralık bileşeni) üzerinde sabittir** — ama parçadan parçaya sabit değişebilir.

8.4.2 Türevleri eşit olan fonksiyonlar sabit farkla ayrılır

Sonuç 8.2 (Türevleri Eşit Olan Fonksiyonlar). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık; $f, g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I üzerinde sürekli ve I'nın her iç noktasında türevlenebilir olsun. Her iç nokta x için*

$$f'(x) = g'(x)$$

ise, öyle bir $C \in \mathbb{R}$ sabiti vardır ki her $x \in I$ için

$$f(x) = g(x) + C$$

olur.

İspat.
Yardımcı fonksiyonu tanımlayalım:

$$h : I \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = f(x) - g(x).$$

1. h hipotezleri sağlar. *f ve g, I üzerinde sürekli olduğundan farkları da süreklidir (bkz. Analiz 1). Aynı biçimde, f ve g her iç noktada türevlenebilir olduğundan farkları da türevlenebilirdir ve türev farkın türevidir (Teorem 3.2):*

$$h'(x) = f'(x) - g'(x), \qquad x \in I \text{ iç nokta}\ .$$

2. h'nin türevi sıfırdır. *Hipotez gereği her iç nokta x için $f'(x) = g'(x)$ olduğundan*

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

3. Sabitlik sonucunun uygulanması. *h fonksiyonu I aralığında sürekli, her iç noktada türevlenebilir ve türevi özdeş olarak sıfırdır. Sonuç 8.1 gereği h sabittir; bu sabite C diyelim. O hâlde her $x \in I$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) - g(x) = C, \qquad \text{yani} \qquad f(x) = g(x) + C.$$

■

Belirsiz integraldeki +C buradan gelir

Bu sonuç, ileride belirsiz integral tanımlarken kullanacağımız temel gerekçedir. F ve G, bir I aralığında f'nin iki **ilkel fonksiyonu** (antiderivative) ise, yani $F' = G' = f$ ise, Sonuç 8.2 gereği F ile G ancak bir sabitle farklıdır. Demek ki bir fonksiyonun bir aralıktaki bütün ilkelleri

$$F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

ailesinden ibarettir; $\int f(x)\,dx$ yazarken eklediğimiz keyfî $+C$ tam olarak bunu ifade eder. "Aralık" koşulunun burada da geçerli olduğuna dikkat edin: tanım kümesi kopuksa her parçada ayrı bir sabit gerekir.

8.4.3 Monotonluk testi

Türevin **işareti**, fonksiyonun artıp azaldığını söyler. Bu, türev hesabının en çok kullanılan pratik sonucudur ve yine ortalama değer teoreminin doğrudan bir çıktısıdır.

Sonuç 8.3 (Monotonluk Testi). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. O hâlde:*

1. *Her $x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde **kesin artandır** (Tanım 1.1).*
2. *Her $x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde **kesin azalandır**.*
3. *Her $x \in (a,b)$ için $f'(x) \geq 0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde **artandır** (bkz. Analiz 1), yani azalmayandır: $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
4. *Her $x \in (a,b)$ için $f'(x) \leq 0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde **azalandır**, yani artmayandır: $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Aynı ifadeler $[a,b]$ yerine herhangi bir I aralığı ve (a,b) yerine I'nın iç noktaları alınarak da geçerlidir.

İspat.
Dört durumun hepsi tek bir hesaptan çıkar. $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve $x_1 < x_2$ olsun. f, $[x_1,x_2]$ üzerinde sürekli ve $(x_1,x_2) \subseteq (a,b)$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Teorem 8.2 uygulanabilir: öyle bir $c \in (x_1,x_2)$ vardır ki

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1).$$

*Burada $x_2 - x_1 > 0$'dır; dolayısıyla bu eşitliğin sağ tarafının **işareti**, $f'(c)$'nin işaretiyle aynıdır. Şimdi dört durumu ayrı ayrı okuyalım.*
(1) $f'(c) > 0$ ve $x_2 - x_1 > 0$ olduğundan çarpım pozitiftir:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

$x_1 < x_2$ olan her nokta çifti için bu geçerli olduğundan, kesin artan fonksiyon tanımı gereği f kesin artandır.
(2) $f'(c) < 0$ ve $x_2 - x_1 > 0$ olduğundan çarpım negatiftir: $f(x_2) - f(x_1) < 0$, yani $f(x_1) > f(x_2)$; f kesin azalandır.
(3) $f'(c) \geq 0$ ve $x_2 - x_1 > 0$ olduğundan çarpım negatif olamaz: $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, yani $f(x_1) \leq f(x_2)$; f artandır (azalmayandır).
(4) $f'(c) \leq 0$ ve $x_2 - x_1 > 0$ olduğundan çarpım pozitif olamaz: $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, yani $f(x_1) \geq f(x_2)$; f azalandır (artmayandır).
Genel I aralığı için ispat kelimesi kelimesine aynıdır; tek kullanılan şey $x_1 < x_2$ olduğunda $[x_1,x_2] \subseteq I$ olmasıdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonucun kapalı aralığın **uç noktalarını** da kapsadığına dikkat edin: türev hakkında yalnızca (a,b)'de bilgi olmasına karşın, monotonluk $[a,b]$'nin tamamında elde edildi. Bunu sağlayan şey, ortalama değer teoreminin uçlarda yalnızca süreklilik istemesidir.

⚠ Karşıtı doğru değildir

"Kesin artan $\Longrightarrow f'>0$" önermesi **yanlıştır.** Karşı örnek $f(x)=x^3$'tür. Bu fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır: $x_1<x_2$ ise

$$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$$

çarpanlamasında ikinci parantez, x_1 ve x_2 ikisi birden sıfır olmadıkça pozitiftir (çünkü $x_2^2+x_1x_2+x_1^2=\left(x_2+\dfrac{x_1}{2}\right)^2+\dfrac{3x_1^2}{4}$), dolayısıyla fark pozitiftir. Buna karşılık $f'(x)=3x^2$ olup $f'(0)=0$'dır. Doğru olan karşıt ifade, kesin eşitsizliğin gevşemesiyle elde edilir: ***f* bir aralıkta azalmayan ve *x* noktasında türevlenebilir ise $f'(x)\geq 0$'dır.** Gerçekten, $h>0$ için $f(x+h)\geq f(x)$ olduğundan fark oranı

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$$

olur; $h<0$ için de pay ve payda birlikte işaret değiştirdiğinden oran yine negatif değildir. Limit sıralamayı koruduğundan (bkz. Analiz 1) $f'(x)\geq 0$ bulunur. Demek ki türevle monotonluk arasındaki tam ilişki şöyledir:

$$f'>0\Longrightarrow f \text{ kesin artan}\Longrightarrow f'\geq 0,$$

ve soldaki ok geri çevrilemez.

ℹ Monotonluk testini nasıl kullanırız

Uygulamada bir fonksiyonun artıp azaldığı aralıkları bulmak için türevin işaret tablosu çıkarılır. Örneğin $f(x)=x^3-3x$ için $f'(x)=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$'dir:

Aralık	f' işareti	f davranışı
$(-\infty,-1)$	$+$	kesin artan
$(-1,1)$	$-$	kesin azalan
$(1,+\infty)$	$+$	kesin artan

Buradan $x=-1$'in bir yerel maksimum, $x=1$'in bir yerel minimum noktası olduğu okunur. Bu fikri ilerideki bölümlerde birinci türev testi olarak sistemleştireceğiz.

8.4.4 Türevi sınırlı fonksiyon Lipschitz koşulunu sağlar

Ortalama değer teoreminin fark biçimi $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$, türevin **büyüklüğü** hakkındaki bilgiyi doğrudan fonksiyon değerlerinin farkına aktarır. Türev sınırlıysa fonksiyon "fazla hızlı" değişemez; bu, Analiz 1'de tanımladığımız Lipschitz koşuludur (bkz. Analiz 1).

Sonuç 8.4 (Sınırlı Türev Lipschitz Koşulunu Verir). *$I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I'nın her noktasında türevlenebilir olsun. Öyle bir $K\geq 0$ sayısı bulunsun ki her $x\in I$ için*

$$|\,f'(x)\,|\leq K$$

sağlansın. O hâlde f fonksiyonu I üzerinde K sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar:

$$|\,f(x)-f(y)\,|\leq K\,|\,x-y\,| \qquad \text{her}\quad x,y\in I\quad\text{için.}$$

İspat.

$x, y \in I$ olsun. $x = y$ ise eşitsizliğin iki tarafı da sıfırdır ve iddia doğrudur. Öyleyse $x \neq y$ varsayalım; gösterimin simetrisi nedeniyle $x < y$ olduğunu kabul edebiliriz (aksi hâlde x ile y'nin adları değiştirilir, eşitsizlikteki iki mutlak değer de bundan etkilenmez).
I bir aralık ve $x, y \in I$ olduğundan $[x, y] \subseteq I$'dır. f, I'nın her noktasında türevlenebilir olduğundan orada süreklidir (Teorem 3.1); özel olarak $[x, y]$ üzerinde sürekli ve (x, y) üzerinde türevlenebilirdir. Teorem 8.2 gereği öyle bir $c \in (x, y)$ vardır ki

$$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x).$$

Her iki tarafın mutlak değerini alalım ve çarpımın mutlak değerinin mutlak değerlerin çarpımı olduğunu kullanalım:

$$\mid f(y) - f(x) \mid = \mid f'(c) \mid \cdot \mid y - x \mid .$$

$c \in (x, y) \subseteq I$ olduğundan hipotez gereği $\mid f'(c) \mid \leq K$'dır. Negatif olmayan $\mid y - x \mid$ ile çarpım sıralamayı koruduğundan

$$\mid f(y) - f(x) \mid \leq K \mid y - x \mid$$

elde edilir. Bu, tam olarak istenen eşitsizliktir.
■

Bu sonucun bedava bir armağanı vardır: Lipschitz koşulunu sağlayan her fonksiyon düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1). Demek ki **bir aralıkta türevi sınırlı olan her fonksiyon o aralıkta düzgün süreklidir.** Düzgün sürekliliği doğrudan tanımdan göstermek çoğu zaman zahmetlidir; türev sınırlıysa bu tek satırda halledilir.

i İki örnek ve bir uyarı

1. $f(x) = \sin x$ için $\mid f'(x) \mid = \mid \cos x \mid \leq 1$'dir (Teorem 5.4). Öyleyse her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\mid \sin x - \sin y \mid \leq \mid x - y \mid .$$

2. $f(x) = \arctan x$ için $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ olup $0 < f'(x) \leq 1$'dir. Öyleyse $\mid \arctan x - \arctan y \mid \leq \mid x - y \mid$'dir; arctan fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün süreklidir.
Uyarı. Türevin sınırlı olması **gereklidir**, kaldırılamaz. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2}$ olduğundan $\dfrac{1}{2}$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar; buna karşılık $[0, 1]$ üzerinde sağlamaz: $y = 0$ ve $x > 0$ için

$$\frac{\mid f(x) - f(0) \mid}{\mid x - 0 \mid} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0^+}{\to} +\infty$$

olduğundan hiçbir K sabiti işi göremez. Nitekim $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ türevi $(0, 1)$ üzerinde sınırsızdır. Aynı biçimde $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlamaz: $\mid x^2 - y^2 \mid = \mid x + y \mid \mid x - y \mid$ olup $\mid x + y \mid$ çarpanı sınırsızdır ($y = x + 1$ alınırsa oran $\mid 2x + 1 \mid \to +\infty$ olur). Buna karşılık her sınırlı $[-R, R]$ aralığında $\mid f'(x) \mid = 2 \mid x \mid \leq 2R$ olduğundan koşul $K = 2R$ ile sağlanır.

8.5 Cauchy Ortalama Değer Teoremi

Lagrange'ın teoremi tek bir fonksiyonun bir aralıktaki toplam değişimini türeviyle bağlar. Peki **iki** fonksiyonun değişimlerini karşılaştırmak istersek? Yani $f(b) - f(a)$ ile $g(b) - g(a)$ arasındaki oran, türevlerin oranıyla nasıl ilişkilidir? Bu soru, ileride $\dfrac{0}{0}$ belirsizliklerini çözerken (L'Hôpital kuralı) ve Taylor formülünün kalan terimini incelerken karşımıza çıkacaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İlk akla gelen yol, iki fonksiyona ayrı ayrı ortalama değer teoremini uygulayıp oranı almaktır. Ne yazık ki bu yol kapalıdır; nedenini birazdan göreceğiz. Doğru yol, Rolle teoremini bu kez **iki fonksiyonu birlikte içeren** bir yardımcı fonksiyona uygulamaktır.

Teorem 8.3 (Cauchy Ortalama Değer Teoremi). *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. O hâlde*

$$f'(x_0)\,[\,g(b)-g(a)\,] = g'(x_0)\,[\,f(b)-f(a)\,]$$

olan en az bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.
Ayrıca her $x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ ise, $g(a) \neq g(b)$ olur ve sonuç oran biçiminde yazılabilir:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

İspat.
Yardımcı fonksiyonun kurulması. *Amacımız, uç noktalarda eşit değer alan bir fonksiyon üretip Teorem 8.1'ü uygulamaktır. Şu fonksiyonu tanımlayalım:*

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = f(x)\,[\,g(b)-g(a)\,] - g(x)\,[\,f(b)-f(a)\,]\,.$$

*Burada $g(b)-g(a)$ ve $f(b)-f(a)$ birer **sabit** sayıdır; φ, f ile g'nin sabit katsayılı bir doğrusal birleşimidir.*
1. Rolle teoreminin hipotezlerinin denetimi.

- *f ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan sabitlerle çarpımları ve farkları da süreklidir (bkz. Analiz 1); yani φ, $[a,b]$ üzerinde süreklidir.*
- *f ve g, (a,b) üzerinde türevlenebilir olduğundan φ de orada türevlenebilirdir (Teorem 3.2) ve*

$$\varphi'(x) = f'(x)\,[\,g(b)-g(a)\,] - g'(x)\,[\,f(b)-f(a)\,]\,.$$

- *Uç değerleri hesaplayalım. Önce $x = a$ için:*

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a)\,[\,g(b)-g(a)\,] - g(a)\,[\,f(b)-f(a)\,] \\ &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a).\end{aligned}$$

Şimdi $x = b$ için:

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= f(b)\,[\,g(b)-g(a)\,] - g(b)\,[\,f(b)-f(a)\,] \\ &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) \\ &= f(a)g(b) - f(b)g(a).\end{aligned}$$

İki hesabın sonucu aynıdır: $\varphi(a) = \varphi(b)$. (Her iki satırda da $f(a)g(a)$ ve $f(b)g(b)$ terimleri sadeleşti; geriye simetrik olmayan $f(a)g(b) - f(b)g(a)$ ifadesi kaldı.)
2. Rolle teoreminin uygulanması. *Teorem 8.1 gereği $\varphi'(x_0) = 0$ olan bir $x_0 \in (a,b)$ vardır. Yukarıda hesapladığımız türev ifadesinde $x = x_0$ koyup sıfıra eşitleyelim:*

$$f'(x_0)\,[\,g(b)-g(a)\,] - g'(x_0)\,[\,f(b)-f(a)\,] = 0,$$

yani

$$f'(x_0)\,[\,g(b)-g(a)\,] = g'(x_0)\,[\,f(b)-f(a)\,]\,.$$

3. Oran biçimi. *Şimdi her $x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Önce $g(a) \neq g(b)$ olduğunu görelim. Aksini varsayalım: $g(a) = g(b)$ olsun. g, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olduğundan Teorem 8.1 uygulanabilir ve $g'(\xi) = 0$ olan bir $\xi \in (a,b)$ bulunur. Bu, g''nün (a,b)'de hiç sıfırlanmaması varsayımıyla çelişir. Öyleyse $g(a) \neq g(b)$, yani $g(b)-g(a) \neq 0$'dır.*
Şimdi ilk eşitliğin iki tarafını sıfırdan farklı olan $g'(x_0)\,[\,g(b)-g(a)\,]$ çarpımına bölebiliriz ($g'(x_0) \neq 0$ hipotez gereğidir):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

■

i Lagrange teoremi bir özel hâldir

Cauchy teoreminde $g(x) = x$ alalım. Bu fonksiyon her yerde sürekli ve türevlenebilirdir, $g'(x) = 1 \neq 0$'dır, $g(b) - g(a) = b - a$'dır. Oran biçimi

$$\frac{f'(x_0)}{1} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

verir; bu tam olarak Teorem 8.2'dir. Demek ki üç teorem bir zincir oluşturur: Teorem 8.1'den Teorem 8.2, ondan da Teorem 8.3 elde edilir; zincirin her halkası, bir öncekine uygun bir yardımcı fonksiyonla indirgenir. Ters yönde okunduğunda ise her teorem bir sonrakinin özel hâlidir: Rolle teoremi Lagrange teoreminin $f(a) = f(b)$ hâli, Lagrange teoremi de Cauchy teoreminin $g(x) = x$ hâlidir.

⚠ İki ayrı ortalama değer teoremi uygulaması yetmez

Cauchy teoremini şöyle "ispatlamak" cazip gelebilir: f ve g'ye ayrı ayrı Lagrange teoremini uygulayalım,

$$f(b) - f(a) = f'(c_1)(b-a), \qquad g(b) - g(a) = g'(c_2)(b-a),$$

sonra oranlayalım. Buradan

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

çıkar; ama c_1 ile c_2'nin **aynı nokta olduğunu söyleyen hiçbir şey yoktur.** Cauchy teoreminin bütün gücü, tek bir x_0 noktasının hem pay hem payda için işe yaramasındadır; bu yüzden ispatta iki fonksiyonu birlikte içeren φ yardımcı fonksiyonu kurulmuştur. Örneğin $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$ için $[1, 2]$ aralığında Lagrange teoremi $c_1 = \dfrac{3}{2}$ ve $c_2 = \sqrt{\dfrac{7}{3}} \approx 1{,}528$ verir; bunlar farklı noktalardır ve aşağıda göreceğimiz gibi Cauchy teoreminin verdiği ortak nokta ikisinden de başkadır.

8.5.1 Parametrik eğri yorumu

Cauchy teoreminin geometrik anlamı, düzlemde bir **parametrik eğri** (parametric curve) düşünüldüğünde ortaya çıkar. $t \in [a, b]$ parametresi için

$$\gamma(t) = \big(\, g(t), f(t) \,\big)$$

noktasını düzlemde işaretleyelim; t, a'dan b'ye giderken $\gamma(t)$ bir eğri çizer. Bu eğrinin başlangıç noktası $\big(\, g(a), f(a) \,\big)$, bitiş noktası $\big(\, g(b), f(b) \,\big)$'dir. Bu iki noktayı birleştiren kirişin eğimi

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olur (düşey değişimin yatay değişime oranı). Öte yandan $t = x_0$ parametresine karşılık gelen noktada eğrinin **hız vektörü** $\big(\, g'(x_0), f'(x_0) \,\big)$'dır; teğet doğrusunun eğimi bu vektörün bileşenlerinin oranı, yani $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$'dır. Cauchy teoremi tam olarak şunu söyler: **parametrik eğrinin, kirişe paralel teğeti olan bir noktası vardır.** Lagrange teoreminin geometrik yorumunun, $g(t) = t$ parametrelendirmesiyle elde edilen özel hâli olduğu buradan da görülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 8.5 (Parametrik Eğri Üzerinde Cauchy Teoremi). **a)** $f(t) = \sin t$ ve $g(t) = \cos t$ fonksiyonlarını $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ aralığında ele alınız. Cauchy ortalama değer teoreminin verdiği x_0 noktasını bulunuz ve sonucu geometrik olarak yorumlayınız.
b) $f(t) = t^2$ ve $g(t) = t^3$ fonksiyonları için $[1, 2]$ aralığında aynı hesabı yapınız.

Çözüm.
a) sin ve cos fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve türevlenebilirdir (Teorem 5.4); özel olarak $[0, \frac{\pi}{2}]$ üzerinde sürekli, $(0, \frac{\pi}{2})$ üzerinde türevlenebilirdirler. Ayrıca $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ için $g'(t) = -\sin t \neq 0$'dır; demek ki oran biçimini kullanabiliriz.
Uç değerler:

$$f(0) = 0, \ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad g(0) = 1, \ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Sağ taraf:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0)} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1.$$

Sol taraf:

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t.$$

Denklemi çözelim: $-\cot x_0 = -1$, yani $\cot x_0 = 1$, yani $\tan x_0 = 1$. $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki tek çözüm

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

noktasıdır.
Geometrik yorum. $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ parametrelendirmesi birim çemberin birinci bölgedeki çeyrek yayını çizer: $t = 0$'da $(1, 0)$, $t = \frac{\pi}{2}$'de $(0, 1)$ noktasındayız ve bu iki noktayı birleştiren kirişin eğimi -1'dir. Bulduğumuz $x_0 = \frac{\pi}{4}$ parametresi yay üzerinde $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktasına karşılık gelir; çembere bu noktada çizilen teğet yarıçapa dik olduğu için eğimi -1'dir, yani kirişe paraleldir.
b) İki fonksiyon da polinomdur; $[1, 2]$ üzerinde sürekli, $(1, 2)$ üzerinde türevlenebilirdirler. $t \in (1, 2)$ için $g'(t) = 3t^2 \neq 0$'dır.
Uç değerler $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $g(1) = 1$, $g(2) = 8$'dir. Sağ taraf:

$$\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{4 - 1}{8 - 1} = \frac{3}{7}.$$

Sol taraf:

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}, \qquad t \neq 0.$$

Denklem:

$$\frac{2}{3x_0} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 14 = 9x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{14}{9}.$$

$\dfrac{14}{9} \approx 1{,}556$ olduğundan $x_0 \in (1, 2)$'dir ve teorem doğrulanmıştır. Bu değerin, aynı fonksiyonlara Lagrange teoremini ayrı ayrı uyguladığımızda bulunan $c_1 = \dfrac{3}{2}$ ve $c_2 = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$ sayılarının hiçbirine eşit olmadığına dikkat edin: Cauchy teoremi bağımsız bir ifadedir, iki Lagrange uygulamasının bileşimi değildir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Alıştırmalar

Alıştırma 8.1 (Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri Üzerine).

a) $f(x) = x(x-1)(x-2)$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığında Rolle teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz ve $f'(c) = 0$ olan bütün $c \in (0,2)$ noktalarını bulunuz.

b) Ortalama değer teoremini kullanarak her $x > 0$ için $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$ olduğunu gösteriniz.

c) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$ olduğunu gösteriniz. Eşitlik ne zaman gerçekleşir?

d) Her $x > 0$ için $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz. Aynı ifade $x < 0$ için de geçerli midir?

e) $x^5 + 2x - 1 = 0$ denkleminin tam olarak bir reel çözümü olduğunu ve bu çözümün $(0,1)$ aralığında bulunduğunu gösteriniz.

f) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir ve $f(a) = f(b) = 0$ olsun. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$f'(c) = \lambda f(c)$$

olan bir $c \in (a,b)$ bulunduğunu gösteriniz.

g) $f(t) = t^2 + 1$ ve $g(t) = t^3 - t$ fonksiyonları $[0,2]$ aralığında Cauchy ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağlar mı? Teoremin verdiği x_0 noktalarını bulunuz. Oran biçimi kullanılabilir mi?

Çözüm.
a) Çarpımı açalım:

$$f(x) = x(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

f bir polinom olduğundan $[0,2]$ üzerinde sürekli (bkz. Analiz 1) ve $(0,2)$ üzerinde türevlenebilirdir. Uç değerler $f(0) = 0$ ve $f(2) = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ olduğundan $f(0) = f(2)$'dir; üç hipotez de sağlanır.
Türev $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$'dir. $f'(c) = 0$ denklemini çözelim:

$$c = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$ olduğundan bu iki kök yaklaşık $0{,}423$ ve $1{,}577$'dir; her ikisi de $(0,2)$ aralığındadır. Demek ki teoremin vaat ettiği nokta bu örnekte tek değildir, iki tanedir. (Bu şaşırtıcı değil: f üç noktada sıfırlandığı için $[0,1]$ ve $[1,2]$ alt aralıklarının her birinde Rolle teoremi ayrı ayrı uygulanabilir.)
b) $x > 0$ sabit olsun ve $F(t) = \sqrt{1+t}$ fonksiyonunu $[0,x]$ aralığında ele alalım. F bu aralıkta süreklidir ve $(0,x)$ üzerinde türevlenebilirdir:

$$F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}.$$

Teorem 8.2 gereği öyle bir $c \in (0,x)$ vardır ki

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1+0} = F'(c)\,(x-0) = \frac{x}{2\sqrt{1+c}},$$

yani

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+c}}.$$

Şimdi $c > 0$ olduğundan $1 + c > 1$, dolayısıyla $\sqrt{1+c} > 1$ ve

$$\frac{x}{2\sqrt{1+c}} < \frac{x}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur (burada $x > 0$ olduğu kullanıldı: pozitif bir sayıyı büyük bir paydaya bölmek sonucu küçültür). Öyleyse

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

c) $f(t) = \arctan t$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

olur. Her t için $1 + t^2 \geq 1$ olduğundan $0 < f'(t) \leq 1$, özel olarak $| f'(t) | \leq 1$'dir. Sonuç 8.4'i $I = \mathbb{R}$ ve $K = 1$ ile uygularsak

$$| \arctan x - \arctan y | \leq | x - y |$$

elde ederiz.
Eşitlik yalnızca $x = y$ olduğunda gerçekleşir. Gerçekten $x < y$ olsun. Teorem 8.2 gereği bir $c \in (x, y)$ için

$$\arctan y - \arctan x = \frac{y - x}{1 + c^2}$$

olur. $c \neq 0$ ise $1 + c^2 > 1$ olduğundan fark kesin olarak $y - x$'ten küçüktür. $c = 0$ olabilmesi için $x < 0 < y$ olmalıdır; bu durumda farkı $(\arctan y - \arctan 0) + (\arctan 0 - \arctan x)$ biçiminde ikiye ayırıp her parçaya ortalama değer teoremini uygularsak ara noktalar $(0, y)$ ve $(x, 0)$ aralıklarında, yani sıfırdan farklı çıkar; her iki parçada kesin eşitsizlik geçerli olduğundan toplamda da kesin eşitsizlik elde edilir.
d) $h(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunu $I = (0, +\infty)$ aralığında ele alalım. Bu aralıkta h türevlenebilirdir; zincir kuralıyla (Teorem 4.1)

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

bulunur. $(0, +\infty)$ bir aralık olduğundan Sonuç 8.1 gereği h bu aralıkta sabittir. Sabiti belirlemek için kolay bir nokta seçelim: $x = 1$ için

$$h(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Demek ki her $x > 0$ için $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$'dir.
$x < 0$ için ifade **aynı** değildir. h' hesabı $(-\infty, 0)$ aralığında da geçerlidir, dolayısıyla h orada da sabittir; ama sabit farklı olabilir ve gerçekten farklıdır: $x = -1$ için

$$h(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Öyleyse $x < 0$ için $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$'dir. Bu, Sonuç 8.1'in tanım kümesinin **bir aralık** olmasını neden istediğinin somut bir örneğidir: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olmadığından iki parçada iki farklı sabit ortaya çıkar.
e) $f(x) = x^5 + 2x - 1$ olsun; f bir polinomdur, dolayısıyla $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve türevlenebilirdir.
Varlık. $f(0) = -1 < 0$ ve $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0$'dır. f, $[0, 1]$ üzerinde sürekli ve uçlardaki değerleri zıt işaretli olduğundan Bolzano Teoremi (Sıfır Yeri Teoremi) gereği $f(k) = 0$ olan bir $k \in (0, 1)$ vardır.
Teklik. f'nin $\alpha < \beta$ olan iki kökü olduğunu varsayalım. Teorem 8.1 gereği $f'(x_0) = 0$ olan bir $x_0 \in (\alpha, \beta)$ bulunmalıdır. Oysa

$$f'(x) = 5x^4 + 2 \geq 2 > 0$$

olduğundan f' hiçbir noktada sıfırlanmaz; çelişki. Demek ki f'nin en çok bir kökü vardır.
İki adım birlikte: denklemin tam olarak bir reel çözümü vardır ve bu çözüm $(0, 1)$ aralığındadır.
f) Yardımcı fonksiyonu şöyle seçelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = e^{-\lambda x} f(x).$$

Üstel fonksiyon her yerde sürekli ve türevlenebilir olduğundan (Teorem 5.2), F de $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilirdir (bkz. Analiz 1, Teorem 3.2). Uç değerler:

$$F(a) = e^{-\lambda a} f(a) = e^{-\lambda a} \cdot 0 = 0, \qquad F(b) = e^{-\lambda b} f(b) = 0.$$

Demek ki $F(a) = F(b) = 0$'dır ve Teorem 8.1 uygulanabilir: $F'(c) = 0$ olan bir $c \in (a,b)$ vardır. Çarpım kuralı ve zincir kuralıyla (Teorem 3.2, Teorem 4.1)

$$F'(x) = -\lambda e^{-\lambda x} f(x) + e^{-\lambda x} f'(x) = e^{-\lambda x} \left[\, f'(x) - \lambda f(x) \,\right].$$

$x = c$'de bu ifade sıfırdır. Üstel fonksiyon hiçbir zaman sıfır olmadığından ($e^{-\lambda c} > 0$), köşeli parantez içindeki ifade sıfır olmalıdır:

$$f'(c) - \lambda f(c) = 0, \qquad \text{yani} \qquad f'(c) = \lambda f(c).$$

$\lambda = 0$ alınırsa bu, Rolle teoreminin kendisine indirgenir.

g) İki fonksiyon da polinomdur; $[0,2]$ üzerinde sürekli ve $(0,2)$ üzerinde türevlenebilirdirler. Öyleyse Teorem 8.3'in hipotezleri sağlanır.

Uç değerler: $f(0) = 1$, $f(2) = 5$, $g(0) = 0$, $g(2) = 8 - 2 = 6$. Türevler: $f'(t) = 2t$, $g'(t) = 3t^2 - 1$. Teoremin eşitliği:

$$f'(x_0)\,\left[\, g(2) - g(0) \,\right] = g'(x_0)\,\left[\, f(2) - f(0) \,\right] \Leftrightarrow 2x_0 \cdot 6 = (3x_0^2 - 1) \cdot 4.$$

Düzenleyelim:

$$12x_0 = 12x_0^2 - 4 \Leftrightarrow 12x_0^2 - 12x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3x_0 - 1 = 0.$$

Kökler:

$$x_0 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}.$$

$\sqrt{21} \approx 4{,}583$ olduğundan kökler yaklaşık $1{,}264$ ve $-0{,}264$'tür. Bunlardan yalnızca $x_0 = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{6} \approx 1{,}264$ noktası $(0,2)$ aralığındadır; teoremin verdiği nokta budur.

Oran biçimi kullanılabilir mi? Dikkatli olmak gerekir: $g'(t) = 3t^2 - 1$ türevi $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577 \in (0,2)$ noktasında sıfırlanır; yani "g' hiç sıfırlanmıyor" hipotezi sağlanmaz. Bu örnekte $g(0) \neq g(2)$ olduğu ve bulunan noktada $g'(x_0) \neq 0$ olduğu için oranı sonradan yazmak yine de mümkündür, ama bu teoremin garantisi değildir. Çarpım biçimi her zaman güvenlidir; oran biçimi ancak g''nün (a,b)'de hiç sıfırlanmadığı bilindiğinde serbestçe kullanılabilir.

■

Bu bölümde ortalama değer teoremini kurduk ve doğrudan sonuçlarını çıkardık; ama teoremin asıl gücü, eşitsizlik ispatlarında ve limit hesaplarında ortaya çıkar. Bir sonraki bölümde $e^x \geq 1 + x$ türünden klasik eşitsizlikleri ortalama değer teoremiyle nasıl kanıtlayacağımızı ve teoremin yaklaşık hesaplarda nasıl kullanıldığını göreceğiz: Ortalama Değer Teoreminin Uygulamaları.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Ortalama Değer Teoreminin Uygulamaları

Bir önceki bölümde, Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri başlığı altında türev kuramının temel taşını kurduk: $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir bir f için

$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$$

olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ vardır. Bu eşitliğin görünüşü mütevazıdır, ama içinde çok güçlü bir fikir saklıdır: **bir fonksiyonun iki noktadaki değerleri arasındaki fark, türevin tek bir ara noktadaki değeriyle kontrol edilir.** Türevi nerede olursa olsun sınırlayabiliyorsak, fonksiyonun değerleri arasındaki farkı da sınırlayabiliriz demektir.
Bu bölümün konusu bu tek gözlemin sistemli kullanımıdır. Ortalama değer teoremi (mean value theorem), analiz derslerinde karşılaşılan eşitsizliklerin çok büyük bir kısmını üreten bir makinedir: $e^x\geq 1+x$, $|\sin x\,|\leq|\,x\,|$, $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$, $\ln(1+x)<x$, $|\arctan a-\arctan b\,|\leq|\,a-b\,|$ — bunların hepsi aynı üç satırlık şablonun farklı fonksiyonlarla çalıştırılmış hâlidir. Şablonu bir kez kurduktan sonra iş, doğru fonksiyonu ve doğru aralığı seçmeye indirgenir.
Aynı teorem yalnızca eşitsizlik üretmez. $\sqrt{101}$ gibi bir sayıyı **hata sınırıyla birlikte** hesaplamaya, bir denklemin kaç kökü olabileceğini sınırlamaya ve parçalı tanımlanmış fonksiyonların yapışma noktalarındaki türevini fark oranı limitini hiç hesaplamadan bulmaya da yarar. Bu bölümde şunları öğreneceğiz: eşitsizlik üretmenin genel yordamı; klasik eşitsizliklerin tam ispatları; yaklaşık hesapta hata kestirimi; Rolle teoremiyle köklerin ayrılması; ve ileride sık kullanacağımız **türev limiti teoremi**.

9.1 Eşitsizlik Üretmenin Genel Yordamı

Ortalama değer teoremi $f(b)-f(a)$ farkını $f'(c)(b-a)$ olarak yazar. Burada c'nin nerede olduğunu bilmeyiz — teorem yalnızca varlığını söyler. Ama çoğu zaman bu yeterlidir: c'nin nerede olduğunu bilmesek de $c\in(a,b)$ olduğunu biliriz, dolayısıyla f''ün (a,b) üzerindeki her sınırı $f'(c)$ için de geçerlidir. Aşağıdaki önerme, bölüm boyunca kullanacağımız bütün eşitsizliklerin ortak gövdesidir.

Önerme 9.1 (Türevin Sınırından Fonksiyonun Sınırına). *$a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun.*

1. *Her $x\in(a,b)$ için $m\leq f'(x)\leq M$ ise*

$$m\,(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M\,(b-a)$$

   olur.
2. *Her $x\in(a,b)$ için $m<f'(x)<M$ ise eşitsizlikler kesindir:*

$$m\,(b-a)<f(b)-f(a)<M\,(b-a).$$

> ***İspat.***
> *Ortalama değer teoreminin hipotezleri sağlanmaktadır; öyleyse öyle bir $c\in(a,b)$ vardır ki*
>
> $$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a).$$
>
> *(1) Varsayım gereği $m\leq f'(c)\leq M$'dir. $b-a>0$ olduğundan bu eşitsizliği $b-a$ ile çarpmak yönü korur (sıralamanın pozitif sayıyla çarpma altında korunması):*
>
> $$m\,(b-a)\leq f'(c)\,(b-a)\leq M\,(b-a).$$
>
> *Ortadaki ifade $f(b)-f(a)$'dır; iddia edilen budur.*
> *(2) Aynı hesap, $m<f'(c)<M$ kesin eşitsizliğiyle ve yine $b-a>0$ ile yapılır; pozitif bir sayıyla çarpmak kesin eşitsizliği de korur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Önermenin pratikte kullanılışı hep aynıdır. Kanıtlanacak eşitsizlik $A \le B$ biçiminde verilmişse şu adımlar izlenir:

1. **Fonksiyonu ve aralığı seç.** $B - A$ farkını bir $f(b) - f(a)$ farkına benzetecek bir f ve bir $[a, b]$ bul. Genellikle a, eşitliğin sağlandığı noktadır: $e^x \ge 1 + x$ için $a = 0$, $x^\alpha \le \alpha x + 1 - \alpha$ için $a = 1$.
2. **Hipotezleri doğrula.** f kapalı aralıkta sürekli, açık aralıkta türevlenebilir mi? Bu adım atlanamaz.
3. **Türevi sınırla.** $c \in (a, b)$ bilgisini kullanarak $f'(c)$'yi alttan ve üstten kıstır; eşitsizlik buradan "gelir".
4. **$b - a$ ile çarp ve işaretlere dikkat et.** $b - a$ pozitifse yön korunur; $x < 0$ gibi durumlarda $-x > 0$ olduğunu ayrıca söylemek gerekir.
5. **Eşitlik durumunu ayrı incele.** Kesin eşitsizlik ancak f' üzerindeki sınır kesin olduğunda gelir.

> **Hangi fonksiyonu seçmeli?**
>
> Eşitsizliğin iki tarafını $F(x) \ge G(x)$ diye yazıp $h = F - G$ farkına bakmak her zaman bir seçenektir; ama daha ekonomik bir yol çoğu kez elimizin altındadır: **eşitsizliğin bir tarafı zaten bir $f(b) - f(a)$ farkı biçimindedir.** $\ln b - \ln a$ farkı $f(t) = \ln t$'yi, $e^x - 1$ farkı $f(t) = e^t$'yi, $(1 + x)^\alpha - 1$ farkı $f(t) = (1 + t)^\alpha$'yı işaret eder. Fonksiyonu bu farktan okumak, aralığı da farkın uçlarından almak neredeyse her zaman doğru seçimdir.

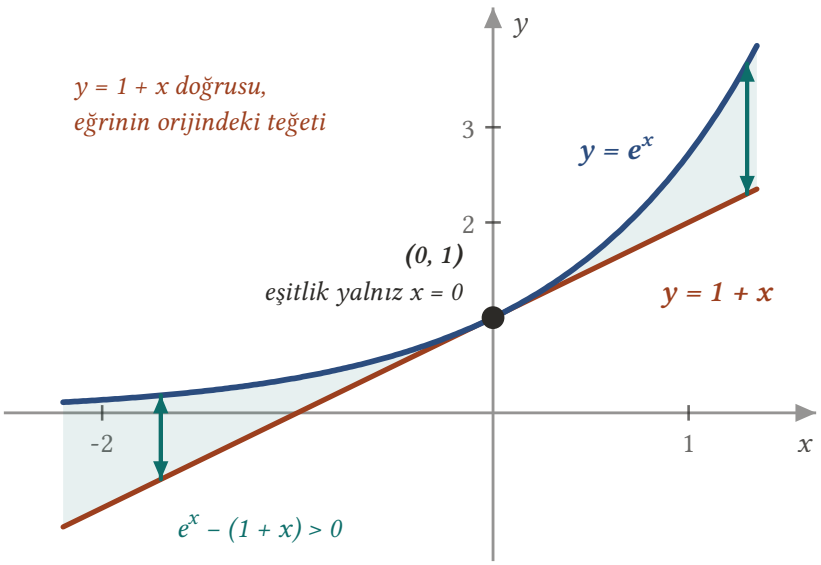
9.2 Üstel Fonksiyon: $e^x \ge 1 + x$

Analizin en çok kullanılan eşitsizliği herhâlde budur. Geometrik anlamı basittir: $y = e^x$ eğrisinin $(0, 1)$ noktasındaki teğeti $y = 1 + x$ doğrusudur ve eğri bu teğetin hep üstünde kalır. Şimdi bunu ortalama değer teoremiyle, teğet ya da konvekslik kavramlarına hiç başvurmadan kanıtlayacağız.

Örnek 9.1 (Üstel Eşitsizlik). Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$e^x \ge 1 + x$$

olduğunu ve eşitliğin **ancak ve ancak** $x = 0$ için sağlandığını gösteriniz.



Şekil 9.1: $e^x \ge 1 + x$ eşitsizliği ortalama değer teoreminin en kısa uygulamalarından biridir: 0 ile x arasında bir c için $e^x - 1 = e^c x$ yazılır ve iki tarafın işareti karşılaştırılır. Geometrik anlamı, üstel eğrinin orijindeki teğetinin üstünde kalmasıdır; iki grafik yalnızca $x = 0$ noktasında temas eder, başka her yerde aradaki düşey fark kesin olarak pozitiftir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$f(t) = e^t$ alalım. f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $f'(t) = e^t$'dir (Teorem 5.2); türevlenebilir olduğundan süreklidir de (Teorem 3.1). Ayrıca exp fonksiyonunun kesin artan olduğunu, yani $s < t \Rightarrow e^s < e^t$ olduğunu kullanacağız. Üç durum ayıralım.
Durum 1: $x = 0$. $e^0 = 1$ ve $1 + 0 = 1$'dir; iki taraf eşittir, eşitsizlik (eşitlikle) sağlanır.
Durum 2: $x > 0$. f'yi $[0, x]$ aralığında ele alalım. f bu aralıkta sürekli, $(0, x)$ üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $x_0 \in (0, x)$ vardır ki

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0), \qquad \text{yani} \qquad \frac{e^x - 1}{x} = e^{x_0}.$$

Buradan $e^x - 1 = x\, e^{x_0}$ olur. Şimdi $x_0 > 0$ olduğundan, exp kesin artan olduğu için $e^{x_0} > e^0 = 1$'dir. $x > 0$ olduğundan bu kesin eşitsizliği x ile çarpmak yönü korur:

$$e^x - 1 = x\, e^{x_0} > x \cdot 1 = x \quad \Rightarrow \quad e^x > 1 + x.$$

Durum 3: $x < 0$. Bu kez f'yi $[x, 0]$ aralığında ele alalım (aralığın sol ucu x, sağ ucu 0'dır). Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $x_0 \in (x, 0)$ vardır ki

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(x_0), \qquad \text{yani} \qquad \frac{1 - e^x}{-x} = e^{x_0},$$

buradan $1 - e^x = (-x)\, e^{x_0}$. Şimdi $x_0 < 0$ olduğundan $e^{x_0} < e^0 = 1$'dir. Burada $-x$ **pozitif** bir sayıdır; kesin eşitsizliği $-x$ ile çarpmak yönü korur:

$$1 - e^x = (-x)\, e^{x_0} < (-x) \cdot 1 = -x.$$

Her iki tarafı -1 ile çarpınca eşitsizlik yön değiştirir:

$$e^x - 1 > x \quad \Rightarrow \quad e^x > 1 + x.$$

Sonuç. Üç durumu birleştirirsek her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq 1 + x$ olur. Dahası $x \neq 0$ olan durumlarda eşitsizlik **kesin** çıktı, $x = 0$'da ise eşitlik var; öyleyse eşitlik ancak ve ancak $x = 0$ için sağlanır.
■

i Aynı eşitsizliğin logaritmik yüzü

$e^x \geq 1 + x$ eşitsizliğinde x yerine $x - 1$ yazalım: her $x \in \mathbb{R}$ için $e^{x-1} \geq x$ olur. $x > 0$ için iki tarafın da logaritmasını alabiliriz; ln kesin artan olduğundan eşitsizlik korunur:

$$\ln x \leq x - 1 \qquad (x > 0),$$

ve eşitlik ancak $x = 1$ için geçerlidir. Bu biçim, ileride Young eşitsizliğinde, entropi hesaplarında ve dizilerin büyüme hızlarının karşılaştırılmasında sürekli karşımıza çıkacaktır. Ayrıca $e^x \geq 1 + x$ eşitsizliğinde $x = \frac{1}{n}$ alıp — iki taraf da pozitif olduğundan — n-inci kuvvetlerini karşılaştırırsak $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ elde edilir; e sayısını tanımlayan dizinin (bkz. Analiz 1) yukarıdan sınırlı olduğunu bu eşitsizlik de gösterir.

9.3 Sinüs Eşitsizliği: $|\sin x| \leq |x|$

Sinüs fonksiyonunun türevi mutlak değerce 1'i aşmaz. Önerme 9.1 bunu doğrudan bir eşitsizliğe çevirir: sinüs, argümanından daha hızlı büyüyemez.

Örnek 9.2 (Sinüs Eşitsizliği). Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|\sin x| \leq |x|$$

olduğunu ve eşitliğin ancak $x = 0$ için sağlandığını gösteriniz. Özel olarak her $x \geq 0$ için $-x \leq \sin x \leq x$ olduğunu belirtiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$f(t) = \sin t$ alalım; f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $f'(t) = \cos t$'dir (Teorem 5.4).
$x = 0$ durumu. $\sin 0 = 0$ olduğundan $|\sin 0| = 0 = |0|$; eşitlik sağlanır.
$x > 0$ durumu. f, $[0, x]$ üzerinde sürekli ve $(0, x)$ üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $x_0 \in (0, x)$ vardır ki

$$\cos x_0 = f'(x_0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - \sin 0}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

yani

$$\sin x = x \cos x_0.$$

Her t için $|\cos t| \leq 1$ olduğundan buradan hemen

$$|\sin x| = x\,|\cos x_0| \leq x = |x|$$

çıkar ($x > 0$ olduğu için $|x| = x$). Eşitsizliği açarsak $-x \leq \sin x \leq x$ elde ederiz.
Kesinliği de görelim. İki alt durum vardır.
Alt durum $x \geq \frac{\pi}{2}$. Bu durumda $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$ olduğundan eşitsizlik zaten kesindir; ortalama değer teoremine bile gerek yoktur.
Alt durum $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Yukarıdaki x_0 noktası $(0, x) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ içindedir. Kosinüs $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ üzerinde kesin azalan olduğundan $0 < \cos x_0 < \cos 0 = 1$'dir. Öyleyse

$$|\sin x| = x \cos x_0 < x \cdot 1 = x = |x|.$$

Her iki alt durumda da $x > 0$ iken eşitsizlik kesindir.
$x < 0$ durumu. sin tek bir fonksiyondur: $\sin(-x) = -\sin x$, dolayısıyla $|\sin(-x)| = |\sin x|$. Ayrıca $|-x| = |x|$. $-x > 0$ olduğundan bir önceki duruma göre $|\sin(-x)| < |-x|$, yani $|\sin x| < |x|$ olur.
Sonuç. Her $x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \leq |x|$'dir ve $x \neq 0$ iken eşitsizlik kesindir; eşitlik ancak ve ancak $x = 0$ içindir. $x \geq 0$ için bu, tam olarak $-x \leq \sin x \leq x$ demektir.
■

⚠ Eşitsizliğin yönü ve tanım kümesi

$-x \leq \sin x \leq x$ biçimi **yalnızca $x \geq 0$ için** doğrudur; $x < 0$ alırsak $x < -x$ olacağından zincir anlamsızlaşır. Bütün $\mathbb{R}$'de geçerli olan doğru ifade mutlak değerli biçimdir: $|\sin x| \leq |x|$. Aynı gözlem ortalama değer teoremiyle üretilen bütün eşitsizlikler için geçerlidir: $b - a$ çarpanının işareti eşitsizliğin yönünü belirler; bu yüzden $x < 0$ durumu her seferinde ayrıca yazılır.

Bu eşitsizlik, sinüsün 1 sabitli bir **Lipschitz koşulu** (Lipschitz condition) sağladığının özel hâlidir; bölüm sonundaki alıştırmalarda $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ genel biçimini de kanıtlayacağız.

9.4 Bernoulli Eşitsizliğinin Genel Biçimi

Analiz 1'de Bernoulli eşitsizliğini doğal sayı üsleri için tümevarımla kanıtlamıştık (bkz. Analiz 1): $x \geq -1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Tümevarım, üs bir tam sayı olduğu sürece işe yarar; ama $\alpha = \frac{3}{2}$ ya da $\alpha = \sqrt{2}$ gibi bir üs söz konusu olduğunda çaresizdir. Ortalama değer teoremi bu engeli tümüyle kaldırır ve üstelik eşitsizliğin **hangi α değerlerinde yön değiştirdiğini** de gösterir.

Teorem 9.1 (Bernoulli Eşitsizliği, Gerçel Üslü Biçim). *$x > -1$ ve $x \neq 0$ olsun.*

1. *$\alpha > 1$ ya da $\alpha < 0$ ise*

   $$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x.$$

2. *$0 < \alpha < 1$ ise*

   $$(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$x = 0$ için her α'da eşitlik vardır. Özel olarak $\alpha > 1$ için $x > -1$ olan her x'te $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ geçerlidir ve eşitlik ancak ve ancak $x = 0$ içindir.

İspat.
$f(t) = (1+t)^\alpha$ alalım. Genel kuvvet fonksiyonunun türev kuralı gereği (Teorem 5.3) f, $(-1, \infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$f'(t) = \alpha\,(1+t)^{\alpha-1}.$$

Türevlenebilir olduğundan f bu aralıkta süreklidir (Teorem 3.1). $x = 0$ için $f(0) = 1 = 1 + \alpha \cdot 0$ olduğundan eşitlik açıktır. Şimdi $x \neq 0$ olan iki durumu ele alalım. Her ikisinde de anahtar gözlem, $u > 0$ ve $\beta \neq 0$ için u^β'nın 1 ile karşılaştırılmasının u'nun 1'e göre yerine ve β'nın işaretine bağlı olmasıdır:

$$u > 1 \Rightarrow \big(\ \beta > 0 \ \text{ ise } \ u^\beta > 1, \beta < 0 \ \text{ ise } \ u^\beta < 1\ \big), \qquad 0 < u < 1 \Rightarrow \big(\ \beta > 0 \ \text{ ise } \ u^\beta < 1, \beta < 0 \ \text{ ise } \ u^\beta > 1\ \big).$$

Durum $x > 0$. *f'yi $[0, x]$ aralığında ele alalım. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $c \in (0, x)$ vardır ki*

$$(1+x)^\alpha - 1 = f(x) - f(0) = f'(c)\,(x-0) = \alpha\,(1+c)^{\alpha-1}\,x.$$

Burada $c > 0$ olduğundan $1 + c > 1$'dir. Şimdi üç α aralığını ayrı ayrı inceleyelim.

- *$\alpha > 1$ ise $\alpha - 1 > 0$ ve $1 + c > 1$ olduğundan $(1+c)^{\alpha-1} > 1$. Bunu pozitif olan α ile çarparsak $\alpha(1+c)^{\alpha-1} > \alpha$; ardından pozitif olan x ile çarparsak $\alpha(1+c)^{\alpha-1}x > \alpha x$. Demek ki $(1+x)^\alpha - 1 > \alpha x$.*
- *$\alpha < 0$ ise $\alpha - 1 < 0$ ve $1 + c > 1$ olduğundan $(1+c)^{\alpha-1} < 1$. Bu kez α negatif olduğu için α ile çarpmak eşitsizliğin yönünü **çevirir**: $\alpha(1+c)^{\alpha-1} > \alpha$. Yine $x > 0$ ile çarparak $(1+x)^\alpha - 1 > \alpha x$ elde ederiz.*
- *$0 < \alpha < 1$ ise $\alpha - 1 < 0$ ve $1 + c > 1$ olduğundan $(1+c)^{\alpha-1} < 1$; pozitif α ile çarpmak yönü korur: $\alpha(1+c)^{\alpha-1} < \alpha$, ve $x > 0$ ile çarparak $(1+x)^\alpha - 1 < \alpha x$ buluruz.*

Durum $-1 < x < 0$. *Bu kez f'yi $[x, 0]$ aralığında ele alalım; $x > -1$ olduğundan bu aralık $(-1, \infty)$ içindedir. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $c \in (x, 0)$ vardır ki*

$$1 - (1+x)^\alpha = f(0) - f(x) = f'(c)\,\big(\ 0 - x\ \big) = \alpha\,(1+c)^{\alpha-1}\,(-x).$$

Burada $-1 < x < c < 0$ olduğundan $0 < 1 + c < 1$'dir; ayrıca $-x > 0$'dır.

- *$\alpha > 1$ ise $\alpha - 1 > 0$ ve $0 < 1 + c < 1$ olduğundan $(1+c)^{\alpha-1} < 1$; pozitif α ile çarpınca $\alpha(1+c)^{\alpha-1} < \alpha$ ve pozitif $-x$ ile çarpınca*

  $$1 - (1+x)^\alpha < \alpha\,(-x) = -\alpha x,$$

  yani $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$.
- *$\alpha < 0$ ise $\alpha - 1 < 0$ ve $0 < 1 + c < 1$ olduğundan $(1+c)^{\alpha-1} > 1$; negatif α ile çarpmak yönü çevirir: $\alpha(1+c)^{\alpha-1} < \alpha$. Buradan yine $1 - (1+x)^\alpha < -\alpha x$, yani $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$.*
- *$0 < \alpha < 1$ ise $\alpha - 1 < 0$ ve $0 < 1 + c < 1$ olduğundan $(1+c)^{\alpha-1} > 1$; pozitif α ile çarpınca $\alpha(1+c)^{\alpha-1} > \alpha$ ve pozitif $-x$ ile çarpınca $1 - (1+x)^\alpha > -\alpha x$, yani $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$.*

Böylece $x \neq 0$ olan bütün durumlarda iddia edilen kesin eşitsizlikler elde edilir. Son cümle de buradan çıkar: $\alpha > 1$ için $x \neq 0$ iken kesin eşitsizlik, $x = 0$ iken eşitlik vardır; öyleyse $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$'tir ve eşitlik ancak ve ancak $x = 0$ içindir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Tümevarımlı biçimle karşılaştırma

Bernoulli Eşitsizliği, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \geq -1$ için $(1+x)^n \geq 1+nx$ diyordu. Teorem 9.1 bunu $\alpha > 1$ olan bütün gerçel üslere genişletir ($n \geq 2$ için $\alpha = n$ alınır; $n = 0$ ve $n = 1$ hâllerinde iki taraf zaten eşittir). Genel biçim iki noktada daha güçlüdür:

- eşitliğin **yalnızca** $x = 0$'da olduğunu söyler (tümevarımlı ispat bunu kendiliğinden vermez);
- $0 < \alpha < 1$ için eşitsizliğin **ters döndüğünü** ortaya çıkarır; bu ters yön, birazdan göreceğimiz kuvvet ve Young eşitsizliklerinin kaynağıdır.

Buna karşılık genel biçim $x = -1$ noktasını dışarıda bırakır, çünkü $(1+t)^{\alpha-1}$ türevi orada tanımlı olmayabilir. $\alpha > 1$ ve $x = -1$ için eşitsizlik doğrudan denetlenir: $(1+x)^\alpha = 0$ ve $1 + \alpha x = 1 - \alpha < 0$'dır.

9.5 Kuvvet Eşitsizliği ve Young Eşitsizliği

Şimdi Bernoulli eşitsizliğinin "ters dönmüş" hâlini uygulamada en çok kullanılan biçimiyle yazalım. Bu eşitsizlik ilk bakışta teknik bir ayrıntı gibi görünür; oysa Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinin çıkış noktasıdır.

Lemma 9.1 (Kuvvet Eşitsizliği). *$0 < \alpha < 1$ olsun. Her $x > 0$ için*

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha)$$

olur; eşitlik ancak ve ancak $x = 1$ için sağlanır.

İspat.
$f(t) = t^\alpha$ alalım. Teorem 5.3 gereği f, $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$'dir; dolayısıyla süreklidir de. $\alpha - 1 < 0$ olduğuna dikkat edelim: bu, $t \mapsto t^{\alpha-1}$ dönüşümünün kesin azalan olması demektir, yani

$$t > 1 \Rightarrow t^{\alpha-1} < 1, \qquad 0 < t < 1 \Rightarrow t^{\alpha-1} > 1.$$

Durum $x = 1$. *$1^\alpha = 1$ ve $\alpha \cdot 1 + (1-\alpha) = 1$; eşitlik vardır.*
Durum $x > 1$. *f'yi $[1, x]$ aralığında ele alalım. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $c \in (1, x)$ vardır ki*

$$x^\alpha - 1 = f(x) - f(1) = f'(c)\,(x-1) = \alpha\, c^{\alpha-1}\,(x-1).$$

$c > 1$ olduğundan $c^{\alpha-1} < 1$, dolayısıyla $\alpha c^{\alpha-1} < \alpha$ ($\alpha > 0$ ile çarptık). $x - 1 > 0$ olduğundan bu kesin eşitsizliği $x - 1$ ile çarpmak yönü korur:

$$x^\alpha - 1 < \alpha\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad x^\alpha < \alpha x + (1-\alpha).$$

Durum $0 < x < 1$. *Bu kez f'yi $[x, 1]$ aralığında ele alalım. Öyle bir $c \in (x, 1)$ vardır ki*

$$1 - x^\alpha = f(1) - f(x) = f'(c)\,(1-x) = \alpha\, c^{\alpha-1}\,(1-x).$$

$0 < c < 1$ olduğundan $c^{\alpha-1} > 1$ ve dolayısıyla $\alpha c^{\alpha-1} > \alpha$. $1 - x > 0$ olduğundan

$$1 - x^\alpha > \alpha\,(1-x) \quad \Rightarrow \quad x^\alpha < 1 - \alpha + \alpha x = \alpha x + (1-\alpha).$$

Sonuç. *Her $x > 0$ için $x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha)$'dır; $x \neq 1$ iken eşitsizlik kesin çıktığından eşitlik ancak ve ancak $x = 1$ içindir.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Aynı eşitsizliğin Bernoulli'den okunuşu

Lemma 9.1 aslında Teorem 9.1 (2)'nin kılık değiştirmiş hâlidir. Gerçekten, $x > 0$ için $u = x - 1$ diyelim; $u > -1$'dir ve $0 < \alpha < 1$ olduğundan

$$x^\alpha = (1+u)^\alpha \le 1 + \alpha u = 1 + \alpha(x-1) = \alpha x + (1-\alpha)$$

olur; $u \neq 0$, yani $x \neq 1$ iken eşitsizlik kesindir. Doğrudan ispatı yine de ayrıca verdik: "eşitliğin sağlandığı noktayı aralığın bir ucu seç" tekniğini en temiz gösteren örneklerden biridir — burada o nokta 1, üstel eşitsizlikte 0 idi.

Şimdi bu lemmayı iki değişkenli çok daha kullanışlı bir biçime çevirelim.

Teorem 9.2 (Young Eşitsizliği). *$p > 1$ ve $q > 1$ sayıları*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

bağıntısını sağlasın (bu durumda p ile q'ya eşlenik üsler *denir). O hâlde her $a \ge 0$ ve $b \ge 0$ için*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur; eşitlik ancak ve ancak $a^p = b^q$ olduğunda sağlanır.

İspat.
Sınır durumlar. *$a = 0$ ise sol taraf 0, sağ taraf $\frac{b^q}{q} \ge 0$'dır; eşitsizlik geçerli, eşitlik ise ancak $b = 0$, yani $a^p = 0 = b^q$ iken sağlanır. $b = 0$ durumu simetriktir. Bundan sonra $a, b > 0$ varsayalım.*
Kuvvet eşitsizliğinin uygulanışı. *$\alpha = \dfrac{1}{p}$ alalım. $p > 1$ olduğundan $0 < \alpha < 1$'dir ve*

$$1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

olur. Lemma 9.1'ni

$$x = \frac{a^p}{b^q} > 0$$

noktasında uygulayalım:

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{1/p} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}.$$

Düzenleme. *Sol taraf $\dfrac{a}{b^{q/p}}$'dir. Şimdi eşitsizliğin iki tarafını da pozitif olan b^q ile çarpalım:*

$$a \cdot b^{\,q - \frac{q}{p}} \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Soldaki üssü sadeleştirelim:

$$q - \frac{q}{p} = q\left(1 - \frac{1}{p}\right) = q \cdot \frac{1}{q} = 1.$$

Öyleyse sol taraf tam olarak ab'dir ve $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ elde edilir.
Eşitlik durumu. *Lemma 9.1'nde eşitlik ancak ve ancak $x = 1$ iken sağlanıyordu. Burada $x = \dfrac{a^p}{b^q}$ olduğundan, $a, b > 0$ hâlinde eşitlik ancak ve ancak $a^p = b^q$ olduğunda geçerlidir; sınır durumlarda da koşul aynıdır.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Young eşitsizliği ne işe yarar?

Young eşitsizliği bir **çarpımı iki toplanana bölme** aracıdır: ab gibi kontrol edilmesi zor bir çarpım, a ile b'nin ayrı ayrı kuvvetleri cinsinden yukarıdan sınırlanır. $p = q = 2$ alındığında tanıdık bir eşitsizliğe indirgenir:

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

ki bu da $(a-b)^2 \geq 0$'ın başka bir yazılışıdır. Genel p, q için ise Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinin ispatındaki tek gerçek adımdır; bu eşitsizlikleri integraller için ileride ayrıca kuracağız.

9.6 Logaritma Eşitsizlikleri

Logaritmanın türevi $\frac{1}{t}$'dir ve bu türev, t büyüdükçe küçülür. Önerme 9.1 bu basit gözlemi, sayısal analizde ve seri yakınsaklık testlerinde çok kullanılan iki taraflı bir kestirime çevirir.

Örnek 9.3 (Logaritma için İki Taraflı Kestirim). Aşağıdakileri gösteriniz.

a) Her $x > 0$ için

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

b) $b > a > 0$ için

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Çözüm.
a) $f(t) = \ln(1+t)$ alalım. $t > -1$ için $1 + t > 0$ olduğundan f, $(-1, \infty)$ üzerinde tanımlıdır; zincir kuralı (Teorem 4.1) ve logaritmanın türevi (Teorem 5.1) gereği bu aralıkta türevlenebilirdir ve

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

$x > 0$ verilsin. f, $[0, x]$ üzerinde sürekli ve $(0, x)$ üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $c \in (0, x)$ vardır ki

$$\ln(1+x) - \ln 1 = f'(c)\,(x-0) = \frac{x}{1+c}, \qquad \text{yani} \qquad \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

Şimdi $0 < c < x$ olduğundan $1 < 1 + c < 1 + x$'tir. Pozitif sayılarda ters alma sıralamayı çevirir:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1.$$

Bu kesin eşitsizlikleri pozitif olan x ile çarparsak

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} = \ln(1+x) < x$$

elde ederiz. Bu tam olarak istenen eşitsizliktir.
b) Bu kez $f(t) = \ln t$ alalım; f, $(0, \infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $f'(t) = \frac{1}{t}$'dir (Teorem 5.1). $b > a > 0$ verilsin; f, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki

$$\ln b - \ln a = f'(c)\,(b-a) = \frac{b-a}{c}.$$

$a < c < b$ olduğundan $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$'dır. $b - a > 0$ ile çarparsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

bulunur. (Son adımda logaritmanın $\ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$ özelliğini kullandık.)
Bu iki sonuç birbirinden bağımsız değildir: (b)'de $a = 1$ ve $b = 1 + x$ alırsak $b - a = x$ olur ve tam olarak (a) elde edilir. Tersine (a)'da $x = \frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$ almak da (b)'yi verir.
■

i e sayısını iki taraftan kıstırmak

Örnek 9.3 (b)'yi $a = n$, $b = n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) için yazalım:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Soldaki eşitsizliği $n + 1$ ile, sağdakini n ile çarpalım:

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \qquad \text{ve} \qquad 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Logaritma kurallarıyla bunlar $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 = \ln e$ ve $\ln e = 1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ demektir. $\ln$ kesin artan olduğundan

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

elde edilir. Böylece e sayısını tanımlayan dizinin (bkz. Analiz 1, e Dizisi Artan ve Sınırlıdır) hem her zaman e'nin altında kaldığını hem de e'ye ne kadar yavaş yaklaştığını görmüş oluruz: iki sınır arasındaki boşluk n ile ters orantılı olarak kapanır.

Logaritma kestiriminden, ileride kullanacağımız küçük ama işlek bir sonuç daha çıkar: $x \to 0^+$ iken $x \ln x \to 0$'dır. Gerçekten, $0 < x < 1$ için Örnek 9.1'in logaritmik biçimi ($\ln u \le u - 1$) $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ noktasında

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 < \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \text{yani} \qquad -\ln x < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

verir. Buradan $0 < -x \ln x < 2\sqrt{x}$ olur ve sıkıştırma teoremiyle (bkz. Analiz 1) $x \ln x \to 0$ elde edilir.

9.7 Arktanjant ve Lipschitz Türü Kestirimler

Bir fonksiyonun türevi sınırlıysa, fonksiyon değerleri argümanlardan daha hızlı ayrılamaz. Bu, ortalama değer teoreminin belki de en sık kullanılan sonucudur ve düzgün sürekliliğe (uniform continuity) doğrudan bağlanır.

Örnek 9.4 (Arktanjant için Lipschitz Kestirimi). Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$$

olduğunu, dahası $a \neq b$ iken eşitsizliğin **kesin** olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(t) = \arctan t$ alalım. Ters fonksiyonun türevi kuralı (Teorem 4.2) tan fonksiyonunun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ üzerindeki tersine uygulandığında (Teorem 5.5)

$$f'(t) = \frac{1}{1 + t^2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

verir. Her t için $1 + t^2 \ge 1$ olduğundan $0 < f'(t) \le 1$'dir ve **eşitlik yalnız $t = 0$ noktasında** olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

$a = b$ ise iki taraf da 0'dır; eşitsizlik (eşitlikle) sağlanır. Bundan sonra $a \neq b$ olsun ve genelliği bozmadan $b < a$ varsayalım (aksi hâlde a ile b'nin rollerini değiştiririz; iki taraf da a ile b'de simetriktir).
Durum 1: $0 \notin (b, a)$. Bu durumda (b, a) aralığındaki hiçbir nokta 0 değildir. f, $[b, a]$ üzerinde sürekli ve (b, a) üzerinde türevlenebilirdir; ortalama değer teoremi gereği öyle bir $c \in (b, a)$ vardır ki

$$\arctan a - \arctan b = \frac{a - b}{1 + c^2}.$$

$c \neq 0$ olduğundan $1 + c^2 > 1$'dir, dolayısıyla $0 < \dfrac{1}{1 + c^2} < 1$. $a - b > 0$ ile çarparsak

$$0 < \arctan a - \arctan b < a - b,$$

yani $|\arctan a - \arctan b| < |a - b|$.
Durum 2: $b < 0 < a$. Farkı iki parçaya ayıralım:

$$\arctan a - \arctan b = \big(\arctan a - \arctan 0\big) + \big(\arctan 0 - \arctan b\big).$$

$[0, a]$ aralığında ortalama değer teoremini uygularsak, bulunan ara nokta $(0, a)$ içinde ve dolayısıyla sıfırdan farklıdır; Durum 1'deki hesabın aynısı $0 < \arctan a - \arctan 0 < a$ verir. Aynı biçimde $[b, 0]$ aralığında $0 < \arctan 0 - \arctan b < -b$ elde edilir. İki kesin eşitsizliği toplarsak

$$0 < \arctan a - \arctan b < a + (-b) = a - b,$$

yani yine $|\arctan a - \arctan b| < |a - b|$.
Sonuç. Her a, b için $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$ geçerlidir ve $a \neq b$ iken eşitsizlik kesindir.
■

Bu örnek arctan fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde $K = 1$ sabitiyle bir Lipschitz koşulu sağladığını söyler (bkz. Analiz 1). Buradan Lipschitz Koşulu Düzgün Süreklilik Gerektirir gereği arctan'ın $\mathbb{R}$ üzerinde **düzgün sürekli** olduğu çıkar — üstelik hiçbir ε–δ hesabı yapmadan, yalnızca türevinin sınırlı olduğunu görerek. Aynı akıl yürütme türevi sınırlı olan her fonksiyon için işler; alıştırmalarda sin ve cos için de kuracağız.

⚠ Hangi kümede sınırlı olduğu önemlidir

Bu tekniğin çalışması için türevin **bir aralık üzerinde sınırlı** olması gerekir; sürekli olması gerekmez. Aralığı belirtmek ise zorunludur: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun türevi $-\frac{1}{x^2}$, $(0, 1)$ üzerinde sınırsızdır ve nitekim f bu aralıkta düzgün sürekli değildir; buna karşılık aynı fonksiyon $[1, \infty)$ üzerinde $|f'| \leq 1$ sağlar ve orada Lipschitz'tir.

9.8 Yaklaşık Hesap ve Hata Kestirimi

Ortalama değer teoreminin sayısal yüzü şudur: $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$ eşitliğinde $f'(c)$'yi alttan ve üstten kıstırırsak, $f(b)$'yi **iki sayı arasına hapsetmiş** oluruz. Bilinen bir $f(a)$ değerinden yola çıkarak bilinmeyen bir $f(b)$'yi bu şekilde, hata payıyla birlikte hesaplayabiliriz.

Örnek 9.5 (Kök Değerlerinin Hata Sınırıyla Hesabı).

a) $\sqrt{101}$ sayısını, hatası 0,001'den küçük olacak biçimde iki rasyonel sayı arasına yerleştiriniz.

b) Aynı yöntemle $\sqrt[3]{28}$ için bir kestirim yapınız.

Çözüm.
a) $f(t) = \sqrt{t}$ alalım. Teorem 5.3 gereği f, $(0, \infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

f'yi $[100, 101]$ aralığında ele alalım; $f(100) = 10$ değerini biliyoruz. Ortalama değer teoremi gereği öyle bir $c \in (100, 101)$ vardır ki

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sqrt{101}-10=f(101)-f(100)=f'(c)\,(101-100)=\frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Şimdi c'yi kıstıralım. $100<c<101$ olduğundan, karekök kesin artan olduğu için $10<\sqrt{c}<\sqrt{101}$'dir. Sağdaki $\sqrt{101}$ henüz bilmediğimiz sayıdır; onu kaba bir üst sınırla değiştirelim. $10{,}1^2=102{,}01>101$ olduğundan $\sqrt{101}<10{,}1$'dir. Öyleyse

$$10<\sqrt{c}<10{,}1\quad\Rightarrow\quad 20<2\sqrt{c}<20{,}2\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{20{,}2}<\frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{20}.$$

Bunu yukarıdaki eşitlikte kullanırsak

$$\frac{1}{20{,}2}<\sqrt{101}-10<\frac{1}{20},\qquad\text{yani}\qquad 10+\frac{1}{20{,}2}<\sqrt{101}<10{,}05.$$

$\frac{1}{20{,}2}=0{,}049504\ldots$ olduğundan

$$10{,}0495<\sqrt{101}<10{,}0500.$$

İki sınır arasındaki uzaklık $0{,}0005$'i aşmaz; dolayısıyla örneğin aralığın ortasına yakın bir değer alıp $\sqrt{101}\approx 10{,}0497$ dersek hatamız $0{,}0003$'ü aşmaz — istenen $0{,}001$ sınırının epeyce altındayız. (Gerçek değer $10{,}049875\ldots$'tir.)

Dikkat edilecek nokta şudur: burada $\sqrt{101}$'in ne olduğunu **bilmeden**, yalnızca c'nin $(100,101)$ aralığında olduğunu bilerek hem bir yaklaşık değer hem de bir hata sınırı ürettik; hata sınırının kaynağı, türevin bu aralıktaki en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farktır.

b) $g(t)=t^{1/3}$ alalım; $g'(t)=\frac{1}{3}t^{-2/3}=\dfrac{1}{3\,t^{2/3}}$'dür. g'yi $[27,28]$ aralığında ele alalım; $g(27)=3$'tür. Ortalama değer teoremi gereği bir $c\in(27,28)$ için

$$\sqrt[3]{28}-3=\frac{1}{3\,c^{2/3}}.$$

$27<c<28$ olduğundan $c^{2/3}>27^{2/3}=9$'dur. Üst sınır için $3{,}04^3=28{,}094\ldots>28$ gözleminden $\sqrt[3]{28}<3{,}04$, dolayısıyla $c^{2/3}<28^{2/3}=\left(\sqrt[3]{28}\right)^2<3{,}04^2=9{,}2416$ elde edilir. Öyleyse

$$\frac{1}{3\cdot 9{,}2416}<\frac{1}{3\,c^{2/3}}<\frac{1}{3\cdot 9}\quad\Rightarrow\quad 3{,}0360<\sqrt[3]{28}<3{,}0371;$$

hata payı $0{,}0011$'dir. (Gerçek değer $3{,}036589\ldots$'tir.)

■

Yöntemin özü

Yaklaşık hesapta izlenen yol her seferinde aynıdır: **değeri bilinen en yakın "güzel" noktayı a seç, hedefi b al, f''ü $[a,b]$ üzerinde kıstır.** Aralık ne kadar dar olursa türevin salınımı o kadar az, hata sınırı o kadar küçük olur. İleride Taylor formülünü kurduğumuzda bu fikrin genel hâlini göreceğiz; ortalama değer teoremi, Taylor formülünün birinci mertebeden özel hâlidir.

9.9 Köklerin Ayrılması

Şimdiye kadar ortalama değer teoremini eşitsizlik üretmek için kullandık. Rolle teoremi ise farklı bir işe yarar: bir fonksiyonun **kaç kökü olabileceğini** yukarıdan sınırlar. Fikir tek cümlede özetlenebilir: fonksiyonun iki kökü arasında türevin mutlaka bir kökü vardır; öyleyse türevin kökleri azsa fonksiyonun kökleri de azdır.

Önerme 9.2 (Kök Sayısının Türevle Sınırlanması). *$I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. f' fonksiyonunun I içinde en çok n tane kökü varsa, f fonksiyonunun I içinde en çok $n+1$ tane kökü vardır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Tersini varsayalım: f'nin I içinde en az $n+2$ tane farklı kökü olsun ve bunlardan $n+2$ tanesini

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$$

diye sıralayalım; her i için $f(x_i) = 0$'dır.
$1 \le i \le n+1$ olan her i için $[x_i, x_{i+1}]$ aralığını ele alalım. I bir aralık ve $x_i, x_{i+1} \in I$ olduğundan $[x_i, x_{i+1}] \subseteq I$'dır. f, I üzerinde türevlenebilir olduğundan bu kapalı aralıkta türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir (Teorem 3.1); özel olarak $[x_i, x_{i+1}]$ üzerinde sürekli ve (x_i, x_{i+1}) üzerinde türevlenebilirdir. Ayrıca $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$'dır. Rolle teoremi gereği öyle bir

$$c_i \in (x_i, x_{i+1}) \quad \text{vardır ki} \quad f'(c_i) = 0.$$

Böylece $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ noktalarını elde ettik. Bu noktalar birbirinden farklıdır: $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ ve $c_j \in (x_j, x_{j+1})$ olmak üzere $i < j$ ise $c_i < x_{i+1} \le x_j < c_j$'dir. Demek ki f' fonksiyonunun I içinde en az $n+1$ tane farklı kökü vardır. Bu, f''ün en çok n kökü olduğu varsayımıyla çelişir.
■

En sık kullanılan iki özel hâl şudur: f''ün hiç kökü yoksa f'nin en çok bir, f''ün tam bir kökü varsa f'nin en çok iki kökü vardır. Bu tür argümanlara **köklerin ayrılması** denir; kök sayısını sınırlamakla kalmayıp her kökü kendi aralığına hapsetmeye de yararlar.

Örnek 9.6 (Kök Sayısını Belirleme). Aşağıdaki denklemlerin gerçel kök sayılarını belirleyiniz.

a) $x^5 + 5x + 1 = 0$.

b) $x^3 - 3x + 1 = 0$.

c) $c \in \mathbb{R}$ herhangi bir sabit olmak üzere $x^4 - 4x + c = 0$.

d) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e^x = ax + b$.

Çözüm.
a) $p(x) = x^5 + 5x + 1$ olsun. Polinom olarak p bütün $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$p'(x) = 5x^4 + 5 = 5(x^4 + 1).$$

Her x için $x^4 \ge 0$ olduğundan $p'(x) \ge 5 > 0$'dır; yani p' fonksiyonunun hiç kökü yoktur. Önerme 9.2 ($n = 0$) gereği p'nin en çok bir kökü vardır.
En az bir kökü olduğunu da görelim: p süreklidir, $p(-1) = -1 - 5 + 1 = -5 < 0$ ve $p(0) = 1 > 0$'dır. Ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $(-1, 0)$ aralığında bir kök vardır. Öyleyse denklemin **tam olarak bir** gerçel kökü vardır ve bu kök $(-1, 0)$ aralığındadır.
b) $q(x) = x^3 - 3x + 1$ olsun. $q'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ olduğundan q''nün tam iki kökü vardır: -1 ve 1. Önerme 9.2 ($n = 2$) gereği q'nun en çok üç kökü vardır.
Üç kökün gerçekten var olduğunu işaret değişimleriyle gösterelim:

$$q(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0, \quad q(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 > 0,$$

$$q(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0, \quad q(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0.$$

Bolzano Teoremi (Sıfır Yeri Teoremi) gereği $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ ve $(1, 2)$ aralıklarının her birinde birer kök vardır. Bu üç aralık ayrık olduğundan kökler farklıdır. Öyleyse q'nun **tam olarak üç** gerçel kökü vardır ve her biri kendi aralığına ayrılmıştır.
c) $r(x) = x^4 - 4x + c$ olsun. $r'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$'dir. İkinci çarpanın diskriminantı $1 - 4 = -3 < 0$ olduğundan $x^2 + x + 1$ hiç sıfırlanmaz; demek ki r''nün tek kökü $x = 1$'dir. Önerme 9.2 ($n = 1$) gereği r'nin **her c değeri için en çok iki** gerçel kökü vardır. (Kaç tane olduğu c'ye bağlıdır: $r(1) = c - 3$ olduğundan $c < 3$ için iki, $c = 3$ için bir, $c > 3$ için hiç kök yoktur.)
d) $h(x) = e^x - ax - b$ olsun; denklemin kökleri h'nin kökleridir. h türevlenebilirdir ve $h'(x) = e^x - a$'dır.

- $a \le 0$ ise her x için $e^x > 0 \ge a$, yani $h'(x) > 0$; h''nün kökü yoktur ve h'nin **en çok bir** kökü vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $a > 0$ ise $h'(x) = 0$ denklemi $e^x = a$, yani $x = \ln a$ verir; exp birebir olduğundan bu tek çözümdür. Demek ki h''nün tam bir kökü vardır ve h'nin **en çok iki** kökü vardır.

Sonuç şudur: bir üstel eğri ile bir doğru en çok iki noktada kesişir.
■

9.10 Türev Limiti Teoremi

Bölümü ortalama değer teoreminin çok başka türden bir sonucuyla kapatıyoruz. Parçalı tanımlanmış bir fonksiyonun yapışma noktasındaki türevini bulmak, tanım gereği fark oranının (Tanım 2.1) limitini hesaplamayı gerektirir; bu limit çoğu zaman zahmetlidir. Aşağıdaki teorem bunun yerine **türevin limitine** bakmanın yettiğini söyler ve aynı zamanda L'Hôpital kuralının en yalın habercisidir.

Önerme 9.3 (Türev Limiti Teoremi). *$a < b$ olmak üzere $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$$

limiti varsa, f'nin a noktasındaki sağdan türevi de vardır ve

$$f'_+(a) = L$$

olur.

İspat.
Sağdan türevin tanımı gereği (Tanım 2.6)

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limitinin var ve L'ye eşit olduğunu göstermeliyiz. Bunu doğrudan ε–δ tanımıyla yapacağız.
$\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x \to a^+} f'(x) = L$ olduğundan, öyle bir $\delta_0 > 0$ vardır ki

$$a < t < a + \delta_0 \quad \Rightarrow \quad | f'(t) - L | < \varepsilon.$$

Gerekirse küçülterek $\delta = \min\{\delta_0, b - a\}$ alalım; böylece $\delta > 0$ ve $(a, a + \delta) \subseteq (a, b)$ olur.
Şimdi $a < x < a + \delta$ olan herhangi bir x alalım ve f'yi $[a, x]$ aralığında ele alalım:

- *f, a noktasında sürekli ve $(a, b) \supseteq (a, x]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan (Teorem 3.1 gereği $(a, x]$ üzerinde de süreklidir) f, $[a, x]$ üzerinde süreklidir;*
- *f, (a, x) üzerinde türevlenebilirdir.*

Ortalama değer teoreminin hipotezleri sağlanmaktadır; öyleyse öyle bir $c_x \in (a, x)$ vardır ki

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Burada $a < c_x < x < a + \delta \leq a + \delta_0$ olduğuna dikkat edelim: c_x noktası, f''ün L'ye yakın olmasını garanti eden komşuluğun içindedir. Öyleyse

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| = |f'(c_x) - L| < \varepsilon.$$

Bu, keyfî $\varepsilon > 0$ için $a < x < a + \delta$ olan her x'te sağlandığından, tanım gereği

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L,$$

yani $f'_+(a)$ vardır ve L'ye eşittir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı ispat, aralığın öteki ucunda kelimesi kelimesine tekrarlanır: f, b noktasında sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilirse ve $\lim_{x\to b^-} f'(x) = L$ ise $f'_-(b) = L$'dir. İki tarafı birleştirince, uygulamada asıl kullandığımız biçimi elde ederiz.

Sonuç 9.1 (İki Yönlü Biçim). *I, a noktasını içeren bir açık aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekli ve $I \setminus \{a\}$ kümesinin her noktasında türevlenebilir olsun. Eğer*

$$\lim_{x\to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$$

ise f, a noktasında türevlenebilirdir ve $f'(a) = L$'dir. Dahası bu durumda f' fonksiyonu a noktasında süreklidir.

> ***İspat.***
> *$I = (\alpha,\beta)$ yazalım; $\alpha < a < \beta$'dır. $\lim_{x\to a} f'(x) = L$ olduğundan, tek yönlü limitlerin varlığı ve eşitliği gereği (bkz. Analiz 1) $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = L$'dir. Önerme 9.3'ni f'nin $[a,\beta)$ üzerindeki kısıtlamasına uygularsak $f'_+(a) = L$, aynı önermenin sol uçtaki biçimini $(\alpha,a]$ üzerindeki kısıtlamaya uygulayarsak $f'_-(a) = L$ çıkar. Bir noktada türevin varlığı, iki tek yönlü türevin var ve eşit olmasına denktir (Teorem 2.1); öyleyse $f'(a)$ vardır ve L'ye eşittir.*
> *Süreklilik iddiası artık tanımın kendisidir: $\lim_{x\to a} f'(x) = L = f'(a)$ olduğundan f', a noktasında süreklidir (bkz. Analiz 1).*
> ■

> ⚠ Karşıtı doğru değildir
>
> Sonuç 9.1, "$f'(a)$ vardır" sonucunu "$\lim_{x\to a} f'(x)$ vardır" varsayımından üretir. Ters yön **yanlıştır**: bir fonksiyon bir noktada türevlenebilir olduğu hâlde türevi o noktada limitsiz olabilir. Klasik örnek
>
> $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
>
> fonksiyonudur. 0 noktasında fark oranı $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\dfrac{1}{x}$'tir; $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ sınırlı ve $x \to 0$ olduğundan Sınırlı Fonksiyon Çarpı Sıfıra Giden Fonksiyon gereği bu limit 0'dır, yani $f'(0) = 0$ vardır. Öte yandan $x \neq 0$ için çarpım ve zincir kurallarıyla
>
> $$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$
>
> olur. Birinci terim $x \to 0$ iken 0'a gider, ama $\cos\frac{1}{x}$'in limiti yoktur: $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ boyunca $\cos\frac{1}{x_n} = 1$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$ boyunca $\cos\frac{1}{y_n} = -1$ olur ve dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) limitin var olmadığını söyler. Demek ki $f'(0)$ var ama $\lim_{x\to 0} f'(x)$ yoktur; türev fonksiyonu sürekli olmak zorunda değildir.
> Bir uyarı daha: teorem L'nin **sonlu** olmasını ister. $\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$ ise aynı ispat fark oranının $+\infty$'a gittiğini gösterir; bu, grafiğin a'da düşey teğeti olması demektir, ama $f'_+(a)$ bir gerçel sayı olarak var değildir. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ için $x = 0$'da durum budur.

Şimdi teoremi iş başında görelim. Aşağıdaki iki soru, doğrudan tanımla çözülseydi hayli uzun limit hesapları isterdi.

Örnek 9.7 (Yapışma Noktasında Türev).

a) $f(x) = \begin{cases} x^2\ln x, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğunu ve $f'(0) = 0$ olduğunu gösteriniz.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ a\sqrt{x}+b, & x>1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır?

> **Çözüm.**
> **a)** $x > 0$ için f, iki türevlenebilir fonksiyonun çarpımıdır; çarpım kuralı (Teorem 3.2) ve Teorem 5.1 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x \qquad (x > 0).$$

$x < 0$ için f sabittir, dolayısıyla $f'(x) = 0$'dır. Geriye tek sorunlu nokta olan $x = 0$ kalıyor.
Süreklilik. Bölümün başında $x \to 0^+$ iken $x\ln x \to 0$ olduğunu göstermiştik. O hâlde $x^2\ln x = x \cdot (x\ln x) \to 0 \cdot 0 = 0$'dır (bkz. Analiz 1). Soldan limit ise açıkça 0'dır. İki tek yönlü limit de $f(0) = 0$ değerine eşit olduğundan f, 0 noktasında süreklidir (bkz. Analiz 1, Yığılma Noktasında Süreklilik ve Limit).
Türev. Şimdi türevin limitine bakalım. Sağdan:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x\ln x + x \right) = 2\cdot 0 + 0 = 0.$$

Soldan: $f'(x) = 0$ olduğundan $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. İki tek yönlü limit de 0 olduğundan $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$'dır. f, 0'da sürekli ve 0'ın delinmiş bir komşuluğunda türevlenebilir olduğundan Sonuç 9.1 uygulanır:

$$f'(0) = 0.$$

Böylece f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir. Dahası türevi 0'da sürekli olduğundan $f \in C^1(\mathbb{R})$'dir (Tanım 6.2).
b) Önce sürekliliği sağlamalıyız, çünkü teoremin hipotezi budur ve zaten türevlenebilirlik sürekliliği gerektirir (Teorem 3.1). Soldan limit $\lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2 = f(1)$, sağdan limit $\lim_{x\to 1^+}(a\sqrt{x}+b) = a + b$'dir. Süreklilik için

$$a + b = 2$$

olmalıdır; buna **süreklilik koşulu** diyelim. Şimdi türevlere bakalım. $x < 1$ için $f'(x) = 2x$, $x > 1$ için $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$'tir. Tek yönlü limitler:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{a}{2}.$$

Süreklilik koşulu sağlanıyorsa f, 1 noktasında süreklidir ve Önerme 9.3 ile onun sol uçtaki biçimi

$$f'_-(1) = 2, \qquad f'_+(1) = \frac{a}{2}$$

verir. Teorem 2.1 gereği $f'(1)$'in var olması için bu iki sayının eşit olması gerekir:

$$\frac{a}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4,$$

ve süreklilik koşulundan $b = 2 - a = -2$ bulunur. Bu değerlerle f, $x = 1$ noktasında türevlenebilirdir ve $f'(1) = 2$'dir.
Bulduğumuz koşulların gerekli olduğunu da görelim: $a + b \neq 2$ ise f, 1'de sürekli olmadığından türevlenemez; $a + b = 2$ ama $a \neq 4$ ise iki tek yönlü türev farklı çıkar ve yine türev yoktur. Öyleyse tek çözüm $a = 4$, $b = -2$'dir.
■

9.11 Alıştırmalar

Alıştırma 9.1 (Ortalama Değer Teoreminin Uygulamaları Üzerine).

a) Her $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ için $\tan x > x$ olduğunu gösteriniz.

b) $0 \le a < b$ için

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

c) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ ve $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ olduğunu gösteriniz. Buradan sin ve cos fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olduğu sonucunu çıkarınız.

d) Her $x > 0$ için $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ olduğunu gösteriniz.

e) Her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

olduğunu gösteriniz ve buradan her $N \geq 1$ için

$$2\sqrt{N+1} - 2 < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{N} - 1$$

olduğunu, sağdaki eşitliğin ise yalnız $N = 1$ için oluştuğunu çıkarınız.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve her x için $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ olsun. f'nin en çok bir sabit noktası olduğunu, yani $f(u) = u$ eşitliğini sağlayan en çok bir u bulunduğunu gösteriniz.

g) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x), & x \geq 0 \\ ax^2 + bx, & x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında iki kez türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır?

Çözüm.
a) $f(t) = \tan t$ alalım. f, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $f'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$'dir (Teorem 5.4 ve bölme kuralı, Teorem 3.2). $0 < x < \frac{\pi}{2}$ verilsin; f, $[0, x]$ üzerinde sürekli ve $(0, x)$ üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi gereği bir $c \in (0, x)$ için

$$\tan x - \tan 0 = \frac{1}{\cos^2 c}\,(x - 0), \qquad \text{yani} \qquad \tan x = \frac{x}{\cos^2 c}.$$

$c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan $0 < \cos c < 1$, dolayısıyla $0 < \cos^2 c < 1$ ve $\dfrac{1}{\cos^2 c} > 1$'dir. $x > 0$ ile çarparsak $\tan x > x$ elde ederiz.
b) $f(t) = \arctan t$ alalım; $f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$'dir. $0 \leq a < b$ verilsin. Ortalama değer teoremi $[a, b]$ üzerinde bir $c \in (a, b)$ verir:

$$\arctan b - \arctan a = \frac{b-a}{1+c^2}.$$

$0 \leq a < c < b$ olduğundan ve $t \mapsto t^2$ dönüşümü $[0, \infty)$ üzerinde kesin artan olduğundan $a^2 < c^2 < b^2$, dolayısıyla $1 + a^2 < 1 + c^2 < 1 + b^2$'dir. Pozitif sayılarda ters alma sıralamayı çevirir:

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}.$$

Pozitif olan $b - a$ ile çarparsak istenen çift eşitsizlik çıkar. ($a < 0 < b$ hâlinde $a^2 < c^2$ sıralaması bozulabileceğinden $a \geq 0$ koşulu gereklidir; o durumda yalnız Örnek 9.4'teki kaba sınır kalır.)
c) $a = b$ ise iki taraf da 0'dır. $a \neq b$ olsun; genelliği bozmadan $b < a$ diyelim. $f(t) = \sin t$ fonksiyonu $[b, a]$ üzerinde sürekli, (b, a) üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi gereği bir $c \in (b, a)$ için

$$\sin a - \sin b = \cos c \cdot (a - b).$$

Mutlak değer alıp $|\cos c| \leq 1$ kullanırsak

$$|\sin a - \sin b| = |\cos c|\,|a - b| \leq |a - b|\,.$$

$g(t) = \cos t$ için aynı hesap $\cos a - \cos b = -\sin c \cdot (a - b)$ verir ve $|\sin c| \leq 1$ olduğundan $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu eşitsizlikler sin ve cos fonksiyonlarının $K = 1$ sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığını söyler (bkz. Analiz 1); Lipschitz Koşulu Düzgün Sürekliliği Gerektirir gereği her ikisi de $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün süreklidir.

d) $g(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ olsun. g türevlenebilirdir, $g(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$'dır ve

$$g'(t) = e^t - 1 - t.$$

Örnek 9.1 gereği $t \neq 0$ için $e^t > 1 + t$, yani $g'(t) > 0$'dır. Şimdi $x > 0$ verilsin ve g'yi $[0, x]$ üzerinde ele alalım. Ortalama değer teoremi gereği bir $c \in (0, x)$ için

$$g(x) - g(0) = g'(c)\,(x - 0) = \big(\, e^c - 1 - c \,\big)\, x.$$

$c \in (0, x)$ olduğundan $c \neq 0$ ve dolayısıyla $e^c - 1 - c > 0$'dır; $x > 0$ ile çarpım da pozitiftir. $g(0) = 0$ olduğundan $g(x) > 0$, yani

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad (x > 0)$$

elde edilir. (Aynı fikri tekrarlayarak her n için $e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ kanıtlanabilir; bu, Taylor formülünün habercisidir.)

e) $f(t) = 2\sqrt{t}$ alalım; f, $[0, \infty)$ üzerinde sürekli, $(0, \infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$'dir.

Sol eşitsizlik. f'yi $[n, n+1]$ üzerinde ele alalım. Bir $c \in (n, n+1)$ için

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

$c > n$ olduğundan $\sqrt{c} > \sqrt{n}$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{c}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$'dir. Demek ki $2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Sağ eşitsizlik. f'yi $[n-1, n]$ üzerinde ele alalım ($n \geq 1$ olduğundan bu aralık $[0, \infty)$ içindedir; $n = 1$ hâlinde f, $[0, 1]$ üzerinde sürekli ve $(0, 1)$ üzerinde türevlenebilir olduğundan hipotezler yine sağlanır). Bir $c \in (n-1, n)$ için

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

ve $c < n$ olduğundan $\dfrac{1}{\sqrt{c}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$'dir.

Toplam kestirimi. Sol eşitsizliği $n = 1, 2, \ldots, N$ için toplayalım. Sağ taraf teleskopik toplamdır:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{N} 2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = 2\big(\sqrt{N+1} - 1\big) = 2\sqrt{N+1} - 2.$$

Üst sınır için ilk terimi ayıralım ve sağ eşitsizliği $n = 2, \ldots, N$ için toplayalım:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} 2\big(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\big) = 1 + 2\big(\sqrt{N} - 1\big) = 2\sqrt{N} - 1.$$

Ortadaki adımda eşitlik yalnız $N = 1$ hâlinde, yani her iki toplam da boş olduğunda oluşur; o durumda gerçekten $\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 = 2\sqrt{1} - 1$'dir. $N \geq 2$ için toplanan kesin eşitsizliklerden en az biri devrede olduğundan üst sınır da kesindir:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{N} - 1 \qquad (N \geq 2).$$

Böylece bu toplamın $2\sqrt{N}$ mertebesinde büyüdüğünü, özel olarak $N \to \infty$ iken sınırsız olduğunu görmüş oluruz.

f) u ve v iki sabit nokta olsun: $f(u) = u$ ve $f(v) = v$. $u \neq v$ olduğunu varsayalım; genelliği bozmadan $u < v$ diyelim. f, $[u, v]$ üzerinde sürekli (türevlenebilir olduğundan, Teorem 3.1) ve (u, v) üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi gereği bir $c \in (u, v)$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(v) - f(u) = f'(c)\,(v-u).$$

Sol taraf $v-u$'dur. Mutlak değer alırsak, $|\,f'(c)\,| \le \frac{1}{2}$ olduğundan

$$|\,v-u\,| = |\,f'(c)\,|\,|\,v-u\,| \le \frac{1}{2}\,|\,v-u\,|\,.$$

$u \neq v$ olduğundan $|\,v-u\,| > 0$'dır; iki tarafı bu pozitif sayıya bölersek $1 \le \frac{1}{2}$ çelişkisi çıkar. Demek ki $u = v$'dir, yani en çok bir sabit nokta vardır.
g) Fonksiyon $x = 0$'da süreklidir: $\ln(1+0) = 0$ ve $\lim_{x\to 0^-}(ax^2+bx) = 0 = f(0)$.
Birinci türev. $x > 0$ için zincir kuralı (Teorem 4.1) ve Teorem 5.1 gereği $f'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$; $x < 0$ için $f'(x) = 2ax + b$'dir. Tek yönlü limitler

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = b$$

olur. f, 0'da sürekli olduğundan Önerme 9.3 (ve sol uçtaki biçimi) $f'_+(0) = 2$ ve $f'_-(0) = b$ verir. Teorem 2.1 gereği $f'(0)$'ın var olması için

$$b = 2$$

olmalıdır; bu durumda $f'(0) = 2$'dir.
İkinci türev. $b = 2$ ile f' fonksiyonu şöyledir:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x}, & x \ge 0 \\ 2ax + 2, & x < 0. \end{cases}$$

f', 0'da süreklidir (iki tek yönlü limit de $2 = f'(0)$'dır). $x > 0$ için $f''(x) = -\dfrac{4}{(1+2x)^2}$, $x < 0$ için $f''(x) = 2a$'dır. Tek yönlü limitler

$$\lim_{x\to 0^+} f''(x) = -4, \qquad \lim_{x\to 0^-} f''(x) = 2a$$

olur. Şimdi Önerme 9.3'ni f yerine f' fonksiyonuna uygulayabiliriz (çünkü f', 0'da sürekli ve 0'ın her iki yanında türevlenebilirdir): $f''_+(0) = -4$ ve $f''_-(0) = 2a$. Bunların eşit olması için

$$2a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -2.$$

Öyleyse $a = -2$ ve $b = 2$'dir; bu değerlerle f, $x = 0$ noktasında iki kez türevlenebilirdir ve $f'(0) = 2$, $f''(0) = -4$ olur (Tanım 6.1).
■

Ortalama değer teoremi, gördüğümüz gibi türevden fonksiyona doğru bilgi taşıyan bir köprüdür: türevin işaretini, sınırlarını ya da limitini bilmek fonksiyonun kendisi hakkında kesin nicel sonuçlar verir. Bir sonraki bölümde ters yönde şaşırtıcı bir soru soracağız: türev fonksiyonu sürekli olmak zorunda değilken, yine de ara değer özelliği taşımak zorunda mıdır? Yanıt evettir ve ispatı yine Rolle teoremine dayanır: Darboux Teoremi: Türevin Ara Değer Özelliği.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Darboux Teoremi: Türevin Ara Değer Özelliği

Ortalama Değer Teoreminin Uygulamaları bölümünde türevin işaretinden fonksiyonun davranışına geçmeyi öğrendik: türev pozitifse fonksiyon artar, türev özdeş olarak sıfırsa fonksiyon sabittir, türevlerin farkı sıfırsa fonksiyonlar bir sabitle ayrılır. Bütün bu sonuçlarda ana rolü ortalama değer teoremi oynadı. Şimdi bakışımızı bir adım daha yukarı taşıyoruz ve şu soruyu soruyoruz: **bir fonksiyon, başka bir fonksiyonun türevi olabilmek için ne gibi kısıtlara uymak zorundadır?**

Soru ilk bakışta tuhaf gelebilir. Ama biraz düşününce, türev almanın çok kısıtlayıcı bir işlem olduğu sezilir. Türevlenebilir bir fonksiyon süreklidir (Teorem 3.1); dolayısıyla türev alma işlemi, düzensiz fonksiyonlardan daha düzenli olanlara geçmez, tam tersine düzenli fonksiyonlardan türetilmiş nesneler üretir. Peki bu türetilmiş nesne, yani f', ne kadar düzensiz olabilir?

İki uçtaki yanıtın da şaşırtıcı olduğunu göreceğiz. Bir yandan f' **sürekli olmak zorunda değildir**: türevlenebilir olup türevi süreksiz olan fonksiyonlar vardır ve bunlardan birini yüksek mertebeden türevleri incelerken zaten görmüştük. Öte yandan f' tümüyle serbest de değildir: **her türev, sürekli fonksiyonların en karakteristik özelliğini, ara değer özelliğini taşır.** Bunu söyleyen sonuç, 1875'te Jean Gaston Darboux tarafından ispatlanmış olan **Darboux teoremi**dir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: ara değer (Darboux) özelliğinin tam tanımı; Darboux teoremi ve Weierstrass ekstremum teoremiyle Fermat teoremini birleştiren zarif ispatı; türev fonksiyonunun görüntüsünün her zaman bir aralık olduğu; bir türevin süreksizliğinin **asla** sıçrama ya da kaldırılabilir türden olamayacağı; ve bunun en çarpıcı sonucu olarak, işaret fonksiyonu $\operatorname{sgn}(x)$ gibi sıçramalı hiçbir fonksiyonun bir ilkel fonksiyonunun (antiderivative) bulunmadığı. Bu son gözlem, İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral bölümünde "hangi fonksiyonların integrali alınabilir?" sorusunun ilk ciddi yanıtı olacaktır. Bölümü, türevin işaretinin sabitliği ve monoton türevlerin sürekliliği üzerine iki sonuçla kapatacağız.

10.1 Türev Sürekli Olmak Zorunda Değildir

Türevlenebilirlik sürekliliği gerektirir; ama f'nin türevlenebilir olması f''nün sürekli olmasını gerektirmez. Bunu somut bir örnekle görelim. Aşağıdaki fonksiyon, yüksek mertebeden türevler konusunda "türevi türevlenebilir olmayan bir fonksiyon" örneği olarak karşımıza çıkmıştı; şimdi aynı fonksiyonu daha ince bir gözle, türevinin **süreksizlik türünü** belirlemek için inceleyeceğiz.

Örnek 10.1 (Türevi Sürekli Olmayan Bir Fonksiyon). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin $\mathbb{R}$'nin her noktasında türevlenebilir olduğunu, f''nün 0'da sürekli olmadığını ve bu süreksizliğin **ikinci tür** olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Adım 1: $x_0 \neq 0$ noktalarında türev. $x \neq 0$ için f, türevlenebilir fonksiyonların çarpımı ve bileşkesidir: $x \mapsto x^2$ bir polinomdur, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sıfırdan farklı noktalarda türevlenebilirdir ve sin her yerde türevlenebilirdir (Teorem 5.4). Çarpım kuralı (Teorem 3.2) ve zincir kuralı (Teorem 4.1) ile

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Adım 2: 0 noktasında türev. Fark oranını (Tanım 2.1) doğrudan yazalım:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Her $x \neq 0$ için $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |\, x \,|$$

olur. $|\, x \,| \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $x \sin \frac{1}{x} \to 0$'dır. Demek ki f, 0'da türevlenebilirdir ve $f'(0) = 0$'dır. Böylece

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Adım 3: f', 0'da sürekli değildir. $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ dizisini alalım ($n \in \mathbb{N}$). $x_n \neq 0$ ve $x_n \to 0$'dır (bkz. Analiz 1). $\sin(2n\pi) = 0$ ve $\cos(2n\pi) = 1$ olduğundan

$$f'(x_n) = 2x_n \cdot 0 - 1 = -1 \quad (\text{her} \;\; n \;\; \text{için}) \; .$$

Öyleyse $f'(x_n) \to -1 \neq 0 = f'(0)$. Süreksizlik için dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği f', 0'da sürekli değildir.

Adım 4: Süreksizlik ikinci türdür. Süreksizliğin birinci tür (sıçrama ya da kaldırılabilir) olması için f''nün 0'daki her iki tek yönlü limitinin de sonlu olarak var olması gerekir (bkz. Analiz 1). Bunun olmadığını gösterelim.

Önce sağdan bakalım. Yukarıdaki $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ dizisi pozitif terimlidir ve 0'a yakınsar; $f'(x_n) \to -1$. Şimdi $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ dizisini alalım; bu da pozitif terimlidir ve 0'a yakınsar. $\sin\big(\; (2n+1)\pi \;\big) = 0$ ve $\cos\big(\; (2n+1)\pi \;\big) = -1$ olduğundan

$$f'(y_n) = 2y_n \cdot 0 - (-1) = 1 \quad (\text{her} \;\; n \;\; \text{için}),$$

yani $f'(y_n) \to 1$. Sağdan yaklaşan iki dizi f' boyunca iki farklı limite gittiğinden, tek yönlü limit için dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ **yoktur.**

Soldan da aynı durum geçerlidir: $u_n = -\frac{1}{2n\pi}$ için $\sin(-2n\pi) = 0$, $\cos(-2n\pi) = 1$ olduğundan $f'(u_n) = -1$; $v_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi}$ için $\cos\big(\; -(2n+1)\pi \;\big) = -1$ olduğundan $f'(v_n) = 1$. İki dizi de 0'a soldan yaklaşır ama f' görüntüleri farklı limitlere gider; öyleyse $\lim_{x \to 0^-} f'(x)$ de yoktur.

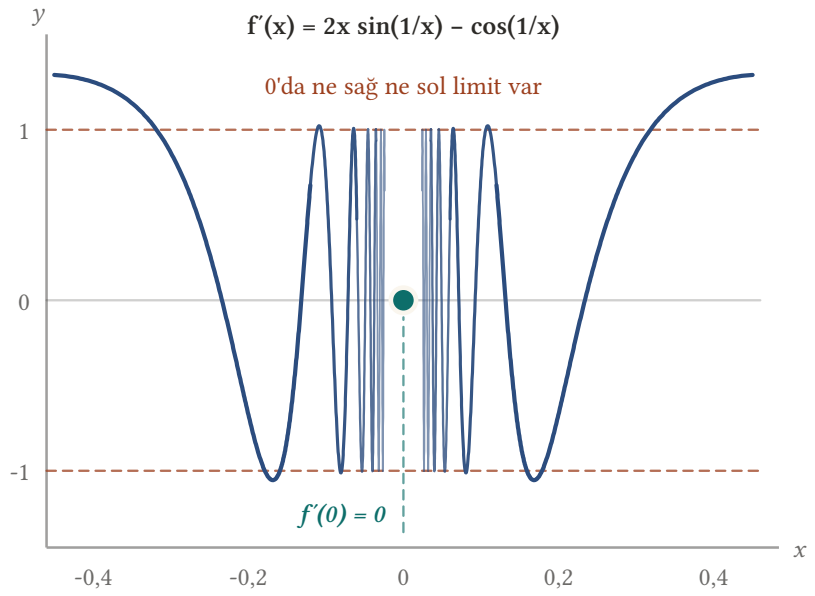
Demek ki f''nün 0'daki süreksizliği ikinci türdür.

Adım 5: Sorun sınırsızlık değil, salınımdır. $|\, x \,| \leq 1$ için

$$|\, f'(x) \,| \leq 2 \,|\, x \,| \left|\sin \frac{1}{x}\right| + \left|\cos \frac{1}{x}\right| \leq 2 \,|\, x \,| + 1 \leq 3$$

olduğundan f', 0'ın bir komşuluğunda sınırlıdır. Yani f' sonsuza kaçtığı için değil, -1 ile 1 arasında sonsuz kez salındığı için limitsizdir. Aslında $2x \sin \frac{1}{x} \to 0$ olduğundan bütün salınım $-\cos \frac{1}{x}$ teriminden gelir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.1: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ fonksiyonu her noktada türevlidir ve $f'(0) = 0$'dır; ama sıfıra yaklaşırken f kesikli çizilen 1 ile -1 düzeyleri arasında sonsuz kez salınır, dolayısıyla 0'da ne sağ ne sol limiti vardır. Demek ki bir türev sürekli olmak zorunda değildir. Yine de Darboux teoremi gereği f ara değer özelliğini taşır: bu yüzden bir türevin süreksizliği ancak ikinci tür olabilir, sıçrama asla.

■

Bu örnek şu soruyu doğurur: madem f' süreksiz olabiliyor, öyleyse **her** fonksiyon bir türev olabilir mi? Yani her g için, $F' = g$ olacak biçimde bir F bulunabilir mi? Yanıt kesin bir "hayır"dır ve nedenini bu bölümün ana teoremi verecektir. Ama önce, teoremin dile getirdiği özelliği adlandıralım.

10.2 Ara Değer Özelliği

Sürekli fonksiyonların en çok kullanılan özelliği, kapalı bir aralıkta aldıkları iki değer arasındaki her değeri de almalarıdır (bkz. Analiz 1). Bu özelliği sürekliliğin kendisinden ayırıp bağımsız bir kavram olarak tanımlamak işimize yarayacak.

Tanım 10.1 (Ara Değer Özelliği (Darboux Özelliği)). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $g : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $u, v \in I$, $u < v$ olan her ikili ve $g(u)$ ile $g(v)$ arasında kalan (yani $g(u) < \lambda < g(v)$ ya da $g(v) < \lambda < g(u)$ olan) her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$g(c) = \lambda$$

olan bir $c \in (u, v)$ varsa, g fonksiyonu I üzerinde **ara değer özelliğini** (intermediate value property) taşır denir. Bu özelliği taşıyan fonksiyonlara **Darboux fonksiyonu** ya da kısaca **Darboux özellikli** fonksiyon da denir.

Tanımın söylediği şudur: g'nin grafiği, aldığı iki değer arasındaki hiçbir yatay düzeyi "atlayamaz". Ara değer teoremi (bkz. Analiz 1), bir aralıkta sürekli olan her fonksiyonun bu özelliği taşıdığını söyler. Kısaca:

$$\text{süreklilik} \Rightarrow \text{ara değer özelliği}\ .$$

Bu gerektirmenin tersi doğru değildir; yani ara değer özelliği, sürekliliğin zayıf bir gölgesidir, ona denk değildir.

⚠ Ara değer özelliği sürekliliği gerektirmez

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. g, 0'da süreksizdir (ikinci tür süreksizlik; 0'daki tek yönlü limitlerin hiçbiri yoktur). Buna karşın g, $\mathbb{R}$ üzerinde ara değer özelliğini taşır: $u < v$ olsun.

- $0 \notin [u, v]$ ise g, $[u, v]$ üzerinde süreklidir ve Ara Değer Teoremi doğrudan uygulanır.
- $0 \in [u, v]$ ise, $u < v$ olduğundan ya $v > 0$ ya da $u < 0$'dır; $v > 0$ olan durumu yazalım (öteki durum bakışımlıdır). $k \in \mathbb{N}$ için $J_k = \left[\frac{2}{(4k+1)\pi}, \frac{2}{(4k-1)\pi}\right]$ aralığını alalım. Bu aralığın iki ucu da $k \to \infty$ iken 0'a gittiğinden, yeterince büyük k için $J_k \subseteq (0, v) \subseteq (u, v)$ olur. g, J_k üzerinde süreklidir ve uçlarında $g\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ ile $g\left(\frac{2}{(4k-1)\pi}\right) = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ değerlerini alır; yani g bu küçük aralıkta bir tam salınımını tamamlar. Ara Değer Teoremi gereği g, J_k üzerinde -1 ile 1 arasındaki **bütün** değerleri alır. g'nin bütün değerleri $[-1, 1]$'de olduğundan $g(u)$ ile $g(v)$ arasında kalan her λ zorunlu olarak $(-1, 1)$ aralığındadır; istenen c böylece $J_k \subseteq (u, v)$ içinde bulunur.

Demek ki ara değer özelliği süreklilikten kesinlikle daha zayıf bir koşuldur. Aslında durum çok daha uçtur: her noktada süreksiz olduğu hâlde ara değer özelliğini taşıyan fonksiyonlar bile vardır. Bu yüzden "grafiği kalem kaldırmadan çizilir" sezgisi ara değer özelliğinin doğru resmi değildir.

Şimdi bölümün ana sonucuna geliyoruz. Darboux teoremi, sürekli olmak zorunda olmayan bir nesnenin — türev fonksiyonunun — yine de bu özelliği taşıdığını söyler.

10.3 Darboux Teoremi

Teoremin ispatındaki fikri önce sözle anlatalım. $f'(a) < \lambda < f'(b)$ olsun. Amacımız f''nün λ değerini alması. f''ye doğrudan ara değer teoremini uygulayamayız, çünkü f' sürekli olmayabilir. Bunun yerine f'den eğimi λ olan bir doğruyu çıkarıp

$$g(x) = f(x) - \lambda x$$

yardımcı fonksiyonuna bakarız. Bu değişiklikten sonra "$f'(c) = \lambda$" sorusu "$g'(c) = 0$" sorusuna dönüşür; yani bir **ara değer** sorusu bir **ekstremum** sorusuna çevrilmiş olur. Ekstremum sorularının iki güçlü aracı vardır: Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1, varlık) ve Fermat teoremi (Teorem 7.1, türevin sıfırlanması). g türevlenebilir, dolayısıyla sürekli olduğundan $[a, b]$'de en küçük değerini alır; geriye bu en küçük değerin uç noktalarda alınmadığını göstermek kalır. İşte tam burada $g'(a) < 0$ ve $g'(b) > 0$ koşulları devreye girer: a'nın hemen sağındaki noktalarda g değerleri $g(a)$'nın, b'nin hemen solundaki noktalarda ise $g(b)$'nin altına iner.

Teorem 10.1 (Darboux Teoremi). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevlenebilir olsun (uç noktalarda tek yönlü türevler kastedilir: $f'(a) = f'_+(a)$, $f'(b) = f'_-(b)$; bkz. Tanım 2.6). λ sayısı $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasında olsun, yani*

$$f'(a) < \lambda < f'(b) \qquad \text{ya da} \qquad f'(b) < \lambda < f'(a)$$

olsun. O hâlde

$$f'(c) = \lambda$$

olan bir $c \in (a, b)$ vardır.

> ***İspat.***
> ***Durum 1: $f'(a) < \lambda < f'(b)$.***
> ***Adım 1: Yardımcı fonksiyon.*** *$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu*

$$g(x) = f(x) - \lambda x$$

ile tanımlayalım. $x \mapsto \lambda x$ her yerde türevlenebilir olduğundan, türevin toplam ve sabitle çarpım kuralları (Teorem 3.2) gereği g de $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$g'(x) = f'(x) - \lambda, \qquad x \in [a,b].$$

Uç noktalarda bu eşitlik tek yönlü türevler için geçerlidir. Varsayımdan

$$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0, \qquad g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$$

elde ederiz. İspatı tamamlamak için $g'(c) = 0$ olan bir $c \in (a,b)$ bulmamız yeterlidir; çünkü bu, $f'(c) = \lambda$ demektir.

Adım 2: En küçük değerin varlığı. *g türevlenebilir olduğundan süreklidir (Teorem 3.1). $[a,b]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olduğundan Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği g, $[a,b]$ üzerinde en küçük değerini gerçekten alır: öyle bir $c \in [a,b]$ vardır ki her $x \in [a,b]$ için*

$$g(c) \leq g(x).$$

Adım 3: En küçük değer a'da alınamaz. *Tek yönlü türevin tanımı gereği*

$$g'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0.$$

Limit tanımında $\varepsilon = \dfrac{|\, g'(a)\,|}{2} = -\dfrac{g'(a)}{2} > 0$ seçelim: öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $a < x < a + \delta_1$ ve $x \in [a,b]$ iken

$$\left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - g'(a) \right| < -\frac{g'(a)}{2}$$

olur. Bu eşitsizliğin sağ yarısından

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < g'(a) - \frac{g'(a)}{2} = \frac{g'(a)}{2} < 0$$

çıkar. Gerekirse δ_1'i küçülterek $a + \delta_1 \leq b$ olduğunu varsayabiliriz. Şimdi $x_1 = a + \dfrac{\delta_1}{2}$ alalım; $x_1 \in (a,b)$'dir ve $x_1 - a > 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliği $x_1 - a$ ile çarpmak yönü değiştirmez:

$$g(x_1) - g(a) < 0, \qquad \text{yani} \qquad g(x_1) < g(a).$$

Demek ki $g(a)$, g'nin $[a,b]$ üzerindeki en küçük değeri olamaz; dolayısıyla $c \neq a$'dır.

Adım 4: En küçük değer b'de de alınamaz. *Benzer biçimde*

$$g'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$$

olduğundan, $\varepsilon = \dfrac{g'(b)}{2} > 0$ seçimiyle öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki $b - \delta_2 < x < b$ ve $x \in [a,b]$ iken

$$\left| \frac{g(x) - g(b)}{x - b} - g'(b) \right| < \frac{g'(b)}{2},$$

dolayısıyla

$$\frac{g(x) - g(b)}{x - b} > g'(b) - \frac{g'(b)}{2} = \frac{g'(b)}{2} > 0$$

*olur. Gerekirse δ_2'yi küçülterek $b - \delta_2 \geq a$ alalım ve $x_2 = b - \dfrac{\delta_2}{2}$ diyelim; $x_2 \in (a,b)$'dir. Bu kez $x_2 - b < 0$ olduğundan eşitsizliği $x_2 - b$ ile çarparken **yön değişir**:*

$$g(x_2) - g(b) < \frac{g'(b)}{2}(x_2 - b) < 0, \qquad \text{yani} \qquad g(x_2) < g(b).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki $g(b)$ de en küçük değer olamaz; dolayısıyla $c \neq b$'dir.
Adım 5: Fermat teoremi. *Adım 3 ve 4 birlikte $c \in (a,b)$ verir. c, aralığın bir iç noktasıdır, g orada türevlenebilirdir ve g en küçük değerini c'de aldığından c, açık (a,b) aralığında bir yerel minimum noktasıdır. Fermat teoremi (Teorem 7.1) gereği*

$$g'(c) = 0, \qquad \text{yani} \qquad f'(c) - \lambda = 0, \qquad \text{yani} \qquad f'(c) = \lambda.$$

Durum 2: $f'(b) < \lambda < f'(a)$. *Bu durumda $h = -f$ fonksiyonunu düşünelim. h de $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir ve $h' = -f'$'dür (Teorem 3.2). Varsayımı -1 ile çarparsak eşitsizliklerin yönü değişir:*

$$-f'(a) < -\lambda < -f'(b), \qquad \text{yani} \qquad h'(a) < -\lambda < h'(b).$$

Durum 1'i h ve $-\lambda$ için uygulayınca $h'(c) = -\lambda$ olan bir $c \in (a,b)$ buluruz; bu da $-f'(c) = -\lambda$, yani $f'(c) = \lambda$ demektir.
■

İspatın kritik yeri Adım 3 ile 4'tür ve orada olan biteni bir kez daha vurgulayalım: $g'(a) < 0$ olması "g, a'nın sağında azalıyor" anlamına **gelmez** (bir noktadaki türevin işareti, o noktanın çevresinde monotonluk vermez; bunu bölümün sonundaki Örnek 10.3'da göreceğiz). Söylediği yalnızca şudur: a'ya yeterince yakın $x > a$ noktalarında $g(x) < g(a)$ olur. Ekstremumun uç noktada olmadığını göstermek için de tam olarak bu kadarına ihtiyacımız vardır.

⚠ Bu bir ara değer teoremi uygulaması değildir

Darboux teoremi, f''ye ara değer teoreminin uygulanmasıyla elde edilmez. Ara değer teoremi f''nün **sürekli** olmasını ister; oysa teoremin varsayımlarında f''nün sürekliliği hakkında hiçbir şey söylenmemiştir ve Örnek 10.1'de gördüğümüz gibi bu süreklilik gerçekten de olmayabilir. Darboux teoreminin bütün değeri buradadır: ara değer özelliğini, süreklilikten değil, **türev olmaktan** türetir. f' sürekli olduğunda teorem elbette önemsizleşir; o hâlde f' zaten ara değer teoreminin kapsamındadır. Yani Darboux teoremi ancak f' süreksiz olduğunda yeni bir bilgi taşır.

Teoremi bir aralık üzerinde ifade etmek, hem kullanımını kolaylaştırır hem de daha akılda kalıcı bir biçim verir.

Sonuç 10.1 (Türevin Görüntüsü Bir Aralıktır). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I üzerinde türevlenebilir olsun. O hâlde:*

a) f' fonksiyonu I üzerinde ara değer özelliğini taşır (Tanım 10.1);

b) $f'(I) = \{f'(x) : x \in I\}$ görüntü kümesi bir aralıktır.

İspat.
a) *$u, v \in I$, $u < v$ olsun ve λ sayısı $f'(u)$ ile $f'(v)$ arasında bulunsun. I bir aralık olduğundan $[u,v] \subseteq I$'dir. f, I'nin her noktasında türevlenebilirdir (bir nokta I'nin uç noktasıysa bu, tek yönlü türev anlamındadır). Öyleyse f'nin $[u,v]$'ye kısıtlanışı da $[u,v]$ üzerinde türevlenebilirdir: u noktası I'nin içinde kalıyorsa oradaki iki yönlü türev vardır ve Teorem 2.1 gereği sağdan türeve eşittir; u, I'nin sol uç noktasıysa $f'(u)$ zaten sağdan türevdir. v için de aynı akıl yürütme soldan türev için geçerlidir. Her iki durumda da kısıtlanışın uç noktalardaki tek yönlü türevleri $f'(u)$ ve $f'(v)$'dir. O hâlde Teorem 10.1'yu $[u,v]$ üzerinde uygulayabiliriz: $f'(c) = \lambda$ olan bir $c \in (u,v) \subseteq I$ vardır. Bu tam olarak ara değer özelliğidir.*
b) *$J = f'(I)$ diyelim. J'nin herhangi iki elemanı arasındaki her sayıyı da içerdiğini gösterelim. $y_1, y_2 \in J$ ve $y_1 < \lambda < y_2$ olsun. Tanım gereği $y_1 = f'(u)$ ve $y_2 = f'(v)$ olan $u, v \in I$ vardır; $y_1 \neq y_2$ olduğundan $u \neq v$'dir. $u < v$ ya da $v < u$ olmasına göre (a) şıkkını $[u,v]$ ya da $[v,u]$ üzerinde uygulayarak $f'(c) = \lambda$ olan bir c buluruz; $c \in I$ olduğundan $\lambda \in J$'dir.*
Herhangi iki elemanı arasındaki her sayıyı içeren bir reel sayı kümesi bir aralıktır (bkz. Analiz 1). Öyleyse $J = f'(I)$ bir aralıktır. Tek noktalı kümeler de bu tanıma dâhildir; nitekim f sabitse J tek noktalıdır. I boş olmadığından J de boş değildir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonucun kullanımı çok pratiktir ve şu sloganla özetlenebilir: **bir türev fonksiyonunun görüntüsünde "delik" olamaz.** Görüntü kümesi aralık olmayan hiçbir fonksiyon, bir aralık üzerinde başka bir fonksiyonun türevi olamaz. Bölümün sonunda bunun birkaç uygulamasını göreceğiz.

10.4 Bir Türevin Süreksizlikleri

Örnek 10.1'de türevi süreksiz bir fonksiyon gördük; ama o örnekteki süreksizlik ikinci türdendi. Bu bir tesadüf değildir. Şimdi ispatlayacağımız sonuç, bir türevin süreksizliğinin **başka türlü olamayacağını** söyler.
Süreksizlik türlerini hatırlayalım (bkz. Analiz 1): x_0'da g süreksiz olsun. Her iki tek yönlü limit de sonlu olarak varsa süreksizlik **birinci türdür**; limitler eşitse (ama fonksiyon değerinden farklıysa) **kaldırılabilir**, farklıysa **sıçrama** süreksizliğidir. Tek yönlü limitlerden en az biri sonlu olarak yoksa süreksizlik **ikinci türdür**.

Sonuç 10.2 (Bir Türev Sıçrama Yapamaz). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve x_0, I'nin bir iç noktası olsun. Eğer f' fonksiyonu x_0'da süreksizse, bu süreksizlik **ikinci türdür**; yani $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ ve $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ limitlerinden en az biri sonlu olarak var değildir.*
*Denk biçimde: bir türev fonksiyonu, bir iç noktada ne **sıçrama** ne de **kaldırılabilir** süreksizliğe sahip olabilir.*

İspat.
Tersini varsayalım: f' fonksiyonu x_0'da süreksiz olsun, ama her iki tek yönlü limit de sonlu olarak var olsun:

$$L^- = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \in \mathbb{R}, \qquad L^+ = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) \in \mathbb{R}.$$

x_0 bir iç nokta olduğundan $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ olan bir $r > 0$ vardır; aşağıda seçeceğimiz bütün δ'ları $\delta \le r$ olacak biçimde alacağız. İki durumu ayrı ayrı çelişkiye götüreceğiz.
Durum A: $L^- \neq L^+$ (sıçrama). *Genelliği bozmadan $L^- < L^+$ olduğunu varsayabiliriz; aksi hâlde f yerine $-f$ alırız (o zaman tek yönlü limitler $-L^-$ ve $-L^+$ olur ve sıralama tersine döner, $-f$ de türevlenebilirdir ve $(-f)' = -f'$ aynı noktada süreksizdir).*
(L^-, L^+) aralığı sonsuz çoklukta sayı içerdiğinden, içinden $f'(x_0)$'a eşit olmayan bir λ seçebiliriz:

$$L^- < \lambda < L^+, \qquad \lambda \neq f'(x_0).$$

$\varepsilon = \min\{\lambda - L^-, L^+ - \lambda\} > 0$ diyelim. Tek yönlü limitlerin tanımı gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ olur ve

- *$x_0 - \delta < x < x_0$ iken $\mid f'(x) - L^- \mid < \varepsilon$, dolayısıyla $f'(x) < L^- + \varepsilon \le L^- + (\lambda - L^-) = \lambda$;*
- *$x_0 < x < x_0 + \delta$ iken $\mid f'(x) - L^+ \mid < \varepsilon$, dolayısıyla $f'(x) > L^+ - \varepsilon \ge L^+ - (L^+ - \lambda) = \lambda$.*

*Bu iki gözlem ve $\lambda \neq f'(x_0)$ koşulu birlikte şunu verir: **f' fonksiyonu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığının hiçbir noktasında λ değerini almaz.***
Şimdi $u = x_0 - \dfrac{\delta}{2}$ ve $v = x_0 + \dfrac{\delta}{2}$ alalım. Yukarıdakilere göre $f'(u) < \lambda < f'(v)$'dir. f, $[u, v]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Teorem 10.1 gereği $f'(c) = \lambda$ olan bir $c \in (u, v) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vardır. Bu, az önce vardığımız sonuçla çelişir.
Durum B: $L^- = L^+ = L$ (kaldırılabilir). *Bu durumda $\lim_{x\to x_0} f'(x) = L$ olur (bkz. Analiz 1) ve f' süreksiz olduğundan $L \neq f'(x_0)$'dır. Genelliği bozmadan $f'(x_0) < L$ diyelim (aksi hâlde yine $-f$ alırız). $f'(x_0) < \lambda < L$ olan bir λ seçelim ve $\varepsilon = L - \lambda > 0$ diyelim. Limit tanımı gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ olur ve $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ iken*

$$\mid f'(x) - L \mid < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f'(x) > L - \varepsilon = \lambda.$$

$v = x_0 + \dfrac{\delta}{2}$ alalım. O hâlde $f'(x_0) < \lambda < f'(v)$'dir; Teorem 10.1'yu $[x_0, v]$ üzerinde uygulayınca $f'(c) = \lambda$ olan bir $c \in (x_0, v)$ buluruz. Ama $0 < \mid c - x_0 \mid < \delta$ olduğundan $f'(c) > \lambda$ olmalıydı. Çelişki.
Her iki durum da çelişkiye götürdüğüne göre, tek yönlü limitlerin ikisinin birden sonlu olarak var olduğu varsayımı yanlıştır. Demek ki süreksizlik ikinci türdür.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci yol (türev limiti). *Aynı sonuca, ortalama değer teoremine dayanan türev limiti teoremiyle de varılır. Yine L^- ve L^+'nın sonlu olarak var olduğunu varsayalım. f, x_0'da türevlenebilir olduğundan orada süreklidir (Teorem 3.1) ve x_0'ın sağındaki bir aralıkta türevlenebilirdir; $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = L^+$ olduğundan Önerme 9.3 gereği*

$$f'_+(x_0) = L^+$$

olur. Aynı önerme $x \mapsto f(2x_0 - x)$ yansımasına uygulanınca $f'_-(x_0) = L^-$ bulunur. Oysa f, x_0'da türevlenebilir olduğundan her iki tek yönlü türev de vardır ve $f'(x_0)$'a eşittir (Teorem 2.1). Öyleyse

$$L^- = L^+ = f'(x_0),$$

yani $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$; bu ise f''nün x_0'da sürekli olması demektir (bkz. Analiz 1) ve varsayımla çelişir.
■

İkinci yolda kullandığımız **türev limiti teoremi**ni Ortalama Değer Teoreminin Uygulamaları bölümünde ispatlamıştık (Önerme 9.3; iki yönlü biçimi Sonuç 9.1 ile verilmişti). Bu teoremin bir tersi olmadığını unutmayalım: teorem, $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ limiti **varsa** onun $f'(x_0)$'a eşit olduğunu söyler; limitin var olacağını garanti etmez. Nitekim Örnek 10.1′de $f'(0)$ vardır ama $\lim_{x\to 0} f'(x)$ yoktur.
Şimdi bölümün en çok kullanılacak sonucuna geliyoruz. Bir fonksiyonun bir aralıkta **ilkel fonksiyonu** (antiderivative) olması demek, türevi o fonksiyona eşit olan bir fonksiyonun bulunması demektir. Sonuç 10.2′un karşıt tersi (contrapositive), ilkel fonksiyonun varlığına ciddi bir engel koyar.

Örnek 10.2 (Sıçramalı Bir Fonksiyonun İlkeli Yoktur). İşaret fonksiyonu $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bkz. Analiz 1),

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

olsun. 0'ı iç noktası olarak içeren hiçbir I aralığında $F' = \operatorname{sgn}$ olacak biçimde bir $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz. Daha genel olarak, bir aralığın iç noktasında sıçrama ya da kaldırılabilir süreksizliği olan hiçbir fonksiyonun o aralıkta ilkel fonksiyonu olamayacağını açıklayınız.

Çözüm.
Adım 1: sgn'in 0'daki süreksizliği sıçramadır. $x > 0$ için $\operatorname{sgn}(x) = 1$ olduğundan $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$; $x < 0$ için $\operatorname{sgn}(x) = -1$ olduğundan $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$. Her iki tek yönlü limit de sonlu olarak vardır ve birbirinden farklıdır; demek ki 0 bir sıçrama noktasıdır (bkz. Analiz 1), yani birinci tür süreksizliktir.
Adım 2: Çelişki. 0'ı iç noktası olarak içeren bir I aralığında $F' = \operatorname{sgn}$ olacak biçimde bir F bulunduğunu varsayalım. O hâlde F, I üzerinde türevlenebilirdir ve türevi olan sgn, I'nin iç noktası 0'da süreksizdir. Sonuç 10.2 gereği bu süreksizlik ikinci tür olmalıdır. Oysa Adım 1′de süreksizliğin sıçrama, yani birinci tür olduğunu gördük. Çelişki. Demek ki böyle bir F yoktur.
Adım 3: "Ama $|x|$ vardı" itirazı. İlk akla gelen aday $F(x) = |x|$'tir; gerçekten de $x > 0$ için $|x|' = 1$, $x < 0$ için $|x|' = -1$'dir. Ancak $|x|$ fonksiyonu 0'da türevlenebilir değildir: sağdan fark oranı $\dfrac{|x| - 0}{x} = 1$, soldan fark oranı -1'dir, tek yönlü türevler farklıdır (Teorem 2.1). Yani $|x|$, sgn'in yalnızca $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde bir ilkelidir; 0'ı içeren bir aralıkta değil. Adım 2, bu boşluğun **başka hiçbir fonksiyonla** kapatılamayacağını söyler.
Adım 4: Genel ilke. $g : I \to \mathbb{R}$ olsun ve g, I'nin bir x_0 iç noktasında birinci tür (sıçrama ya da kaldırılabilir) bir süreksizliğe sahip olsun. Eğer g'nin I üzerinde bir F ilkeli olsaydı, F türevlenebilir ve $F' = g$ olurdu; Sonuç 10.2, F''nün x_0'daki süreksizliğinin ikinci tür olmasını zorunlu kılar, bu da varsayımla çelişir. Öyleyse:

> Bir aralığın iç noktasında birinci tür süreksizliği olan hiçbir fonksiyon, o aralıkta bir türev değildir; dolayısıyla ilkel fonksiyonu yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek olarak taban fonksiyonu $\lfloor x \rfloor$ (bkz. Analiz 1) her tam sayıda sıçrar; bu yüzden bir tam sayıyı iç noktası olarak içeren hiçbir aralıkta ilkeli yoktur. Buna karşın $(n, n+1)$ aralığında $\lfloor x \rfloor = n$ sabit olduğundan $F(x) = nx + C$ bir ilkeldir.
■

! Belirsiz integral için taşınacak sonuç

Yukarıdaki genel ilke, İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral bölümünde doğrudan kullanılacaktır. Orada "$\int f(x)\,dx$" yazabilmek için önce f'nin bir ilkelinin var olması gerekir; bu bölümün verdiği ölçüt şudur:
Bir fonksiyon bir aralıkta ilkel fonksiyona sahipse, o aralıkta ara değer özelliğini taşımak zorundadır. Karşıt tersiyle: ara değer özelliğini taşımayan bir fonksiyonun ilkeli yoktur.
Bunun bir **gerek** koşul olduğunu, yeter koşul olmadığını da not edelim: ara değer özelliğini taşıyan her fonksiyon bir türev değildir; bu yöndeki örnekler burada kurduğumuzdan daha ileri araçlar ister. Buna karşın ölçüt, ilkelin **yokluğunu** göstermek için çoğu zaman fazlasıyla yeterlidir.
Özel olarak parçalı tanımlı fonksiyonlarda birleşme noktalarındaki sıçramalar, integral almaya kesin bir engeldir. Sürekli fonksiyonların her zaman bir ilkeli olduğu ise ayrı ve daha derin bir sonuçtur; onu belirli integrali kurduktan sonra, analizin temel teoremleriyle ispatlayacağız.

10.5 Türevin İşareti Aralık Boyunca Değişmez

Monotonluk testinde (Sonuç 8.3) "$f' > 0$ ise f artandır" sonucunu görmüştük. Şimdi tersten bir soru soralım: f' hiçbir noktada sıfır olmasın; bu, f''nün her yerde aynı işaretli olmasını gerektirir mi? f' sürekli olsaydı yanıt hemen "evet" olurdu, çünkü işaret değiştiren sürekli bir fonksiyon Ara Değer Teoremi gereği sıfırlanmak zorundadır. Ama f' sürekli olmak zorunda değildir. Neyse ki Darboux teoremi tam da bu boşluğu doldurur.

Sonuç 10.3 (Sıfırlanmayan Türev Sabit İşaretlidir). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I üzerinde türevlenebilir olsun. Her $x \in I$ için $f'(x) \neq 0$ ise, aşağıdakilerden yalnızca biri gerçekleşir:*

a) her $x \in I$ için $f'(x) > 0$'dır ve f, I üzerinde kesin artandır;

b) her $x \in I$ için $f'(x) < 0$'dır ve f, I üzerinde kesin azalandır.

Her iki hâlde de f kesin monotondur (Tanım 1.1), dolayısıyla birebirdir.

İspat.
Adım 1: İşaret değişemez. *Tersine, f''nün hem negatif hem pozitif değer aldığını varsayalım: $f'(u) < 0 < f'(v)$ olan $u, v \in I$ bulunsun. $f'(u) \neq f'(v)$ olduğundan $u \neq v$'dir. $u < v$ ise $[u, v] \subseteq I$ olur (I aralıktır) ve $\lambda = 0$ sayısı $f'(u)$ ile $f'(v)$ arasındadır; Teorem 10.1 gereği $f'(c) = 0$ olan bir $c \in (u, v) \subseteq I$ vardır. $v < u$ ise aynı akıl yürütme $[v, u]$ üzerinde yapılır ve yine $f'(c) = 0$ olan bir c bulunur. Her iki durumda da bu, "f' hiçbir noktada sıfır değildir" varsayımıyla çelişir.*
Demek ki f' ya hiç negatif değer almaz ya da hiç pozitif değer almaz. f' zaten sıfır değeri de almadığından, ya her yerde pozitiftir ya da her yerde negatiftir.
Adım 2: Monotonluk. *Her $x \in I$ için $f'(x) > 0$ olsun. $u, v \in I$ ve $u < v$ alalım. $[u, v] \subseteq I$'dir; f bu kapalı aralıkta sürekli (Teorem 3.1) ve (u, v) üzerinde türevlenebilir olduğundan ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) gereği*

$$f(v) - f(u) = f'(\xi)(v - u)$$

olan bir $\xi \in (u, v)$ vardır. Burada $f'(\xi) > 0$ ve $v - u > 0$ olduğundan $f(v) - f(u) > 0$, yani $f(u) < f(v)$'dir. Demek ki f kesin artandır.
Her $x \in I$ için $f'(x) < 0$ olduğunda aynı hesap $f(v) - f(u) < 0$ verir, yani f kesin azalandır.
Adım 3: Birebirlik. *Kesin monoton bir fonksiyon birebirdir: $u \neq v$ ise ya $u < v$ ya $v < u$'dur ve her iki hâlde de $f(u) \neq f(v)$ olur.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonucun değeri, hipotezin ne kadar az şey istediğindedir: f''nün sürekliliği değil, yalnızca **sıfırlanmaması** istenmiştir. Sonuçları da zengindir. f kesin monoton ve sürekli olduğundan $f(I)$ bir aralıktır (bkz. Analiz 1), $f : I \to f(I)$ birebir ve örtendir, ters fonksiyon $f^{-1} : f(I) \to I$ aynı yönde kesin monoton ve süreklidir (Teorem 1.3), üstelik f' hiçbir yerde sıfırlanmadığından f^{-1} türevlenebilirdir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(\ f^{-1}(y)\ \right)}$$

olur (Teorem 4.2). Yani "türevi sıfırlanmayan türevlenebilir fonksiyon" hipotezi, tersinir olma ve tersin türevlenebilirliği için tek başına yeterlidir.

i Aralık olma koşulu şart

I'nin bir aralık olması vazgeçilmezdir. $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alalım. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ olduğundan türev hiç sıfırlanmaz ve her yerde negatiftir; ama f tanım kümesinin tamamında azalan **değildir**: $-1 < 1$ iken $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$'dir. Kesin azalma yalnızca $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarının her birinde ayrı ayrı geçerlidir. Ortalama değer teoremi de Darboux teoremi de aralık üzerinde çalışır; tanım kümesi parçalıysa sonuç her parçada geçerlidir, bütünde değil.

10.6 Monoton Türev Süreklidir

Darboux teoreminin şimdi göreceğimiz sonucu, ilk bakışta beklenmedik bir düzenlilik ifadesidir: bir türev fonksiyonu, monoton olur olmaz sürekli hâle gelir. Bunun nedeni iki kısıtın çakışmasıdır. Monoton fonksiyonların süreksizlikleri yalnızca sıçrama olabilir; oysa Sonuç 10.2, bir türevin sıçrama yapamayacağını söyler. İkisi bir araya gelince süreksizliğe hiç yer kalmaz.

Önerme 10.1 (Monoton Bir Türev Süreklidir). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer f' fonksiyonu I üzerinde monotonsa (bkz. Analiz 1), f' fonksiyonu I üzerinde süreklidir.*

İspat.
Genelliği bozmadan f''nün artan olduğunu varsayabiliriz; f' azalansa f yerine $-f$ alırız, çünkü $(-f)' = -f'$ artandır ve $-f'$ sürekliyse f' de süreklidir (bkz. Analiz 1). $g = f'$ yazalım; g artandır.
Adım 1: İç noktalar. *x_0, I'nin bir iç noktası olsun. g artan olduğundan monoton fonksiyonların tek yönlü limit teoremi (bkz. Analiz 1) gereği*

$$L^- = \lim_{x \to x_0^-} g(x) = \sup\{g(x) : x \in I, x < x_0\}, \qquad L^+ = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = \inf\{g(x) : x \in I, x > x_0\}$$

limitleri vardır. Bu iki değer sonludur: $x < x_0$ olan her x için $g(x) \le g(x_0)$ olduğundan söz konusu küme $g(x_0)$ ile üstten sınırlıdır ve boş değildir, dolayısıyla supremumu bir reel sayıdır (bkz. Analiz 1); benzer biçimde $x > x_0$ için $g(x) \ge g(x_0)$ olduğundan infimum da sonludur. Ayrıca

$$L^- \le g(x_0) \le L^+$$

olur.
Şimdi g'nin x_0'da süreksiz olduğunu varsayalım. Her iki tek yönlü limit de sonlu olarak var olduğundan, süreksizlik birinci türdür (bkz. Analiz 1): ya $L^- < L^+$ (sıçrama) ya da $L^- = L^+ \neq g(x_0)$ olur. Ancak $L^- \le g(x_0) \le L^+$ eşitsizliği yüzünden ikinci seçenek olanaksızdır; $L^- = L^+$ ise $g(x_0)$ da bu ortak değere eşit olmak zorundadır ve g süreklidir. Öyleyse süreksizlik ancak sıçrama olabilir. Oysa $g = f'$ bir türev fonksiyonudur ve Sonuç 10.2 gereği bir türev, iç noktada birinci tür süreksizliğe sahip olamaz. Çelişki. Demek ki g, x_0'da süreklidir.
Adım 2: Uç noktalar. *I sol uç noktasını içeriyorsa, yani $a = \min I \in I$ ise, g'nin a'da sağdan sürekli olduğunu gösterelim. Yine Monoton Fonksiyonun Tek Yönlü Limitleri gereği*

$$L^+ = \lim_{x \to a^+} g(x) = \inf\{g(x) : x \in I, x > a\}$$

vardır ve g artan olduğundan $g(a) \le L^+$'dır. Eğer $g(a) < L^+$ olsaydı, $g(a) < \lambda < L^+$ olan bir λ seçerdik. L^+ bir infimum olduğundan $x \in I, x > a$ olan her x için $g(x) \ge L^+ > \lambda$'dır. Herhangi bir $v \in I, v > a$ alalım; o hâlde

$$f'(a) = g(a) < \lambda < g(v) = f'(v)$$

olur ve Teorem 10.1'yu $[a, v]$ üzerinde uygulayarak $f'(c) = \lambda$ olan bir $c \in (a, v)$ buluruz. Ama $c > a$ olduğundan $f'(c) = g(c) \geq L^+ > \lambda$ olmalıydı. Çelişki. Demek ki $g(a) = L^+$, yani g sağdan süreklidir ve a bir uç nokta olduğundan bu, g'nin a'da sürekli olması demektir (bkz. Analiz 1).
Sağ uç nokta $b = \max I \in I$ için akıl yürütme simetriktir: $L^- = \sup\{g(x) : x < b\} \leq g(b)$'dir; $L^- < g(b)$ olsaydı $L^- < \lambda < g(b)$ seçilir, $u \in I$, $u < b$ için $g(u) \leq L^- < \lambda < g(b)$ olur ve Teorem 10.1, $[u, b]$ üzerinde $f'(c) = \lambda$ olan bir $c \in (u, b)$ verirdi; oysa $c < b$ olduğundan $g(c) \leq L^- < \lambda$ olmalıydı. Çelişki. Böylece $g = f'$, I'nin her noktasında süreklidir.
■

Bu önerme ileride bir kez daha karşımıza çıkacak. Konveks ve Konkav Fonksiyonlar bölümünde göreceğimiz gibi, bir aralıkta türevlenebilir olan f fonksiyonu ancak ve ancak f' artan ise konvekstir (Teorem 15.3). Önerme 10.1 bunu şöyle tamamlar: **türevlenebilir bir konveks fonksiyonun türevi otomatik olarak süreklidir**, yani böyle bir fonksiyon kendiliğinden C^1 sınıfındandır (Tanım 6.2). Konveksliğin türevlenebilirlikle birleştiğinde ne kadar çok düzenlilik getirdiğini gösteren tipik bir olgudur bu.

10.7 Uygulamalar

Darboux teoremini ve sonuçlarını üç tipik durumda çalıştıralım. İlk şık, bir noktadaki türevin işaretiyle o noktanın çevresindeki monotonluk arasındaki farkı netleştirir; ikinci ve üçüncü şıklar, görüntü kümesinin aralık olması ölçütünü kullanır.

Örnek 10.3 (Darboux Teoreminin Kullanımı).

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $f'(0) = 1 > 0$ olduğunu, buna karşın f'nin 0'ın hiçbir komşuluğunda monoton olmadığını gösteriniz. Bu durumun Darboux teoremiyle nasıl bağdaştığını açıklayınız.

b) $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dirichlet fonksiyonu, x rasyonelse $D(x) = 1$, irrasyonelse $D(x) = 0$ olarak tanımlansın. D'nin hiçbir aralıkta ilkel fonksiyonu olmadığını gösteriniz.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) \in \mathbb{Z}$ olsun. f'nin bir birinci dereceden fonksiyon, yani $f(x) = kx + b$ biçiminde ($k \in \mathbb{Z}$) olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
a) Önce $f'(0)$'ı hesaplayalım. Fark oranı $x \neq 0$ için

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 + 2x \sin \frac{1}{x}$$

olur. $\left|2x \sin \frac{1}{x}\right| \leq 2 \mid x \mid \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle (bkz. Analiz 1) bu ifade 1'e yakınsar:

$$f'(0) = 1 > 0.$$

$x \neq 0$ için çarpım ve zincir kurallarıyla

$$f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}.$$

Şimdi iki dizi alalım. $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ için $\sin(2n\pi) = 0$, $\cos(2n\pi) = 1$ olduğundan

$$f'(x_n) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ için $\sin\big(\ (2n+1)\pi\ \big) = 0$, $\cos\big(\ (2n+1)\pi\ \big) = -1$ olduğundan

$$f'(y_n) = 1 + 0 + 2 = 3 > 0.$$

Her iki dizi de pozitif terimlidir ve 0'a yakınsar. Dolayısıyla verilen her $\delta > 0$ için $(0, \delta)$ aralığında hem f''nün negatif olduğu noktalar hem de pozitif olduğu noktalar vardır.
f bir $(-\delta, \delta)$ komşuluğunda artan olsaydı, o komşulukta $f' \geq 0$ olurdu (artan bir fonksiyonun fark oranları negatif olmadığından türev de negatif olamaz); oysa $f'(x_n) = -1 < 0$'dır. f azalan olsaydı $f' \leq 0$ olurdu; oysa $f'(y_n) = 3 > 0$'dır. Demek ki f, 0'ın hiçbir komşuluğunda monoton değildir. Özel olarak "$f'(x_0) > 0$ ise f, x_0 çevresinde artandır" cümlesi **yanlıştır**; doğru olan yalnızca şudur: $f'(x_0) > 0$ ise x_0'a yeterince yakın $x > x_0$ için $f(x) > f(x_0)$ ve $x < x_0$ için $f(x) < f(x_0)$ olur.
Bu durumda Darboux teoremiyle bir çelişki yoktur; tam tersine teorem, olan biteni açıklar. f', 0'ın her komşuluğunda hem -1 hem 3 değerini aldığından Sonuç 10.1 gereği aradaki bütün değerleri, özel olarak 0'ı da alır. Yani f''nün 0'a yakınsayan sonsuz çoklukta sıfır yeri vardır; f'nin 0 çevresinde sonsuz çoklukta kritik noktası bulunur ve fonksiyon bu noktalar arasında sürekli olarak yön değiştirir.
b) I en az iki nokta içeren herhangi bir aralık olsun. Her aralık hem rasyonel hem irrasyonel sayı içerir (bkz. Analiz 1 ve İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu). Dolayısıyla D'nin I üzerindeki görüntüsü

$$D(I) = \{0, 1\}$$

olur. Bu küme bir aralık değildir: 0 ile 1 kümededir ama aralarındaki $\dfrac{1}{2}$ kümede değildir.
Eğer D'nin I üzerinde bir F ilkeli olsaydı, F türevlenebilir ve $F' = D$ olurdu; Sonuç 10.1 (b) gereği $F'(I) = D(I)$ bir aralık olmak zorundaydı. Çelişki. Demek ki D'nin hiçbir aralıkta ilkel fonksiyonu yoktur.
Dikkat edilecek nokta şudur: D'nin süreksizliklerinin hiçbiri birinci tür değildir (D'nin hiçbir noktada tek yönlü limiti yoktur), bu yüzden Sonuç 10.2 burada bir engel üretmez. Engeli üreten, görüntü kümesinin aralık olmamasıdır.
c) f, $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Sonuç 10.1 (b) gereği $J = f'(\mathbb{R})$ bir aralıktır. Varsayım gereği $J \subseteq \mathbb{Z}$'dir.
J birden fazla nokta içerseydi, $m, n \in J$, $m < n$ olan iki tam sayı bulunurdu; J bir aralık olduğundan m ile n arasındaki her sayı J'de olurdu, örneğin $m + \dfrac{1}{2} \in J$. Ama $m + \dfrac{1}{2}$ bir tam sayı değildir ve $J \subseteq \mathbb{Z}$ ile çelişir. Öyleyse J tek bir noktadan oluşur: bir $k \in \mathbb{Z}$ için her x'te $f'(x) = k$'dır.
$g(x) = f(x) - kx$ diyelim. g türevlenebilirdir ve $g'(x) = f'(x) - k = 0$'dır. Türevi bir aralıkta özdeş olarak sıfır olan fonksiyon sabittir (Sonuç 8.1): $g(x) = b$ olan bir $b \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan

$$f(x) = kx + b, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad b = f(0)$$

elde edilir. Aynı akıl yürütme, f''nün değerlerinin içi boş herhangi bir kümeye (örneğin $\mathbb{Z}$'ye, sonlu bir kümeye ya da $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesine) düşmesi hâlinde de aynen işler.
■

10.8 Alıştırmalar

Alıştırma 10.1 (Darboux Teoremi Üzerine).

a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir, $f'(-1) = -3$ ve $f'(1) = 2$ olsun. Şunları gösteriniz: (i) $f'(c) = 0$ olan bir $c \in (-1, 1)$ vardır; (ii) $f'(c_1) = 1$ olan bir $c_1 \in (-1, 1)$ vardır; (iii) f, $[-1, 1]$ üzerindeki en küçük değerini bir iç noktada alır.

b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \neq 0$ için $h(x) = 1$, $h(0) = 0$ ile tanımlansın. h'nin 0'ı iç noktası olarak içeren hiçbir aralıkta ilkel fonksiyonu olmadığını gösteriniz. Ayrıca $[0, 1]$ aralığında da ilkelinin bulunmadığını doğrudan hesapla doğrulayınız.

c) Taban fonksiyonu $\lfloor x \rfloor$'in $(0, 3)$ aralığında ilkel fonksiyonu olmadığını, buna karşın $(1, 2)$ aralığında ilkelinin bulunduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x\neq 0$ için $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$, $f(0)=0$ ile tanımlansın. f'nin her noktada türevlenebilir olduğunu gösteriniz, f''yü hesaplayınız, f''nün 0'ın her komşuluğunda sınırsız olduğunu kanıtlayınız ve f''nün 0'daki süreksizliğinin türünü belirleyiniz.

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ türevlenebilir ve her x için $\big(f'(x)\big)^2=1$ olsun. Bir $b\in\mathbb{R}$ için $f(x)=x+b$ ya da $f(x)=-x+b$ olduğunu gösteriniz.

f) I bir aralık, $f:I\to\mathbb{R}$ türevlenebilir ve her $x\in I$ için $f'(x)\neq 0$ olsun. f'nin birebir olduğunu, $f(I)$'nin bir aralık olduğunu ve $f^{-1}:f(I)\to I$ ters fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu gösteriniz; $\big(f^{-1}\big)'$ için bir formül yazınız.

Çözüm.
a) (i) $f'(-1)=-3<0<2=f'(1)$ olduğundan $\lambda=0$ sayısı $f'(-1)$ ile $f'(1)$ arasındadır. Teorem 10.1 gereği $f'(c)=0$ olan bir $c\in(-1,1)$ vardır.
(ii) $-3<1<2$ olduğundan $\lambda=1$ de $f'(-1)$ ile $f'(1)$ arasındadır; aynı teorem $f'(c_1)=1$ olan bir $c_1\in(-1,1)$ verir. Aslında Teorem 10.1 gereği f' fonksiyonu **açık** $(-3,2)$ aralığındaki bütün değerleri $(-1,1)$ içinde alır. Uç değerler -3 ve 2 için böyle bir güvence yoktur: bunlar yalnızca $x=-1$ ve $x=1$ noktalarında alınıyor olabilir.
(iii) f türevlenebilir olduğundan süreklidir (Teorem 3.1); $[-1,1]$ kapalı ve sınırlı olduğundan f en küçük değerini bir $c\in[-1,1]$ noktasında alır (bkz. Analiz 1). $f'(-1)<0$ olduğundan, Teorem 10.1'nun ispatındaki Adım 3'teki hesabın aynısıyla, -1'e yeterince yakın bir $x_1>-1$ için $f(x_1)<f(-1)$ olur; demek ki en küçük değer -1'de alınmaz. $f'(1)>0$ olduğundan, Adım 4'teki hesapla, 1'e yeterince yakın bir $x_2<1$ için $f(x_2)<f(1)$ olur; en küçük değer 1'de de alınmaz. Öyleyse $c\in(-1,1)$'dir.
b) h'nin 0'daki süreksizliği kaldırılabilir türdendir: $\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^-}h(x)=1$ olduğundan $\lim_{x\to0}h(x)=1$ vardır, ama $h(0)=0\neq1$'dir (bkz. Analiz 1). Bu birinci tür bir süreksizliktir. 0'ı iç noktası olarak içeren bir I aralığında $H'=h$ olacak biçimde bir H bulunsaydı, H' bir türev olarak 0'da birinci tür süreksizliğe sahip olamazdı (Sonuç 10.2). Çelişki.
$[0,1]$ aralığında 0 bir uç noktadır, dolayısıyla yukarıdaki sonuç doğrudan uygulanamaz; hesabı elle yapalım. $H:[0,1]\to\mathbb{R}$, $H'=h$ olsun. $(0,1]$ üzerinde $H'(x)=1$ olduğundan, türevleri eşit olan fonksiyonlar bir sabitle ayrıldığından (Sonuç 8.2), bir $C\in\mathbb{R}$ için $H(x)=x+C$ olur ($x\in(0,1]$). H türevlenebilir olduğundan süreklidir, dolayısıyla

$$H(0)=\lim_{x\to0^+}H(x)=\lim_{x\to0^+}(x+C)=C.$$

Şimdi 0'daki sağdan türevi hesaplayalım:

$$H'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{H(x)-H(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x+C)-C}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1.$$

Oysa $H'=h$ olması $H'(0)=h(0)=0$ gerektirir. $1\neq0$ olduğundan böyle bir H yoktur. Aynı hesap $[-1,0]$ aralığı için de yapılabilir; kısacası h, 0'ı içeren hiçbir aralıkta ilkele sahip değildir.
c) $\lfloor x\rfloor$ fonksiyonu $x=1$ noktasında sıçrama süreksizliğine sahiptir: $\lim_{x\to1^-}\lfloor x\rfloor=0$, $\lim_{x\to1^+}\lfloor x\rfloor=1$ ve bu iki sonlu limit farklıdır (bkz. Analiz 1). 1 noktası $(0,3)$ aralığının bir iç noktasıdır. Eğer $(0,3)$ üzerinde $F'=\lfloor x\rfloor$ olacak biçimde bir F bulunsaydı, Sonuç 10.2 gereği F''nün 1'deki süreksizliği ikinci tür olmalıydı; oysa sıçramadır. Çelişki. (Aynı akıl yürütme $x=2$ noktasıyla da yapılabilir.)
$(1,2)$ aralığında ise her x için $1<x<2$, dolayısıyla $\lfloor x\rfloor=1$'dir; yani fonksiyon bu aralıkta sabittir. $F(x)=x+C$ alırsak $F'(x)=1=\lfloor x\rfloor$ olur; demek ki $(1,2)$ üzerinde ilkel vardır ve genel ilkel $F(x)=x+C$'dir.
d) $x\neq0$ için çarpım ve zincir kurallarıyla

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}+x^2\cos\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

0'da fark oranı

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=x\sin\frac{1}{x^2}$$

olur ve $\left|x\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\le|\,x\,|\to0$ olduğundan (bkz. Analiz 1) $f'(0)=0$'dır. Demek ki f her noktada türevlenebilirdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sınırsızlık. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ alalım; $x_n > 0$ ve $x_n \to 0$'dır. $\dfrac{1}{x_n^2} = 2n\pi$ olduğundan $\sin(2n\pi) = 0$, $\cos(2n\pi) = 1$ ve

$$f'(x_n) = 0 - \frac{2}{x_n} = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty.$$

Her $\delta > 0$ için yeterince büyük n'lerde $x_n \in (0, \delta)$ olduğundan f', 0'ın hiçbir komşuluğunda sınırlı değildir. (Simetrik olarak $-x_n$ noktalarında $f'(-x_n) = 2\sqrt{2n\pi} \to +\infty$'dur.)
Süreksizliğin türü. $f'(x_n) \to -\infty$ olduğundan $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ sonlu olarak yoktur; süreksizlik ikinci türdür. Üstelik limit $-\infty$ da değildir: $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}}$ alırsak $\dfrac{1}{z_n^2} = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ olur, $\cos\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ ve $\sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ olduğundan

$$f'(z_n) = 2z_n \cdot 1 - 0 = 2z_n \to 0.$$

Sağdan yaklaşan iki dizi $-\infty$ ve 0 gibi farklı davranışlar verdiğinden $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ hiçbir anlamda yoktur. Soldan da durum aynıdır. Sonuç 10.2 bunu zaten öngörüyordu: f' süreksizse ikinci tür olmak zorundaydı.
e) $\big(f'(x)\big)^2 = 1$ eşitliği $f'(x) \in \{-1, 1\}$ demektir. $f, \mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Sonuç 10.1 (b) gereği $J = f'(\mathbb{R})$ bir aralıktır ve $J \subseteq \{-1, 1\}$'dir. J iki noktayı da içerseydi, aralık olduğundan -1 ile 1 arasındaki 0 sayısını da içermesi gerekirdi; ama $0 \notin \{-1, 1\}$'dir. Öyleyse J tek noktalıdır: ya her x için $f'(x) = 1$ ya da her x için $f'(x) = -1$'dir.
Birinci hâlde $g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunun türevi özdeş olarak sıfırdır, dolayısıyla g sabittir (Sonuç 8.1): $f(x) = x + b$. İkinci hâlde $g(x) = f(x) + x$ sabittir: $f(x) = -x + b$. Burada $b = f(0)$'dır.
Aynı sonuca Sonuç 10.3 ile de varılır: f' hiçbir yerde sıfır olmadığından sabit işaretlidir; işaret pozitifse $f' \equiv 1$, negatifse $f' \equiv -1$ olur.
f) Hipotez tam olarak Sonuç 10.3'in hipotezidir. Buna göre ya her $x \in I$ için $f'(x) > 0$'dır ve f kesin artandır, ya da her x için $f'(x) < 0$'dır ve f kesin azalandır. Her iki hâlde de f kesin monotondur, dolayısıyla birebirdir.
f türevlenebilir olduğundan süreklidir (Teorem 3.1); sürekli bir fonksiyonun aralık görüntüsü aralıktır (bkz. Analiz 1), yani $J = f(I)$ bir aralıktır. $f : I \to J$ birebir ve örtendir, dolayısıyla tersi $f^{-1} : J \to I$ tanımlıdır; kesin monoton ve sürekli bir fonksiyonun tersi de aynı yönde kesin monoton ve süreklidir (Teorem 1.3).
Son olarak $y_0 \in J$ alalım ve $x_0 = f^{-1}(y_0)$ diyelim. f, x_0'da türevlenebilirdir ve $f'(x_0) \neq 0$'dır; ters fonksiyonun türevi teoremi (Teorem 4.2) gereği f^{-1} de y_0'da türevlenebilirdir ve

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(\, f^{-1}(y_0)\,\right)}.$$

$y_0 \in J$ keyfî olduğundan f^{-1}, J üzerinde türevlenebilirdir. Örnek olarak $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ olduğundan bu koşulları sağlar; f kesin artan, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ve f^{-1} her yerde türevlenebilirdir; örneğin $f(1) = 2$ olduğundan $\big(f^{-1}\big)'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$'tür.
■

Bu bölümde türev fonksiyonunun, sürekli olmasa bile ara değer özelliğini taşımak zorunda olduğunu gördük ve bunun bir fonksiyonun ilkelinin var olmasına koyduğu engelleri belirledik. Sıradaki bölümde türevi bambaşka bir amaçla, belirsiz limit biçimlerini çözmek için kullanacağız: L'Hôpital Kuralı.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. L'Hôpital Kuralı

Analiz 1'de limit hesaplarken sık sık şöyle bir duvara çarpmıştık: pay da payda da 0'a gidiyor, ya da ikisi birden $+\infty$'a gidiyor; limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) bu durumda hiçbir şey söylemiyor. $\dfrac{\sin x}{x}$ için geometrik bir eşitsizlik kurmuş (bkz. Analiz 1), $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ için monotonluk ve sınırlılık üzerine ayrı bir uğraş vermiştik; her belirsizlik için ayrı bir hile bulmak zorunda kalıyorduk.

Türev, bu hilelerin yerine geçecek tek bir yöntem verir. Fikir basittir: pay ve payda aynı noktada sıfırlanıyorsa, ikisi de o nokta yakınında kendi teğetleri gibi davranır; dolayısıyla oranın limiti, teğetlerin eğimlerinin — yani türevlerin — oranı olmalıdır. Bu sezgiyi kesin bir teoreme dönüştüren araç, Rolle ve ortalama değer teoremleri bölümünde ispatladığımız **Cauchy ortalama değer teoremi**dir; hipotezlerin sağlamasını yaparken de bir önceki bölümde gördüğümüz Darboux teoremi işimize yarayacaktır. Sonuç, 1696'da Guillaume de l'Hôpital'in yayımladığı ilk diferansiyel hesap kitabında yer aldığı için onun adıyla anılır; gerçek sahibi ise l'Hôpital'e ders veren Johann Bernoulli'dir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: hangi ifadelerin **belirsiz biçim** olduğunu ve "belirsiz" sözcüğünün ne anlama geldiğini; türev tanımından çıkan basit L'Hôpital kuralını; $0/0$ ve ∞/∞ biçimleri için genel kuralları ve tam ispatlarını; kalan beş biçimin bu ikisine nasıl indirgendiğini; kuralın hangi durumlarda çalışmadığını; logaritma, kuvvet ve üstel fonksiyonların büyüme hızlarının kesin sıralamasını.

11.1 Belirsiz Biçimler

Limit aritmetiği bize şunu söyler: $f(x)\to A$ ve $g(x)\to B$ ise $f(x)/g(x)\to A/B$ — **ama** $B\neq 0$ koşuluyla. $B=0$ ve $A\neq 0$ ise oran mutlak değerce sınırsız büyür. Geriye kalan tek sorunlu durum $A=B=0$'dır ve o durumda oranın limiti hakkında hiçbir şey söylenemez. Benzer boşluklar başka işlemlerde de vardır.

Tanım 11.1 (Belirsiz Biçimler). $x\to c$ (burada c bir reel sayı, c^+, c^-, $+\infty$ ya da $-\infty$ olabilir) iken aşağıdaki yedi durumdan biri ortaya çıkıyorsa, ilgili ifadeye o noktada **belirsiz biçim** (indeterminate form) denir:

$$\frac{0}{0},\qquad \frac{\infty}{\infty},\qquad \infty-\infty,\qquad 0\cdot\infty,\qquad 1^{\infty},\qquad 0^{0},\qquad \infty^{0}.$$

Örneğin $\dfrac{0}{0}$ biçimi, $\lim f(x)=\lim g(x)=0$ iken $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ oranı için; 1^{∞} biçimi $f(x)\to 1$, $g(x)\to\pm\infty$ iken, ∞^0 biçimi ise $f(x)\to+\infty$, $g(x)\to 0$ iken $f(x)^{g(x)}$ ifadesi için kullanılır.

Belirsiz sözcüğü "limit yoktur" demek değildir; "yalnızca bu bilgiye bakarak limit belirlenemez" demektir.

Bu son cümleyi ciddiye almak gerekir. Her biçim için, aynı biçimde olup **farklı** sonuçlar veren örnekler verelim.

Biçim	Bir örnek	Başka bir örnek	Üçüncü bir örnek
$\dfrac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$	$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$	$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2}=+\infty$
$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=2$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$
$\infty-\infty$	$\lim_{x\to\infty}\big[\,(x+7)-x\,\big]=7$	$\lim_{x\to\infty}\big[\,x-x\,\big]=0$	$\lim_{x\to\infty}\big[\,x^2-x\,\big]=+\infty$
$0\cdot\infty$	$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\frac{5}{x}=5$	$\lim_{x\to 0^+} x^2\cdot\frac{1}{x}=0$	$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\frac{1}{x^2}=+\infty$
1^{∞}	$\lim_{x\to\infty}1^{x}=1$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=+\infty$

 CC BY-NC-SA 4.0

Biçim	Bir örnek	Başka bir örnek	Üçüncü bir örnek
0^0	$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$	$\lim_{x\to 0^+} (e^{-1/x})^x = e^{-1}$	$\lim_{x\to 0^+} (e^{-1/x^2})^x = 0$
∞^0	$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} (e^x)^{1/x} = e$	$\lim_{x\to\infty} (e^{x^2})^{1/x} = +\infty$

Son iki satırın doğrulanması bir satırlık hesaptır: $(e^{-1/x})^x = e^{-1}$, $(e^{-1/x^2})^x = e^{-1/x} \to 0$, $(e^x)^{1/x} = e$ ve $(e^{x^2})^{1/x} = e^x \to +\infty$; her birinde taban ile üsün eğilimleri sütunun başındaki biçimi verir. 1^∞ satırının ikinci örneğini bölümün sonunda L'Hôpital kuralıyla hesaplayacak, üçüncüsünü de ondan türeteceğiz. Demek ki yedi biçimin her biri için, aynı biçimde olup önceden verilmiş herhangi bir sayıya (hatta $\pm\infty$'a) yakınsayan örnekler kurulabilir; bu biçimlerde limit, fonksiyonların **kendisine** bakılarak hesaplanmak zorundadır.

i Belirsiz olmayan biçimler

Her "tuhaf" ifade belirsiz değildir: $f(x) \to 0^+$ ve $g(x) \to +\infty$ iken $f(x)^{g(x)} \to 0$'dır, yani 0^∞ **belirsiz değildir**. Aynı biçimde

$$\infty + \infty = +\infty, \qquad \infty \cdot \infty = +\infty, \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty, \qquad \infty^\infty = +\infty, \qquad 0^{-\infty} = +\infty$$

kısaltmalarının hepsi doğrudur (bunlar Limit Kuralları: Sonsuzdaki Limitler ve Sonsuz Limitler türünden sonuçlardır). Belirsizlik yalnızca iki eğilimin **birbirini götürdüğü** yedi durumda ortaya çıkar. Bu yüzden bir limite başlamadan önce yapılacak ilk iş, ifadenin gerçekten belirsiz olup olmadığını saptamaktır; belirsiz değilse L'Hôpital kuralına gerek yoktur ve kuralı uygulamak yanlış sonuç verir.

11.2 Basit Hâl: Türevlerin Oranı

Genel teoreme geçmeden önce, doğrudan türev tanımından çıkan basit hâli görelim. Bu hâl kuralın neden doğru olduğunu da anlatır: f ve g aynı a noktasında sıfırlanıyorsa a yakınında $f(x) \approx f'(a)(x-a)$, $g(x) \approx g'(a)(x-a)$'dır; oranda $(x-a)$ sadeleşir ve $f'(a)/g'(a)$ kalır.

Teorem 11.1 (L'Hôpital Kuralı, Basit Hâl). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık, $a \in I$ ve $f, g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları a noktasında türevlenebilir olsun. Ayrıca*

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad \text{ve} \qquad g'(a) \neq 0$$

olsun. O hâlde a'nın delinmiş bir komşuluğunda $g(x) \neq 0$'dır ve

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

İspat.
Adım 1: paydanın sıfırdan farklı olduğu bir komşuluk. *g fonksiyonu a'da türevlenebilir olduğundan, fark oranı (Tanım 2.1) için*

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \neq 0$$

olur. Limitin işaret koruma özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $-\varepsilon = \dfrac{|\, g'(a)\,|}{2}$ alarak — öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $0 < |\, x - a\,| < \delta$ ve $x \in I$ iken

$$\left|\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right| > \frac{|\, g'(a)\,|}{2} > 0$$

sağlanır. Özel olarak bu x'ler için $g(x) - g(a) \neq 0$, yani $g(a) = 0$ olduğundan $g(x) \neq 0$'dır. Demek ki $f(x)/g(x)$ oranı a'nın delinmiş bir komşuluğunda tanımlıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: oranı fark oranlarına çevirmek. *$0 < |\, x-a\, | < \delta$ olsun. $f(a) = g(a) = 0$ olduğundan pay ve paydaya birer sıfır ekleyebiliriz; sonra hem payı hem paydayı $x - a \neq 0$ ile bölelim:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Adım 3: limite geçmek. *Türevin tanımı (Tanım 2.2) gereği*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a), \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \neq 0.$$

Paydanın limiti sıfırdan farklı olduğundan bölüm için limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) uygulanabilir:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

■

Bu basit hâl bile pek çok limiti anında verir: $f(x) = e^x - 1, g(x) = \sin x$ için $f(0) = g(0) = 0$ ve $g'(0) = 1 \neq 0$ olduğundan (Teorem 5.2, Teorem 5.4)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{e^0}{\cos 0} = 1$$

olur.

⚠ Hipotezi atlarsanız yanlış sonuç çıkar

$f(a) = g(a) = 0$ koşulu vazgeçilmezdir. $f(x) = x + 17$, $g(x) = 2x + 3$ ve $a = 0$ alalım. Bu ifade $x \to 0$ iken belirsiz **değildir**; payda $3 \neq 0$'a gittiği için limit doğrudan bölüm kuralıyla $\lim_{x\to 0} \frac{x+17}{2x+3} = \frac{17}{3}$ olarak hesaplanır. Oysa türevlerin oranı $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}$'dir ve $\frac{17}{3} \neq \frac{1}{2}$'dir. Kural burada uygulanamaz, çünkü $f(0) = 17 \neq 0$'dır.
Kısacası: **önce belirsizliği doğrula, sonra türev al.** Bu, L'Hôpital kuralıyla ilgili en sık yapılan hatadır.

11.3 Ortak Bir Gözlem: Payda Neden Sıfırlanmaz?

Aşağıdaki iki teoremin ikisinde de "(a, b) üzerinde $g'(x) \neq 0$" hipotezi var. Bu hipotez göründüğünden güçlüdür ve ispatlarda iki ayrı yerde işimize yarayacak; bir kez baştan çıkaralım. f, g fonksiyonları (a, b) üzerinde türevlenebilir ve her $x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun.
(i) g birebirdir. Türev fonksiyonu g' ara değer özelliğini taşır (Teorem 10.1). g' hem pozitif hem negatif değer alsaydı aradaki 0 değerini de alması gerekirdi; oysa g' hiç sıfırlanmıyor. Demek ki g' bütün (a, b) üzerinde ya hep pozitiftir ya hep negatiftir; monotonluk testi (Sonuç 8.3) gereği g kesin monotondur (Tanım 1.1), dolayısıyla birebirdir:

$$\alpha, \beta \in (a, b), \quad \alpha \neq \beta \quad \Rightarrow \quad g(\alpha) \neq g(\beta).$$

Bu, Cauchy ortalama değer teoremini $[\alpha, \beta]$ üzerinde uygulayabilmek için gereken koşuldur. Gözlemin tamamı bir önceki bölümde ayrıca kaydedilmişti: Sonuç 10.3, türevi hiç sıfırlanmayan bir fonksiyonun bir aralık üzerinde kesin monoton olduğunu söyler. (Aynı sonuç Rolle teoremiyle de görülür: $g(\alpha) = g(\beta)$ olsaydı (α, β) içinde g' sıfırlanırdı.)
(ii) $0/0$ hâlinde g hiç sıfırlanmaz. Ayrıca $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ olsun; g'nin kesin artan olduğunu varsayabiliriz (kesin azalan hâlde g yerine $-g$ alınır, bu hem f/g'yi hem f'/g''yü -1 ile çarptığından teoremlerin ifadesini bozmaz). $x \in (a, b)$ olsun. Her $t \in (a, x)$ için $g(t) < g(x)$'tir; $t \to a^+$ limitine geçince sıralamanın korunmasıyla (bkz. Analiz 1) $0 \leq g(x)$ buluruz. Bu her x için doğru olduğuna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

bir $t_0 \in (a,x)$ seçip $g(x) > g(t_0) \geq 0$ yazabiliriz: $g(x) > 0$'dır, yani g hiç sıfırlanmaz ve $f(x)/g(x)$ her yerde tanımlıdır.

11.4 L'Hôpital Kuralı I: $0/0$ Biçimi

Şimdi asıl teoreme geliyoruz. Basit hâlden farkı büyüktür: burada f ve g'nin a'da türevlenebilir olması — hatta a'da tanımlı olması — istenmiyor, a sonsuz bile olabilir. İstenen tek şey, a'nın sağındaki bir aralıkta türevlenebilirlik ve $g' \neq 0$'dır.

> **i** Gösterim üzerine
>
> Teoremde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ yazıp $x \to a^+$ diyeceğiz. a bir reel sayıysa bu alışılmış sağdan limittir; $a = -\infty$ ise $x \to -\infty$ anlamına gelir (bkz. Analiz 1). Her iki hâlde de "$x \to a^+$ iken bir özellik sonunda sağlanır" cümlesi tek bir biçimde okunur: **öyle bir $c \in (a,b)$ vardır ki her $x \in (a,c)$ için o özellik sağlanır.** İspatta yalnızca bu okumayı kullanacağız.

Teorem 11.2 (L'Hôpital Kuralı I). *$-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve her $x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Ayrıca*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

olsun. O hâlde:

1. $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ *ise* $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$*'dir.*
2. $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ *ise* $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$*'dur; aynı biçimde limit $-\infty$ ise sonuç da $-\infty$'dur.*

İspat.
Yukarıdaki ortak gözlemin (i) ve (ii) maddeleri gereği g birebirdir ve (a,b) üzerinde hiç sıfırlanmaz. Dolayısıyla $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ oranı (a,b)'nin her noktasında tanımlıdır ve $a < \alpha < \beta < b$ olduğunda $g(\beta) - g(\alpha) \neq 0$'dır.

Adım 1: Cauchy ortalama değer teoremini uygulamak. *$a < \alpha < \beta < b$ olsun. f ve g, $[\alpha, \beta]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan orada süreklidir de (Teorem 3.1); ayrıca $g(\alpha) \neq g(\beta)$'dır. Cauchy ortalama değer teoremi gereği öyle bir $u \in (\alpha, \beta)$ vardır ki*

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}. \tag{$*$}$$

Bu eşitlik ispatın yükünü taşır: solda yalnızca f ve g'nin değerleri, sağda yalnızca türevlerin oranı vardır.

Adım 2 (birinci kısım): türevlerin oranını kuşatmak. *$\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ olsun ve bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Limit tanımı gereği öyle bir $c \in (a,b)$ vardır ki her $u \in (a,c)$ için*

$$L - \varepsilon < \frac{f'(u)}{g'(u)} < L + \varepsilon.$$

Adım 3: kuşatmayı kirişlere taşımak. *$a < \alpha < \beta \leq c$ olsun. $(*)$'daki u noktası $(\alpha, \beta) \subseteq (a,c)$ içindedir; öyleyse Adım 2'deki eşitsizlik u için geçerlidir ve $(*)$ ile*

$$L - \varepsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \varepsilon \qquad (\text{her } \ a < \alpha < \beta \leq c \ \text{ için})$$

elde ederiz.

Adım 4: $\alpha \to a^+$ limitine geçmek. *Şimdi $\beta \in (a,c]$ noktasını **sabit** tutup α'yı a'ya yaklaştıralım. Varsayım gereği $f(\alpha) \to 0$ ve $g(\alpha) \to 0$'dır; $g(\beta) \neq 0$ olduğundan bölüm için limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) uygulanabilir:*

$$\lim_{\alpha\to a^+}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f(\beta)-0}{g(\beta)-0}=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}.$$

Adım 3'teki eşitsizlikler α'nın (a,β) içindeki her değeri için geçerli olduğundan, limitlerde sıralamanın korunması (bkz. Analiz 1) ile

$$L-\varepsilon\le\frac{f(\beta)}{g(\beta)}\le L+\varepsilon$$

buluruz; limite geçerken katı eşitsizliklerin zayıflaması sorun değildir.

Adım 5: sonuç. *Son eşitsizlik $\left|\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}-L\right|\le\varepsilon$ demektir ve her $\beta\in(a,c)$ için geçerlidir. Verilen bir $\varepsilon_0>0$ için bütün akıl yürütmeyi $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_0}{2}$ ile tekrarlarsak, uygun bir c için her $\beta\in(a,c)$'de $\left|\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}-L\right|\le\dfrac{\varepsilon_0}{2}<\varepsilon_0$ olur. Bu tam olarak $\lim\limits_{\beta\to a^+}\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}=L$ demektir; birinci kısım tamamlanmıştır.*

Adım 6 (ikinci kısım): sonsuz limit hâli. *Şimdi $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ olsun ve herhangi bir $M\in\mathbb{R}$ verilsin. Sonsuz limitin tanımı (bkz. Analiz 1) gereği öyle bir $c\in(a,b)$ vardır ki her $u\in(a,c)$ için $\dfrac{f'(u)}{g'(u)}>M+1$'dir. Adım 3'teki akıl yürütmenin aynısıyla, $a<\alpha<\beta\le c$ için $(*)$ ile*

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}>M+1$$

elde ederiz. β'yı sabitleyip $\alpha\to a^+$ limitine geçelim; Adım 4'teki hesap aynen geçerlidir ve sıralamanın korunmasıyla her $\beta\in(a,c)$ için $\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}\ge M+1>M$ buluruz. M keyfî olduğundan $\lim\limits_{\beta\to a^+}\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}=+\infty$'dur.

Limit $-\infty$ ise f yerine $-f$ alalım: $-f$ de aynı hipotezleri sağlar ve $\dfrac{(-f)'}{g'}=-\dfrac{f'}{g'}\to+\infty$'dur. Az önce ispatladığımız hâl gereği $\dfrac{-f}{g}\to+\infty$, yani $\dfrac{f}{g}\to-\infty$'dur.

■

Kuralı kullanırken eşitlik işaretinin üstüne kısaca "L.H." yazmak yaygın bir alışkanlıktır; biz de öyle yapacağız. Ama zincirin **sondan başa** okunduğunu unutmayalım: önce türevlerin oranının limitinin var olduğunu görürüz, ancak ondan sonra teorem asıl oranın limitinin de var ve aynı olduğunu söyler.

Örnek 11.1 (İki Temel Hesap). Aşağıdaki limitleri L'Hôpital kuralıyla hesaplayınız.

1. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

Çözüm.

1. $x\to0^+$ iken $\sin x\to0$ ve $\sqrt{x}\to0$ olduğundan bu bir $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğidir. $f(x)=\sin x$ ve $g(x)=\sqrt{x}$ alalım; ikisi de $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\neq0$ olduğundan Teorem 11.2'in bütün hipotezleri $(a,b)=(0,1)$ üzerinde sağlanır. Türevlerin oranı:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2\sqrt{x}\cos x.$$

$x\to0^+$ iken $2\sqrt{x}\to0$ ve $\cos x\to1$ olduğundan (bkz. Analiz 1) bu çarpımın limiti 0'dır. Öyleyse

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\overset{\text{L.H.}}{=}\lim_{x\to0^+}2\sqrt{x}\cos x=0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı sonuç kural olmadan da bulunur: $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} \to 1 \cdot 0 = 0$ (bkz. Analiz 1).

2. $x \to 1$ iken $\ln x \to 0$ ve $x - 1 \to 0$; yine $\dfrac{0}{0}$ biçimi. $f(x) = \ln x$, $g(x) = x - 1$ alalım; $g'(x) = 1 \neq 0$'dır ve iki fonksiyon da $(0, \infty)$ üzerinde türevlenebilirdir (Teorem 5.1). Limit iki yönlü olduğundan kuralı $(1, 2)$ aralığında sağdan, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığında soldan uygularız; iki tek yönlü limit de aynı çıkar (bkz. Analiz 1):

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

■

Bazen bir kez türev almak belirsizliği yok etmeye yetmez; o zaman kuralı yeniden uygularız — ama her seferinde yeni ifadenin de belirsiz olduğunu doğrulamak koşuluyla.

Örnek 11.2 (Kuralın Ard Arda Uygulanması). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Çözüm.

1. $x \to 0$ iken $1 - \cos x \to 0$ ve $x^2 \to 0$: $\dfrac{0}{0}$ biçimi. Paydanın türevi $2x$, $x \neq 0$ için sıfırdan farklıdır; o yüzden kuralı 0'ın sağında ve solunda ayrı ayrı uygulayabiliriz. Bir kez türev alalım:

$$\frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \frac{\sin x}{2x}.$$

Bu da $x \to 0$ iken $\dfrac{0}{0}$ biçimindedir; paydanın türevi $2 \neq 0$'dır. İkinci kez türev alalım:

$$\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \frac{\cos x}{2} \to \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Son ifade belirsiz değildir; durmamız gereken yer burasıdır. Zinciri sondan başa okuyarak

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

buluruz. İkinci adımı Sinüs x Bölü x Limiti ile de bitirebilirdik.

2. $x \to 0$ iken $e^x - 1 \to 0$ ve $x \to 0$: $\dfrac{0}{0}$ biçimi. Paydanın türevi $1 \neq 0$'dır ve

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$

Bu limit aslında e^x fonksiyonunun 0 noktasındaki türevinin tanımıdır (Tanım 2.2); yani kural burada kendi ispatında kullandığı bilgiyi geri veriyor. Yanlış değildir ama gereksizdir: Teorem 11.1 zaten aynı şeyi söyler.

■

11.4.1 Kuralın Öteki Sürümleri

Teoremi $x \to a^+$ için ifade ettik. Uygulamalarda bize soldan limit, iki yönlü limit ve $x \to \pm\infty$ hâlleri de gerekir. Hepsi ispatlanmış hâlden çıkar; ayrı ispat yazmaya gerek yoktur.

Soldan limit ($x \to b^-$). $F(t) = f(-t)$ ve $G(t) = g(-t)$ fonksiyonlarını $(-b, -a)$ aralığında tanımlayalım. Zincir kuralı (Teorem 4.1) gereği $F'(t) = -f'(-t)$ ve $G'(t) = -g'(-t)$'dir; dolayısıyla G' hiç sıfırlanmaz, $\dfrac{F(t)}{G(t)} = \dfrac{f(-t)}{g(-t)}$ ve $\dfrac{F'(t)}{G'(t)} = \dfrac{f'(-t)}{g'(-t)}$ olur. $t \to (-b)^+$ olması $x = -t \to b^-$ olması demektir; Teorem 11.2'i F, G çiftine $(-b, -a)$ üzerinde uygularsak $x \to b^-$ hâlindeki L'Hôpital kuralını elde ederiz.

İki yönlü limit ($x \to a$). f ve g, a'yı içeren bir açık aralıkta (belki a hariç) türevlenebilir, $g' \neq 0$ ve $f, g \to 0$ olsun. Kuralı a'nın sağındaki ve solundaki aralıkta ayrı ayrı uygularız; her iki tek yönlü limit de L çıkar, Limitin Varlığı ile Sağ ve Sol Limitler gereği iki yönlü limit de L'dir.
$x \to +\infty$ ve $x \to -\infty$. Bunlar için yeni bir şey gerekmez: teoremde $b = \infty$ alıp soldan sürümü kullanmak $x \to +\infty$ hâlini, $a = -\infty$ alıp teoremi doğrudan kullanmak $x \to -\infty$ hâlini verir.

Sonsuzdaki hâlin ikinci bir ispatı

$x \to +\infty$ hâli $t = \dfrac{1}{x}$ değişken değiştirmesiyle $t \to 0^+$ hâline de indirgenir. $\varphi(t) = f\!\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $\psi(t) = g\!\left(\dfrac{1}{t}\right)$ diyelim. Zincir kuralıyla $\varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2} f'\!\left(\dfrac{1}{t}\right)$ ve $\psi'(t) = -\dfrac{1}{t^2} g'\!\left(\dfrac{1}{t}\right)$ olur; $-\dfrac{1}{t^2}$ çarpanları oranda sadeleşir ve $\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \dfrac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$ kalır. $t \to 0^+$ iken $\dfrac{1}{t} \to +\infty$ olduğundan $t \to 0^+$ için elde edilen sonuç doğrudan $x \to +\infty$ için istenen sonuca dönüşür.

11.5 L'Hôpital Kuralı II: ∞/∞ Biçimi

İkinci kural, ilkinden hem daha kullanışlı hem daha şaşırtıcıdır: **paydan hiçbir şey istenmez.** f'nin bir limiti olması bile gerekmez; yalnızca paydanın mutlak değerce sonsuza gitmesi yeter. Sezgisel açıklama şudur: payda çok büyükse f ve g'nin sabit bir c noktasındaki değerleri orana neredeyse katkı yapmaz; geriye c ile x arasındaki *değişimlerin* oranı kalır, bu da Cauchy ortalama değer teoremi gereği bir türev oranıdır.

Teorem 11.3 (L'Hôpital Kuralı II). *$-\infty \le a < b \le \infty$ olsun. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve her $x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Ayrıca*

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty \qquad \text{ya da} \qquad \lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty$$

olsun. O hâlde:

1. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ *ise* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$*'dir.*
2. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ *ise* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$*'dur.*

İspat.
Hipotez, $x \to a^+$ iken $\mid g(x) \mid \to +\infty$ olduğunu söyler. Ortak gözlemin (i) maddesi gereği g birebirdir; bu, Cauchy ortalama değer teoremini uygulamak için yeter.

Adım 1: türevlerin oranını kuşatmak. *Önce (1) hâlini ispatlayalım: $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki*

$$\left| \frac{f'(u)}{g'(u)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\text{her} \quad u \in (a, c) \quad \text{için}) \ .$$

Adım 2: sabit uçlu kirişler. *c noktasını bundan böyle **sabit** tutuyoruz. $x \in (a, c)$ olsun. f ve g, $[x, c]$ üzerinde sürekli, (x, c) üzerinde türevlenebilirdir ve g birebir olduğundan $g(x) \neq g(c)$'dir. $Q(x) := \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}$ diyelim; Cauchy ortalama değer teoremi gereği bir $u \in (x, c) \subseteq (a, c)$ için $Q(x) = \dfrac{f'(u)}{g'(u)}$ olur. Adım 1'in eşitsizliği u için geçerli olduğundan*

$$\mid Q(x) - L \mid < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\text{her} \quad x \in (a, c) \quad \text{için}) \ . \qquad (\dagger)$$

Adım 3: asıl oranı Q cinsinden yazmak. *$g(x) \neq 0$ olan x'ler için $\lambda(x) := \dfrac{g(x) - g(c)}{g(x)} = 1 - \dfrac{g(c)}{g(x)}$ diyelim. O zaman*

$$Q(x)\,\lambda(x) = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)}, \qquad \text{yani} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = Q(x)\,\lambda(x) + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Buradan L'yi çıkaralım ve $L\lambda(x) = L - \dfrac{L\,g(c)}{g(x)}$ olduğunu kullanalım:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \big(\, Q(x) - L \,\big)\,\lambda(x) + \big(\, L\lambda(x) - L \,\big) + \frac{f(c)}{g(x)} = \big(\, Q(x) - L \,\big)\,\lambda(x) + \frac{f(c) - L\,g(c)}{g(x)}.$$

Üçgen eşitsizliğiyle

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le |\, Q(x) - L \,| \cdot |\, \lambda(x) \,| + \frac{|\, f(c) - L\,g(c) \,|}{|\, g(x) \,|}. \tag{‡}$$

Adım 4: $|\, g(x) \,| \to \infty$ olduğunu kullanmak. *$A := |\, f(c) - L\,g(c) \,| \ge 0$ olsun; c sabit olduğundan A bir sabittir. $|\, g(x) \,| \to +\infty$ olduğundan öyle bir $c_1 \in (a, c)$ vardır ki her $x \in (a, c_1)$ için*

$$|\, g(x) \,| > \max\left\{1,\, 2\,|\, g(c) \,|,\, \frac{2A}{\varepsilon} + 1\right\}$$

sağlanır. Bu x'ler için üç şey birden elde ederiz:

- *$|\, g(x) \,| > 1 > 0$ olduğundan $g(x) \neq 0$'dır; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ve $\lambda(x)$ tanımlıdır.*
- *$|\, g(x) \,| > 2\,|\, g(c) \,| \ge |\, g(c) \,|$ olduğundan $g(x) \neq g(c)$'dir ve $\left|\dfrac{g(c)}{g(x)}\right| < \dfrac{1}{2}$; dolayısıyla $|\, \lambda(x) \,| = \left|1 - \dfrac{g(c)}{g(x)}\right| \le \dfrac{3}{2}$'dir.*
- *$|\, g(x) \,| > \dfrac{2A}{\varepsilon}$ olduğundan $\dfrac{A}{|\, g(x) \,|} < \dfrac{\varepsilon}{2}$'dir ($A = 0$ ise bu terim zaten 0'dır).*

Adım 5: birleştirme. *$x \in (a, c_1)$ için (†) ve (‡)'yi bir araya getirelim:*

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{7\varepsilon}{8} < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ keyfî olduğundan $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$'dir.

Adım 6: sonsuz limit hâli. *$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ olsun ve bir $M > 0$ verilsin. Öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki her $u \in (a, c)$ için $\dfrac{f'(u)}{g'(u)} > 4M$'dir. Adım 2'deki gibi Cauchy ortalama değer teoremini $[x, c]$ üzerinde uygulayarak*

$$Q(x) > 4M \qquad (\text{her} \quad x \in (a, c) \quad \text{için})$$

elde ederiz. Şimdi $c_1 \in (a, c)$ noktasını, her $x \in (a, c_1)$ için

$$|\, g(x) \,| > \max\left\{2\,|\, g(c) \,|,\, \frac{|\, f(c) \,|}{M} + 1\right\}$$

olacak biçimde seçelim. Böylece $\left|\dfrac{g(c)}{g(x)}\right| < \dfrac{1}{2}$ ve dolayısıyla $\lambda(x) > \dfrac{1}{2}$; ayrıca $\left|\dfrac{f(c)}{g(x)}\right| < M$ olur. Adım 3'teki özdeşlikte bunları kullanırsak

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x)\,\lambda(x) + \frac{f(c)}{g(x)} > 4M \cdot \frac{1}{2} - M = 2M - M = M$$

buluruz. $M > 0$ keyfî olduğundan $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$'dur. Limit $-\infty$ ise, birinci teoremin ispatındaki gibi f yerine $-f$ alınır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

> **i** Paya neden koşul konmadı?
>
> Teorem 11.3'da f hakkında hiçbir limit varsayımı yok. Bu, ispata bakınca anlaşılır: f yalnızca $Q(x)$ ve $\dfrac{f(c)}{g(x)}$ terimlerinde geçer; ikincisinde $f(c)$ **sabit** bir sayıdır ve $|\,g(x)\,| \to \infty$ olduğu için etkisi silinir, birincisinde ise Cauchy ortalama değer teoremi f'nin değerlerini f' ile değiştirir.

Örnek 11.3 (Sonsuzdaki Belirsizlikler). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x}$

Çözüm.
1. $x \to \infty$ iken $\ln x \to +\infty$ ve $x \to +\infty$; bu bir $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğidir. $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$ alalım; $(1,\infty)$ üzerinde ikisi de türevlenebilirdir, $g'(x) = 1 \neq 0$'dır ve $g(x) \to +\infty$'dur. Teorem 11.3 gereği

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. Önce çarpımı bir orana çevirelim: $x^2 e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$. $x \to \infty$ iken pay ve payda ayrı ayrı $+\infty$'a gider; $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçimi ve paydanın türevi e^x hiç sıfırlanmaz. Kuralı iki kez uygulayalım:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

İkinci adımdan önce $\dfrac{2x}{e^x}$ ifadesinin gerçekten $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçiminde olduğunu doğruladık; son ifade belirsiz değildir, o yüzden orada durduk.
3. $x \to 0^+$ iken $\sin x \to 0^+$ olduğundan $\ln(\sin x) \to -\infty$; ayrıca $\ln x \to -\infty$'dur. Payda $-\infty$'a gittiğine göre Teorem 11.3 uygulanabilir ($g(x) = \ln x$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0$ ve $(0, \tfrac{\pi}{2})$ üzerinde her iki fonksiyon türevlenebilirdir). Türevlerin oranı:

$$\frac{\big(\ln(\sin x)\big)'}{(\ln x)'} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x.$$

Payın türevinde zincir kuralını kullandık (Teorem 4.1). $x \to 0^+$ iken $\dfrac{x}{\sin x} \to 1$ ve $\cos x \to 1$ olduğundan $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = 1$'dir. Sonuç sezgiyle uyuşur: x küçükken $\sin x$ ile x birbirine çok yakındır, logaritmaları da öyle.
■

11.6 Öteki Belirsiz Biçimler

Kalan beş belirsiz biçim — $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 — için ayrı teorem yoktur; hepsi cebirsel bir düzenlemeyle ya da logaritma alarak $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçimine indirgenir.

11.6.1 Fark ve Çarpım Biçimleri

$\infty - \infty$ biçiminde standart hamle **ortak paydada toplamaktır**: iki terim tek bir kesre dönüşünce genellikle $\dfrac{0}{0}$ biçimi ortaya çıkar.

Örnek 11.4 (Fark Biçimi). $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ limitini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$x \to 0^+$ iken $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ ve $\dfrac{1}{\sin x} \to +\infty$'dur; bu bir $\infty - \infty$ belirsizliğidir. Ortak paydada toplayınca $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x - x}{x \sin x}$ olur; artık pay ve payda 0'a gider: $\dfrac{0}{0}$ biçimi. Paydanın türevi $\sin x + x \cos x$'tir ve $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ için hem $\sin x > 0$ hem $x \cos x > 0$ olduğundan pozitiftir; dolayısıyla $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığında kural uygulanabilir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}.$$

Bu da $\dfrac{0}{0}$ biçimindedir. Bir kez daha türev alalım; paydanın türevi çarpım kuralıyla (Teorem 3.2) $(\sin x + x \cos x)' = 2 \cos x - x \sin x$ olur ve $x \to 0^+$ iken $2 \neq 0$'a gittiğinden küçük $x > 0$'lar için sıfırdan farklıdır. Öyleyse

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Son ifade belirsiz değildir; zinciri sondan başa okuyarak $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right) = 0$ sonucuna varırız. Aynı hesap $x \to 0^-$ için de geçerlidir, dolayısıyla iki yönlü limit de 0'dır.
■

$0 \cdot \infty$ biçiminde ise çarpanlardan birini paydaya atarız: $f \cdot g$ yerine $\dfrac{f}{1/g}$ ya da $\dfrac{g}{1/f}$ yazılır; hangisinin işe yarayacağını hesabın kolaylığı belirler.

Örnek 11.5 (Çarpım Biçimi). $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
$x \to 0^+$ iken $x \to 0$ ve $\ln x \to -\infty$; bu bir $0 \cdot \infty$ belirsizliğidir. Çarpımı orana çevirmenin iki yolu var: $x \ln x = \dfrac{\ln x}{1/x}$ ya da $x \ln x = \dfrac{x}{1/\ln x}$. Birincisini seçiyoruz, çünkü $\ln x$'in türevi basittir; ikinci yolda $\dfrac{1}{\ln x}$'in türevi $-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ çıkar ve ifade karışır. Birinci biçimde pay $-\infty$'a, payda $+\infty$'a gider: $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçimi ve $g(x) = \dfrac{1}{x}$ için $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0$'dır. Kuralı uygulayalım:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot (-x^2) \right) = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Öyleyse $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$'dır. Bu limiti aklımızda tutalım; birazdan üstel biçimlerde kullanacağız. Sonucun anlamı şudur: x sıfıra giderken $\ln x$ sonsuza gider, ama x'in sıfıra gitmesi $\ln x$'in patlamasından daha güçlüdür.
■

11.6.2 Üstel Biçimler

1^∞, 0^0 ve ∞^0 biçimlerinin üçü de aynı hamleyle çözülür. $f(x) > 0$ olmak üzere

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

özdeşliğini kullanırız (Teorem 5.3'nin dayandığı tanım budur). Üstteki $g(x) \ln f(x)$ çarpımı her üç biçimde de $0 \cdot \infty$ türündendir ve bir önceki kesimin yöntemiyle hesaplanır. Sonra üstel fonksiyonun sürekliliğinden yararlanırız: $g(x) \ln f(x) \to S$ ise $e^{g(x) \ln f(x)} \to e^S$ olur. Bu, bileşke fonksiyonun limiti kuralının (bkz. Analiz 1) süreklilik hâlidir: dış fonksiyon exp, S noktasında sürekli olduğundan — yani oradaki limiti ile değeri çakıştığından — iç fonksiyonun S değerini alıp almadığına ayrıca bakmak gerekmez. ($S = -\infty$ ise limit 0, $S = +\infty$ ise $+\infty$'dur.)

Örnek 11.6 (Sıfır Üzeri Sıfır Biçimi). $\lim_{x \to 0^+} x^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
$x \to 0^+$ iken taban $x \to 0^+$ ve üs $x \to 0$'dır; bu bir 0^0 belirsizliğidir. $x > 0$ için $x^x = e^{x \ln x}$ yazalım. Örnek 11.5'de $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ olduğunu bulmuştuk; üstel fonksiyon her yerde sürekli olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Sonuç ilk bakışta şaşırtıcıdır: taban sıfıra giderek ifadeyi sıfıra, üs sıfıra giderek 1'e itiyor; kazanan üstür. Nedeni tam olarak $x \ln x \to 0$ olmasıdır.
■

Şimdi bölümün en güzel örneğine geliyoruz. Analiz 1'de e sayısını $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisinin limiti olarak tanımlamış (bkz. Analiz 1, e Dizisi Artan ve Sınırlıdır), yakınsaklığı için monotonluk ve sınırlılık üzerine epeyce emek vermiştik. L'Hôpital kuralı aynı sonucun fonksiyon sürümünü birkaç satırda verir.

Örnek 11.7 (e Sayısına Giden Limit ve İkizi). Aşağıdaki iki limiti hesaplayınız ve neden farklı çıktıklarını açıklayınız.

1. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
2. $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Çözüm.
Her iki limitte de aynı ifadeyle çalışıyoruz. $x > 0$ için $1 + \frac{1}{x} > 0$ olduğundan logaritma alabiliriz:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\varphi(x)}, \qquad \varphi(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

φ'yi hesaplamak için türevleri bulalım. Payın türevi zincir kuralıyla

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

paydanın türevi ise $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$'dir; bu, $x > 0$ için hiç sıfırlanmaz. İki türevin oranında $-\frac{1}{x^2}$ çarpanları sadeleşir:

$$\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Bundan sonrası iki durumda ayrılıyor.
1. Durum: $x \to \infty$. Burada $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \to 0$ ve $\frac{1}{x} \to 0$; yani φ bir $\frac{0}{0}$ belirsizliğidir ve Teorem 11.2 uygulanır. Türevlerin oranının limiti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

olduğundan $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 1$'dir. Üstel fonksiyonun sürekliliğiyle

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

2. Durum: $x \to 0^+$. Şimdi $\frac{1}{x} \to +\infty$ olduğundan hem $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ hem payda $+\infty$'a gider: bu kez $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır ve Teorem 11.3 uygulanır. Türevlerin oranı yukarıdakinin aynısıdır ama limiti farklıdır: payda $+\infty$'a gittiğinden $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$, yani $\varphi(x) \to 0$ ve

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e^0 = 1.$$

Neden farklılar? Biçimleri farklıdır: birincisinde taban 1'e, üs $+\infty$'a gider (1^∞); ikincisinde taban $+\infty$'a, üs 0'a gider (∞^0). Aynı cebirsel ifadenin farklı noktalarda farklı belirsiz biçimler üretip farklı sonuçlar vermesi, "belirsiz" sözcüğünün ne kadar yerinde olduğunu gösterir. Birinci sonuç Analiz 1'deki dizi sonucuyla da uyuşur: genel dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği $x = n$ alınarak *e dizisi* teoremindeki $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ elde edilir.
Bölümün başındaki tablonun 1^∞ satırında duran üçüncü örnek de birinci durumdan çıkar. $x > 0$ için

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}$$

yazalım. Köşeli parantezin içi e'ye yakınsar ve $e > 2$ olduğundan yeterince büyük x'ler için $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > 2$, dolayısıyla

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} > 2^{x}$$

olur. $2^x \to +\infty$ olduğundan sol taraf da $+\infty$'a ıraksar. Aynı 1^∞ biçimi, üs biraz daha hızlı büyüdüğünde sonlu bir sayı yerine $+\infty$ veriyor: tabanın 1'e yaklaşma hızı ile üssün büyüme hızı arasındaki yarış, sonucu tek başına belirliyor.
■

11.7 Kuralın Sınırları

L'Hôpital kuralı çok güçlüdür ama her derde deva değildir; iki tipik başarısızlığını da tanımak gerekir.

Örnek 11.8 (Türevlerin Oranının Limiti Olmayabilir). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız ve her birinde L'Hôpital kuralının ne yaptığını inceleyiniz.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$

Çözüm.
1. $|\sin x| \le 1$ olduğundan $x \to \infty$ iken $x - \sin x \to +\infty$ ve $x + \sin x \to +\infty$'dur; ifade $\frac{\infty}{\infty}$ biçimindedir. $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x + \sin x$ için $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$'tir. Bu ifadenin $x \to \infty$ iken limiti **yoktur**: $x_n = 2n\pi$ alırsak $\cos x_n = 1$ ve oran $\frac{0}{2} = 0$; $z_n = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$ alırsak $\cos z_n = -\frac{1}{2}$ ve oran $\frac{3/2}{1/2} = 3$ olur. İki dizi boyunca iki farklı değer çıktığından, genel dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği limit yoktur.
Dahası, kuralın hipotezi de sağlanmıyor: $g'(x) = 1 + \cos x$ ifadesi $x = (2n+1)\pi$ noktalarında sıfırlanır; dolayısıyla (c, ∞) biçiminde hiçbir aralıkta "$g' \neq 0$" koşulu sağlanamaz ve Teorem 11.3 burada **uygulanamaz**.
Ama asıl limit gayet iyi durumdadır. Pay ve paydayı x'e bölelim:

$$\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} \qquad (x>0).$$

$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x} \to 0$ olduğundan sıkıştırma kuralıyla (bkz. Analiz 1) $\frac{\sin x}{x} \to 0$'dır. Payda $1 + 0 = 1 \neq 0$'a gittiğinden limit aritmetiği kullanılabilir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

2. $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$ ve $g(x) = \sin x$ olsun. $|\, f(x)\,| \leq x^2 \to 0$ olduğundan pay 0'a gider; payda da 0'a gider: $\dfrac{0}{0}$ biçimi. Çarpım ve zincir kurallarıyla

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

olur ve $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$'tir. $x \to 0$ iken payda 1'e, ilk terim 0'a gider; ama $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ terimi -1 ile 1 arasında durmadan salınır ve hiçbir değere yaklaşmaz. Demek ki türevlerin oranının limiti yoktur.
Asıl limit ise vardır. $x \neq 0$ için ifadeyi şöyle ayıralım:

$$\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}.$$

Birinci çarpanda $x \to 0$ ve $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ olduğundan, sınırlı çarpı sıfır kuralıyla (bkz. Analiz 1) çarpım 0'a gider; ikinci çarpan Sinüs x Bölü x Limiti gereği 1'e gider. Öyleyse limit $0 \cdot 1 = 0$'dır.
■

> ⚠ **Kuralın karşıtı doğru değildir**
>
> Teorem 11.2 ve Teorem 11.3 tek yönlüdür:
>
> $$\lim \frac{f'}{g'} \text{ var } \Rightarrow \lim \frac{f}{g} \text{ var ve aynıdır.}$$
>
> Ters yön **yanlıştır**: Örnek 11.8'ta gördüğümüz gibi türevlerin oranının limiti hiç var olmadığı hâlde asıl limit var olabilir. Pratik sonucu şudur: **L'Hôpital kuralı bir limitin var olmadığını göstermek için kullanılamaz.** Türev alıp limitin olmadığını görmek asıl limit hakkında hiçbir şey söylemez; o durumda başka bir yöntem denenir (pay ve paydayı bölmek, sıkıştırma, seri açılımı gibi).

> ⚠ **Her adımda belirsizliği yeniden doğrulayın**
>
> Kural ard arda uygulanırken en sık yapılan hata, ifade artık belirsiz olmadığı hâlde türev almaya devam etmektir. Örneğin
>
> $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2x + 1} = \frac{1}{1} = 1$$
>
> doğru hesaptır. Ama burada durmayıp bir kez daha türev alan biri $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$ diyerek yanlış sonuca varır; çünkü $\dfrac{e^x}{2x+1}$ ifadesi $x \to 0$ iken $\dfrac{1}{1}$ biçimindedir, belirsiz değildir.
> Doğru sıra şudur: **(i)** ifadenin belirsiz olduğunu doğrula; **(ii)** ilgilendiğin aralıkta $g' \neq 0$ olduğunu doğrula; **(iii)** türevlerin oranının limitini bul; **(iv)** o oran hâlâ belirsizse (i)'e dön, değilse dur.

11.8 Büyüme Hızları

L'Hôpital kuralının en kalıcı armağanı, sonsuza giden fonksiyonlar arasında kesin bir hız sıralaması kurmasıdır. Analiz 1'de bu sıralamanın dizi sürümünü görmüştük (bkz. Analiz 1); şimdi fonksiyon sürümünü, üstelik keyfî reel üslerle, kolayca ispatlayabiliriz. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$ olduğunda "v, u'dan hızlı büyür" der ve $u(x) \ll v(x)$ yazarız.

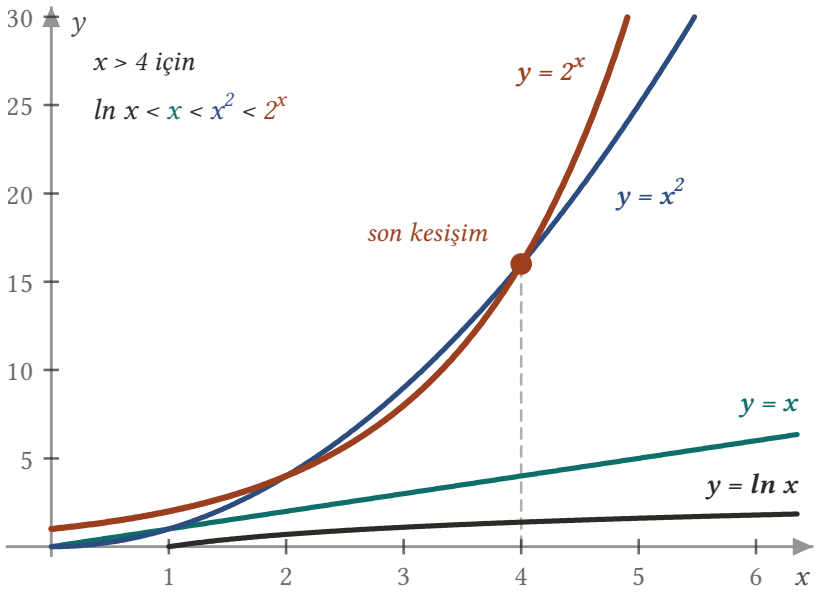
Sonuç 11.1 (Büyüme Hızlarının Sıralanması). *$p > 0$, $q > 0$ ve $a > 1$ reel sayılar olsun. O hâlde:*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^p}{x^q x^q} = 0$; *yani logaritmanın her kuvveti, x'in her pozitif kuvvetinden yavaş büyür.*
2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^q}{a^x} = 0$; *yani her üstel fonksiyon, x'in her kuvvetinden hızlı büyür.*
3. $\lim_{x\to 0^+} x^q \,|\ln x\,|^p = 0.$

Bunlar Analiz 1'deki dizi sonuçlarıyla birleştirildiğinde ($\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ *ve* $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$, *Büyüme Hızları*) *şu zincir elde edilir:*

$$(\ln n)^p \ll n^q \ll a^n \ll n! \ll n^n \qquad (n \to \infty).$$



Şekil 11.1: Aynı eksende dört büyüme hızı: ln x neredeyse yatay kalırken x, x^2 ve 2^x sırayla dikleşir; son kesişim x = 4'te olur ve ondan sonra 2^x hepsini geride bırakır. L'Hôpital kuralının en sık uygulaması bu sıralamayı ispatlamaktır: ln x ≪ x^a ≪ b^x (a > 0, b > 1); her oranın limiti sıfırdır.

İspat.

1. *Önce $p = 1$ hâlini görelim: her $r > 0$ için $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^r} = 0$'dır. Gerçekten $x \to \infty$ iken pay ve payda $+\infty$'a gider ve $(1,\infty)$ üzerinde $(x^r)' = rx^{r-1} \neq 0$'dır; Teorem 11.3 gereği*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^r} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{rx^{r-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{r\,x^r} = 0,$$

çünkü $r > 0$ olduğundan $x^r \to +\infty$'dur.
Şimdi genel $p > 0$ için $r = \dfrac{q}{p}$ alalım. $x > 1$ için

$$\frac{(\ln x)^p}{x^q} = \left(\frac{\ln x}{x^{q/p}}\right)^p = \big(\,w(x)\big)^p, \qquad w(x) := \frac{\ln x}{x^{q/p}} > 0$$

yazılır. Az önce gösterdiğimiz üzere $w(x) \to 0^+$'dır. Bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük x'ler için $0 < w(x) < \varepsilon^{1/p}$ olur; $t \mapsto t^p$ dönüşümü $(0,\infty)$ üzerinde kesin artan olduğundan bu x'ler için $0 < \big(\,w(x)\big)^p < \varepsilon$'dur. Demek ki $\big(\,w(x)\big)^p \to 0$, yani $\dfrac{(\ln x)^p}{x^q} \to 0$'dır.

2. *$k = \lceil q \rceil$, yani q'dan küçük olmayan en küçük doğal sayı olsun; $k \geq 1$ ve $q - k \leq 0 < q - k + 1$'dir. $j = 0, 1, \ldots, k-1$ için $q - j \geq q - k + 1 > 0$ olduğundan $x^{q-j} \to +\infty$'dur; ayrıca $a > 1$ olduğundan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$a^x = e^{x\ln a} \to +\infty$ ve $(a^x)' = a^x \ln a \neq 0$'dır. Demek ki $\dfrac{x^{q-j}}{a^x}$ ifadelerinin her biri $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçimindedir ve her birine Teorem 11.3 uygulanabilir. Bir adımlık hesap şöyledir:

$$\frac{\left(x^{q-j}\right)'}{\left(a^x\right)'} = \frac{(q-j)\,x^{q-j-1}}{a^x \ln a} = \frac{q-j}{\ln a}\cdot\frac{x^{q-(j+1)}}{a^x}.$$

Yani her türev alma adımı üssü tam olarak 1 azaltıyor ve önüne sabit bir çarpan koyuyor. k adım sonra ulaşılan ifade

$$C\cdot\frac{x^{q-k}}{a^x}, \qquad C = \frac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{(\ln a)^k}$$

*biçimindedir. Burada $q-k \leq 0$ olduğundan $x \geq 1$ için $0 < x^{q-k} \leq 1$'dir; $a^x \to +\infty$ olduğundan $0 < \dfrac{x^{q-k}}{a^x} \leq \dfrac{1}{a^x} \to 0$ olur ve sıkıştırma kuralıyla (bkz. Analiz 1) bu son limit 0'dır. Şimdi zinciri **sondan başa** okuyoruz: son limit var ve 0 olduğuna göre Teorem 11.3 bir önceki ifadenin limitinin de 0 olduğunu söyler; k adım geri giderek $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^q}{a^x} = 0$ sonucuna varırız.*

3. *$0 < x < 1$ olsun ve $t = \dfrac{1}{x}$ diyelim; $x \to 0^+$ iken $t \to +\infty$'dur. $\ln x = -\ln t$ ve $\ln t > 0$ olduğundan $|\ln x| = \ln t$'dir. Böylece*

$$x^q\,|\ln x\,|^p = \frac{(\ln t)^p}{t^q}.$$

Birinci kısım gereği sağ taraf $t \to +\infty$ iken 0'a gider; dolayısıyla sol taraf da $x \to 0^+$ iken 0'a gider.

Zincirin kalan halkaları. *$\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ ve $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$ sonuçları büyüme hızları teoreminin (2) ve (3) maddeleridir; $n!$ yalnızca doğal sayılarda tanımlı olduğundan orada türev alınmaz. Birinci ve ikinci kısımları $x = n$ için okuyup bu ikisini eklersek zincir tamamlanır.*

■

Bu sıralamayı bir kez ezberlemek sayısız limiti hesap yapmadan bitirmeye yeter: $\dfrac{x^{100}}{1{,}0001^x} \to 0$'dır, çünkü üs ne kadar büyük, üstel tabanı ne kadar 1'e yakın olursa olsun üstel er ya da geç kazanır.

11.9 Alıştırmalar

Alıştırma 11.1 (L'Hôpital Kuralı Üzerine).

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ limitini hesaplayınız.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)$ limitini hesaplayınız.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ limitini hesaplayınız.

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ limitini hesaplayınız.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x + x)^{1/x}$ limitini hesaplayınız.

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x+5}$ limitini hesaplayınız. Bu limite L'Hôpital kuralı uygulansaydı hangi sayı bulunurdu? Aradaki fark neyi gösterir?

Çözüm.

a) $x \to 0$ iken $\tan x - x \to 0$ ve $x^3 \to 0$: $\dfrac{0}{0}$ biçimi. $(x^3)' = 3x^2$, $x \neq 0$ için sıfırdan farklı olduğundan kuralı 0'ın sağında ve solunda ayrı ayrı uygularız. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}.$$

Şimdi $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$ özdeşliğini kullanalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot 1^2 = \frac{1}{3},$$

çünkü $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} \to 1\cdot 1 = 1$'dir (bkz. Analiz 1). Sonuç: limit $\dfrac{1}{3}$'tür.

b) $x\to\infty$ iken $x\to+\infty$ ve $\dfrac{\pi}{2} - \arctan x \to 0$: $0\cdot\infty$ belirsizliği. Çarpanı paydaya atarsak $x\Big(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\Big) = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{1/x}$ olur ve artık pay ve payda 0'a gider: $\dfrac{0}{0}$ biçimi. Ters fonksiyonun türevi kuralından $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ve $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0$'dır:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1.$$

Sonuç: limit 1'dir; yani x büyükken $\dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ farkı yaklaşık $\dfrac{1}{x}$ kadardır.

c) $x\to 0$ iken $\dfrac{1}{x}$ ve $\dfrac{1}{e^x-1}$ ifadelerinin ikisi de mutlak değerce sonsuza gider: $\infty-\infty$ biçimi. Ortak paydada toplayalım:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x-1)}.$$

Pay ve payda 0'a gider: $\dfrac{0}{0}$ biçimi. Paydanın türevi $\big(xe^x - x\big)' = e^x + xe^x - 1 = (1+x)e^x - 1$'dir. Bu son ifadenin türevi $e^x(2+x)$ olup $|x| < 1$ için pozitiftir; öyleyse $(1+x)e^x - 1$ fonksiyonu $(-1,1)$ üzerinde kesin artandır (Sonuç 8.3) ve $x=0$'da aldığı 0 değerini orada bir daha almaz. Demek ki 0'ın delinmiş bir komşuluğunda hem $(1+x)e^x - 1 \neq 0$ hem de $e^x(2+x)\neq 0$'dır; kuralı 0'ın iki yanında da iki kez uygulayabiliriz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

Ortadaki ifade hâlâ $\dfrac{0}{0}$ biçimindeydi, sonuncusu ise belirsiz değildir; orada durduk. Sonuç: limit $\dfrac{1}{2}$'dir.

d) $x\to 0$ iken taban $\cos x \to 1$ ve üs $\dfrac{1}{x^2}\to+\infty$: 1^∞ biçimi. Yeterince küçük $|x|$ için $\cos x > 0$ olduğundan logaritma alabiliriz:

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\,\psi(x)}, \qquad \psi(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

ψ, $\dfrac{0}{0}$ biçimindedir ($\ln\cos 0 = 0$) ve paydanın türevi $2x$, $x\neq 0$ için sıfırdan farklıdır. Zincir kuralıyla $\big(\ln\cos x\big)' = -\tan x$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = -\frac{1}{2}$$

olur; üstel fonksiyonun sürekliliğiyle $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$'dir.

e) $x\to\infty$ iken taban $e^x + x\to+\infty$ ve üs $\dfrac{1}{x}\to 0$: ∞^0 biçimi. Logaritma alalım:

$$(e^x + x)^{1/x} = e^{\,\chi(x)}, \qquad \chi(x) = \frac{\ln(e^x + x)}{x}.$$

$x\to\infty$ iken pay ve payda $+\infty$'a gider: $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçimi ve paydanın türevi $1\neq 0$'dır. Zincir kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\overset{\text{L.H.}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}=1.$$

Son adımda kuralı yeniden uygulamak yerine pay ve paydayı e^x'e böldük; $e^{-x}\to 0$ ve Sonuç 11.1 (2) gereği $xe^{-x}=\dfrac{x}{e^x}\to 0$'dır. Öyleyse $\chi(x)\to 1$ ve $\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{1/x}=e^1=e$'dir: büyük x için e^x+x ile e^x arasındaki fark, $\dfrac{1}{x}$ kuvveti alındığında silinir.

f) Bu limit **belirsiz değildir**. $x\to 2$ iken pay $2^2+3\cdot 2=10$'a, payda $2+5=7\neq 0$'a gider. Polinomlar sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) limit aritmetiği doğrudan uygulanır (bkz. Analiz 1):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{x+5}=\frac{10}{7}.$$

L'Hôpital kuralı yanlışlıkla uygulansaydı $\dfrac{(x^2+3x)'}{(x+5)'}=\dfrac{2x+3}{1}\to 7$ bulunurdu; oysa doğru yanıt $\dfrac{10}{7}$'dir. Aradaki fark şunu gösterir: L'Hôpital kuralı bir "türev alıp sadeleştirme" hilesi değil, hipotezleri olan bir teoremdir. İlk hipotez — ifadenin $\dfrac{0}{0}$ ya da $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçiminde olması — sağlanmazsa kural uygulanamaz; zorlanırsa alakasız bir sayı üretir.

■

Elimizdeki araçlar bir fonksiyonun bir nokta yakınındaki davranışını birinci mertebeden — teğet doğrusu düzeyinde — betimlemeye yetiyor. Bir sonraki bölümde bu betimlemeyi istediğimiz mertebeye çıkaracağız: Taylor Formülü.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Taylor Formülü

Türev Kavramı bölümünde türevlenebilir bir fonksiyonu bir noktanın yakınında bir **doğruyla** değiştirmiştik: $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ doğrusallaştırması, x yeterince yakınken $f(x)$'e iyi bir yaklaşımdır (Tanım 2.5). Bu yaklaşımın iki iyi yanı vardı: L ile f, x_0 noktasında hem **değerde** hem **eğimde** uyuşur; ve hata $|\ x - x_0\ |$'dan daha hızlı söner. İki de sınırı vardı: L bir doğrudur, dolayısıyla eğriliği hiç görmez; ve hatanın "daha hızlı söndüğünü" bilmek, hatayı **sayıyla** kestirmeye yetmez.
Bu bölümde her iki sınırı da aşacağız. Sorunun doğru biçimi şudur: f'ye x_0 noktasında yalnızca değer ve eğimde değil, **ilk n türevinin hepsinde** uyuşan bir polinom bulabilir miyiz? Bulabiliriz; üstelik böyle bir polinom bir tanedir. Ona **Taylor polinomu**, $f(x)$ ile arasındaki farka da **kalan terim** denir. Bölümün asıl teoremleri kalan terimi denetim altına alır: Lagrange kalanı hatayı $(n+1)$. türevin ara bir noktadaki değeriyle tam olarak verir, Cauchy kalanı aynı işi başka bir biçimde yapar ve Lagrange'ın yetmediği yerlerde devreye girer, Peano kalanı ise hatanın $(x - x_0)^n$'den daha hızlı söndüğünü söyler.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Taylor polinomunun tanımını ve tekliğini; üç ayrı kalan biçimini ve tam ispatlarını; bunların hepsinin çekirdeğinde Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri bölümündeki tek bir fikrin — yardımcı fonksiyon kurup Rolle teoremini uygulama fikrinin — bulunduğunu; ve temel fonksiyonların Maclaurin açılımlarını. Önceki bölümde L'Hôpital Kuralı ile belirsiz biçimleri çözmüştük; Peano kalanının ispatı doğrudan o kuralı kullanacaktır.

12.1 Doğrusallaştırmadan Taylor Polinomuna

Fikri sayılarla kuralım. x_0 noktasında n kez türevlenebilen bir f verilsin ve derecesi en çok n olan

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n$$

biçiminde, x_0'da f ile ilk n türeve kadar uyuşan bir polinom arayalım:

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \ldots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Katsayıları teker teker okuyalım. $x = x_0$ koyunca $(x - x_0)$'lı bütün terimler yok olur ve $P(x_0) = c_0$ kalır; demek ki $c_0 = f(x_0)$. Türev alalım:

$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1};$$

yine $x = x_0$ koyunca $c_1 = f'(x_0)$ çıkar. Bir kez daha türev alırsak $P''(x_0) = 2c_2$, yani $c_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}$ olur. Örüntü belirmiştir: j. türevde $(x - x_0)^j$ teriminin katsayısı $j!$ çarpanıyla öne çıkar, küçük dereceliler kaybolur, büyük dereceliler ise $x = x_0$'da sıfırlanır. Dolayısıyla $P^{(j)}(x_0) = j!\, c_j$ ve

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

olmak zorundadır ($0! = 1$ ve $f^{(0)} = f$ anlaşmalarıyla $j = 0$ hâli de uyar). Aradığımız polinom kendiliğinden ortaya çıkmıştır.

Tanım 12.1 (Taylor Polinomu). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık, $x_0 \in I$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında n kez türevlenebilir olsun (Tanım 6.1). O hâlde

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

kuralıyla tanımlanan, derecesi en çok n olan polinoma f'nin x_0 noktasındaki **n. mertebeden Taylor polinomu** (Taylor polynomial) denir. $x_0 = 0$ hâlinde

$$T_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

polinomuna **Maclaurin polinomu** (Maclaurin polynomial) adı verilir. Karışıklık olmadığında kısaca $T_n(x)$ yazacağız.

Tanımın ilk iki hâli tanıdıktır: $T_0(x;x_0) = f(x_0)$ sabit fonksiyonudur, $T_1(x;x_0)$ ise tam olarak doğrusallaştırmadır (Tanım 2.5), yani teğet doğrusudur (Tanım 2.4). Taylor polinomu, teğetin yüksek mertebeli akrabasıdır: T_2 eğriye en iyi uyan parabol, T_3 en iyi uyan kübik eğridir ve böyle sürer.
Yukarıdaki hesabı şimdi eksiksiz yapalım. Teklik, göründüğünden çok daha kullanışlı bir sonuçtur: bir Taylor polinomunu bulmak için türev almak zorunda değiliz; herhangi bir yolla derecesi uygun bir polinom bulup istenen uyuşmayı doğrulamak yeter.

Önerme 12.1 (Taylor Polinomunun Tekliği). *f, x_0 noktasında n kez türevlenebilir olsun. O hâlde:*

1. *$T_n(x;x_0)$ polinomu her $j = 0,1,\ldots,n$ için $T_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ eşitliğini sağlar.*
2. *Derecesi en çok n olan ve $j = 0,1,\ldots,n$ için $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ sağlayan **tek** polinom $T_n(x;x_0)$'dır.*

İspat.
Bir yardımcı hesap. *$q_k(x) = (x-x_0)^k$ tek terimlisinin türevleri, $j \le k$ için*

$$q_k^{(j)}(x) = k(k-1)\cdots(k-j+1)\,(x-x_0)^{k-j}$$

ve $j > k$ için $q_k^{(j)} \equiv 0$'dır ($j = k$ adımında sabit $k!$ elde edilir, bir sonraki türev sıfırdır). $x = x_0$ koyalım: $j < k$ ise üs $k-j \ge 1$ olduğundan değer 0'dır; $j = k$ ise $q_k^{(k)} \equiv k!$; $j > k$ ise zaten 0'dır. Kısacası $q_k^{(j)}(x_0)$ sayısı $j = k$ hâlinde $k!$, öteki bütün hâllerde 0'dır.
(1) İddiası. *$T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k$ ve $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$'dir. Türev almak doğrusal olduğundan (Teorem 3.2'nin tümevarımla genellemesi) $T_n^{(j)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, q_k^{(j)}(x_0)$ yazılır; bu toplamdaki tek sıfırdan farklı terim $k = j$ olanıdır:*

$$T_n^{(j)}(x_0) = j!\,c_j = j! \cdot \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} = f^{(j)}(x_0), \qquad j = 0,1,\ldots,n.$$

(2) Teklik. *P ve Q istenen özelliği sağlayan iki polinom olsun ve $D = P - Q$ diyelim; D'nin derecesi en çok n'dir ve her $j \le n$ için $D^{(j)}(x_0) = 0$'dır. Herhangi bir polinom $(x-x_0)$'ın kuvvetleri cinsinden yazılabilir ($t = x - x_0$ değişken değiştirmesiyle $D(x_0+t)$, t'nin derecesi en çok n olan bir polinomudur):*

$$D(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k.$$

Yukarıdaki hesabı D için tekrarlarsak her $j \le n$ için $D^{(j)}(x_0) = j!\,b_j$ buluruz; bu sayı 0 olduğundan $b_j = 0$'dır. Demek ki $D \equiv 0$, yani $P = Q$. T_n istenen özelliği (1) gereği sağladığından, o tek polinom T_n'dir. ∎

> **i** Teklik neye yarar?
>
> $f(x) = (1+x)^3$ fonksiyonunun 3. Maclaurin polinomunu bulmak için üç türev almak gerekmez: $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ zaten derecesi 3 olan bir polinomdur ve f'ye özdeştir, özdeş fonksiyonların türevleri de aynıdır; Önerme 12.1 gereği $T_3(x;0)$ budur. Aynı gerekçe genel bir olgu verir: **derecesi m olan bir polinomun $n \ge m$ için n. Taylor polinomu kendisidir.** Bütün mesele polinom olmayan fonksiyonlardadır.

Yaklaşım ne kadar iyidir? Bu soruyu sorabilmek için hataya bir ad verelim.

Tanım 12.2 (Kalan Terim). f, x_0 noktasında n kez türevlenebilir olsun.

$$R_n(x;x_0) = f(x) - T_n(x;x_0)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

farkına f'nin x_0 noktasındaki n. mertebeden **kalan terimi** (remainder term) denir. Bu tanımla

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x;x_0)$$

eşitliği elde edilir; buna **n. mertebeden Taylor formülü** (Taylor's formula), $x_0 = 0$ hâlinde **Maclaurin formülü** denir. Kısaca $R_n(x)$ yazacağız.

Buradaki eşitlik bir teorem değil, bir **tanımdır**: R_n, farkın kendisine verilen addır ve bu hâliyle hiçbir bilgi taşımaz. Bölümün asıl içeriği, R_n'in f'nin türevleri cinsinden başka türlü yazılabildiğini söyleyen üç teoremdir. Önerme 12.1'nin bir sonucunu şimdiden not edelim:

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Yani kalan terim x_0 noktasında "n kat sıfırlanır"; $(x-x_0)^{n+1}$ mertebesinde küçük olmasını beklememizin nedeni budur. Şimdi bu beklentiyi teoreme dönüştürelim.

12.2 Taylor Teoremi: Lagrange Kalanı

Ortalama değer teoremi (Teorem 8.2), $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x-x_0)$ eşitliğiyle iki noktadaki değerlerin farkını türevin ara bir noktadaki değeriyle **tam olarak** verir. Bu, Taylor formülünün $n = 0$ hâlidir: $T_0(x) = f(x_0)$ olduğundan $R_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x-x_0)$. Lagrange'ın kalan formülü, bu ifadenin her mertebeye taşınmasıdır.

Teorem 12.1 (Taylor Teoremi (Lagrange Kalanı)). *$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ öyle bir fonksiyon olsun ki $f, f', \ldots, f^{(n)}$ türevleri $[a,b]$ üzerinde var ve sürekli, $f^{(n+1)}(t)$ türevi ise her $t \in (a,b)$ için var olsun. (Bu koşulu kısaca "f, $[a,b]$ üzerinde C^n sınıfındandır" diye okuyacağız; Tanım 6.2 açık aralıklar için verilmişti, kapalı aralıkta uç noktalardaki türevler tek yönlü anlaşılır.) $x_0, x \in [a,b]$ ve $x \neq x_0$ olsun. O hâlde x_0 ile x arasında öyle bir c vardır ki*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

olur.

> ***İspat.***
> *x noktasını **sabitleyelim**; ispat boyunca x bir sayıdır, değişken t olacaktır. J, uç noktaları x_0 ile x olan kapalı aralığı göstersin; $J \subseteq [a,b]$'dir ve J'nin iç noktaları (a,b)'de kalır.*
> ***Adım 1: yardımcı fonksiyonun kurulması.** Taylor formülünde x_0'ın yerine değişken bir t koyalım:*
>
> $$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - M(x-t)^{n+1}, \qquad t \in J.$$
>
> *Buradaki M henüz seçilmemiş bir sabittir. F, J üzerinde süreklidir, çünkü $k \leq n$ için $f^{(k)}$ türevleri süreklidir; J'nin iç noktalarında türevlenebilirdir, çünkü türev alırken en çok $f^{(n+1)}$ gerekir ve o da (a,b)'de vardır.*
> ***Adım 2: M'nin seçimi.** M'yi $F(x_0) = 0$ olacak biçimde seçelim; $t = x_0$ koyduğumuzda toplam tam olarak $T_n(x)$ olur:*
>
> $$F(x_0) = f(x) - T_n(x) - M(x-x_0)^{n+1} = R_n(x) - M(x-x_0)^{n+1}.$$
>
> *$x \neq x_0$ olduğundan $(x-x_0)^{n+1} \neq 0$'dır; dolayısıyla*
>
> $$M = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$
>
> *seçimi $F(x_0) = 0$ verir. Bundan böyle M bu sayıdır; ispatın sonunda bu eşitliğe geri döneceğiz.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: öteki uçta da sıfır. *$t = x$ koyalım. Toplamda $k \geq 1$ olan terimlerin hepsi $(x-x)^k = 0$ çarpanı yüzünden yok olur; geriye yalnızca $k = 0$ terimi, yani $f(x)$ kalır. Son terim de sıfırdır: $F(x) = f(x) - f(x) - 0 = 0$.*

Adım 4: türevin teleskoplanması. *Toplamı $S(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ ile gösterelim. Her terim iki t-bağımlı çarpanın çarpımıdır; çarpım kuralı (Teorem 3.2) ve $\dfrac{d}{dt}(x-t)^k = -k(x-t)^{k-1}$ ile*

$$S'(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\, k\,(x-t)^{k-1} \right].$$

İkinci parçada $k = 0$ terimi sıfırdır ($(x-t)^0 = 1$ sabittir); $k \geq 1$ içinse $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$'dir. Dolayısıyla

$$S'(t) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k}_{A} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}}_{B}.$$

B'de $j = k-1$ dizin değiştirmesi yapalım; k, 1'den n'e giderken j, 0'dan $n-1$'e gider ve

$$B = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

*olur. Bu, A toplamının **ilk n terimidir**; A'nın yalnızca $k = n$ terimi dışarıda kalır. Toplamlar teleskoplayarak sadeleşir:*

$$S'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

*Yardımcı fonksiyonun bütün hüneri buradadır: türev alındığında toplamdan geriye **tek bir terim** kalır. Son olarak $\dfrac{d}{dt}\left[-M(x-t)^{n+1} \right] = M(n+1)(x-t)^n$ olduğundan*

$$F'(t) = (x-t)^n \left[M(n+1) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \right].$$

Adım 5: Rolle teoremi. *F, J üzerinde sürekli, iç noktalarında türevlenebilir ve Adım 2 ile Adım 3 gereği uçlarda aynı değeri, $F(x_0) = F(x) = 0$ değerini alıyor. Teorem 8.1 gereği x_0 ile x arasında kesin olarak, $F'(c) = 0$ olan bir c vardır:*

$$(x-c)^n \left[M(n+1) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \right] = 0.$$

$c \neq x$ olduğundan $(x-c)^n \neq 0$'dır ($n = 0$ hâlinde $(x-c)^0 = 1$ zaten sıfır değildir). Köşeli parantez sıfır olmak zorundadır:

$$M(n+1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Adım 6: sonuç. *Bulduğumuz değeri Adım 2'deki eşitlikle karşılaştıralım:*

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

> **i** Sıfırıncı mertebe ortalama değer teoremidir
>
> $n = 0$ alalım: $T_0(x) = f(x_0)$ olduğundan teoremin verdiği eşitlik $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, yani tam olarak Teorem 8.2'dir. Hipotezler de birebir örtüşür: "$f \in C^0$" f'nin kapalı aralıkta sürekliliği, "$f^{(1)}$ iç noktalarda var" ise açık aralıkta türevlenebilirliğidir. Demek ki **Taylor teoremi, ortalama değer teoreminin yüksek mertebeli genellemesidir**; ispatların aynı iskelete (yardımcı fonksiyon artı Rolle teoremi) sahip olması da şaşırtıcı değildir.

Kalanı $x_0 = 0$ hâlinde yazmak sık gerekir; ara noktayı x'in bir kesri olarak göstermek de gelenektir.

Sonuç 12.1 (Maclaurin Formülü). *$x \neq 0$ olsun ve f, 0 ile x arasındaki kapalı aralıkta C^n sınıfından, karşılık gelen açık aralıkta ise $(n+1)$ kez türevlenebilir olsun. O hâlde öyle bir $\theta \in (0,1)$ vardır ki*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

> ***İspat.***
> *Teorem 12.1'i $x_0 = 0$ ile uygulayalım: 0 ile x arasında bir c için $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$'dir. "$c$, 0 ile x arasındadır" demek $\theta = \dfrac{c}{x}$ oranının $(0,1)$'de olması demektir: $x > 0$ ise $0 < c < x$ olduğundan $0 < c/x < 1$; $x < 0$ ise $x < c < 0$ olduğundan negatif bir sayıyı negatif bir sayıya böleriz ve yine $0 < c/x < 1$. Böylece $c = \theta x$ yazılabilir.*
> ■

> **⚠** Ara nokta bir sabit değildir
>
> Kalan formülündeki c (ya da θ) sayısı üç şeye birden bağlıdır: f'ye, x'e ve n'e. Formülde c'yi sanki sabitmiş gibi kullanmak — örneğin $n \to \infty$ limitinde "$f^{(n+1)}(c)$" ifadesini sabit saymak — sık yapılan ve yanlış sonuçlar doğuran bir hatadır.
> Teorem c'nin **varlığını** söyler, yerini söylemez. Uygulamalarda c'yi aramayız; x_0 ile x arasındaki bütün noktalar için geçerli bir $\left| f^{(n+1)} \right| \le K$ üst sınırı bulur ve
>
> $$| R_n(x) | \le \frac{K}{(n+1)!} | x - x_0 |^{n+1}$$
>
> kestirimini kullanırız. Bölümdeki bütün sayısal hesaplar bu kalıba oturur.

12.3 Cauchy Kalanı ve Genel Biçim

Lagrange kalanı çoğu durumda yeter, ama her durumda yetmez: birazdan $\ln(1+x)$ örneğinde göreceğimiz gibi, x negatif ve -1'e yakınken Lagrange kalanının verdiği kestirim sıfıra gitmez, oysa yaklaşım gerçekte iyidir. İşin güzel yanı, aynı yardımcı fonksiyonun Cauchy ortalama değer teoremiyle (Teorem 8.3) birlikte kullanılmasının bütün kalan biçimlerini tek hamlede vermesidir.

Teorem 12.2 (Taylor Teoremi (Cauchy Kalanı)). *Teorem 12.1'in hipotezleri altında, x_0 ile x arasında öyle bir c vardır ki*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(x - c)^n (x - x_0)$$

olur.

> ***İspat.***
> *Yine x'i sabitleyelim; J, uç noktaları x_0 ile x olan kapalı aralık olsun. Lagrange ispatındaki toplamı bu kez başlı başına bir fonksiyon olarak alalım:*

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \qquad t \in J.$$

Adım 4'teki teleskoplama aynen geçerlidir: J'nin her iç noktasında

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Uç noktalardaki değerler de Adım 2 ve Adım 3'ten okunur: $G(x) = f(x)$ ve $G(x_0) = T_n(x)$.
Şimdi $\varphi(t) = t$ alalım; φ süreklidir ve $\varphi'(t) = 1$'dir. G ile φ ikilisine J üzerinde Teorem 8.3'in çarpım biçimini uygulayalım: J'nin iç noktalarında bir c için

$$G'(c)\,\big[\,\varphi(x) - \varphi(x_0)\,\big] = \varphi'(c)\,\big[\,G(x) - G(x_0)\,\big],$$

yani

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0) = 1 \cdot \big[\,f(x) - T_n(x)\,\big] = R_n(x).$$

Bu, iddia edilen eşitliktir; c, J'nin iç noktası olduğundan x_0 ile x arasında kesin olarak bulunur.
■

i Tek çatı: Cauchy ortalama değer teoremi

Aynı ispatta $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ alsaydık ne olurdu? $\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, $\varphi(x) = 0$ ve $\varphi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$ olduğundan Teorem 8.3

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \cdot \big[-(x-x_0)^{n+1}\,\big] = -(n+1)(x-c)^n \cdot R_n(x)$$

verirdi; ortak $-(x-c)^n$ çarpanı sadeleşince ($c \neq x$ olduğundan sıfır değildir) Lagrange kalanı çıkar. Demek ki $\varphi(t) = t$ seçimi Cauchy, $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ seçimi Lagrange kalanını veriyor; $\varphi(t) = (x-t)^p$ $(1 \le p \le n+1)$ ile **Schlömilch kalanı** denilen ara biçimler doğar. İki formüldeki c'ler aynı değildir: her φ seçimi kendi ara noktasını üretir.

12.4 Peano Kalanı: Yerel Yaklaşım

Lagrange ve Cauchy kalanları $(n+1)$. türevin varlığını ister ve karşılığında x_0'dan uzakta da geçerli, **sayısal** bir bilgi verir. Çoğu zaman ise elimizde yalnızca n. türev vardır ve tek merak ettiğimiz, hatanın $x \to x_0$ iken ne kadar hızlı söndüğüdür. Bu daha zayıf soru, daha zayıf hipotezlerle yanıtlanır.
Önce gösterimi kuralım: $x \to x_0$ iken $\dfrac{g(x)}{h(x)} \to 0$ oluyorsa "$g(x) = o(h(x))$" yazar ve "g, h'ye göre küçük o'dur" deriz. Örneğin $x \to 0$ iken $x^3 = o(x^2)$'dir, çünkü $x^3/x^2 = x \to 0$.

Teorem 12.3 (Taylor Teoremi (Peano Kalanı)). *$n \ge 1$ ve f, x_0'ı içeren bir açık aralıkta $n-1$ kez türevlenebilir, x_0 noktasında ise n kez türevlenebilir olsun ($n = 1$ hâlinde ilk koşul yalnızca "f o aralıkta tanımlıdır" demektir). O hâlde*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

kısaca

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\,\big(\,(x-x_0)^n\,\big), \qquad x \to x_0.$$

İspat.

$R = R_n$ ve $g(x) = (x - x_0)^n$ yazalım. Üç hazırlık gözlemi yapalım.
(i) *f, x_0'ın bir komşuluğunda $n-1$ kez türevlenebilir; T_n ise polinom olduğundan her mertebeden türevlenebilir. Dolayısıyla $R = f - T_n$ de o komşulukta $n-1$ kez türevlenebilirdir ve $R^{(n-1)}$, x_0 noktasında türevlenebilirdir.*
(ii) *Önerme 12.1 gereği $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ olduğundan $R^{(k)}(x_0) = 0$'dır, $k = 0, 1, \ldots, n$.*
(iii) *$k \le n-1$ için $R^{(k)}$, x_0'da türevlenebilir, dolayısıyla orada süreklidir (Teorem 3.1); (ii) ile birlikte $R^{(k)}(x) \to 0$ $(x \to x_0)$ olur. Öte yandan $g^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(x - x_0)^{n-k}$'dır; $k \le n-1$ için üs $n-k \ge 1$ olduğundan $g^{(k)}(x) \to 0$ ve $x \neq x_0$ iken $g^{(k)}(x) \neq 0$'dır.*
Zincirin son halkası. *$k = n-1$ alalım; $g^{(n-1)}(x) = n!\,(x - x_0)$'dır. (ii) gereği $R^{(n-1)}(x_0) = 0$ ve $R^{(n)}(x_0) = 0$ olduğundan türevin tanımı (Tanım 2.2) doğrudan sonucu verir:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x) - R^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{R^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

*Bu limit **vardır ve sıfırdır**; $n = 1$ hâlinde ispat burada biter, çünkü o zaman $g^{(0)} = g$ ve $R^{(0)} = R$'dir.*
Geriye doğru tümevarım. *$n \ge 2$ olsun. Şu iddiayı $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ sırasıyla kanıtlayacağız:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = 0.$$

$k = n-1$ için bunu az önce gösterdik. İddia bir k $(1 \le k \le n-1)$ için doğru olsun; $k-1$ için gösterelim. $\dfrac{R^{(k-1)}(x)}{g^{(k-1)}(x)}$ oranını ele alalım:

- *$k - 1 \le n - 2$ olduğundan (iii) gereği pay ve payda birlikte 0'a gider; yani $\dfrac{0}{0}$ belirsiz biçimi söz konusudur.*
- *x_0'ın delinmiş bir komşuluğunda $R^{(k-1)}$ ve $g^{(k-1)}$ türevlenebilirdir ve $g^{(k)}(x) \neq 0$'dır.*
- *Türevlerin oranı tam olarak $\dfrac{R^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$'tir ve tümevarım varsayımı gereği bu oranın limiti vardır, 0'dır.*

*L'Hôpital kuralı (Teorem 11.2) "türevlerin oranının limiti varsa asıl oranın limiti de vardır ve ona eşittir" der; zinciri **sondan başa** doğru kurmamızın nedeni budur. Kural gereği*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R^{(k-1)}(x)}{g^{(k-1)}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = 0.$$

*Tümevarım $k = 0$'a kadar iner; $R^{(0)} = R$ ve $g^{(0)} = (x - x_0)^n$ olduğundan istenen limit elde edilir. Toplamda L'Hôpital kuralı tam $n-1$ kez uygulanmış, son adımda ise kuralın yerini türevin tanımı almıştır — çünkü x_0'ın **delinmiş** bir komşuluğunda $R^{(n)}$'in varlığını hiç varsaymadık.*
■

Peano kalanının en önemli kullanımı, "o" gösterimiyle yapılan cebirdir: bir fonksiyonun Taylor polinomunu türev almadan, bilinen açılımları birleştirerek bulabiliriz. Bunu meşrulaştıran, aşağıdaki teklik önermesidir.

Önerme 12.2 (Asimptotik Açılımın Tekliği). *P ve Q, derecesi en çok n olan iki polinom olsun ve $x \to x_0$ iken $P(x) - Q(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ sağlansın. O hâlde $P = Q$'dur.*
Özel olarak: f, x_0'da n kez türevlenebilirse ve derecesi en çok n olan bir P polinomu için $f(x) = P(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$ oluyorsa, zorunlu olarak $P = T_n(\cdot\,; x_0)$'dır.

İspat.
$D = P - Q$ diyelim; Önerme 12.1'nin ispatındaki gibi $D(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k$ yazılabilir ve varsayım $\lim_{x \to x_0} \dfrac{D(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ demektir.
$D \not\equiv 0$ olduğunu varsayıp çelişki arayalım. O hâlde $b_m \neq 0$ olan bir en küçük m indisi vardır ve $k < m$ için $b_k = 0$ olduğundan

$$D(x) = (x - x_0)^m \left[b_m + b_{m+1}(x - x_0) + \cdots + b_n (x - x_0)^{n-m} \right]$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yazılır. Köşeli parantezdeki ifade $x \to x_0$ iken b_m'ye gider (bkz. Analiz 1), dolayısıyla

$$\lim_{x\to x_0} \frac{D(x)}{(x-x_0)^m} = b_m \neq 0.$$

Öte yandan $m \leq n$ olduğundan $x \neq x_0$ için

$$\frac{D(x)}{(x-x_0)^m} = (x-x_0)^{n-m} \cdot \frac{D(x)}{(x-x_0)^n}$$

yazabiliriz. Sağdaki ikinci çarpanın limiti 0'dır; birinci çarpan ise $m < n$ ise 0'a gider, $m = n$ ise sabit 1'dir, her iki hâlde de sınırlıdır. Sınırlı bir fonksiyonla sıfıra giden bir fonksiyonun çarpımı sıfıra gittiğinden (bkz. Analiz 1) bu oranın limiti 0 olur. Aynı limit hem $b_m \neq 0$ hem 0 olamaz (bkz. Analiz 1); çelişki. Demek ki bütün b_k'ler sıfırdır, yani $P = Q$.
İkinci iddia için Teorem 12.3 gereği $f(x) = T_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$'dir; varsayımla birlikte

$$P(x) - T_n(x) = \left[\, f(x) - T_n(x) \,\right] - \left[\, f(x) - P(x) \,\right] = o\left((x-x_0)^n\right)$$

olur (her iki fark $(x-x_0)^n$'e bölündüğünde 0'a gittiğinden farkları da öyledir: Limitlerde Cebirsel İşlemler) ve birinci kısım $P = T_n$ verir.
■

⚠ Taylor polinomu ile Taylor serisi aynı şey değildir

Bu bölümde her n için **sonlu** bir polinom ve onun yanında bir kalan terim yazdık. $n \to \infty$ limitinde ortaya çıkan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

sonsuz toplamına **Taylor serisi** denir ve bu bambaşka bir nesnedir. İki soru birbirinden ayrılmalıdır: seri yakınsıyor mu, ve yakınsıyorsa toplamı $f(x)$ mi? İkincisi birincisinden gelmez: kısmi toplamlar $T_n(x)$ olduğundan, toplamın $f(x)$ olması tam olarak $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ demektir ve bu ayrıca ispatlanmalıdır. Nitekim

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyon her mertebeden türevlenebilirdir ve 0 noktasındaki **bütün** türevleri sıfırdır; her n için $T_n(x;0) \equiv 0$'dır. Bu fonksiyonun Taylor serisi her x için yakınsar — toplamı sabit 0'dır — ama $x \neq 0$ iken $f(x) \neq 0$ olduğundan bu toplam $f(x)$'e eşit değildir. Serilerin yakınsaklık kuramına, sonsuz toplamlar kurulduktan sonra Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık Yarıçapı bölümünde döneceğiz; bu bölümde ve bir sonrakinde yalnızca sonlu Taylor formülünü kullanacağız.

12.5 Temel Maclaurin Açılımları

Sıra, Taylor formülünü tanıdık fonksiyonlara uygulamaya geldi. Her örnekte yol aynıdır: önce $f^{(k)}$ türevlerinin genel formülü tümevarımla kurulur (bkz. Analiz 1), sonra x_0'da değer verilir, en sonunda kalan yazılıp kestirilir.

12.5.1 Üstel fonksiyon

Örnek 12.1 (Üstel Fonksiyonun Maclaurin Açılımı). $f(x) = e^x$ fonksiyonunun n. mertebeden Maclaurin formülünü yazın ve kalanın her sabit x için $n \to \infty$ iken sıfıra gittiğini gösterin.

Çözüm.

$(e^x)' = e^x$ olduğundan (Teorem 5.2) tümevarımla her $k \geq 0$ için $f^{(k)}(x) = e^x$'tir; dolayısıyla $f^{(k)}(0) = 1$ ve

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

e^x her mertebeden türevlenebilir olduğundan Sonuç 12.1 her aralıkta uygulanır: bir $\theta \in (0,1)$ için

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

Kalanın kestirimi. $\theta \in (0,1)$ olduğundan $\mid \theta x \mid \leq \mid x \mid$ ve üstel fonksiyon artan olduğundan $e^{\theta x} \leq e^{\mid x \mid}$'dir:

$$\mid R_n(x) \mid \leq e^{\mid x \mid}\,\frac{\mid x \mid^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Burada x ve dolayısıyla $e^{\mid x \mid}$ sabittir. Büyüme Hızları (2) gereği her sabit b için $\dfrac{b^n}{n!} \to 0$ olduğundan $\dfrac{\mid x \mid^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$'dır; sıkıştırma teoremiyle (bkz. Analiz 1) $R_n(x) \to 0$.
Örneğin $x = 1, n = 4$ için $e \approx \frac{65}{24} \approx 2{,}70833$ ve $\mid R_4(1) \mid \leq \dfrac{e}{120} < 0{,}025$'tir; gerçek hata $0{,}00995$ olup kestirim doğru ama geniştir. Daha duyarlı bir hesabı Örnek 12.9'nde yapacağız.
■

12.5.2 Sinüs ve kosinüs

Örnek 12.2 (Sinüs ve Kosinüsün Maclaurin Açılımları). $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının Maclaurin formüllerini kalan terimleriyle birlikte yazın.

Çözüm.
Türevlerin genel formülü. Her $k \geq 0$ için $(\sin)^{(k)}(x) = \sin\!\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$ olduğunu tümevarımla görelim. $k = 0$ hâli aşikârdır. k için doğru olsun; Teorem 5.4 ve $\cos u = \sin\!\left(u + \dfrac{\pi}{2}\right)$ özdeşliğiyle

$$(\sin)^{(k+1)}(x) = \cos\!\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\!\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Aynı hesap $(\cos)^{(k)}(x) = \cos\!\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$ verir.
Sinüs. $(\sin)^{(k)}(0) = \sin\dfrac{k\pi}{2}$ sayısı k çift ise 0'dır; $k = 2j+1$ ise $\sin\!\left(j\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^j$'dir. Demek ki yalnızca tek dereceli terimler kalır:

$$T_{2m}(x) = T_{2m-1}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

$T_{2m} = T_{2m-1}$ eşitliği x^{2m} katsayısının sıfır olmasından gelir ve bedava bir kazançtır: aynı polinomu $2m$. mertebeden sayarak kalanı **bir mertebe daha küçük** kestirebiliriz. $n = 2m$ ile yazalım; $(\sin)^{(2m+1)}(t) = \sin\!\left(t + \dfrac{(2m+1)\pi}{2}\right)$ olduğundan bir $\theta \in (0,1)$ için

$$\sin x = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \frac{\sin\!\left(\theta x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}\,x^{2m+1}.$$

Sinüs $[-1,1]$ aralığında değer aldığından kestirim çok basittir:

 CC BY-NC-SA 4.0

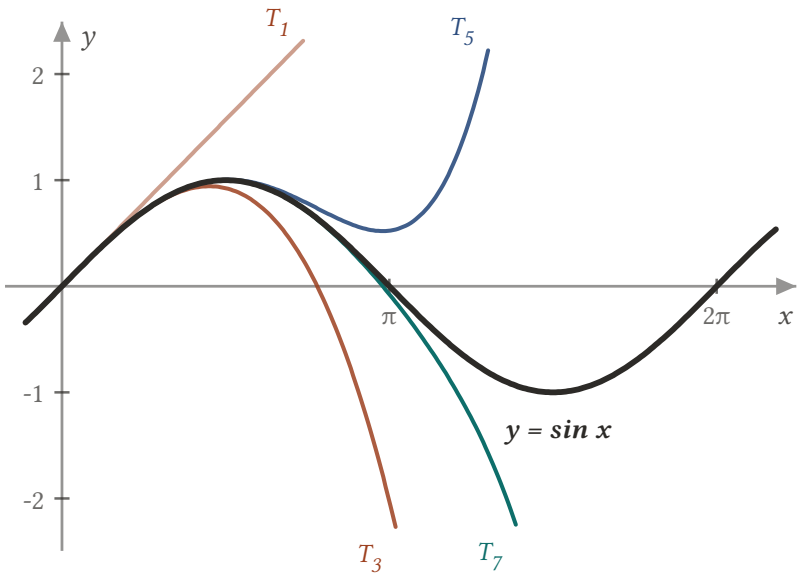
$$\mid R_{2m}(x) \mid \leq \frac{\mid x \mid^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

ve Büyüme Hızları (2) gereği bu üst sınır her sabit x için $m \to \infty$ iken 0'a gider.

Kosinüs. $(\cos)^{(k)}(0) = \cos\dfrac{k\pi}{2}$ sayısı k tek ise 0, $k = 2j$ ise $(-1)^j$'dir; bu kez yalnızca çift dereceli terimler kalır:

$$\cos x = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \frac{\cos\!\left(\theta x + \frac{(2m+2)\pi}{2}\right)}{(2m+2)!}\, x^{2m+2}, \qquad \mid R_{2m+1}(x) \mid \leq \frac{\mid x \mid^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Sayısal bir deneme. $\sin 0{,}5$ için $m = 2$ alalım: $T_4(0{,}5) = 0{,}5 - \dfrac{0{,}125}{6} = 0{,}4791667$ ve $\mid R_4(0{,}5) \mid \leq \dfrac{0{,}5^5}{120} = 0{,}00026042$. Gerçek değer $0{,}4794255\ldots$ olduğundan gerçek hata $0{,}00025887$'dir; kestirimin hemen altındadır, yani bu mertebede sınır neredeyse keskindir.



Şekil 12.1: $\sin x$'in sıfır merkezli Taylor polinomları. Derece büyüdükçe yaklaşım orijinden daha uzağa kadar iyi kalır; her T_n sonlu bir polinom olduğundan yeterince uzakta eninde sonunda eğriyi terk eder.
Lagrange kalanı, sabit bir aralıkta hatanın nasıl küçüldüğünü sayısal olarak kestirmeyi sağlar.

■

12.5.3 Hiperbolik sinüs ve kosinüs

Örnek 12.3 (Hiperbolik Fonksiyonların Maclaurin Açılımları). $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ve $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ fonksiyonlarının Maclaurin formüllerini yazın.

Çözüm.
Zincir kuralıyla (Teorem 4.1) $(e^{-x})' = -e^{-x}$ olduğundan $\sinh' = \cosh$ ve $\cosh' = \sinh$'tir. Türevler ikişer ikişer devreder; tümevarımla $(\sinh)^{(k)}$ ifadesi k çift ise sinh, tek ise cosh'a; $(\cosh)^{(k)}$ ise k çift ise cosh, tek ise sinh'e eşittir. $\sinh 0 = 0$ ve $\cosh 0 = 1$ olduğundan açılımlar sin ve cos'unkilerle aynı, ama **işaretler dönüşümlü değildir**:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\cosh(\theta x)}{(2m+1)!}\,x^{2m+1},$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cosh(\theta x)}{(2m+2)!}\,x^{2m+2}.$$

Birinci formülde $(2m+1)$. türev cosh'tur ($2m+1$ tektir), ikincisinde $(2m+2)$. türev yine cosh'tur ($2m+2$ çifttir); her ikisinde de kalanın payında $\cosh(\theta x)$ belirir.
Kalanın kestirimi. $\mid \theta x \mid \le \mid x \mid$ ve cosh çift, $[0,\infty)$ üzerinde artan olduğundan $0 < \cosh(\theta x) \le \cosh\mid x \mid \le e^{\mid x \mid}$'dir. Dolayısıyla her iki kalan da

$$\mid R(x) \mid \le e^{\mid x \mid}\,\frac{\mid x \mid^N}{N!} \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

sağlar; e^x'te olduğu gibi kalanlar her sabit x için sıfıra gider. Aynı sonuç e^x ile e^{-x} açılımları toplanıp çıkarılarak da elde edilir; Önerme 12.2 gereği bu yolla bulunan polinom aynı polinomdur.
■

12.5.4 Logaritma

Örnek 12.4 (Logaritmanın Maclaurin Açılımı). $f(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonunun $(x > -1)$ Maclaurin formülünü Lagrange ve Cauchy kalanlarıyla yazın; kalanların hangi x değerleri için sıfıra gittiğini belirleyin.

Çözüm.
Türevler. $f'(x) = (1+x)^{-1}$'dir (Teorem 5.1 ve zincir kuralı). Tümevarımla her $k \ge 1$ için

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\,\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

olur: $k=1$ için sağ taraf $\dfrac{1}{1+x}$'tir; k için doğruysa genel kuvvet kuralı (Teorem 5.3) ve zincir kuralıyla (Teorem 4.1)

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(-k)(1+x)^{-k-1} = (-1)^k\,\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

Katsayılar. $f(0)=0$ ve $k \ge 1$ için $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ olduğundan $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ve

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Lagrange kalanı. $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{(-1)^n\,n!}{(1+t)^{n+1}}$ olduğundan bir $\theta \in (0,1)$ için

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

$0 \le x \le 1$ ise $1+\theta x \ge 1$ olduğundan $\left|\dfrac{x}{1+\theta x}\right| \le x \le 1$ ve

$$\mid R_n(x) \mid \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Özel olarak $x=1$ alırsak $\ln 2$'yi $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ kısmi toplamlarıyla, hatası $\dfrac{1}{n+1}$'i geçmeyecek biçimde hesaplayabiliriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Lagrange kalanının yetmediği yer. $-1 < x < 0$ olsun. Bu durumda $1+\theta x < 1$'dir ve $\left|\dfrac{x}{1+\theta x}\right|$ oranı 1'i aşabilir: $x=-0{,}8$, $\theta = 0{,}9$ için oran $\dfrac{0{,}8}{0{,}28} \approx 2{,}86$'dır ve $(n+1)$. kuvveti patlar. θ üzerinde hiçbir denetimimiz olmadığından Lagrange kalanı burada işe yaramaz.
Cauchy kalanı. Teorem 12.2'da ara noktayı $c = \theta x$ ($\theta \in (0,1)$) biçiminde yazarsak $x - c = x(1-\theta)$ olur ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\, x = (-1)^n\, \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Şimdi $-1 < x < 0$ için iki gözlem yapalım.

- $1+\theta x > 1 + x > 0$'dır (çünkü $\theta < 1$ ve $x<0$ iken $\theta x > x$); demek ki $\dfrac{1}{1+\theta x} < \dfrac{1}{1+x}$.
- $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} \le 1$'dir. Gerçekten bu eşitsizlik $1-\theta \le 1+\theta x$, yani $-\theta \le \theta x$ demektir; $\theta > 0$ olduğundan her iki tarafı θ'ya bölerek $-1 \le x$ elde ederiz ki bu varsayımımızdır. Parantez içi $[0,1]$'dedir, n. kuvveti de öyle.

Bu ikisini birleştirirsek

$$|\,R_n(x)\,| \le \frac{|\,x\,|^{n+1}}{1+x} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

çünkü $|\,x\,| < 1$ için $|\,x\,|^{n+1} \to 0$'dır (bkz. Analiz 1). Böylece Cauchy kalanı, Lagrange kalanının başaramadığı işi yapmış ve açılımın $(-1,0)$ aralığında da geçerli olduğunu göstermiştir.
Sonuç. İki kestirimi birleştirirsek: $-1 < x \le 1$ olan her x için $R_n(x) \to 0$'dır. Aralığın dışında bu bozulur; örneğin $x > 1$ için $\dfrac{x^n}{n}$ terimleri sınırsız büyüdüğünden $T_n(x)$ dizisi yakınsamaz, dolayısıyla $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ sıfıra gidemez.
Sayısal örnek. $\ln(1{,}2)$ için $n=3$: $T_3(0{,}2) = 0{,}1826667$ ve $|\,R_3(0{,}2)\,| \le \dfrac{0{,}2^4}{4} = 0{,}0004$; gerçek değer $0{,}1823216\ldots$, hata $0{,}000345$'tir.
■

12.5.5 Geometrik fonksiyon

Örnek 12.5 (Bire Bölü Bir Eksi X Açılımı). $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonunun $(x \neq 1)$ n. mertebeden Maclaurin formülünü yazın; kalanı hem cebirsel olarak tam biçimde hem de Lagrange biçiminde bulun.

Çözüm.
Türevler. $f(x) = (1-x)^{-1}$ olduğundan zincir kuralıyla ve tümevarımla $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$'dir: $k=0$ için $\dfrac{0!}{1-x} = f(x)$; k için doğruysa

$$f^{(k+1)}(x) = k!\cdot\big(-(k+1)\big)\,(1-x)^{-(k+2)}\cdot(-1) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.$$

Buradan $f^{(k)}(0) = k!$, yani katsayıların hepsi 1'dir: $T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.
Kalanın tam biçimi. Bu örnekte kalanı ara nokta kullanmadan hesaplayabiliriz. $(1-x)(1+x+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}$ teleskop çarpımından $1+x+\cdots+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ çıkar; dolayısıyla

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Bu **tam** bir eşitliktir; hiçbir bilinmeyen ara nokta içermez. Buradan $|\,x\,| < 1$ iken $R_n(x) \to 0$, $|\,x\,| \ge 1$ $(x \neq 1)$ iken ise sıfıra gitmediği okunur.
Lagrange biçimi. Bu kez $x < 1$ alalım; ancak o zaman 0 ile x arasındaki kapalı aralık f'nin tanım kümesinde kalır ve Sonuç 12.1 uygulanabilir. Kuralın verdiği eşitlik, bir $\theta \in (0,1)$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$R_n(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}} = \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}$$

der. İki ifadeyi eşitlersek $(1-\theta x)^{n+2} = 1-x$ olur; $x<1$ olduğundan sağ taraf pozitiftir ve $(n+2)$. kökü alınabilir: $\theta = \dfrac{1-(1-x)^{1/(n+2)}}{x}$ bulunur. Bu, ara noktanın x'e **ve** n'e nasıl bağlı olduğunu gözle görülür kılan öğretici bir örnektir. Son olarak x yerine $-x$ koyarsak, $x \neq -1$ için yine tam olan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

eşitliği elde edilir.
■

12.5.6 Binom açılımı

Örnek 12.6 (Binom Açılımı). $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x) = (1+x)^\alpha$ fonksiyonunun $(x>-1)$ n. mertebeden Maclaurin formülünü yazın; α bir doğal sayı olduğunda ne olduğunu inceleyin.

Çözüm.
Türevler. Genel kuvvet kuralı (Teorem 5.3), zincir kuralı (Teorem 4.1) ve tümevarımla, $x>-1$ olduğundan $1+x>0$ olduğu da göz önünde tutularak

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\,(1+x)^{\alpha-k}$$

olur: $k=0$ hâlinde çarpım boştur ve 1'e eşittir; bir kez daha türev almak çarpıma $(\alpha-k)$ çarpanını ekler ve üssü bir azaltır.
Genelleştirilmiş binom katsayısı. $x=0$ koyunca $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ olur. Bunu $k!$'e bölerek

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

genelleştirilmiş binom katsayısını (generalized binomial coefficient) tanımlarız; α doğal sayı olduğunda bu, bildiğimiz binom katsayısıdır. Böylece bir $\theta \in (0,1)$ için

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

Doğal sayı hâli. $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ise çarpanlar arasında $\alpha - m = 0$ belirdiğinden $k>m$ için $f^{(k)} \equiv 0$ ve $\binom{m}{k} = 0$'dır. $n \geq m$ alırsak kalan **özdeş olarak sıfır** olur ve geriye

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k$$

kalır; bu, binom teoreminin ta kendisidir. Yani binom teoremi, Taylor formülünün polinomlar için hatasız çalışmasının özel bir hâlidir.
İki kullanışlı özel hâl. $\alpha = \dfrac{1}{2}$ için $\binom{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}$, $\binom{1/2}{2} = \dfrac{(1/2)(-1/2)}{2} = -\dfrac{1}{8}$, $\binom{1/2}{3} = \dfrac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6} = \dfrac{1}{16}$ olduğundan

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots$$

$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ için $\binom{-1/2}{2} = \dfrac{(-1/2)(-3/2)}{2} = \dfrac{3}{8}$ ve $\binom{-1/2}{3} = \dfrac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{6} = -\dfrac{5}{16}$ olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \cdots$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sayısal bir deneme: $\sqrt{1{,}1}$ için $T_2(0{,}1) = 1{,}04875$ (gerçek değer 1,0488088..., hata 0,0000588), $T_3(0{,}1) = 1{,}0488125$ (hata 0,0000037).
■

12.5.7 Ark tanjant

Son örnek, türevlerin genel formülünü doğrudan yazmanın zor olduğu bir durumda ne yapılacağını gösterir: türevler için bir **özyineleme bağıntısı** (recurrence relation) kurar, katsayıları oradan okuruz. Kullanacağımız alet, Yüksek Mertebeden Türevler bölümündeki Leibniz kuralıdır.

Örnek 12.7 (Ark Tanjantın Maclaurin Polinomu). $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun 0 noktasındaki bütün türevlerini hesaplayın ve Maclaurin polinomunu yazın.

Çözüm.
Bir denklem kurma. Teorem 5.5 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ verir; paydayı sola alalım:

$$(1+x^2)\, f'(x) = 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

f' paydası hiç sıfırlanmayan bir rasyonel fonksiyon olduğundan $f \in C^\infty(\mathbb{R})$'dir.
Leibniz kuralını uygulama. Her iki tarafın n. türevini alalım ($n \geq 1$); sağ taraf sabit olduğundan türevi 0'dır. Solda $u(x) = 1+x^2$, $v(x) = f'(x)$ alıp Teorem 6.1'nı kullanalım. u ikinci dereceden olduğundan $u^{(k)} \equiv 0$ ($k \geq 3$) ve yalnızca $k = 0, 1, 2$ terimleri kalır; $u' = 2x$, $u'' = 2$ ve $v^{(j)} = f^{(j+1)}$ olduğundan

$$(1+x^2)\, f^{(n+1)}(x) + 2nx\, f^{(n)}(x) + n(n-1)\, f^{(n-1)}(x) = 0.$$

$x = 0$ koyalım. İkinci terim $2x$ çarpanı yüzünden yok olur:

$$f^{(n+1)}(0) = -\,n(n-1)\, f^{(n-1)}(0), \qquad n \geq 1.$$

Başlangıç değerleri. $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$'dir.
Çift mertebeliler. $n = 1$ için özyineleme $f''(0) = -1 \cdot 0 \cdot f(0) = 0$ verir. $f^{(2j)}(0) = 0$ ise $n = 2j+1$ seçimi $f^{(2j+2)}(0) = -(2j+1)(2j) f^{(2j)}(0) = 0$ verir; tümevarımla bütün çift mertebeli türevler 0'dır.
Tek mertebeliler. $n = 2m$ seçimiyle $f^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1) f^{(2m-1)}(0)$ olur. İddia: $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!$. $m = 0$ için $(-1)^0 \cdot 0! = 1 = f'(0)$ doğrudur. $f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}(2m-2)!$ ise

$$f^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1) \cdot (-1)^{m-1}(2m-2)! = (-1)^m\, 2m(2m-1)(2m-2)! = (-1)^m (2m)!.$$

İlk değerler: $f'''(0) = -2$, $f^{(5)}(0) = 24$, $f^{(7)}(0) = -720$.
Maclaurin polinomu. x^{2m+1} teriminin katsayısı $\dfrac{(-1)^m (2m)!}{(2m+1)!} = \dfrac{(-1)^m}{2m+1}$ olduğundan

$$T_{2m+2}(x) = T_{2m+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1},$$

Peano kalanıyla (Teorem 12.3)

$$\arctan x = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + o\left(\, x^{2m+2} \,\right), \qquad x \to 0.$$

Çift dereceli katsayıların sıfır çıkması beklenen bir şeydir: arctan tektir ve $-T_n(-x)$ polinomu f'ye aynı mertebeden uyduğundan Önerme 12.1 gereği $-T_n(-x) = T_n(x)$'tir. Kalanın Lagrange biçimi de yazılabilir, ama arctan'ın yüksek mertebeden türevleri kullanışlı bir kapalı biçim vermez.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Cepte tutulacak açılımlar

Yukarıda türetilen dokuz açılımı bir sonraki bölümde sürekli kullanacağız; Peano biçiminde, $x \to 0$ iken

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \qquad \sin x = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2m}), \qquad \cos x = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2m+1}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \qquad \arctan x = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + o(x^{2m+2}).$$

Hiperbolik olanlar sin ve cos açılımlarının işaretsiz eşlenikleridir; $\dfrac{1}{1-x}$ açılımının kalanı ise $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ ile tam olarak bilinir.

12.6 Sayısal Hesaplar

Taylor formülünün en somut kullanımı, bir fonksiyonun değerini önceden belirlenmiş bir duyarlıkla hesaplamaktır: değerlerin tam bilindiği bir x_0 ve uygun bir n seçilir, T_n hesaplanır, hata Teorem 12.1 ile kestirilir. İki tipik soruyu ayrı ayrı işleyelim: “verilen n ile hata ne kadar?” ve “verilen hata için n kaç olmalı?”.

Örnek 12.8 (Karekökün Bir Noktadaki Taylor Polinomu). $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 4$ noktasındaki 3. mertebeden Taylor polinomunu bulun. Bununla $\sqrt{4{,}2}$'yi hesaplayın ve hatayı kestirin.

Çözüm.
Türevler. $f(x) = x^{1/2}$ olduğundan (Teorem 5.3)

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}, \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}.$$

$4^{1/2} = 2$, $4^{3/2} = 8$, $4^{5/2} = 32$, $4^{7/2} = 128$ olduğundan

$$f(4) = 2, \quad f'(4) = \frac{1}{4}, \quad f''(4) = -\frac{1}{32}, \quad f'''(4) = \frac{3}{256}.$$

Taylor polinomu. Katsayıları $\dfrac{f^{(k)}(4)}{k!}$ olarak yazalım:

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}\cdot\frac{(x-4)^2}{2} + \frac{3}{256}\cdot\frac{(x-4)^3}{6} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}.$$

Hesap. $x - 4 = 0{,}2$ için

$$\begin{aligned} T_3(4{,}2) &= 2 + \frac{0{,}2}{4} - \frac{0{,}04}{64} + \frac{0{,}008}{512} \\ &= 2 + 0{,}05 - 0{,}000625 + 0{,}000015625 = 2{,}049390625. \end{aligned}$$

Hata kestirimi. Teorem 12.1 gereği 4 ile 4,2 arasında bir c için

$$R_3(4{,}2) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0{,}2)^4 = -\frac{15}{16\cdot 24}\cdot\frac{(0{,}2)^4}{c^{7/2}}.$$

$c > 4$ olduğundan $c^{7/2} > 128$ ve

$$\left| R_3(4{,}2) \right| < \frac{15}{384}\cdot\frac{0{,}0016}{128} = \frac{15\cdot 0{,}0016}{49152} \approx 4{,}9 \times 10^{-7}.$$

Kalan negatif olduğundan $T_3(4{,}2)$ değeri gerçek değerin biraz üstündedir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$2{,}0493901 < \sqrt{4{,}2} < 2{,}049390625$$

aralığı elde edilir; buradaki bütün sayılar beş ondalık basamağa $2{,}04939$ olarak yuvarlandığından ilk beş ondalık basamak güvence altındadır. Gerçek değer $2{,}04939015\ldots$ olup gerçek hata $4{,}7 \times 10^{-7}$'dir; kestirimimiz olan $4{,}9 \times 10^{-7}$ ona çok yakındır, yani sınır keskindir.
Mertebeler ne kazandırıyor? Aynı hesabı daha düşük mertebelerle de yapalım:

Mertebe	Değer	Gerçek hata
$T_1(4{,}2)$	$2{,}05$	$6{,}1 \times 10^{-4}$
$T_2(4{,}2)$	$2{,}049375$	$1{,}5 \times 10^{-5}$
$T_3(4{,}2)$	$2{,}049390625$	$4{,}7 \times 10^{-7}$

Her mertebede hata otuz–kırk kat küçülüyor; nedeni açıktır, kalan $\dfrac{\mid f^{(n+1)}(c) \mid}{(n+1)!}(0{,}2)^{n+1}$ biçimindedir ve mertebe bir arttığında hem fazladan bir $0{,}2$ çarpanı hem de $(n+1)$ böleni devreye girer (türevlerin büyümesi bu kazancın yalnızca küçük bir kısmını geri alır). T_1 satırı, doğrusallaştırma hesabının ta kendisidir.
■

Örnek 12.9 (e Sayısını Dört Ondalık Basamak Duyarlıkla Hesaplamak). e sayısını dört ondalık basamak doğrulukla hesaplamak için Maclaurin formülünde kaç terim gerekir? Hesabı yapın.

Çözüm.
Duyarlık ne demek? Dördüncü basamağa kadar doğru bir yuvarlama elde etmek için hatanın 5×10^{-5}'ten küçük olmasını isteyeceğiz.
Kalanın üst sınırı. Örnek 12.1'de $x = 1$ için

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1), \qquad R_n(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1)$$

bulmuştuk. $0 < \theta < 1$ olduğundan $1 < e^{\theta} < e < 3$'tür (bkz. Analiz 1); demek ki

$$0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Kalanın **pozitif** olduğuna dikkat edelim: kısmi toplam her zaman e'nin altında kalır.
***n*'in belirlenmesi.** $\dfrac{3}{(n+1)!} < 5 \times 10^{-5}$, yani $(n+1)! > 60\,000$ olmasını istiyoruz. $8! = 40\,320 < 60\,000 < 362\,880 = 9!$ olduğundan en küçük uygun seçim $n+1 = 9$, yani $n = 8$'dir. ($n = 7$ alsaydık kestirim $\dfrac{3}{40\,320} \approx 7{,}4 \times 10^{-5}$ olurdu ve istenen duyarlık **garanti edilemezdi**.)
Toplam. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!}$ toplamını terim terim yazalım:

k	$\dfrac{1}{k!}$	Kısmi toplam
0	1	1
1	1	2
2	0,5	2,5
3	0,1666667	2,6666667
4	0,0416667	2,7083333
5	0,0083333	2,7166667

 CC BY-NC-SA 4.0

k	$\dfrac{1}{k!}$	Kısmi toplam
6	0,0013889	2,7180556
7	0,0001984	2,7182540
8	0,0000248	2,7182788

Sonuç ve doğrulama. Kestirim $0 < R_8(1) < \dfrac{3}{362\,880} \approx 8{,}3 \times 10^{-6}$ olduğundan

$$2{,}7182788 < e < 2{,}7182871.$$

Bu aralıktaki her sayı dört basamağa 2,7183 olarak yuvarlanır; demek ki dört ondalık basamakla $e = 2{,}7183$'tür. Gerçek değer $e = 2{,}718281828\ldots$ olup gerçek hata $3{,}1 \times 10^{-6}$'dır, kestirimimizin altındadır.

Kalan $\dfrac{3}{(n+1)!}$ ile sınırlı olduğundan terim sayısını birer artırmak duyarlığı $n+1$ kat iyileştirir: $n = 12$ alsaydık $\dfrac{3}{13!} \approx 4{,}8 \times 10^{-10}$, yani dokuz basamak elde ederdik.

■

12.7 Alıştırmalar

Alıştırma 12.1 (Taylor Formülü Üzerine).

a) $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki 4. mertebeden Taylor polinomunu bulun; bununla $\ln(1{,}1)$'i hesaplayıp hatayı kestirin.

b) $|\,x\,|$ hangi değerler için $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ yaklaşımının hatası 10^{-3}'ten küçük olur?

c) $g(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun 0 noktasındaki 6. mertebeden Maclaurin polinomunu, türev almadan, Önerme 12.2 yardımıyla bulun.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$ limitini Taylor formülüyle hesaplayın.

e) $(1+x)^{1/3}$ açılımının 2. mertebeden Maclaurin polinomuyla $\sqrt[3]{1{,}1}$'i hesaplayın ve hatayı kestirin.

f) e sayısının irrasyonel olduğunu, Maclaurin formülündeki Lagrange kalanını kullanarak gösterin.

Çözüm.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ ve tümevarımla $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$ $(k \ge 1)$. O hâlde $f(1) = 0$, $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ ve katsayılar $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ olur:

$$T_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}.$$

$x - 1 = 0{,}1$ için

$$T_4(1{,}1) = 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}000333333 - 0{,}000025 = 0{,}095308333.$$

Hata: $f^{(5)}(t) = \dfrac{24}{t^5}$ olduğundan $1 < c < 1{,}1$ için

$$|\,R_4(1{,}1)\,| = \frac{24}{c^5}\cdot\frac{(0{,}1)^5}{5!} \le 24 \cdot \frac{10^{-5}}{120} = 2 \times 10^{-6}.$$

Gerçek değer $\ln 1{,}1 = 0{,}0953102\ldots$; gerçek hata $1{,}85 \times 10^{-6}$ olup kestirimin altındadır.

b) $1 - \dfrac{x^2}{2}$ polinomu kosinüsün hem 2. hem 3. mertebeden Maclaurin polinomudur (x^3 katsayısı sıfırdır). Daha keskin kestirim veren $n = 3$ seçimiyle, Örnek 12.2'teki sınır

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| = |\,R_3(x)\,| \le \frac{|\,x\,|^4}{4!} = \frac{|\,x\,|^4}{24}$$

verir. $\dfrac{|\,x\,|^4}{24} < 10^{-3}$ koşulu $|\,x\,|^4 < 0{,}024$, yani $|\,x\,| < (0{,}024)^{1/4}$ demektir. $(0{,}024)^{1/2} = 0{,}15492$ ve $(0{,}15492)^{1/2} = 0{,}39360$ olduğundan

$$|\,x\,| < 0{,}3936$$

koşulu hatayı 10^{-3}'ün altında tutar. Bu bir **yeter** koşuldur, ama keskindir: $x = 0{,}5$ için kestirim $\dfrac{0{,}0625}{24} = 0{,}00260$, gerçek hata ise $0{,}8775826 - 0{,}875 = 0{,}00258$'dir.

c) Örnek 12.1'den $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3)$ $(u \to 0)$. $u = -x^2$ koyalım; $x \to 0$ iken $u \to 0$'dır ve

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6).$$

Burada $o\left(\,(-x^2)^3\,\right) = o(x^6)$ yazdık: $\dfrac{\rho(u)}{u^3} \to 0$ ise $u = -x^2$ için $\dfrac{\rho(-x^2)}{x^6} \to 0$ olur. Sağdaki polinomun derecesi 6'dır ve $g(x)$'ten farkı $o(x^6)$'dır; Önerme 12.2 gereği aradığımız polinom budur:

$$T_6(x;0) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}.$$

Yan ürün: $\dfrac{g^{(6)}(0)}{6!} = -\dfrac{1}{6}$ olduğundan $g^{(6)}(0) = -120$'dir; bu sayıyı altı kez türev alarak bulmak epeyce zahmetli olurdu.

d) Örnek 12.2'te $m = 3$ ile ($n = 6$ mertebesinden) Peano kalanlı açılımı yazalım:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \qquad x \to 0.$$

O hâlde pay $\dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$ olur ve

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120} + x \cdot \frac{o(x^6)}{x^6}.$$

Sağdaki ikinci terimde $\dfrac{o(x^6)}{x^6} \to 0$ ve $x \to 0$ olduğundan çarpım 0'a gider; limit $\dfrac{1}{120}$'dir. L'Hôpital kuralıyla aynı sonuç beş kez türev almayı gerektirirdi.

e) Örnek 12.6'da $\alpha = \dfrac{1}{3}$ alalım. $\binom{1/3}{1} = \dfrac{1}{3}$ ve $\binom{1/3}{2} = \dfrac{(1/3)(-2/3)}{2} = -\dfrac{1}{9}$ olduğundan

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}, \qquad T_2(0{,}1) = 1 + 0{,}0333333 - 0{,}0011111 = 1{,}0322222.$$

Hata için üçüncü türev gerekir:

$$f'''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(1+x)^{-8/3} = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}.$$

$0 < c < 0{,}1$ için $(1+c)^{-8/3} < 1$ olduğundan

$$|\,R_2(0{,}1)\,| = \frac{f'''(c)}{3!}(0{,}1)^3 < \frac{10}{162} \times 10^{-3} \approx 6{,}2 \times 10^{-5}.$$

Gerçek değer $\sqrt[3]{1{,}1} = 1{,}0322801\ldots$; gerçek hata $5{,}8 \times 10^{-5}$ olup kestirimin altındadır.

f) $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ olsun. Örnek 12.9'ndeki gibi, her n için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0 < e - s_n = \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

olur; kalanın kesin olarak **pozitif** olduğuna dikkat edelim.
e'nin rasyonel olduğunu varsayalım: $e = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. $n = \max\{q, 3\}$ seçelim.

- $n \geq q$ olduğundan $q \mid n!$'dir; dolayısıyla $n!\, e = \dfrac{n!\, p}{q}$ bir tam sayıdır.
- $n!\, s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ toplamındaki her terim tam sayıdır, çünkü $k \leq n$ için $\dfrac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$ bir doğal sayıdır.

Demek ki $N = n!\,(e - s_n)$ bir tam sayıdır. Öte yandan yukarıdaki eşitsizliği $n!$ ile çarparsak

$$0 < N < \frac{3\, n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} < 1$$

buluruz ($n \geq 3$ olduğundan $n + 1 \geq 4$). Ama 0 ile 1 arasında tam sayı yoktur. Çelişki, e'nin rasyonel olduğu varsayımından doğmuştur; öyleyse e irrasyoneldir.
■

Bu bölümde Taylor formülünü kurduk, üç kalan biçimini ispatladık ve temel fonksiyonların açılımlarını çıkardık. Elimizdeki bu alet yalnızca sayısal yaklaşım için değil; limit hesaplarında L'Hôpital kuralının yerini alan çok daha hızlı bir yöntem, eşitsizlik ispatlarında doğrudan bir teknik ve ekstremum sınıflandırmasında kesin bir ölçüt olarak da kullanılır. Bir sonraki bölümde bunların hepsini sırayla göreceğiz: Taylor Formülünün Uygulamaları.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Taylor Formülünün Uygulamaları

Bir önceki bölümde Taylor formülünü kurduk: yeterince türevlenebilir bir fonksiyonu bir nokta çevresinde polinomla değiştirdiğimizde yaptığımız hatayı iki ayrı biçimde ölçmeyi öğrendik. Formülün asıl değeri, birbirinden çok uzak görünen dört soruyu tek bir tekniğe indirgemesindedir.

Birincisi sayısal hesap. e, $\sqrt{e}$, $\sin 0{,}1$, $\ln 1{,}2$ gibi sayıların ondalık açılımını, yalnızca dört işlemle ve istediğimiz kadar basamağı **garantili** biçimde nasıl buluruz? Kaç basamağının doğru olduğunu bilmediğimiz bir yaklaşımın hiçbir değeri yoktur; Lagrange kalanı tam olarak bu güvenceyi verir.

İkincisi limit hesabı. $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ ya da $\dfrac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$ gibi belirsiz biçimleri, L'Hôpital kuralını üst üste dört kez uygulamak yerine iki satırda bitirebiliriz: Peano kalanlı Taylor formülü payı ve paydayı "en düşük dereceli terim + ihmal edilebilir artık" biçiminde yazdırır, gerisi sadeleştirmedir.

Üçüncüsü ekstremum sınıflandırması. İkinci türev testi $f''(x_0) = 0$ olduğunda susar; oysa x^4, $-x^4$ ve x^3 fonksiyonlarının üçü de $f'(0) = f''(0) = 0$ koşulunu sağlar ve üçü ayrı davranır. Taylor formülü bunları tek teoremde ayırt eder: **sıfırdan farklı ilk türevin mertebesine** bakmak yeter.

Dördüncüsü eşitsizlik ispatı. $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x$, $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ gibi eşitsizlikler, kalan teriminin işaretine bakılarak tek satırda çıkar. Dördünün ortak kaynağı tek bir formüldür; onu her seferinde nasıl "ayarlayacağımızı" göreceğiz.

> **i** Hatırlatma: Taylor formülünün iki yüzü
>
> P_n ile f'nin x_0 noktasındaki n'inci Taylor polinomunu gösteriyoruz:
>
> $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k.$$
>
> **Lagrange kalanlı biçim (sayısal bilgi).** f, x_0 ile x'i içeren bir aralıkta $n+1$ kez türevlenebiliyorsa (Teorem 12.1), x_0 ile x arasında öyle bir θ vardır ki
>
> $$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$
>
> θ'nın nerede olduğunu bilmeyiz; ama $|\,f^{(n+1)}\,|$ için bir üst sınır bilirsek $|\,R_n(x)\,|$ için de bir üst sınır elde ederiz. Yaklaşık hesabın tamamı bu tek cümleye dayanır.
>
> **Peano kalanlı biçim (asimptotik bilgi).** f, x_0'ın bir komşuluğunda $n-1$ kez ve x_0 noktasında n kez türevlenebiliyorsa (Teorem 12.3)
>
> $$f(x) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right), \qquad x \to x_0,$$
>
> yani $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Bu biçim hiçbir sayısal sınır vermez; buna karşılık kalanın *hangi mertebeden küçük* olduğunu söyler.
>
> Kabaca: **Lagrange sayı verir, Peano mertebe verir.**

13.1 Yaklaşık Hesap ve Hata Kestirimi

Bir sayının Taylor polinomuyla hesabı her zaman aynı üç adımdan oluşur. Önce **fonksiyonu ve merkezi seçeriz**: hesaplanacak sayıyı $f(x)$ biçiminde yazar, x_0 olarak f ve türevlerinin *tam olarak bilindiği* bir nokta alırız (çoğu zaman $x_0 = 0$). Sonra **kalanı sınırlarız**: x_0 ile x arasındaki bütün t'ler için $|\,f^{(n+1)}(t)\,| \le M$ olacak bir M bulunca

 CC BY-NC-SA 4.0

$$|\,R_n(x)\,| \le \frac{M\,|\,x-x_0\,|^{n+1}}{(n+1)!}$$

olur. Son olarak **dereceyi seçeriz**: istenen duyarlık ε ise bu sınırı ε'dan küçük yapan en küçük n'i belirleyip $P_n(x)$'i hesaplarız.
Faktöriyel her kuvvetten hızlı büyüdüğü için, $|\,x-x_0\,|$ küçükse birkaç terim şaşırtıcı derecede iyi bir duyarlık verir. Her örneği "şu kadar ondalık basamağı kesindir" cümlesiyle bitireceğiz; çünkü hata sınırı olmayan bir yaklaşım, yaklaşım değildir.

Örnek 13.1 (Euler Sayısının Hesabı). e sayısını, hatası 10^{-6}'dan küçük olacak biçimde hesaplayınız. Kaç ondalık basamağın kesin olduğunu belirtiniz.

Çözüm.
$f(x)=e^x$ ve $x_0=0$ alalım. Her k için $f^{(k)}(0)=1$ olduğundan $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$'dir. Aradığımız sayı $e=f(1)$, yani $x=1$ hâlidir.
Hata sınırı. Lagrange kalanı bir $\theta\in(0,1)$ için $R_n(1)=\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}$ verir. Üstel fonksiyon artan ve $\theta<1$ olduğundan $1<e^{\theta}<e<3$, yani

$$0<R_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Kalanın **pozitif** olduğuna dikkat edelim: Taylor polinomu e'yi her zaman *aşağıdan* yaklaşık verir.
Derecenin seçimi. $\dfrac{3}{(n+1)!}<10^{-6}$ için $(n+1)!>3\cdot10^{6}$ gerekir; $9!=362\,880$ yetmez, $10!=3\,628\,800$ yeter. Öyleyse $n=9$ almalıyız.
Hesap. Terimleri sırayla toplayalım:

$$\begin{aligned}P_9(1)=\;&1+1+0{,}5+0{,}166\,666\,67+0{,}041\,666\,67+0{,}008\,333\,33\\&+0{,}001\,388\,89+0{,}000\,198\,41+0{,}000\,024\,80+0{,}000\,002\,76=2{,}718\,281\,53.\end{aligned}$$

Kalan sınırı ise

$$0<e-P_9(1)<\frac{3}{10!}=\frac{3}{3\,628\,800}<8{,}3\cdot10^{-7}.$$

Sonuç. e sayısı

$$2{,}718\,281\,5<e<2{,}718\,282\,4$$

aralığındadır ve buradaki bütün sayılar $2{,}71828$ ile başlar: **ilk beş ondalık basamak kesindir**, $e\approx2{,}71828$. (Gerçek değer $2{,}718\,281\,828\ldots$)
Daha az terimle ne olurdu? $n=7$ alsaydık sınır $\dfrac{3}{8!}<7{,}5\cdot10^{-5}$, yani $2{,}718\,254<e<2{,}718\,329$ olurdu; bu yalnızca **üç** basamağı ($2{,}718$) garantiler. İki terim eklemek, kesin basamak sayısını üçten beşe çıkarmıştır.
■

Bu örnekte x_0 ile x arasındaki uzaklık 1 idi. Uzaklık küçüldüğünde $|\,x-x_0\,|^{n+1}$ çarpanı devreye girer ve yakınsama çok hızlanır.

Örnek 13.2 (Karekök e Sayısının Hesabı). $\sqrt{e}$ sayısını, hatası 10^{-5}'ten küçük olacak biçimde hesaplayınız.

Çözüm.
$\sqrt{e}=e^{1/2}=\left(\frac{1}{2}\right)$; yine $f(x)=e^x$, $x_0=0$ ve aynı polinom, yalnızca $x=\frac{1}{2}$ ile.
Hata sınırı. Bir $\theta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ için

$$R_n\!\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Burada $e^{\theta} < e^{1/2} = \sqrt{e} < 2$'dir; çünkü $e < 4$ olduğundan $\sqrt{e} < 2$. Öyleyse

$$0 < R_n\!\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{2}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{\,n}\,(n+1)!}.$$

Derecenin seçimi. $n = 5$ için sınır $\dfrac{1}{32\cdot 720} \approx 4{,}34\cdot 10^{-5}$ olup yetmez; $n = 6$ için $\dfrac{1}{64\cdot 5040} \approx 3{,}10\cdot 10^{-6}$ olup yeter. Öyleyse $n = 6$ alıyoruz.
Hesap.

$$\begin{aligned} P_6\!\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} + \frac{(1/2)^5}{5!} + \frac{(1/2)^6}{6!} \\ &= 1 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}020\,833\,3 + 0{,}002\,604\,2 + 0{,}000\,260\,4 + 0{,}000\,021\,7 \\ &= 1{,}648\,719\,6. \end{aligned}$$

Sonuç. Kalan pozitif ve $3{,}2\cdot 10^{-6}$'dan küçük olduğundan $1{,}648\,719\,6 < \sqrt{e} < 1{,}648\,722\,8$'dir. Bu aralığın tamamı $1{,}648\,715$ ile $1{,}648\,725$ arasında kaldığından buradaki her sayı beş ondalık basamağa yuvarlandığında $1{,}64872$ verir: $\sqrt{e} \approx 1{,}64872$ değerinin **beş ondalık basamağı güvence altındadır**. (Gerçek değer $1{,}648\,721\,270\ldots$) e için beş basamak 10 terim gerektirmişti, $\sqrt{e}$ için 7 terim yetti; fark $\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ çarpanından gelir: **merkeze yaklaştıkça iş kolaylaşır.**
■

Trigonometrik fonksiyonlarda kalanı sınırlamak daha da kolaydır: bütün türevler $\pm\sin$ ya da $\pm\cos$ olduğundan mutlak değerleri her yerde 1'i aşmaz.

Örnek 13.3 (Sinüs Değerinin Hesabı). $\sin 0{,}1$ değerini hesaplayınız ve hatanızın kaç ondalık basamağı garantilediğini söyleyiniz.

Çözüm.
$f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = 0{,}1$ alalım. Türevler sin ile cos arasında dönüp durduğundan $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, ... olur ve

$$P_1(x) = P_2(x) = x, \qquad P_3(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

elde edilir. Çift mertebeli türevler 0'da sıfırlandığı için $P_1 = P_2$ ve $P_3 = P_4$ olur; bu **bedava bir derece kazancı**dır ve hata sınırını belirgin biçimde iyileştirir.
Hata sınırı. Her t için $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le 1$ olduğundan $\mid R_n(x) \mid \le \dfrac{\mid x \mid^{n+1}}{(n+1)!}$'dir. $x = 0{,}1$ için bu sınır sırasıyla

$$n = 1 : 5\cdot 10^{-3}, \qquad n = 2 : 1{,}67\cdot 10^{-4}, \qquad n = 3 : 4{,}17\cdot 10^{-6}, \qquad n = 4 : 8{,}34\cdot 10^{-8}$$

değerlerini alır.
Hesap ve sonuç. $n = 4$ alalım:

$$P_4(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{6} = 0{,}099\,833\,333\,3, \qquad |\sin 0{,}1 - P_4(0{,}1)| \le \frac{(0{,}1)^5}{120} < 8{,}34\cdot 10^{-8}.$$

Demek ki $0{,}099\,833\,25 < \sin 0{,}1 < 0{,}099\,833\,42$'dir ve buradaki her sayı $0{,}099\,833$ ile başlar: **ilk altı ondalık basamak kesindir**. (Gerçek değer $0{,}099\,833\,416\,6\ldots$)
$n = 2$ satırı da öğreticidir: $\sin x \approx x$ kaba yaklaşımı bile $x = 0{,}1$ için $1{,}67\cdot 10^{-4}$'ten iyi bir hata verir. Fizikte "küçük açılar için $\sin x \approx x$" denmesinin sayısal karşılığı budur; bu yaklaşımın **ne kadar** kaba olduğunu ancak Lagrange kalanı söyleyebilir.
■

Şimdiye dek türevleri her mertebede sınırlı olan fonksiyonlarla çalıştık. Logaritmada türevler faktöriyel hızıyla büyür; ama kalan formülündeki $(n+1)!$ bu büyümeyi tam olarak yutar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.4 (Logaritma Değerinin Hesabı). $\ln 1{,}2$ değerini, hatası 10^{-6}'dan küçük olacak biçimde hesaplayınız.

Çözüm.
$f(x)=\ln(1+x)$, $x_0=0$ ve $x=0{,}2$ alalım; $f(0{,}2)=\ln 1{,}2$'dir.
Türevler. Tümevarımla $k\geq 1$ için $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ bulunur: $k=1$ için $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ doğrudur ve k'dan $k+1$'e geçiş, $(1+x)^{-k}$ türevinin $-k(1+x)^{-k-1}$ olmasından çıkar. Buradan $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ ve

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Hata sınırı. Bir $\theta\in(0;0{,}2)$ için

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,x^{n+1}=\frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}$$

olur; faktöriyeller birbirini götürdü. $\theta>0$ olduğundan $(1+\theta)^{n+1}>1$ ve $\mid R_n(0{,}2)\mid<\dfrac{(0{,}2)^{n+1}}{n+1}$'dir.
Derecenin seçimi. Sınır $n=5$ için $\approx 1{,}07\cdot 10^{-5}$, $n=6$ için $\approx 1{,}83\cdot 10^{-6}$ olup yetmez; $n=7$ için $\dfrac{(0{,}2)^8}{8}=3{,}2\cdot 10^{-7}$ olup yeter.
Hesap. $x=0{,}2$ için terimler:

$$\begin{aligned}P_7(0{,}2)&=0{,}2-\frac{0{,}04}{2}+\frac{0{,}008}{3}-\frac{0{,}0016}{4}+\frac{0{,}000\,32}{5}-\frac{0{,}000\,064}{6}+\frac{0{,}000\,012\,8}{7}\\&=0{,}2-0{,}02+0{,}002\,666\,67-0{,}0004+0{,}000\,064-0{,}000\,010\,67+0{,}000\,001\,83\\&=0{,}182\,321\,83.\end{aligned}$$

Sonuç. $\mid R_7(0{,}2)\mid<3{,}2\cdot 10^{-7}$ olduğundan $0{,}182\,321\,5<\ln 1{,}2<0{,}182\,322\,2$'dir; buradaki her sayı $0{,}18232$ ile başlar, yani **ilk beş ondalık basamak kesindir**. Kalanın işareti $(-1)^7=-1$ olduğundan aslında $\ln 1{,}2<P_7(0{,}2)$'dir: bu kez polinom değeri gerçek değeri biraz **aşırı** kestirir. (Gerçek değer $0{,}182\,321\,556\,8\ldots$)

> ⚠ Merkezden uzaklaşmak öldürücüdür
>
> Aynı polinomla $\ln 2$'yi hesaplamaya kalkarsak $x=1$ almamız gerekir ve hata sınırı $\dfrac{1}{n+1}$ olur: 10^{-6} duyarlık için bir milyon terim gerekir! Oysa $x=0{,}2$ iken yedi terim yetmişti. Fark $\mid x-x_0\mid^{n+1}$ çarpanındadır: $0{,}2^{n+1}$ hızla sıfıra giderken 1^{n+1} hiç küçülmez. Logaritma hesapları bu yüzden $\ln\dfrac{1+t}{1-t}$ gibi, argümanı merkeze yaklaştıran dönüşümlerle yapılır.

■

Bütün örneklerde hata sınırı gerçek hatadan biraz büyüktü. Bu bir kusur değil, kestirimin doğasıdır: θ'nın yerini bilmediğimiz için $f^{(n+1)}(\theta)$ yerine en kötü durumu koyarız. Aşağıdaki önerme, sınırın ne kadar "gevşek" olduğunu sayısallaştırır ve hatanın n ile ne hızda küçüldüğünü gösterir.

Önerme 13.1 (Üstel Fonksiyon için Hata Tablosu). *$f(x)=e^x$, $x_0=0$ ve $x=0{,}5$ olsun. $E_n=e^{0{,}5}-P_n(0{,}5)$ hatası her $n\geq 0$ için*

$$\frac{(0{,}5)^{n+1}}{(n+1)!}<E_n<1{,}65\cdot\frac{(0{,}5)^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliklerini sağlar. Özel olarak $E_n>0$'dır ve $\dfrac{E_n}{E_{n+1}}>2(n+2)\,e^{-1/2}>n+2$ olduğundan hata, her yeni terimle en az $(n+2)$ katı küçülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Lagrange kalanı, bir $\theta_n \in (0;0{,}5)$ *için*

$$E_n = R_n(0{,}5) = \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}\,(0{,}5)^{n+1}$$

verir. Üstel fonksiyon kesin artan olduğundan $1 < e^{\theta_n} < \sqrt{e}$*'dir; ayrıca* $1{,}65^2 = 2{,}7225 > e$ *olduğundan* $\sqrt{e} < 1{,}65$*'tir. Bu iki sınır istenen eşitsizlikleri verir ve alt sınır pozitif olduğundan* $E_n > 0$*'dır.*
Oran için $\theta_n, \theta_{n+1} \in (0;0{,}5)$ *olduğundan* $e^{\theta_n - \theta_{n+1}} > e^{-1/2}$*'dir; buradan* $\dfrac{E_n}{E_{n+1}} = e^{\theta_n-\theta_{n+1}} \cdot 2(n+2) > 2(n+2)e^{-1/2}$ *ve* $e^{-1/2} > \dfrac{1}{1{,}65} > \dfrac{1}{2}$ *olduğundan* $2(n+2)e^{-1/2} > n+2$ *çıkar.*
Aşağıdaki tablo $n = 1, \dots, 5$ *için sayısal durumu gösterir (*$e^{0{,}5} = 1{,}648\,721\,3$*).*

n	$P_n(0{,}5)$	Gerçek hata E_n	Alt sınır	Üst sınır
1	1,500 000 0	0,148 721 3	0,125 000 0	0,206 250 0
2	1,625 000 0	0,023 721 3	0,020 833 3	0,034 375 0
3	1,645 833 3	0,002 887 9	0,002 604 2	0,004 296 9
4	1,648 437 5	0,000 283 8	0,000 260 4	0,000 429 7
5	1,648 697 9	0,000 023 4	0,000 021 7	0,000 035 8

Tablodan iki şey okunur. Birincisi, gerçek hata her satırda alt ve üst sınırın arasındadır ve üst sınır onun yaklaşık $1{,}4$ *ile* $1{,}5$ *katı arasındadır: kestirim gevşek ama kullanışlıdır. İkincisi, ardışık hataların oranları yaklaşık* $6{,}3$*,* $8{,}2$*,* $10{,}2$ *ve* $12{,}1$*'dir; bunlar* $2(n+2)$ *değerleri olan* $6, 8, 10, 12$*'ye çok yakındır. Yani her yeni terim, kesin ondalık basamak sayısını yaklaşık bir birim artırır.*
■

13.2 Limit Hesabında Taylor Açılımı

Şimdi Taylor formülünün öteki yüzüne, Peano kalanlı biçime geçiyoruz. Burada amaç bir sayıyı hesaplamak değil, $x \to x_0$ iken bir ifadenin **hangi mertebeden** küçüldüğünü anlamaktır.
Fikir basittir: $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği, pay ve paydanın ikisinin de x_0'da sıfırlanması demektir. Her ikisini Taylor polinomuna açarsak sıfırlanan terimler kendiliğinden düşer ve geriye "en düşük dereceli terim + daha küçük mertebeden artık" kalır; oran alındığında $(x - x_0)$'ın kuvvetleri sadeleşir. L'Hôpital kuralı aynı işi her adımda yeni bir türev hesaplatarak yapar; Taylor bütün adımları tek seferde yapar.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Elde bulunması gereken açılımlar

Aşağıdaki Maclaurin açılımları ($x \to 0$ için, Peano kalanıyla) bundan sonraki hesapların hammaddesidir; $m, n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o\left(x^{2m+2}\right),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o\left(x^{2m+1}\right),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^6\right).
\end{aligned}
$$

Sinüs, kosinüs ve tanjant satırlarındaki kalanların bir derece "fazladan" iyi olması, bu fonksiyonların tek ya da çift olmasından gelir: eksik kuvvetin katsayısı zaten sıfırdır. tan katsayıları doğrudan türevlerden çıkar: $f' = 1 + \tan^2$, $f'' = 2\tan(1+\tan^2)$, $f''' = 2(1+\tan^2)(1+3\tan^2)$ olduğundan $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2$ ve $\dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{1}{3}$'tür.

Sadeleştirmenin hangi koşulda işlediğini bir teorem olarak yazalım. Teorem üç durumu birden kapsar: pay ve payda **aynı** mertebeden sıfırlanıyorsa limit sonlu ve sıfırdan farklıdır; pay daha yüksek mertebedense limit sıfırdır; payda daha yüksek mertebedense oran patlar.

Teorem 13.1 (Taylor Açılımıyla Belirsiz Limit Hesabı). *I, x_0 noktasını içeren açık bir aralık ve $f, g : I \to \mathbb{R}$ olsun. $p, q \geq 1$ tam sayıları için f, x_0'ın bir komşuluğunda $p-1$ kez ve x_0 noktasında p kez; g ise x_0'ın bir komşuluğunda $q-1$ kez ve x_0 noktasında q kez türevlenebilir olsun ve*

$$f(x_0) = \cdots = f^{(p-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0; \qquad g(x_0) = \cdots = g^{(q-1)}(x_0) = 0, \quad g^{(q)}(x_0) \neq 0$$

sağlansın. $a = \dfrac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$, $b = \dfrac{g^{(q)}(x_0)}{q!}$ diyelim. O hâlde x_0'ın delinmiş bir komşuluğunda $g(x) \neq 0$'dır ve

1. *$p = q$ ise $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} = \frac{f^{(p)}(x_0)}{g^{(p)}(x_0)}$;*
2. *$p > q$ ise $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;*
3. *$p < q$ ise $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.*

İspat.
Adım 1: iki fonksiyonu çarpanlarına ayıralım. *Peano kalanlı Taylor formülünü (Teorem 12.3) f'ye p'inci mertebeden uygulayalım. Varsayım gereği ilk p terim yok olur ve geriye yalnızca son terim kalır:*

$$f(x) = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p + o\left((x-x_0)^p\right) = a\,(x-x_0)^p + o\left((x-x_0)^p\right).$$

Şimdi $x \neq x_0$ için

$$\varepsilon_1(x) = \frac{f(x) - a\,(x-x_0)^p}{(x-x_0)^p}, \qquad \varepsilon_1(x_0) = 0$$

tanımlayalım. Peano kalanının tanımı gereği $\varepsilon_1(x) \to 0$'dır ve her $x \in I$ için $f(x) = (x-x_0)^p\left(a + \varepsilon_1(x)\right)$ yazılır. Aynı işlemi g'ye uygulayarak, $\varepsilon_2(x) \to 0$ olmak üzere $g(x) = (x-x_0)^q\left(b + \varepsilon_2(x)\right)$ elde ederiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: payda sıfırdan uzak durur. $b \neq 0$ *ve* $\varepsilon_2(x) \to 0$ *olduğundan öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki* $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$ *ve* $x \in I$ *iken* $|\, \varepsilon_2(x) \,| < \dfrac{|\, b \,|}{2}$ *olur. Ters üçgen eşitsizliğiyle (bkz. Analiz 1)* $|\, b + \varepsilon_2(x) \,| \geq |\, b \,| - |\, \varepsilon_2(x) \,| > \dfrac{|\, b \,|}{2} > 0$*'dır. Bu komşulukta* $(x - x_0)^q \neq 0$ *olduğundan* $g(x) \neq 0$*'dır.*

Adım 3: oranı sadeleştirelim. *Aynı komşulukta*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - x_0)^p \,\big(\, a + \varepsilon_1(x) \,\big)}{(x - x_0)^q \,\big(\, b + \varepsilon_2(x) \,\big)} = (x - x_0)^{p-q} \cdot \frac{a + \varepsilon_1(x)}{b + \varepsilon_2(x)}$$

yazılır. İkinci çarpanın limiti, limit aritmetiğiyle (bkz. Analiz 1) $\dfrac{a}{b} \neq 0$*'dır.*

Adım 4: üç durum.

(1) $p = q$ *ise birinci çarpan* $(x - x_0)^0 = 1$*'dir ve limit doğrudan* $\dfrac{a}{b}$ *çıkar;* $p = q$ *olduğunda* $p!$ *ile* $q!$ *sadeleştiğinden* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{f^{(p)}(x_0)}{g^{(p)}(x_0)}$*'dir.*

(2) $p > q$ *ise* $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^{p-q} = 0$*'dır; limiti sıfır olan bir fonksiyonla limiti sonlu olan bir fonksiyonun çarpımının limiti sıfır olduğundan limit* 0*'dır.*

(3) $p < q$ *ise*

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{1}{|\, x - x_0 \,|^{q-p}} \cdot \left|\frac{a + \varepsilon_1(x)}{b + \varepsilon_2(x)}\right|.$$

İkinci çarpanın limiti $\left|\dfrac{a}{b}\right| > 0$ *olduğundan,* δ*'yı gerekirse küçülterek bu çarpanın* $\dfrac{|\, a \,|}{2\,|\, b \,|}$*'den büyük kaldığı bir komşuluk buluruz. Orada* $\left|\dfrac{f}{g}\right| > \dfrac{|\, a \,|}{2\,|\, b \,|} \cdot \dfrac{1}{|\, x - x_0 \,|^{q-p}}$ *olur ve sağ taraf* $x \to x_0$ *iken* $+\infty$*'a gider.*

■

Pratikte varsayımları tek tek denetlemeyiz: payı ve paydayı sıfırdan farklı ilk terim çıkana kadar açar, sonra sadeleştiririz. Tek dikkat edilecek nokta açılımı **yeterli mertebeye kadar** götürmektir; paydanın en düşük dereceli terimi $(x - x_0)^q$ ise pay da en az q'uncu mertebeye kadar açılmalıdır.

Örnek 13.5 (Taylor Açılımıyla Limitler). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$
- b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
- c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$
- d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$
- e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2}$
- f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^3}$

Çözüm.

a) Sinüsün açılımında x^3'e kadar gitmek yeter:

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3}.$$

$\dfrac{o(x^4)}{x^3} = x \cdot \dfrac{o(x^4)}{x^4} \to 0$ olduğundan limit $-\dfrac{1}{6}$'dır. Aynı sonuç Teorem 13.1 ile de okunur: $f(x) = \sin x - x$ için $p = 3$, $a = -\dfrac{1}{6}$; $g(x) = x^3$ için $q = 3$, $b = 1$ ve $p = q$'dur.

b) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ olduğundan

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \to \frac{1}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

c) Payda x^4 olduğundan kosinüsü x^4 mertebesine kadar açmalıyız:

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{24} + \frac{o(x^5)}{x^4} \to \frac{1}{24}.$$

Erken kesmenin tehlikesi burada açıkça görülür: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ yazsaydık pay $o(x^3)$ olurdu ve $\dfrac{o(x^3)}{x^4}$ hakkında hiçbir şey söyleyemezdik.

d) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ olduğundan

$$\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3} \to \frac{1}{3}.$$

e) Bu, Teorem 13.1′nin ikinci durumudur ($p = 3 > q = 2$): $\dfrac{\sin x - x}{x^2} = -\dfrac{x}{6} + \dfrac{o(x^4)}{x^2} \to 0$.

f) Bu da üçüncü durumdur: $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ olduğundan $p = 2 < q = 3$'tür ve

$$\frac{1 - \cos x}{x^3} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^2}\right).$$

Parantezin limiti $\dfrac{1}{2} > 0$'dır; $\dfrac{1}{x}$ ise $x \to 0^+$ iken $+\infty$'a, $x \to 0^-$ iken $-\infty$'a gider. Demek ki limit yoktur, ama mutlak değerin limiti $+\infty$'dur:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^3} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^3} = -\infty.$$

■

Altı limit de birkaç satırda bitti. Aynı hesaplar L'Hôpital kuralıyla da yapılabilir; bedeli görmek öğreticidir.

Örnek 13.6 (Aynı Limitler L'Hôpital ile). Örnek 13.5′nın (c) ve (d) şıklarını L'Hôpital kuralıyla hesaplayınız ve iki yöntemi karşılaştırınız.

Çözüm.

(c) şıkkı. $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ ve $g(x) = x^4$ olsun. Her adımda pay ve paydanın 0'a gittiğini denetleyip Teorem 11.2′i uygularız:

$$\frac{f'}{g'} = \frac{-\sin x + x}{4x^3}\left(\frac{0}{0}\right), \qquad \frac{f''}{g''} = \frac{1 - \cos x}{12x^2}\left(\frac{0}{0}\right), \qquad \frac{f'''}{g'''} = \frac{\sin x}{24x}\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\frac{f^{(4)}}{g^{(4)}} = \frac{\cos x}{24} \to \frac{1}{24}.$$

Son limit var olduğundan geriye doğru bütün adımlar meşrulaşır ve aranan limit $\dfrac{1}{24}$'tür. Dört kez türev almak, dört kez belirsizlik denetimi yapmak ve sonucun geriye taşındığını hatırlamak gerekti; Taylor'la aynı sonuç iki satırdaydı.

(d) şıkkı. $f(x) = \tan x - x$, $g(x) = x^3$. Birinci uygulamada $f'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ ve $g'(x) = 3x^2$ ile $\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}$, ikinci uygulamada $\dfrac{2\tan x \sec^2 x}{6x}$ elde edilir; her ikisi de $\frac{0}{0}$ biçimindedir. Üçüncü uygulamada payın türevi çarpım kuralıyla

$$\left(2\tan x \sec^2 x\right)' = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x,$$

paydanın türevi 6'dır ve $\sec 0 = 1$, $\tan 0 = 0$ olduğundan limit $\dfrac{2+0}{6} = \dfrac{1}{3}$ çıkar. Üç uygulama ve giderek büyüyen türev ifadeleri gerekti; oysa Taylor yöntemi $\tan x$'in üçüncü mertebeden açılımını bir kez hatırlamayı istiyordu.

 CC BY-NC-SA 4.0

Karşılaştırma. L'Hôpital **her adımda yeni türev** hesaplatır, türevler karmaşıklaşır ve her adımda belirsizlik biçiminin korunduğu denetlenmelidir; Taylor ise açılımı bir kez yazıp bütün mertebeleri aynı anda görür. Üstelik L'Hôpital bazen hiç sonuç vermez: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ limitinde kural $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ verir ve bir kez daha uygulanınca başa dönülür. Buna karşılık Taylor, fonksiyonun ilgili noktada yeterince türevlenebilir olmasını ister ve yalnızca **sonlu bir noktaya** yaklaşırken doğrudan uygulanır; $x \to \infty$ durumunda önce $t = \dfrac{1}{x}$ dönüşümü gerekir. Teorem 11.3 gibi sonuçlar bu yüzden vazgeçilmezdir: en sağlıklısı iki aleti de elde tutmaktır.
■

13.3 Yüksek Mertebeden Türev Testi

Teorem 7.1, kritik noktaların (Tanım 7.3) ekstremum adayları olduğunu söyler; ama karşıtı yanlıştır: $f'(x_0) = 0$ olduğunda x_0 yerel maksimum da, yerel minimum da olabilir, hiçbiri de olmayabilir. Klasik ikinci türev testi ayırt edici bilgiyi $f''(x_0)$'ın işaretinden alır, ne var ki $f''(x_0) = 0$ olduğunda susar. Üç örnek durumu netleştirir; üçünde de $f'(0) = f''(0) = 0$'dır:

$$f(x) = x^4 \ \text{(0 'da yerel minimum)}, \qquad f(x) = -x^4 \ \text{(0 'da yerel maksimum)}, \qquad f(x) = x^3 \ \text{(0 'da ekstremum yok)}.$$

Bu üçünü ayıran nedir? Sıfırdan farklı olan ilk türev: birincide $f^{(4)}(0) = 24 > 0$, ikincide $f^{(4)}(0) = -24 < 0$, üçüncüde $f'''(0) = 6 \neq 0$. İlk ikisinde mertebe **çift**, üçüncüde **tek**. Aşağıdaki teorem bunun genel kural olduğunu söyler. İspatın kalbi tek bir gözlemdir: x_0 yakınında $f(x) - f(x_0)$ farkının işaretini sıfırdan farklı ilk Taylor terimi belirler ve $(x - x_0)^n$ çarpanı n çift ise işaret değiştirmez, n tek ise değiştirir.

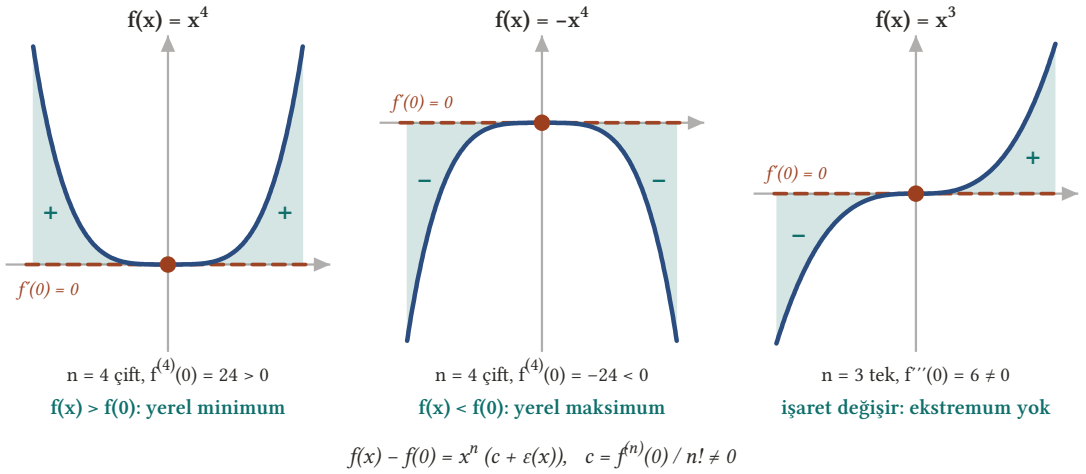
Teorem 13.2 (Yüksek Mertebeden Türev Testi). *I açık bir aralık, $x_0 \in I$ ve $n \geq 2$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(n-1)$'inci türevi x_0'ın bir komşuluğunda, $f^{(n)}(x_0)$ ise x_0'da var olsun ve*

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

sağlansın. O hâlde:

1. *n **çift** ve $f^{(n)}(x_0) > 0$ ise x_0 noktası f'nin kesin yerel minimum noktasıdır.*
2. *n **çift** ve $f^{(n)}(x_0) < 0$ ise x_0 noktası f'nin kesin yerel maksimum noktasıdır.*
3. *n **tek** ise x_0 noktası f'nin yerel ekstremum noktası **değildir**; dahası, x_0'ın her komşuluğunda hem $f(x) > f(x_0)$ olan hem de $f(x) < f(x_0)$ olan noktalar bulunur.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.1: Üç fonksiyonun da orijinde birinci ve ikinci türevi sıfırdır; teğet üçünde de yataydır, bu yüzden ikinci türev testi hiçbirini ayırt edemez. Ayrımı sıfırdan farklı olan ilk türevin mertebesi yapar: Taylor formülü $f(x) - f(0)$ *farkını* $x^n(c + \varepsilon(x))$ *biçiminde yazar ve orijine yeterince yakın noktalarda işareti* x^n *çarpanı belirler.* n *çift olduğunda bu çarpan iki yanda da pozitiftir, fark* c*'nin işaretini korur:* $c > 0$ *ise kesin yerel minimum (solda),* $c < 0$ *ise kesin yerel maksimum (ortada).* n *tek olduğunda çarpan orijinin iki yanında zıt işaretlidir; fark da işaret değiştirdiğinden orijin ekstremum noktası olamaz (sağda).*

İspat.
Adım 1: farkı çarpanlarına ayıralım. *Varsayımlar, Peano kalanlı Taylor formülünü (Teorem 12.3)* n*'inci mertebeden uygulamamıza izin verir.* $f'(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)$ *sıfır olduğundan ortadaki bütün terimler yok olur ve geriye sabit terim ile son terim kalır:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right), \qquad x \to x_0.$$

$c = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ *diyelim; varsayım gereği* $c \neq 0$*'dır.* $x \neq x_0$ *için*

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - c\,(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n}, \qquad \varepsilon(x_0) = 0$$

tanımlarsak $\varepsilon(x) \to 0$ *olur ve*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\, c + \varepsilon(x) \,\right) \qquad (*)$$

yazılır. Bütün ispat, sağ taraftaki iki çarpanın işaretini okumaktan ibarettir.
Adım 2: ikinci çarpanın işareti sabittir. $\varepsilon(x) \to 0$ *olduğundan, limit tanımında* $\dfrac{|\,c\,|}{2} > 0$ *sayısını alarak öyle bir* $\delta > 0$ *buluruz ki* $|\,x - x_0\,| < \delta$ *ve* $x \in I$ *iken* $|\,\varepsilon(x)\,| < \dfrac{|\,c\,|}{2}$ *olur. Bu komşulukta* $c + \varepsilon(x)$*,* c *ile aynı işaretlidir:* $c > 0$ *ise* $c + \varepsilon(x) > \dfrac{c}{2} > 0$*,* $c < 0$ *ise* $c + \varepsilon(x) < \dfrac{c}{2} < 0$*. Yani* $\operatorname{sgn}\left(\, c + \varepsilon(x) \,\right) = \operatorname{sgn}\left(\, f^{(n)}(x_0) \,\right)$*'dır.* $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ *diyelim.*
Adım 3: birinci çarpanın işareti n***'in paritesine bağlıdır.*** $x \in J, x \neq x_0$ *olsun.* n *çiftse* $(x - x_0)^n > 0$*'dır (sıfırdan farklı bir sayının çift kuvveti pozitiftir);* n *tekse* $(x - x_0)^n$*,* $x > x_0$ *için pozitif,* $x < x_0$ *için negatiftir.*
Adım 4: durumların ayrıştırılması.
(1) n *çift ve* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, yani* $c > 0$ *olsun.* J *içindeki her* $x \neq x_0$ *için* $(*)$*'ın sağ tarafı iki pozitif sayının çarpımıdır:*

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(x - x_0)^n}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\, c + \varepsilon(x) \,\right)}_{>0} > 0,$$

yani x_0 kesin yerel minimum noktasıdır (Tanım 7.1).
(2) n çift ve $f^{(n)}(x_0) < 0$ olsun. Bu kez $c < 0$'dır ve aynı çarpım negatif çıkar: $f(x) < f(x_0)$, yani x_0 kesin yerel maksimumdur.
(3) n tek olsun. Genelliği bozmadan $c > 0$ varsayalım ($c < 0$ ise f yerine $-f$ alınır). $x \in J$ ve $x > x_0$ ise $(x - x_0)^n > 0$ olduğundan $(*)$ gereği $f(x) > f(x_0)$'dır; $x < x_0$ ise $(x - x_0)^n < 0$ olduğundan $f(x) < f(x_0)$'dır.
x_0'ın herhangi bir U komşuluğunu alalım: $U \cap J$ de x_0'ın bir komşuluğu olduğundan hem sağında hem solunda ona ait noktalar içerir ve yukarıdaki hesaba göre bu noktaların ilkinde $f > f(x_0)$, ikincisinde $f < f(x_0)$'dır. Öyleyse hiçbir komşulukta $f(x) \le f(x_0)$ ya da $f(x) \ge f(x_0)$ eşitsizliklerinden biri her yerde geçerli olamaz; x_0 yerel ekstremum noktası değildir.
■

İkinci türev testi bu teoremin n = 2 hâlidir

Teoremde $n = 2$ alalım: koşullar $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) \neq 0$'a indirgenir ve 2 çift olduğundan (1)–(2) şıkları, $f''(x_0) > 0$ iken x_0'ın kesin yerel minimum, $f''(x_0) < 0$ iken kesin yerel maksimum olduğunu söyler. Bu, tam olarak **ikinci türev testi**dir; Teorem 13.2 onun doğal genellemesidir. $f''(x_0) = 0$ olduğunda test susmaz, bir üst mertebeye geçer: sıfırdan farklı bir türev bulana kadar mertebeyi artırırız ve bulduğumuz mertebenin **çift mi tek mi** olduğu ile türevin **işareti** her şeyi belirler. Kısacası fonksiyon, x_0 yakınında $c\,(x - x_0)^n$ tek terimlisi gibi davranır.

Test yeter koşuldur, gerek koşul değildir

Teorem, uygun bir n bulunduğunda karar verir. Ama böyle bir n **hiç bulunmayabilir**; o zaman teorem susar ve susması "ekstremum yoktur" anlamına gelmez. Klasik örnek şudur:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Bu fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilirdir ve 0'daki bütün türevleri sıfırdır: tümevarımla $x \neq 0$ için $f^{(k)}(x) = P_k\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ (P_k bir polinom) olduğu gösterilir ve üstel çarpan her polinomu bastırdığından $f^{(k)}(0) = 0$ çıkar. Yani $f^{(n)}(0) \neq 0$ olan **hiçbir** n yoktur; teorem uygulanamaz.
Buna karşılık $x \neq 0$ için $f(x) = e^{-1/x^2} > 0 = f(0)$ olduğundan 0 noktası f'nin kesin mutlak minimum noktasıdır (Tanım 7.2). Teoremin susması bilgi olmaması demektir, olumsuz bir yanıt değil. Böyle durumlarda birinci türevin işaret değişimine bakmak (Sonuç 8.3) hâlâ işe yarar: burada $x < 0$ için $f'(x) < 0$, $x > 0$ için $f'(x) > 0$'dır.

Örnek 13.7 (Yüksek Mertebeden Türev Testinin Kullanımı). Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktalardaki davranışını Teorem 13.2 ile inceleyiniz.

- a) $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$
- b) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$
- c) $f(x) = x^4 - 4x^3$, bütün kritik noktalarında
- d) $f(x) = x - \sin x$, $x_0 = 0$
- e) $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $x_0 = 0$

Çözüm.
a) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$ olduğundan

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 24 \neq 0.$$

Sıfırdan farklı ilk türevin mertebesi $n = 4$ çifttir ve türev pozitiftir; Teorem 13.2 (1) gereği 0 kesin yerel minimumdur. ($x \neq 0$ için $x^4 > 0$ olduğundan aslında kesin mutlak minimumdur.) İkinci türev testinin burada sustuğuna dikkat edelim: $f''(0) = 0$'dır; karar veren dördüncü türevdir.

b) $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$; yani $f'(0) = f''(0) = 0$ ve $f'''(0) = 6 \neq 0$. Mertebe $n = 3$, **tek**tir; Teorem 13.2 (3) gereği 0 ekstremum değildir. Nitekim her $\delta > 0$ için $\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 > 0 > \left(-\frac{\delta}{2}\right)^3$'tür.
c) $f'(x) = 4x^2(x-3)$ olduğundan kritik noktalar $x = 0$ ve $x = 3$'tür; ayrıca $f''(x) = 12x(x-2)$ ve $f'''(x) = 24x - 24$'tür.
$x_0 = 3$: $f''(3) = 36 > 0$'dır. Mertebe $n = 2$ çift ve türev pozitif; 3 kesin yerel minimumdur, $f(3) = 81 - 108 = -27$.
$x_0 = 0$: $f''(0) = 0$ olduğundan ikinci türev testi susar; bir mertebe yükselelim: $f'''(0) = -24 \neq 0$, mertebe $n = 3$ tektir. Teorem 13.2 (3) gereği 0 **ekstremum değildir**. $f'''(0) < 0$ olduğundan ispattaki işaret çözümlemesi $x < 0$ için $f(x) > 0$, $x > 0$ için $f(x) < 0$ olduğunu da söyler; küçük x'ler için $f(x) = x^3(x-4)$ ifadesinden bu doğrudan görülür.
Sonuç: tek yerel ekstremum $x = 3$'teki minimumdur; $x = 0$ yalnızca yatay teğetli bir "duraklama" noktasıdır.
d) $f'(x) = 1 - \cos x$, $f''(x) = \sin x$, $f'''(x) = \cos x$ olduğundan $f'(0) = f''(0) = 0$ ve $f'''(0) = 1 \neq 0$'dır. Mertebe $n = 3$ tek; 0 ekstremum değildir. Bunu doğrudan da görebiliriz: $0 < |\,x\,| < \pi$ iken $\cos x < 1$, yani $f'(x) > 0$'dır; Sonuç 8.3 (1) gereği f hem $[-\pi, 0]$ hem $[0, \pi]$ üzerinde kesin artandır, dolayısıyla $[-\pi, \pi]$ üzerinde kesin artandır. Öyleyse $-\pi \le x < 0$ için $f(x) < f(0)$, $0 < x \le \pi$ için $f(x) > f(0)$ olur: 0 noktası ne yerel maksimum ne yerel minimumdur.
e) $f'(x) = x - \sin x$, $f''(x) = 1 - \cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ olduğundan

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 1 \neq 0.$$

Mertebe $n = 4$ çift ve türev pozitif; 0 kesin yerel minimumdur. Bu, Örnek 13.5 (c) ile birebir örtüşür: orada $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^4} = \dfrac{1}{24} > 0$ bulmuştuk, yani 0 yakınında $f(x) \approx \dfrac{x^4}{24} > 0 = f(0)$'dır. İki hesap aynı açılımın iki okunuşudur.
■

13.4 Dönüm Noktası için Yeter Koşul

Yüksek mertebeden türev testinin doğal bir eşlikçisi vardır. Ekstremum testinde f ile **sabit** $f(x_0)$ arasındaki farkın işaretine bakmıştık; şimdi f ile x_0 noktasındaki **teğet doğrusu** arasındaki farkın işaretine bakacağız. Aynı teorem, hiç değiştirilmeden, bu soruya da yanıt verir.

> **i** Dönüm noktası nedir?
>
> f, x_0'da türevlenebilir olsun ve $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ o noktadaki teğet doğrusunu göstersin (Tanım 2.4). x_0 noktasına f'nin bir **dönüm noktası** (inflection point) denir, eğer $\varphi(x) = f(x) - T(x)$ farkı x_0'da işaret değiştiriyorsa; yani öyle bir $\delta > 0$ varsa ki φ, $(x_0 - \delta, x_0)$ üzerinde bir işarete, $(x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde ters işarete sahip olsun.
> Geometrik anlamı: eğri, x_0'da teğetini **keser**; bir yanda üstünde, öteki yanda altındadır. Konvekslik diliyle eğri burada konvekslikten konkavlığa (ya da tersine) geçer. Ayrıntılı inceleme Konveks ve Konkav Fonksiyonlar ile Dönüm Noktaları bölümlerinde; burada yalnızca bu işaret değişimi tanımını kullanacağız.

Sonuç 13.1 (Dönüm Noktası için Yeter Koşul). *I açık aralık, $x_0 \in I$ ve $n \ge 3$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(n-1)$'inci türevi x_0'ın bir komşuluğunda, $f^{(n)}(x_0)$ ise x_0'da var olsun ve*

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

sağlansın. O hâlde:

1. *n **tek** ise x_0 noktası f'nin bir dönüm noktasıdır.*
2. *n **çift** ise x_0 noktası dönüm noktası değildir; eğri, x_0'ın bir komşuluğunda teğetinin tamamen bir yanında kalır ($f^{(n)}(x_0) > 0$ ise üstünde, < 0 ise altında).*

Özel olarak, $n = 3$ hâlini yazarsak: $f''(x_0) = 0$ ve $f'''(x_0) \neq 0$ ise x_0 bir dönüm noktasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ teğet doğrusu ve

$$\varphi(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

olsun. T birinci dereceden bir polinom olduğundan ikinci ve daha yüksek türevleri sıfırdır; dolayısıyla φ, f ile aynı türevlenebilirlik varsayımlarını sağlar, $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ ve $k \geq 2$ için $\varphi^{(k)} = f^{(k)}$'dir. Bunları x_0'da değerlendirirsek

$$\varphi(x_0) = 0, \qquad \varphi'(x_0) = 0, \qquad \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad \varphi^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Böylece φ, x_0 noktasında Teorem 13.2'un bütün varsayımlarını sağlar ve sıfırdan farklı ilk türevinin mertebesi n'dir.
(1) n tek olsun. Teorem 13.2 (3) ve onun ispatındaki işaret çözümlemesi gereği, x_0'ın bir J komşuluğunda

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x) = (x - x_0)^n \left(c + \varepsilon(x) \right), \qquad c = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0$$

yazılır ve $c + \varepsilon(x)$, J üzerinde sabit işaretlidir. n tek olduğundan $(x - x_0)^n$ çarpanı x_0'ın solunda negatif, sağında pozitiftir; öyleyse φ tam olarak x_0'da işaret değiştirir ve tanım gereği x_0 bir dönüm noktasıdır. Ayrıca $f^{(n)}(x_0) > 0$ ise $x < x_0$ için $\varphi(x) < 0$ (eğri teğetin altında), $x > x_0$ için $\varphi(x) > 0$ (üstünde) olur; $f^{(n)}(x_0) < 0$ ise durum tersine döner.
(2) n çift olsun. Bu kez $(x - x_0)^n > 0$ olduğundan φ, $J \setminus \{x_0\}$ üzerinde c ile aynı işaretlidir ve hiç değişmez: $c > 0$ ise eğri teğetin üstünde, $c < 0$ ise altında kalır. İşaret değişimi olmadığından x_0 dönüm noktası değildir.
■

Örnek 13.8 (Dönüm Noktalarının Belirlenmesi). Aşağıdaki fonksiyonların dönüm noktalarını belirleyiniz.

- a) $f(x) = x^3$
- b) $f(x) = \sin x$
- c) $f(x) = x^4$
- d) $f(x) = x^4 - 4x^3$
- e) $f(x) = x^5$

Çözüm.
a) $f''(x) = 6x$ olduğundan tek aday $x_0 = 0$'dır ve $f'''(0) = 6 \neq 0$'dır. Sonuç 13.1 ($n = 3$) gereği 0 bir dönüm noktasıdır: teğet $T(x) = 0$, $\varphi(x) = x^3$ ve bu gerçekten işaret değiştirir.
b) $f''(x) = -\sin x$ olduğundan adaylar $x_0 = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) noktalarıdır. $f'''(x) = -\cos x$ ve $f'''(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ olduğundan Sonuç 13.1 gereği **her** $k\pi$ bir dönüm noktasıdır. k çiftse $f'''(k\pi) = -1 < 0$'dır: eğri teğetin solunda üstünde, sağında altında kalır; k tekse tersi olur.
c) $f''(x) = 12x^2$ olduğundan aday yine $x_0 = 0$'dır; ama $f'''(0) = 0$ olduğundan $n = 3$ hâli uygulanamaz. Bir mertebe yükselelim: $f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$ ve $n = 4$ **çift**tir; Sonuç 13.1 (2) gereği 0 dönüm noktası **değildir**, eğri teğetinin tamamen üstünde kalır. Bu şık, "$f''(x_0) = 0$ ise orada dönüm noktası vardır" yanılgısının karşı örneğidir: f'''nün sıfırlanması yalnızca bir **aday** üretir.
d) $f''(x) = 12x(x - 2)$ olduğundan adaylar $x_0 = 0$ ve $x_0 = 2$'dir; $f'''(0) = -24 \neq 0$ ve $f'''(2) = 24 \neq 0$ olduğundan Sonuç 13.1 gereği her ikisi de dönüm noktasıdır ($f(0) = 0$, $f(2) = -16$). Örnek 13.7 (c) ile birleştirirsek tam resim çıkar: tek yerel ekstremum $x = 3$'teki minimumdur, $x = 0$ ve $x = 2$ dönüm noktalarıdır ve $x = 0$'da teğet yataydır.
e) $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$, $f^{(5)}(x) = 120$ olduğundan

$$f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 120 \neq 0.$$

Mertebe $n = 5$, **tek**tir; Sonuç 13.1 (1) gereği 0 bir dönüm noktasıdır ($\varphi(x) = x^5$ işaret değiştirir). Bu şık, belirleyici olanın $n = 3$ değil, mertebenin tekliği olduğunu gösterir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

13.5 Taylor Formülüyle Eşitsizlik İspatı

Lagrange kalanının en zarif kullanımı budur: bir eşitsizliği ispatlamak için fonksiyonu uygun mertebeden Taylor polinomuna açar ve **kalan teriminin işaretini** okuruz; kalan pozitifse fonksiyon polinomdan büyük, negatifse küçüktür.

Kalan terimi $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$ iki çarpandan oluşur. x^{n+1} çarpanının işaretini ($n+1$'in paritesinden ve x'in işaretinden) tam olarak biliriz; $f^{(n+1)}(\theta)$ çarpanının işaretini ise, θ'nın yerini bilmesek bile, $|\sin| \le 1$, $\cos \le 1$, $e^t > 0$ gibi evrensel sınırlar sayesinde çoğu zaman kestirebiliriz. Yöntemin bütün ustalığı **mertebeyi işaretin belirlenebileceği biçimde seçmekte**dir.

Örnek 13.9 (Taylor ile Klasik Eşitsizlikler). Aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayınız.

- a) Her $x \ge 0$ için $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x$; eşitlik yalnızca $x = 0$'da geçerlidir.
- b) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$; eşitlik yalnızca $x = 0$'da geçerlidir.
- c) Her $x \ge 0$ için $e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
- d) Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \ge 0$ için $e^x \ge \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Çözüm.
a) İki eşitsizliği ayrı mertebelerden ispatlayacağız. $f(x) = \sin x$ için $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(t) = -\sin t$, $f'''(t) = -\cos t$'dir.

Alt sınır: $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{6}$. $n = 2$ mertebesinden yazalım; $P_2(x) = x$ olduğundan bir $\theta \in (0, x)$ için $\sin x = x - \dfrac{\cos\theta}{6}\,x^3$'tür. $x \ge 0$ olduğundan $x^3 \ge 0$'dır ve $\cos\theta \le 1$ olduğundan $-\dfrac{\cos\theta}{6}x^3 \ge -\dfrac{x^3}{6}$'dır; bu da istenen eşitsizliktir.

Kesinlik. $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ için $g(0) = 0$ ve $x \neq 0$ iken $g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$'dır (bu tam olarak (b)'nin kesin biçimidir). Sonuç 8.3 gereği g, $[0, \infty)$ üzerinde kesin artandır, yani $x > 0$ için $g(x) > 0$'dır. (Kısır döngü yoktur: (b)'nin kesinliği yalnızca aşağıdaki *üst sınıra* dayanır.)

Üst sınır: $\sin x \le x$. Bu kez $n = 1$ mertebesinden; bir $\theta \in (0, x)$ için $\sin x = x - \dfrac{\sin\theta}{2}\,x^2$'dir. $0 < x \le \pi$ ise $\theta \in (0, \pi)$'dir ve orada $\sin\theta > 0$'dır; $x^2 > 0$ olduğundan çıkarılan terim pozitiftir ve $\sin x < x$ olur. $x > \pi$ ise ayrıca bir şey ispatlamaya gerek yoktur: $\sin x \le 1 < \pi < x$. $x = 0$'da iki taraf da sıfırdır. Böylece eşitlik yalnızca $x = 0$'da geçerlidir.

b) $f(x) = \cos x$ için $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(t) = -\cos t$'dir. $n = 1$ mertebesinden Taylor formülü, 0 ile x arasında bir θ için $\cos x = 1 - \dfrac{\cos\theta}{2}\,x^2$ verir. $\cos\theta \le 1$ ve $x^2 \ge 0$ olduğundan $-\dfrac{\cos\theta}{2}x^2 \ge -\dfrac{x^2}{2}$, yani $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$'dir. x^2 değeri x'in işaretine bağlı olmadığından bu akıl yürütme $x < 0$ hâlinde de aynen işler; eşitsizlik bütün $\mathbb{R}$'de geçerlidir.

Kesinlik. $h(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ için $h(0) = 0$ ve (a)'nın üst sınırı gereği $x > 0$ iken $h'(x) = x - \sin x > 0$'dır; Sonuç 8.3 ile h, $[0, \infty)$ üzerinde kesin artandır. h çift olduğundan $x < 0$ için de $h(x) = h(-x) > 0$'dır.

c) $f(x) = e^x$ için $n = 2$ mertebesinden, bir $\theta \in (0, x)$ ile $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{e^\theta}{6}\,x^3$'tür. $x \ge 0$ olduğundan $x^3 \ge 0$ ve $e^\theta > 0$'dır; kalan negatif olamaz, yani $e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ ve $x > 0$ için eşitsizlik kesindir. Mantığın $x < 0$ için **tersine döndüğüne** dikkat: o zaman $x^3 < 0$ ve $e^x < 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ olur. Yönü belirleyen, x^{n+1} çarpanının işaretidir.

d) Aynı fikir mertebe n alınarak genelleşir. Bir $\theta \in (0, x)$ için

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

$x \ge 0$ ise $x^{n+1} \ge 0$ ve $e^\theta > 0$ olduğundan kalan negatif olamaz; dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \geq 0.$$

Bu tek eşitsizlik, üstel fonksiyonun her polinomdan hızlı büyüdüğünü de verir: $x > 0$ için $e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ yazıp x^n'e bölersek $\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!} \to +\infty$ olur, yani her n için $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$'dur. ■

Mertebeyi nasıl seçmeli?

Mertebeler rastgele seçilmedi; kural şudur: **kalandaki türevin işaretini belirleyebileceğimiz** mertebeyi alırız. $\sin x \leq x$ için $n = 1$ seçtik ve kalanda beliren $-\sin\theta$'nın işareti $\theta \in (0,\pi)$ iken bellidir. $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ için $n = 2$ seçtik; kalandaki $-\cos\theta$ için $\cos\theta \leq 1$ evrensel sınırı yetti. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ için $n = 1$ seçtik; $n = 3$ seçseydik eşitsizlik ters yöne, $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$'e dönerdi (Alıştırma 13.1 (e)). Üstel fonksiyonda ise $e^\theta > 0$ olduğundan her mertebe işe yarar.
Kalanın işareti belirlenemiyorsa yöntem başarısız olur; o zaman monotonluk (Sonuç 8.3) ya da Teorem 8.2 devreye girer. Nitekim (a) ve (b)'deki *kesinlik* iddialarını monotonlukla tamamladık.

13.6 Alıştırmalar

Alıştırma 13.1 (Taylor Formülünün Uygulamaları Üzerine).

a) $\cos 0{,}2$ değerini, hatası 10^{-6}'dan küçük olacak biçimde hesaplayınız ve kaç ondalık basamağın kesin olduğunu belirtiniz. Ayrıca $\sqrt{1{,}1}$ sayısını üçüncü mertebeden Taylor polinomuyla hesaplayıp hata sınırını veriniz.

b) Aşağıdaki limitleri Taylor açılımlarıyla hesaplayınız:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}.$$

c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ fonksiyonunun bütün kritik noktalarını bulunuz ve her birini Teorem 13.2 ile sınıflandırınız.

d) $f(x) = x^4 - 6x^2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve dönüm noktalarını belirleyiniz.

e) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ ve $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ olduğunu; her $x > -1$ için $\ln(1+x) \leq x$ olduğunu gösteriniz.

f) $n \geq 2$ olmak üzere $f(x) = x^n$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ noktasının ne olduğunu (yerel ekstremum mu, dönüm noktası mı) n'in bütün değerleri için belirleyiniz.

Çözüm.
a) *Kosinüs.* $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $x = 0{,}2$. Bütün türevlerin mutlak değeri 1'i aşmadığından $|\,R_n(x)\,| \leq \frac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!}$'dir:

$$n = 3 : \approx 6{,}67 \cdot 10^{-5}, \qquad n = 4 : \approx 2{,}67 \cdot 10^{-6}, \qquad n = 5 : \frac{(0{,}2)^6}{720} \approx 8{,}9 \cdot 10^{-8}.$$

$n = 5$ yeterlidir. Tek dereceli katsayılar sıfır olduğundan $P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$'tür ve

$$P_5(0{,}2) = 1 - 0{,}02 + 0{,}000\,066\,67 = 0{,}980\,066\,67.$$

Hata $8{,}9 \cdot 10^{-8}$'den küçük olduğundan $0{,}980\,066\,58 < \cos 0{,}2 < 0{,}980\,066\,76$ ve bu aralıktaki her sayı $0{,}980\,067$'ye yuvarlanır: **altı ondalık basamak kesindir**. (Gerçek değer $0{,}980\,066\,577\,8\ldots$)

 CC BY-NC-SA 4.0

Karekök. $f(x)=(1+x)^{1/2}$ ve $x=0{,}1$ alalım. Türevler

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},\quad f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},\quad f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2},\quad f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}$$

olduğundan $P_3(x)=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}$ ve

$$P_3(0{,}1)=1+0{,}05-0{,}001\,25+0{,}000\,062\,5=1{,}048\,812\,5.$$

$\theta\in(0;0{,}1)$ için $(1+\theta)^{-7/2}<1$ olduğundan

$$|\,R_3(0{,}1)\,|=\frac{15}{16}\,(1+\theta)^{-7/2}\cdot\frac{(0{,}1)^4}{24}<\frac{15}{16\cdot 24}\cdot 10^{-4}\approx 3{,}91\cdot 10^{-6},$$

yani $1{,}048\,808\,6<\sqrt{1{,}1}<1{,}048\,816\,4$: **ilk dört ondalık basamak kesindir**, $\sqrt{1{,}1}\approx 1{,}0488$. (Gerçek değer $1{,}048\,808\,848\ldots$)

b) *Birinci limit.* Pay ve paydayı üçüncü mertebeye kadar açalım:

$$x-\sin x=\frac{x^3}{6}+o(x^4),\qquad x-\tan x=-\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Her ikisi de $p=q=3$ mertebesindendir; Teorem 13.1 (1) gereği limit $\dfrac{1/6}{-1/3}=-\dfrac{1}{2}$'dir.

İkinci limit. $e^u=1+u+o(u)$ açılımında $u=x^2$ koyarsak $e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$ olur; $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ ile birlikte

$$e^{x^2}-\cos x=x^2+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=\frac{3x^2}{2}+o(x^2),$$

dolayısıyla limit $\dfrac{3}{2}$'dir.

Üçüncü limit. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$ ve $x\cos x=x-\dfrac{x^3}{2}+o(x^4)$ olduğundan

$$\sin x-x\cos x=\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+o(x^4)=\frac{x^3}{3}+o(x^4);$$

limit $\dfrac{1}{3}$'tür.

c) $f'(x)=15x^2(x-1)(x+1)$ olduğundan kritik noktalar $x=-1$, $x=0$, $x=1$'dir; ayrıca $f''(x)=30x(2x^2-1)$ ve $f'''(x)=180x^2-30$'dur.

$x_0=1$: $f''(1)=30>0$; mertebe $n=2$ çift, türev pozitif: kesin yerel minimum, $f(1)=-2$.

$x_0=-1$: $f''(-1)=-30<0$; kesin yerel maksimum, $f(-1)=2$.

$x_0=0$: $f''(0)=0$ olduğundan ikinci türev testi susar; $f'''(0)=-30\neq 0$ ve mertebe $n=3$ **tek**tir. Teorem 13.2 (3) gereği 0 ekstremum değildir; üstelik Sonuç 13.1 gereği bir **dönüm noktası**dır. (f'''nün öteki sıfırları $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$'dir ve $f'''\!\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=60\neq 0$ olduğundan bunlar da dönüm noktasıdır.)

d) $f'(x)=4x(x^2-3)$, $f''(x)=12(x-1)(x+1)$, $f'''(x)=24x$'tir.

Ekstremumlar. Kritik noktalar $x=0$ ve $x=\pm\sqrt{3}$'tür. $f''(0)=-12<0$ olduğundan 0 kesin yerel maksimumdur ($f(0)=0$); $f''(\pm\sqrt{3})=24>0$ olduğundan $\pm\sqrt{3}$ kesin yerel minimumdur ($f(\pm\sqrt{3})=-9$).

Dönüm noktaları. $f''(x)=0$ denklemi $x=\pm 1$ verir; $f'''(1)=24\neq 0$ ve $f'''(-1)=-24\neq 0$ olduğundan Sonuç 13.1 gereği her ikisi de dönüm noktasıdır, $f(\pm 1)=-5$. Fonksiyon $(-\infty,-1)$ ve $(1,\infty)$ üzerinde konveks, $(-1,1)$ üzerinde konkavdır.

e) *Birinci eşitsizlik.* $f(x)=\cos x$ için $n=3$ mertebesinden yazalım; üçüncü dereceli terimin katsayısı sıfır olduğundan $P_3(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$'dir ve $f^{(4)}(t)=\cos t$ olduğundan bir θ için

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos\theta}{24}\,x^4.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$\cos\theta \le 1$ ve $x^4 \ge 0$ olduğundan kalan $\dfrac{x^4}{24}$'ü aşamaz; istenen eşitsizlik çıkar. Bu ve Örnek 13.9 (b) birlikte her x için $1 - \dfrac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ kıskacını verir.
İkinci eşitsizlik. $f(x) = e^x$ için $n = 3$ mertebesinden, bir θ için

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\theta}{24}\,x^4.$$

$x^4 \ge 0$ ve $e^\theta > 0$ olduğundan kalan negatif olamaz. x^4 çift kuvvet olduğundan eşitsizlik yalnızca $x \ge 0$ için değil **bütün** $x \in \mathbb{R}$ için geçerlidir ve $x \neq 0$ ise kesindir.
Üçüncü eşitsizlik. $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$ olsun. $n = 1$ mertebesinden, 0 ile x arasında bir θ için

$$\ln(1+x) = x + \frac{f''(\theta)}{2}x^2 = x - \frac{x^2}{2(1+\theta)^2}.$$

θ, 0 ile x arasında olduğundan $1+\theta > 0$'dır; $x^2 \ge 0$ ile birlikte çıkarılan terim negatif olamaz ve $\ln(1+x) \le x$ olur ($x \neq 0$ için kesin).
f) $f(x) = x^n$ için $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\,x^{\,n-k}$'dir; $k < n$ iken $x^{\,n-k}$ çarpanı 0'da sıfırlanır, $k = n$ iken $f^{(n)} = n!$ sabittir. Demek ki

$$f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0, \qquad f^{(n)}(0) = n! > 0,$$

yani sıfırdan farklı ilk türevin mertebesi tam olarak n'dir ve pozitiftir.

- n **çift** ise Teorem 13.2 (1) gereği 0 kesin yerel minimumdur; $x \neq 0$ için $x^n > 0$ olduğundan aslında kesin mutlak minimumdur. $n \ge 4$ için $f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ ve n çift olduğundan Sonuç 13.1 (2) gereği 0 dönüm noktası **değildir** ($n = 2$ hâlinde zaten $f''(0) = 2 \neq 0$'dır).
- n **tek** ise Teorem 13.2 (3) gereği 0 ekstremum değildir; $n \ge 3$ olduğundan Sonuç 13.1 (1) gereği bir **dönüm noktası**dır.

Özetle x^n için 0 noktası, n çift ise mutlak minimum, $n \ge 3$ tek ise dönüm noktasıdır. Teorem 13.2'un söylediği tam olarak şudur: türevlenebilir her fonksiyon, bir kritik nokta yakınında bu tek terimlilerden biri gibi davranır.
■

Bu bölümde Taylor formülünü dört ayrı işte çalıştırdık: garantili hata kestirimiyle sayısal yaklaşım, belirsiz limitlerin hızlı hesabı, kritik noktaların yüksek mertebeden türevle sınıflandırılması ve eşitsizlik ispatı. Üçüncüsü güçlü ama noktasal bir alettir: $f^{(n)}(x_0)$'ın **tek bir noktadaki** değerine bakarak karar veririz. Bir sonraki bölümde tamamlayıcı bakış açısına geçiyor, türevin bir **aralık boyunca** işaretini izleyerek monotonluğu ve ekstremumları belirliyoruz: Monotonluk ve Ekstremum Testleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Monotonluk ve Ekstremum Testleri

Taylor Formülünün Uygulamaları bölümünde bir fonksiyonu bir nokta çevresinde polinomlarla ne kadar iyi taklit edebileceğimizi gördük. Şimdi bakışımızı yerelden bütüne çeviriyoruz: bir fonksiyonun **nerede arttığını, nerede azaldığını** ve **hangi noktalarda tepe ya da çukur yaptığını** türevine bakarak eksiksiz biçimde belirlemek istiyoruz.

Bu sorunun temel aracını aslında çoktan kurduk. Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri bölümünde ispatladığımız monotonluk testi (Sonuç 8.3), türevin işaretinden fonksiyonun artıp azaldığını okumamızı sağlıyordu. Ama orada elde ettiğimiz şey tek yönlüydü: "türev pozitifse fonksiyon artar." Bu bölümde önce bu ilişkinin **tam** biçimini kuracağız — hangi yönler çift taraflı, hangileri değil — sonra da bunu ekstremum noktalarını tanımaya yarayan iki pratik ölçüte dönüştüreceğiz.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: türevlenebilir bir fonksiyonun bir aralıkta azalmayan olmasının türevinin negatif olmamasına **denk** olduğunu; kesin monotonluk için türevin sıfır kümesinin hangi koşulu sağlaması gerektiğini; kritik noktaları kullanarak bir işaret tablosunun nasıl kurulduğunu ve bunun neden meşru olduğunu; **birinci türev testi** ile **ikinci türev testini**, ispatlarıyla ve sınırlarıyla birlikte; kapalı bir aralıkta mutlak ekstremumların nasıl bulunduğunu; ve monotonluğun eşitsizlik ispatlamakta nasıl kullanıldığını.

Bölümün ruhu tek bir cümlede toplanır: **türevin işareti değişim yönünü, işaretinin değişmesi ise yön değiştirmeyi — yani ekstremumu — haber verir.**

14.1 Türevin İşareti ile Monotonluk Arasındaki Tam İlişki

Sonuç 8.3 bize dört yeter koşul vermişti. Şimdi bu koşullardan hangilerinin aynı zamanda **gerek** olduğunu soruyoruz. Yanıt keskindir: gevşek eşitsizlikler ($f' \geq 0$, $f' \leq 0$, $f' \equiv 0$) çift yönlüdür, kesin eşitsizlik ($f' > 0$) değildir. Bu ayrımı iyi anlamak, ilerideki bütün ölçütlerin doğru kullanılmasının anahtarıdır.

Önce dil üzerinde anlaşalım: I'daki her $x_1 < x_2$ çifti için $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa f **azalmayandır** (nondecreasing); Monoton Fonksiyon bu fonksiyonlara kısaca *artan* der. $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa f **artmayandır** (nonincreasing), yani aynı sözlükte *azalandır*. Eşitsizlikler kesin olduğunda **kesin artan** (strictly increasing) ve **kesin azalan** (strictly decreasing) terimlerini kullanıyoruz (Tanım 1.1).

Teorem 14.1 (Monotonluk için Tam Ölçüt). *$I \subseteq \mathbb{R}$ en az iki noktalı bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I'nın her noktasında türevlenebilir olsun (uç noktalarda tek yönlü türev anlamında, Tanım 2.6). O hâlde:*

1. *f azalmayandır $\Leftrightarrow$ her $x \in I$ için $f'(x) \geq 0$.*
2. *f artmayandır $\Leftrightarrow$ her $x \in I$ için $f'(x) \leq 0$.*
3. *f sabittir $\Leftrightarrow$ her $x \in I$ için $f'(x) = 0$.*

> ***İspat.***
> ***(1) Yeterlilik ($\Leftarrow$).*** *Her $x \in I$ için $f'(x) \geq 0$ olduğunu varsayalım ve $x_1 < x_2$ olan $x_1, x_2 \in I$ alalım. I bir aralık olduğundan $[x_1, x_2] \subseteq I$'dır; f bu aralıkta türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir (Teorem 3.1). Lagrange ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) gereği öyle bir $c \in (x_1, x_2)$ vardır ki*
>
> $$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1).$$
>
> *Burada $f'(c) \geq 0$ ve $x_2 - x_1 > 0$ olduğundan sağ taraf negatif değildir; demek ki $f(x_1) \leq f(x_2)$. $x_1 < x_2$ olan her çift için bu geçerli olduğundan f azalmayandır.*
> ***(1) Gereklilik ($\Rightarrow$).*** *Şimdi f'nin azalmayan olduğunu varsayalım ve bir $x \in I$ noktası sabitleyelim. $x + h \in I$ olacak biçimde $h \neq 0$ alalım ve fark oranını (Tanım 2.1) inceleyelim:*
>
> $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
>
> *İki durum vardır. $h > 0$ ise $f(x) \leq f(x+h)$ olduğundan pay negatif değildir, payda pozitiftir; oran ≥ 0'dır. $h < 0$ ise $f(x+h) \leq f(x)$ olduğundan pay pozitif değildir, payda negatiftir; oran yine ≥ 0'dır. Yani oran, tanımlı olduğu her yerde negatif değildir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

f, x noktasında türevlenebilir olduğundan bu oranın $h \to 0$ iken limiti vardır ve $f'(x)$'e eşittir (Tanım 2.2). Limit sıralamayı korur (bkz. Analiz 1 (1); sabit 0 fonksiyonuyla karşılaştırma): oran ≥ 0 olduğundan limiti de ≥ 0'dır, yani $f'(x) \geq 0$. (x bir uç nokta ise oran yalnızca tek yönlü tanımlıdır ve aynı akıl yürütme tek yönlü limit için işler.)
***(2)** Bu kez $g = -f$ fonksiyonuna bakalım. g türevlenebilirdir ve $g' = -f'$'dür (Teorem 3.2). Ayrıca f artmayandır $\Leftrightarrow$ g azalmayandır: gerçekten $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \geq f(x_2)$ olması $-f(x_1) \leq -f(x_2)$ olmasına denktir. Şimdi (1)'i g'ye uygulayalım:*

$$f \text{ artmayan} \Leftrightarrow g \text{ azalmayan} \Leftrightarrow g' \geq 0 \Leftrightarrow -f' \geq 0 \Leftrightarrow f' \leq 0.$$

***(3)** f sabit ise fark oranı özdeş olarak 0'dır, dolayısıyla $f' \equiv 0$'dır. Tersine $f' \equiv 0$ olsun. O zaman hem $f' \geq 0$ hem $f' \leq 0$ olduğundan (1) ve (2) gereği f hem azalmayan hem artmayandır. $x_1 < x_2$ alırsak $f(x_1) \leq f(x_2)$ ve $f(x_1) \geq f(x_2)$ birlikte $f(x_1) = f(x_2)$ verir; yani f sabittir. (Bu, Sonuç 8.1'in yeniden elde edilmesidir.)*
■

Teoremin üç maddesi de bir **denklik** ifade ediyor; bu, göründüğünden güçlü bir bilgidir. Bir yerde $f'(x_0) < 0$ olduğunu gördüğümüz anda f'nin bütün aralıkta azalmayan **olamayacağını** biliriz.

⚠ Tanım kümesinin aralık olması şarttır

Teoremin her üç maddesinin "$\Leftarrow$" yönü de I'nın bir **aralık** olmasına dayanır; ispatta ortalama değer teoremini $[x_1, x_2] \subseteq I$ olduğu için uygulayabildik. Tanım kümesi kopuk parçalardan oluşuyorsa sonuç yanlıştır: $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ üzerinde $x < 0$ için -1, $x > 0$ için 1 değerini alan fonksiyonun türevi A'nın her noktasında sıfırdır, ama fonksiyon sabit değildir. Benzer biçimde $g(x) = \dfrac{1}{x}$ için $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$'dır; buna karşılık $-1 < 1$ olmasına karşın $g(-1) = -1 < 1 = g(1)$'dir, yani g tanım kümesinin tamamında azalan değildir. g yalnızca $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ aralıklarının **her birinde ayrı ayrı** kesin azalandır.
Kural şudur: monotonluk sonuçları her zaman tek bir aralık üzerinde ifade edilir; birden çok aralıkta ayrı ayrı geçerli olan monotonluk, birleşime taşınmaz.

14.1.1 Kesin monotonluk

Sonuç 8.3, $f' > 0$ olduğunda f'nin kesin arttığını söylüyordu. Ama bunun tersi doğru değildir: $f(x) = x^3$ kesin artandır, buna karşın $f'(0) = 0$'dır. Öyleyse "kesin artan" olmanın türev diliyle tam karşılığı nedir? Yanıt, türevin sıfır olduğu noktaların **ne kadar çok** olduğuyla ilgilidir: bu noktalar tek tek dağınık durabilirler, ama bir aralığı baştan sona dolduramazlar.

Sonuç 14.1 (Kesin Monotonluk Ölçütü). *I en az iki noktalı bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. f'nin türevinin sıfır kümesini*

$$Z = \{x \in I : f'(x) = 0\}$$

ile gösterelim. O hâlde:

1. *Her $x \in I$ için $f'(x) > 0$ ise f kesin artandır. Benzer biçimde her $x \in I$ için $f'(x) < 0$ ise f kesin azalandır.*
2. ***Tam ölçüt:** f kesin artandır $\Leftrightarrow$ her $x \in I$ için $f'(x) \geq 0$ **ve** Z kümesi, I'nın tek noktadan ibaret olmayan — yani **dejenere olmayan** (nondegenerate) — hiçbir alt aralığını içermez.*
3. *Benzer biçimde f kesin azalandır $\Leftrightarrow$ $f' \leq 0$ ve Z hiçbir dejenere olmayan alt aralık içermez.*

İspat.
***(2) Yeterlilik ($\Leftarrow$).** $f' \geq 0$ olsun; Teorem 14.1 (1) gereği f azalmayandır. f'nin kesin artan **olmadığını** varsayıp çelişki arayalım. O zaman öyle $x_1 < x_2$ noktaları vardır ki $f(x_1) \geq f(x_2)$ olur. Ama f azalmayan olduğundan $f(x_1) \leq f(x_2)$'dir; ikisi birlikte*

$$f(x_1) = f(x_2)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

verir. Şimdi $x \in [x_1, x_2]$ herhangi bir nokta olsun. Azalmayanlık $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = f(x_1)$ verir, yani $f(x) = f(x_1)$. Demek ki f, $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde sabittir. Sabit fonksiyonun türevi sıfır olduğundan her $x \in (x_1, x_2)$ için $f'(x) = 0$, yani $(x_1, x_2) \subseteq Z$'dir. Ama (x_1, x_2), I'nın tek noktadan ibaret olmayan bir alt aralığıdır; bu, varsayımımızla çelişir. Öyleyse f kesin artandır.
(2) Gereklilik ($\Rightarrow$). *f kesin artan olsun. Kesin artan her fonksiyon azalmayandır, dolayısıyla Teorem 14.1 (1) gereği $f' \ge 0$'dır. Z'nin dejenere olmayan bir $J \subseteq I$ alt aralığını içerdiğini varsayalım. J üzerinde $f' \equiv 0$ olduğundan Teorem 14.1 (3) gereği f, J üzerinde sabittir. J en az iki nokta içerdiğinden $x_1 < x_2$ olan $x_1, x_2 \in J$ vardır ve $f(x_1) = f(x_2)$ olur; bu, f'nin kesin artan olmasıyla çelişir. Demek ki Z böyle bir alt aralık içeremez.*
(1) *$f' > 0$ ise $Z = \varnothing$'dir ve boş küme hiçbir dejenere olmayan aralığı içermez; (2) doğrudan sonucu verir. Kesin azalan durumu için $-f$'ye geçilir.*
(3) *f kesin azalandır $\Leftrightarrow$ $-f$ kesin artandır. $(-f)' = -f'$ ve $\{x : (-f)'(x) = 0\} = Z$ olduğundan (2), tam olarak (3)'ün ifadesine dönüşür.*
■

İkinci madde, uygulamada çok işe yarayan bir esneklik sağlar: **türevin tek tek noktalarda sıfırlanması kesin monotonluğu bozmaz.** Örneğin $f(x) = x^3$ için $Z = \{0\}$'dır; tek noktalı bir küme hiçbir aralık içeremeyeceğinden f kesin artandır. Aynı biçimde $f(x) = x - \sin x$ için $f'(x) = 1 - \cos x \ge 0$ ve $Z = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$'dir; bu küme ayrık noktalardan oluştuğundan hiçbir aralığı içermez, dolayısıyla f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır.

⚠ Karşıtı doğru değildir

"f kesin artan $\Longrightarrow$ $f' > 0$" önermesi **yanlıştır**; doğru olan yalnızca $f' \ge 0$'dır. Karşı örnek $f(x) = x^3$'tür: kesin artandır ama $f'(0) = 0$'dır. Türevle monotonluk arasındaki oklar şöyledir:

$$f' > 0 \Longrightarrow f \ \text{ kesin artan} \Longrightarrow f' \ge 0,$$

ve **hiçbir ok geri çevrilemez**: soldakini x^3, sağdakini sabit fonksiyon çürütür. Geri çevrilebilen tek bağıntı Teorem 14.1'teki gevşek eşitsizliklerdir. Bu yüzden bir fonksiyonun kesin arttığını göstermek istediğinizde $f' > 0$ bulamıyorsanız hemen pes etmeyin: $f' \ge 0$ ve türevin sıfırlarının ayrık olması yeter (Sonuç 14.1 (2)).

14.2 İşaret Tablosu: Kritik Noktalar Aralığı Nasıl Böler

Pratikte yaptığımız şey şudur: f''yü hesaplar, sıfır yerlerini buluruz, sonra bu noktaların ayırdığı her aralıkta f''nün işaretini **tek bir deneme noktasında** hesaplayıp bütün aralığa yayarız. Son adım masum görünür ama bir gerekçe ister: f' sürekli olmak zorunda değildir, öyleyse bir noktadaki işaretini bütün aralığa taşımaya ne hakkımız var? Gerekçe, türevlerin süreksiz olsalar bile ara değer özelliğini taşımalarıdır — Darboux teoremi (Teorem 10.1).

Önerme 14.1 (İşaret Tablosunun Dayanağı). *I bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $J \subseteq I$ dejenere olmayan bir açık alt aralık olsun ve f, J'nin her noktasında türevlenebilir olup hiçbir noktasında f' sıfırlanmasın. O hâlde:*

1. *f', J üzerinde işaretini değiştirmez: ya her $x \in J$ için $f'(x) > 0$'dır, ya da her $x \in J$ için $f'(x) < 0$'dır.*
2. *Buna bağlı olarak f, J üzerinde kesin monotondur.*
3. *Dahası, J'nin uç noktalarından I'da bulunanlar da eklenerek elde edilen aralık üzerinde f yine kesin monotondur.*

İspat.
(1) *Aksini varsayalım: $u, v \in J$ noktaları için $f'(u) < 0 < f'(v)$ olsun; genelliği bozmadan $u < v$ diyelim. f, $[u, v] \subseteq J$ üzerinde türevlenebilirdir ve 0 sayısı $f'(u)$ ile $f'(v)$ arasındadır; Darboux teoremi (Teorem 10.1) gereği $f'(w) = 0$ olan bir $w \in (u, v)$ vardır. Ama $w \in J$'dir ve varsayım gereği f', J üzerinde sıfırlanmaz. Çelişki. Demek ki f''nün J üzerinde aldığı değerlerin hepsi aynı işaretlidir.*
(2) *(1)'e göre J üzerinde ya $f' > 0$ ya $f' < 0$'dır. J bir aralık olduğundan Sonuç 14.1 (1) gereği f, J üzerinde kesin artan ya da kesin azalandır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(3) $J = (\alpha, \beta)$ *yazalım ve* f*'nin* J *üzerinde kesin artan olduğu durumu ele alalım (kesin azalan durumu* $-f$*'ye geçilerek elde edilir).* $\alpha \in I$ *olsun;* f*'nin* $[\alpha, \beta)$ *üzerinde kesin artan olduğunu göstereceğiz.* $\alpha < x < y < \beta$ *verilsin;* J *üzerindeki kesin artanlık* $f(x) < f(y)$ *verir, geriye* $f(\alpha) < f(x)$ *kalıyor.* $\alpha < s < x$ *olan bir* s *seçelim:* $t \in (\alpha, s)$ *olan her* t *için* $f(t) < f(s)$*'dir ve* f*,* α*'da sürekli olduğundan limit sıralamayı koruyarak (bkz. Analiz 1 (1))* $f(\alpha) = \lim_{t \to \alpha^+} f(t) \leq f(s)$ *verir.* $s < x$ *olduğundan* $f(s) < f(x)$*'tir; ikisi birleşince* $f(\alpha) < f(x)$*. Aynı akıl yürütme* $\beta \in I$ *olduğunda sağ uç için de yürür:* $x < y < \beta$ *için* $y < s' < \beta$ *seçilir ve* $f(y) < f(s') \leq f(\beta)$ *elde edilir.*
■

Bu önerme, aşağıdaki yordamın her adımını meşrulaştırır. Yordamın kendisi, fonksiyon incelemesinin bel kemiğidir.

i İşaret tablosu yordamı

f fonksiyonunun monotonluk aralıklarını ve yerel ekstremumlarını bulmak için:

1. **Tanım kümesini belirle.** f'nin tanımlı olmadığı ya da sürekli olmadığı noktalar, incelenecek bölgeyi ayrık aralıklara böler. Her aralık ayrı ele alınır.
2. **Türevi hesapla ve çarpanlarına ayır.** $f'(x)$'i, işareti kolay okunacak bir çarpım/bölüm biçiminde yazmak neredeyse her zaman mümkündür.
3. **Kritik noktaları bul** (Tanım 7.3): $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri ile f'nin türevlenebilir olmadığı noktalar.
4. **Aralıkları oluştur.** Kritik noktalar ve tanımsızlık noktaları, tanım kümesini sonlu sayıda açık alt aralığa böler. Bu alt aralıkların her birinde f türevlenebilirdir ve f' sıfırlanmaz; Önerme 14.1 gereği f''nün işareti bütün alt aralık boyunca sabittir.
5. **Her alt aralıkta bir deneme noktası seç** ve orada f''nün işaretini hesapla. Bu işaret, önceki adım sayesinde bütün alt aralık için geçerlidir.
6. **Tabloyu kur.** Satırlar: x, $f'(x)$'in işareti, f'nin davranışı ($\nearrow$ / $\searrow$ okları ya da "kesin artan" / "kesin azalan" sözcükleriyle).
7. **Ekstremumları oku.** İşaretin komşu iki aralık arasında değiştiği ayırıcı noktalarda yerel ekstremum vardır; değişmiyorsa yoktur. Bunun gerekçesi bir sonraki alt bölümdeki birinci türev testidir.

Yordamı ilk kez çalıştıralım.

Örnek 14.1 (Bir Kübik Fonksiyonun Monotonluk Aralıkları). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ fonksiyonunun monotonluk aralıklarını ve yerel ekstremum noktalarını belirleyiniz.

Çözüm.
Tanım kümesi. f bir polinomdur; $\mathbb{R}$'nin tamamında tanımlı, sürekli ve türevlenebilirdir.
Türev. Kuvvet kuralı ve türevin toplamsallığıyla (Teorem 3.2)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Kritik noktalar. f her yerde türevlenebilir olduğundan yalnızca birinci türden kritik noktalar vardır: $3x(x - 2) = 0$ denkleminin kökleri $x = 0$ ve $x = 2$'dir.
Aralıklar ve işaretler. Bu iki nokta $\mathbb{R}$'yi üç açık aralığa böler; her birinde bir deneme noktası seçelim: $f'(-1) = 9 > 0$, $f'(1) = -3 < 0$, $f'(3) = 9 > 0$.
Önerme 14.1 gereği bu işaretler ilgili aralığın tamamında geçerlidir. Tabloya dökelim:

Aralık	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$ işareti	$+$	0	$-$	0	$+$
f davranışı	kesin artan	yerel maks.	kesin azalan	yerel min.	kesin artan

Monotonluk aralıkları. Önerme 14.1 (3) sayesinde uç noktaları da katabiliriz: f, $(-\infty, 0]$ üzerinde kesin artan, $[0, 2]$ üzerinde kesin azalan, $[2, +\infty)$ üzerinde kesin artandır.
Ekstremumlar. $x = 0$ noktasında: f, $(-\infty, 0]$ üzerinde kesin arttığından $x < 0$ için $f(x) < f(0)$; $[0, 2]$ üzerinde kesin azaldığından $0 < x \leq 2$ için de $f(x) < f(0)$. Demek ki 0 bir **kesin yerel maksi-**

 CC BY-NC-SA 4.0

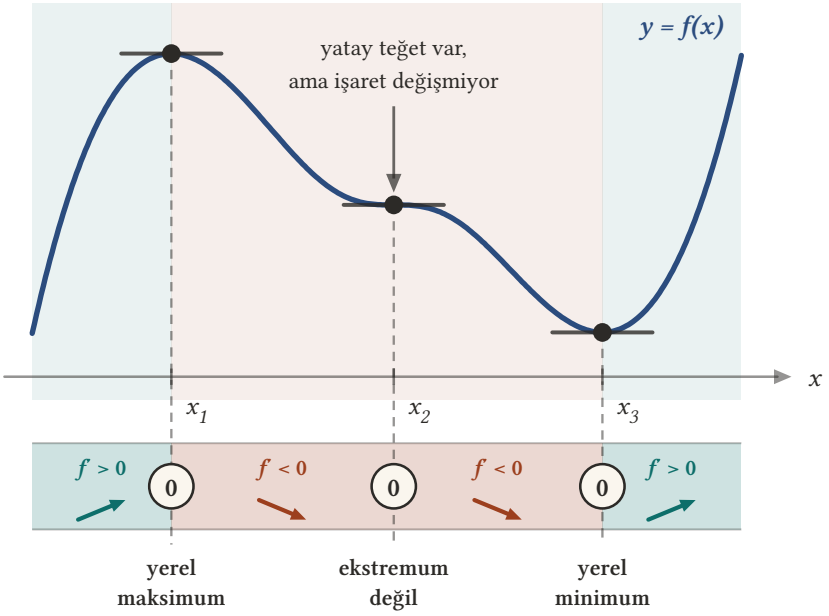
mum noktasıdır, değeri $f(0) = 1$'dir. Aynı biçimde $[0, 2]$ üzerindeki kesin azalma ile $0 \le x < 2$ için $f(x) > f(2)$, $[2, +\infty)$ üzerindeki kesin artma ile $x > 2$ için $f(x) > f(2)$ olur; yani 2 bir **kesin yerel minimum** noktasıdır ve $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$'tür.
Mutlak ekstremum var mı? Yoktur: $x \to \pm\infty$ iken $f(x) \to \pm\infty$ olduğundan f ne üstten ne alttan sınırlıdır. Yerel ekstremumlar mutlak olmak zorunda değildir; nitekim $f(5) = 51 > 1 = f(0)$'dır.
■

14.3 Birinci Türev Testi

Yukarıdaki örnekte ekstremumları "işaret değişimi" gözlemiyle okuduk ve gerekçesini elle yazdık. Şimdi bu gerekçeyi bir kez ve genel olarak kurup teorem hâline getirelim. Testin gücü, x_0 noktasında türev **var olmasa bile** çalışmasıdır; istenen tek şey f'nin x_0'da sürekli olması ve türevin x_0'ın iki yanında var olup işaretinin sabit kalmasıdır.

Teorem 14.2 (Birinci Türev Testi). *$x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ ve f fonksiyonu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığında tanımlı olsun. f'nin x_0 noktasında **sürekli** olduğunu ve delinmiş komşuluğun her noktasında, yani $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde **türevlenebilir** olduğunu varsayalım. O hâlde:*

1. *Her $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ için $f'(x) > 0$ ve her $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için $f'(x) < 0$ ise (f', x_0'da $+$ işaretinden $-$ işaretine geçiyorsa), x_0 bir **kesin yerel maksimum** noktasıdır.*
2. *Her $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ için $f'(x) < 0$ ve her $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için $f'(x) > 0$ ise ($-$'den $+$'ya geçiş), x_0 bir **kesin yerel minimum** noktasıdır.*
3. *f' delinmiş komşuluğun iki yanında da aynı işaretliyse (ikisinde de > 0 ya da ikisinde de < 0), f bütün $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığında kesin monotondur; özel olarak x_0 bir yerel ekstremum noktası **değildir**.*



Şekil 14.1: Üstte f'nin grafiği, altta aynı x ekseni üzerinde hizalanmış f′ işaret şeridi vardır: şeridin f′ > 0 yazan aralıklarında ok yukarı bakar ve f kesin artar, f′ < 0 yazan aralıklarında ok aşağı bakar ve f kesin azalır. x_1'de işaret + iken − olur, bu yüzden orada kesin yerel maksimum; x_3'te − iken + olur, bu yüzden kesin yerel minimum vardır. x_2'de teğet yataydır, yani $f'(x_2) = 0$ olur; ama f′ bu noktanın iki yanında da negatif kaldığından işaret değişmez ve f, x_2'nin bir komşuluğunda kesin azalmayı sürdürür. Testin okuduğu şey kritik noktanın kendisi değil, çevresindeki işaret değişimidir.

İspat.
(2) durumu. *Önce x_0'ın solunu inceleyelim. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ herhangi bir nokta olsun ve $[x, x_0]$ aralığına bakalım. f bu aralıkta süreklidir: $[x, x_0)$'ın her noktasında türevlenebilir olduğundan süreklidir*

 CC BY-NC-SA 4.0

(Teorem 3.1), x_0'da ise süreklilik hipotezle verilmiştir. Ayrıca $(x, x_0) \subseteq (x_0 - \delta, x_0)$ olduğundan f, (x, x_0) üzerinde türevlenebilirdir. Öyleyse Teorem 8.2 uygulanabilir: öyle bir $c \in (x, x_0)$ vardır ki

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)\,(x_0 - x).$$

Burada $c \in (x_0 - \delta, x_0)$ olduğundan varsayım gereği $f'(c) < 0$'dır; ayrıca $x_0 - x > 0$'dır. Çarpım negatiftir:

$$f(x_0) - f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0).$$

Şimdi sağ tarafı inceleyelim. $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ olsun ve $[x_0, x]$ aralığına aynı gerekçelerle Teorem 8.2 uygulayalım: öyle bir $c \in (x_0, x)$ vardır ki

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0).$$

Bu kez $c \in (x_0, x_0 + \delta)$ olduğundan $f'(c) > 0$ ve $x - x_0 > 0$'dır; çarpım pozitiftir:

$$f(x) - f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0).$$

*İki sonucu birleştirelim: $0 < |\,x - x_0\,| < \delta$ olan **her** x için $f(x) > f(x_0)$'dır. Bu tam olarak x_0'ın kesin yerel minimum noktası olması demektir (Tanım 7.1).*
***(1) durumu.** $g = -f$ fonksiyonuna bakalım. g de x_0'da süreklidir ve delinmiş komşulukta türevlenebilirdir; $g' = -f'$ olduğundan g', x_0'ın solunda negatif, sağında pozitiftir. (2) gereği x_0, g için kesin yerel minimum noktasıdır: $0 < |\,x - x_0\,| < \delta$ için $g(x) > g(x_0)$, yani $-f(x) > -f(x_0)$, yani $f(x) < f(x_0)$. Demek ki x_0, f için kesin yerel maksimum noktasıdır.*
***(3) durumu.** İki yanda da $f' > 0$ olsun. Sonuç 14.1 (1) gereği f, $(x_0 - \delta, x_0)$ ve $(x_0, x_0 + \delta)$ aralıklarının her birinde kesin artandır. f, x_0'da sürekli olduğundan Önerme 14.1 (3) bu kesin artanlığı uç noktaya taşır: f hem $(x_0 - \delta, x_0]$ hem $[x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde kesin artandır. Bu iki aralık x_0'da birleştiğinden f, bütün $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ üzerinde kesin artandır: $x_1 < x_2$ ise ya ikisi de x_0'ın aynı tarafında kalır ve sonuç doğrudan gelir, ya da $x_1 \le x_0 \le x_2$ olur ve $f(x_1) \le f(x_0) \le f(x_2)$ zincirinde en az biri kesindir.*
Kesin artan bir fonksiyonun hiçbir iç noktası ekstremum olamaz: her $\delta' \le \delta$ için $f(x_0 - \frac{\delta'}{2}) < f(x_0) < f(x_0 + \frac{\delta'}{2})$ olduğundan x_0'ın her komşuluğunda hem daha küçük hem daha büyük değerler bulunur. İki yanda da $f' < 0$ olması durumu $-f$'ye geçilerek aynı biçimde sonuçlanır.
■

Eşitsizlikler gevşetildiğinde sonuç da gevşer: $f' \ge 0$'dan $f' \le 0$'a geçiş **kesin olmayan** bir yerel maksimum verir (ispatta $>$ yerine $\ge$ yazmak yeter).

i Test, x_0'da türev istemez

Teoremin hipotezleri arasında "f, x_0'da türevlenebilir" **yoktur**; yalnızca süreklilik istenmiştir. Bu, testi $|\,x\,|$ gibi köşeli fonksiyonlarda ve düşey teğetli fonksiyonlarda da kullanılabilir kılar.
$f(x) = |\,x\,|$ örneğine bakalım. f, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir; $x < 0$ için $f'(x) = -1 < 0$, $x > 0$ için $f'(x) = 1 > 0$'dır. $x_0 = 0$ noktasında türev yoktur: soldan türev -1, sağdan türev $+1$'dir (Tanım 2.6) ve bunlar eşit değildir. Buna karşın f, 0'da süreklidir ve türev solunda negatif, sağında pozitiftir; Teorem 14.2 (2) doğrudan uygulanır ve $x_0 = 0$ kesin yerel minimum çıkar.
Bir sonraki alt bölümde göreceğimiz ikinci türev testi bu esnekliğe sahip değildir: orada $f'(x_0)$ ve $f''(x_0)$'ın var olması zorunludur. Birinci türev testi daha geniş kapsamlıdır; ikinci türev testinin üstünlüğü ise işaret tablosu kurmadan tek bir hesapla sonuç vermesidir.

Örnek 14.2 (Türevsiz Bir Kritik Noktası Olan Fonksiyon). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2/3}(x - 5)$ fonksiyonunun bütün kritik noktalarını bulunuz, monotonluk aralıklarını belirleyiniz ve yerel ekstremumlarını sınıflandırınız.

Çözüm.
Tanım kümesi ve süreklilik. $x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2$ her reel x için tanımlı ve süreklidir; $x - 5$ de sürekli olduğundan f, $\mathbb{R}$'nin tamamında süreklidir. Çarpımı açalım: $f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Türev. Genel kuvvet kuralı (Teorem 5.3) $x > 0$ için $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3}$ verir. Buradaki üslerin paydası olan 3 tek olduğundan $x^{1/3}$ negatif sayılarda da tanımlıdır ve aynı kural $x < 0$ bölgesinde de geçerlidir; öyleyse formül her $x \neq 0$ için kullanılabilir. Ortak çarpan $\dfrac{5}{3}x^{-1/3}$'ü dışarı alalım:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2) = \frac{5\,(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}, \qquad x \neq 0.$$

$x = 0$ noktasında türev var mı? $h \neq 0$ için fark oranı

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{2/3}(h-5)}{h} = \frac{h-5}{\sqrt[3]{h}}$$

olur. $h \to 0^+$ iken pay -5'e, payda 0^+'a gider ve oran $-\infty$'a ıraksar; $h \to 0^-$ iken payda 0^-'a gider ve oran $+\infty$'a ıraksar. Demek ki f, 0 noktasında türevlenebilir değildir; grafik dilinde burada düşey teğetli bir sivri uç (cusp) vardır.
Kritik noktalar. İki türden de kritik nokta (Tanım 7.3) mevcuttur:

- $f'(x) = 0$: pay sıfırlanmalı, yani $x = 2$.
- f' tanımsız: $x = 0$.

İşaretler. $f'(x) = \dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$ ifadesinde $\sqrt[3]{x}$ ile x aynı işaretlidir. Üç aralıkta deneme yapalım:

- $x < 0$: pay < 0, payda < 0; bölüm **pozitif** ($x = -1$ için $f'(-1) = 5$).
- $0 < x < 2$: pay < 0, payda > 0; bölüm **negatif** ($x = 1$ için $f'(1) = -\frac{5}{3}$).
- $x > 2$: pay ve payda pozitif; bölüm **pozitif** ($x = 8$ için $f'(8) = 5$).

Aralık	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$ işareti	$+$	tanımsız	$-$	0	$+$
f davranışı	kesin artan	yerel maks.	kesin azalan	yerel min.	kesin artan

Sınıflandırma. $x_0 = 0$: f burada süreklidir, delinmiş bir komşulukta türevlenebilirdir ve türev $+$'dan $-$'ye geçmektedir. Teorem 14.2 (1) gereği 0 bir kesin yerel maksimum noktasıdır, $f(0) = 0$'dır. Dikkat edilecek nokta şudur: $f'(0)$ **yoktur**, dolayısıyla burada ikinci türev testi kullanılamaz; birinci türev testi ise sorunsuz çalışır.
$x_0 = 2$: türev $-$'den $+$'ya geçtiğinden Teorem 14.2 (2) gereği kesin yerel minimum noktasıdır ve

$$f(2) = 2^{2/3}(2-5) = -3\sqrt[3]{4} \approx -4{,}762.$$

Ek gözlemler. $f(x) = 0$ denkleminin kökleri $x = 0$ ve $x = 5$'tir. $x \to \pm\infty$ iken $f(x) \to \pm\infty$ olduğundan mutlak ekstremum yoktur. Monotonluk aralıkları, uç noktalar da katılarak şöyledir: f, $(-\infty, 0]$ üzerinde kesin artan, $[0, 2]$ üzerinde kesin azalan, $[2, +\infty)$ üzerinde kesin artandır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Türev bir yanda sabit işaretli olmayabilir

Birinci türev testi, f''nün x_0'ın **her bir yanında sabit işaretli** olmasını ister. Bu hipotez masum görünse de sağlanmayabilir; o zaman test uygulanamaz, ama fonksiyonun ekstremumu yine de olabilir.
Klasik örnek şudur:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ olduğundan $x \neq 0$ için $f(x) \geq x^2 > 0 = f(0)$'dır; yani 0 **kesin yerel (hatta mutlak) minimum** noktasıdır. Fonksiyon 0'da türevlenebilirdir de: fark oranı $h\left(2 + \sin\frac{1}{h}\right)$ olup mutlak değerce $3 \mid h \mid$'yi aşmadığından $f'(0) = 0$'dır. $x \neq 0$ için ise

$$f'(x) = 2x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}.$$

Şimdi 0'a yakınsayan iki nokta dizisine bakalım. $x = \dfrac{1}{2k\pi}$ için $\sin\dfrac{1}{x} = 0$, $\cos\dfrac{1}{x} = 1$ olduğundan $f'(x) = \dfrac{4}{2k\pi} - 1$ olur; bu, k yeterince büyükken negatiftir. $x = \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$ için ise $\sin\dfrac{1}{x} = 0$, $\cos\dfrac{1}{x} = -1$ olduğundan $f'(x) = \dfrac{4}{(2k+1)\pi} + 1 > 0$'dır.
Demek ki 0'ın **her** sağ komşuluğunda f' hem pozitif hem negatif değerler alır; türev 0'ın sağında sabit işaretli değildir. Birinci türev testinin hipotezi çöker, ama ekstremum vardır. Bu, testin "yeter koşul" olduğunu, "gerek koşul" olmadığını gösterir.

14.4 İkinci Türev Testi

Birinci türev testi güçlüdür ama bir işaret tablosu kurmayı gerektirir. Fonksiyon iki kez türevlenebiliyorsa, kritik noktadaki tek bir sayının işaretine bakmak yeter. Sezgi basittir: $f'(x_0) = 0$ ise teğet yataydır; $f''(x_0) > 0$ ise f' o noktada artmaktadır, yani negatiften pozitife geçer — bu da bir çukurdur.

Teorem 14.3 (İkinci Türev Testi). *I açık bir aralık, $x_0 \in I$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin I üzerinde türevlenebilir olduğunu, x_0 noktasında ikinci türevinin var olduğunu (Tanım 6.1) ve*

$$f'(x_0) = 0$$

koşulunun sağlandığını varsayalım. O hâlde:

1. *$f''(x_0) > 0$ ise x_0 bir **kesin yerel minimum** noktasıdır.*
2. *$f''(x_0) < 0$ ise x_0 bir **kesin yerel maksimum** noktasıdır.*

İspat.
(1) *$f''(x_0) > 0$ olsun. $f''(x_0)$'ın var olması, f' fonksiyonunun x_0'da türevlenebilir olması demektir; bunun için f''nün x_0'ın bir komşuluğunda tanımlı olması gerekir ve bu hipotezle sağlanmıştır. Türev tanımını f' için yazalım:*

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h},$$

çünkü $f'(x_0) = 0$'dır. Bu limit pozitiftir. İşaret koruma teoremi (bkz. Analiz 1 (2)) gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ olsun ve

$$0 < \mid h \mid < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x_0+h)}{h} > \frac{f''(x_0)}{2} > 0.$$

Bir kesrin pozitif olması payla paydanın aynı işaretli olması demektir. $-\delta < h < 0$ ise payda negatiftir, öyleyse $f'(x_0+h) < 0$'dır; yani $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ için $f'(x) < 0$. $0 < h < \delta$ ise payda pozitiftir, öyleyse $f'(x_0+h) > 0$'dır; yani $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için $f'(x) > 0$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki f', x_0 noktasında $-$ işaretinden $+$ işaretine geçmektedir. Ayrıca f, I üzerinde türevlenebilir olduğundan x_0'da süreklidir (Teorem 3.1) ve delinmiş komşulukta türevlenebilirdir; Teorem 14.2 (2)'nin bütün hipotezleri sağlanmıştır. Sonuç: x_0 kesin yerel minimum noktasıdır.
(2) *$g = -f$ alalım. $g'(x_0) = -f'(x_0) = 0$ ve $g''(x_0) = -f''(x_0) > 0$'dır (Teorem 3.2 ikinci türeve de uygulanır). (1) gereği x_0, g için kesin yerel minimum noktasıdır; yani $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$ için $-f(x) > -f(x_0)$, yani $f(x) < f(x_0)$. Demek ki x_0, f için kesin yerel maksimum noktasıdır.*
■

İspatın yapısına dikkat edelim: ikinci türev testi, birinci türev testinin bir **sonucudur**; ikinci türevin işareti yalnızca birinci türevin işaret değişimini garanti etmeye yarar. Bu yüzden ikinci türev testi hiçbir zaman daha fazlasını veremez; verdiği şey kolaylıktır.

⚠ $f''(x_0) = 0$ ise test sonuç vermez

Teorem 14.3 yalnızca iki durumu kapsar: $f''(x_0) > 0$ ve $f''(x_0) < 0$. Üçüncü durumda, yani

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ve} \quad f''(x_0) = 0$$

olduğunda test **hiçbir şey söylemez**. "Test başarısız" demek "ekstremum yok" demek değildir; her üç olasılık da gerçekleşebilir. Böyle bir durumda birinci türev testine dönmek ya da daha yüksek mertebeden türevlere bakmak gerekir.
Ayrıca testin uygulanabilmesi için $f''(x_0)$'ın **var olması** gerektiğini unutmayalım. Örnek 14.2'taki $f(x) = x^{2/3}(x-5)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci türevi bile yoktur; ikinci türev testi orada anlamsızdır, buna karşın nokta bir yerel maksimumdur.

Örnek 14.3 (İkinci Türev Testinin Sonuçsuz Kaldığı Üç Fonksiyon). $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = -x^4$ ve $f_3(x) = x^3$ fonksiyonlarını $x_0 = 0$ noktasında inceleyiniz. Her üçü için de $f'(0) = f''(0) = 0$ olduğunu gösteriniz ve 0 noktasının davranışını belirleyiniz.

Çözüm.
Türevler. Kuvvet kuralıyla:

$$f_1'(x) = 4x^3, \quad f_1''(x) = 12x^2; \qquad f_2'(x) = -4x^3, \quad f_2''(x) = -12x^2; \qquad f_3'(x) = 3x^2, \quad f_3''(x) = 6x.$$

$x = 0$ yerine konursa her üç fonksiyon için de

$$f_i'(0) = 0, \qquad f_i''(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

bulunur. Demek ki Teorem 14.3 hiçbirinde uygulanamaz. Şimdi her birini ayrı ayrı inceleyelim.
$\boldsymbol{f_1(x) = x^4}$**.** $x \neq 0$ için $x^4 > 0 = f_1(0)$'dır; öyleyse 0 bir **kesin yerel minimum** (dahası mutlak minimum) noktasıdır. Aynı sonucu birinci türev testi de verir: $f_1'(x) = 4x^3$ ifadesi $x < 0$ için negatif, $x > 0$ için pozitiftir, yani $-$'den $+$'ya geçiş vardır (Teorem 14.2 (2)).
$\boldsymbol{f_2(x) = -x^4}$**.** Bu kez $x \neq 0$ için $-x^4 < 0 = f_2(0)$'dır; 0 bir **kesin yerel maksimum** (mutlak maksimum) noktasıdır. Türevle: $f_2'(x) = -4x^3$ ifadesi $+$'dan $-$'ye geçtiğinden Teorem 14.2 (1) aynı sonucu verir.
$\boldsymbol{f_3(x) = x^3}$**.** Burada 0 **ekstremum değildir**: her $\varepsilon > 0$ için $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 > 0 > \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^3$ olduğundan 0'ın her komşuluğunda hem $f_3(0) = 0$'dan büyük hem küçük değerler vardır. Türevle: $x \neq 0$ için $f_3'(x) = 3x^2 > 0$ olup işaret **değişmez**; Teorem 14.2 (3) gereği f_3 komşulukta kesin monotondur ve ekstremum yoktur.
Sonuç. Üç fonksiyonun da $x_0 = 0$ noktasındaki birinci ve ikinci türevleri sıfırdır, ama davranışları tamamen farklıdır: minimum, maksimum, hiçbiri. Demek ki $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ bilgisi noktanın türünü belirlemeye **yetmez**.
■

i Daha yüksek mertebeden türevlere başvurmak

Yukarıdaki üç örnekte ayırt edici bilgi, sıfırlanmayan ilk türevin **mertebesinde** saklıdır: x^4 ve $-x^4$ için bu mertebe dörttür (biri pozitif, öteki negatif değerle), x^3 için üçtür. Genel kural şudur: $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ve $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ise, n çift olduğunda x_0 bir kesin yerel ekstremumdur (türevin işaretine göre minimum ya da maksimum), n tek olduğunda ekstremum değildir. Bu ölçüt Teorem 13.2′dur; Taylor formülüne dayanan ispatı Taylor Formülünün Uygulamaları bölümünde verilmişti. Burada onun en sık kullanılan özel hâli olan $n = 2$ durumunu işledik.

Örnek 14.4 (İkinci Türev Testiyle İki İnceleme). Aşağıdaki fonksiyonların yerel ekstremumlarını ikinci türev testiyle belirleyiniz ve sonuçları birinci türev testiyle doğrulayınız.
a) $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
b) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Çözüm.
a) Çarpım kuralı (Teorem 3.2), üstel fonksiyonun türevi (Teorem 5.2) ve zincir kuralı (Teorem 4.1) ile $(e^{-x})' = -e^{-x}$ olduğundan

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x), \qquad f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2).$$

Kritik noktalar. $e^{-x} > 0$ her zaman doğru olduğundan $f'(x) = 0$ ancak $x = 1$ iken olur; f her yerde türevlenebilir olduğundan tek kritik nokta budur.
Test. $f''(1) = e^{-1}(1-2) = -\dfrac{1}{e} < 0$ olduğundan Teorem 14.3 (2) gereği $x = 1$ bir kesin yerel maksimum noktasıdır ve değeri $f(1) = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}3679$'dur.
Birinci türev testiyle doğrulama. $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ ifadesinin işareti $1-x$'in işaretidir: $x < 1$ için $f'(x) > 0$, $x > 1$ için $f'(x) < 0$. Türev $+$'dan $-$'ye geçtiğinden Teorem 14.2 (1) aynı sonucu verir.
Ek: bu maksimum mutlak mıdır? Evet. f, $(-\infty, 1]$ üzerinde kesin artan, $[1, +\infty)$ üzerinde kesin azalandır (Sonuç 14.1 ve Önerme 14.1 (3)); dolayısıyla her x için $f(x) \leq \dfrac{1}{e}$'dir. Mutlak minimum ise **yoktur**: $x \to -\infty$ iken $f(x) \to -\infty$'dur.
b) Türevleri hesaplayalım:

$$g'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) = 4x(x-2)(x+2), \qquad g''(x) = 12x^2 - 16.$$

Kritik noktalar. $g'(x) = 0$ denkleminin kökleri $x = -2$, $x = 0$ ve $x = 2$'dir.
Test. Her birinde g'' değerini hesaplayalım:

$$g''(-2) = 48 - 16 = 32 > 0, \qquad g''(0) = -16 < 0, \qquad g''(2) = 48 - 16 = 32 > 0.$$

Teorem 14.3 gereği $x = -2$ ve $x = 2$ kesin yerel minimum, $x = 0$ kesin yerel maksimum noktalarıdır. Değerler:

$$g(-2) = 16 - 32 + 5 = -11, \qquad g(0) = 5, \qquad g(2) = 16 - 32 + 5 = -11.$$

Birinci türev testiyle doğrulama. $g'(x) = 4x(x-2)(x+2)$ üç çarpanlıdır; deneme noktalarıyla:

Aralık	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Deneme noktası	-3	-1	1	3
g' değeri	-60	12	-12	60
g davranışı	kesin azalan	kesin artan	kesin azalan	kesin artan

İşaret -2'de $-$'den $+$'ya (minimum), 0'da $+$'dan $-$'ye (maksimum), 2'de yine $-$'den $+$'ya (minimum) geçmektedir; ikinci türev testinin sonuçlarıyla birebir uyuşuyor.
Ek. g çift bir fonksiyondur ($g(-x) = g(x)$); iki minimumun aynı değeri vermesi bunun sonucudur. $x \to \pm\infty$ iken $g(x) \to +\infty$ olduğundan mutlak maksimum yoktur; buna karşılık tablodaki davranış her x için $g(x) \geq -11$ verdiğinden -11 mutlak minimumdur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

14.5 Kapalı Aralıkta Mutlak Ekstremum

Ekstremum Noktaları ve Fermat Teoremi bölümünde, kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun mutlak ekstremumlarını bulmak için bir aday listesi kurmuştuk (Örnek 7.4). Şimdi aynı yordamı, elimizdeki monotonluk bilgisiyle zenginleştirerek yeniden çalıştıralım. Yordamın özeti şudur:

1. **Varlık.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekliyse Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) mutlak ekstremumların **alındığını** garanti eder.
2. **Adaylar.** Mutlak ekstremumun alındığı nokta ya (a, b) içinde bir kritik noktadır (Teorem 7.1, Tanım 7.3) ya da uç noktalardan biridir.
3. **Karşılaştırma.** f, bütün adaylarda hesaplanır; listenin en büyüğü mutlak maksimum, en küçüğü mutlak minimum değeridir.

Monotonluk bilgisi bu listeye hangi adayın **yerel** olarak ne olduğunu ekler. Şimdi hem $f' = 0$ hem de türevin var olmadığı adayları barındıran bir örneği baştan sona çözelim.

Örnek 14.5 (Mutlak Değerli Bir Fonksiyonun Kapalı Aralıktaki Ekstremumları). $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini, alındıkları noktalarla birlikte bulunuz. Ayrıca bütün yerel ekstremumları sınıflandırınız.

Çözüm.
Varlık. Polinomla mutlak değer fonksiyonunun bileşkesi süreklidir (bkz. Analiz 1); $[-1, 3]$ kapalı ve sınırlı olduğundan Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği f mutlak maksimumunu ve mutlak minimumunu bu aralıkta alır.
Mutlak değeri çözmek. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ ifadesi $[-1, 3]$ üzerinde $x = 2$'de sıfırlanır; $-1 \le x < 2$ için negatif, $2 < x \le 3$ için pozitiftir. Öyleyse

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 4, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

(İki tanım $x = 2$'de aynı değeri, 0'ı verir.)
Türev. İç noktalarda $-1 < x < 2$ için $f'(x) = -2x$, $2 < x < 3$ için $f'(x) = 2x$'tir. $x = 2$'de soldan türev -4, sağdan türev 4 çıkar; bunlar eşit olmadığından f, $x = 2$'de türevlenebilir değildir (Tanım 2.6) ve burası ikinci türden bir kritik noktadır.
Aday listesi.

- $f'(x) = 0$ olan iç noktalar: $-1 < x < 2$ bölgesinde $-2x = 0 \Rightarrow x = 0$; $2 < x < 3$ bölgesinde $2x = 0$'ın kökü aralıkta değildir. Aday: $x = 0$.
- f''nün var olmadığı iç nokta: $x = 2$.
- Uç noktalar: $x = -1$ ve $x = 3$.

Toplam dört aday: $-1, 0, 2, 3$.
Değerler.

$$f(-1) = |\, 1 - 4 \,| = 3, \qquad f(0) = |\, 0 - 4 \,| = 4, \qquad f(2) = 0, \qquad f(3) = |\, 9 - 4 \,| = 5.$$

Karşılaştırma. Listenin en büyüğü 5, en küçüğü 0'dır:

$$\max_{x \in [-1,3]} f(x) = f(3) = 5, \qquad \min_{x \in [-1,3]} f(x) = f(2) = 0.$$

Mutlak maksimum sağ uç noktada, mutlak minimum ise türevin var olmadığı kritik noktada alınmaktadır. Bu, üç aday kaynağının hepsine birden bakmanın neden zorunlu olduğunu gösteren tipik bir örnektir: yalnızca $f' = 0$ köklerine baksaydık ($x = 0$), her iki mutlak ekstremumu da kaçırırdık.
Monotonluk ve yerel sınıflandırma. İşaret tablosunu kuralım:

Aralık	$(-1, 0)$	$x = 0$	$(0, 2)$	$x = 2$	$(2, 3)$
$f'(x)$	$-2x > 0$	0	$-2x < 0$	tanımsız	$2x > 0$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aralık	$(-1,0)$	$x=0$	$(0,2)$	$x=2$	$(2,3)$
İşaret	$+$		$-$		$+$
f davranışı	kesin artan	yerel maks.	kesin azalan	yerel min.	kesin artan

- $x=0$: türev $+$'dan $-$'ye geçiyor, Teorem 14.2 (1) gereği kesin yerel maksimum; değeri 4. (Mutlak değildir, çünkü $f(3)=5>4$'tür.) $-1<x<2$ bölgesinde $f''(x)=-2<0$ olduğundan Teorem 14.3 (2) de aynı sonucu verir.
- $x=2$: türev $-$'den $+$'ya geçiyor, Teorem 14.2 (2) gereği kesin yerel minimum; değeri 0 ve bu aynı zamanda mutlak minimumdur. İkinci türev testi burada kullanılamaz, çünkü $f'(2)$ yoktur.
- $x=-1$ (sol uç): f, $[-1,0]$ üzerinde kesin artan olduğundan $x\in(-1,0]$ için $f(x)>f(-1)$'dir; -1 bir uç nokta yerel minimumudur, değeri 3.
- $x=3$ (sağ uç): f, $[2,3]$ üzerinde kesin artan olduğundan $x\in[2,3)$ için $f(x)<f(3)$'tür; 3 bir uç nokta yerel maksimumudur ve mutlaktır.

■

14.6 Monotonlukla Eşitsizlik İspatlamak

Monotonluk testinin en zarif kullanımlarından biri, doğrudan cebirle ispatlanması güç olan eşitsizlikleri kurmaktır. Yöntem üç adımlıdır:

1. Eşitsizliği $F(x)>0$ (ya da ≥ 0) biçimine getir.
2. Uygun bir x_0 noktasında $F(x_0)=0$ olduğunu göster.
3. $x>x_0$ için $F'(x)>0$ olduğunu göster; Sonuç 14.1 gereği F, $[x_0,\infty)$ üzerinde kesin artandır ve $x>x_0$ için $F(x)>F(x_0)=0$ olur.

Üçüncü adımda $F'>0$ yerine "$F'\geq 0$ ve F''nün sıfırları ayrık" koşulu da yeterlidir.

Örnek 14.6 (Monotonlukla Üç Klasik Eşitsizlik). Aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayınız.
a) Her $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ için $\tan x>x$.
b) Her $x>0$ için $\sin x<x$.
c) Her $x\neq 0$ için $e^x>1+x$.

Çözüm.
a) $F:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\tan x-x$ olsun. Tanjant bu aralıkta tanımlı ve türevlenebilirdir (Teorem 5.4):

$$F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x.$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ için $\tan x>0$, dolayısıyla $F'(x)>0$'dır; yalnız $x=0$'da $F'(0)=0$ olur. $\{0\}$ tek noktalı bir küme olduğundan hiçbir dejenere olmayan aralığı içermez ve Sonuç 14.1 (2) gereği F, $[0,\frac{\pi}{2})$ üzerinde **kesin artandır**.
$F(0)=0$ olduğundan, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ için

$$F(x)>F(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \tan x-x>0 \quad\Rightarrow\quad \tan x>x.$$

b) $G:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $G(x)=x-\sin x$ olsun. G her yerde türevlenebilirdir ve

$$G'(x)=1-\cos x.$$

$-1\leq\cos x\leq 1$ olduğundan her x için $G'(x)\geq 0$'dır; yani G azalmayandır (Teorem 14.1). Ama kesin artanlık istiyoruz. $G'(x)=0$ olması $\cos x=1$, yani $x=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ demektir. Ardışık iki çözüm arasındaki uzaklık $2\pi>0$ olduğundan bu küme hiçbir dejenere olmayan aralığı içeremez; Sonuç 14.1 (2) gereği G, $[0,+\infty)$ üzerinde kesin artandır.
$G(0)=0-\sin 0=0$ olduğundan $x>0$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$G(x) > G(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - \sin x > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x < x.$$

Bu örnek, Sonuç 14.1 (2)'nin neden işe yaradığını iyi gösterir: $G' > 0$ **değildir** (sonsuz çoklukta noktada sıfırlanır), buna karşın G kesin artandır.
c) $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x) = e^x - 1 - x$ olsun. Teorem 5.2 gereği

$$H'(x) = e^x - 1.$$

Üstel fonksiyon kesin artan olduğundan ve $e^0 = 1$ olduğundan:

- $x > 0$ için $e^x > 1$, yani $H'(x) > 0$;
- $x < 0$ için $e^x < 1$, yani $H'(x) < 0$.

Öyleyse Sonuç 14.1 (1) gereği H, $[0, +\infty)$ üzerinde kesin artan ve $(-\infty, 0]$ üzerinde kesin azalandır (uç noktaların katılması Önerme 14.1 (3) ile meşrudur). $H(0) = 0$ olduğundan $x > 0$ için $H(x) > H(0) = 0$; $x < 0$ için de, H bu aralıkta kesin azalan olduğundan yine $H(x) > H(0) = 0$. Her iki durumda da $x \neq 0$ için $H(x) > 0$, yani $e^x > 1 + x$ ($x = 0$'da eşitlik vardır).
Aynı sonucu birinci türev testiyle de okuyabiliriz: H', $x = 0$'da $-$'den $+$'ya geçtiğinden 0 kesin yerel minimum noktasıdır ve monotonluk aralıkları $\mathbb{R}$'yi kapladığından bu minimum mutlaktır.
■

Yöntemin çekirdeği

Bu üç ispatın ortak iskeleti şudur: **bir eşitsizlik, farkın monotonluğuna indirgenir.** Fark fonksiyonunun bir uçta sıfır olması "başlangıç koşulu"nu, türevinin işareti ise "gidişat"ı verir. Gerekirse işlem yinelenir: $x > 0$ için $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ eşitsizliğinde $K(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ alınır; $K'(x) = x - \sin x$ olup (b) şıkkı gereği $x > 0$ için pozitiftir, $K(0) = 0$ olduğundan $K(x) > 0$ çıkar.

14.7 Alıştırmalar

Alıştırma 14.1 (Monotonluk ve Ekstremum Testleri Üzerine). a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ fonksiyonunun monotonluk aralıklarını bulunuz ve yerel ekstremumlarını hem birinci hem ikinci türev testiyle sınıflandırınız.
b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.
c) $f(x) = 1 - (x - 2)^{2/3}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki davranışını inceleyiniz. İkinci türev testi neden kullanılamaz?
d) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, 4]$ aralığındaki mutlak ekstremumlarını bulunuz.
e) Her $x > 0$ için $\ln(1 + x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ olduğunu gösteriniz.
f) $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir, $f' \geq 0$ koşulunu sağlayan ama kesin artan **olmayan** bir fonksiyon örneği veriniz. Ayrıca $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ olduğu hâlde x_0'ın kesin yerel minimum olduğu bir örnek veriniz.
g) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun doğal tanım kümesindeki monotonluk aralıklarını bulunuz ve yerel ekstremumlarını sınıflandırınız. Bulduğunuz yerel maksimum değerinin yerel minimum değerinden **küçük** çıkmasını açıklayınız.

Çözüm.
a) Türevler:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3), \qquad f''(x) = 6x - 12.$$

Kritik noktalar $x = 1$ ve $x = 3$'tür (f her yerde türevlenebilir olduğundan başka kritik nokta yoktur).
Birinci türev testi. Deneme noktalarıyla:

 CC BY-NC-SA 4.0

Aralık	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
Deneme noktası	0	2	4
f' değeri	9	-3	9
İşaret	$+$	$-$	$+$

Türev $x = 1$'de $+$'dan $-$'ye geçtiğinden Teorem 14.2 (1) gereği burada kesin yerel maksimum, $x = 3$'te $-$'den $+$'ya geçtiğinden (2) gereği kesin yerel minimum vardır.
İkinci türev testi. $f''(1) = -6 < 0$: kesin yerel maksimum. $f''(3) = 6 > 0$: kesin yerel minimum. İki test uyuşuyor. Değerler $f(1) = 5$ ve $f(3) = 1$'dir.
Monotonluk aralıkları. f, $(-\infty, 1]$ üzerinde kesin artan, $[1, 3]$ üzerinde kesin azalan, $[3, +\infty)$ üzerinde kesin artandır. Mutlak ekstremum yoktur, çünkü $x \to \pm\infty$ iken $f(x) \to \pm\infty$'dur.

b) Bölüm kuralıyla $f'(x) = \dfrac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$ bulunur. Payda daima pozitiftir, dolayısıyla f''nün işareti $1 - x^2$'nin işaretidir; kritik noktalar $x = -1$ ve $x = 1$'dir.

Aralık	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$1 - x^2$ işareti	$-$	$+$	$-$
f davranışı	kesin azalan	kesin artan	kesin azalan

Teorem 14.2 gereği $x = -1$ kesin yerel minimum, $x = 1$ kesin yerel maksimumdur; değerleri

$$f(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Bu değerlerin mutlak olduğunu gösterelim. $x \le -1$ bölgesinde f kesin azalandır, dolayısıyla $f(x) \ge f(-1) = -\frac{1}{2}$; $-1 \le x \le 1$ bölgesinde kesin artandır, dolayısıyla $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$; $x \ge 1$ bölgesinde kesin azalandır, dolayısıyla $f(x) \le f(1) = \frac{1}{2}$. Üç bölgede de $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$ elde edilir; sınırlar $x = -1$ ve $x = 1$'de alındığından

$$\min_{\mathbb{R}} f = -\frac{1}{2} \ (x = -1 \ \text{ noktasında}), \qquad \max_{\mathbb{R}} f = \frac{1}{2} \ (x = 1 \ \text{ noktasında}).$$

(Aynı sonuç $(|\,x\,| - 1)^2 \ge 0$, yani $x^2 + 1 \ge 2\,|\,x\,|$ eşitsizliğinden cebirsel olarak da çıkar.)

c) $(x-2)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2$ her reel x için tanımlı ve sürekli olduğundan f'nin tanım kümesi $\mathbb{R}$'dir. $x \neq 2$ için Teorem 5.3 ile zincir kuralı (Teorem 4.1) — üssün paydası olan 3 tek olduğundan kural $x < 2$ bölgesinde de geçerlidir — şunu verir:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-2)^{-1/3} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

İşaretler: $x < 2$ için $\sqrt[3]{x-2} < 0$ olduğundan $f'(x) > 0$; $x > 2$ için $f'(x) < 0$. Türev $+$'dan $-$'ye geçtiğinden Teorem 14.2 (1) gereği $x = 2$ bir kesin yerel maksimum noktasıdır; değeri $f(2) = 1$'dir. Dahası f, $(-\infty, 2]$ üzerinde kesin artan ve $[2, +\infty)$ üzerinde kesin azalan olduğundan bu maksimum **mutlaktır**: her x için $f(x) \le 1$.
İkinci türev testi neden kullanılamaz? Çünkü $f'(2)$ yoktur: fark oranı $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{h}}$ olup $h \to 0^+$ iken $-\infty$'a, $h \to 0^-$ iken $+\infty$'a ıraksar. Birinci türev var olmadığından ikinci türevden söz edilemez; Teorem 14.3'nin hipotezleri sağlanmaz. Buna karşın birinci türev testi, $x = 2$'de yalnızca süreklilik istediği için sorunsuz uygulanır.

d) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[0, 4]$ üzerinde süreklidir (karekök $[0, \infty)$'da süreklidir); Weierstrass Ekstremum Teoremi mutlak ekstremumların varlığını verir.
$x > 0$ için

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$x = 0$'da türev yoktur (sağdan fark oranı $\dfrac{h - 2\sqrt{h}}{h} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{h}} \to -\infty$).
Adaylar. $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$; türevin var olmadığı nokta $x = 0$ (aynı zamanda sol uç); uç noktalar $x = 0$ ve $x = 4$. Aday listesi $\{0, 1, 4\}$ ve değerler $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(4) = 0$'dır.
Sonuç. Mutlak minimum -1'dir ve $x = 1$'de alınır; mutlak maksimum 0'dır ve **iki noktada birden** ($x = 0$ ve $x = 4$) alınır.
Monotonluk. $0 < x < 1$ için $\sqrt{x} < 1$, yani $f'(x) < 0$; $x > 1$ için $f'(x) > 0$. Demek ki $x = 1$ kesin yerel (ve mutlak) minimum, uç noktalar ise birer uç nokta yerel maksimumudur.

e) $F(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ olsun; F, $(-1, +\infty)$ üzerinde tanımlı ve türevlenebilirdir (Teorem 5.1) ve $F(0) = 0$'dır. Türevi:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 + x = \frac{1 - (1 + x) + x(1 + x)}{1 + x} = \frac{x^2}{1 + x}.$$

$x > 0$ için pay ve payda pozitif olduğundan $F'(x) > 0$'dır; Sonuç 14.1 (1) ve Önerme 14.1 (3) gereği F, $[0, +\infty)$ üzerinde kesin artandır. Öyleyse $x > 0$ için

$$F(x) > F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

f) *Birinci örnek.* $x \le 0$ için 0, $x > 0$ için x^2 değerini alan f fonksiyonunu alalım. $x < 0$ için $f'(x) = 0$, $x > 0$ için $f'(x) = 2x > 0$'dır. $x = 0$'da fark oranı $h < 0$ için 0, $h > 0$ için h olduğundan iki yönlü limit 0'dır, yani $f'(0) = 0$. Demek ki f her yerde türevlenebilirdir ve $f' \ge 0$'dır; buna karşın f kesin artan değildir: $-2 < -1$ olmasına karşın $f(-2) = 0 = f(-1)$'dir.
Bu, Sonuç 14.1 (2) ile tam uyumludur: burada $Z = \{x : f'(x) = 0\} = (-\infty, 0]$ kümesi $(-2, -1)$ aralığını içerir, yani ölçütün ikinci koşulu çiğnenmiştir.
İkinci örnek. $f(x) = x^4$ ve $x_0 = 0$ alalım. $f'(0) = f''(0) = 0$ olduğundan ikinci türev testi sonuç vermez; buna karşın $x \neq 0$ için $x^4 > 0$ olduğundan 0 bir **kesin yerel minimum** noktasıdır (Örnek 14.3).

g) f'nin tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$'dır. Burada 0 noktası bir kritik nokta **değildir**, çünkü tanım kümesine ait değildir; yaptığı tek şey incelenecek bölgeyi iki ayrı aralığa bölmektir — işaret tablosu yordamının birinci adımı tam olarak bunu ister. $x \neq 0$ için türev

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$$

olur. Payda daima pozitif olduğundan işareti $(x - 1)(x + 1)$ belirler; kritik noktalar $x = -1$ ve $x = 1$'dir.

Aralık	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Deneme noktası	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
f' değeri	$\frac{3}{4}$	-3	-3	$\frac{3}{4}$
f davranışı	kesin artan	kesin azalan	kesin azalan	kesin artan

Önerme 14.1 (3) ile uç noktaları da katarsak: f, $(-\infty, -1]$ üzerinde kesin artan, $[-1, 0)$ üzerinde kesin azalan, $(0, 1]$ üzerinde kesin azalan, $[1, +\infty)$ üzerinde kesin artandır.
Türev $x = -1$'de $+$'dan $-$'ye geçtiğinden Teorem 14.2 (1) gereği burada kesin yerel maksimum, $x = 1$'de $-$'den $+$'ya geçtiğinden (2) gereği kesin yerel minimum vardır; değerler $f(-1) = -2$ ve $f(1) = 2$'dir. (Aynı sonuç ikinci türev testinden de gelir: $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ olduğundan $f''(-1) = -2 < 0$ ve $f''(1) = 2 > 0$'dır.)
Yerel maksimum neden yerel minimumdan küçük? Çünkü yerel ekstremum karşılaştırması yalnızca noktanın **kendi komşuluğunda** yapılır ve bu iki nokta tanım kümesinin iki ayrı parçasında yaşar. Gerçekten $x < 0$ için $f(x) \le -2$, $x > 0$ için $f(x) \ge 2$'dir; iki parça arasında hiçbir karşılaştırma yoktur. Mutlak ekstremum da yoktur: $x \to 0^+$ iken $f(x) \to +\infty$, $x \to 0^-$ iken $f(x) \to -\infty$'dur. Bu örnek, monotonluk ve ekstremum bilgisinin neden **her aralıkta ayrı ayrı** okunması gerektiğini gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Bu bölümde türevin **işaretinin** fonksiyonun gidişatını nasıl belirlediğini gördük. Sırada, ikinci türevin işaretinin belirlediği bir başka geometrik özellik var: eğrinin teğetlerinin üstünde mi altında mı kaldığı, yani bükülme yönü. Bu kavramı ve türevle tam bağlantısını bir sonraki bölümde kuruyoruz: Konveks ve Konkav Fonksiyonlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Konveks ve Konkav Fonksiyonlar

Monotonluk ve Ekstremum Testleri bölümünde birinci türevin işaretinin fonksiyonun **artıp azaldığını** söylediğini gördük; ama bu bilgi grafiği çizmeye tek başına yetmez. $[0,1]$ üzerinde $f(x)=x^2$ ile $g(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonlarını düşünelim: ikisi de artandır ve 0'dan 1'e gider, ama grafikleri birbirinin tam tersi biçimde kıvrılır — biri "çanak gibi" yukarı, öteki "kubbe gibi" aşağı doğru bükülür. Bu ayrımı yapan şey **eğrilik yönüdür.**

Bu bölümde eğrilik yönünü kesin bir tanıma bağlayacağız. Tanım şaşırtıcı biçimde türevden bağımsızdır: bir fonksiyon, grafiğinin herhangi iki noktasını birleştiren **kiriş** (chord) grafiğin üstünde kalıyorsa **konvekstir** (convex). Bu koşul yalnızca fonksiyonun değerlerini kullanır, süreklilik bile istemez; buna karşın tek başına, fonksiyonun bir aralığın içinde sürekli olmasını, tek yönlü türevlerinin var olmasını, yerel minimumlarının mutlak minimum olmasını ve grafiğin her teğetin üstünde kalmasını getirir. Optimizasyon kuramının konveks fonksiyonlar üzerine kurulmuş olmasının nedeni budur: konveks bir fonksiyonda "yerel olarak en iyi" ile "gerçekten en iyi" aynı şeydir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: konvekslik ve konkavlığın tanımı ile geometrik anlamı; sonlu Jensen eşitsizliğinin tümevarımla elde edilişi; yerel minimumun neden mutlak minimum olduğu; grafiğin teğetin üstünde kalması; kiriş eğimlerinin monotonluğunu özetleyen üç eşitsizlik; türevlenebilir fonksiyonlar için konveksliğin f''nün artanlığına, iki kez türevlenebilir fonksiyonlar için de $f''\geq 0$ koşuluna denk oluşu; ve konveks bir fonksiyonun açık aralıkta neden kendiliğinden sürekli olduğu. Bölümü iki klasik uygulamayla — aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliği ve Young eşitsizliği — kapatacağız.

15.1 Konvekslik ve Konkavlık

Tanımın çıkış noktası şu gözlemdir: bir aralığın iki ucu x_1 ve x_2 ise, aradaki her nokta bu iki ucun bir **ağırlıklı ortalaması** olarak yazılabilir.

Tanım 15.1 (Konveks Fonksiyon). $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1,x_2\in I$ ve her $\alpha\in[0,1]$ için

$$f\left(\,\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\,\right)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

oluyorsa f'ye I üzerinde **konveks** (convex) denir.

Tanımdaki $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ ifadesine x_1 ile x_2'nin bir **konveks birleşimi** (convex combination) denir. α parametresi $[0,1]$ aralığında dolaşırken bu ifadenin ne yaptığını görelim:

$$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2 = x_2+\alpha(x_1-x_2).$$

$\alpha=0$ için sonuç x_2, $\alpha=1$ için x_1'dir; arada ise nokta x_2'den x_1'e doğru düzgün biçimde kayar. Gerçekten de $x_1<x_2$ ve $\alpha\in(0,1)$ ise

$$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2-x_1=(1-\alpha)(x_2-x_1)>0,\qquad x_2-\left(\,\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\,\right)=\alpha(x_2-x_1)>0$$

olduğundan nokta kesinlikle x_1 ile x_2 arasındadır: **α, $[x_1,x_2]$ aralığını baştan sona tarar.** Ayrıca I bir aralık olduğundan (bkz. Analiz 1) bu ara noktaların hepsi I'dedir; tanımın aralıklarda yapılmasının nedeni budur.

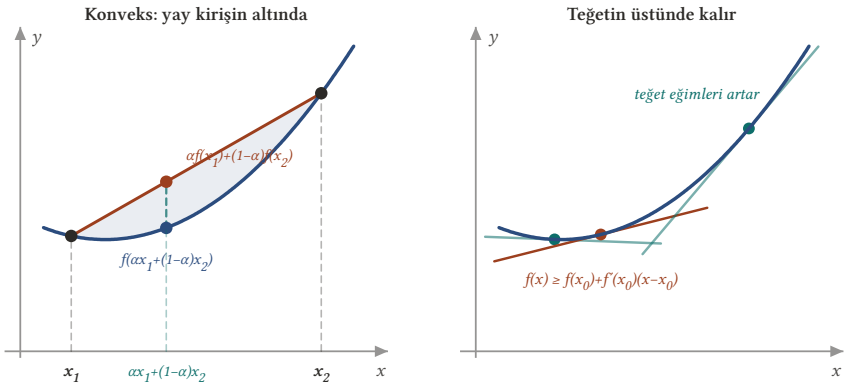
Peki eşitsizliğin sağ tarafı nedir? Aşağıdaki hesap, sağ tarafın kirişin o noktadaki yüksekliği olduğunu gösterir.

Lemma 15.1 (Kirişin Denklemi). *$x_1\neq x_2$ olsun ve ℓ, düzlemde $(x_1,f(x_1))$ ile $(x_2,f(x_2))$ noktalarından geçen doğru (yani **kiriş**) olsun. Her $\alpha\in[0,1]$ için*

$$\ell\left(\,\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\,\right)=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

*olur. Dolayısıyla Tanım 15.1'daki eşitsizlik, f'nin grafiğinin $[x_1, x_2]$ üzerinde kirişin **üstüne çıkmaması** — yani ya altında ya da tam üzerinde kalması — demektir.*



Şekil 15.1: Solda konveksliğin tanımı: [x₁, x₂] üzerindeki her ara noktada eğrinin değeri, kirişin değerinden küçük ya da ona eşittir. Sağda iki eşdeğer görünüm: konveks bir fonksiyonun grafiği her teğetinin üstünde kalır ve teğet eğimleri, yani f′, artar.

İspat.

$x_1 \neq x_2$ olduğundan kirişin eğimi $m = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ biçiminde tanımlıdır ve $(x_2, f(x_2))$ noktasından geçen doğrunun denklemi $\ell(x) = f(x_2) + m(x-x_2)$'dir. $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ alalım; yukarıda hesapladığımız gibi $x - x_2 = \alpha(x_1 - x_2)$'dir, öyleyse

$$\ell(x) = f(x_2) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\cdot\alpha(x_1-x_2) = f(x_2) + \alpha\,\big(\,f(x_1)-f(x_2)\,\big) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

α parametresi $[0,1]$'i taradıkça x de x_1 ile x_2 arasını taradığından, konvekslik eşitsizliği tam olarak "x_1 ile x_2 arasındaki her x için $f(x) \leq \ell(x)$" demektir.

■

Eşitsizliğin yönü ters çevrildiğinde karşı kavramı elde ederiz.

Tanım 15.2 (Konkav Fonksiyon). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ olsun. Her $x_1, x_2 \in I$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\,\big(\,\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\,\big) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

oluyorsa f'ye I üzerinde **konkav** (concave) denir. Geometrik olarak: grafik her kirişin üstünde kalır.

İki kavram arasında gerçek bir fark yoktur; biri ötekinin işaret değiştirmiş hâlidir. Konkavlık eşitsizliğinin iki yanını -1 ile çarpmak $-f$ için konvekslik eşitsizliğini verir, ters yön de aynı biçimde yürür:

$$f \text{ konkav} \iff -f \text{ konveks}\ .$$

Bu gözlem sayesinde bundan sonraki bütün teoremleri yalnızca konveks fonksiyonlar için ispatlayacağız; konkav hâl her seferinde $g = -f$ konulduğunda kendiliğinden çıkar.
Tanımda eşitliğe izin verilmiştir; örneğin bir doğru hem konveks hem konkavdır (kiriş grafiğin kendisidir). Eşitliği yasaklayarak daha keskin bir kavram elde ederiz.

Tanım 15.3 (Kesin Konvekslik ve Kesin Konkavlık). I bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ olsun.

1. Birbirinden farklı her $x_1, x_2 \in I$ ve her $\alpha \in (0,1)$ için

$$f\,\big(\,\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\,\big) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

oluyorsa f'ye **kesin konveks** (strictly convex) denir.
2. Aynı koşulda eşitsizlik $>$ yönünde sağlanıyorsa f'ye **kesin konkav** (strictly concave) denir.

Kesin konveks bir fonksiyonun grafiği, uç noktaları dışında kirişe hiçbir yerde değmez.

$\alpha = 0$, $\alpha = 1$ ve $x_1 = x_2$ hâllerinin dışarıda bırakılması zorunludur: bunlarda iki taraf zaten birbirine eşittir, dolayısıyla kesin eşitsizlik istenemez.

> **i** Konvekslik türev gerektirmez
>
> Tanım 15.1'da ne süreklilik ne de türevlenebilirlik geçmektedir; koşul yalnızca fonksiyonun değerleri arasındaki bir eşitsizliktir. Nitekim $f(x) = |x|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konvekstir (aşağıda Örnek 15.1'nde üçgen eşitsizliğiyle göreceğiz) ama 0'da türevlenebilir değildir. Bu yüzden aşağıdaki teoremler iki gruba ayrılır: türev kullanmayanlar (yerel minimum teoremi, Jensen eşitsizliği, eğim monotonluğu, süreklilik) ve türev kullananlar (teğet teoremi, birinci ve ikinci türev ölçütleri).

15.2 Jensen Eşitsizliği

Tanım 15.1 **iki** noktanın ağırlıklı ortalaması hakkındadır. Peki üç, dört, n nokta alırsak ne olur? Yanıt, konveksliğin belki de en çok kullanılan biçimidir ve Danimarkalı matematikçi Johan Jensen'in adını taşır. Eşitsizlik, "ortalamanın fonksiyonu, fonksiyonun ortalamasından küçüktür" biçiminde okunur.

Önerme 15.1 (Jensen Eşitsizliği). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul şudur: her $n \geq 2$ tam sayısı, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olacak biçimdeki her $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ sayıları ve her $x_1, \ldots, x_n \in I$ için*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

İspat.
Önce toplamın I'de olduğunu görelim. *$m = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$, $M = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. Her i için $m \leq x_i \leq M$ ve $\lambda_i \geq 0$ olduğundan $\lambda_i m \leq \lambda_i x_i \leq \lambda_i M$'dir; bunları toplarsak*

$$m = m\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq M \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = M$$

buluruz. $m, M \in I$ ve I bir aralık olduğundan (bkz. Analiz 1) $\sum \lambda_i x_i \in I$'dir; yani eşitsizliğin sol tarafı anlamlıdır.
($\Leftarrow$) *Koşul $n = 2$ için yazıldığında $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1 - \alpha$ ile Tanım 15.1'daki eşitsizliğin ta kendisidir. Demek ki koşul konveksliği gerektirir.*
($\Rightarrow$) *f konveks olsun. İddiayı n üzerinden tümevarımla (bkz. Analiz 1) ispatlayacağız.*
Temel adım ($n = 2$). *$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_i \geq 0$ ise $\lambda_1 \in [0, 1]$ ve $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$'dir; iddia doğrudan konvekslik tanımıdır.*
Tümevarım adımı. *İddianın bir $n \geq 2$ için doğru olduğunu varsayalım ve $n + 1$ nokta için gösterelim. $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ ve $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ verilsin.*
Durum 1: $\lambda_{n+1} = 1$. *Bu durumda $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$'dır (negatif olmayan sayıların toplamı 0 ise hepsi 0'dır); iki taraf da $f(x_{n+1})$'e eşittir.*
Durum 2: $\lambda_{n+1} < 1$. *$\mu = 1 - \lambda_{n+1}$ diyelim; $\mu > 0$'dır ve $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$'dir.*
Şimdi $i = 1, \ldots, n$ için $\lambda_i' = \dfrac{\lambda_i}{\mu}$ tanımlayalım. Bu sayılar negatif değildir ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olur; yani tümevarım hipotezinin istediği türden ağırlıklardır. Buna göre $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_i$ noktası, ispatın başında gösterdiğimiz üzere I'dedir. Toplamı y ve x_{n+1} cinsinden yazalım:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_i' x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \mu\, y + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \mu\, y + (1 - \mu)\, x_{n+1}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu, y ile x_{n+1}'in $\alpha = \mu \in (0,1]$ ağırlıklı bir konveks birleşimidir; f konveks olduğundan (iki noktalı tanım)

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\ \mu y + (1-\mu)x_{n+1}\ \right) \leq \mu f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Tümevarım hipotezi $f(y) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' f(x_i)$ verir. $\mu > 0$ olduğundan bunu μ ile çarpmak yönü bozmaz; yukarıda yerine koyarsak

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \mu \frac{\lambda_i}{\mu} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

elde ederiz. İddia $n+1$ için de doğrudur; tümevarım ilkesi gereği her $n \geq 2$ için doğrudur.
■

Konkav fonksiyonlar için eşitsizlik ters yöndedir: f konkav ise $f\left(\sum \lambda_i x_i\ \right) \geq \sum \lambda_i f(x_i)$ olur ($-f$'ye Jensen uygulanıp iki yan -1 ile çarpılır). En sık kullanılan özel hâl bütün ağırlıkların eşit alınmasıdır: $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$ seçilirse

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Yani konveks bir fonksiyonda **ortalamanın değeri, değerlerin ortalamasını aşmaz.** Bu tek satırdan, aşağıda göreceğimiz gibi, klasik ortalama eşitsizliklerinin çoğu çıkar.

15.3 Konveks Fonksiyonlarda Yerel ve Mutlak Minimum

Monotonluk ve Ekstremum Testleri bölümünde yerel ekstremumları bulmayı öğrendik; ama bir yerel minimumun mutlak minimum olup olmadığını anlamak için genellikle bütün adayları karşılaştırmak gerekiyordu. Konveks fonksiyonlarda bu karşılaştırmaya hiç gerek yoktur: **yerel olan zaten mutlaktır.**

Teorem 15.1 (Konveks Fonksiyonda Yerel Minimum Mutlaktır). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Bir $x_0 \in I$ noktasının f'nin **yerel** minimum noktası olması için gerek ve yeter koşul, onun f'nin **mutlak** minimum noktası olmasıdır.*

İspat.
(⇐) x_0 mutlak minimum noktası ise her $x \in I$ için $f(x_0) \leq f(x)$'tir; bu, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon(x_0) \cap I$ üzerinde de doğru olduğundan Tanım 7.1 gereği x_0 yerel minimum noktasıdır. (Mutlak ekstremum her zaman yereldir; bu yön konveksliği kullanmaz.)
(⇒) x_0 bir yerel minimum noktası olsun. Tanım 7.1 gereği öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki

$$x \in V_\varepsilon(x_0) \cap I \Longrightarrow f(x_0) \leq f(x).$$

*Bu koşula, aşağıda geri döneceğimiz için $(*)$ diyelim. Şimdi $y \in I$ **keyfî** olsun; amacımız $f(x_0) \leq f(y)$ göstermektir. $y = x_0$ ise söyleyecek bir şey yoktur, o hâlde $y \neq x_0$ varsayalım.*
Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_0 + \frac{1}{n}y$$

tanımlayalım. $\frac{1}{n} \in (0,1]$ olduğundan x_n, x_0 ile y'nin bir konveks birleşimidir; I bir aralık olduğundan $x_n \in I$'dir. Ayrıca

$$|\ x_n - x_0\ | = \left|\frac{1}{n}(y - x_0)\right| = \frac{|\ y - x_0\ |}{n}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Arşimet özelliği gereği (bkz. Analiz 1) $n > \dfrac{|\,y - x_0\,|}{\varepsilon}$ *olan bir* $n \in \mathbb{N}$ *vardır; böyle bir* n *sabitleyelim. O zaman* $|\,x_n - x_0\,| < \varepsilon$*, yani* $x_n \in V_\varepsilon(x_0) \cap I$*'dir ve* $(*)$ *gereği* $f(x_0) \le f(x_n)$*'dir. Öte yandan* f *konveks olduğundan,* $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ *ile*

$$f(x_n) \le \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x_0) + \frac{1}{n} f(y).$$

İki eşitsizliği birleştirip her iki yandan $\left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x_0)$ *çıkaralım:*

$$\frac{1}{n} f(x_0) \le \frac{1}{n} f(y).$$

$\frac{1}{n} > 0$ *olduğundan* n *ile çarpmak yönü bozmaz:* $f(x_0) \le f(y)$*.* $y \in I$ *keyfî olduğundan* x_0*,* f*'nin mutlak minimum noktasıdır (Tanım 7.2).*

■

İspatta $n \to \infty$ limitine gerek olmadığına dikkat edin: yeterince büyük **tek bir** n seçmek yetti, çünkü elde edilen $f(x_0) \le f(y)$ eşitsizliği n'den bağımsızdır. Konvekslik, x_0'ın minimum olduğu bilgisini ne kadar küçük olursa olsun bir komşuluktan alıp bütün aralığa taşımaktadır.

⚠ Maksimum için benzer bir sonuç yoktur

Teorem yalnızca **minimum** hakkındadır. Konveks bir fonksiyonun yerel maksimumu mutlak maksimum olmak zorunda değildir: $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[-1, 2]$ üzerinde konvekstir ve $x = -1$ bir yerel maksimum noktasıdır ($f(-1) = 1$, sağındaki yakın noktalarda f daha küçüktür), ama mutlak maksimum $x = 2$'de alınır: $f(2) = 4$. Doğru olan sonuç şudur: kapalı bir $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyonun mutlak maksimumu **uçlardan birinde** alınır; nedeni Lemma 15.1′dir — grafik uçları birleştiren kirişin altındadır ve kirişin en büyük değeri uçlardan birindedir.
Tanım kümesinin bir **aralık** olması da şarttır: $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ gibi bağlantısız bir kümede ispattaki x_n noktaları A'nın dışına düşer ve teoremin güvencesi ortadan kalkar. Somut bir karşı örnek için A üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2, -1] \\ -1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

alalım. A'nın iki parçasından birer nokta seçildiğinde aradaki konveks birleşimler A'ya düşmediğinden konvekslik eşitsizliği yalnızca aynı parçadaki noktalar için sorulur; orada da f sabit olduğundan eşitlikle sağlanır. Buna karşın $[-2, -1]$'in her noktası bir yerel minimum noktasıdır (f orada sabittir) ama mutlak minimum -1 değeriyle $[1, 2]$ üzerinde alınır.

💡 Kesin konvekslikte minimum tektir

f kesin konveks ve $x_1 \neq x_2$ iki mutlak minimum noktası olsun; ortak değere m diyelim. $\alpha = \frac{1}{2}$ ile kesin konvekslik

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) = m$$

verir; ama $\frac{x_1 + x_2}{2} \in I$ olduğundan bu, m'nin minimum olmasıyla çelişir. Öyleyse **kesin konveks bir fonksiyonun en çok bir minimum noktası vardır.** (Varlığı ayrı bir sorudur: e^x kesin konvekstir ama $\mathbb{R}$'de minimumu yoktur.)

15.4 Grafik Teğetin Üstündedir

Konveks bir fonksiyonun grafiği kirişlerin altında kalır. Türevlenebilir olduğunda ise ikinci bir "sıkışma" ortaya çıkar: grafik, her noktasındaki **teğetin üstünde** kalır. Bu, konveksliğin en kullanışlı analitik biçimidir; eşitsizlik ispatlarında sürekli karşımıza çıkacaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 15.2 (Konveks Fonksiyonun Grafiği Teğetin Üstündedir). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ konveks ve $x_0 \in I$ noktasında türevlenebilir olsun. O hâlde her $x \in I$ için*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

yani grafik, x_0'daki teğet doğrusunun (Tanım 2.4) üstünde ya da üzerinde kalır.

İspat.
$x = x_0$ ise iki taraf da $f(x_0)$'a eşittir; eşitsizlik sağlanır. Bundan sonra $x \in I$, $x \neq x_0$ olsun.
Adım 1: Konveksliğin fark oranına çevrilmesi. *$\alpha \in (0, 1]$ alalım ve $x_\alpha = \alpha x + (1 - \alpha)x_0 = x_0 + \alpha(x - x_0)$ diyelim; x_α, x ile x_0'ın konveks birleşimi olduğundan $x_\alpha \in I$'dir. Konvekslik $f(x_\alpha) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x_0)$ verir; her iki yandan $f(x_0)$ çıkarırsak*

$$f(x_\alpha) - f(x_0) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x_0) - f(x_0) = \alpha \left(f(x) - f(x_0) \right).$$

$\alpha > 0$ olduğundan α'ya bölmek yönü bozmaz:

$$\frac{f\left(x_0 + \alpha(x - x_0) \right) - f(x_0)}{\alpha} \leq f(x) - f(x_0), \qquad \alpha \in (0, 1].$$

Bu eşitsizliğe $(**)$ diyelim. Dikkat: sağ taraf α'dan bağımsızdır. Yani soldaki ifade, α ne olursa olsun sabit bir sayıyla sınırlıdır.
Adım 2: $\alpha \to 0^+$ limiti. *Soldaki ifadenin limitini dizisel ölçütle (bkz. Analiz 1) hesaplayalım. (α_n), $(0, 1]$ içinde ilerleyen ve $\alpha_n \to 0$ olan **herhangi** bir dizi olsun; $h_n = \alpha_n(x - x_0)$ diyelim. $x \neq x_0$ olduğundan $h_n \neq 0$'dır, $| h_n | = \alpha_n | x - x_0 | \to 0$'dır (bkz. Analiz 1) ve $x_0 + h_n = x_{\alpha_n} \in I$'dir. Soldaki ifadeyi fark oranı (Tanım 2.1) biçiminde yazalım:*

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{\alpha_n} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \cdot \frac{h_n}{\alpha_n} = (x - x_0) \cdot \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

f, x_0'da türevlenebilir olduğundan (Tanım 2.2) ve $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ olduğundan sağdaki fark oranı $f'(x_0)$'a gider; çarpım kuralıyla (bkz. Analiz 1) bütün ifade $f'(x_0)(x - x_0)$'a yakınsar. (α_n) dizisi keyfî olduğundan dizisel ölçüt

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f\left(x_0 + \alpha(x - x_0) \right) - f(x_0)}{\alpha} = f'(x_0)(x - x_0)$$

verir.
Adım 3: Eşitsizliğin limite taşınması. *$(**)$'da sol taraf her $\alpha \in (0, 1]$ için sabit $f(x) - f(x_0)$ sayısını aşmıyor; limitte sıralama korunduğundan (bkz. Analiz 1) $f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$, yani $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ olur.*
■

Konkav fonksiyonlar için eşitsizlik ters döner: f konkav ve x_0'da türevlenebilirse her $x \in I$ için $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, yani grafik teğetin **altında** kalır. ($-f$ konvekstir, teoremi ona uygulayıp iki yanı -1 ile çarpın.)

İki hazır sonuç

1. Kesin hâl. f kesin konveks, x_0'da türevlenebilir ve $x \neq x_0$ ise eşitsizlik kesindir. Gerçekten, $z = \dfrac{x + x_0}{2}$ için teorem $f(z) \geq f(x_0) + \frac{1}{2}f'(x_0)(x - x_0)$, kesin konvekslik ise $f(z) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x_0)$ verir; ikisini birleştirip $\frac{1}{2}$ ile sadeleştirmek $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ verir.
2. Kritik nokta doğrudan mutlak minimumdur. f konveks, x_0'da türevlenebilir ve $f'(x_0) = 0$ ise teorem her $x \in I$ için $f(x) \geq f(x_0)$ verir: x_0 **mutlak** minimum noktasıdır. Konveks fonksiyonlarda ekstremum testine gerek yoktur; kritik noktayı bulmak (Tanım 7.3) yeter — yani Fermat teoreminin (Teorem 7.1) ters yönü burada geçerlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

15.5 Kiriş Eğimlerinin Monotonluğu

Konvekslığin bütün türev ölçütleri tek bir geometrik gözlemden çıkar: **konveks bir fonksiyonda kiriş eğimleri, sağa gidildikçe artar.** Bunu üç noktalı bir eşitsizlik olarak yazacağız.

Önerme 15.2 (Eğimlerin Monotonluğu). *I bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ konveks olsun.*

1. *$a, x, b \in I$ ve $a < x < b$ ise*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

2. *Sabit bir $c \in I$ için $I \setminus \{c\}$ üzerinde tanımlı*

$$\varphi_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

fonksiyonu artandır (bkz. Analiz 1).

İspat.
(1) *$a < x < b$ olduğundan $\alpha = \dfrac{x-a}{b-a}$ sayısı tanımlıdır ve $0 < \alpha < 1$'dir (pay ve payda pozitif, pay paydadan küçük). Bu α ile*

$$(1-\alpha)a + \alpha b = a + \alpha(b-a) = a + (x-a) = x, \qquad 1-\alpha = \frac{(b-a)-(x-a)}{b-a} = \frac{b-x}{b-a}$$

olur; yani x, a ile b'nin α ağırlıklı konveks birleşimidir ve sağdaki eşitliği ispat boyunca kullanacağız. Konvekslik gereği

$$f(x) \leq (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b).$$

Bu temel eşitsizliğe $(\dagger)$ diyelim; üç eşitsizliğin üçü de ondan çıkacak.
Birinci eşitsizlik. *$(\dagger)$'nın iki yanından $f(a)$ çıkaralım:*

$$f(x)-f(a) \leq (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b) - f(a) = \alpha\,\big(\,f(b)-f(a)\,\big) = \frac{x-a}{b-a}\,\big(\,f(b)-f(a)\,\big).$$

$x - a > 0$ olduğundan iki yanı $x-a$'ya bölmek yönü bozmaz:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

İkinci eşitsizlik. *Bu kez $(\dagger)$'nın iki yanını -1 ile çarpıp $f(b)$ ekleyelim:*

$$f(b)-f(x) \geq f(b) - (1-\alpha)f(a) - \alpha f(b) = (1-\alpha)\,\big(\,f(b)-f(a)\,\big) = \frac{b-x}{b-a}\,\big(\,f(b)-f(a)\,\big).$$

$b - x > 0$ olduğundan iki yanı $b-x$'e bölelim:

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Üçüncü eşitsizlik (uçlar). *Bu iki eşitsizliği yan yana koymak istenen zinciri verir; özel olarak uçlar için $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$'tir. Böylece üç eşitsizliğin üçü de gösterilmiş oldu.*
(2) *$x, y \in I \setminus \{c\}$ ve $x < y$ olsun; $\varphi_c(x) \leq \varphi_c(y)$ göstereceğiz. Üç durum vardır.*
Hesaplarda, bir kesirde pay ve paydayı -1 ile çarpmanın değeri değiştirmediğini, yani $\dfrac{f(c)-f(t)}{c-t} = \dfrac{f(t)-f(c)}{t-c} = \varphi_c(t)$ olduğunu kullanacağız.
Durum A: *$c < x < y$. (1)'i $a = c$, orta nokta x, $b = y$ ile uygulayalım; birinci eşitsizlik doğrudan*

$$\varphi_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(y)-f(c)}{y-c} = \varphi_c(y)$$

verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Durum B: $x < c < y$. *(1)'i* $a = x$, *orta nokta* c, $b = y$ *ile uygulayalım. Zincirin uçlarını karşılaştıran eşitsizlik*

$$\varphi_c(x) = \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c} = \varphi_c(y)$$

verir.
Durum C: $x < y < c$. *(1)'i* $a = x$, *orta nokta* y, $b = c$ *ile uygulayalım. Bu kez orta ve sağ terimleri karşılaştıran ikinci eşitsizlik*

$$\varphi_c(x) = \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(c) - f(y)}{c - y} = \varphi_c(y)$$

verir. Üç durumda da $\varphi_c(x) \leq \varphi_c(y)$ *bulundu;* φ_c *artandır.*
■

Önermenin (2) maddesi bundan sonraki üç sonucun ortak anahtarıdır: konvekslik, "bir noktadan çizilen kesenlerin eğimi noktadan uzaklaştıkça artar" biçiminde okunabilir. Türev bu kesen eğimlerinin limiti olduğuna göre (Tanım 2.1), türevin de artan olmasını beklemek doğaldır.

15.6 Konvekslik ve Birinci Türev

Teorem 15.3 (Konvekslik ile Türevin Artanlığı Denktir). $I \subseteq \mathbb{R}$ *bir aralık ve* $f : I \to \mathbb{R}$ *türevlenebilir olsun.*

1. f *konvekstir* $\Leftrightarrow$ f' I *üzerinde artandır.*
2. f *konkavdır* $\Leftrightarrow$ f' I *üzerinde azalandır.*

Ayrıca f' *kesin artan ise* f *kesin konvekstir.*

İspat.
(1) $(\Rightarrow)$ f *konveks olsun.* $a, b \in I$, $a < b$ *alalım;* $f'(a) \leq f'(b)$ *göstereceğiz.* $x \in (a, b)$ *için Önerme 15.2 (1) gereği*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Ortadaki sayı x*'ten bağımsız bir sabittir. Soldaki ifadede* $x \to a^+$ *limitini alalım: bu,* f*'nin* a*'daki fark oranıdır ve limiti* $f'(a)$*'dır. Sağdaki ifade ise* $\dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ *olduğundan* f*'nin* b*'deki fark oranıdır ve* $x \to b^-$ *iken limiti* $f'(b)$*'dir. Limitte sıralama korunduğundan (bkz. Analiz 1)*

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b),$$

yani $f'(a) \leq f'(b)$*'dir.* $a < b$ *keyfî olduğundan* f' *artandır.*
(1) $(\Leftarrow)$ *Şimdi* f'*'nün* I *üzerinde artan olduğunu varsayalım ve* f*'nin konveks olduğunu gösterelim.* $x_1, x_2 \in I$ *ve* $\alpha \in [0, 1]$ *verilsin. Yozlaşmış hâllerde (*$x_1 = x_2$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$*) iki taraf birbirine eşittir; ayrıca eşitsizlik* x_1 *ile* x_2*'nin (*$\alpha \leftrightarrow 1 - \alpha$ *değişimiyle) yer değiştirmesi altında korunduğundan* $x_1 < x_2$ *ve* $\alpha \in (0, 1)$ *varsayabiliriz.* $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ *diyelim; bölümün başında hesapladığımız gibi*

$$x_\alpha - x_1 = (1 - \alpha)(x_2 - x_1) > 0, \qquad x_2 - x_\alpha = \alpha(x_2 - x_1) > 0,$$

yani $x_1 < x_\alpha < x_2$*'dir; ayrıca* $x_\alpha \in I$*'dir.*
f *türevlenebilir olduğundan* $[x_1, x_\alpha]$ *ve* $[x_\alpha, x_2]$ *kapalı aralıklarında sürekli (Teorem 3.1), iç kısımlarında türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremini (Teorem 8.2) her iki aralığa ayrı ayrı uygulayalım:*

$$f(x_\alpha) - f(x_1) = f'(c_1)(x_\alpha - x_1) = f'(c_1)(1 - \alpha)(x_2 - x_1) \qquad \text{bir } c_1 \in (x_1, x_\alpha) \text{ için,}$$

$$f(x_2) - f(x_\alpha) = f'(c_2)(x_2 - x_\alpha) = f'(c_2)\,\alpha\,(x_2 - x_1) \qquad \text{bir } c_2 \in (x_\alpha, x_2) \text{ için .}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$c_1 < x_\alpha < c_2$ *olduğundan* $c_1 < c_2$*'dir;* f' *artan olduğundan*

$$f'(c_1) \leq f'(c_2).$$

Bu eşitsizliğe (‡) *diyelim.*
Şimdi ispatlamak istediğimiz eşitsizliğin iki yanının farkını hesaplayalım; amaç

$$D = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) - f(x_\alpha) \geq 0$$

olduğunu göstermektir. $\alpha + (1-\alpha) = 1$ *olduğundan* $f(x_\alpha) = \alpha f(x_\alpha) + (1-\alpha) f(x_\alpha)$ *yazabiliriz; farkı düzenlemenin anahtarı budur:*

$$D = \alpha \left(f(x_1) - f(x_\alpha) \right) + (1-\alpha) \left(f(x_2) - f(x_\alpha) \right).$$

Yukarıdaki iki ortalama değer eşitliğini, yani $f(x_1) - f(x_\alpha) = -f'(c_1)(1-\alpha)(x_2 - x_1)$ *ve* $f(x_2) - f(x_\alpha) = f'(c_2)\,\alpha\,(x_2 - x_1)$ *eşitliklerini yerine koyalım:*

$$D = -\alpha(1-\alpha)(x_2-x_1) f'(c_1) + (1-\alpha)\alpha(x_2-x_1) f'(c_2) = \alpha(1-\alpha)(x_2-x_1) \left[f'(c_2) - f'(c_1) \right].$$

Çarpanları teker teker inceleyelim: $\alpha > 0$, $1-\alpha > 0$, $x_2 - x_1 > 0$ *ve* (‡) *gereği* $f'(c_2) - f'(c_1) \geq 0$. *Negatif olmayan sayıların çarpımı negatif olmadığından* $D \geq 0$, *yani*

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \right) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

x_1, x_2, α *keyfî olduğundan* f *konvekstir.*
Kesin hâl. f' *kesin artan ise* (‡)*'da eşitlik olamaz:* $c_1 < c_2$ *olduğundan* $f'(c_1) < f'(c_2)$*'dir. O hâlde yukarıdaki çarpımda bütün çarpanlar kesin pozitiftir ve* $D > 0$ *olur; yani* $x_1 \neq x_2$ *ve* $\alpha \in (0,1)$ *için eşitsizlik kesindir. Demek ki* f *kesin konvekstir.*
(2) $g = -f$ *diyelim.* f *konkavdır ancak ve ancak* g *konvekstir; (1) gereği bu da ancak ve ancak* $g' = -f'$ *artandır. Son olarak* $-f'$ *artandır ancak ve ancak* f' *azalandır:* $x < y$ *için* $-f'(x) \leq -f'(y) \Leftrightarrow f'(y) \leq f'(x)$. *Zinciri birleştirirsek* f *konkavdır* $\Leftrightarrow$ f' *azalandır.*
■

> **i** İspatın verdiği fazladan bilgi
>
> ($\Rightarrow$) yönünde yalnızca $f'(a) \leq f'(b)$ değil, daha ayrıntılı olarak $f'(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$ zincirini elde ettik: **uçlardaki teğet eğimleri kirişin eğimini kuşatır.** Soldaki eşitsizlik doğrudan Teorem 15.2'ten de çıkar; $x = b$, $x_0 = a$ alıp $b - a > 0$ ile bölmek yeter.

15.7 İkinci Türev Ölçütü

Konveksliği doğrudan tanımdan denetlemek zahmetlidir. Bir önceki teorem konveksliği f''nün monotonluğuna indirgemişti; f''nün monotonluğunu da monotonluk testiyle (Sonuç 8.3) f'''nün işaretine indirgeyebiliriz. Böylece çok daha kullanışlı bir ölçüt elde ederiz.

Teorem 15.4 (İkinci Türev Ölçütü). $I \subseteq \mathbb{R}$ *bir açık aralık ve* $f : I \to \mathbb{R}$ *iki kez türevlenebilir olsun (Tanım 6.1).*

1. f *konvekstir* $\Leftrightarrow$ *her* $x \in I$ *için* $f''(x) \geq 0$.
2. f *konkavdır* $\Leftrightarrow$ *her* $x \in I$ *için* $f''(x) \leq 0$.

Ayrıca her $x \in I$ *için* $f''(x) > 0$ *ise* f *kesin konvekstir; her* $x \in I$ *için* $f''(x) < 0$ *ise* f *kesin konkavdır.*

İspat.
(1) ($\Rightarrow$) f *konveks olsun. Teorem 15.3 gereği* f', I *üzerinde artandır. Bir* $x \in I$ *sabitleyelim. İkinci türevin tanımı gereği*

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

limiti vardır. I açık olduğundan yeterince küçük $|\ h\ |$ için $x+h \in I$'dir. $h>0$ ise f''nün artanlığı $f'(x+h)-f'(x)\geq 0$ verir ve payda pozitiftir; $h<0$ ise $f'(x+h)-f'(x)\leq 0$'dır ve payda negatiftir. Her iki hâlde de oran negatif değildir: x'in delinmiş bir komşuluğundaki her h için

$$\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\geq 0.$$

Limitte sıralama korunduğundan (bkz. Analiz 1) $f''(x)\geq 0$'dır. x keyfî olduğundan iddia bütün I üzerinde doğrudur.
***(1) ($\Leftarrow$)** Her $x\in I$ için $f''(x)\geq 0$ olsun. Teorem 15.3 gereği f''nün artan olduğunu göstermek yeter. $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$ alalım. f iki kez türevlenebilir olduğundan f', $[x_1,x_2]$ üzerinde türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir (Teorem 3.1). Ortalama değer teoremini (Teorem 8.2) **f' fonksiyonuna** uygulayalım: öyle bir $c\in(x_1,x_2)$ vardır ki*

$$\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=(f')'(c)=f''(c).$$

Varsayım gereği $f''(c)\geq 0$ ve $x_2-x_1>0$ olduğundan

$$f'(x_2)-f'(x_1)=f''(c)(x_2-x_1)\geq 0,\qquad \text{yani}\qquad f'(x_1)\leq f'(x_2).$$

Öyleyse f' artandır ve Teorem 15.3 gereği f konvekstir.
***Kesin hâl.** Her $x\in I$ için $f''(x)>0$ olsun. Yukarıdaki aynı hesapta $f''(c)>0$ ve $x_2-x_1>0$ olduğundan $f'(x_1)<f'(x_2)$ çıkar: f' **kesin** artandır. Teorem 15.3'ın son cümlesi gereği f kesin konvekstir.*
***(2)** $g=-f$ olsun; türevin doğrusallığı gereği (Teorem 3.2) $g''=-f''$'tür. O hâlde f konkavdır $\Leftrightarrow$ g konvekstir $\Leftrightarrow$ her x için $g''(x)=-f''(x)\geq 0\Leftrightarrow$ her x için $f''(x)\leq 0$. Kesin hâl de aynı biçimde g'ye taşınır.*
■

> ⚠ Kesin konvekslik için $f''>0$ yeterlidir ama gerekli değildir
>
> Teorem 15.4'in son cümlesi tek yönlüdür: $f''>0$ kesin konveksliği **getirir**, ama kesin konveks bir fonksiyonun ikinci türevi bazı noktalarda sıfır olabilir.
> Klasik örnek $f(x)=x^4$'tür: $f''(x)=12x^2$ olduğundan $f''(0)=0$'dır, yani "her yerde $f''>0$" koşulu sağlanmaz. Buna karşın $f'(x)=4x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır ($x<y$ iken $x^3<y^3$'tür), dolayısıyla Teorem 15.3'ın son cümlesi gereği f **kesin konvekstir.**
> Doğru ifade şudur: f kesin konveks ise $f''\geq 0$'dır ama f'' tek tek noktalarda sıfırlanabilir. Bu ayrım bir sonraki bölümde belirleyici olacaktır: $f''(x_0)=0$ olması x_0'ın bir dönüm noktası olduğunu göstermez — x^4'ün 0'ın iki yanında da konveks kalması bunun kanıtıdır.

15.8 Temel Örnekler

Şimdi elimizdeki ölçütü tanıdık fonksiyonlara uygulayalım; bu listedeki sonuçlar bundan sonra sık sık kullanılacaktır.

Örnek 15.1 (Tanıdık Fonksiyonların Konveksliği). Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen aralıklardaki konvekslik durumunu belirleyiniz: e^x; x^2; $-\ln x$; x^α $(\alpha>1)$; $\ln x$; $\sqrt{x}$; $\dfrac{1}{x}$; $|\ x\ |$; x^3.

Çözüm.
$f(x)=e^x$ ($\mathbb{R}$ üzerinde). Teorem 5.2 gereği $f'(x)=f''(x)=e^x>0$'dır; Teorem 15.4 gereği e^x **bütün $\mathbb{R}$ üzerinde kesin konvekstir.**
$f(x)=x^2$ ($\mathbb{R}$ üzerinde). $f''(x)=2>0$; kesin konveks. Daha genel olarak $f(x)=ax^2+bx+c$ için $f''(x)=2a$'dır: $a>0$ ise kesin konveks, $a<0$ ise kesin konkav, $a=0$ ise (doğru) hem konveks hem konkavdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(x) = -\ln x$ ($(0,\infty)$ üzerinde). Teorem 5.1 gereği $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$ ve $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$'dır: $-\ln x$ **kesin konvekstir.** Buradan hemen $\ln x$'in $(0,\infty)$ üzerinde **kesin konkav** olduğu çıkar; bunu aşağıda ortalama eşitsizliklerinde kullanacağız.
$f(x) = x^\alpha$ ($(0,\infty)$ üzerinde). Teorem 5.3 gereği $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$'dir ve $x > 0$ için $x^{\alpha-2} > 0$'dır. $\alpha > 1$ ise $\alpha(\alpha-1) > 0$: **kesin konveks** (örneğin x^3, $x^{5/2}$, x^π). $0 < \alpha < 1$ ise $\alpha - 1 < 0$ olduğundan $f'' < 0$: **kesin konkav**; özel olarak $\sqrt{x} = x^{1/2}$ için $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}} < 0$'dır. Aynı biçimde $\ln x$ için $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: kesin konkav.
$f(x) = \dfrac{1}{x}$. $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$'tür: $(0,\infty)$ üzerinde $f'' > 0$ (kesin konveks), $(-\infty, 0)$ üzerinde $f'' < 0$ (kesin konkav). $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ bir aralık olmadığından tanım kümesinin tamamı üzerinde konvekslikten söz edilemez.
$f(x) = \mid x \mid$ ($\mathbb{R}$ üzerinde). 0'da türevlenebilir olmadığından ikinci türev ölçütü uygulanamaz; ama konvekslik tanımdan görülür. Üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) ve $\alpha, 1-\alpha \geq 0$ olması gereği

$$\mid \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \mid \leq \mid \alpha x_1 \mid + \mid (1-\alpha)x_2 \mid = \alpha \mid x_1 \mid + (1-\alpha) \mid x_2 \mid .$$

Kesin konveks değildir: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ için iki taraf da $\frac{3}{2}$'dir (grafiğin $[1,2]$ üzerindeki parçası kirişle çakışır).
$f(x) = x^3$ ($\mathbb{R}$ üzerinde). $f''(x) = 6x$'tir: $x > 0$ için pozitif, $x < 0$ için negatif. Öyleyse x^3, $[0,\infty)$ üzerinde konveks, $(-\infty, 0]$ üzerinde konkavdır; $\mathbb{R}$'nin tamamında **ne konveks ne konkavdır.** 0 noktası eğrilik yönünün değiştiği yerdir.
■

Son iki örnek önemli bir noktayı gösteriyor: konvekslik bir **aralığa göre** tanımlı bir kavramdır; bir fonksiyon tanım kümesinin bir parçasında konveks, başka bir parçasında konkav olabilir. Grafik çizerken yapılacak iş de tam olarak bu parçaları ayırmaktır.

Örnek 15.2 (Kaydırılmış Sinüs Fonksiyonunun Konveksliği). $f(x) = 3 + \sin x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki konvekslik durumunu belirleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: Birinci ve ikinci türevi bulalım. Sabitin türevi sıfır olduğundan ve sin'in türevi cos olduğundan (Teorem 3.2, Teorem 5.4)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3 + \sin x\right) = \cos x, \qquad f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -\sin x.$$

Fonksiyon her mertebeden türevlenebilirdir; özel olarak C^2 sınıfındadır (Tanım 6.2), dolayısıyla Teorem 15.4 uygulanabilir.
Adım 2: f'''nün işaretini inceleyelim. İşaret tamamen $\sin x$'in işaretine bağlıdır.

- $(0,\pi)$ **aralığında** $\sin x > 0$, dolayısıyla $f''(x) = -\sin x < 0$'dır; Teorem 15.4 (2) gereği f burada **kesin konkavdır.**
- $(\pi, 2\pi)$ **aralığında** $\sin x < 0$, dolayısıyla $f''(x) = -\sin x > 0$'dır; Teorem 15.4 (1) gereği f burada **kesin konvekstir.**

$x = 0$, $x = \pi$ ve $x = 2\pi$ noktalarında $f''(x) = 0$'dır; bunlar işaretin değiştiği sınırlardır. Eğrilik yönü kapalı aralıklara da taşınır: f, $[0,\pi]$ üzerinde kesin konkav, $[\pi, 2\pi]$ üzerinde kesin konvekstir. (Uçlar için ayrıca hesap gerekmez: Teorem 15.3 ile $f' = \cos$ fonksiyonunun $[\pi, 2\pi]$ üzerinde artan, $[0,\pi]$ üzerinde azalan olduğu görülür.)
Adım 3: Sonuç. f'nin eğrilik yönü $x = \pi$'de değişir: $(0,\pi)$ üzerinde konkav (grafik kubbe gibi, kirişlerin üstünde), $(\pi, 2\pi)$ üzerinde konvekstir (grafik çanak gibi, kirişlerin altında). Dolayısıyla $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 3)$ noktası eğriliğin yön değiştirdiği noktadır; bu tür noktalara **dönüm noktası** (inflection point) denir ve bir sonraki bölümün konusudurlar.
Aralığın **tamamında** f ne konvekstir ne konkav; bunu tanımdan doğrudan da görebiliriz. $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 3 = \frac{f(0)+f(\pi)}{2}$ olması konvekslik eşitsizliğini, $x_1 = \pi$, $x_2 = 2\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 < 3 = \frac{f(\pi)+f(2\pi)}{2}$ olması da konkavlık eşitsizliğini bozar.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

15.9 Konveks Fonksiyonlar Süreklidir

Bölümün başında konvekslik tanımının süreklilik istemediğini söylemiştik; şaşırtıcı olan, **istemesine gerek olmamasıdır.** Anahtar Önerme 15.2 (2)'dir: bir noktadan çizilen kesen eğimleri artan olduğundan, yakın noktalarda fark oranı iki sabit sayı arasında sıkışır ve fonksiyon o noktada "fazla oynayamaz".

Sonuç 15.1 (Konveks Fonksiyon İç Noktalarda Süreklidir). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ konveks olsun. x_0, I'nin bir **iç noktası** ise (x_0'ın bir komşuluğu I'nin içinde kalıyorsa) f, x_0'da süreklidir. Özel olarak, bir **açık** aralıkta konveks olan her fonksiyon o aralıkta süreklidir.*

İspat.
x_0, I'nin iç noktası olsun; o hâlde $[a,b] \subseteq I$ ve $a < x_0 < b$ olacak biçimde a, b seçilebilir. Önerme 15.2 (2) gereği

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}$$

fonksiyonu artandır. Öyleyse $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ olan her x için

$$\varphi(a) \le \varphi(x) \le \varphi(b)$$

olur ($a \le x \le b$ olduğu ve üçü de $I \setminus \{x_0\}$'da bulunduğu için). $m = \varphi(a)$, $K = \varphi(b)$ ve $M = \max\{|\, m \,|, |\, K \,|\}$ diyelim. $m \le \varphi(x) \le K$ olduğundan $|\, \varphi(x) \,| \le M$'dir; yani her $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ için

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \le M, \qquad \text{yani} \qquad |\, f(x) - f(x_0) \,| \le M \,|\, x - x_0 \,|\,.$$

Bu eşitsizlik $x = x_0$ için de (iki taraf da sıfır olduğundan) doğrudur; demek ki her $x \in [a,b]$ için geçerlidir. Şimdi sürekliliği ε–δ diliyle gösterelim (bkz. Analiz 1). $\varepsilon > 0$ verilsin ve

$$\delta = \min\left\{ \frac{\varepsilon}{M+1}, x_0 - a, b - x_0 \right\} > 0$$

alalım (M yerine $M+1$ yazmamızın tek nedeni $M = 0$ hâlinde bölmeyi anlamlı kılmaktır). $x \in I$ ve $|\, x - x_0 \,| < \delta$ olsun; $\delta \le x_0 - a$ ve $\delta \le b - x_0$ olduğundan $x \in [a,b]$'dir ve yukarıdaki kestirim uygulanabilir:

$$|\, f(x) - f(x_0) \,| \le M \,|\, x - x_0 \,| \le (M+1) \,|\, x - x_0 \,| < (M+1)\,\delta \le (M+1) \cdot \frac{\varepsilon}{M+1} = \varepsilon.$$

Demek ki f, x_0'da süreklidir. I açık bir aralık ise her noktası iç noktadır; öyleyse f bütün I üzerinde süreklidir.
■

⚠ Uç noktalarda süreklilik bozulabilir

Sonucun "iç nokta" koşulu kaldırılamaz. $I = [0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon konvekstir: değerleri negatif olmadığından konvekslik eşitsizliğinin sağ tarafı her zaman ≥ 0'dır; sol taraf ise ancak $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = 0$ iken, yani ağırlığı sıfır olmayan bütün noktalar 0 iken 1 değerini alır, o hâlde de sağ taraf 1'e eşittir. Öteki bütün hâllerde sol taraf 0'dır.
Buna karşın f, $x_0 = 0$ uç noktasında sürekli değildir: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. Demek ki konvekslik uçlarda süreklilik güvencesi vermez; verdiği tek şey iç noktalardaki sürekliliktir.

i Tek yönlü türevler de vardır

Sonuç 15.1'nin ispatındaki kestirim biraz daha ileri götürülebilir. φ artan ve $(x_0, b]$ üzerinde alttan $\varphi(a)$ ile sınırlı olduğundan, monoton fonksiyonların tek yönlü limitleri hakkındaki sonuç (bkz. Analiz 1) gereği $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \varphi(x)$ limiti vardır ve sonludur; benzer biçimde φ, $[a, x_0)$ üzerinde üstten $\varphi(b)$ ile sınırlı olduğundan $f'_-(x_0)$ de vardır. $x < x_0 < y$ için $\varphi(x) \le \varphi(y)$ olduğundan $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$'dır.
Yani **konveks bir fonksiyonun her iç noktada iki tek yönlü türevi vardır** (Tanım 2.6) ve soldaki sağdakini aşmaz. $f(x) = |\,x\,|$ örneğinde $f'_-(0) = -1 < 1 = f'_+(0)$'dır; ikisi de vardır ama eşit olmadıklarından f, 0'da türevlenebilir değildir.

15.10 Uygulama: Ortalama Eşitsizlikleri

Jensen eşitsizliğinin en güzel yanı, tek bir konveks fonksiyondan bütün bir eşitsizlik ailesi üretmesidir. Şimdi $-\ln$ fonksiyonunun konveksliğinden iki klasik sonucu çıkaralım.

Örnek 15.3 (Aritmetik ve Geometrik Ortalama Eşitsizliği). $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ olsun. **Aritmetik ortalama** A ile **geometrik ortalama** G

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \qquad G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

biçiminde tanımlanır. $G \le A$ olduğunu ve eşitliğin ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ iken sağlandığını gösteriniz.

Çözüm.
Eşitsizlik. Örnek 15.1'nde $f(x) = -\ln x$ fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerinde kesin konveks olduğunu görmüştük. Jensen eşitsizliğini (Önerme 15.1) $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$ ağırlıklarıyla yazıp iki yanı -1 ile çarpalım (eşitsizlik yön değiştirir):

$$\ln A \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \frac{1}{n}\ln\left(\, x_1 x_2 \cdots x_n \,\right) = \ln\Big(\, (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \,\Big) = \ln G.$$

Burada logaritmanın çarpımı toplama çevirmesini ve $\ln(t^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln t$ özelliğini kullandık. $\ln$ kesin artan olduğundan (türevi $\frac{1}{x} > 0$'dır; Sonuç 8.3) $\ln A \ge \ln G$ eşitsizliği $A \ge G$ demektir.
Eşitlik durumu. Bunu Teorem 15.2'in konkav hâliyle bulalım. $\ln$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde kesin konkavdır ve $x_0 = 1$ noktasında $\ln 1 = 0$, $(\ln)'(1) = 1$'dir; teğet eşitsizliği (konkav hâlde grafik teğetin altındadır) her $t > 0$ için

$$\ln t \le \ln 1 + 1 \cdot (t - 1) = t - 1$$

verir ve kesin konkavlık gereği eşitlik ancak $t = 1$ iken sağlanır. Bunu her i için $t = \dfrac{x_i}{G}$ ile yazıp toplayalım. $G^n = x_1 x_2 \cdots x_n$ olduğundan sol tarafın toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{G} = \ln \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{G^n} = \ln 1 = 0,$$

sağ tarafın toplamı ise $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{G} - 1\right) = \frac{nA}{G} - n$'dir. Öyleyse $0 \le n\left(\dfrac{A}{G} - 1\right)$, yani $A \ge G$; eşitsizliği bu kez teğet yöntemiyle elde ettik.
Eşitlik ancak toplanan eşitsizliklerin hepsinde eşitlik varken, yani her i için $x_i = G$ iken olabilir; bu da bütün x_i'lerin eşit olması demektir. Tersine hepsi eşitse $A = G = x_1$ olur. ($n = 2$ hâlinde eşitsizlik $\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2}$, yani $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \ge 0$'dır.)
■

Aynı fikir eşit olmayan ağırlıklarla çalıştırıldığında, ileride integral eşitsizliklerinde (Hölder ve Minkowski) temel taşı olacak bir sonuç verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 15.4 (Ağırlıklı Ortalama ve Young Eşitsizliği). a) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ve $x_1, \ldots, x_n > 0$ olsun. **Ağırlıklı aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğini**

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

ispatlayınız.
b) $p, q > 1$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Her $a, b \geq 0$ için **Young eşitsizliğini**

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

ispatlayınız.

Çözüm.
a) $f(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde konvekstir. Jensen eşitsizliğini (Önerme 15.1) verilen λ_i ağırlıklarıyla yazıp iki yanı -1 ile çarpalım:

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\, x_i^{\lambda_i} \,\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}\right).$$

Burada $\lambda \ln x = \ln(x^\lambda)$ ve logaritmanın çarpımı toplama çevirmesi kullanıldı. ln kesin artan olduğundan eşitsizlik logaritmaların içindeki sayılara taşınır ve $\prod x_i^{\lambda_i} \leq \sum \lambda_i x_i$ bulunur. $\lambda_i = \frac{1}{n}$ alındığında bu, Örnek 15.3'daki eşitsizliğin ta kendisidir.
b) $a = 0$ ise sol taraf 0, sağ taraf $\dfrac{b^q}{q} \geq 0$'dır; $b = 0$ hâli de aynıdır. Bundan sonra $a, b > 0$ olsun. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ve $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q} > 0$ olduğundan (a) şıkkını $n = 2$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{p}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{q}$ ağırlıkları ve $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$ seçimiyle uygulayabiliriz:

$$ab = \left(\, a^p\right)^{1/p} \left(\, b^q\right)^{1/q} \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

$p = q = 2$ özel hâli $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ verir; bu da $(a - b)^2 \geq 0$'ın başka bir yazılışıdır. (a) şıkkı $-\ln$'in kesin konveksliğinden geldiğinden eşitlik ancak $x_1 = x_2$, yani $a^p = b^q$ iken sağlanır.
■

15.11 Alıştırmalar

Alıştırma 15.1 (Konvekslik Üzerine). a) $f(x) = x^4$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde kesin konveks olduğunu, $f''(0) = 0$ olmasına rağmen gösteriniz.
b) $f, g : I \to \mathbb{R}$ konveks ve $c > 0$ olsun. $f + g$, cf ve $\max\{f, g\}$ fonksiyonlarının da konveks olduğunu gösteriniz.
c) $f : I \to \mathbb{R}$ konveks, $J \supseteq f(I)$ bir aralık ve $g : J \to \mathbb{R}$ hem artan hem konveks olsun. $g \circ f$ bileşkesinin konveks olduğunu gösteriniz.
d) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyiniz.
e) $p \geq 1$ ve $a, b \geq 0$ olsun. $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p \leq \dfrac{a^p + b^p}{2}$ eşitsizliğini ispatlayınız.
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks ve üstten sınırlı ise f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
a) $f'(x) = 4x^3$ ve $f''(x) = 12x^2$'dir; $f''(0) = 0$ olduğundan Teorem 15.4'in "$f'' > 0$" koşulu $\mathbb{R}$'nin tamamında sağlanmaz. Buna karşın $f'' \geq 0$ her yerde doğru olduğundan f **konvekstir.** Kesinliği Teorem 15.3 ile elde edelim: $f'(x) = 4x^3$'ün kesin artan olduğunu göstermek yeter. $x < y$ için $y^3 - x^3 = (y - x)\left(\, y^2 + xy + x^2 \,\right)$'dir ve $y^2 + xy + x^2 = \left(\, y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}$ ifadesi ancak $x = y = 0$ iken sıfır olur; $x < y$ olduğundan bu olamaz, çarpan kesin pozitiftir. $y - x > 0$ olduğundan $y^3 > x^3$'tür: f' kesin artandır ve x^4 **kesin konvekstir.** Demek ki "f'' bir noktada sıfırlanınca kesin konvekslik bozulur" sanısı yanlıştır.

b) $x_1, x_2 \in I$, $\alpha \in [0,1]$ ve $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ olsun.
Toplam ve pozitif katsayıyla çarpım. f ile g'nin konvekslik eşitsizliklerini taraf tarafa toplayıp terimleri gruplamak $(f+g)(x_\alpha) \le \alpha(f+g)(x_1) + (1-\alpha)(f+g)(x_2)$ verir. Benzer biçimde $c > 0$ olduğundan f'nin eşitsizliğini c ile çarpmak yönü bozmaz ve cf'nin konveksliği çıkar. ($c < 0$ için bu adım çalışmaz; nitekim $-f$ konveks değil konkavdır.)
Maksimum. $h = \max\{f, g\}$ olsun. $f \le h$ ve $g \le h$ olduğundan

$$f(x_\alpha) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \le \alpha h(x_1) + (1-\alpha) h(x_2)$$

olur ve aynı zincir g için de yazılır. İki sayının her biri bir S sayısını aşmıyorsa maksimumları da S'yi aşmaz; öyleyse $h(x_\alpha) \le \alpha h(x_1) + (1-\alpha)h(x_2)$'dir: h konvekstir. (Minimum için aynı şey doğru değildir: $f(x) = x$ ve $g(x) = -x$ konvekstir ama $\min\{f,g\}(x) = -\mid x \mid$ konkavdır.)
c) $x_1, x_2 \in I$, $\alpha \in [0,1]$ ve $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ olsun. f konveks olduğundan $f(x_\alpha) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$'dir. Sağ taraf, $f(x_1), f(x_2) \in J$ noktalarının bir konveks birleşimi ve J bir aralık olduğundan J'dedir; dolayısıyla g orada tanımlıdır. Önce g'nin **artan** olmasını, sonra **konveks** olmasını kullanalım:

$$(g\circ f)(x_\alpha) \le g\,\big(\ \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)\ \big) \le \alpha (g\circ f)(x_1) + (1-\alpha)(g\circ f)(x_2).$$

Yani $g \circ f$ konvekstir; örneğin f konveks ise e^f de konvekstir. g'nin artan olması şarttır: $g(t) = -t$ konvekstir ama azalandır ve $-x^2$ konveks değildir.
d) $1 + x^2 \ge 1 > 0$ olduğundan f her x için tanımlıdır. Zincir kuralıyla (Teorem 4.1, Teorem 5.1) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, bölüm kuralıyla (Teorem 3.2) da

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

bulunur. Payda her zaman pozitiftir; işareti $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ belirler:

- $-1 < x < 1$ için $f''(x) > 0$: f, $[-1,1]$ üzerinde (kesin) konvekstir.
- $\mid x \mid > 1$ için $f''(x) < 0$: f, $(-\infty, -1]$ ve $[1, \infty)$ aralıklarının her birinde (kesin) konkavdır.
- $x = \pm 1$ noktalarında f'' işaret değiştirir; eğrilik yönü buralarda döner.

e) $p = 1$ ise iki taraf da $\dfrac{a+b}{2}$'ye eşittir; $p > 1$ olsun. $a, b > 0$ hâlinde, Örnek 15.1'nde $g(x) = x^p$'nin $(0,\infty)$ üzerinde konveks olduğunu görmüştük ($g''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$); konvekslik tanımını $x_1 = a$, $x_2 = b$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ile yazmak istenen eşitsizliği doğrudan verir. Uç hâller: $a = b = 0$ ise iki taraf da 0'dır; $a = 0$, $b > 0$ ise (ya da tersi) eşitsizlik $\dfrac{b^p}{2^p} \le \dfrac{b^p}{2}$, yani $2^p \ge 2$ hâline gelir ve $p \ge 1$ olduğundan doğrudur. Aynı akıl yürütme Jensen eşitsizliğiyle (Önerme 15.1) n sayıya genişletilir: $a_i > 0, p \ge 1$ için $\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^p \le \frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}$.
f) f konveks ve her x için $f(x) \le C$ olsun. f sabit değilse $f(a) \ne f(b)$ olan $a < b$ noktaları vardır; $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \ne 0$ diyelim.
Durum $m > 0$. $x > b$ için Önerme 15.2 (1)'i $a < b < x$ üçlüsüne uygulayalım; zincirin **uçlarını** karşılaştıran eşitsizlik $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ verir ve $x - b > 0$ olduğundan

$$f(x) \ge f(b) + m(x-b) \qquad (x > b).$$

$m > 0$ olduğundan sağ taraf x büyüdükçe sınırsız büyür: $x > b + \dfrac{C - f(b)}{m}$ alırsak $f(x) > C$ olur ki bu C'nin üst sınır olmasıyla çelişir.
Durum $m < 0$. Bu kez $x < a$ alalım. Önerme 15.2 (1)'i $x < a < b$ üçlüsüne uygulayınca zincirin **uçlarını** karşılaştıran eşitsizlik $\dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$ verir; $a - x > 0$ olduğundan iki yanı $a - x$ ile çarpmak $f(x) \ge f(a) + m(x-a)$ verir. $m < 0$ ve $x - a < 0$ olduğundan $m(x-a) > 0$'dır ve x küçüldükçe sınırsız büyür: $x < a + \dfrac{C - f(a)}{m}$ alındığında (negatif m ile bölme eşitsizliğin yönünü çevirir) $f(x) > C$ olur; yine çelişki.
Her iki durumda da çelişki çıktığından $f(a) = f(b)$ olmalıdır. $a < b$ keyfî olduğundan f sabittir. (Aynı sonuç alttan sınırlılık için doğru **değildir**: $f(x) = e^x$ konvekstir, alttan 0 ile sınırlıdır ve sabit değildir.)

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Bu bölümde eğrilik yönünü tanımladık ve türevin diline çevirdik: konvekslik, f''nün artan ve f'''nün negatif olmaması demektir. Geriye eğrilik yönünün **değiştiği** noktalar kaldı; $3 + \sin x$ örneğinde $x = \pi$'nin, $\ln(1 + x^2)$ örneğinde $x = \pm 1$'in böyle noktalar olduğunu gördük, x^4 örneği ise $f''(x_0) = 0$ olmasının tek başına yetmediğini gösterdi. Bu noktaları bir sonraki bölümde inceleyeceğiz: Dönüm Noktaları.

 CC BY-NC-SA 4.0

16. Dönüm Noktaları

Bir önceki bölümde, Konveks ve Konkav Fonksiyonlar başlığı altında, bir fonksiyonun grafiğinin hangi yöne "büküldüğünü" ikinci türevin işaretinden okumayı öğrendik: $f'' \geq 0$ olan aralıklarda grafik yukarı doğru bükülür (konveks), $f'' \leq 0$ olan aralıklarda aşağı doğru bükülür (konkav). Orada incelediğimiz $f(x) = 3 + \sin x$ örneğinde (Örnek 15.2) bükülme yönünün $[0, 2\pi]$ aralığında bir kez değiştiğini görmüştük: $f''(x) = -\sin x$ olduğundan f, $(0, \pi)$ üzerinde konkav, $(\pi, 2\pi)$ üzerinde konvekstir; eğrilik tam $x = \pi$ noktasında yön değiştirir ve $(\pi, 3)$ noktası bu değişimin gerçekleştiği yerdir.
İşte bu bölüm, o "yön değiştirme" noktalarının kendisini konu alıyor. Bunlara **dönüm noktası** (inflection point) diyoruz. Dönüm noktaları, bir grafiğin karakterini belirleyen az sayıdaki özel noktadan biridir: yerel ekstremumlar grafiğin nerede tepe ya da çukur yaptığını söylerken, dönüm noktaları grafiğin nerede bükülme yönünü değiştirdiğini söyler. İkisi birlikte, fonksiyonun kabaca nasıl bir eğri çizdiğini anlatmaya çoğu zaman yeter.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: dönüm noktasının kesin tanımını ve tanımın ikinci türevin varlığını **gerektirmediğini**; iki kez türevlenebilen fonksiyonlar için $f''(x_0) = 0$ gerek koşulunu ve bunun Teorem 7.1 üzerinden nasıl ispatlandığını; bu koşulun **yeter olmadığını**; işaret değişimine ve üçüncü türeve dayanan iki yeter koşulu; bunları kapsayan genel bir tek mertebe ölçütünü; türevin bulunmadığı (hatta düşey teğetli) dönüm noktalarını; ve son olarak, dönüm noktasında teğetin eğriyi neden kestiğini.
Yöntem, ekstremum incelemesinde kullandığımızın tıpatıp aynısıdır; yalnızca bir mertebe yukarı kayar. Orada f''nün sıfır yerlerini aday olarak toplayıp f''nün işaretini incelemiştik; burada f'''nün sıfır yerlerini (ve f'''nün var olmadığı noktaları) aday olarak toplayıp f'''nün işaretini inceleyeceğiz. Bu paralellik yalnızca bir benzetme değildir: birazdan göreceğiniz gibi, f türevlenebilir olduğunda dönüm noktası aslında f' fonksiyonunun bir ekstremum noktasıdır.

16.1 Dönüm Noktası Kavramı

Sezgisel olarak dönüm noktası, eğriyi üzerinde yürüyerek geçen bir gözlemcinin direksiyonu sola çevirmekten sağa çevirmeye (ya da tersine) geçtiği noktadır. Bu sezgiyi konvekslik diliyle yazmak kolaydır: noktanın solunda fonksiyon konveks, sağında konkav olmalıdır — ya da tam tersi.

Tanım 16.1 (Dönüm Noktası). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve x_0, I'nın bir iç noktası olsun. f'nin x_0'da sürekli olduğunu varsayalım. Eğer öyle bir $\delta > 0$ varsa ki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ olsun ve

- f, $(x_0 - \delta, x_0]$ üzerinde konveks, $[x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde konkav;

ya da

- f, $(x_0 - \delta, x_0]$ üzerinde konkav, $[x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde konveks

ise, x_0 noktasına f'nin bir **dönüm noktası** (inflection point) denir. Grafik üzerindeki $(x_0, f(x_0))$ noktasına da çoğu zaman aynı ad verilir. Kısaca: x_0, eğriliğin yön değiştirdiği noktadır.

Tanımın üç ayrıntısına dikkat edelim.
Birincisi: tanım f'''nün varlığını gerektirmez. Tanımda geçen tek kavram konveksliktir ve konvekslik türevden bağımsız olarak, yalnızca kiriş eşitsizliğiyle tanımlanmıştı (Tanım 15.1, Tanım 15.2). Dolayısıyla bir fonksiyonun ikinci türevi hiçbir yerde bulunmasa bile dönüm noktası olabilir. Dahası, birinci türev bile gerekmez: bölümün ilerisinde $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonunun 0'da türevlenemediği hâlde orada bir dönüm noktası bulunduğunu göreceğiz. İkinci türev, dönüm noktalarını **bulmak** için kullandığımız bir araçtır; kavramın kendisinin parçası değildir.
İkincisi: süreklilik şartı gereklidir. Bir fonksiyon $(x_0 - \delta, x_0]$ üzerinde konveks, $[x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde konkav olabilir ama x_0'da sıçrama yapabilir; böyle bir noktada "eğrilik yön değiştirdi" demek anlamlı olmaz, çünkü eğri zaten kopmuştur. Bu yüzden tanıma x_0'da süreklilik koşulunu koyduk.
Üçüncüsü: x_0 bir iç nokta olmalıdır. Aralığın uç noktasında "iki yan" bulunmadığı için eğriliğin yön değiştirmesinden söz edilemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

> **i** Teğetli tanım
>
> Bazı kaynaklar dönüm noktası tanımına, x_0'da eğrinin bir teğetinin bulunması koşulunu da ekler; teğetin düşey olmasına izin verilir. Bu koşul, tanımı biraz daraltır ama uygulamada karşılaştığımız fonksiyonların hemen hepsi için aynı noktaları verir. Bu bölümde Tanım 16.1 ile çalışacağız; teğetin varlığından yalnızca teğetin eğriyi kestiğini tartışırken (Sonuç 16.1) yararlanacağız.

Konvekslik ile ikinci türevin işareti arasındaki bağı (Teorem 15.4) hatırlarsak, tanımı f'' diliyle şöyle okuyabiliriz: f iki kez türevlenebilir olduğunda x_0'ın bir dönüm noktası olması, f'''nün x_0'ın solunda ve sağında **zıt işaretli** olması demektir. Bölümün geri kalanı bu okumanın sonuçlarını çıkarmaktan ibarettir.

16.2 Gerek Koşul: İkinci Türev Sıfırlanır

Bir dönüm noktasında f'' solda bir işaretli, sağda öteki işaretlidir. f'' bu noktada varsa, "pozitiften negatife geçerken" değeri ne olabilir? Sezgi 0 diyor. Bunu kesinleştirelim. İspatın fikri çok zariftir: dönüm noktasında f' fonksiyonu artmaktan azalmaya (ya da tersine) geçer, yani f''nün orada bir **yerel ekstremumu** vardır; Teorem 7.1 da yerel ekstremumda türevin sıfırlanmasını söyler. f''nün türevi f'' olduğundan sonuç kendiliğinden gelir.

Teorem 16.1 (Dönüm Noktası için Gerek Koşul). *f, x_0'ın bir komşuluğunda türevlenebilir ve x_0 noktasında iki kez türevlenebilir olsun. Eğer x_0, f'nin bir dönüm noktası ise*

$$f''(x_0) = 0$$

olur.

> ***İspat.***
> *Tanım 16.1 gereği bir $\delta > 0$ vardır ki, iki durumdan biri gerçekleşir. İspatı birinci durum için yazalım; ikincisi f yerine $-f$ alınarak aynen elde edilir (çünkü $-f$'nin konveksliği f'nin konkavlığıdır ve $(-f)'' = -f''$ olduğundan $(-f)''(x_0) = 0$ ile $f''(x_0) = 0$ aynı şeydir).*
> ***Durum: f solda konveks, sağda konkav.*** *Yani f, $J^- = (x_0 - \delta, x_0]$ üzerinde konveks ve $J^+ = [x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde konkavdır.*
> ***Adım 1: f' solda artan, sağda azalandır.*** *f, x_0'ın bir komşuluğunda türevlenebilir olduğundan, konveks fonksiyonların birinci türev ölçütünü uygulayabiliriz (Teorem 15.3): bir aralıkta türevlenebilen bir fonksiyon o aralıkta konvekstir ancak ve ancak türevi orada artandır. Buna göre f', J^- üzerinde artan ve J^+ üzerinde azalandır.*
> ***Adım 2: f''nün x_0'da yerel maksimumu vardır.*** *J^- üzerinde f' artan olduğundan, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ için $f'(x) \le f'(x_0)$ olur (çünkü $x < x_0$ ve x_0 da J^-'ye aittir). Benzer biçimde J^+ üzerinde f' azalan olduğundan, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için $f'(x) \le f'(x_0)$'dır. Demek ki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ komşuluğundaki her x için*
>
> $$f'(x) \le f'(x_0);$$
>
> *yani $g = f'$ fonksiyonunun x_0'da bir yerel maksimumu vardır (Tanım 7.1). İkinci durumda, yani f solda konkav sağda konveks iken, aynı akıl yürütme f' için bir yerel **minimum** verir.*
> ***Adım 3: Fermat teoremi.*** *f, x_0'da iki kez türevlenebilir olduğundan $g = f'$ fonksiyonu x_0'da türevlenebilirdir ve $g'(x_0) = f''(x_0)$'dır. Ayrıca x_0, tanım kümesinin bir iç noktasıdır ve Adım 2'ye göre g'nin orada yerel ekstremumu vardır. Teorem 7.1 gereği*
>
> $$g'(x_0) = 0, \qquad \text{yani} \qquad f''(x_0) = 0.$$
>
> *İspat tamamlanmıştır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci türevin işaretiyle aynı ispat

f tüm $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ komşuluğunda iki kez türevlenebilirse, ispatın ilk adımı doğrudan ikinci türevin işaretinden okunabilir. Bu durumda dönüm noktası olmak şu iki seçenekten birine karşılık gelir:

- $x \in (x_0-\delta, x_0)$ için $f''(x) \geq 0$ ve $x \in (x_0, x_0+\delta)$ için $f''(x) \leq 0$ (konveksten konkava geçiş);
- $x \in (x_0-\delta, x_0)$ için $f''(x) \leq 0$ ve $x \in (x_0, x_0+\delta)$ için $f''(x) \geq 0$ (konkavdan konvekse geçiş).

$f'' \geq 0$ olan yerde f' artan, $f'' \leq 0$ olan yerde f' azalandır (Sonuç 8.3). Böylece yine f', x_0'da artmaktan azalmaya (ya da tersine) geçer; f''nün x_0'da yerel ekstremumu vardır ve Teorem 7.1 sonucu verir.

Bu teorem, tıpkı ekstremum aramada olduğu gibi, bize bir **aday listesi** üretme yöntemi verir:

Dönüm noktası adayları

f'nin dönüm noktası olabilecek noktalar yalnızca şunlardır:

- $f''(x_0) = 0$ olan noktalar;
- $f''(x_0)$'ın var olmadığı noktalar (buna $f'(x_0)$'ın var olmadığı noktalar da dâhildir).

Gerekçe doğrudan Teorem 16.1'dir. Bir noktada f'' varsa, tanımı gereği f' o noktanın bir komşuluğunda tanımlıdır; yani teoremin hipotezleri kendiliğinden sağlanır ve nokta dönüm noktası ise f'' orada sıfır olmak zorundadır. Öyleyse listenin dışında kalan bir nokta — yani f'''nün var olup sıfırdan farklı olduğu bir nokta — dönüm noktası olamaz. Aday listesini çıkardıktan sonra iş, hangi adayların gerçekten dönüm noktası olduğunu ayıklamaktır.

16.2.1 Gerek koşul yeter değildir

Aday listesinin her elemanı dönüm noktası olmak zorunda değildir. $f'(x_0) = 0$ olmasının x_0'ı ekstremum yapmaya yetmediğini (kritik nokta olup ekstremum olmayan noktaların bulunduğunu) biliyoruz; aynı olgu bir mertebe yukarıda da geçerlidir.

Karşıtı doğru değildir

$f''(x_0) = 0$ koşulu **gerek**tir, **yeter değildir.** İkinci türevin bir noktada sıfırlanması, o noktada işaret değiştirdiği anlamına gelmez; sıfırlanıp aynı işaretle devam edebilir. Bu durumda eğrilik yön değiştirmez ve nokta bir dönüm noktası olmaz.

Örnek 16.1 (Sıfırlanan ama İşaret Değiştirmeyen İkinci Türev). $f(x) = x^4$ fonksiyonu için $f''(0) = 0$ olduğunu, buna karşılık 0'ın bir dönüm noktası **olmadığını** gösteriniz.

Çözüm.
Türevleri hesaplayalım:

$$f'(x) = 4x^3, \qquad f''(x) = 12x^2.$$

Buradan $f''(0) = 0$ olduğu açıktır; yani 0, Teorem 16.1'un verdiği aday listesindedir.
Ama her $x \neq 0$ için $x^2 > 0$ olduğundan $f''(x) = 12x^2 > 0$'dır. Demek ki f'', 0'ın solunda da sağında da **pozitiftir**; f hem $(-\infty, 0]$ üzerinde hem de $[0, +\infty)$ üzerinde konvekstir (aslında $\mathbb{R}$'nin tamamında konvekstir). Eğrilik yön değiştirmediğinden Tanım 16.1 sağlanmaz: 0 bir dönüm noktası değildir.
Aynı fonksiyon başka bir uyarı daha içerir: $f'(0) = 0$ olduğundan 0 bir kritik noktadır (Tanım 7.3) ve gerçekten de f'nin mutlak minimumudur. Yani $f''(x_0) = 0$ olan bir nokta, dönüm noktası olmak yerine pekâlâ bir ekstremum noktası olabilir.
Karşılaştırma için $g(x) = x^3$'e bakalım: $g''(x) = 6x$ olduğundan yine $g''(0) = 0$'dır, ama bu kez g'' işaret değiştirir ($x < 0$ için negatif, $x > 0$ için pozitif). Dolayısıyla g, $(-\infty, 0]$ üzerinde konkav, $[0, +\infty)$ üzerinde konvekstir ve 0 bir dönüm noktasıdır. İki fonksiyonu ayıran şey $f''(0) = 0$ eşitliği değil, f'''nün işaret davranışıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

16.3 Yeter Koşullar

Aday listesini eledikten sonra elimizde iki pratik ölçüt kalır. Birincisi doğrudan tanımın çevirisidir ve en geniş kapsamlısıdır; ikincisi hesabı kolay olan, üçüncü türeve dayanan bir kısayoldur.

16.3.1 İşaret değişimi ölçütü

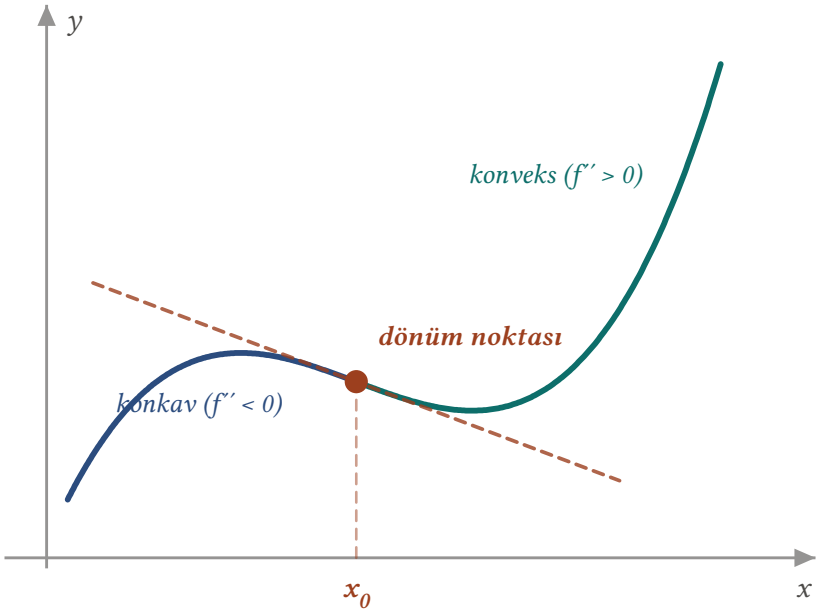
Önerme 16.1 (İşaret Değişimi Ölçütü). *f, $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ aralığında sürekli ve $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ üzerinde iki kez türevlenebilir olsun. Eğer f'', x_0'ın iki yanında zıt işaretliyse, yani*

- *$x \in (x_0-\delta, x_0)$ için $f''(x) > 0$ ve $x \in (x_0, x_0+\delta)$ için $f''(x) < 0$;*

ya da

- *$x \in (x_0-\delta, x_0)$ için $f''(x) < 0$ ve $x \in (x_0, x_0+\delta)$ için $f''(x) > 0$*

ise, x_0 bir dönüm noktasıdır. Burada $f''(x_0)$'ın var olması istenmemektedir.



Şekil 16.1: Dönüm noktasında eğrilik yön değiştirir: solda konkav (f'' < 0), sağda konveks (f'' > 0). Teğet, dönüm noktasında eğriyi keser *— bir tarafta üstünde, öbür tarafta altında kalır.*

İspat.
İki durum f yerine $-f$ alınarak birbirine dönüştüğünden, birincisini ispatlamak yeterlidir: $f'' > 0$ solda, $f'' < 0$ sağda. Göstermemiz gereken, f'nin $J^- = (x_0-\delta, x_0]$ üzerinde konveks, $J^+ = [x_0, x_0+\delta)$ üzerinde konkav olduğudur. Uç noktanın da dâhil olduğuna dikkat ediniz; asıl iş oradadır, çünkü x_0'da f'' hakkında hiçbir bilgimiz yok.
Solda konvekslik. *$x < z < y$ olacak biçimde $x, y, z \in J^-$ alalım. f, J^- üzerinde sürekli ve $(x_0-\delta, x_0)$ üzerinde türevlenebilirdir; dolayısıyla $[x, z]$ ve $[z, y]$ aralıklarının her birine ortalama değer teoremini (Teorem 8.2) uygulayabiliriz. Buna göre öyle $c_1 \in (x, z)$ ve $c_2 \in (z, y)$ vardır ki*

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c_1), \qquad \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(c_2).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$(x_0-\delta, x_0)$ üzerinde $f''>0$ olduğundan f' bu aralıkta kesin artandır (Sonuç 8.3). $c_1<z<c_2$ ve her iki nokta da $(x_0-\delta,x_0)$ içinde olduğundan $f'(c_1)<f'(c_2)$, özel olarak $f'(c_1)\le f'(c_2)$; yani

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Bu eşitsizlik tam olarak konvekslik eşitsizliğidir. Gerçekten, paydaları pozitif olan bu ifadeyi çarparak düzenlersek

$$\big(\, f(z)-f(x)\,\big)\,(y-z) \le \big(\, f(y)-f(z)\,\big)\,(z-x)$$

$$f(z)\,(y-x) \le f(x)\,(y-z) + f(y)\,(z-x)$$

$$f(z) \le \frac{y-z}{y-x}\,f(x) + \frac{z-x}{y-x}\,f(y)$$

elde ederiz. $\lambda = \dfrac{y-z}{y-x} \in (0,1)$ dersek $1-\lambda = \dfrac{z-x}{y-x}$ ve $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ olur; son satır da $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ demektir. x,y,z keyfî seçildiğinden f, J^- üzerinde konvekstir. Dikkat ediniz: $y=x_0$ olması ispatı hiç etkilemedi, çünkü $c_2<y\le x_0$ olduğundan c_2 her hâlükârda f'''nün pozitif olduğu açık aralıkta kaldı.
Sağda konkavlık. *Aynı akıl yürütme $J^+=[x_0,x_0+\delta)$ üzerinde yapılır. Bu kez $(x_0,x_0+\delta)$ üzerinde $f''<0$ olduğundan f' kesin azalandır; yukarıdaki eşitsizlikler ters döner ve*

$$f(z) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

bulunur, yani f bu aralıkta konkavdır.
Sonuç. *f, x_0'da süreklidir, solunda konveks ve sağında konkavdır. Tanım 16.1 gereği x_0 bir dönüm noktasıdır.*
■

> **i** Neden $f''(x_0)$ istenmedi
>
> İspatta x_0 noktasında f'' hakkında hiçbir bilgi kullanmadık; hatta $f'(x_0)$'ın var olması bile gerekmedi. İstediğimiz tek şey f''nin x_0'da sürekli olmasıydı. Bu, ölçütü oldukça güçlü kılar: birazdan göreceğimiz $f(x)=x^{1/3}$ örneğinde 0 noktasında ne f' ne de f'' vardır, ama ölçüt sorunsuz çalışır.

16.3.2 Üçüncü türev ölçütü

İşaret ölçütü her zaman çalışır ama f'''nün işaretini iki yanda ayrı ayrı incelemeyi gerektirir. Çoğu zaman daha hızlı bir yol vardır: eğer $f''(x_0)=0$ ise, f'''nün x_0'daki türevi, yani $f'''(x_0)$, f'''nün orada hangi yöne geçtiğini söyler.

Önerme 16.2 (Üçüncü Türev Ölçütü). *f, x_0'ın bir komşuluğunda iki kez türevlenebilir ve x_0'da üç kez türevlenebilir olsun. Eğer*

$$f''(x_0)=0 \qquad \text{ve} \qquad f'''(x_0)\neq 0$$

ise, x_0 bir dönüm noktasıdır.

İspat.
*$g=f''$ diyelim. Varsayıma göre g, x_0'ın bir komşuluğunda tanımlıdır, $g(x_0)=0$ ve g, x_0'da türevlenebilirdir; üstelik $g'(x_0)=f'''(x_0)\neq 0$'dır. Göstereceğimiz şey g'nin x_0'da **kesin işaret değiştirdiği**, yani solunda bir işaretli sağında öteki işaretli olduğudur; bu sağlandığında Önerme 16.1 sonucu verir.*
Türevin tanımına (Tanım 2.2) dönelim. $g(x_0)=0$ olduğundan fark oranı sadeleşir:

$$f'''(x_0) = g'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $h(x) = \dfrac{g(x)}{x - x_0}$ *fonksiyonunun* x_0*'daki limiti* $f'''(x_0)$*'dır ve bu limit sıfırdan farklıdır.*
Durum $f'''(x_0) > 0$**.** *Limitin işaret koruma özelliği gereği (bkz. Analiz 1), limiti pozitif olan bir fonksiyon, noktanın delinmiş bir komşuluğunda pozitif kalır: öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki* $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$ *olan her* x *için*

$$\frac{g(x)}{x - x_0} > 0.$$

Bir kesir pozitifse pay ile payda aynı işaretlidir. Öyleyse

- $x_0 - \delta < x < x_0$ *iken* $x - x_0 < 0$*, dolayısıyla* $g(x) = f''(x) < 0$*;*
- $x_0 < x < x_0 + \delta$ *iken* $x - x_0 > 0$*, dolayısıyla* $g(x) = f''(x) > 0$*.*

Demek ki f''*,* x_0*'ın solunda negatif, sağında pozitiftir. Önerme 16.1 gereği* x_0 *bir dönüm noktasıdır (*f *solda konkav, sağda konvekstir).*
Durum $f'''(x_0) < 0$**.** *Bu kez aynı gerekçeyle* $\dfrac{g(x)}{x - x_0} < 0$ *olur ve işaretler ters döner:* $f'' > 0$ *solda,* $f'' < 0$ *sağda. Yine Önerme 16.1 uygulanır; bu kez* f *solda konveks, sağda konkavdır.*
Her iki durumda da x_0 *bir dönüm noktasıdır.*
■

Bu ölçüt, ekstremumlar için kullandığımız "ikinci türev testinin" bir mertebe yukarıdaki eşleniğidir; oradaki $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ koşulu burada $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ olmuştur. Kullanışlıdır ama sınırlıdır: $f'''(x_0)$ da sıfır çıkarsa hiçbir şey söylemez. Örneğin $f(x) = x^4$ için $f''(0) = f'''(0) = 0$'dır ve ölçüt sessiz kalır — ki iyi ki kalır, çünkü Örnek 16.1'de gördüğümüz gibi 0 orada dönüm noktası değildir. Buna karşılık $f(x) = x^5$ için de $f''(0) = f'''(0) = 0$'dır ama $f''(x) = 20x^3$ işaret değiştirdiğinden 0 bir dönüm noktasıdır. Ölçütü, ilk sıfırdan farklı türevin mertebesine bakacak biçimde genişletirsek bu iki durumu birbirinden ayırabiliriz.

16.3.3 Genel mertebe ölçütü

Önerme 16.3 (Genel Mertebe Ölçütü). *$n \geq 3$ bir tam sayı olsun. f, x_0'ın bir komşuluğunda $n-1$ kez türevlenebilir ve x_0 noktasında n kez türevlenebilir olsun. Ayrıca*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

olsun.

- *n* ***tek*** *ise x_0 bir dönüm noktasıdır.*
- *n* ***çift*** *ise x_0 bir dönüm noktası değildir; f, x_0'ın bir komşuluğunda (noktanın kendisi dâhil) tümüyle konveks ya da tümüyle konkavdır.*

İspat.
Yine $g = f''$ diyelim. Varsayımlar g diliyle şöyle okunur: g, x_0'ın bir komşuluğunda $n-3$ kez türevlenebilirdir, x_0'da $n-2$ kez türevlenebilirdir ve

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-3)}(x_0) = 0, \qquad g^{(n-2)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

g'ye x_0 merkezli, $n-2$ mertebeden Taylor formülünü Peano kalanıyla uygulayalım (Teorem 12.3); az önce yazdığımız iki türevlenebilirlik koşulu, o teoremin hipotezlerinin tam olarak kendisidir. g'nin x_0'daki $n-3$ mertebeye kadarki bütün türevleri sıfır olduğundan Taylor polinomundan geriye tek bir terim kalır:

$$g(x) = \frac{g^{(n-2)}(x_0)}{(n-2)!}\,(x - x_0)^{n-2} + r(x)\,(x - x_0)^{n-2}, \qquad \lim_{x \to x_0} r(x) = 0.$$

Yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f''(x) = (x-x_0)^{n-2}\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} + r(x)\right].$$

Köşeli parantezin $x \to x_0$ iken limiti $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} \neq 0$ olduğundan, İşaret Koruma gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $0 < |\,x - x_0\,| < \delta$ olan her x için köşeli parantez $f^{(n)}(x_0)$ ile aynı işareti taşır. Böylece bu delinmiş komşulukta $f''(x)$'in işareti, $f^{(n)}(x_0)$'ın işareti ile $(x-x_0)^{n-2}$'nin işaretinin çarpımıdır.
***n* tek ise.** *$n-2$ de tektir; $(x-x_0)^{n-2}$ ifadesi $x < x_0$ için negatif, $x > x_0$ için pozitiftir. Demek ki f'', x_0'ın iki yanında zıt işaretlidir ve Önerme 16.1 gereği x_0 bir dönüm noktasıdır. ($f^{(n)}(x_0) > 0$ ise f solda konkav sağda konveks, $f^{(n)}(x_0) < 0$ ise tersidir.)*
***n* çift ise.** *$n-2$ de çifttir ve $n \geq 4$ olduğundan $n-2 \geq 2$'dir; dolayısıyla $x \neq x_0$ için $(x-x_0)^{n-2} > 0$'dır. O hâlde f'', delinmiş komşulukta sabit işaretlidir: $f^{(n)}(x_0) > 0$ ise her yerde pozitif, $f^{(n)}(x_0) < 0$ ise her yerde negatif. Ayrıca $f''(x_0) = 0$'dır, yani işaret koşulu x_0'da da geniş anlamda ($\geq$ ya da $\leq$ biçiminde) sağlanır. Birinci durumda $f'' \geq 0$ olduğundan Teorem 15.4 gereği f tüm $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ üzerinde konvekstir; ikinci durumda konkavdır. Her iki hâlde de eğrilik yön değiştirmez ve x_0 dönüm noktası değildir.*
■

$n = 3$ alındığında bu önerme tam olarak Önerme 16.2'i verir. İki klasik örnek durumu netleştirir: $f(x) = x^5$ için $f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ ve $f^{(5)}(0) = 120 \neq 0$'dır; $n = 5$ tek olduğundan 0 bir dönüm noktasıdır. $f(x) = x^4$ için ise $f''(0) = f'''(0) = 0$ ve $f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$'dır; $n = 4$ çift olduğundan 0 dönüm noktası değildir — Örnek 16.1'de doğrudan gördüğümüz sonucun ta kendisi.

16.4 Türevin Bulunmadığı Dönüm Noktaları

Dönüm noktası tanımının (Tanım 16.1) türevden söz etmediğini vurgulamıştık. Şimdi bunun boş bir uyarı olmadığını gösteren örneği verelim: fonksiyon bir noktada türevlenemediği hâlde orada eğrilik pekâlâ yön değiştirebilir.

Örnek 16.2 (Düşey Teğetli Dönüm Noktası). $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun 0 noktasında türevlenemediğini, buna karşılık 0'ın bir dönüm noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Türev yoktur. f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve süreklidir. 0 noktasındaki fark oranını (Tanım 2.1) yazalım:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = h^{-2/3} = \frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}.$$

$h \to 0$ iken $h^{2/3} \to 0^+$ olduğundan bu oran $+\infty$'a gider. Limit sonlu bir sayı olmadığından f, 0'da türevlenemez; ama fark oranı $+\infty$'a gittiği için grafiğin 0'da **düşey teğeti** vardır: teğet doğrusu $x = 0$'dır. Aynı sebeple $f''(0)$ da yoktur.
İkinci türevin işareti. $x > 0$ için genel kuvvet kuralı (Teorem 5.3) doğrudan uygulanır. $x < 0$ için o kural olduğu gibi geçerli değildir (orada x^r genel olarak tanımlı bile değildir); ama küp kök tek fonksiyondur, yani $x < 0$ iken $x^{1/3} = -(-x)^{1/3}$'tür ve zincir kuralıyla (Teorem 4.1)

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(-x)^{-2/3}\cdot(-1) = \frac{1}{3}(-x)^{-2/3} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

bulunur; burada $x^{-2/3} = \left(x^{1/3}\right)^{-2} = \left((-x)^{1/3}\right)^{-2} = (-x)^{-2/3}$ olduğunu kullandık. Bir kez daha türev alırsak, yine $x < 0$ için,

$$f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(-x)^{-5/3}\cdot(-1) = \frac{2}{9}(-x)^{-5/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

olur; son eşitlikte $x^{-5/3} = \left(x^{1/3}\right)^{-5} = \left(-(-x)^{1/3}\right)^{-5} = -(-x)^{-5/3}$ olduğunu kullandık. Demek ki iki yanda da aynı formüller geçerlidir: her $x \neq 0$ için

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \qquad f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\frac{2}{9}\,x^{-5/3} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x^{5/3}}.$$

Burada $x^{5/3} = \left(x^{1/3}\right)^5$ olduğunu ve küp kökün işaretinin x'in işaretiyle aynı olduğunu kullanırsak:

- $x < 0$ ise $x^{5/3} < 0$, dolayısıyla $\dfrac{1}{x^{5/3}} < 0$ ve $f''(x) = -\dfrac{2}{9}\cdot(\text{negatif}) > 0$;
- $x > 0$ ise $x^{5/3} > 0$, dolayısıyla $f''(x) < 0$.

Sonuç. İşaret tablosu şudur:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	tanımsız	$-$
f	konveks	dönüm noktası	konkav

f, 0'da süreklidir ve f'' bu noktanın iki yanında zıt işaretlidir; Önerme 16.1 gereği 0 bir dönüm noktasıdır. Grafik $(-\infty, 0]$ üzerinde konveks, $[0, +\infty)$ üzerinde konkavdır ve $(0, 0)$ noktasında düşey teğetle eğriliğini tersine çevirir.
Bu örnek iki dersi birden verir. Birincisi: dönüm noktası ararken aday listesine yalnızca $f'' = 0$ olan noktaları değil, f'''nün **var olmadığı** noktaları da koymak zorundayız; yalnızca $f''(x) = 0$ denklemini çözmekle yetinen bir öğrenci bu dönüm noktasını kaçırır. İkincisi: Teorem 16.1'un hipotezleri gereksiz değildir — burada f, 0'da iki kez türevlenebilir olmadığı için teoremin sonucu ($f''(0) = 0$) zaten anlamsızdır, ama nokta yine de dönüm noktasıdır.
■

⚠ Aday listesi eksiksiz olmalıdır

f'''nün var olmadığı noktaları listeye almamak, dönüm noktalarını kaçırmanın en sık rastlanan sebebidir. Bunun ters yönü de vardır: f'''nün var olmadığı her nokta dönüm noktası değildir. Örneğin $f(x) = |\,x\,|$ fonksiyonu için 0'da ne f' ne f'' vardır, ama f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde konvekstir; eğrilik yön değiştirmez, 0 dönüm noktası değildir. Her aday, tıpkı kritik noktalarda olduğu gibi, tek tek sınanmalıdır.

16.5 Dönüm Noktasında Teğet Eğriyi Keser

Konveks bir fonksiyonun grafiği, her teğetinin **üstünde** kalır (Teorem 15.2); konkav bir fonksiyonunki her teğetinin altında. Dönüm noktasında bu iki davranış yan yana geldiğine göre, oradaki teğet doğrusu bir yanda eğrinin altında, öteki yanda üstünde olmalıdır. Yani teğet eğriyi yalnızca dokunmakla kalmaz, **keser**. Bu, dönüm noktalarını grafikte gözle tanımanın en kolay yoludur.

Sonuç 16.1 (Dönüm Noktasında Teğet Eğriyi Keser). *f, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ üzerinde türevlenebilir ve $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ üzerinde iki kez türevlenebilir olsun. f'', x_0'ın solunda pozitif, sağında negatif olsun (öteki durum simetriktir). x_0'daki teğet doğrusunu*

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ile gösterelim (Tanım 2.4). O hâlde

- *$x \in (x_0 - \delta, x_0)$ için $f(x) > T(x)$, yani grafik teğetin **üstündedir**;*
- *$x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için $f(x) < T(x)$, yani grafik teğetin **altındadır**.*

Özel olarak teğet doğrusu, eğriyi $(x_0, f(x_0))$ noktasında keser.

İspat.
Eğri ile teğet arasındaki farkı ölçen fonksiyonu tanımlayalım:

$$g(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

T bir birinci dereceden polinom olduğundan her yerde türevlenebilirdir; $T'(x) = f'(x_0)$ ve $T''(x) = 0$'dır. Dolayısıyla g, $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ üzerinde türevlenebilir ve x_0 dışında iki kez türevlenebilirdir; üstelik

$$g(x_0) = 0, \qquad g'(x) = f'(x) - f'(x_0), \qquad g'(x_0) = 0, \qquad g''(x) = f''(x) \quad (x \neq x_0).$$

*İspatın can alıcı noktası şu ara adımdır: x_0'dan farklı **her** x için $g'(x) < 0$, yani $f'(x) < f'(x_0)$'dır. Bunu iki yan için ayrı ayrı gösterelim.*
Ara adım, sol yan. *$(x_0-\delta, x_0)$ üzerinde $f'' > 0$ olduğundan f' bu aralıkta kesin artandır (Sonuç 8.3). Bir $c \in (x_0-\delta, x_0)$ alalım ve $c < w < x_0$ olacak biçimde bir w seçelim; kesin artanlık $f'(c) < f'(w)$ verir. Geriye $f'(w) \leq f'(x_0)$ olduğunu göstermek kalıyor. Aksini varsayalım, yani $f'(w) > f'(x_0)$ olsun. f, $[w, x_0]$ üzerinde türevlenebilirdir; dolayısıyla f' sürekli olmasa bile ara değer özelliğini taşır (Teorem 10.1). $f'(x_0) < \mu < f'(w)$ olan bir μ seçersek, bu μ sayısı $[w, x_0]$ aralığının uçlarındaki $f'(w)$ ve $f'(x_0)$ değerlerinin arasındadır; Teorem 10.1 gereği $f'(\xi) = \mu$ olan bir $\xi \in (w, x_0)$ vardır. Ama $w < \xi < x_0$ ve f' bu aralıkta kesin artan olduğundan $f'(\xi) > f'(w) > \mu$ olmalıydı; çelişki. Öyleyse*

$$f'(c) < f'(w) \leq f'(x_0), \qquad \text{yani} \qquad g'(c) = f'(c) - f'(x_0) < 0.$$

Ara adım, sağ yan. *Bu kez $(x_0, x_0+\delta)$ üzerinde $f'' < 0$ olduğundan f' kesin azalandır. Bir $c \in (x_0, x_0+\delta)$ alalım ve $x_0 < w < c$ seçelim; kesin azalanlık $f'(c) < f'(w)$ verir. Yine $f'(w) \leq f'(x_0)$'dır: aksi hâlde $f'(w) > f'(x_0)$ olurdu ve f, $[x_0, w]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Teorem 10.1 gereği $f'(x_0) < \mu < f'(w)$ olan bir μ için $f'(\xi) = \mu$ olan bir $\xi \in (x_0, w)$ bulunurdu; ama $x_0 < \xi < w$ ve f' kesin azalan olduğundan $f'(\xi) > f'(w) > \mu$ olmalıydı; çelişki. Böylece burada da $g'(c) < 0$'dır.*
Solda. *$x \in (x_0-\delta, x_0)$ olsun. g, $[x, x_0]$ üzerinde sürekli ve (x, x_0) üzerinde türevlenebilir olduğundan ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) bir $c \in (x, x_0)$ verir:*

$$g(x_0) - g(x) = g'(c)\,(x_0 - x).$$

Ara adıma göre $g'(c) < 0$; ayrıca $x_0 - x > 0$'dır. Demek ki sağ taraf negatiftir. $g(x_0) = 0$ olduğundan $-g(x) < 0$, yani

$$g(x) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > T(x).$$

Grafik solda teğetin üstündedir.
Sağda. *$x \in (x_0, x_0+\delta)$ olsun. Bu kez $[x_0, x]$ aralığında ortalama değer teoremi bir $c \in (x_0, x)$ verir:*

$$g(x) - g(x_0) = g'(c)\,(x - x_0).$$

Ara adıma göre $g'(c) < 0$ ve $x - x_0 > 0$ olduğundan sağ taraf yine negatiftir; $g(x_0) = 0$ olduğundan $g(x) < 0$, yani $f(x) < T(x)$'tir. Grafik sağda teğetin altındadır.
Sonuç. *$g = f - T$ fonksiyonu x_0'ın solunda pozitif, sağında negatif ve x_0'da sıfırdır. Demek ki eğri ile teğet, x_0'da yalnızca değmekle kalmaz; teğet eğriyi bu noktada bir taraftan öteki tarafa geçerek keser.*
■

Grafikte dönüm noktasını gözle bulmak

Bir grafiğe bakarken dönüm noktasını şöyle tanırsınız: teğet doğrusunu zihninizde eğri boyunca kaydırın. Teğet, eğrinin bir tarafında kalırken bir anda öteki tarafına geçiyorsa, geçişin olduğu nokta dönüm noktasıdır. Ekstremum noktalarında teğet yataydır ama eğriyi kesmez; dönüm noktalarında teğet genellikle yatay değildir ama eğriyi keser. İki kavramı ayırmanın en pratik yolu budur.
$f(x) = x^3$ örneğinde $x_0 = 0$ için teğet $T(x) = 0$, yani x eksenidir; $f(x) - T(x) = x^3$ gerçekten de 0'da işaret değiştirir. Burada teğetin yatay da olabildiğini görüyoruz: x_0 hem kritik nokta hem dönüm noktasıdır, ama ekstremum değildir.

16.6 Tam Çözümlü Örnekler

Şimdi bütün araçları birlikte çalıştıralım. İzleyeceğimiz yol her seferinde aynıdır: türevleri hesapla, f'''nün sıfır yerlerini ve tanımsız olduğu noktaları bul, f'''nün işaret tablosunu çıkar, işaret değişen adayları dönüm noktası olarak ilan et.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 16.3 (Bir Üçüncü Dereceden Polinomun İncelenmesi). $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ fonksiyonunu konvekslik ve dönüm noktaları bakımından inceleyiniz.

Çözüm.
Türevler. Terim terim türev alalım (Teorem 3.2):

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3),$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Adaylar. f bir polinom olduğundan her mertebeden türevi her yerde vardır; dolayısıyla adaylar yalnızca $f''(x) = 0$ denkleminin kökleridir. $6(x-2) = 0$ denklemi tek bir kök verir: $x = 2$.
İkinci türevin işareti. $f''(x) = 6(x-2)$ birinci dereceden bir ifadedir; $6 > 0$ olduğundan işareti $x - 2$'nin işaretiyle aynıdır:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	konkav	dönüm noktası	konveks

Demek ki f, $(-\infty, 2]$ üzerinde konkav, $[2, +\infty)$ üzerinde konvekstir. f'' işaret değiştirdiğinden Önerme 16.1 gereği $x = 2$ bir dönüm noktasıdır. Aynı sonucu üçüncü türev ölçütüyle de görebiliriz: $f'''(x) = 6$ olduğundan $f''(2) = 0$ ve $f'''(2) = 6 \neq 0$'dır; Önerme 16.2 doğrudan uygulanır.
Dönüm noktasının koordinatları.

$$f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3,$$

yani dönüm noktası $(2, 3)$'tür.
Teğet ve kesişme. $f'(2) = 3 \cdot 4 - 24 + 9 = -3$ olduğundan $(2, 3)$ noktasındaki teğet

$$T(x) = 3 - 3(x-2) = -3x + 9$$

doğrusudur. Sonuç 16.1'in söylediğini burada elle doğrulayabiliriz:

$$f(x) - T(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 + 3x - 9 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3.$$

$(x-2)^3$ ifadesi $x < 2$ için negatif, $x > 2$ için pozitiftir. Yani grafik teğetin solda **altında**, sağda **üstündedir** — burada f solda konkav sağda konveks olduğu için Sonuç 16.1'de yazılan durumun simetriği geçerlidir. Her hâlükârda teğet eğriyi $(2, 3)$'te kesmektedir.
Resmin tamamlanması. Konvekslik bilgisini ekstremum bilgisiyle birleştirelim. $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ olduğundan kritik noktalar $x = 1$ ve $x = 3$'tür ve

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	artan	yerel mak.	azalan	yerel min.	artan

Sonuç 8.3 gereği f, $(-\infty, 1]$ ve $[3, +\infty)$ üzerinde artan, $[1, 3]$ üzerinde azalandır. $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ ve $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$'dir. Yerel maksimum $(1, 5)$, yerel minimum $(3, 1)$ ve dönüm noktası $(2, 3)$'tür; dönüm noktası, beklendiği gibi, tepe ile çukurun tam ortasında yer alır.
Bir simetri. Üçüncü dereceden polinomların grafiği dönüm noktasına göre nokta simetriktir. Burada bunu elle görelim: $t \in \mathbb{R}$ için

$$f(2+t) = (2+t)^3 - 6(2+t)^2 + 9(2+t) + 1 = t^3 - 3t + 3,$$

$$f(2-t) = (2-t)^3 - 6(2-t)^2 + 9(2-t) + 1 = -t^3 + 3t + 3.$$

Toplarsak $f(2+t) + f(2-t) = 6 = 2f(2)$ elde ederiz; yani $(2+t, f(2+t))$ ile $(2-t, f(2-t))$ noktalarının orta noktası her zaman $(2, 3)$'tür. Grafik dönüm noktası çevresinde 180° döndürüldüğünde kendisine dönüşür.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Bir sonraki örnek, rasyonel bir fonksiyonda birden fazla dönüm noktasının nasıl ortaya çıktığını gösteriyor. Fonksiyonun tam bir incelemesini yapacağız; grafik çizimini bir sonraki bölüme bırakıyoruz ama parçaların hepsi burada toplanacak.

Örnek 16.4 (Rasyonel Bir Fonksiyonun Tam İncelenmesi). $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ fonksiyonunun monotonluğunu, yerel ekstremumlarını, konvekslik aralıklarını ve dönüm noktalarını belirleyiniz.

Çözüm.
Tanım kümesi ve simetri. Her x için $1 + x^2 \geq 1 > 0$ olduğundan payda hiç sıfırlanmaz; f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve süreklidir. Ayrıca

$$f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -f(x)$$

olduğundan f tek fonksiyondur: grafik orijine göre simetriktir. Bu, hesapların yarısını kontrol etmemizi sağlayacak.
Birinci türev. Bölümün türev kuralıyla (Teorem 3.2):

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Payda pozitif olduğundan f''nün işareti $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ tarafından belirlenir. Kritik noktalar $x=-1$ ve $x=1$'dir.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	azalan	yerel min.	artan	yerel mak.	azalan

$f(-1) = \dfrac{-1}{2}$ ve $f(1) = \dfrac{1}{2}$ olduğundan yerel minimum $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$, yerel maksimum $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$'dir.
İkinci türev. $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ifadesinin türevini alalım. Pay $u = 1-x^2$, payda $v = (1+x^2)^2$ olsun; $u' = -2x$ ve zincir kuralıyla (Teorem 4.1) $v' = 2(1+x^2)\cdot 2x = 4x(1+x^2)$'dir. O hâlde

$$f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(-2x)(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

Pay ve paydada ortak olan $(1+x^2)$ çarpanını sadeleştirelim:

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)\left[-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)\right]}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}.$$

Payı çarpanlarına ayıralım:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(1+x^2)^3}.$$

Adaylar. Payda hiç sıfırlanmadığından ve f her mertebeden türevlenebilir olduğundan adaylar yalnızca payın kökleridir:

$$x = -\sqrt{3}, \qquad x = 0, \qquad x = \sqrt{3}.$$

İşaret tablosu. Payda $(1+x^2)^3 > 0$ olduğundan f'''nün işareti $2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ çarpımının işaretidir. Üç çarpanın işaretini aralık aralık toplayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konkav	dönüm	konveks	dönüm	konkav	dönüm	konveks

Sonuç. f'' üç adayın her birinde işaret değiştirmektedir; Önerme 16.1 gereği üçü de dönüm noktasıdır. Koordinatları hesaplayalım:

$$f(-\sqrt{3})=\frac{-\sqrt{3}}{1+3}=-\frac{\sqrt{3}}{4},\qquad f(0)=0,\qquad f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Dönüm noktaları $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$ ve $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$'tür. Tek fonksiyon olmanın beklenen sonucunu görüyoruz: dönüm noktaları orijine göre simetrik yerleşmiştir ve orijinin kendisi de bir dönüm noktasıdır.

Üçüncü türev ölçütüyle doğrulama. $x=0$ adayını bir de Önerme 16.2 ile sınayalım. $f''(x)=\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$ ifadesinin türevini bölüm kuralıyla almak yerine, $f''(0)=0$ olduğu için doğrudan türevin tanımına (Tanım 2.2) başvurmak çok daha kısadır:

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-6}{(1+x^2)^3}=\frac{-6}{1}=-6.$$

$f''(0)=0$ ve $f'''(0)=-6\neq 0$ olduğundan 0 gerçekten bir dönüm noktasıdır; üstelik $f'''(0)<0$ olduğu için f, 0'ın solunda konveks, sağında konkavdır — tablonun söylediğiyle birebir aynı.

Teğetin kesmesi. $f'(0)=1$ olduğundan orijindeki teğet $T(x)=x$ doğrusudur. Farkı hesaplayalım:

$$f(x)-x=\frac{x}{1+x^2}-x=\frac{x-x(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{-x^3}{1+x^2}.$$

Bu ifade $x<0$ için pozitif, $x>0$ için negatiftir; yani grafik teğetin solda üstünde, sağda altındadır. Sonuç 16.1'in verdiği tablo doğrulanmış oldu.

Bir not. $|x|\to\infty$ iken $f(x)\to 0$ olduğundan grafiğin $y=0$ doğrusuna yaklaştığını da söyleyebiliriz; bu tür davranışları bir sonraki bölümde asimptot kavramıyla sistemleştireceğiz. Elimizdeki bilgilerle grafiğin şekli şöyledir: x çok küçükken ($-\infty$'a yakın) f negatif ve 0'a yakındır, azalarak $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ çukuruna iner, oradan artarak $(0,0)$'dan geçer, $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ tepesine çıkar ve sonra azalarak yeniden 0'a yaklaşır. Bükülme yönü ise $-\sqrt{3}$, 0 ve $\sqrt{3}$ noktalarında üç kez değişir.

■

16.7 Alıştırmalar

Alıştırma 16.1 (Dönüm Noktaları Üzerine).

a) $f(x)=x^4-4x^3+12$ fonksiyonunun konvekslik aralıklarını ve dönüm noktalarını bulunuz.

b) $f(x)=xe^{-x}$ fonksiyonunu monotonluk, ekstremum, konvekslik ve dönüm noktası bakımından inceleyiniz.

c) $f(x)=\ln(1+x^2)$ fonksiyonunun dönüm noktalarını bulunuz.

d) $f(x)=x^{5/3}$ fonksiyonu için $f''(0)$'ın var olmadığını, buna karşılık 0'ın hem bir kritik nokta hem de bir dönüm noktası olduğunu, ama ekstremum noktası olmadığını gösteriniz.

e) $f(x)=(x-1)^5+2$ ve $g(x)=(x-1)^6+2$ fonksiyonlarını $x_0=1$ noktasında Önerme 16.3 ile inceleyiniz.

f) $a \neq 0$ olmak üzere $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomunun tam olarak bir dönüm noktası bulunduğunu ve grafiğinin bu noktaya göre nokta simetrik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
a) Türevleri hesaplayalım:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2, \qquad f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

f bir polinom olduğundan f'' her yerde vardır; adaylar $f''(x) = 0$ denkleminin kökleridir: $x = 0$ ve $x = 2$. İşaret tablosu:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$12x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konveks	dönüm	konkav	dönüm	konveks

f'' her iki adayda da işaret değiştirdiğinden (Önerme 16.1) her ikisi de dönüm noktasıdır. Değerler:

$$f(0) = 12, \qquad f(2) = 16 - 32 + 12 = -4.$$

Dönüm noktaları $(0, 12)$ ve $(2, -4)$'tür. f, $(-\infty, 0]$ ve $[2, +\infty)$ üzerinde konveks, $[0, 2]$ üzerinde konkavdır.
Aynı sonucu üçüncü türev ölçütüyle de alabiliriz: $f'''(x) = 24x - 24$ olduğundan $f'''(0) = -24 \neq 0$ ve $f'''(2) = 24 \neq 0$'dır; Önerme 16.2 her iki noktada da uygulanır.
b) Çarpımın türevi ve üstel fonksiyonun türeviyle (Teorem 3.2, Teorem 5.2, Teorem 4.1):

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x},$$

$$f''(x) = (-1)e^{-x} + (1 - x)(-e^{-x}) = e^{-x}\left(-1 - 1 + x\right) = (x - 2)e^{-x}.$$

Her x için $e^{-x} > 0$ olduğundan işaretler yalnızca parantezlerden gelir.
Monotonluk ve ekstremum. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. $x < 1$ iken $1 - x > 0$, yani $f' > 0$; $x > 1$ iken $f' < 0$. Sonuç 8.3 gereği f, $(-\infty, 1]$ üzerinde artan, $[1, +\infty)$ üzerinde azalandır; $x = 1$ bir yerel (aslında mutlak) maksimumdur ve $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$'dir.
Konvekslik ve dönüm noktası. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. İşaret tablosu:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	konkav	dönüm noktası	konveks

Demek ki f, $(-\infty, 2]$ üzerinde konkav, $[2, +\infty)$ üzerinde konvekstir ve

$$f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

değeriyle $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ bir dönüm noktasıdır. Üçüncü türev ölçütüyle doğrulayalım:

$$f'''(x) = e^{-x} + (x - 2)(-e^{-x}) = (3 - x)e^{-x}, \qquad f'''(2) = e^{-2} \neq 0.$$

Önerme 16.2 gereği $x = 2$ dönüm noktasıdır. Dikkat: yerel maksimum $x = 1$'de, dönüm noktası $x = 2$'dedir; ikisi farklı noktalardır ve bu şaşırtıcı değildir — biri f''nün, öteki f'''nün işaret değiştirdiği yerdir.
c) Zincir kuralı ve logaritmanın türeviyle (Teorem 4.1, Teorem 5.1):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

İkinci türev için bölüm kuralını uygulayalım:

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

Payda daima pozitif olduğundan işaret $1-x^2$'den gelir. Adaylar $x=-1$ ve $x=1$'dir.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	konkav	dönüm	konveks	dönüm	konkav

Her iki noktada da işaret değiştiği için ikisi de dönüm noktasıdır. $f(\pm 1) = \ln(1+1) = \ln 2$ olduğundan dönüm noktaları $(-1,\ln 2)$ ve $(1,\ln 2)$'dir. Fonksiyon çift olduğundan ($f(-x)=f(x)$) bu simetrik yerleşim beklenendir.

d) $f(x) = x^{5/3}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve süreklidir. $x>0$ için genel kuvvet kuralı (Teorem 5.3) doğrudan uygulanır; $x<0$ için ise f tek fonksiyondur ($x^{5/3} = -(-x)^{5/3}$) ve zincir kuralıyla (Teorem 4.1) aynı formüller elde edilir. Böylece $x\neq 0$ için

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}, \qquad f''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{x^{1/3}}.$$

Sıfırda birinci türev. Fark oranı

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^{5/3}}{h} = h^{2/3} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

olduğundan $f'(0)=0$'dır; yani 0 bir kritik noktadır (Tanım 7.3) ve teğet yataydır.

Sıfırda ikinci türev. Şimdi f''nün 0'daki fark oranına bakalım:

$$\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \frac{\frac{5}{3}h^{2/3}}{h} = \frac{5}{3}h^{-1/3} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{h^{1/3}}.$$

$h\to 0^+$ iken bu ifade $+\infty$'a, $h\to 0^-$ iken $-\infty$'a gider. Limit yoktur; dolayısıyla $f''(0)$ yoktur.

Dönüm noktası. $x<0$ için $x^{1/3}<0$, dolayısıyla $f''(x)<0$ (konkav); $x>0$ için $x^{1/3}>0$, dolayısıyla $f''(x)>0$ (konveks). f, 0'da sürekli olduğundan Önerme 16.1 gereği 0 bir dönüm noktasıdır.

Ekstremum yoktur. $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$ ifadesi $x\neq 0$ için pozitif, $x=0$'da sıfırdır. Türev tek bir noktada sıfırlandığı için Sonuç 8.3'nin birinci maddesini doğrudan $\mathbb{R}$'ye uygulayamayız; ama $a<0<b$ olmak üzere $[a,0]$ ve $[0,b]$ aralıklarına ayrı ayrı uygulayabiliriz, çünkü bu aralıkların **iç** noktalarında $f'>0$'dır. Buna göre f, bu iki aralığın her birinde kesin artandır; ortak uç noktaları 0 olduğundan f bütün $[a,b]$ üzerinde, a ile b keyfî olduğundan da bütün $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır. Kesin artan bir fonksiyonun iç noktada yerel ekstremumu olamaz: $x<0<y$ için $f(x)<f(0)<f(y)$'dir, yani 0'ın her komşuluğunda $f(0)$'dan küçük de büyük de değerler vardır. Demek ki 0, ekstremum olmayan bir kritik noktadır — ve aynı zamanda bir dönüm noktasıdır.

e) Önce $f(x) = (x-1)^5 + 2$. Ardışık türevler (Tanım 6.1):

$$f'(x) = 5(x-1)^4, \quad f''(x) = 20(x-1)^3, \quad f'''(x) = 60(x-1)^2, \quad f^{(4)}(x) = 120(x-1), \quad f^{(5)}(x) = 120.$$

$x_0 = 1$'de $f''(1) = f'''(1) = f^{(4)}(1) = 0$ ve $f^{(5)}(1) = 120 \neq 0$'dır. İlk sıfırdan farklı türevin mertebesi $n=5$ olup **tek**tir; Önerme 16.3 gereği $x_0=1$ bir dönüm noktasıdır. Doğrudan da görülür: $f''(x) = 20(x-1)^3$ ifadesi $x<1$ için negatif, $x>1$ için pozitiftir; f solda konkav, sağda konvekstir. Dönüm noktası $(1,2)$'dir.

Şimdi $g(x) = (x-1)^6 + 2$:

$$g''(x) = 30(x-1)^4, \quad g'''(x) = 120(x-1)^3, \quad g^{(4)}(x) = 360(x-1)^2, \quad g^{(5)}(x) = 720(x-1), \quad g^{(6)}(x) = 720.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$x_0 = 1$'de $g''(1) = g'''(1) = g^{(4)}(1) = g^{(5)}(1) = 0$ ve $g^{(6)}(1) = 720 \neq 0$'dır. Bu kez $n = 6$ **çift**tir; Önerme 16.3 gereği $x_0 = 1$ dönüm noktası **değildir**. Gerçekten $g''(x) = 30(x-1)^4 \geq 0$ olup her x için geçerlidir, yani g bütün $\mathbb{R}$ üzerinde konvekstir; eğrilik hiç yön değiştirmez. Üstelik $g'(x) = 6(x-1)^5$ işaret değiştirdiğinden $x_0 = 1$ bir yerel (mutlak) minimumdur.
İki fonksiyonun $x_0 = 1$'de aynı türden görünen koşulları sağlaması ($f'' = f''' = 0$) sonucu belirlemeye yetmiyor; belirleyen şey ilk sıfırdan farklı türevin mertebesinin tek ya da çift olmasıdır.
f) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ olsun. Türevler:

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \qquad p''(x) = 6ax + 2b, \qquad p'''(x) = 6a.$$

Varlık ve teklik. $p''(x) = 6ax + 2b$ birinci dereceden bir ifadedir ve $6a \neq 0$ olduğundan tek bir kökü vardır:

$$p''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -\frac{b}{3a}.$$

p bir polinom olduğundan p'' her yerde tanımlıdır; dolayısıyla tek aday x_0'dır. $p'''(x_0) = 6a \neq 0$ olduğundan Önerme 16.2 gereği x_0 gerçekten bir dönüm noktasıdır. Aday tek olduğu için de başka dönüm noktası yoktur. Demek ki üçüncü dereceden her polinomun tam olarak bir dönüm noktası vardır. (İşaretle de görülebilir: $a > 0$ ise $p'' < 0$ solda, $p'' > 0$ sağda; $a < 0$ ise tersi.)
Simetri. $t \in \mathbb{R}$ için $p(x_0 + t) + p(x_0 - t)$ toplamını hesaplayalım. p üçüncü dereceden bir polinom olduğundan, x_0 merkezli Taylor açılımı sonlu ve tamdır:

$$p(x_0 + t) = p(x_0) + p'(x_0)\,t + \frac{p''(x_0)}{2}\,t^2 + \frac{p'''(x_0)}{6}\,t^3 = p(x_0) + p'(x_0)\,t + at^3,$$

çünkü $p''(x_0) = 0$ ve $\dfrac{p'''(x_0)}{6} = a$'dır. Aynı ifadede t yerine $-t$ koyarsak

$$p(x_0 - t) = p(x_0) - p'(x_0)\,t - at^3.$$

Toplarsak

$$p(x_0 + t) + p(x_0 - t) = 2\,p(x_0),$$

yani her t için $(x_0 + t, p(x_0 + t))$ ile $(x_0 - t, p(x_0 - t))$ noktalarının orta noktası $(x_0, p(x_0))$'dır. Bu, grafiğin dönüm noktasına göre nokta simetrik olduğu (dönüm noktası çevresinde 180° döndürüldüğünde kendisine dönüştüğü) anlamına gelir.
Taylor açılımını kullanmadan da aynı sonuca varılabilir: $x = x_0 + t$ değişken değiştirmesi yapılıp $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ yerine konursa t^2'li terimin katsayısı $3ax_0 + b = 0$ olduğundan yok olur ve $p(x_0 + t) = at^3 + \alpha t + \beta$ biçiminde, yalnızca tek kuvvetler ile bir sabitten oluşan bir ifade kalır; $t \mapsto at^3 + \alpha t$ tek fonksiyon olduğundan simetri doğrudan görülür.
■

Böylece bir fonksiyonun grafiğini belirleyen yerel bilgilerin tamamını topladık: monotonluk aralıkları, ekstremumlar, konvekslik aralıkları ve dönüm noktaları. Geriye grafiğin "uzaktan" nasıl göründüğü, yani sonsuzda ve tanımsızlık noktalarında nasıl davrandığı kaldı. Bunu ve bütün bilgileri tek bir çizimde birleştirmenin yolunu bir sonraki bölümde göreceğiz: Asimptotlar ve Grafik Çizimi.

 CC BY-NC-SA 4.0

17. Asimptotlar ve Grafik Çizimi

Dönüm Noktaları bölümünü bitirdiğimizde, bir fonksiyonun grafiği hakkında türevin söyleyebileceği hemen her şeyi toplamış olduk: birinci türev nerede arttığını nerede azaldığını, ikinci türev nerede konveks nerede konkav olduğunu, kritik noktalar ve dönüm noktaları da bu davranışların değiştiği yerleri veriyor. Ama bütün bu bilgi **yerel**dir; grafiğin küçük bir pencerede nasıl göründüğünü anlatır. Grafiği kâğıda çizebilmek için bir de **uzaktan görünüşe** ihtiyacımız var: x çok büyüdüğünde eğri nereye gidiyor? Tanımsız bir noktaya yaklaşırken ne oluyor?

Bu iki soruya verilen yanıt **asimptot** kavramıdır. Sezgisel olarak asimptot, eğrinin "sonsuzda yaklaştığı" bir doğrudur: eğri ile doğru arasındaki uzaklık sıfıra gider, ama eğri (genelde) doğruya hiç oturmaz. Analiz 1'de düşey ve yatay asimptotları limit diliyle tanımlamıştık; burada bunları eğik asimptotları da kapsayacak biçimde genişletecek ve asimptotun katsayılarını hesaplayan formülü ispatlayacağız.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: eğik asimptotun tanımı ve $k = \lim f(x)/x$, $l = \lim(f(x) - kx)$ formüllerinin **iki yönlü** ispatı; asimptotun tek olduğu; $+\infty$ ile $-\infty$ tarafındaki asimptotların birbirinden farklı olabileceği; rasyonel fonksiyonlarda asimptotların polinom bölmesiyle nasıl okunacağı; ve nihayet bütün bunları tek bir listede birleştiren **grafik çizim yordamı**. Bölümün son üçte biri, yordamın baştan sona işletildiği üç tam örneğe ayrılmıştır; bu örneklerde birinci ve ikinci türev, işaret tabloları, asimptotlar ve kesişim noktaları eksiksiz hesaplanır.

17.1 Asimptot Kavramı

Bir doğrunun eğriye "sonsuzda yaklaşması" ne demektir? En doğal ölçü, aynı x apsisinde eğri ile doğru arasındaki **düşey uzaklık**tır: $y = kx + l$ doğrusu için bu uzaklık $\mid f(x) - (kx + l) \mid$'dir. Tanımı bu büyüklüğün sıfıra gitmesi olarak kuracağız.

Tanım 17.1 (Eğik ve Yatay Asimptot). f fonksiyonu bir $(a, +\infty)$ aralığında tanımlı olsun. $k, l \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \to +\infty} \big(\, f(x) - (kx + l) \, \big) = 0$$

ise, $y = kx + l$ doğrusuna f'nin **$+\infty$'daki eğik asimptotu** (oblique asymptote) denir.

Benzer biçimde f, bir $(-\infty, b)$ aralığında tanımlıysa ve

$$\lim_{x \to -\infty} \big(\, f(x) - (kx + l) \, \big) = 0$$

ise $y = kx + l$ doğrusu f'nin **$-\infty$'daki eğik asimptotu**dur.

Özel olarak $k = 0$ ise doğru yataydır; bu durumda koşul $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ biçimini alır ve $y = l$ doğrusuna **yatay asimptot** (horizontal asymptote) denir.

Tanımdaki $f(x) - (kx + l)$ ifadesi düşey uzaklıktır; oysa "uzaklık" denince akla noktanın doğruya olan **dik** uzaklığı gelir. Bu iki büyüklük birbirinin sabit katıdır: $(x, f(x))$ noktasının $kx - y + l = 0$ doğrusuna dik uzaklığı

$$d(x) = \frac{\mid f(x) - (kx + l) \mid}{\sqrt{1 + k^2}}$$

olduğundan, $f(x) - (kx + l) \to 0$ ile $d(x) \to 0$ birbirine denktir. Yani tanım, "eğri ile doğru arasındaki uzaklık sıfıra gider" sezgisini gerçekten karşılar. Düşey uzaklıkla çalışmak yalnızca hesabı kolaylaştırır.

Tanım asimptotun **ne olduğunu** söyler ama **nasıl bulunacağını** söylemez. k ve l'yi bilmeden $f(x) - (kx + l)$ limitini kuramayız. Aşağıdaki teorem bu düğümü çözer: iki basit limitle önce k'yi, sonra l'yi hesaplarız.

Teorem 17.1 (Eğik Asimptotun Hesap Formülü). *f fonksiyonu $(a, +\infty)$ aralığında tanımlı ve $k, l \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki iki önerme denktir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. $y = kx + l$ doğrusu f'nin $+\infty$'daki eğik asimptotudur;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx \big) = l$ limitlerinin ikisi de vardır ve sonludur.

*Ayrıca f'nin $+\infty$'da asimptotu varsa bu asimptot **tektir**. Aynı ifadeler, $x \to -\infty$ limitleriyle, $-\infty$ tarafı için de geçerlidir.*

İspat.
(1) ⇒ (2). *$y = kx + l$ asimptot olsun ve*

$$\varepsilon(x) = f(x) - kx - l$$

yazalım; varsayım gereği $\varepsilon(x) \to 0$ ($x \to +\infty$). Bu eşitlikten $f(x) = kx + l + \varepsilon(x)$ ve $x > 0$ için

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{l}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}.$$

Sağdaki ikinci terim için $\dfrac{l}{x} \to 0$'dır. Üçüncü terim, ikisi de 0'a giden $\varepsilon(x)$ ve $\dfrac{1}{x}$ fonksiyonlarının çarpımıdır; sonsuzdaki limitlerin çarpım kuralı gereği (bkz. Analiz 1 (1)) $\dfrac{\varepsilon(x)}{x} \to 0 \cdot 0 = 0$. Aynı kuralın toplam kısmıyla

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k + 0 + 0 = k.$$

İkinci limit doğrudan gelir:

$$f(x) - kx = l + \varepsilon(x) \to l + 0 = l.$$

(2) ⇒ (1). *Şimdi iki limitin var ve sonlu olduğunu varsayalım. İkinci limitten*

$$f(x) - (kx + l) = \big(f(x) - kx \big) - l \to l - l = 0$$

elde edilir; bu tam olarak $y = kx + l$ doğrusunun asimptot olması demektir.
Teklik. *$y = kx + l$ ve $y = k'x + l'$ doğrularının ikisi de $+\infty$'da asimptot olsun. İki farkın farkını alalım:*

$$\big(f(x) - (k'x + l') \big) - \big(f(x) - (kx + l) \big) = (k - k')\,x + (l - l').$$

Sol taraf, sıfıra giden iki fonksiyonun farkı olduğundan 0'a gider. Öyleyse

$$\lim_{x\to+\infty} \big[(k - k')\,x + (l - l') \big] = 0.$$

Eğer $k \neq k'$ olsaydı, $(k - k')x + (l - l')$ ifadesinin mutlak değeri $x \to +\infty$ iken $+\infty$'a giderdi (birinci dereceden bir polinom sonsuza ıraksar) ve sonlu bir limiti olamazdı. Demek ki $k = k'$. Bu durumda limit $l - l'$ sabitine eşittir; sıfıra eşit olduğundan $l = l'$. Asimptot tektir.
■

Teoremin pratik okunuşu şudur: **önce k, sonra l.** k'yi bilmeden l'yi hesaplayamayız, çünkü l limiti k'yi içerir. Ayrıca hesap sırasında iki limitten biri yoksa ya da sonsuzsa, o taraf için asimptot **yoktur**; bu, teoremin (1) ⇒ (2) yönünün doğrudan sonucudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Yalnızca birinci limitin varlığı yetmez

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ limitinin var olması tek başına asimptotun varlığını **garanti etmez**; ikinci limitin de sonlu olması gerekir. İki karşı örnek:

- $f(x) = x + \ln x$ için $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln x}{x} \to 1$, yani $k = 1$. Ama $f(x) - 1\cdot x = \ln x \to +\infty$; ikinci limit sonlu değildir. Bu fonksiyonun $+\infty$'da eğik asimptotu yoktur. Grafiği $y = x$ doğrusundan gitgide (yavaş da olsa) uzaklaşır.
- $f(x) = x + \sin x$ için $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\sin x}{x} \to 1$, yani yine $k = 1$. Ama $f(x) - x = \sin x$ fonksiyonunun $+\infty$'da limiti yoktur (bkz. Analiz 1: $x_n = 2n\pi$ için $\sin x_n = 0$, $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ için $\sin y_n = 1$). Burada $f(x) - x$ **sınırlıdır** ama yakınsamaz; asimptot yine yoktur.

İkinci örnek şunu da gösterir: "grafik $y = x$ doğrusunun etrafında kalıyor" demek, "$y = x$ asimptottur" demek değildir. Tanım, farkın sınırlı kalmasını değil, **sıfıra gitmesini** ister.

ℹ Grafik asimptotunu kesebilir

Yaygın bir yanlış inanış, eğrinin asimptotuna hiç değmediğidir. Tanımda böyle bir şey yazmaz: yalnızca $x \to \pm\infty$ iken farkın sıfıra gitmesi istenir; sonlu bölgede eğri doğruyu istediği kadar kesebilir. Örneğin $f(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $+\infty$'da yatay asimptotu $y = 1$'dir: $x > 0$ için $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le \dfrac{1}{x} \to 0$ olduğundan sonsuzdaki sıkıştırma kuralı (bkz. Analiz 1 (2)) $\dfrac{\sin x}{x} \to 0$ verir. Ama $\sin x$ her $x = n\pi$ noktasında sıfırlandığından grafik $y = 1$ doğrusunu **sonsuz kez** keser. Birazdan inceleyeceğimiz $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ örneğinde de grafik, yatay asimptotu olan $y = 1$ doğrusunu $x = 0$ noktasında keser.

17.1.1 İki Tarafın Asimptotları Farklı Olabilir

Tanım 17.1 iki ayrı tanımdır: biri $x \to +\infty$, öteki $x \to -\infty$ içindir. Bunlar birbirinden bağımsızdır. Bir fonksiyonun bir tarafta asimptotu olup öbür tarafta olmayabilir; ya da her iki tarafta da asimptotu olup bunlar farklı doğrular olabilir. Aşağıdaki örnek ikinci durumun en temiz örneğidir.

Örnek 17.1 (Karekök İçeren Fonksiyonların Asimptotları). Aşağıdaki fonksiyonların $+\infty$ ve $-\infty$'daki eğik asimptotlarını bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2+x}$

Çözüm.
a) f bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır. Hesabın anahtarı $\sqrt{x^2} = |x|$ eşitliğidir; $x > 0$ iken $|x| = x$, $x < 0$ iken $|x| = -x$ olduğundan iki taraf **farklı** sonuç verecektir.
$+\infty$ tarafı. $x > 0$ için $\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ olduğundan

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Şimdi l'yi bulalım. Doğrudan yazınca $\infty - \infty$ belirsizliği çıkar (Tanım 11.1); eşleniğiyle genişletiriz:

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Payda $x \to +\infty$ iken $+\infty$'a gittiğinden $l = 0$. Demek ki $+\infty$'daki asimptot $y = x$'tir.
$-\infty$ tarafı. Şimdi $x < 0$ ve $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$. Buradan

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -1.$$

İkinci limitte $k=-1$ olduğundan $f(x)-kx = \sqrt{x^2+1}+x$ hesaplanır; yine eşlenikle

$$\sqrt{x^2+1}+x = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

$x\to-\infty$ iken $-x\to+\infty$ olduğundan payda $+\infty$'a gider; öyleyse $l=0$ ve $-\infty$'daki asimptot $y=-x$'tir.
Sonuç: $\sqrt{x^2+1}$ fonksiyonunun **iki farklı** eğik asimptotu vardır, $y=x$ ve $y=-x$. Bu şaşırtıcı değildir: grafiği, $y^2-x^2=1$ hiperbolünün üst kolu olan bu eğri, hiperbolün $y=\pm x$ asimptotlarına yaklaşır. Ayrıca f çift fonksiyondur ($f(-x)=f(x)$), dolayısıyla iki asimptot birbirinin y eksenine göre yansımasıdır.
b) $g(x)=\sqrt{x^2+x}$ ancak $x^2+x=x(x+1)\geq 0$ iken tanımlıdır; yani tanım kümesi $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$'dur. Her iki uçta da inceleme yapabiliriz.
$+\infty$ *tarafı.* $x>0$ için

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2},$$

burada son adımda pay ve paydayı x'e böldük ($x>0$ olduğundan bölme işaret değiştirmez). Asimptot: $y=x+\dfrac{1}{2}$.
$-\infty$ *tarafı.* Şimdi $x<-1$ ve $\sqrt{x^2+x}=-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$. Buradan

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -1,$$

$$l = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Asimptot: $y=-x-\dfrac{1}{2}$. Denetleyelim: $x=-100$ için $\sqrt{10000-100}=\sqrt{9900}\approx 99{,}4987$ ve $-x-\dfrac{1}{2}=99{,}5$; fark 10^{-3} mertebesindedir.
■

17.1.2 Düşey Asimptotlar

Eğik asimptotlar grafiğin uzaktan görünüşünü verir. Grafiğin **sonlu bir noktada** patladığı yerleri ise düşey asimptotlar anlatır. Bu kavramı Analiz 1'de sonsuz limitlerle birlikte tanımlamıştık (bkz. Analiz 1); burada grafik çizimi için gereken biçimde tekrar yazıyoruz.

Tanım 17.2 (Düşey Asimptot). f fonksiyonu a noktasının bir delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun. Aşağıdaki dört koşuldan **en az biri** sağlanıyorsa $x=a$ doğrusuna f'nin **düşey asimptotu** (vertical asymptote) denir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty.$$

Bu durum tipik olarak fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda, örneğin bir rasyonel fonksiyonun paydasının sıfır olduğu yerlerde ortaya çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0

İki uyarı gerekir. Birincisi, tanımsız olan her nokta düşey asimptot vermez: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonu $x=1$'de tanımsızdır ama $x \neq 1$ için $f(x) = x+1$ olduğundan $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$'dir; burada asimptot değil, **kaldırılabilir süreksizlik** vardır (bkz. Analiz 1). Paydanın kökü aynı zamanda payın kökü ise sadeleştirmeyi yapmak ve sonra karar vermek gerekir.
İkincisi, iki taraflı limitlerin **ikisini de** incelemek gerekir; işaretler farklı olabilir. Birazdan göreceğimiz $\dfrac{x^2}{x-1}$ örneğinde $x \to 1^+$ iken fonksiyon $+\infty$'a, $x \to 1^-$ iken $-\infty$'a gider. Grafiği çizerken bu iki dalın hangi yöne gittiğini bilmek şarttır.

17.2 Rasyonel Fonksiyonlarda Asimptotlar

Rasyonel fonksiyonlar, asimptotları en kolay okunan sınıftır; çünkü polinom bölmesi işi tek adımda bitirir. Bunu bir önerme olarak yazalım.

Önerme 17.1 (Rasyonel Fonksiyonun Asimptotları). *p ve q polinomları için $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ olsun; p ile q'nun ortak kökü bulunmadığını, $\deg p = m$, $\deg q = n$ olduğunu varsayalım. Polinom bölmesiyle*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \qquad \deg r < n$$

yazılabilir (s bölüm, r kalan polinomudur). O hâlde:

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{r(x)}{q(x)} = 0$*'dır; yani grafik, uzakta $y = s(x)$ eğrisine yaklaşır.*
2. *$m < n$ ise $s \equiv 0$'dır ve $y = 0$ her iki tarafta yatay asimptottur.*
3. *$m = n$ ise s sabittir; p ve q'nun baş katsayıları a_m ve b_n olmak üzere $y = \dfrac{a_m}{b_n}$ her iki tarafta yatay asimptottur.*
4. *$m = n+1$ ise $s(x) = kx + l$ birinci derecedendir ve $y = kx + l$ doğrusu **her iki tarafta** eğik asimptottur.*
5. *$m \geq n+2$ ise f'nin hiçbir tarafta eğik asimptotu yoktur.*

Ayrıca $q(a) = 0$ olan her a için $x = a$ düşey asimptottur.

> ***İspat.***
> ***(1)*** *$\deg r < \deg q$ olduğundan, pay ve paydayı x^n'e bölerek $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ ifadesinin $x \to \pm\infty$ iken 0'a gittiğini görürüz; bu, sonsuzda rasyonel fonksiyon limiti kuralının (bkz. Analiz 1) doğrudan sonucudur.*
> ***(2)*** *$m < n$ ise bölme işleminde bölüm sıfırdır ($s \equiv 0$, $r = p$). O hâlde $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \to 0$ ve $y = 0$ yatay asimptottur.*
> ***(3)*** *$m = n$ ise bölüm sabittir. Baş katsayıları karşılaştırarak $s = \dfrac{a_m}{b_n}$ bulunur; (1) gereği $f(x) - \dfrac{a_m}{b_n} = \dfrac{r(x)}{q(x)} \to 0$, yani $y = \dfrac{a_m}{b_n}$ yatay asimptottur.*
> ***(4)*** *$m = n+1$ ise $\deg s = m - n = 1$, yani $s(x) = kx + l$ ile $k \neq 0$. (1) gereği*
>
> $$f(x) - (kx + l) = \frac{r(x)}{q(x)} \to 0 \qquad (x \to \pm\infty),$$
>
> *yani $y = kx + l$ her iki tarafta eğik asimptottur. Dikkat edilecek nokta, s'nin x'in işaretinden bağımsız olmasıdır; bu yüzden rasyonel fonksiyonlarda iki taraftaki asimptotlar **daima aynıdır** (Örnek 17.1'daki karekök durumunun tersine).*
> ***(5)*** *$m \geq n+2$ ise $\deg s = m - n \geq 2$. O hâlde*
>
> $$\frac{f(x)}{x} = \frac{s(x)}{x} + \frac{r(x)}{x\,q(x)}$$
>
> *yazılır. Sağdaki ikinci terimde pay derecesi $\deg r < n$, payda derecesi $n+1$ olduğundan bu terim 0'a gider (bkz. Analiz 1 (1)). Birinci terim ise pay derecesi paydanınkinden $\deg s - 1 \geq 1$ fazla olan bir rasyonel ifadedir; Rasyonel Fonksiyonun Sonsuzdaki Limiti (3) gereği $\pm\infty$'a ıraksar. Toplamları da ıraksar (bkz.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Analiz 1 (3)); öyleyse $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *sonlu değildir; Teorem 17.1 gereği eğik asimptot yoktur. (Bununla birlikte (1) hâlâ geçerlidir: grafik* $y = s(x)$ ***eğrisine*** *yaklaşır.* $\deg s = 2$ *olduğunda buna "parabolik asimptot" denir.)*

Düşey asimptotlar. $q(a) = 0$ *ve ortak kök bulunmadığından* $p(a) \neq 0$ *olsun.* $x \to a$ *iken pay* $p(a) \neq 0$ *sayısına, payda* 0*'a gider; dolayısıyla* $|\, f(x)\,| \to +\infty$ *olur ve tek yönlü limitler* $\pm\infty$*'dur. Tanım 17.2 gereği* $x = a$ *düşey asimptottur.*

■

Önermenin kullanımı çok basittir: **böl, kalanı at.** Şimdi bunu birkaç fonksiyonda çalıştıralım.

Örnek 17.2 (Rasyonel Fonksiyonlarda Asimptot Hesabı). Aşağıdaki fonksiyonların bütün asimptotlarını bulunuz.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

b) $g(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

d) $u(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

Çözüm.

a) Pay derecesi 2, payda derecesi 1; fark tam olarak 1 olduğundan eğik asimptot bekleriz. Bölmeyi yapalım:

$$2x^2 + 3x - 1 = (x + 2)(2x - 1) + 1,$$

çünkü $(x + 2)(2x - 1) = 2x^2 + 3x - 2$ ve buna 1 eklenince pay elde edilir. Öyleyse

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x + 2}.$$

$x \to \pm\infty$ iken $\dfrac{1}{x+2} \to 0$ olduğundan $y = 2x - 1$ her iki tarafta eğik asimptottur. Ayrıca $x = -2$ paydanın köküdür ve payın oradaki değeri $2(-2)^2 + 3(-2) - 1 = 8 - 6 - 1 = 1 \neq 0$'dır; demek ki $x = -2$ düşey asimptottur. Yönler: $x \to -2^+$ iken $\dfrac{1}{x+2} \to +\infty$, yani $f(x) \to +\infty$; $x \to -2^-$ iken $f(x) \to -\infty$.

Formülleri doğrudan kullanmak da aynı sonucu verir:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x} = 2, \qquad l = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2} - 2x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x - 1}{x + 2} = -1.$$

b) Pay ve payda dereceleri eşittir; Önerme 17.1 (3) gereği yatay asimptot baş katsayıların oranıdır:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4} = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \text{ yatay asimptottur (her iki tarafta).}$$

Payda $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ olduğundan $x = 2$ ve $x = -2$ düşey asimptot adaylarıdır; payın bu iki noktadaki değeri de $3 \cdot 4 + 1 = 13 \neq 0$'dır. Yönleri belirlemek için payın işaretinin daima pozitif olduğunu ($3x^2 + 1 \geq 1$) ve paydanın işaretini kullanırız:

- $x \to 2^+$: $x^2 - 4 \to 0^+$, $g(x) \to +\infty$.
- $x \to 2^-$: $x^2 - 4 \to 0^-$, $g(x) \to -\infty$.
- $x \to -2^-$: $x^2 - 4 \to 0^+$, $g(x) \to +\infty$.
- $x \to -2^+$: $x^2 - 4 \to 0^-$, $g(x) \to -\infty$.

c) Pay derecesi 3, payda derecesi 2; fark 1. Bölme:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^3 + 2x = x(x^2+1) + x \quad \Rightarrow \quad h(x) = x + \frac{x}{x^2+1}.$$

$\dfrac{x}{x^2+1} \to 0$ olduğundan $y = x$ her iki tarafta eğik asimptottur. Payda hiç sıfırlanmadığından ($x^2 + 1 \geq 1$) düşey asimptot yoktur. Ek bir gözlem: $h(x) - x = \dfrac{x}{x^2+1}$ ifadesi $x > 0$ için pozitif, $x < 0$ için negatiftir; yani grafik $+\infty$ tarafında asimptotun üstünde, $-\infty$ tarafında altında kalır ve $x = 0$'da asimptotu **keser**.

d) $u(x) = \dfrac{x^3+1}{x} = x^2 + \dfrac{1}{x}$. Pay derecesi payda derecesinden 2 fazladır; Önerme 17.1 (5) gereği eğik asimptot yoktur. Gerçekten

$$\frac{u(x)}{x} = x + \frac{1}{x^2} \to \pm\infty \qquad (x \to \pm\infty),$$

yani k sonlu değildir. Buna karşılık $u(x) - x^2 = \dfrac{1}{x} \to 0$'dır: grafik uzakta $y = x^2$ parabolüne yapışır. $x = 0$ ise düşey asimptottur; $x \to 0^+$ iken $u(x) \to +\infty$, $x \to 0^-$ iken $u(x) \to -\infty$.

■

17.3 Grafik Çizim Yordamı

Artık grafik çizmek için gereken bütün parçalara sahibiz. Bunları sabit bir sırada uygulamak, hem hiçbir bilgiyi atlamamayı hem de çelişkileri erken yakalamayı sağlar. Aşağıdaki beş adım standart yordamdır.

Önerme 17.2 (Fonksiyon Grafiği Çizme Yordamı). *$y = f(x)$ eğrisini çizmek için sırasıyla şu adımlar izlenir.*

1. ***Tanım kümesi ve simetriler.***
   - *$f(x)$'in tanımlı olduğu bütün x değerlerini belirle. Süreksizlik noktalarını (örneğin paydanın sıfırlandığı yerleri, logaritmanın argümanının pozitif olma koşulunu, karekökün içinin işaretini) ayrıca not et.*
   - *Simetri ara: $f(-x) = f(x)$ ise f **çift**tir ve grafik y eksenine göre simetriktir; $f(-x) = -f(x)$ ise f **tek**tir ve grafik orijine göre simetriktir.*
   - *Periyodiklik ara: bir $T > 0$ için her x'te $f(x+T) = f(x)$ ise yalnızca bir periyot uzunluğunda çalışmak yeter.*
2. ***Kritik noktalar ve monotonluk.***
   - *$f'(x)$'i hesapla.*
   - *$f'(x) = 0$ olan ve f' tanımsız olan noktaları bul; bunlar kritik noktalardır (Tanım 7.3).*
   - *$f' > 0$ olan aralıklarda f artan, $f' < 0$ olan aralıklarda azalandır (Sonuç 8.3). İşaret tablosunu kur.*
   - *Tabloya bakarak yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını ve bu noktalardaki değerleri belirle.*
3. ***Dönüm noktaları ve konvekslik.***
   - *$f''(x)$'i hesapla.*
   - *$f'' > 0$ olan aralıklarda f konveks, $f'' < 0$ olan aralıklarda konkavdır.*
   - *f'''nin işaret değiştirdiği noktalar dönüm noktalarıdır. İkinci bir işaret tablosu kur.*
4. ***Asimptotlar.***
   - *Düşey: her süreksizlik noktasında iki tek yönlü limiti hesapla; $\pm\infty$ çıkanlar düşey asimptot verir.*
   - *Yatay ve eğik: tanım kümesi sağa (sola) sınırsızsa $k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ve $l = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$ hesapla; $-\infty$ tarafı için ayrıca tekrarla.*
5. ***Karakteristik noktalar ve çizim.***
   - *Kesişimleri bul: y ekseni kesişimi $(0, f(0))$; x ekseni kesişimleri $f(x) = 0$ denkleminin kökleri.*
   - *2. ve 3. adımda bulunan yerel ekstremumları ve dönüm noktalarını işaretle; asimptotları kesikli çizgiyle çiz.*
   - *Eğriyi bu noktalardan geçirerek, her aralıkta bulunan artan/azalan ve konveks/konkav bilgisine ve asimptot davranışına uyacak biçimde çiz.*

Yordamı uygularken birkaç noktaya dikkat etmek işi kolaylaştırır.

Adımların sırası tesadüfi değildir. Tanım kümesini bilmeden türev alınmaz; kritik noktaları bilmeden işaret tablosu kurulmaz; asimptotları bilmeden eğrinin uçlarının nereye gideceği kestirilemez. Ayrıca ilk adımda bulunan simetri, geri kalan bütün hesabı yarıya indirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bilgiler birbirini denetler. İki tablo tutarlı olmalıdır: f bir noktada yerel maksimum yapıyorsa o noktanın çevresinde konkav olması beklenir. Tablolar çelişiyorsa hesapta hata vardır.

17.3.1 Simetri ve Periyodiklik

Birinci adımın en çok atlanan parçası simetri kontrolüdür. Oysa maliyeti bir satırdır ve kazancı büyüktür.

Örnek 17.3 (Simetri ve Periyot Kontrolleri). Aşağıdaki fonksiyonların simetri ve periyodiklik özelliklerini belirleyiniz, grafik çiziminde bunun ne kazandırdığını söyleyiniz.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

c) $h(x) = x^3 - x + 1$

d) $\varphi(x) = 2\sin x + \sin 2x$

Çözüm.
a) $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$; f çifttir. Grafik y eksenine göre simetriktir; $[0, +\infty)$ üzerinde çizip yansıtmak yeter. Genel kural: yalnızca çift kuvvetler içeren bir polinom çift, yalnızca tek kuvvetler içeren bir polinom tektir.
b) $g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = -g(x)$; g tektir. Grafik orijine göre simetriktir. Ayrıca tek fonksiyon tanım kümesinde 0 varsa $g(0) = 0$ olmak zorundadır; burada gerçekten $g(0) = 0$'dır.
c) $h(-x) = -x^3 + x + 1$. Bu ne $h(x)$'e ne de $-h(x) = -x^3 + x - 1$'e eşittir; h ne tek ne çifttir. Ama simetri yine de vardır, sadece merkez orijin değildir: $\psi(x) = h(x) - 1 = x^3 - x$ fonksiyonu tektir, dolayısıyla h'nin grafiği $(0, 1)$ **noktasına göre** simetriktir. Bu, $h''(x) = 6x$ olduğundan $x = 0$'ın bir dönüm noktası olmasıyla uyumludur; üçüncü dereceden bir polinomun grafiği daima dönüm noktasına göre simetriktir.
d) Önce simetriye bakalım:

$$\varphi(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -\varphi(x)$$

Demek ki φ tektir. Ayrıca sin fonksiyonunun periyodu 2π, $\sin 2x$'in periyodu π olduğundan her x için

$$\varphi(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = 2\sin x + \sin 2x = \varphi(x),$$

yani $T = 2\pi$ bir periyottur. Öyleyse yalnızca $[0, \pi]$ aralığında çalışmak yeter: oradan teklik yardımıyla $[-\pi, 0]$'a, sonra periyotla bütün $\mathbb{R}$'ye geçilir. Dört birim uzunluğunda bir iş, tek bir yarım periyoda inmiştir.
■

17.4 Tam Çözümlü Grafik Çizimleri

Şimdi yordamı baştan sona, hiçbir adımı atlamadan üç fonksiyon üzerinde çalıştıralım. Her örnekte işaret tablolarını tam olarak kuracak, bütün karakteristik değerleri hesaplayacağız.

Örnek 17.4 (Kesirli Bir Fonksiyonun Grafiği). $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.
Birinci adım — tanım kümesi ve simetriler. Her $x \in \mathbb{R}$ için $1 + x^2 \geq 1 > 0$ olduğundan payda hiç sıfırlanmaz; tanım kümesi $\mathbb{R}$'dir ve f her yerde süreklidir, hatta sonsuz kez türevlenebilirdir.
Simetri yoktur:

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

Bu ifade $f(x)$'e eşit değildir (örneğin $f(1) = 2$ iken $f(-1) = 0$), $-f(x)$'e de eşit değildir ($f \geq 0$ olduğundan $-f \leq 0$). Periyodiklik de söz konusu değildir.
Hesabı kolaylaştıracak bir sadeleştirme yapalım. Payı açıp paydayı ayırırsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Bu biçim, hem asimptotu hem de $f(x)-1$ farkının işaretini hemen görünür kılar.
İkinci adım — birinci türev ve monotonluk. Bölüm kuralıyla (Teorem 3.2):

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(1+x^2) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(x+1)\left[\,(1+x^2) - x(x+1)\,\right]}{(1+x^2)^2} = \frac{2(x+1)(1-x)}{(1+x^2)^2}.$$

$(x+1)(1-x) = 1-x^2$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Aynı sonuç sadeleştirilmiş biçimden de gelir: $f = 1 + 2x(x^2+1)^{-1}$ türevlenirse $f' = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ bulunur. Şimdi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ya da $x = 1$. Payda daima pozitif olduğundan f''nün işareti $1-x^2$'nin işaretidir.

Aralık / nokta	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,1)$	$x=1$	$(1,+\infty)$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	azalan	yerel min	artan	yerel maks	azalan

Değerler: $f(-1) = \dfrac{0}{2} = 0$ ve $f(1) = \dfrac{4}{2} = 2$. Demek ki $(-1,0)$ yerel minimum, $(1,2)$ yerel maksimum noktasıdır.
Bunlar aynı zamanda **mutlak** ekstremumlardır. Minimum için gerekçe tek satırdır: payı bir tam kare, paydası pozitif olduğundan her x için $f(x) \geq 0 = f(-1)$'dir. Maksimum için tabloyu okumak yeter: f, $(-\infty,-1]$ üzerinde azalan, $[-1,1]$ üzerinde artan, $[1,+\infty)$ üzerinde azalandır. Azalan bir fonksiyon soldaki uç değerini aşamaz; dördüncü adımda hesaplayacağımız $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ limitiyle birlikte bu, birinci aralıkta $f(x) \leq 1 < 2$ verir. İkinci ve üçüncü aralıkta ise doğrudan $f(x) \leq f(1) = 2$'dir. Öyleyse her x için $f(x) \leq 2$. f sürekli olduğundan ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) 0 ile 2 arasındaki her değerin alındığını söyler: f'nin değer kümesi tam olarak $[0,2]$'dir.
Üçüncü adım — ikinci türev ve konvekslik. $f'(x) = 2(1-x^2)(1+x^2)^{-2}$ ifadesini çarpım kuralıyla türevleyelim:

$$f''(x) = 2\left[\,(-2x)(1+x^2)^{-2} + (1-x^2)\cdot(-2)(1+x^2)^{-3}\cdot 2x\,\right] = \frac{2}{(1+x^2)^3}\left[\,-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)\,\right].$$

Köşeli parantez içi $-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3 = 2x^3 - 6x = 2x(x^2-3)$ olduğundan

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Kökler: $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Payda daima pozitiftir; işaret, $4x$ ile x^2-3 çarpanlarından gelir.

Aralık / nokta	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$x=-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	$x=0$	$(0,\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konkav	dönüm	konveks	dönüm	konkav	dönüm	konveks

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç noktanın da her iki yanında f'' işaret değiştirdiğinden üçü de dönüm noktasıdır. Değerleri, sadeleştirilmiş biçimden hızla bulunur ($x^2=3$ için payda 4'tür):

$$f(-\sqrt{3}) = 1 + \frac{-2\sqrt{3}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}134, \qquad f(0) = 1, \qquad f(\sqrt{3}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}866.$$

Dördüncü adım — asimptotlar. Fonksiyon her yerde tanımlı ve sürekli olduğundan **düşey asimptot yoktur**. Sonsuzdaki davranış için pay ve paydanın dereceleri eşit olduğundan (Önerme 17.1 (3)) baş katsayıların oranına bakarız:

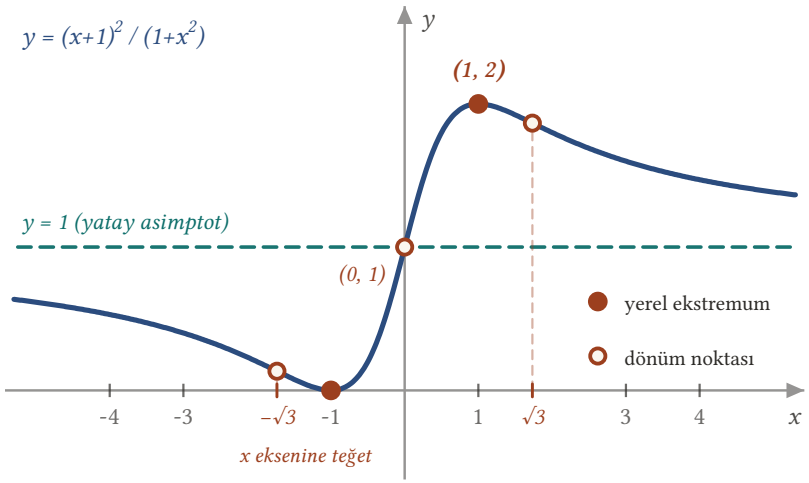
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1.$$

Öyleyse $y=1$ her iki tarafta yatay asimptottur; eğik asimptot yoktur ($k=0$).
Yaklaşma yönünü de belirleyelim: $f(x)-1 = \dfrac{2x}{x^2+1}$ ifadesi $x>0$ için pozitif, $x<0$ için negatiftir. Demek ki grafik $+\infty$ tarafında asimptotun **üstünden**, $-\infty$ tarafında **altından** yaklaşır ve tam olarak $x=0$'da asimptotu keser. Bu kesişim noktası aynı zamanda bir dönüm noktasıdır.
Beşinci adım — kesişimler ve çizim. y ekseni kesişimi $(0, f(0)) = (0,1)$. x ekseni kesişimi için $f(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=-1$; tek kesişim $(-1,0)$'dır ve bu nokta aynı zamanda yerel (ve mutlak) minimumdur — grafik eksene teğettir, çünkü orada $f'(-1)=0$'dır.
Bütün bilgiyi tek bir tabloda toplayalım:

x	$-\infty$	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$	$+\infty$
f'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f	$\to 1$	azalan konkav	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ dönüm	azalan konveks	0 min	artan konveks	1 dönüm	artan konkav	2 maks	azalan konkav	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ dönüm	azalan konveks	$\to 1$

Grafik şöyledir: $-\infty$'dan gelirken $y=1$'in hemen altından başlar, azalarak $x=-\sqrt{3}$'te bükülür, $(-1,0)$'da x eksenine teğet geçerek minimumunu yapar, sonra hızla yükselip $(0,1)$'de asimptotu keser, $(1,2)$'de maksimumuna ulaşır, ardından azalarak $y=1$'e üstten yaklaşır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.1: $f(x) = (x+1)^2/(1+x^2)$ fonksiyonunun beş adımlık incelemeden çıkan grafiği. Dolu noktalar yerel — burada aynı zamanda mutlak — ekstremumlardır: $(-1, 0)$ minimumunda grafik x eksenine teğettir, $(1, 2)$ maksimumunda tepe yapar. İçi boş noktalar üç dönüm noktasıdır; apsisleri $-\sqrt{3}$, 0 ve $\sqrt{3}$, ordinatları sırasıyla $1-\sqrt{3}/2 \approx 0{,}134$, 1 ve $1+\sqrt{3}/2 \approx 1{,}866$'dır. Kesikli $y = 1$ doğrusu iki yönlü yatay asimptottur: grafik $-\infty$ tarafında altından, $+\infty$ tarafında üstünden yaklaşır ve asimptotu tam olarak dönüm noktası $(0, 1)$'de keser.

■

İkinci örnek, hem düşey hem de eğik asimptotu olan bir fonksiyondur. Buradaki yeni zorluk, tanım kümesinin ikiye ayrılması ve grafiğin iki ayrı koldan oluşmasıdır.

Örnek 17.5 (Eğik Asimptotu Olan Bir Fonksiyonun Grafiği). $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ fonksiyonunu inceleyip grafiğini çiziniz.

Çözüm.
Birinci adım — tanım kümesi ve simetriler. Payda $x = 1$'de sıfırlanır ve pay orada $1 \neq 0$ değerini alır; sadeleşme yoktur. Tanım kümesi

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Tanım kümesi 0'a göre simetrik olmadığından ($1 \notin D_f$ ama $-1 \in D_f$) tek/çift olma sorusu zaten anlamsızdır; periyodiklik de yoktur.
Polinom bölmesini şimdiden yapalım, çünkü bütün hesabı kolaylaştırır. $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$ olduğundan

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

İkinci adım — birinci türev ve monotonluk. Bölüm kuralıyla:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Bölünmüş biçimden denetleyelim: $f = x + 1 + (x-1)^{-1}$ türevlenirse $f' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; aynı sonuç.
Kritik noktalar: $x = 0$ ve $x = 2$. ($x = 1$ tanım kümesinde olmadığından kritik nokta değildir, ama işaret tablosunda bir ayraç olarak yer alır.) Payda daima pozitif olduğundan işaret $x(x-2)$'den gelir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aralık / nokta	$(-\infty,0)$	$x=0$	$(0,1)$	$x=1$	$(1,2)$	$x=2$	$(2,+\infty)$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	tanımsız	$-$	0	$+$
f	artan	yerel maks	azalan	asimptot	azalan	yerel min	artan

Değerler: $f(0)=\dfrac{0}{-1}=0$ ve $f(2)=\dfrac{4}{1}=4$. Demek ki $(0,0)$ yerel maksimum, $(2,4)$ yerel minimum noktasıdır.
Buradaki tuhaflığa dikkat: yerel **maksimum** değeri 0, yerel **minimum** değeri 4'tür; yani maksimum, minimumdan küçüktür. Çelişki yoktur, çünkü bunlar farklı kollardaki yerel ekstremumlardır ve aralarında düşey asimptot bulunur. Fonksiyon $(0,4)$ aralığındaki hiçbir değeri almaz; değer kümesi $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$'dur.
Üçüncü adım — ikinci türev ve konvekslik. En kısa yol bölünmüş biçimdir: $f'(x)=1-(x-1)^{-2}$ olduğundan

$$f''(x)=2(x-1)^{-3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Aynı sonucu bölüm kuralıyla da alırız:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left[\,2(x-1)^2-2(x^2-2x)\,\right]}{(x-1)^4}=\frac{2\left[\,(x^2-2x+1)-(x^2-2x)\,\right]}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Aralık / nokta	$(-\infty,1)$	$x=1$	$(1,+\infty)$
$(x-1)^3$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	tanımsız	$+$
f	konkav	asimptot	konveks

f'' hiçbir noktada sıfır olmaz ve işaret değişimi yalnızca $x=1$'de olur; ama $1\notin D_f$ olduğundan **dönüm noktası yoktur**. Bu, konvekslik değişiminin her zaman bir dönüm noktası anlamına gelmediğini gösteren tipik durumdur: değişim, tanım kümesinin dışındaki bir yerde gerçekleşir.
Dördüncü adım — asimptotlar. *Düşey:* $x\to 1$ iken pay 1'e, payda 0'a gider. İşaretle birlikte:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty,$$

çünkü $x\to 1^+$ iken $x-1\to 0^+$, $x\to 1^-$ iken $x-1\to 0^-$'dir. Öyleyse $x=1$ düşey asimptottur.
Eğik: Pay derecesi 2, payda derecesi 1; fark tam olarak 1 olduğundan Önerme 17.1 (4) gereği eğik asimptot vardır. Bölünmüş biçimden doğrudan okunur:

$$f(x)-(x+1)=\frac{1}{x-1}\to 0\qquad (x\to\pm\infty),$$

yani $y=x+1$ her iki tarafta eğik asimptottur. Formüllerle de aynı sonuç bulunur:

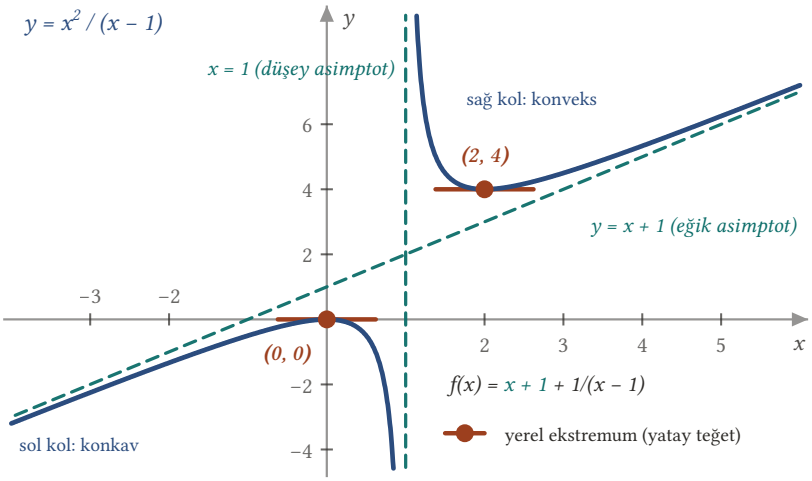
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1,\qquad l=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Yaklaşma yönü: $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-1}$ ifadesi $x>1$ için pozitif, $x<1$ için negatiftir. Demek ki sağ kol asimptotun üstünde, sol kol altında kalır; grafik asimptotu hiç kesmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Beşinci adım — kesişimler ve çizim. $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$; tek kesişim orijindir ve hem x hem y ekseni kesişimidir. Orada $f'(0)=0$ olduğundan grafik x eksenine teğettir.
Birkaç yardımcı değer: $f(-1)=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1/4}{-1/2}=-\dfrac{1}{2}$, $f(3)=\dfrac{9}{2}=4{,}5$, $f(4)=\dfrac{16}{3}\approx 5{,}33$.
Grafik iki koldan oluşur:

- **Sol kol** ($x<1$): $-\infty$'dan gelirken $y=x+1$ doğrusunun altından yükselir, $(0,0)$'da eksene teğet olarak yerel maksimumunu yapar, sonra azalarak $x\to 1^-$ iken $-\infty$'a dalar. Bu kol boyunca eğri konkavdır.
- **Sağ kol** ($x>1$): $x\to 1^+$ iken $+\infty$'dan iner, $(2,4)$'te yerel minimumunu yapar, sonra artarak $y=x+1$ doğrusuna üstten yaklaşır. Bu kol boyunca eğri konvekstir.



Şekil 17.2: $f(x)=x^2/(x-1)$ fonksiyonunun iki koldan oluşan grafiği. Kesikli $x=1$ doğrusu düşey, kesikli $y=x+1$ doğrusu eğik asimptottur; bölünmüş biçim $f(x)=x+1+1/(x-1)$ ikisini de bir bakışta verir. Dolu noktalar yerel ekstremumlardır: $(0,0)$ yerel maksimumunda grafik x eksenine teğettir, $(2,4)$ yerel minimumunda çukur yapar; kısa turuncu parçalar bu iki noktadaki yatay teğetlerdir. Sol kol eğik asimptotun altında ve konkav, sağ kol üstünde ve konvekstir; grafik asimptotu hiç kesmez ve yerel maksimum değeri yerel minimum değerinden küçük olduğundan $(0,4)$ aralığındaki hiçbir değeri almaz.

■

Son örnekte üstel bir fonksiyonla çalışacağız. Burada asimptot yalnızca bir tarafta vardır; öbür tarafta $\lim f(x)/x$ sonlu olmadığı için asimptot bulunmaz.

Örnek 17.6 (Üstel Çarpanlı Bir Fonksiyonun Grafiği). $f(x)=x\,e^{-x}$ fonksiyonunu inceleyip grafiğini çiziniz.

Çözüm.
Birinci adım — tanım kümesi ve simetriler. Üstel fonksiyon bütün $\mathbb{R}$'de tanımlı ve pozitiftir; f de $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve sonsuz kez türevlenebilirdir. $f(-x)=-xe^{x}$ ifadesi ne $f(x)$'e ne $-f(x)=-xe^{-x}$'e eşittir; simetri ve periyodiklik yoktur.
İşaret hemen görülür: $e^{-x}>0$ olduğundan $f(x)$'in işareti x'in işaretidir. Yani $x>0$ için $f>0$, $x<0$ için $f<0$ ve $f(0)=0$.
İkinci adım — birinci türev ve monotonluk. Çarpım kuralı ve $(e^{-x})'=-e^{-x}$ (zincir kuralı, Teorem 4.1) ile:

$$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)\,e^{-x}.$$

$e^{-x}>0$ olduğundan f''nün işareti $1-x$'in işaretidir; tek kritik nokta $x=1$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aralık / nokta	$(-\infty,1)$	$x=1$	$(1,+\infty)$
$1-x$	$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	artan	yerel maks	azalan

Değer: $f(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\approx 0{,}368$. Nokta $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$'dir. Fonksiyon $(-\infty,1]$ üzerinde artan, $[1,+\infty)$ üzerinde azalan olduğundan bu aynı zamanda **mutlak maksimum**tur: her x için $xe^{-x}\le\dfrac{1}{e}$, yani $x\le e^{x-1}$.

Üçüncü adım — ikinci türev ve konvekslik. $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ ifadesini yine çarpım kuralıyla türevleyelim:

$$f''(x)=(-1)e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=e^{-x}\left[-1-(1-x)\right]=(x-2)\,e^{-x}.$$

İşaret $x-2$'den gelir; tek kök $x=2$'dir.

Aralık / nokta	$(-\infty,2)$	$x=2$	$(2,+\infty)$
$x-2$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	konkav	dönüm	konveks

f'' burada işaret değiştirdiğinden $x=2$ bir dönüm noktasıdır; değeri $f(2)=2e^{-2}=\dfrac{2}{e^2}\approx 0{,}271$'dir. Nokta $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$.

Dördüncü adım — asimptotlar. Fonksiyon her yerde sürekli olduğundan düşey asimptot yoktur.

$+\infty$ tarafı. Üstel fonksiyon her kuvvetten hızlı büyür (bkz. Analiz 1); istenirse L'Hôpital kuralıyla da (Teorem 11.3) doğrulanır:

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0.$$

Öyleyse $y=0$, yani x ekseni, $+\infty$'da yatay asimptottur. $x>0$ için $f(x)>0$ olduğundan grafik asimptota **üstten** yaklaşır.

$-\infty$ tarafı. $x\to-\infty$ iken $x\to-\infty$ ve $e^{-x}\to+\infty$ olduğundan $f(x)=xe^{-x}\to-\infty$. Eğik asimptot olup olmadığına bakalım:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty.$$

Limit sonlu olmadığından Teorem 17.1 gereği $-\infty$ tarafında **hiçbir asimptot yoktur**. Grafik orada her doğrudan daha dik biçimde aşağı düşer.

Beşinci adım — kesişimler ve çizim. $f(x)=0\Leftrightarrow xe^{-x}=0\Leftrightarrow x=0$ (çünkü e^{-x} hiç sıfırlanmaz). Tek kesişim orijindir; $f'(0)=1\neq 0$ olduğundan grafik eksene teğet değil, eğimi 1 olan bir doğrultuyla kesiyor.

Birkaç yardımcı değer: $f(-1)=-e\approx -2{,}718$, $\left(f\!-\!\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\sqrt{e}\approx -0{,}824$, $f(3)=3e^{-3}\approx 0{,}149$, $f(5)=5e^{-5}\approx 0{,}034$.

Özet: eğri $-\infty$'dan çok dik biçimde yükselerek gelir, orijinden eğimi 1 ile geçer, $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$'de tepe noktasını yapar, $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$'de bükülme yönünü değiştirir ve sonra sıfıra üstten, gitgide yavaşlayarak yaklaşır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Çizimde küçük ama kritik ayrıntılar

Üç örnekte de tekrarlanan birkaç alışkanlığı not edelim.

- **Bölme, türevden önce gelir.** $\dfrac{x^2}{x-1} = x+1+\dfrac{1}{x-1}$ yazıldığında hem asimptot bir bakışta okunur, hem de türevler çok daha kolay alınır. Kesirli fonksiyonlarda ilk iş polinom bölmesidir.
- **Payda daima pozitifse işaret tablosunda yok sayılır.** $(1+x^2)^2$, $(x-1)^2$, e^{-x} gibi çarpanlar işareti belirlemez; yalnızca tanımsızlık noktasını verir.
- **Ekstremum değeri hesaplanmadan nokta işaretlenmez.** "Kritik nokta $x=2$" bilgisi tek başına çizime yaramaz; $f(2)=4$ gerekir. Dönüm noktaları için de aynısı geçerlidir.
- **Asimptota yaklaşma yönü, farkın işaretinden okunur.** $f(x)-(kx+l)$ pozitifse eğri doğrunun üstünde, negatifse altındadır. Çizimin en sık atlanan ayrıntısıdır.

17.5 Alıştırmalar

Alıştırma 17.1 (Asimptotlar ve Grafik Çizimi Üzerine).

a) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ fonksiyonunun tanım kümesini, asimptotlarını, yerel ekstremumlarını ve konvekslik aralıklarını bulunuz.

b) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ fonksiyonunu grafik çizim yordamına göre inceleyiniz: tanım kümesi, asimptotlar, ekstremumlar, dönüm noktası.

c) $h(x)=x+\arctan x$ fonksiyonunun $+\infty$ ve $-\infty$'daki asimptotlarını bulunuz ve bunların farklı olduğunu gösteriniz.

d) $u(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ fonksiyonunun simetrisini, asimptotlarını, ekstremumlarını ve konveksliğini belirleyiniz. Dönüm noktası var mıdır?

e) $v(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x-2}$ fonksiyonunun hiçbir tarafta eğik asimptotu olmadığını gösteriniz; grafiğin uzakta hangi eğriye yaklaştığını bulunuz ve düşey asimptotunu yönleriyle belirtiniz.

f) $w(x)=x+\sin x$ için $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{w(x)}{x}=1$ olduğunu, buna rağmen w'nin $+\infty$'da eğik asimptotu bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm.
a) *Tanım kümesi.* Payda $x=-1$'de sıfırlanır; pay orada $1-1+1=1\neq 0$'dır, sadeleşme yoktur. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Bölme. $x^2+x+1=(x+1)x+1$ olduğundan

$$f(x)=x+\frac{1}{x+1}.$$

Asimptotlar. $\dfrac{1}{x+1}\to 0$ olduğundan $y=x$ her iki tarafta eğik asimptottur. $x\to -1^+$ iken $\dfrac{1}{x+1}\to+\infty$, dolayısıyla $f(x)\to+\infty$; $x\to -1^-$ iken $f(x)\to-\infty$. Öyleyse $x=-1$ düşey asimptottur.
Birinci türev.

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Kritik noktalar $x=0$ ve $x=-2$. Payda pozitif olduğundan işaret $x(x+2)$'den gelir:

Aralık / nokta	$(-\infty,-2)$	$x=-2$	$(-2,-1)$	$x=-1$	$(-1,0)$	$x=0$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	tanımsız	$-$	0	$+$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aralık / nokta	$(-\infty,-2)$	$x=-2$	$(-2,-1)$	$x=-1$	$(-1,0)$	$x=0$	$(0,+\infty)$
f	artan	yerel maks	azalan	asimptot	azalan	yerel min	artan

Değerler: $f(-2)=-2+\dfrac{1}{-1}=-3$ ve $f(0)=0+1=1$. Yerel maksimum $(-2,-3)$, yerel minimum $(0,1)$'dir. Yine maksimum değeri minimum değerinden küçüktür; aralarında düşey asimptot bulunduğu için çelişki yoktur. Değer kümesi $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$'dur.
İkinci türev. $f'(x)=1-(x+1)^{-2}$ olduğundan

$$f''(x)=2(x+1)^{-3}=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

$x<-1$ için $f''<0$ (konkav), $x>-1$ için $f''>0$ (konveks). f'' hiç sıfırlanmadığından ve işaret değişimi tanım kümesinin dışındaki $x=-1$'de olduğundan **dönüm noktası yoktur**.
Kesişimler. $x^2+x+1=0$ denkleminin ayırtedicisi $1-4=-3<0$; reel kök yoktur, yani grafik x eksenini kesmez. y ekseni kesişimi $(0,1)$'dir (aynı zamanda yerel minimum).
b) *Tanım kümesi.* Logaritma için $x>0$ ve payda için $x\neq 0$ gerekir: $D_g=(0,+\infty)$. Bu küme 0'a göre simetrik olmadığından tek/çift sorusu anlamsızdır.
Asimptotlar. $x\to 0^+$ iken $\ln x\to-\infty$ ve $\dfrac{1}{x}\to+\infty$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty;$$

$x=0$ düşey asimptottur. $x\to+\infty$ için Büyüme Hızları (ya da Teorem 11.3) gereği

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0,$$

yani $y=0$ yatay asimptottur. Eğik asimptot yoktur ($k=0$).
Birinci türev. Bölüm kuralıyla

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$x^2>0$ olduğundan işaret $1-\ln x$'ten gelir: $g'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$.

Aralık / nokta	$(0,e)$	$x=e$	$(e,+\infty)$
$1-\ln x$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	artan	yerel maks	azalan

Değer: $g(e)=\dfrac{1}{e}\approx 0{,}368$. Bu, tanım kümesinin tamamında **mutlak maksimum**tur; değer kümesi $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$'dir.
İkinci türev. $g'(x)=(1-\ln x)x^{-2}$ olduğundan

$$g''(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)x^{-2}+(1-\ln x)(-2x^{-3})=x^{-3}\left[-1-2(1-\ln x)\right]=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

$x>0$ olduğundan işaret $2\ln x-3$'ten gelir: $g''(x)=0\Leftrightarrow\ln x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{3/2}\approx 4{,}482$.

Aralık / nokta	$(0,e^{3/2})$	$x=e^{3/2}$	$(e^{3/2},+\infty)$
$2\ln x-3$	$-$	0	$+$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aralık / nokta	$(0, e^{3/2})$	$x = e^{3/2}$	$(e^{3/2}, +\infty)$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
g	konkav	dönüm	konveks

Dönüm noktası $\left(e^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2}\right) \approx (4{,}482;\, 0{,}335)$.
Kesişimler. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; tek kesişim $(1, 0)$'dır. $0 \notin D_g$ olduğundan y ekseni kesişimi yoktur. Grafik: $x \to 0^+$ iken $-\infty$'dan yükselerek gelir, $(1, 0)$'da ekseni keser, $\left(e, \frac{1}{e}\right)$'de tepe yapar, $e^{3/2}$'de bükülme yönünü değiştirir ve $y = 0$'a üstten yaklaşır.

c) h bütün $\mathbb{R}$'de tanımlıdır. arctan fonksiyonu sınırlıdır: her x için $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ ve

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

$+\infty$ tarafı.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \arctan x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\arctan x}{x}\right) = 1 + 0 = 1,$$

çünkü $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ sonlu bir limittir ve $\frac{1}{x} \to 0$'dır; çarpım kuralı gereği (bkz. Analiz 1 (1)) $\frac{\arctan x}{x} \to \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$. Sonra

$$l = \lim_{x\to+\infty} \big(h(x) - x \big) = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Asimptot: $y = x + \frac{\pi}{2}$.
$-\infty$ tarafı. Aynı hesapla $k = 1$ ve

$$l = \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

asimptot $y = x - \frac{\pi}{2}$.
İki asimptot paraleldir ama farklıdır; aralarındaki düşey uzaklık π'dir. Bu, Örnek 17.1'daki durumun bir başka biçimidir: eğimler aynı, sabit terimler farklıdır. Ayrıca $h'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0$ olduğundan h bütün $\mathbb{R}$'de kesin artandır (Sonuç 8.3) ve grafik iki asimptotun arasındaki şeritte kalarak alttakinden üsttekine geçer.

d) *Simetri ve tanım kümesi.* $u(-x) = \frac{x^2}{x^2-1} = u(x)$; u çifttir, grafik y eksenine göre simetriktir. Payda $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ olduğundan $D_u = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Asimptotlar. Pay ve payda dereceleri eşit olduğundan yatay asimptot $y = 1$'dir:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1.$$

Sadeleştirilmiş biçim $u(x) = 1 + \frac{1}{x^2-1}$'dir; $|\,x\,| > 1$ için fark pozitif olduğundan grafik asimptota **üstten** yaklaşır. Düşey asimptotlar $x = 1$ ve $x = -1$'dir; işaretler:

$$\lim_{x\to1^+} u(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^-} u(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} u(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1^+} u(x) = -\infty.$$

Birinci türev. $u = 1 + (x^2-1)^{-1}$ olduğundan

$$u'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

Payda pozitif olduğundan işaret $-2x$'ten gelir: $x < 0$ (ve $x \neq -1$) için $u' > 0$, $x > 0$ (ve $x \neq 1$) için $u' < 0$. Tek kritik nokta $x = 0$'dır ve $u(0) = 0$; $(0, 0)$ yerel maksimumdur. Mutlak maksimum değildir: $|\,x\,| > 1$ için $u(x) > 1 > 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci türev.

$$u''(x) = -2(x^2-1)^{-2} + (-2x)(-2)(x^2-1)^{-3}(2x) = \frac{-2(x^2-1)+8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

Pay her zaman pozitiftir ($6x^2+2 \geq 2$); işaret $(x^2-1)^3$'ten gelir. $|\,x\,| < 1$ için $u'' < 0$ (konkav), $|\,x\,| > 1$ için $u'' > 0$ (konveks). u'' hiç sıfırlanmadığından ve işaret değişimleri tanım kümesinin dışındaki $x = \pm 1$ noktalarında olduğundan **dönüm noktası yoktur**.
Değer kümesi. Orta kolda $(-1 < x < 1)$ fonksiyon $(-\infty, 0]$ değerlerini, dış kollarda $(1, +\infty)$ değerlerini alır.
e) *Tanım kümesi ve bölme.* Payda $x = 2$'de sıfırlanır; pay orada $8 - 8 + 1 = 1 \neq 0$'dır, sadeleşme yoktur ve $D_v = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Bölme kolaydır: $x^3 - 2x^2 + 1 = x^2(x-2) + 1$ olduğundan

$$v(x) = x^2 + \frac{1}{x-2}.$$

Eğik asimptot yoktur. $x \neq 0$ ve $x \neq 2$ için

$$\frac{v(x)}{x} = x + \frac{1}{x(x-2)}.$$

Sağdaki ikinci terim $x \to \pm\infty$ iken 0'a gider, birinci terim ise $x \to +\infty$ iken $+\infty$'a, $x \to -\infty$ iken $-\infty$'a ıraksar; sonsuzla toplama kuralı gereği (bkz. Analiz 1 (3)) toplam da aynı yönde ıraksar. Demek ki $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{v(x)}{x}$ hiçbir tarafta sonlu değildir. Teorem 17.1'nun (1) $\Rightarrow$ (2) yönü gereği, bir eğik asimptot olsaydı bu limit sonlu olurdu; öyleyse **eğik asimptot yoktur**. (Aynı sonuç Önerme 17.1 (5)'ten de çıkar: pay derecesi 3, payda derecesi 1, fark $2 \geq 2$.)
Uzaktaki eğri. Buna karşılık

$$v(x) - x^2 = \frac{1}{x-2} \to 0 \qquad (x \to \pm\infty),$$

yani grafik uzakta $y = x^2$ parabolüne yapışır; bu bir "parabolik asimptot"tur. Yaklaşma yönü de okunur: fark $x > 2$ için pozitif, $x < 2$ için negatif olduğundan grafik sağda parabolün üstünde, solda altında kalır.
Düşey asimptot. $x \to 2^+$ iken $x - 2 \to 0^+$ olduğundan $\dfrac{1}{x-2} \to +\infty$; $x^2 \to 4$ sonlu olduğundan $v(x) \to +\infty$. Benzer biçimde $x \to 2^-$ iken $\dfrac{1}{x-2} \to -\infty$ ve $v(x) \to -\infty$. Öyleyse $x = 2$ düşey asimptottur.
f) Her x için $|\sin x\,| \leq 1$'dir. $x > 0$ için

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \to 0,$$

dolayısıyla sonsuzdaki sıkıştırma kuralıyla (bkz. Analiz 1 (2)) $\dfrac{\sin x}{x} \to 0$ ve

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{w(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Yani $k = 1$'dir. Şimdi ikinci limite bakalım:

$$w(x) - 1 \cdot x = \sin x.$$

sin fonksiyonunun $+\infty$'da limiti yoktur. Bunu dizisel ölçütle (bkz. Analiz 1) görebiliriz: $x_n = 2n\pi \to +\infty$ için $\sin x_n = 0 \to 0$, oysa $y_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \to +\infty$ için $\sin y_n = 1 \to 1$. İki dizi farklı limitler verdiğinden $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ yoktur.
Teorem 17.1 gereği, $y = kx + l$ biçiminde bir asimptot olsaydı $k = \lim \dfrac{w(x)}{x} = 1$ ve ardından $l = \lim(w(x) - x)$ var olurdu; ikinci limit bulunmadığından asimptot yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dikkat çekici olan, $\mid w(x) - x \mid = \mid \sin x \mid \leq 1$ eşitsizliğidir: grafik $y = x$ doğrusundan hiçbir zaman 1 birimden fazla uzaklaşmaz. Yine de asimptot değildir, çünkü tanım farkın **sıfıra gitmesini** ister, sınırlı kalmasını değil.
■

Böylece türevin fonksiyon incelemesindeki bütün araçlarını bir araya getirmiş olduk: monotonluk, ekstremumlar, konvekslik, dönüm noktaları ve asimptotlar. Bundan sonraki kısımda yön değiştiriyor ve ters soruyu soruyoruz: türevi verilen bir fonksiyonu bulabilir miyiz? Yanıt bizi integral kavramına götürecek: İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral.

 CC BY-NC-SA 4.0

18. İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral

Asimptotlar ve Grafik Çizimi bölümüyle birlikte türevin fonksiyon incelemesindeki bütün rolünü kullanmış olduk: elimizde bir f fonksiyonu varken f' ve f'' üzerinden monotonluğu, ekstremumları, konveksliği, dönüm noktalarını ve asimptotları okuyabiliyoruz. Kısacası **verilen bir fonksiyondan türevine** giden yolu artık iyi biliyoruz.
Şimdi soruyu tersine çeviriyoruz: **türevi verilen bir fonksiyonu bulabilir miyiz?** Yani elimizde f varken, $F' = f$ olacak biçimde bir F arıyoruz. Bu, ilk bakışta yalnızca "türev tablosunu sağdan sola okumak" gibi görünen, ama gerçekte çok daha zengin bir problemdir. Türev alma işlemi bir **algoritmadır**: toplam, çarpım, bölüm ve zincir kurallarını sırayla uygularsanız, elle yazılabilen her fonksiyonun türevini sonlu adımda bulursunuz. Tersi böyle değildir. e^{-x^2} gibi son derece masum bir fonksiyonun ilkelini, temel fonksiyonlardan hiçbir sonlu birleşimle yazamazsınız. Bu yüzden integral almak bir hesap değil, bir **tanıma ve dönüştürme** sanatıdır; sonraki birkaç bölüm bu sanatın tekniklerine ayrılacaktır.
Bu tersine soru iki doğal alt soruyu doğurur: aradığımız F **var mıdır** ve varsa **tek midir?** İkincisine cevabımız hemen olacak — hayır, tek değildir, ama bir aralık üzerinde çalıştığımız sürece belirsizlik yalnızca bir toplamsal sabittir. Birincisine bu bölümde tam cevap veremeyeceğiz (tam cevap, belirli integrali kurduktan sonra analizin temel teoremiyle gelecek); ama bir **engel** bulacağız: türevlerin ara değer özelliği, yani Darboux özelliği. Bu özelliği taşımayan hiçbir fonksiyonun ilkeli yoktur; buradan, sıçrama süreksizliği olan hiçbir fonksiyonun ilkelinin bulunmadığı sonucu çıkacak.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: ilkel (primitif) fonksiyon tanımını ve genel ilkeli; ilkel almanın lineerliğini; aynı fonksiyonun iki ilkelinin bir **aralık** üzerinde ancak bir sabitle farklı olabileceğini ve aralık koşulu kalktığında bu ifadenin neden bozulduğunu; belirsiz integralin tanımını, gösterimini ve cebirsel özelliklerini; ilkelin sürekli olduğunu; Darboux özelliğinin ilkelin varlığı için **gerekli**, sürekliliğinse **gerekli olmadığını**; ve son olarak, bütün integral hesaplarının üzerine kurulacağı **temel integraller tablosunu**.

18.1 İlkel Fonksiyon

Tanımla başlayalım. Bütün bölüm boyunca $I \subseteq \mathbb{R}$ bir **aralıktır** (bkz. Analiz 1); aralık olma koşulunun neden bu kadar önemli olduğunu birazdan göreceğiz.

Tanım 18.1 (İlkel Fonksiyon). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f, F : I \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer F, I üzerinde türevlenebilirse (Tanım 2.2) ve her $x \in I$ için

$$F'(x) = f(x)$$

ise, F fonksiyonuna f'nin I üzerindeki bir **ilkel fonksiyonu** (antiderivative), kısaca bir **ilkeli** ya da bir **primitifi** (primitive function) denir.
Aralığın uç noktaları I'ya dahilse, o noktalarda türevden tek yönlü türev anlaşılır.

Tanımın istediği şey iki katmanlıdır: F **her noktada türevlenebilir olacak** ve türevi **tam olarak f'ye eşit olacak**. "Neredeyse her yerde", "sonlu sayıda nokta dışında" gibi gevşetmeler bu tanımda yoktur; birazdan işaret fonksiyonu örneğinde, tek bir noktadaki uyuşmazlığın bile ilkelin varlığını tamamen yok ettiğini göreceğiz.

Örnek 18.1 (Aynı Fonksiyonun Birden Çok İlkeli). $f(x) = 3x^2$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki ilkellerini inceleyelim.

> **Çözüm.**
> $F_1(x) = x^3 + 5$ ve $F_2(x) = x^3 - 8$ fonksiyonlarını alalım. Her ikisi de $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir; sabit fonksiyonun türevi sıfır, x^3'ün türevi ise $3x^2$ olduğundan (Teorem 3.2'nin toplam kuralı ile Lemma 3.1) her $x \in \mathbb{R}$ için
>
> $$F_1'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x), \qquad F_2'(x) = 3x^2 - 0 = 3x^2 = f(x)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

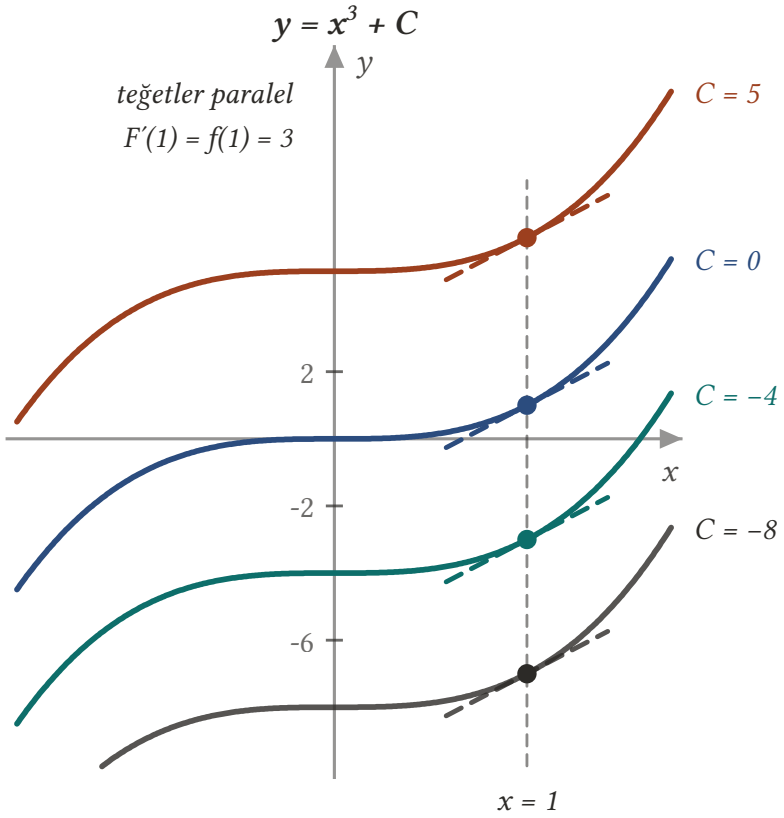
olur. Demek ki F_1 ve F_2, aynı f fonksiyonunun iki **farklı** ilkelidir. Aralarındaki fark

$$F_1(x) - F_2(x) = (x^3 + 5) - (x^3 - 8) = 13$$

sabit fonksiyonudur.
Bu iki fonksiyonda özel bir şey yok: her $C \in \mathbb{R}$ için $\left(x^3 + C\right)' = 3x^2$ olduğundan

$$F(x) = x^3 + C$$

ailesinin **her üyesi** $f(x) = 3x^2$'nin bir ilkelidir. Bu aileye f'nin **genel ilkeli** denir. Birazdan ispatlayacağımız Teorem 18.2, $\mathbb{R}$ üzerinde $3x^2$'nin **başka** ilkeli olmadığını söyleyecek.
Geometrik okuması şudur: $y = x^3 + C$ eğrileri birbirinin dikey ötelenmişidir; C değişince eğri yukarı aşağı kayar, ama ötelemek eğimi değiştirmediğinden her x noktasındaki **teğet eğimi** aynı kalır. İlkel arayışındaki belirsizliğin tam olarak bir dikey öteleme kadar olması bundandır.



Şekil 18.1: $f(x) = 3x^2$'nin ilkelleri $y = x^3 + C$ eğrileridir; hepsi tek bir eğrinin düşey ötelenmişidir. Düşey öteleme hiçbir eğimi değiştirmediğinden $x = 1$ apsisinde dört eğriye çizilen teğetlerin eğimi de aynıdır: $F'(1) = f(1) = 3$, yani teğetler paraleldir. Demek ki ilkel tek bir eğri değil bir eğri ailesidir ve iki üye yalnızca bir sabitle ayrılır — örneğin $C = 5$ ile $C = -8$ üyeleri arasındaki fark her x'te 13'tür.

■

Bu örnek iki temel gerçeği birlikte gösteriyor: **ilkel tek değildir**, ama **iki ilkel arasındaki fark bir sabittir**. Şimdi bu gözlemleri teoremleştirelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

18.2 İlkel Fonksiyonun Özellikleri

İlk özellik, türev almanın lineerliğinin doğrudan yansımasıdır. Türev, toplamı toplama ve sabitle çarpımı sabitle çarpıma götürdüğünden, ilkel alma işlemi de aynı biçimde davranır.

Teorem 18.1 (İlkel Almanın Lineerliği). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f, g : I \to \mathbb{R}$ ve F, f'nin; G de g'nin I üzerinde birer ilkeli olsun. O hâlde her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için*

$$\alpha F + \beta G$$

fonksiyonu, $\alpha f + \beta g$ fonksiyonunun I üzerinde bir ilkelidir.

> ***İspat.***
> *Hipotez gereği F ve G fonksiyonları I üzerinde türevlenebilirdir ve her $x \in I$ için*
>
> $$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = g(x)$$
>
> *sağlanır. Türevlenebilir iki fonksiyonun sabit katlarının toplamı yine türevlenebilirdir ve türevin toplam kuralı ile sabitle çarpım kuralı (Teorem 3.2) birlikte, her $x \in I$ için*
>
> $$\big(\, \alpha F + \beta G\big)'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \big(\, \alpha f + \beta g \,\big)\,(x)$$
>
> *verir. Demek ki $\alpha F + \beta G$ fonksiyonu I üzerinde türevlenebilirdir ve türevi $\alpha f + \beta g$'dir; yani Tanım 18.1 gereği $\alpha f + \beta g$'nin bir ilkelidir.*
> ■

$\alpha = \beta = 1$ alırsak "toplamın ilkeli, ilkellerin toplamıdır"; $\beta = 0$ alırsak "sabit katın ilkeli, ilkelin sabit katıdır" sonuçlarını elde ederiz. Bu iki kural, karmaşık görünen pek çok integrali parçalarına ayırıp tablodaki hazır sonuçlara indirgememizi sağlayacak.
Şimdi asıl teoreme geliyoruz. Örnek 18.1'te $3x^2$'nin ilkellerinin $x^3 + C$ ailesini doldurduğunu tahmin etmiştik; başka hiçbir ilkelin bulunmadığını göstermek zorundayız. Anahtar, Ortalama Değer Teoreminin Uygulamaları bölümünde ispatladığımız şu sonuçtur: bir **aralık** üzerinde türevi özdeş olarak sıfır olan fonksiyon sabittir (Sonuç 8.1).

Teorem 18.2 (İki İlkel Bir Sabitle Farklıdır). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve F, f'nin I üzerinde bir ilkeli olsun. Bir $G : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için şu iki önerme denktir:*

1. *G de f'nin I üzerinde bir ilkelidir.*
2. *Bir $C \in \mathbb{R}$ sabiti için her $x \in I$'de $G(x) = F(x) + C$'dir, yani $G - F$ sabit fonksiyondur.*

> ***İspat.***
> ***(1) ⇒ (2).*** *F ve G fonksiyonlarının ikisi de f'nin ilkeli olsun. O hâlde ikisi de I üzerinde türevlenebilirdir ve her $x \in I$ için*
>
> $$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = f(x)$$
>
> *sağlanır. $H = G - F$ diyelim. Türevin fark kuralı (Teorem 3.2) gereği H, I üzerinde türevlenebilirdir ve her $x \in I$ için*
>
> $$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
>
> *olur. Şimdi I'nın bir **aralık** olduğunu kullanıyoruz: bir aralık üzerinde türevi özdeş sıfır olan fonksiyon sabittir (Sonuç 8.1). Dolayısıyla bir $C \in \mathbb{R}$ vardır ki her $x \in I$ için $H(x) = C$, yani*
>
> $$G(x) - F(x) = C \quad \Leftrightarrow \quad G(x) = F(x) + C$$
>
> *olur. Bu tam olarak (2)'dir.*
> ***(2) ⇒ (1).*** *Şimdi bir $C \in \mathbb{R}$ için her $x \in I$'de $G(x) = F(x) + C$ olsun. Sabit fonksiyonun türevi sıfırdır; F ise hipotez gereği I üzerinde türevlenebilirdir. Toplam kuralı gereği $G = F + C$ fonksiyonu da I üzerinde türevlenebilirdir ve her $x \in I$ için*
>
> $$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Demek ki G de f'nin bir ilkelidir. İki yön de gösterildiğinden denklik ispatlanmıştır.
■

Teoremin pratik anlamı büyüktür: bir f fonksiyonunun **tek bir** ilkelini bulmak, bir aralık üzerinde bütün ilkellerini bulmak demektir. Bulduğunuz F'ye bir sabit ekleyerek ailenin tamamını yazarsınız ve bu ailenin dışında hiçbir ilkel kalmaz.

⚠ Aralık koşulu vazgeçilmezdir

Teorem 18.2'nin ispatında I'nın aralık olması yalnızca bir süs değildir; **teoremin can damarıdır.** "Türevi sıfır olan fonksiyon sabittir" ifadesi ortalama değer teoreminden (Teorem 8.2) gelir ve bu teorem iki noktayı birleştiren bir **aralık** ister. Tanım kümesi kopuk parçalardan oluşuyorsa, farklı parçalarda farklı sabitler seçmek serbesttir ve iddia yanlış hâle gelir.

Önerme 18.1 (Aralık Olmayan Tanım Kümesinde İlkeller). *$A \subseteq \mathbb{R}$ açık bir küme ve A, ikişer ikişer ayrık $\{I_k\}_{k\in K}$ açık aralıklarının birleşimi olsun (bkz. Analiz 1). $f : A \to \mathbb{R}$ verilsin ve $F, G : A \to \mathbb{R}$ her $x \in A$ için $F'(x) = G'(x) = f(x)$ koşulunu sağlasın. O hâlde:*

1. *Her $k \in K$ için $G - F$ fonksiyonu I_k üzerinde sabittir; yani bir $C_k \in \mathbb{R}$ vardır ki her $x \in I_k$ için $G(x) - F(x) = C_k$'dir.*
2. *Bu C_k sabitleri birbirinden bağımsızdır: A birden çok bileşen içeriyorsa, $G - F$ fonksiyonunun A'nın tamamında sabit olması gerekmez.*

*Kısacası, aralık olmayan bir tanım kümesinde "ilkeller bir sabitle farklıdır" ifadesinin yerini "ilkeller **yerel olarak sabit** bir fonksiyonla farklıdır" ifadesi alır.*

İspat.
(1) *$k \in K$ sabitleyelim. $I_k \subseteq A$ bir aralıktır ve $H = G - F$ fonksiyonu I_k üzerinde türevlenebilirdir; her $x \in I_k$ için $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ olur. I_k bir aralık olduğundan Sonuç 8.1 uygulanabilir ve H, I_k üzerinde sabittir; bu sabite C_k diyelim.*
(2) *İkinci maddeyi genel olarak kuralım: sabitlerin bağımsızlığı bir tesadüf değil, her f için işleyen bir yapıdır. F, A üzerinde f'nin bir ilkeli olsun ve her $k \in K$ için keyfî bir $c_k \in \mathbb{R}$ seçelim. A'nın bileşenleri ikişer ikişer ayrık olduğundan her $x \in A$ tam olarak bir I_k'ya düşer; dolayısıyla*

$$G_0(x) = F(x) + c_k \qquad (x \in I_k)$$

kuralı A üzerinde iyi tanımlı bir G_0 fonksiyonu verir. Her $x \in A$ için x'in, tümüyle kendi bileşeninin içinde kalan bir komşuluğu vardır (I_k açıktır); türev yerel bir kavram olduğundan G_0 bu komşulukta $F + c_k$ ile çakışır ve

$$G_0'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$

olur. Demek ki G_0 da A üzerinde f'nin bir ilkelidir, üstelik $G_0 - F$ fonksiyonu I_k üzerinde c_k değerini alır. A en az iki bileşen içeriyorsa, birbirinden farklı $k, \ell \in K$ için $c_k \neq c_\ell$ seçmek $G_0 - F$'yi sabit olmaktan çıkarır; yani A'nın tamamında sabitlik iddiası düşer. Bu yapının somut bir örneği Örnek 18.2'dedir.
■

Örnek 18.2 (Bir Bölü x Fonksiyonunun İlkelleri). $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunu $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde ele alalım. A üzerindeki bütün ilkelleri belirleyelim ve $\ln|x| + C$ yazmanın neden eksik olduğunu görelim.

Çözüm.
Önce $\ln|x|$ fonksiyonunun türevini iki bileşende ayrı ayrı hesaplayalım. $x > 0$ için $|x| = x$ olduğundan, logaritmanın türevi (Teorem 5.1) gereği $\big(\ln x\big)' = \frac{1}{x}$'tir. $x < 0$ için $|x| = -x > 0$ olduğundan $\ln|x| = \ln(-x)$'tir; zincir kuralını (Teorem 4.1) $u(x) = -x$, $u'(x) = -1$ ile uygularsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\big(\ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

çıkar. Demek ki her iki bileşende de $\big(\ln|\ x\ |\ \big)' = \frac{1}{x}$'tir (Önerme 5.1); $F_0(x) = \ln|\ x\ |$, f'nin A üzerinde bir ilkelidir.
Şimdi **bütün** ilkelleri yazalım. A'nın bileşenleri $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarıdır. Önerme 18.1 gereği herhangi bir ilkel, her bileşende F_0'dan bir sabitle ayrılır; ama bu iki sabit birbirinden bağımsızdır. Yani A üzerindeki genel ilkel

$$F(x) = \begin{cases} \ln|\ x\ | + c_1, x > 0, \\ \ln|\ x\ | + c_2, x < 0 \end{cases}$$

biçimindedir; burada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **birbirinden bağımsız** iki sabittir. Gerçekten bu F, her $x \neq 0$ için türevlenebilirdir ve türevi $1/x$'tir: türev yerel bir kavram olduğundan F, $x > 0$ noktalarında $\ln x + c_1$ ile, $x < 0$ noktalarında $\ln(-x) + c_2$ ile bir komşulukta çakışır ve her iki durumda da türev $1/x$ çıkar.
Somut bir seçimle vurgulayalım: $c_1 = 0$, $c_2 = 5$ alalım, yani

$$G(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x) + 5, & x < 0. \end{cases}$$

Bu G fonksiyonu A üzerinde $1/x$'in bir ilkelidir; ama

$$G(x) - F_0(x) = \begin{cases} 0, x > 0, \\ 5, x < 0 \end{cases}$$

farkı **sabit değildir.** Böylece Önerme 18.1'nin ikinci maddesi kanıtlanmış olur ve Teorem 18.2'nin aralık koşulunun atılamayacağı görülür.
Bu yüzden ileride sıkça yazacağımız

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|\ x\ | + C$$

eşitliği, **0 içermeyen bir aralıkta** okunmalıdır: ya $(0, \infty)$ içinde bir aralıkta ya da $(-\infty, 0)$ içinde bir aralıkta. Tanım kümesinin iki parçasını birden kapsayan bir hesap yapıyorsanız, iki sabiti ayrı ayrı taşımanız gerekir.
■

18.3 Belirsiz İntegral

Bir fonksiyonun ilkelleri, gördüğümüz gibi tek tek değil **aile hâlinde** ortaya çıkar. Bu aileye bir ad ve bir gösterim vermek, hem yazımı kısaltır hem de hesabı sistemleştirir.

Tanım 18.2 (Belirsiz İntegral). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin I üzerindeki **bütün ilkellerinin kümesine** f'nin I üzerindeki **belirsiz integrali** (indefinite integral) denir ve

$$\int f(x)\,dx$$

ile gösterilir. Burada $\int$ işaretine **integral işareti**, $f(x)$ fonksiyonuna **integrand** (integrand, integrali alınan fonksiyon), dx sembolüne ise integralin x **değişkenine göre** alındığını belirten **diferansiyel** denir.
F, f'nin I üzerinde herhangi bir ilkeli ise, Teorem 18.2 gereği bu küme tam olarak $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$ ailesidir ve bunu

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

biçiminde yazarız. Buradaki $C \in \mathbb{R}$ sabitine **integral sabiti** (constant of integration) denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Gösterim üzerine üç uyarı yerinde olur. Birincisi, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ eşitliğinin iki tarafı da birer **fonksiyon ailesi**dir; bu, alışılmış bir eşitlik değil "şu ailenin tamamı" anlamında bir kısaltmadır. C yazmayı unutmak, bir aileyi tek bir üyesiyle karıştırmaktır. İkincisi, dx sembolü boş bir süs değildir: hangi harfe göre integral aldığımızı söyler; $\int 2xt\,dx = x^2t + C$ iken $\int 2xt\,dt = xt^2 + C$'dir. Üçüncüsü, tanım gereği belirsiz integral bir **aralık** üzerinde konuşulur; Örnek 18.2'de gördüğümüz gibi, tanım kümesi kopuksa yazdığımız tek C yanıltıcı olur.
Bir sonraki teorem, ilkel olma özelliğinin ilk ve en kolay sonucudur; kolay olmasına rağmen sık kullanılır, çünkü bir fonksiyonun ilkel **olamayacağını** göstermenin en hızlı yollarından birini verir.

Teorem 18.3 (İlkel Fonksiyon Süreklidir). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve F, bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde bir ilkeli olsun. O hâlde F, I üzerinde süreklidir.*

> ***İspat.***
> *F bir ilkel olduğundan, Tanım 18.1 gereği I'nın her noktasında türevlenebilirdir: her $x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ limiti vardır ve **sonludur**. Türev Alma Kuralları bölümünde, bir noktada türevlenebilen fonksiyonun o noktada sürekli olduğunu göstermiştik (Teorem 3.1); gerekçeyi kısaca tekrarlayalım. $x_0 \in I$ olsun; $x \in I$, $x \neq x_0$ için*
>
> $$F(x) - F(x_0) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$
>
> *özdeşliği geçerlidir. Birinci çarpanın $x \to x_0$ limiti türevin tanımı gereği $f(x_0)$ sonlu sayısıdır, ikincisininki 0'dır; iki limit de var olduğundan çarpımın limiti limitlerin çarpımıdır (bkz. Analiz 1) ve*
>
> $$\lim_{x \to x_0} \big(F(x) - F(x_0) \big) = f(x_0) \cdot 0 = 0,$$
>
> *yani $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ olur. Yığılma Noktasında Süreklilik ve Limit gereği bu, F'nin x_0'da sürekli olması demektir. x_0 keyfî seçildiğinden F, I üzerinde süreklidir.*
> ■

Bu teoremin çıplak sonucu şudur: **süreksiz bir fonksiyon hiçbir fonksiyonun ilkeli olamaz.** Örneğin taban fonksiyonu $\lfloor x \rfloor$ (bkz. Analiz 1) tam sayılarda süreksiz olduğundan, $\mathbb{R}$ üzerinde hiçbir fonksiyonun ilkeli değildir. Dikkat: bu, "$\lfloor x \rfloor$'in ilkeli yoktur" demek **değildir**; söylediğimiz, $\lfloor x \rfloor$'in kendisinin bir ilkel **olamayacağıdır**. İlkelin varlığı sorusuna sıradaki kısımda geliyoruz.

18.4 İlkeli Olan Fonksiyonlar Ara Değer Özelliğini Taşır

Şimdi bölümün en önemli yapısal sonucuna geliyoruz. Darboux Teoremi bölümünde, bir türev fonksiyonunun sürekli olmasa bile **ara değer özelliğini** (Tanım 10.1) taşımak zorunda olduğunu ispatlamıştık (Teorem 10.1). İlkel kavramı bu teoremi doğrudan integral diline çevirir: bir f fonksiyonunun ilkeli varsa, f zaten bir türev fonksiyonudur; o hâlde f ara değer özelliğini taşımak zorundadır.

Teorem 18.4 (İlkeli Olan Fonksiyon Darboux Özelliğini Taşır). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde bir ilkeli olsun. O hâlde f, I üzerinde ara değer özelliğini (Darboux özelliğini) taşır: $u, v \in I$, $u < v$ olmak üzere $f(u)$ ile $f(v)$ arasında kalan her λ için*

$$f(c) = \lambda$$

olan bir $c \in (u, v)$ vardır.

> ***İspat.***
> *F, f'nin I üzerinde bir ilkeli olsun; yani F, I üzerinde türevlenebilirdir ve $F' = f$'dir.*
> *$u, v \in I$, $u < v$ alalım. I bir aralık olduğundan $[u, v] \subseteq I$'dır, F bu kapalı aralık üzerinde türevlenebilirdir ve $F'(u) = f(u)$, $F'(v) = f(v)$ olur. λ sayısı $f(u)$ ile $f(v)$ arasında ise, bu tam olarak λ'nın $F'(u)$ ile $F'(v)$ arasında olması demektir. Darboux teoremini (Teorem 10.1) F fonksiyonuna $[u, v]$ aralığında uygularsak, $F'(c) = \lambda$ olan bir $c \in (u, v)$ buluruz; $F' = f$ olduğundan bu, $f(c) = \lambda$ demektir.*
> *u, v ve λ keyfî seçildiğinden f, Tanım 10.1 anlamında I üzerinde ara değer özelliğini taşır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu teoremin asıl gücü, **karşıt tersi** (kontrapozitifi) alındığında ortaya çıkar. Bir fonksiyonun ilkelini bulmaya çalışıp başarısız olmak, ilkelin olmadığını göstermez; ama ara değer özelliğini taşımadığını göstermek, ilkelin **var olmadığını** kesin biçimde kanıtlar.

Sonuç 18.1 (Ara Değer Özelliği Olmayan Fonksiyonun İlkeli Yoktur). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ olsun.*

1. *f, I üzerinde ara değer özelliğini taşımıyorsa, f'nin I üzerinde ilkeli **yoktur**.*
2. *Özel olarak f, I'nın bir x_0 iç noktasında **sıçrama süreksizliğine** ya da **kaldırılabilir süreksizliğe** sahipse (bkz. Analiz 1), f'nin I üzerinde ilkeli yoktur.*

> ***İspat.***
> ***(1)*** *Bu, Teorem 18.4'nin karşıt tersidir. Gerçekten, f'nin bir ilkeli olsaydı Teorem 18.4 gereği f ara değer özelliğini taşırdı; hipotez bunun tersini söylediğinden ilkel var olamaz.*
> ***(2)*** *f'nin x_0 iç noktasında birinci tür (sıçrama ya da kaldırılabilir) bir süreksizliği olsun; yani $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ve $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ tek yönlü limitlerinin ikisi de sonlu olarak vardır, ama f bu noktada sürekli değildir (bkz. Analiz 1). Tersini varsayalım ve f'nin I üzerinde bir F ilkeli olsun. O hâlde $f = F'$ bir **türev fonksiyonudur** ve x_0 iç noktasında süreksizdir. Oysa Darboux Teoremi bölümünde ispatladığımız Sonuç 10.2, bir türev fonksiyonunun iç noktadaki süreksizliğinin **ancak ikinci tür** olabileceğini, yani tek yönlü limitlerden en az birinin sonlu olarak var olamayacağını söyler. Çelişki; demek ki böyle bir F yoktur.*
> ■

Şimdi bu sonucu en tanıdık örnekte, işaret fonksiyonunda çalıştıralım. Hesabı iki ayrı yoldan yapacağız: önce Darboux özelliğiyle hızlı bir çelişki, sonra "ilkeli elle kurmayı deneyip nerede tıkandığını görme" yoluyla ayrıntılı bir çelişki.

Örnek 18.3 (İşaret Fonksiyonunun İlkeli Yoktur). İşaret fonksiyonu (bkz. Analiz 1)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde ilkeli olmadığını gösterelim.

> **Çözüm.**
> **Birinci yol: Darboux özelliği.** $u = -1$ ve $v = 1$ alalım. O hâlde
>
> $$\operatorname{sgn}(-1) = -1, \qquad \operatorname{sgn}(1) = 1$$
>
> olur. $\lambda = \frac{1}{2}$ sayısı -1 ile 1 arasındadır. Eğer sgn fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir ilkeli olsaydı, Teorem 18.4 gereği sgn ara değer özelliğini taşırdı ve
>
> $$\operatorname{sgn}(c) = \frac{1}{2}$$
>
> olan bir $c \in (-1, 1)$ bulunurdu. Oysa sgn fonksiyonunun değer kümesi yalnızca $\{-1, 0, 1\}$ üç elemanlı kümesidir ve $\frac{1}{2} \notin \{-1, 0, 1\}$'dir. Çelişki. Demek ki sgn'nin $\mathbb{R}$ üzerinde ilkeli yoktur.
> Aynı sonucu Sonuç 18.1'un ikinci maddesinden de okuyabiliriz: $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ ve $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ limitleri sonlu ve farklı olduğundan sgn fonksiyonunun $x_0 = 0$ iç noktasında bir **sıçrama süreksizliği** vardır; bu da ilkelin var olmasını engeller.
> **İkinci yol: ilkeli elle kurmaya çalışmak.** Bu yol, engelin tam olarak nerede olduğunu gösterdiği için öğreticidir. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sgn'nin bir ilkeli olsun; yani her $x \in \mathbb{R}$ için $F'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ olsun. F'yi üç bölgede inceleyelim.
> *Pozitif ve negatif eksende.* Her $x > 0$ için $F'(x) = 1$'dir; $(0, \infty)$ bir aralık ve $x \mapsto x$ fonksiyonunun türevi de sabit 1 olduğundan, Sonuç 8.2 gereği bir $a \in \mathbb{R}$ için $F(x) = x + a$ olur. Aynı gerekçeyle, her $x < 0$ için $F'(x) = -1$ olduğundan $(-\infty, 0)$ aralığında bir $b \in \mathbb{R}$ için $F(x) = -x + b$'dir.
> *Sıfırda.* F her noktada türevlenebilir olduğundan Teorem 18.3 gereği $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir; özel olarak 0'da süreklidir. Süreklilik, tek yönlü limitlerin $F(0)$'a eşit olmasını gerektirir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F(0)=\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a, \qquad F(0)=\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+b)=b.$$

Demek ki $a=b=F(0)$'dır. Bu ortak değere a diyelim; o hâlde

$$F(x)=\begin{cases}x+a, & x\geq 0,\\ -x+a, & x<0\end{cases} \qquad \text{yani} \qquad F(x)=|\,x\,|+a$$

olmak zorundadır. Başka hiçbir aday kalmadı.
Şimdi son adımı atalım: bu F gerçekten 0'da türevlenebilir mi? Fark oranını yazalım; $x\neq 0$ için

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{(\,|\,x\,|+a\,)-a}{x}=\frac{|\,x\,|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

Tek yönlü limitler 1 ve -1 olup birbirinden farklıdır; dolayısıyla Limitin Yokluğu için Tek Yönlü Ölçüt gereği $x\to 0$ limiti yoktur. Yani F, 0 noktasında türevlenebilir **değildir**. Bu, F'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir ilkel olduğu varsayımıyla çelişir.
Sonuç: sgn fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde ilkeli yoktur.
Peki ne yapılabilir? Engel yalnızca $x=0$ noktasındadır. 0 içermeyen aralıklarda hiçbir sorun yoktur:

$$\int \operatorname{sgn}(x)\,dx=x+C \quad (\,(0,\infty)\ \text{üzerinde}\,), \qquad \int \operatorname{sgn}(x)\,dx=-x+C \quad (\,(-\infty,0)\ \text{üzerinde}\,).$$

Bu iki parçayı $|\,x\,|$ ile yapıştırmak fonksiyonu **sürekli** yapar, ama **türevlenebilir** yapmaz; oysa ilkel tanımının istediği türevlenebilirliktir.
■

Buraya kadar iki gerçeği yan yana koyduk: ilkelin **kendisi** süreklidir (Teorem 18.3) ve ilkeli olan fonksiyon ara değer özelliğini taşır (Teorem 18.4). Buradan "öyleyse ilkeli olan fonksiyonlar süreklidir" sonucunu çıkarmak çok kolaydır. Bu **yanlıştır**; yanlışlığı, türev fonksiyonlarının ne kadar tuhaf olabileceğini gösteren klasik örnekle görülür.

⚠ Süreklilik gerekli değildir, Darboux özelliği gereklidir

İlkelin varlığı için sürekliliğin **gerekli olmadığını** vurguluyoruz: süreksiz bir fonksiyonun pekâlâ ilkeli olabilir. İki koşulun rolleri şöyledir:

- **Süreklilik yeterlidir ama gerekli değildir.** Bir aralıkta sürekli olan her fonksiyonun ilkeli vardır (bunu belirli integrali kurduktan sonra, analizin temel teoremiyle ispatlayacağız). Ama sürekli olmayan fonksiyonların da ilkeli olabilir.
- **Darboux özelliği gereklidir ama yeterli değildir.** İlkeli olan her fonksiyon ara değer özelliğini taşır (Teorem 18.4); ancak ara değer özelliğini taşıyan her fonksiyonun ilkeli olduğu doğru değildir.

Kısacası "ilkeli olan fonksiyonlar" sınıfı, sürekli fonksiyonlar sınıfını **kesin olarak kapsar** ve Darboux fonksiyonları sınıfının **kesin bir alt kümesidir**.

Örnek 18.4 (Süreksiz Olduğu Hâlde İlkeli Olan Bir Fonksiyon). $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

ile tanımlayalım. F'nin $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğunu, ama $f=F'$ türevinin $x=0$ noktasında sürekli olmadığını gösterelim. Böylece f, süreksiz olduğu hâlde ilkeli (F'nin ta kendisi) bulunan bir fonksiyon olur.

Çözüm.
Adım 1: $x\neq 0$ noktalarında türev. $x\neq 0$ ise x'in tümüyle 0'dan uzak bir komşuluğu vardır; bu komşulukta $F(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$'tir. Çarpım kuralı (Teorem 3.2) ve zincir kuralı (Teorem 4.1) ile, $u(x)=\frac{1}{x}$, $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$ alarak (Teorem 5.4):

$$F'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Adım 2: $x = 0$ noktasında türev. Fark oranını doğrudan hesaplayalım. $x \neq 0$ için

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = x \sin\frac{1}{x}.$$

Her t için $|\sin t| \leq 1$ olduğundan

$$\left| x \sin\frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

olur. $x \to 0$ iken $|x| \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

çıkar. Demek ki F, 0 noktasında türevlenebilirdir ve $F'(0) = 0$'dır.
Böylece F, $\mathbb{R}$'nin **her** noktasında türevlenebilirdir ve

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir ilkeli vardır: F.
Adım 3: f, 0'da sürekli değildir. Sıfıra yakınsayan iki farklı dizi seçelim:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

İkisi de sıfırdan farklı ve $x_n \to 0$, $y_n \to 0$'dır. Birinci dizide $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi) = 0$ ve $\cos\frac{1}{x_n} = \cos(2n\pi) = 1$ olduğundan $f(x_n) = 2x_n \cdot 0 - 1 = -1$; ikinci dizide $\sin\frac{1}{y_n} = 0$ ve $\cos\frac{1}{y_n} = \cos\big((2n+1)\pi\big) = -1$ olduğundan $f(y_n) = 2y_n \cdot 0 + 1 = 1$ olur. Yani

$$f(x_n) \to -1, \qquad f(y_n) \to 1.$$

İki dizi de 0'a yakınsadığı hâlde görüntü dizilerinin limitleri farklıdır. Dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği $\lim_{x\to 0} f(x)$ limiti **yoktur**; dolayısıyla Dizilerle Süreksizlik gereği f, 0 noktasında sürekli değildir.
Sonuç. f fonksiyonu $x = 0$'da süreksizdir, ama $\mathbb{R}$ üzerinde bir ilkeli vardır. Demek ki süreklilik, ilkelin varlığı için **gerekli değildir**. Öte yandan f'nin 0'daki süreksizliği **ikinci türdendir** — nitekim $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ve $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ limitlerinin ikisi de yoktur. Sonuç 10.2 bize zaten bunun böyle olması gerektiğini söylüyordu: bir türev fonksiyonu süreksiz olabilir, ama **sıçrayamaz.**
■

18.5 Belirsiz İntegralin Cebirsel Özellikleri

İlkel için kurduğumuz kuralları şimdi integral diline çevirelim. Aşağıdaki özellikler tanımların doğrudan sonucudur; ama her birinin nasıl okunması gerektiğini dikkatle söylemek gerekir, çünkü belirsiz integral bir fonksiyon değil bir **fonksiyon ailesi**dir ve eşitlikler aileler arasındaki eşitliklerdir.

Önerme 18.2 (Belirsiz İntegralin Temel Özellikleri). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f, g : I \to \mathbb{R}$ ilkelleri bulunan fonksiyonlar ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. O hâlde:*

1. *Her $x \in I$ için*

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x);$$

yani önce integral alıp sonra türev almak, fonksiyonu değiştirmez.

2. *Toplam ve fark:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int \big(\, f(x) \pm g(x) \,\big)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

3. *Sabitle çarpım ($a \neq 0$):*

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

İspat.
(1) *F, f'nin I üzerinde bir ilkeli olsun; Tanım 18.2 gereği $\int f(x)\,dx$ ailesinin her üyesi $F(x)+C$ biçimindedir. Bu ailenin herhangi bir üyesinin türevini alalım: toplam kuralı ve sabitin türevinin sıfır olması gereği*

$$\big(\, F(x) + C\big)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

*olur. Sonuç C'den bağımsızdır; yani ailenin **hangi üyesini** seçersek seçelim türev f'dir. Bu, (1)'in söylediği şeydir.*
(2) *F, f'nin; G de g'nin bir ilkeli olsun. Teorem 18.1'i $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$ ile uygularsak $F \pm G$ fonksiyonu $f \pm g$'nin bir ilkelidir; o hâlde Teorem 18.2 gereği sol taraf $\{F \pm G + C : C \in \mathbb{R}\}$ ailesidir. Sağ taraftaki $\int f\,dx \pm \int g\,dx$ ifadesiyle kastedilen ise birinci aileden bir üyeyle ikinci aileden bir üyenin toplamlarının (farklarının) oluşturduğu ailedir:*

$$\big\{ \big(\, F(x) + C_1 \,\big) \pm \big(\, G(x) + C_2 \,\big) : C_1, C_2 \in \mathbb{R} \big\} = \big\{ \, F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2) : C_1, C_2 \in \mathbb{R} \, \big\}\,.$$

C_1, C_2 bağımsız olarak bütün $\mathbb{R}$'yi taradığında $C_1 \pm C_2$ de bütün $\mathbb{R}$'yi tarar ($C_2 = 0$ alıp C_1'i değiştirmek yeter). Demek ki iki taraf aynı ailedir.
(3) *F, f'nin bir ilkeli olsun. Teorem 18.1 gereği aF, af'nin bir ilkelidir; o hâlde sol taraf $\{aF(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ ailesidir. Sağ taraf ise*

$$a \int f(x)\, dx = \big\{ \, a \,\big(\, F(x) + C_1 \,\big) : C_1 \in \mathbb{R} \, \big\} = \big\{ \, aF(x) + aC_1 : C_1 \in \mathbb{R} \, \big\}$$

ailesidir. $a \neq 0$ olduğundan, her $C \in \mathbb{R}$ için $C_1 = C/a$ seçilebilir; yani aC_1 de bütün $\mathbb{R}$'yi tarar ve iki aile çakışır.
■

i Neden $a \neq 0$?

Üçüncü özellikte $a \neq 0$ koşulunun neden gerektiği ispatın son adımında görülüyor. $a = 0$ olsaydı sol taraf $\int 0\,dx = \{C : C \in \mathbb{R}\}$, yani **bütün sabit fonksiyonların ailesi** olurdu; sağ taraf ise $0 \cdot \int f(x)\,dx = \{0\}$, yani yalnızca sıfır fonksiyonu olurdu. Bu iki aile eşit değildir.

Önerme 18.2'in birinci maddesi, integral ile türevin birbirini **bir yönde** götürdüğünü söylüyor. Ters yön de doğrudur ama bir sabit farkıyla: F türevlenebilir bir fonksiyonsa $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$ olur; burada C'yi düşürmek hata olur, çünkü sol taraf bir ailedir.
Şimdi öğrencilerin en sık düştüğü tuzağa geliyoruz. İntegral toplamla ve sabitle çarpımla uyuşur; **çarpımla ve bölümle uyuşmaz.**

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Çarpımın integrali, integrallerin çarpımı değildir

Genel olarak

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

ve benzer biçimde

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

olur. Bunun sebebi basittir: türev de çarpımla uyuşmaz — $(FG)' = F'G + FG'$ kuralında fazladan iki terim vardır. Çarpımların integrali için ayrı bir teknik gerekir; bu teknik, çarpım kuralının integral karşılığı olan **kısmi integrasyondur** ve bir sonraki bölümde kurulacaktır.

Örnek 18.5 (Çarpım Kuralının İntegralde Geçersizliği). $f(x) = g(x) = x$ alarak, çarpımın integralinin integrallerin çarpımına eşit olmadığını somut biçimde gösterelim. Ayrıca aynı örnekle bölüm için de bir karşı örnek verelim.

Çözüm.

Sol taraf. $f(x)g(x) = x \cdot x = x^2$'dir. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ olduğundan

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Sağ taraf. $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$ olduğundan $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$'dir. Her iki çarpandan da integral sabitini 0 seçersek

$$\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4}.$$

Karşılaştırma. İki ifade eşit olsaydı her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^4}{4}$$

olurdu. $x = 1$ ve $x = 2$ değerlerini koyarsak

$$\frac{1}{3} + C = \frac{1}{4} \Longrightarrow C = -\frac{1}{12}, \qquad \frac{8}{3} + C = 4 \Longrightarrow C = \frac{4}{3}$$

çıkar; tek bir C iki farklı değere eşit olamayacağından çelişki vardır. Aslında bunu görmenin daha hızlı yolu, iki tarafın türevini almaktır: sol tarafın türevi x^2, sağ tarafın türevi x^3'tür ve $x^2 = x^3$ eşitliği yalnızca $x \in \{0, 1\}$ için sağlanır. İki fonksiyonun bir aralıkta çakışması söz konusu değildir.
Bölüm için. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ ve $I = (0, \infty)$ alalım. Bir yandan $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$; öte yandan integral sabitlerini 0 seçersek

$$\frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx} = \frac{x^4/4}{x^3/3} = \frac{3x}{4}$$

olur. Türevleri karşılaştıralım: birinci ifadenin türevi x, ikincisininki sabit $\frac{3}{4}$'tür ve $(0, \infty)$ üzerinde $x = \frac{3}{4}$ yalnızca tek bir noktada sağlanır; iki aile çakışmaz.
Ders. İntegral **lineer** bir işlemdir, ama **çarpımsal** değildir; $\int fg$ türünden integraller için ya integrandı cebirsel olarak sadeleştirmek ya da özel teknikler kullanmak gerekir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

18.6 Temel İntegraller Tablosu

Bütün integral hesaplarının başlangıç noktası, türev tablosunun sağdan sola okunmuş hâlidir. Aşağıdaki tablonun her satırı, Temel Fonksiyonların Türevleri bölümünde ispatladığımız bir türev formülünün yeniden yazılmasından ibarettir; dolayısıyla **her satır sağ tarafın türevi alınarak doğrudan doğrulanabilir.** Bir formülden şüphe ettiğinizde yapılacak şey ezberinizi yoklamak değil, sağ tarafı türevleyip integrandı elde edip etmediğinize bakmaktır. Tabloda $C \in \mathbb{R}$ her zaman integral sabitidir ve her formül, üçüncü sütunda belirtilen türden bir **aralık** üzerinde geçerlidir.

#	Formül	Geçerlilik
1	$\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$	$a \geq 0$ tam sayıysa $\mathbb{R}$; $a \leq -2$ tam sayıysa 0 içermeyen her aralık; genel $a \in \mathbb{R}$ için $(0, \infty)$
2	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert\, x \,\rvert + C$	0 içermeyen her aralık
3	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \;\; (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + C$	$\mathbb{R}$
4	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
5	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
6	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$\cos x \neq 0$ olan her aralık
7	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$	$\sin x \neq 0$ olan her aralık
8	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$ ve $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$	$\mathbb{R}$
9	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$	$\mathbb{R}$
10	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$	$(-1, 1)$
11	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\,\rvert + C$	$\cos x \neq 0$ olan her aralık
12	$\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\,\rvert + C$	$\sin x \neq 0$ olan her aralık
13	$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C \quad (a > 0)$	$\mathbb{R}$
14	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C \quad (a > 0)$	$(-a, a)$
15	$\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\,dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C \quad (a > 0)$	$\pm a$ içermeyen her aralık
16	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C \quad (a > 0)$	$+$ için $\mathbb{R}$; $-$ için $x > a$ ya da $x < -a$

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi bütün satırların nereden geldiğini ve nasıl doğrulandığını tek tek yazalım.
Birinci satır. Genel kuvvet fonksiyonunun türevi (Teorem 5.3) $\left(\,x^{b}\right)' = b\,x^{b-1}$'dir. $b = a+1$ alıp $a+1 \neq 0$ olduğunda bölersek

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{(a+1)x^{a}}{a+1} = x^{a}$$

çıkar. $a = -1$ durumu dışlanmıştır, çünkü orada payda sıfır olur; o durumu ikinci satır karşılar.
Geçerlilik sütununun üç ayrı durum saymasının sebebi, x^{a} ifadesinin tanım kümesinin a'ya bağlı olmasıdır. Teorem 5.3 yalnızca $x > 0$ için konuşur, çünkü keyfî reel üs $x^{a} = e^{a\ln x}$ ile tanımlanır. Buna karşılık a negatif olmayan bir tam sayıysa x^{a} bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır ve türev formülü Lemma 3.1 ile her $x \in \mathbb{R}$ için geçerlidir; $a \leq -2$ tam sayısıysa x^{a} ancak $x \neq 0$ için tanımlıdır ve Sonuç 3.1 gereği formül 0 içermeyen her aralıkta işler. Örneğin $\int x^{-2}\,dx = -\dfrac{1}{x} + C$ eşitliği hem $(0,\infty)$ hem de $(-\infty,0)$ üzerinde doğrudur; ama Teorem 18.2'nin uyarısı gereği iki aralıkta iki ayrı sabit taşınır.
İkinci satır. Örnek 18.2'de her iki bileşende de $\left(\ln|\,x\,|\,\right)' = \dfrac{1}{x}$ olduğunu hesaplamıştık. Formülün 0 içermeyen bir aralıkta okunması gerektiğini oradaki tartışma gösteriyor.
Üçüncü satır. Üstel fonksiyonun türevi (Teorem 5.2) $\left(\,a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$'dır. $a > 0$, $a \neq 1$ iken $\ln a \neq 0$ olduğundan bölebiliriz:

$$\left(\frac{a^{x}}{\ln a}\right)' = \frac{a^{x}\ln a}{\ln a} = a^{x}.$$

$a = e$ özel hâlinde $\ln e = 1$ olduğundan $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$ elde edilir.
Dördüncü satırdan onuncuya. Bu satırların hepsi, ilgili türev formülünün doğrudan tersine okunmasıdır: Teorem 5.4 gereği $(-\cos x)' = \sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^{2}x}$ ve $(-\cot x)' = \frac{1}{\sin^{2}x}$; Teorem 5.6 ile Tanım 5.2 gereği $(\cosh x)' = \sinh x$ ve $(\sinh x)' = \cosh x$ (trigonometrik hâldeki eksi işareti burada yoktur); Teorem 5.5 gereği $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^{2}}$ ve $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$. Sonuncusu yalnızca $(-1,1)$ üzerinde geçerlidir, çünkü uç noktalarda payda sıfırlanır.
On birinci satır. $\cos x \neq 0$ olan bir aralıkta zincir kuralıyla

$$\left(-\ln|\cos x\,|\,\right)' = -\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

olur. On ikinci satır aynı hesabın sin ile yapılmışıdır:

$$\left(\ln|\sin x\,|\,\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

On üçüncü ve on dördüncü satırlar. $a > 0$ olsun. Zincir kuralıyla

$$\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^{2}}{a^{2}}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^{2}}\cdot\frac{a^{2}}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a^{2}+x^{2}}$$

olur; $a = 1$ almak dokuzuncu satırı geri verir. Benzer biçimde $|\,x\,| < a$ iken $\sqrt{1-\frac{x^{2}}{a^{2}}} = \frac{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}{a}$ olduğundan

$$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^{2}}{a^{2}}}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}$$

bulunur.
On beşinci satır. $a > 0$ ve $x \neq \pm a$ olsun. Logaritmanın çarpım kuralını kullanarak $\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = \ln|\,x-a\,| - \ln|\,x+a\,|$ yazalım; o hâlde

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{2a}{x^{2}-a^{2}} = \frac{1}{x^{2}-a^{2}}.$$

On altıncı satır. k ile $+a^{2}$ ya da $-a^{2}$ değerini gösterelim ve $x^{2}+k > 0$ olan bir aralıkta çalışalım. $u(x) = x + \sqrt{x^{2}+k}$ diyelim; zincir kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{u(x)}{\sqrt{x^2+k}}.$$

Buradan

$$\left(\ln|\,u(x)\,|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$$

çıkar; tam olarak istenen sonuç. Bu formül, ters hiperbolik fonksiyonların türevleri (Teorem 5.7) kullanılarak $\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}$ ve $\operatorname{arccosh}\frac{x}{a}$ cinsinden de yazılabilir; iki yazım bir sabitle farklıdır ve Teorem 18.2 gereği ikisi de aynı aileyi verir.

> **Tablo bir başlangıçtır, bir son değil**
>
> Tablodaki on altı satır, integrallerin çok küçük bir kısmıdır. Asıl beceri, karşınıza çıkan integrali **cebirsel düzenlemeyle** ya da bir sonraki bölümde göreceğimiz tekniklerle bu satırlardan birine indirgemektir; bir integrali görünce ilk sorulacak soru "hangi satıra benziyor?" olmalıdır.

18.7 Tablonun Doğrudan Uygulamaları

Şimdi tabloyu kullanmaya başlayalım. Aşağıdaki örneklerin hiçbirinde yeni bir teknik yoktur: yalnızca integrandı cebirsel olarak düzenleyip Önerme 18.2'in lineerliğiyle parçalara ayırıyor ve her parçayı tablodan okuyoruz.

Örnek 18.6 (Tabloya İndirgenen İntegraller). Aşağıdaki belirsiz integralleri hesaplayalım ve her sonucu türev alarak doğrulayalım.

a) $\displaystyle\int \left(2x^3 - 5\sqrt{x} + \frac{7}{x^2}\right) dx$

b) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$

d) $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$

e) $\displaystyle\int 2^x\, 5^x\, dx$

f) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right) dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

Çözüm.
a) Önce kökü kuvvet biçiminde yazalım: $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ve $\frac{7}{x^2} = 7x^{-2}$. Lineerlik gereği üç integrali ayrı ayrı alabiliriz; her birinde tablonun birinci satırını kullanıyoruz:

$$\int 2x^3\, dx = \frac{x^4}{2}, \qquad \int 5x^{1/2}\, dx = 5\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{10}{3}x^{3/2}, \qquad \int 7x^{-2}\, dx = 7\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{7}{x}.$$

Birleştirirsek, $x > 0$ olan bir aralıkta

$$\int \left(2x^3 - 5\sqrt{x} + \frac{7}{x^2}\right) dx = \frac{x^4}{2} - \frac{10}{3}x^{3/2} - \frac{7}{x} + C.$$

Doğrulama. $\left(\frac{x^4}{2}\right)' = 2x^3$; $\left(-\frac{10}{3}x^{3/2}\right)' = -\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = -5\sqrt{x}$; $\left(-\frac{7}{x}\right)' = \left(-7x^{-1}\right)' = 7x^{-2} = \frac{7}{x^2}$. Toplam, integrandın kendisidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

b) Payı açıp payda ile bölelim; $x>0$ için

$$\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}=\frac{1-2x+x^2}{x^{1/2}}=x^{-1/2}-2x^{1/2}+x^{3/2}.$$

Üç terimi de birinci satırla integralleyelim: $\int x^{-1/2}dx=2\sqrt{x}$, $\int 2x^{1/2}dx=\frac{4}{3}x^{3/2}$ ve $\int x^{3/2}dx=\frac{2}{5}x^{5/2}$. O hâlde

$$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C.$$

Doğrulama. Türev alalım: $\left(2x^{1/2}\right)'=x^{-1/2}$; $\left(-\frac{4}{3}x^{3/2}\right)'=-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}=-2x^{1/2}$; $\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)'=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{3/2}=x^{3/2}$. Toplam $x^{-1/2}-2x^{1/2}+x^{3/2}$, yani integrand.

c) Payı paydaya göre düzenlemek gerekir; pay paydadan küçük dereceli olmadığı için "bölme" yapıyoruz:

$$\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}.$$

Şimdi lineerlik ve tablonun dokuzuncu satırı:

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\int 1\,dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\arctan x+C.$$

Doğrulama. $\left(x-\arctan x\right)'=1-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{(1+x^2)-1}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

d) Pisagor özdeşliğini $\cos^2 x$'e bölerek kullanalım: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ eşitliğini $\cos^2 x$'e bölersek $\tan^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, yani

$$\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$$

olur. $\cos x\neq 0$ olan bir aralıkta, tablonun altıncı satırıyla

$$\int\tan^2 x\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int 1\,dx=\tan x-x+C.$$

Doğrulama. $\left(\tan x-x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x$.

e) Bu, Örnek 18.5'in dersini hatırlatan güzel bir örnektir: iki fonksiyonun çarpımının integralini **ayrı ayrı integralleyip çarparak** bulamayız; ama burada çarpımı tek bir üstel fonksiyona indirgeyebiliriz. Üs kuralları gereği

$$2^x\,5^x=(2\cdot 5)^x=10^x$$

olduğundan, tablonun üçüncü satırıyla

$$\int 2^x\,5^x\,dx=\int 10^x\,dx=\frac{10^x}{\ln 10}+C.$$

Doğrulama. $\left(\dfrac{10^x}{\ln 10}\right)'=\dfrac{10^x\ln 10}{\ln 10}=10^x=2^x5^x$.

Yanlış yol ise $\int 2^x dx\cdot\int 5^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}\cdot\frac{5^x}{\ln 5}=\frac{10^x}{\ln 2\ln 5}$ verirdi; $\ln 2\ln 5\approx 1{,}116$ ile $\ln 10\approx 2{,}303$ farklı olduğundan iki sonuç uyuşmaz.

f) İki terimi ayrı ayrı ele alalım. Birincisinde $a=2$ ile on üçüncü satır, ikincisinde $a=3$ ile on dördüncü satır:

$$\int\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2},\qquad\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\arcsin\frac{x}{3}.$$

İkinci integral yalnızca $(-3,3)$ aralığında anlamlıdır; o hâlde $(-3,3)$ üzerinde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int\left(\frac{1}{4+x^2}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

Doğrulama. $\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2/4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4+x^2}$ ve $\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2/9}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.
g) Payı çift açı formülüyle açalım: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. Bu bir kareler farkıdır:

$$\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x).$$

$\cos x\neq\sin x$ olan bir aralıkta payda sadeleşir:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\cos x+\sin x.$$

Tablonun dördüncü ve beşinci satırlarıyla

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx=\int(\cos x+\sin x)\,dx=\sin x-\cos x+C.$$

Doğrulama. $\big(\sin x-\cos x\big)'=\cos x+\sin x$; bu da sadeleştirilmiş integranddır.
h) Paya $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ yazmak, bu tür integrallerde çok işe yarayan bir hiledir. $\sin x\cos x\neq 0$ olan bir aralıkta

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Altıncı ve yedinci satırlarla

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\tan x-\cot x+C.$$

Doğrulama. $\big(\tan x-\cot x\big)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$; yukarıdaki sadeleştirmeyi ters yönde okuyunca integrand elde edilir.
■

Bu sekiz örnekte kullandığımız hamleleri toparlayalım: kökleri kesirli üsse çevirmek; paydaki polinomu paydaya göre bölmek; Pisagor özdeşliğini uygun terime bölmek; üs kurallarıyla çarpımı tek bir üstele indirgemek; kareler farkını sadeleştirmek; paya $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ yazmak.

18.8 Alıştırmalar

Alıştırma 18.1 (İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral Üzerine).

a) $F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(\,1+x^2\,\right)$ fonksiyonu hangi fonksiyonun $\mathbb{R}$ üzerinde ilkelidir?

b) $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx$ integralini hesaplayın.

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4}$ integralini hesaplayın. Bu formül hangi aralıklarda geçerlidir? $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ üzerinde $\dfrac{1}{x^2-4}$ fonksiyonunun genel ilkeli kaç bağımsız sabit içerir?

d) $f(x)=|\,x\,|$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir ilkelini bulun ve bulduğunuz fonksiyonun 0 noktasında gerçekten türevlenebilir olduğunu tanıma dönerek doğrulayın.

e) $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde ilkeli olmadığını gösterin. $[0,\infty)$ üzerinde ilkeli var mıdır?

f) $\displaystyle\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$ integralini hesaplayın ve sonucu türev alarak doğrulayın.

g) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{2}{9+x^2}\right)dx$ integralini hesaplayın ve geçerli olduğu aralığı belirtin.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

a) F'nin türevini alalım. Birinci terime çarpım kuralını (Teorem 3.2), ikinci terime zincir kuralını (Teorem 4.1) uygulayacağız. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ (Teorem 5.5) ve $\big(\ln u\big)' = \dfrac{u'}{u}$ (Teorem 5.1) olduğundan:

$$\big(\, x \arctan x\big)' = 1 \cdot \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + \frac{x}{1+x^2},$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln\big(\, 1+x^2 \,\big)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Farkı alırsak

$$F'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \arctan x.$$

Demek ki F, $\arctan x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir ilkelidir; yani

$$\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\big(\, 1+x^2 \,\big) + C.$$

($1+x^2 > 0$ olduğundan logaritmanın içinde mutlak değere gerek yoktur.) Bu sonucu bir sonraki bölümde kısmi integrasyonla **bulmayı** öğreneceğiz.
b) Payı paydaya göre düzenleyelim. x^4+1 ifadesine x^4-1 ekleyip çıkararak kareler farkını ortaya çıkarabiliriz:

$$x^4+1 = \big(\, x^4-1 \,\big) + 2 = \big(\, x^2-1 \,\big)\,\big(\, x^2+1 \,\big) + 2.$$

O hâlde her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{x^4+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}.$$

Lineerlik (Önerme 18.2) ve tablonun birinci ile dokuzuncu satırlarıyla

$$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + 2\arctan x + C.$$

Doğrulama. $\left(\frac{x^3}{3} - x + 2\arctan x\right)' = x^2 - 1 + \frac{2}{1+x^2}$; bu da yukarıda elde ettiğimiz integranddır.
c) Tablonun on beşinci satırını $a = 2$ ile kullanalım:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

Doğrulama. $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \ln|\, x-2\,| - \ln|\, x+2\,|$ olduğundan

$$\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x^2-4}.$$

Geçerlilik. İntegrand $x = 2$ ve $x = -2$ noktalarında tanımsızdır. Tanım kümesi

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

olup **üç ayrık aralıktan** oluşur; formül bu üç aralığın her birinde ayrı ayrı geçerlidir. Önerme 18.1 gereği genel ilkel her bileşende bağımsız bir sabit taşır; yani $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ üzerindeki genel ilkel

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \begin{cases} c_1, & x > 2, \\ c_2, & -2 < x < 2, \\ c_3, & x < -2 \end{cases}$$

biçimindedir ve **üç bağımsız sabit** içerir.
d) $F(x) = \dfrac{x \mid x \mid}{2}$ alalım. Mutlak değerin tanımı (bkz. Analiz 1) gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & x\geq 0,\\ -\frac{x^2}{2}, & x<0.\end{cases}$$

$x\neq 0$ *noktalarında.* $x>0$ ise x'in tümüyle $(0,\infty)$ içinde kalan bir komşuluğunda $F(t)=\frac{t^2}{2}$'dir ve türev yerel bir kavram olduğundan $F'(x)=x=\mid x\mid$ olur; $x<0$ ise F, x'in bir komşuluğunda $-\frac{t^2}{2}$ ile çakışır ve $F'(x)=-x=\mid x\mid$'tir.
$x=0$ *noktasında.* Fark oranını tanıma dönerek hesaplayalım; $x\neq 0$ için

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{\frac{x\mid x\mid}{2}-0}{x}=\frac{\mid x\mid}{2}.$$

Mutlak değer fonksiyonu 0'da sürekli olduğundan $\lim_{x\to 0}\frac{\mid x\mid}{2}=0$'dır. Demek ki F, 0'da türevlenebilirdir ve $F'(0)=0=\mid 0\mid$'dır.
Üç durumu birleştirirsek her $x\in\mathbb{R}$ için $F'(x)=\mid x\mid$ olur; yani $F(x)=\frac{x\mid x\mid}{2}$, $\mid x\mid$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir ilkelidir ve

$$\int \mid x\mid dx=\frac{x\mid x\mid}{2}+C.$$

Bu, Örnek 18.3 ile ilginç bir karşıtlık oluşturur: $\mid x\mid$ süreklidir ve ilkeli vardır; $\operatorname{sgn}(x)$ ise süreksizdir ve ilkeli yoktur.
e) H fonksiyonunun $x_0=0$ noktasındaki tek yönlü limitleri

$$\lim_{x\to 0^-}H(x)=0,\qquad \lim_{x\to 0^+}H(x)=1$$

olup sonlu ve farklıdır; yani H'nin 0'da bir sıçrama süreksizliği vardır ve 0, $\mathbb{R}$'nin bir iç noktasıdır. Sonuç 18.1'un ikinci maddesi gereği H'nin $\mathbb{R}$ üzerinde ilkeli yoktur.
Doğrudan da görülebilir: bir F ilkeli olsaydı, Sonuç 8.1 ve Sonuç 8.2 gereği $(-\infty,0)$ üzerinde $F(x)=b$, $(0,\infty)$ üzerinde $F(x)=x+a$ olurdu; Teorem 18.3'nin verdiği süreklilik $a=b$ zorunluluğunu getirir ve geriye kalan tek aday $F(x)=b+\max(x,0)$ fonksiyonunun 0'daki fark oranı solda 0, sağda 1 olduğundan $F'(0)$ var olmaz.
$[0,\infty)$ *üzerinde.* Burada H sabit 1 fonksiyonudur ve $F(x)=x$ açıkça bir ilkeldir: $x>0$ için $F'(x)=1=H(x)$; $x=0$'da sağ türev

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1=H(0)$$

olur. Demek ki H'nin $[0,\infty)$ üzerinde ilkeli **vardır**. Engel fonksiyonun kendisinde değil, 0'ın **iç nokta** olmasındadır; süreksizliği aralığın uç noktasına taşıdığımızda sorun ortadan kalkar.
f) Çift açı formülünü kullanalım: $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ olduğundan $1+\cos 2x=2\cos^2 x$'tir. O hâlde $\cos x\neq 0$ olan bir aralıkta

$$\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}=\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}.$$

Tablonun altıncı satırıyla

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx=\frac{1}{2}\tan x+\frac{x}{2}+C.$$

Doğrulama. $\left(\frac{1}{2}\tan x+\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}$; bu da yukarıda sadeleştirdiğimiz integranddır.
g) İki terimi ayıralım; birincisinde on dördüncü satırı $a=2$ ile, ikincisinde on üçüncü satırı $a=3$ ile kullanıyoruz: $\int\frac{3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=3\arcsin\frac{x}{2}$ ve $\int\frac{2\,dx}{9+x^2}=\frac{2}{3}\arctan\frac{x}{3}$. Birinci integrandın tanımlı olması için $4-x^2>0$, yani $\mid x\mid<2$ gerekir; ikincisi $\mathbb{R}$'nin tamamında tanımlıdır. Kesişim $(-2,2)$ olduğundan formül bu aralıkta geçerlidir:

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{2}{9+x^2}\right)dx=3\arcsin\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\arctan\frac{x}{3}+C,\qquad x\in(-2,2).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. $\left(3\arcsin\frac{x}{2}\right)' = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2/4}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}$ ve $\left(\frac{2}{3}\arctan\frac{x}{3}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2/9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9+x^2}$. ■

Bu bölümde ilkel fonksiyonu tanımladık, bir aralık üzerindeki bütün ilkellerin tek bir sabitle birbirine bağlı olduğunu gösterdik, belirsiz integral gösterimini kurduk ve ilkelin varlığı için Darboux özelliğinin gerekli, sürekliliğin ise gerekli olmadığını gördük. Elimizde artık on altı satırlık bir temel integraller tablosu ve integrali bu tabloya indirgeyen birkaç cebirsel hamle var. Ama çoğu integral bu hamlelerle sadeleşmez; onlar için türevin iki büyük kuralını — zincir kuralını ve çarpım kuralını — integral diline çevirmemiz gerekiyor: Değişken Değiştirme ve Kısmi İntegrasyon.

 CC BY-NC-SA 4.0

19. Değişken Değiştirme ve Kısmi İntegrasyon

İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral bölümünde, bir aralık üzerinde tanımlı f fonksiyonunun **ilkel fonksiyonu** (antiderivative) kavramını kurduk: $F' = f$ olan her F fonksiyonuna f'nin bir ilkeli diyor, bunların tümünü $\int f(x)\,dx$ ile gösteriyorduk. Bir aralık üzerinde iki ilkelin farkının sabit olduğunu (Sonuç 8.2) bildiğimiz için de $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ yazımı anlamlıydı. Ayrıca temel fonksiyonların türev tablosunu tersine okuyarak küçük bir temel integraller listesi elde etmiştik.

Ne var ki bu liste tek başına çok az işe yarar. $\int e^{2x+5}\,dx$, $\int x \sin x\,dx$, $\int \ln x\,dx$ gibi son derece sıradan integrallerin hiçbiri listede yoktur; üstelik hiçbiri listedeki bir maddeye "bakarak" bulunamaz. Türev almada olduğu gibi burada da ihtiyacımız olan şey, **karmaşık bir integrandı, ilkelini bildiğimiz parçalara indirgeyen kurallardır.** Türev tarafında bu kurallar zincir kuralı ve çarpım kuralıydı. İntegral tarafında bunların tersine çevrilmiş hâlleri, analizdeki iki temel integral alma yöntemini verir: **değişken değiştirme** (substitution, change of variables) ve **kısmi integrasyon** (integration by parts).

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: zincir kuralının integral karşılığı olan yerine koyma teoremini ve tam ispatını; uygulamada kullanılan $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$ yazımının tam olarak ne anlama geldiğini; $\int f(ax+b)\,dx$ biçimindeki doğrusal değişimi; değişkeni ters yönde, yani $x = \varphi(t)$ biçiminde değiştirmenin ne zaman meşru olduğunu; çarpım kuralının integral karşılığı olan kısmi integrasyon formülünü; u ile dv'yi seçerken izlenecek ilkeleri; aynı integralin iki kez kısmi integrasyondan sonra yeniden ortaya çıkması durumunda denklemi cebirsel olarak çözmeyi; ve son olarak, integranddaki bir kuvveti adım adım düşüren **indirgeme formüllerini** (reduction formulas). Her hesabın sonunda aynı denetimi yapacağız: bulduğumuz ilkelin türevini alıp integrandı geri elde ediyor muyuz? Belirsiz integralde bu denetim bir lüks değil, yöntemin bir parçasıdır.

19.1 Temel İntegraller Listesi

Aşağıdaki liste, bu bölümde ve izleyen bölümlerde sürekli başvuracağımız temel integralleri toplar; her satır, karşılık gelen türev formülünün tersine okunmasından ibarettir. Bir ilkel her zaman **bir aralık üzerinde** verilir: $\int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$ eşitliği $(0,\infty)$ ve $(-\infty,0)$ üzerinde ayrı ayrı doğrudur, ama 0'ı içeren bir kümede iki parçanın sabitleri birbirinden bağımsızdır.

#	Formül	Geçerlilik
1	$\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$a \neq -1$; a negatif tam sayı ise $x \neq 0$, a tam sayı değilse $x > 0$
2	$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$	0'ı içermeyen aralıklarda
3	$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0$, $a \neq 1$
4	$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$	$\mathbb{R}$
5	$\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
6	$\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
7	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\cos x \neq 0$ olan aralıklarda
8	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\sin x \neq 0$ olan aralıklarda

 CC BY-NC-SA 4.0

#	Formül	Geçerlilik
9	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$\mathbb{R}$
10	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$	$\mathbb{R}$
11	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	$\mathbb{R}$
12	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$-1 < x < 1$

Üçüncü satır $a = e$ alındığında dördüncüye indirgenir ($\ln e = 1$). Dokuzuncu ve onuncu satırlar hiperbolik fonksiyonların türevlerinden (Tanım 5.2, Teorem 5.6), son iki satır da ters trigonometrik fonksiyonların türevlerinden (Teorem 5.5) gelir.

⚠ Çarpımın integrali, integrallerin çarpımı değildir

İntegral alma işlemi toplama ve sabitle çarpmaya saygı gösterir, ama çarpmaya **göstermez.** Genel olarak

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

olur. Karşı örnek olarak $f(x) = g(x) = x$ alalım: sol taraf $\frac{x^3}{3} + C$'dir, sağ taraf ise içinde $\frac{x^4}{4}$ terimi bulunan bir ifadedir; ikisi hiçbir seçimle çakışmaz. Aynı biçimde bölümün integrali de integrallerin bölümü değildir. Bu bölümdeki iki yöntem, tam da bu "eksik kuralların" yerini tutmak üzere kurulmuştur.

19.2 Değişken Değiştirme Yöntemi

Türev tarafındaki en güçlü araç zincir kuralıydı (Teorem 4.1): bileşke bir fonksiyonun türevi, dıştaki fonksiyonun türevi çarpı içtekinin türeviydi. Şimdi bu kuralı tersine okuyalım. F, f'nin bir ilkeli ise, $F \circ g$ bileşkesinin türevi

$$\big(\,F(g(x))\big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

olur. Demek ki sağ taraftaki ifadeyi integrandda gördüğümüz anda ilkelini de biliyoruz: $F \circ g$. Yöntemin bütün hüneri, önümüzdeki integrali $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ kalıbına oturtabilmektir.

Teorem 19.1 (Yerine Koyma Teoremi). *J ve I birer aralık, $g : J \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g(J) = I$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde bir F ilkeli varsa, $x \mapsto f(g(x))\,g'(x)$ fonksiyonunun J üzerinde bir ilkeli vardır ve*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

İspat.
F, f'nin I üzerindeki bir ilkelidir; yani her $u \in I$ için $F'(u) = f(u)$'dur. g ise J üzerinde türevlenebilirdir ve değerleri I içindedir. O hâlde $F \circ g$ bileşkesi J üzerinde tanımlıdır ve zincir kuralı (Teorem 4.1) her $x \in J$ için uygulanabilir:

$$\big(\,F \circ g\big)'(x) = F'\,\big(\,g(x)\,\big) \cdot g'(x).$$

$F' = f$ olduğundan sağ taraf $f\,\big(\,g(x)\,\big)\,g'(x)$'e eşittir. Böylece

$$\big(\,F(g(x))\big)' = f\,\big(\,g(x)\,\big)\,g'(x), \qquad x \in J$$

elde edilir. Bu, tam olarak "$F \circ g$ fonksiyonu, $x \mapsto f(g(x))g'(x)$ fonksiyonunun J üzerinde bir ilkelidir" demektir; dolayısıyla söz konusu fonksiyonun bir ilkeli vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

*Geriye ilkellerin **tümünün** $F \circ g + C$ biçiminde olduğunu söylemek kalıyor. H, aynı fonksiyonun J üzerinde herhangi bir ilkeli olsun. O zaman $H - F \circ g$ fonksiyonunun türevi J boyunca sıfırdır; J bir aralık olduğundan Sonuç 8.1 gereği bu fark sabittir. Yani bir $C \in \mathbb{R}$ için $H(x) = F(g(x)) + C$ olur. İki yönü birleştirince*

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

eşitliği kurulmuş olur.
■

Teoremin uygulamada kullanılış biçimi, ifadesinden biraz farklı görünür; çünkü pratikte f ile g'yi ayrı ayrı adlandırmak yerine kısa bir "diferansiyel" yazımı kullanırız.

i Diferansiyel yazımı ne demektir?

$u = g(x)$ yazıp $du = g'(x)\, dx$ dediğimizde, sonsuz küçük büyüklüklerle bir hesap yapmıyoruz. Bu yazım, Teorem 19.1'nin **muhasebesini tutan bir kısaltmadır** ve şu üç adımı kodlar:

1. İntegrandda $g'(x)\, dx$ çarpanını bulup onu du diye kısaltırız; geri kalan kısımda her $g(x)$ görünümünü u ile değiştiririz. Elde edilen $\int f(u)\, du$ integrali artık u değişkenindedir.
2. Bu yeni integrali hesaplarız; sonucu $F(u) + C$ olsun.
3. u yerine yeniden $g(x)$ yazarız. Sonuç $F(g(x)) + C$'dir.

Bu üç adımın hepsini meşru kılan tek şey, teoremin ispatındaki $\big(F(g(x))\big)' = f(g(x))g'(x)$ eşitliğidir. Bu yüzden **her hesabın sonunda u değişkeninden x değişkenine geri dönmek zorunludur**; belirsiz integralin sonucu, başlangıçtaki değişkenin bir fonksiyonudur. Ayrıca $g'(x)\, dx$ çarpanı integrandda tam olarak yoksa, eksik olan **sabit** çarpanı dışarıdan tamamlayabiliriz ($\cos x\, dx = \frac{du}{2}$ gibi); ama eksik olan bir x çarpanını dışarı atmak yasaktır, çünkü integral yalnızca sabitlerle değişmeli davranır.

Şimdi yöntemi bir dizi örnekte çalıştıralım. Her hesabın sonunda bulduğumuz ilkelin türevini alıp integrandı geri elde ederek sonucu doğrulayacağız.

Örnek 19.1 (Yerine Koyma ile Hesaplanan İntegraller). Aşağıdaki integralleri değişken değiştirerek hesaplayalım.

$$\int e^{2x+5}\, dx, \quad \int 3^{2\sin x} \cos x\, dx, \quad \int \frac{x}{1+x^2}\, dx, \quad \int \tan x\, dx, \quad \int \frac{dx}{x \ln x},$$

$$\int x\sqrt{1+x^2}\, dx, \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx, \quad \int \sin^3 x \cos x\, dx, \quad \int \sec x\, dx.$$

Çözüm.

1. $\int e^{2x+5}\, dx$**.** İçteki fonksiyon $u = 2x + 5$'tir; türevi 2 sabitidir, yani $du = 2\, dx$ ve buradan $dx = \frac{du}{2}$ olur. İntegrandda dx çarpanı hazır bulunduğundan yalnızca sabit bir düzeltme gerekir:

$$\int e^{2x+5}\, dx = \int e^u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x+5} + C.$$

Doğrulama. Zincir kuralıyla $\left(\frac{1}{2}e^{2x+5}\right)' = \frac{1}{2}e^{2x+5} \cdot 2 = e^{2x+5}$. İntegrand geri geldi.

2. $\int 3^{2\sin x} \cos x\, dx$**.** Üsteki ifadeyi $u = 2\sin x$ diye adlandıralım. O hâlde $du = 2\cos x\, dx$, yani $\cos x\, dx = \frac{du}{2}$'dir. İntegrandda $\cos x\, dx$ çarpanı tam olarak bulunduğundan değişim temizdir:

$$\int 3^{2\sin x} \cos x\, dx = \int 3^u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^{2\sin x}}{2\ln 3} + C.$$

Burada listenin üçüncü satırını kullandık.

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. $\left(\frac{3^{2\sin x}}{2\ln 3}\right)' = \frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{2\sin x}\ln 3\cdot 2\cos x = 3^{2\sin x}\cos x$ (Teorem 5.2 ve Teorem 4.1).

3. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$**.** Paydayı $u = 1+x^2$ alalım; $du = 2x\,dx$, yani $x\,dx = \frac{du}{2}$'dir. Paydaki x, tam da ihtiyacımız olan çarpandır:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|\,u\,| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

$1+x^2 > 0$ olduğundan mutlak değeri kaldırabildik.

Doğrulama. $\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$.

4. $\displaystyle\int \tan x\,dx$**.** Tanjantı tanımına açalım: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Paydayı $u = \cos x$ alırsak $du = -\sin x\,dx$, yani $\sin x\,dx = -du$ olur. $\cos x \neq 0$ olan bir aralıkta çalışıyoruz:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|\,u\,| + C = -\ln|\cos x\,| + C.$$

Bu sonuç $\ln|\sec x\,| + C$ biçiminde de yazılır.

Doğrulama. $(-\ln|\cos x\,|)' = -\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \tan x$.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$**.** Bu integrandı $\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$ diye okuyalım. $u = \ln x$ alırsak $du = \frac{dx}{x}$ olur ve integrandın ikinci çarpanı tam olarak du'yu verir. $x > 0$ ve $\ln x \neq 0$ olan bir aralıkta:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|\,u\,| + C = \ln\left|\ln x\,\right| + C.$$

Doğrulama. $\left(\ln|\ln x\,|\right)' = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}$ (Teorem 5.1).

6. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$**.** Yine $u = 1+x^2$, $x\,dx = \frac{du}{2}$ alalım:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

Doğrulama. $\left(\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}\cdot 2x = x\sqrt{1+x^2}$ (Teorem 5.3).

7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$**.** Paydadaki e^{2x}'i $(e^x)^2$ diye yazmak yolu açar. $u = e^x$ alalım; $du = e^x\,dx$'tir ve paydaki e^x tam da bunu sağlar:

$$\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan(e^x) + C.$$

Doğrulama. $\left(\arctan(e^x)\right)' = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

8. $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$**.** $u = \sin x$ alalım; $du = \cos x\,dx$'tir:

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Doğrulama. $\left(\frac{\sin^4 x}{4}\right)' = \frac{4\sin^3 x\cos x}{4} = \sin^3 x\cos x$.

9. $\displaystyle\int \sec x\,dx$**.** Burada $\sec x = \frac{1}{\cos x}$'tir. Bu integral doğrudan bir yerine koymaya uymaz; önce integrandı, türevi kendi içinde görünecek biçimde yeniden yazmak gerekir. $\sec x + \tan x \neq 0$ olan bir aralıkta pay ve paydayı bu ifadeyle çarpalım:

$$\sec x = \sec x\cdot\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}.$$

Şimdi $u = \sec x + \tan x$ alalım. Teorem 5.4 gereği $(\sec x)' = \sec x\tan x$ ve $(\tan x)' = \sec^2 x$ olduğundan $du = (\sec x\tan x + \sec^2 x)dx$'tir — yani pay tam olarak du'dur:

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|\,u\,| + C = \ln\left|\sec x + \tan x\,\right| + C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. Bulduğumuz ilkelin türevini alalım:

$$\big(\ln|\sec x+\tan x\mid\big)' = \frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x} = \frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\sec x+\tan x} = \sec x$$

Bu sonucu birazdan $\int \sec^3 x\,dx$ hesabında kullanacağız.
■

Dokuz hesapta ortak olan şudur: her seferinde integrandın bir parçasını u diye adlandırdık ve **geri kalanın u'nun türevine sabit bir çarpan farkıyla eşit olduğunu** gördük. Doğru u'yu seçmenin mekanik bir reçetesi yoktur; ama iki ipucu hemen her zaman işler: (i) bir bileşkede en içteki ifadeyi u almak, (ii) türevi integrandın başka bir yerinde görünen ifadeyi u almak.

19.2.1 Doğrusal Değişim

En sık karşılaşılan yerine koyma, içteki fonksiyonun birinci dereceden bir polinom olduğu durumdur. Bu durumda kural ezberlenecek kadar basittir ve ayrıca yazmaya değer.

Önerme 19.1 (Doğrusal Değişim). *I bir aralık, $f: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde bir F ilkeli olsun. $a\neq 0$ ve $b\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $ax+b\in I$ koşulunu sağlayan x'lerden oluşan aralık üzerinde*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.
$g(x)=ax+b$ alalım. g sürekli türevlenebilirdir ve $g'(x)=a$ sabittir. $a\neq 0$ olduğundan $\frac{1}{a}$ ile çarpıp bölmekte sakınca yoktur; integrandı yerine koyma teoreminin kalıbına sokalım:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f\,\big(\,g(x)\,\big)\,a\,dx = \frac{1}{a}\int f\,\big(\,g(x)\,\big)\,g'(x)\,dx.$$

Teorem 19.1 gereği son integral $F(g(x))+C_1$'e eşittir; sabitle çarpım integralin dışına alınabildiğinden

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

bulunur (burada $C=\frac{C_1}{a}$ yine keyfî bir sabittir).
Sonucu doğrudan da görebiliriz: zincir kuralıyla $\big(\frac{1}{a}F(ax+b)\big)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$'dir.
■

Bu önermenin kullanımı neredeyse otomatiktir. Örneğin

$$\int \cos(5x-1)\,dx = \frac{1}{5}\sin(5x-1)+C, \qquad \int \frac{dx}{3x+7} = \frac{1}{3}\ln|\,3x+7\,|+C,$$

$$\int (2x+9)^{10}\,dx = \frac{(2x+9)^{11}}{22}+C, \qquad \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}+C.$$

Sonuncusu $a=-1$, $b=0$ hâlidir ve indirgeme formülleri bölümünde sık sık işimize yarayacaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Yalnızca sabit çarpanlar dışarı alınabilir

$\int f(ax+b)\,dx$ hesabındaki $\frac{1}{a}$ çarpanının dışarı alınabilmesinin nedeni, a'nın bir **sabit** olmasıdır. İçteki fonksiyon doğrusal değilse böyle bir düzeltme yapılamaz. Örneğin

$$\int e^{x^2}\,dx \neq \frac{1}{2x}e^{x^2}+C$$

olur; sağ tarafın türevi bölüm kuralıyla $e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{2x^2}$'dir, integrand değildir. (Gerçekte $\int e^{x^2}\,dx$ temel fonksiyonlarla ifade edilemez.) Yerine koyma yöntemi, integrandda $g'(x)$ çarpanı **fiilen bulunduğunda** çalışır.

19.2.2 Ters Yönde Değişken Değiştirme

Şimdiye kadar hep "integrandın içindeki bir ifadeyi u diye adlandırma" yönünde çalıştık. Bazen tam ters yön işe yarar: yeni bir t değişkeni seçip **eski değişkeni** $x=\varphi(t)$ biçiminde yeni değişkenin bir fonksiyonu olarak yazarız. $\sqrt{1-x^2}$ gibi kökleri yok etmek için tipik olarak bu yön kullanılır.
Bu yönün meşruluğu, yerine koyma teoreminin ters fonksiyonla birlikte okunmasından gelir. T ve I en az iki noktalı birer aralık, $\varphi:T\to\mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir, $\varphi(T)=I$ ve her $t\in T$ için $\varphi'(t)\neq 0$ olsun. Bu koşullar altında φ' hiç işaret değiştiremez (aksi hâlde Teorem 10.1 gereği bir ara değer olarak sıfır değerini alırdı); dolayısıyla φ kesin monotondur (Sonuç 8.3). Kesin monoton bir fonksiyon birebirdir: $t_1\neq t_2$ olan iki nokta alalım ve genelliği bozmadan $t_1<t_2$ diyelim; Tanım 1.1 gereği ya $\varphi(t_1)<\varphi(t_2)$ ya da $\varphi(t_1)>\varphi(t_2)$ olur, her iki durumda da $\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$'dir. O hâlde $\varphi^{-1}:I\to T$ vardır ve Teorem 4.2 gereği her $x\in I$ noktasında türevlenebilirdir — özel olarak süreklidir:

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}.$$

Şimdi G, $t\mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ fonksiyonunun T üzerinde bir ilkeli olsun. $H(x)=G\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ tanımlayalım. Zincir kuralıyla, her $x\in I$ için

$$H'(x)=G'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=f\Big(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\Big)\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}=f(x)$$

bulunur. Demek ki H, f'nin I üzerinde bir ilkelidir. Kısacası:

$$\int f(x)\,dx=\Big[\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt\Big]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Uygulamada bu, "$x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$ yaz, t değişkeninde hesapla, sonunda $t=\varphi^{-1}(x)$ koy" demektir.

⚠ Değişim fonksiyonu birebir olmalıdır

Ters yönde değişimde φ'nin birebir olması **vazgeçilmezdir**; çünkü hesabın sonunda t yerine $\varphi^{-1}(x)$ yazmak zorundayız ve birebir olmayan bir φ'nin tersi yoktur. Bu yüzden $x=\sin t$ değişiminde t değişkeni $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ aralığına kısıtlanır. Bu, biçimsel bir titizlik değildir: yalnızca bu aralıkta $\cos t\geq 0$ olduğu için $\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t\,|=\cos t$ yazabiliriz. Aralık genişletilirse mutlak değer kaybolmaz ve işaret hatası yapılır.

Örnek 19.2 (Ters Yönde Değişimle Hesaplanan İki İntegral). Aşağıdaki integralleri $x=\varphi(t)$ biçiminde bir değişimle hesaplayalım.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx\quad(-1<x<1),\qquad\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\quad(x\in\mathbb{R}).$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci integral. $x = \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ alalım. Bu aralıkta $\varphi(t) = \sin t$ sürekli türevlenebilirdir, $\varphi'(t) = \cos t > 0$'dır; dolayısıyla φ kesin artandır, birebirdir ve $\varphi((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = (-1, 1)$ olur. Tersi $t = \arcsin x$'tir. $dx = \cos t\, dt$ ve

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

(son eşitlikte t'nin seçilen aralıkta $\cos t > 0$ olmasını kullandık). O hâlde

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos t \cdot \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt.$$

Yarım açı özdeşliği $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ ile

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} + C,$$

çünkü $\sin 2t = 2\sin t \cos t$'dir. Şimdi $t = \arcsin x$ yazalım; $\sin t = x$ ve $\cos t = \sqrt{1-x^2}$ olduğundan

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Doğrulama. Türev alalım:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{1+1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

İkinci integral. Bu kez hiperbolik bir değişim kullanalım: $x = \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. Tanım 5.2 ve Teorem 5.6 gereği $\varphi(t) = \sinh t$ sürekli türevlenebilirdir, $\varphi'(t) = \cosh t \geq 1 > 0$'dır; dolayısıyla kesin artandır, birebirdir ve $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$'dir. Tersi $t = \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$'tir. $dx = \cosh t\, dt$ ve $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ özdeşliğinden $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$ olur ($\cosh t > 0$ olduğundan mutlak değere gerek yoktur). Böylece

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cosh t}{\cosh t}\, dt = \int dt = t + C = \operatorname{arcsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Doğrulama. $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ olduğundan logaritma tanımlıdır ve

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

bulunur; bu da Teorem 5.7 ile uyumludur.

■

19.3 Kısmi İntegrasyon

Değişken değiştirme, zincir kuralının integral karşılığıydı. Şimdi çarpım kuralının (Teorem 3.2) integral karşılığını kuruyoruz. Bu yöntem, integrandın **farklı türden iki fonksiyonun çarpımı** olduğu durumlarda — polinom çarpı üstel, polinom çarpı trigonometrik, logaritma çarpı polinom gibi — devreye girer. Fikir şudur: $(UV)' = U'V + UV'$ eşitliğini $UV' = (UV)' - U'V$ biçiminde yazarsak, UV' integralini $U'V$ integraliyle değiş tokuş etmiş oluruz. Kazanç, U ile V' akıllıca seçildiğinde $U'V$'nin UV''den **daha kolay** olmasından gelir.

Teorem 19.2 (Kısmi İntegrasyon). *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $U, V : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir iki fonksiyon olsun. $U'V$ fonksiyonunun I üzerinde bir ilkeli varsa, UV' fonksiyonunun da I üzerinde bir ilkeli vardır ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int U(x)V'(x)\,dx = U(x)V(x) - \int V(x)U'(x)\,dx.$$

İspat.
U ve V türevlenebilir olduğundan çarpımları da türevlenebilirdir ve çarpım kuralı (Teorem 3.2) her $x \in I$ için şunu verir:

$$\big(\,U(x)V(x)\big)' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x).$$

Buradan

$$U(x)V'(x) = \big(\,U(x)V(x)\big)' - U'(x)V(x)$$

yazılır. Hipotez gereği $U'V$ fonksiyonunun bir W ilkeli vardır; yani $W' = U'V$'dir. Şimdi

$$\Phi(x) = U(x)V(x) - W(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Φ türevlenebilirdir ve yukarıdaki eşitlik gereği

$$\Phi'(x) = \big(\,U(x)V(x)\big)' - W'(x) = \Big(\,U'(x)V(x) + U(x)V'(x)\,\Big) - U'(x)V(x) = U(x)V'(x)$$

olur. Demek ki Φ, UV' fonksiyonunun I üzerinde bir ilkelidir; özel olarak UV''nin bir ilkeli vardır. Geriye ilkellerin tümünü tanımlamak kalıyor. Ψ, UV''nin herhangi bir ilkeli olsun. $\Psi - \Phi$ fonksiyonunun türevi I boyunca sıfırdır ve I bir aralık olduğundan Sonuç 8.1 gereği bu fark sabittir. Aynı akıl yürütme W için de geçerlidir: $U'V$'nin ilkelleri tam olarak $W + C$ ailesidir. Sonuç olarak UV''nin ilkelleri ailesi

$$U(x)V(x) - \big(\,W(x) + C\,\big)$$

ailesidir; bu da tam olarak

$$\int U(x)V'(x)\,dx = U(x)V(x) - \int V(x)U'(x)\,dx$$

*eşitliğinin anlamıdır. (İki taraf da birer ilkel **ailesi** olduğundan, keyfî sabit sağ taraftaki integral simgesinin içinde taşınır; bu yüzden formülün sağına ayrıca $+C$ yazılmaz.)*
■

i Kısmi integrasyonun pratik yazımı

Uygulamada $u = U(x)$, $dv = V'(x)\,dx$, $v = V(x)$, $du = U'(x)\,dx$ kısaltmaları kullanılır ve formül

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

biçiminde yazılır. Bu, tıpkı $du = g'(x)\,dx$ yazımı gibi, Teorem 19.2'un muhasebesini tutan bir kısaltmadır. Hesap üç adımda kurulur:

1. İntegrandı u ile dv diye iki parçaya ayır; dv'nin içinde dx mutlaka bulunmalıdır.
2. u'yu türeterek du'yu, dv'yi integralleyerek v'yi bul. v seçilirken keyfî sabit 0 alınır; farklı bir sabit seçmek sonucu değiştirmez, yalnızca ara ifadeleri şişirir.
3. $uv - \int v\,du$ yaz ve kalan integrali hesapla.

Yöntem ancak $\int v\,du$ integrali $\int u\,dv$'den daha kolaysa işe yarar. Yanlış seçim yapıldığında hesap daha zor bir integrale götürür; böyle bir durumda geri dönüp u ile dv'yi değiştirmek gerekir.

19.3.1 u ve dv Nasıl Seçilir?

Kesin bir kural yoktur, ama aşağıdaki üç ilke pratikte hemen her zaman doğru seçime götürür.

Önerme 19.2 (u ve dv Seçiminde Yol Gösterici İlkeler).

 CC BY-NC-SA 4.0

1. ***Logaritmik ve ters trigonometrik fonksiyonlar her zaman u olur.*** *$\ln x$, $\arctan x$, $\arcsin x$ gibi fonksiyonlar için elimizde doğrudan bir ilkel yoktur, ama türevleri cebirsel ve basittir. Bu yüzden onları u seçip türetiriz; geri kalan her şey dv olur. Özel olarak, integrand yalnızca $\ln x$ ya da $\arctan x$'ten ibaretse $dv = dx$ alınır.*
2. ***Polinom çarpı üstel ya da trigonometrik biçimindeki integrallerde polinom u olur.*** *$\int x^n e^{\alpha x}\,dx$, $\int x^n \sin(\beta x)\,dx$ gibi integrallerde polinomu u seçmek, her kısmi integrasyon adımında polinomun derecesini bir düşürür; yöntem n kez uygulandığında polinom yok olur ve geriye temel bir integral kalır.*
3. ***Üstel çarpı trigonometrik biçimindeki integrallerde seçim serbesttir, ama tutarlı olmalıdır.*** *$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$ gibi integrallerde iki çarpanın hiçbiri sadeleşmez; kısmi integrasyon iki kez uygulandığında başlangıçtaki integral yeniden ortaya çıkar ve elde edilen eşitlik, bilinmeyeni bu integral olan **bir denklem gibi cebirsel olarak çözülür.** İki adımda da aynı türden fonksiyonun u seçilmesi zorunludur; aksi hâlde ikinci adım birinciyi geri alır ve $0 = 0$ elde edilir.*

Bu üç ilke, uluslararası kaynaklarda **LIATE** kısaltmasıyla anılan sıralamanın Türkçe karşılığıdır: **L**ogaritmik → **T**ers trigonometrik → **C**ebirsel (polinom) → **T**rigonometrik → **Ü**stel.
Kural basittir: integranddaki iki çarpandan **bu sıralamada önce gelen** u seçilir, sonra gelen dv'nin içine konur. Örneğin $\int x \ln x\,dx$ integralinde $u = \ln x$, $dv = x\,dx$; $\int xe^x\,dx$ integralinde $u = x$, $dv = e^x\,dx$ alınır. Bu bir teorem değil, bir yol göstericidir; ama sıralamaya uymak neredeyse her zaman en kısa yoldur.

Örnek 19.3 (Kısmi İntegrasyonla Hesaplanan İntegraller). Aşağıdaki integralleri kısmi integrasyonla hesaplayalım.

$$\int x\sin x\,dx, \qquad \int \ln x\,dx, \qquad \int x^2 e^x\,dx, \qquad \int \arctan x\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx.$$

Çözüm.
1. $\displaystyle\int x\sin x\,dx$**.** İntegrand, cebirsel bir çarpanla trigonometrik bir çarpanın çarpımıdır; ikinci ilke gereği polinomu u alırız:

$$u = x, \quad du = dx; \qquad dv = \sin x\,dx, \quad v = -\cos x.$$

Formülü uygulayalım:

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Kazanç açıktır: başlangıçtaki $x\sin x$ integrali, çok daha kolay olan $\cos x$ integraline dönüştü.
Doğrulama. $(-x\cos x + \sin x)' = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$.
Seçimi ters yapsaydık, yani $u = \sin x$, $dv = x\,dx$ alsaydık, sağ tarafta $\frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx$ integrali belirirdi; polinomun derecesi **artmıştır.** Bu, seçimin yanlış olduğunun işaretidir.
2. $\displaystyle\int \ln x\,dx$ **$(x > 0)$.** İntegrand tek bir fonksiyondan ibaret görünse de, onu $\ln x \cdot 1$ diye okuyabiliriz. Birinci ilke gereği:

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}; \qquad dv = dx, \quad v = x.$$

O hâlde

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Doğrulama. $(x\ln x - x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ (Teorem 5.1).
3. $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$**.** İkinci ilke gereği polinom u olur; polinomun derecesi 2 olduğundan yöntemi iki kez uygulayacağız. Birinci adım:

$$u = x^2, \quad du = 2x\,dx; \qquad dv = e^x\,dx, \quad v = e^x,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

İkinci adımda kalan integrali hesaplayalım. Yine polinomu u alırız:

$$u = x,\quad du = dx;\qquad dv = e^x\,dx,\quad v = e^x,$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C_1.$$

İkisini birleştirelim:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Doğrulama. $\left(e^x(x^2-2x+2)\right)' = e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x x^2$.

4. $\int \arctan x\,dx$**.** Birinci ilke gereği ters trigonometrik fonksiyon u olur:

$$u = \arctan x,\quad du = \frac{dx}{1+x^2};\qquad dv = dx,\quad v = x.$$

O hâlde

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Sağdaki integrali Örnek 19.1'nda hesaplamıştık: $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$. Böylece

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Doğrulama.

$$\left(x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \arctan x.$$

5. $\int \arcsin x\,dx$ **$(-1 < x < 1)$.** Aynı ilkeyle:

$$u = \arcsin x,\quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\qquad dv = dx,\quad v = x,$$

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Kalan integralde $w = 1 - x^2$ yerine koyalım; $dw = -2x\,dx$, yani $x\,dx = -\frac{dw}{2}$'dir:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int w^{-1/2}\,dw = -\frac{1}{2}\cdot 2w^{1/2} + C_1 = -\sqrt{1-x^2} + C_1.$$

O hâlde

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Doğrulama.

$$\left(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

19.3.2 Aynı İntegralin Yeniden Ortaya Çıkması

Bazı integrallerde kısmi integrasyon, başladığımız integrali sağ tarafta yeniden karşımıza çıkarır. Bu bir kısır döngü değil, tersine bir fırsattır: elde edilen eşitliği, bilinmeyeni o integral olan bir denklem gibi çözeriz. İki klasik örnek görelim.

Örnek 19.4 (Sekant Küpünün İntegrali). $\cos x \neq 0$ olan bir aralıkta $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.
İntegrandı, ilkelini bildiğimiz bir çarpanı ayıracak biçimde parçalayalım:

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\,dx.$$

$\sec^2 x$'in ilkeli $\tan x$'tir (temel integraller listesinin 7. satırı), dolayısıyla bu çarpanı dv yapmak doğaldır:

$$u = \sec x, \quad du = \sec x \tan x\,dx; \qquad dv = \sec^2 x\,dx, \quad v = \tan x.$$

Formülü uygulayalım:

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \tan x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx.$$

Şimdi $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ özdeşliğini kullanalım (bu, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğinin $\cos^2 x$'e bölünmüş hâlidir):

$$\int \sec x \tan^2 x\,dx = \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx.$$

Bunu bir önceki eşitlikte yerine koyalım. $\mathcal{I} = \int \sec^3 x\,dx$ diye kısaltırsak

$$\mathcal{I} = \sec x \tan x - \mathcal{I} + \int \sec x\,dx.$$

Başlangıçtaki integral sağ tarafta yeniden belirdi. İki tarafa $\mathcal{I}$ ekleyelim:

$$2\mathcal{I} = \sec x \tan x + \int \sec x\,dx.$$

Örnek 19.1'nın dokuzuncu maddesinde $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_1$ olduğunu bulmuştuk. Yerine koyup ikiye bölelim:

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + \tan x\right| + C.$$

(Burada $C = \frac{C_1}{2}$ yine keyfî bir sabittir; keyfî bir sabitin yarısı da keyfîdir.)
Doğrulama. Türevi hesaplayalım. Önce birinci terim:

$$\left(\frac{1}{2}\sec x \tan x\right)' = \frac{1}{2}(\sec x \tan x \cdot \tan x + \sec x \cdot \sec^2 x) = \frac{1}{2}(\sec x \tan^2 x + \sec^3 x).$$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ yazarsak bu ifade

$$\frac{1}{2}(\sec^3 x - \sec x + \sec^3 x) = \sec^3 x - \frac{1}{2}\sec x$$

olur. İkinci terimin türevi ise dokuzuncu maddedeki hesaptan $\frac{1}{2}\sec x$'tir. Toplarsak

$$\sec^3 x - \frac{1}{2}\sec x + \frac{1}{2}\sec x = \sec^3 x$$

elde edilir; integrand geri geldi.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 19.5 (Üstel Çarpı Trigonometrik). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere

$$\mathcal{C} = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{S} = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx$$

integrallerini hesaplayalım.

Çözüm.
Üçüncü ilkeye göre iki çarpandan hiçbiri sadeleşmez; kısmi integrasyonu iki kez uygulayıp bir denklem kuracağız. Her iki adımda da **üstel çarpanı u seçeceğiz** (tutarlı olmak koşuluyla ters seçim de aynı sonuca götürür).
Birinci adım — $\mathcal{C}$ için. $u = e^{ax}$, $du = ae^{ax}\,dx$; $dv = \cos(bx)\,dx$, ve Önerme 19.1 gereği $v = \frac{1}{b}\sin(bx)$. Formül:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\,\mathcal{S}.$$

İkinci adım — $\mathcal{S}$ için. $u = e^{ax}$, $du = ae^{ax}\,dx$; $dv = \sin(bx)\,dx$, $v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$. Formül:

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\,\mathcal{C}.$$

Elimizde $\mathcal{C}$ ile $\mathcal{S}$'yi bilinmeyen kabul eden iki denklemli bir sistem var. İkinciyi birinciye taşıyalım:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\mathcal{C}\right) = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}\mathcal{C}.$$

$\mathcal{C}$ terimlerini sol tarafta toplayalım:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\mathcal{C} = \frac{e^{ax}}{b^2}\Big(\,b\sin(bx) + a\cos(bx)\,\Big), \qquad \text{yani} \qquad \frac{a^2+b^2}{b^2}\,\mathcal{C} = \frac{e^{ax}}{b^2}\Big(\,a\cos(bx) + b\sin(bx)\,\Big).$$

$b \neq 0$ olduğundan $a^2 + b^2 > 0$'dır; iki tarafı $\frac{b^2}{a^2+b^2}$ ile çarpalım:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\Big(\,a\cos(bx) + b\sin(bx)\,\Big)}{a^2+b^2} + C.$$

Bulduğumuz $\mathcal{C}$'yi ikinci denklemde kullanıp sadeleştirirsek eşlik eden formül de çıkar:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\Big(\,a\sin(bx) - b\cos(bx)\,\Big)}{a^2+b^2} + C.$$

Doğrulama. Birinci formülün türevini alalım. $D = a^2 + b^2$ yazalım:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{D}\right] &= \frac{ae^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + e^{ax}(-ab\sin bx + b^2\cos bx)}{D}\\ &= \frac{e^{ax}(a^2\cos bx + ab\sin bx - ab\sin bx + b^2\cos bx)}{D}\\ &= \frac{e^{ax}(a^2+b^2)\cos bx}{D} = e^{ax}\cos(bx).\end{aligned}$$

İkinci formül için aynı hesap:

$$\frac{ae^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + e^{ax}(ab\cos bx + b^2\sin bx)}{D} = \frac{e^{ax}(a^2+b^2)\sin bx}{D} = e^{ax}\sin(bx).$$

Örnek olarak $a = 1$, $b = 1$ alırsak $\int e^{x}\cos x\,dx = \frac{e^{x}(\cos x + \sin x)}{2} + C$ bulunur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Denklem çözerken tutarlı seçim

İkinci kısmi integrasyonda üstel çarpan yerine trigonometrik çarpanı u seçseydik, ikinci adım birinciyi harfi harfine geri alır ve elimizde bilgi taşımayan bir $\mathcal{C} = \mathcal{C}$ özdeşliği kalırdı. Denklem kurma tekniğinin işlemesi için **her iki adımda aynı türden fonksiyonun u seçilmesi** zorunludur.

19.4 İndirgeme Formülleri

İntegrandda büyük bir kuvvet bulunduğunda — $\int x^{10}e^{-x}\,dx$, $\int \ln^5 x\,dx$ gibi — kısmi integrasyonu bir kez uygulamak yetmez; ama yöntem bize kuvveti **bir basamak düşüren** bir bağıntı verir. Bu bağıntıyı tekrar tekrar kullanarak hesaplayabildiğimiz bir tabana kadar iniyoruz.

Tanım 19.1 (İndirgeme Formülü). Negatif olmayan bir n tam sayısına bağlı bir integral ailesi

$$I_n = \int f_n(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

verilsin. I_n'i, temel fonksiyonlarla yazılmış bir terim ile daha küçük indisli bir ya da birkaç I_k $(k < n)$ cinsinden ifade eden bağıntıya bir **indirgeme formülü** (reduction formula) denir. Bir indirgeme formülü, ancak bir **taban durum** (I_0 ya da I_1) doğrudan hesaplanabiliyorsa aileyi tümüyle belirler: bu durumda tümevarımla (bkz. Analiz 1) her n için I_n elde edilir.

İlk indirgeme formülünü, kısmi integrasyonun ikinci ilkesinin doğrudan bir sonucu olarak kuruyoruz.

Teorem 19.3 (Üstel Çekirdek için İndirgeme Formülü). *Negatif olmayan her n tam sayısı için*

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx$$

yazalım. O hâlde $I_0 = -e^{-x} + C$ ve her $n \geq 1$ için

$$I_n = -x^n e^{-x} + n\,I_{n-1}$$

olur.

İspat.
Taban durum Önerme 19.1'in doğrudan bir uygulamasıdır: $f(t) = e^t$, $a = -1$, $b = 0$ alırsak

$$I_0 = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

bulunur. Gerçekten $(-e^{-x})' = -e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}$'tir.
Şimdi $n \geq 1$ olsun. İntegrand, bir polinomla bir üstelin çarpımıdır; Önerme 19.2'in ikinci ilkesi gereği polinomu u alırız:

$$u = x^n, \quad du = nx^{n-1}\,dx; \qquad dv = e^{-x}\,dx, \quad v = -e^{-x}.$$

Burada v için taban durumun ilkelini keyfî sabiti sıfır alarak kullandık. Teorem 19.2'u uygulayalım:

$$I_n = x^n(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})nx^{n-1}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\,I_{n-1}.$$

Kısmi integrasyon teoreminin hipotezi sağlanmıştır: $u'v = -nx^{n-1}e^{-x}$ fonksiyonunun bir ilkeli vardır, çünkü n üzerinden tümevarımla I_{n-1}'in var olduğunu zaten kurmuş oluyoruz ($n = 1$ için bu I_0'dır ve yukarıda hesaplandı).
■

Aynı düşünce logaritmanın kuvvetleri için de çalışır; bu kez $dv = dx$ alınır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 19.4 (Logaritmanın Kuvvetleri için İndirgeme Formülü). *$x > 0$ olmak üzere negatif olmayan her n tam sayısı için*

$$L_n = \int (\ln x)^n \, dx$$

yazalım. O hâlde $L_0 = x + C$ ve her $n \geq 1$ için

$$L_n = x(\ln x)^n - n\, L_{n-1}$$

olur.

> ***İspat.***
> *$n = 0$ için $(\ln x)^0 = 1$ olduğundan $L_0 = \int dx = x + C$'dir.*
> *$n \geq 1$ olsun. İntegrandı $(\ln x)^n \cdot 1$ diye okuyup Önerme 19.2'in birinci ilkesini uygulayalım:*
>
> $$u = (\ln x)^n, \qquad dv = dx.$$
>
> *u'nun türevini zincir kuralıyla hesaplayalım: dıştaki fonksiyon $t \mapsto t^n$, içteki $\ln x$ olduğundan*
>
> $$du = n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}\, dx,$$
>
> *ve $v = x$'tir. Teorem 19.2 gereği*
>
> $$L_n = x(\ln x)^n - \int x \cdot n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x}\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - n\, L_{n-1}.$$
>
> *Buradaki x ile $\frac{1}{x}$'in sadeleşmesi, $x > 0$ olduğundan meşrudur. Yine, hipotezdeki "$u'v$'nin bir ilkeli vardır" koşulu tümevarımla sağlanır: L_{n-1} vardır.*
> *$n = 1$ alırsak, daha önce ayrıca hesapladığımız $L_1 = x \ln x - L_0 = x \ln x - x + C$ formülü geri gelir.*
> ■

Üçüncü indirgeme formülü, bir sonraki bölümde rasyonel fonksiyonların integralini alırken vazgeçilmez olacak: paydası ikinci dereceden indirgenemez bir polinomun kuvveti olan kesirler, basit kesirlere ayırmanın son aşamasında tam olarak bu biçimde çıkar.

Teorem 19.5 (Rasyonel Çekirdek için İndirgeme Formülü). *$a > 0$ olmak üzere her $n \geq 1$ için*

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

yazalım. O hâlde

$$J_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

ve her $n \geq 2$ için

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\, J_{n-1}$$

olur.

> ***İspat.***
> ***Taban durum.*** *$x^2 + a^2 = a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right)$ yazalım. Önerme 19.1'i $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ fonksiyonuna, ilkeli $F = \arctan$ ve doğrusal değişimi $x \mapsto \frac{x}{a}$ alarak uygulayalım (önermedeki doğrusal katsayı burada $\frac{1}{a}$'dır, dolayısıyla bölünen çarpan $\frac{1}{a}$, yani dışarı çıkan çarpan a olur):*
>
> $$J_1 = \int \frac{dx}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{a^2} \cdot a \arctan \frac{x}{a} + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulayalım: $\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+x^2}$.

İndirgeme bağıntısı. *Herhangi bir* $m \geq 1$ *için* J_m*'e kısmi integrasyon uygulayalım. İlginç bir seçim yapıyoruz: integrandın tamamını* u*, yalnızca* dx*'i* dv *alıyoruz.*

$$u = \left(x^2+a^2\right)^{-m}, \qquad dv = dx.$$

Zincir kuralı ve genel kuvvet kuralı (Teorem 5.3) ile

$$du = -m\left(x^2+a^2\right)^{-m-1}\cdot 2x\,dx = \frac{-2mx}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}\,dx, \qquad v = x.$$

Teorem 19.2 gereği

$$J_m = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m} + 2m\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}\,dx.$$

Sağdaki integrali indirgemek için paydaki x^2*'yi* $\left(x^2+a^2\right)-a^2$ *diye yazalım:*

$$\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}\,dx = \int\frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}\,dx = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m} - a^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}} = J_m - a^2 J_{m+1}.$$

Yerine koyalım:

$$J_m = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m} + 2m\,J_m - 2ma^2 J_{m+1}.$$

J_{m+1}*'i yalnız bırakalım:*

$$2ma^2 J_{m+1} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m} + (2m-1)J_m,$$

$$J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2\left(x^2+a^2\right)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2}\,J_m.$$

Son olarak $m = n-1$ *(yani* $n \geq 2$*) yazarsak* $2m-1 = 2n-3$ *ve* $2m = 2(n-1)$ *olur:*

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\,J_{n-1}.$$

$n \geq 2$ *olduğundan* $n-1 \geq 1$*'dir ve bölmeler meşrudur.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i İndirgeme formülleri neden işe yarar?

Bir indirgeme formülü, sonsuz sayıda integrali tek bir hesapla halleder. $\int x^{100}e^{-x}\,dx$ integralini doğrudan hesaplamaya kalkmak yüz adımlık bir iş demektir; oysa Teorem 19.3 bu yüz adımın **ortak biçimini** verir. Nitekim $I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$ bağıntısını tümevarımla açarsak

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k + C$$

kapalı formülü çıkar. Tümevarımı bir kez yürütelim; ara adımlarda keyfî sabiti yazmıyoruz. $n=0$ için sağ taraf $-e^{-x}$'tir ve bu I_0'dır. Formülün $n-1$ için doğru olduğunu varsayalım; o hâlde

$$I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1} = -x^n e^{-x} - e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n\,(n-1)!}{k!}x^k = -e^{-x}\left(x^n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!}x^k\right) = -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

olur; son adımda $k=n$ terimi $\frac{n!}{n!}x^n = x^n$ olduğu için ayrı duran x^n toplamın içine girdi. Bu tür yineleme bağıntılarıyla ileride belirli integral ve seriler bağlamında da sık karşılaşacağız.

Örnek 19.6 (İndirgeme Formüllerinin Uygulanması). Yukarıdaki üç indirgeme formülünü $n=3$ için açarak

$$\int x^3 e^{-x}\,dx, \qquad \int (\ln x)^3 dx, \qquad \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

integrallerini kapalı biçimde hesaplayalım.

Çözüm.

1. $\int x^3 e^{-x}\,dx$**.** Teorem 19.3'i tabandan başlayarak üç kez uygulayalım. Ara adımlarda keyfî sabiti son satıra bırakıyoruz:

$$I_0 = -e^{-x},$$

$$I_1 = -xe^{-x} + 1\cdot I_0 = -xe^{-x} - e^{-x},$$

$$I_2 = -x^2e^{-x} + 2I_1 = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x},$$

$$I_3 = -x^3e^{-x} + 3I_2 = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x}.$$

Ortak çarpanı dışarı alalım:

$$\int x^3e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C.$$

Doğrulama. Çarpım kuralıyla

$$\left(-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)\right)' = e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6) - e^{-x}(3x^2+6x+6) = x^3e^{-x}.$$

Kapalı formülle de uyumludur: $-e^{-x}\sum_{k=0}^{3}\frac{3!}{k!}x^k = -e^{-x}(6+6x+3x^2+x^3)$.

2. $\int (\ln x)^3 dx$ $(x>0)$**.** Teorem 19.4'i tabandan başlayarak açalım:

$$L_0 = x,$$

$$L_1 = x\ln x - 1\cdot L_0 = x\ln x - x,$$

$$L_2 = x(\ln x)^2 - 2L_1 = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x,$$

$$L_3 = x(\ln x)^3 - 3L_2 = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani

$$\int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C.$$

Doğrulama. Terim terim türev alalım:

$$\begin{aligned}(x(\ln x)^3)' &= (\ln x)^3 + 3(\ln x)^2,\\ (-3x(\ln x)^2)' &= -3(\ln x)^2 - 6\ln x,\\ (6x\ln x)' &= 6\ln x + 6,\\ (-6x)' &= -6.\end{aligned}$$

Toplarsak $(\ln x)^3$ dışındaki bütün terimler sadeleşir ve integrand geri gelir.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Teorem 19.5'i $a = 1$ ile kullanalım. Taban:

$$J_1 = \arctan x.$$

$n = 2$ için $2a^2(n-1) = 2$ ve $2n - 3 = 1$:

$$J_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}J_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x.$$

$n = 3$ için $2a^2(n-1) = 4$ ve $2n - 3 = 3$:

$$J_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}J_2 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan x + C.$$

Doğrulama. Üç terimin türevini ayrı ayrı alalım:

$$\left(\frac{x}{4(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(x^2+1)^2 - x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{4(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1) - 4x^2}{4(x^2+1)^3} = \frac{1-3x^2}{4(x^2+1)^3},$$

$$\left(\frac{3x}{8(x^2+1)}\right)' = \frac{3((x^2+1)-2x^2)}{8(x^2+1)^2} = \frac{3(1-x^2)}{8(x^2+1)^2}, \qquad \left(\frac{3}{8}\arctan x\right)' = \frac{3}{8(x^2+1)}.$$

Üçünü $8(x^2+1)^3$ paydasında toplayalım. Paylar sırasıyla $2(1-3x^2)$, $3(1-x^2)(x^2+1) = 3 - 3x^4$ ve $3(x^2+1)^2 = 3x^4 + 6x^2 + 3$ olur; toplamları

$$2 - 6x^2 + 3 - 3x^4 + 3x^4 + 6x^2 + 3 = 8$$

sabitidir. O hâlde türev $\dfrac{8}{8(x^2+1)^3} = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$'tür; integrand geri geldi.

■

19.5 Alıştırmalar

Alıştırma 19.1 (Değişken Değiştirme ve Kısmi İntegrasyon Üzerine). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız ve her birinde sonucun türevini alarak doğrulayınız.

a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

c) $\displaystyle\int x\ln x\,dx \quad (x>0)$

d) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

 CC BY-NC-SA 4.0

e) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0)$

f) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx \quad (x>0)$

g) $S_n=\displaystyle\int \sin^n x\,dx$ için bir indirgeme formülü kurunuz ve bunu kullanarak $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
a) $u=x^2$ alalım; $du=2x\,dx$, yani $x\,dx=\frac{du}{2}$'dir:

$$\int xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int e^u\,du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

Doğrulama: $\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)'=\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot 2x=xe^{x^2}$.
b) $x^6=(x^3)^2$ olduğunu görüp $u=x^3$ alalım; $du=3x^2\,dx$, yani $x^2\,dx=\frac{du}{3}$'tür:

$$\int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{3}\arctan u+C=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C.$$

Doğrulama: $\left(\frac{1}{3}\arctan x^3\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}=\frac{x^2}{1+x^6}$.
c) LIATE sıralamasında logaritmik, cebirselden önce gelir: $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$; $dv=x\,dx$, $v=\frac{x^2}{2}$.

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Doğrulama: $\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)'=x\ln x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x}{2}=x\ln x$.
d) Ters trigonometrik olan $\arctan x$'i u alalım: $du=\frac{dx}{1+x^2}$; $dv=x\,dx$, $v=\frac{x^2}{2}$.

$$\int x\arctan x\,dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

Kalan integralde payı paydaya göre düzenleyelim: $\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$. O hâlde

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\arctan x+C_1,$$

$$\int x\arctan x\,dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{x^2\arctan x}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\arctan x}{2}\right)'=x\arctan x+\frac{x^2}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x^2)}=x\arctan x+\frac{x^2+1}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}=x\arctan x.$$

e) Kökü yok etmek için ters yönde bir değişim yapalım: $x=t^2$, $t>0$. Bu fonksiyon $(0,\infty)$ üzerinde sürekli türevlenebilirdir, türevi $2t>0$ olduğundan kesin artandır ve birebirdir; tersi $t=\sqrt{x}$'tir. $dx=2t\,dt$ ve $\sqrt{x}=t$ olduğundan

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx=\int e^t\cdot 2t\,dt=2\int te^t\,dt.$$

Kalan integrali kısmi integrasyonla hesaplamıştık: $\int te^t\,dt=te^t-e^t+C_1$. Geri dönersek

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx=2\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\right)+C=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$$

Doğrulama:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}\right)' = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 2e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}.$$

f) $\mathcal{A} = \int \sin(\ln x)dx$ ve $\mathcal{B} = \int \cos(\ln x)dx$ yazalım. Birincide $u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$ alalım; $du = \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$ ve $v = x$'tir:

$$\mathcal{A} = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{dx}{x} = x\sin(\ln x) - \mathcal{B}.$$

İkincide aynı seçimle $u = \cos(\ln x)$, $du = -\sin(\ln x)\frac{dx}{x}$, $v = x$:

$$\mathcal{B} = x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\frac{dx}{x} = x\cos(\ln x) + \mathcal{A}.$$

İkinciyi birincide yerine koyalım:

$$\mathcal{A} = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \mathcal{A} \quad\Rightarrow\quad 2\mathcal{A} = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)),$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C.$$

Doğrulama:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x(\sin\ln x - \cos\ln x)}{2}\right] = \frac{\sin\ln x - \cos\ln x}{2} + \frac{x}{2}\left(\frac{\cos\ln x}{x} + \frac{\sin\ln x}{x}\right) = \frac{2\sin\ln x}{2} = \sin(\ln x).$$

g) İntegrandı $\sin^n x = \sin^{n-1}x\cdot\sin x$ diye parçalayalım ve $n \geq 2$ için kısmi integrasyon uygulayalım:

$$u = \sin^{n-1}x, \quad du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx; \qquad dv = \sin x\,dx, \quad v = -\cos x.$$

O hâlde

$$S_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx.$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ yazarsak

$$\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx = \int \sin^{n-2}x\,dx - \int \sin^n x\,dx = S_{n-2} - S_n,$$

$$S_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n.$$

S_n'li terimleri toplayıp n'e bölelim:

$$nS_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)S_{n-2}, \qquad S_n = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}S_{n-2}.$$

Taban durumlar $S_0 = \int dx = x + C$ ve $S_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$'dir.
Şimdi $n = 4$ için açalım. Önce $n = 2$:

$$S_2 = -\frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{1}{2}S_0 = -\frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Ardından $n = 4$:

$$\int \sin^4 x\,dx = S_4 = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}S_2 = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} - \frac{3\sin x\cos x}{8} + \frac{3x}{8} + C.$$

Doğrulama: terim terim türev alalım.

$$\left(-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}\right)' = -\frac{3\sin^2 x\cos^2 x - \sin^4 x}{4}, \qquad \left(-\frac{3\sin x\cos x}{8}\right)' = -\frac{3(\cos^2 x - \sin^2 x)}{8}, \qquad \left(\frac{3x}{8}\right)' = \frac{3}{8}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$s = \sin^2 x$ yazıp $\cos^2 x = 1 - s$ koyalım. Toplam

$$-\frac{3s(1-s)}{4} + \frac{s^2}{4} - \frac{3(1-s)}{8} + \frac{3s}{8} + \frac{3}{8} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)s^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right)s + \left(-\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) = s^2$$

olur; yani türev $\sin^4 x$'tir.
■

Elimizdeki iki yöntem — yerine koyma ve kısmi integrasyon — tek başlarına bir integrali "çözen" reçeteler değil, integrandı dönüştürme araçlarıdır; hangi dönüşümün işe yarayacağı integrandın yapısına bağlıdır. Bir sonraki bölümde, integrandın yapısının tam olarak bilindiği ve bu yüzden sistematik bir algoritmanın kurulabildiği ilk aileyle tanışacağız: iki polinomun oranı biçimindeki fonksiyonlar. Bunların integrali, basit kesirlere ayırma yoluyla her zaman temel fonksiyonlarla ifade edilebilir: Rasyonel Fonksiyonların İntegrali.

 CC BY-NC-SA 4.0

20. Rasyonel Fonksiyonların İntegrali

Değişken Değiştirme ve Kısmi İntegrasyon bölümünde iki genel araç kurmuştuk. Değişken değiştirme, integrandın içinde saklı bir bileşkeyi görüp onu çözüyordu; kısmi integrasyon ise bir çarpımın integralini başka bir çarpımın integraline dönüştürüyordu. Aynı bölümde, kısmi integrasyonun art arda uygulanmasıyla **indirgeme formülleri** (reduction formulas) elde ettiğimizi de gördük: örneğin $I_n = \int x^n e^{-x}\,dx$ için $u = x^n$, $dv = e^{-x}\,dx$ seçimi

$$I_n = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\, I_{n-1}$$

formülünü verir ve üstel fonksiyonun yanındaki kuvvet adım adım düşürülerek hesap sonlanır. Ne var ki bu araçların hepsi **hüner** ister: hangi değişkeni seçeceğimizi, hangi çarpanı u alacağımızı problem söylemez, biz buluruz.

Bu bölümde ilk kez bir **algoritma** kuracağız. Belirli bir fonksiyon sınıfı — iki polinomun oranı olarak yazılabilen fonksiyonlar — için, hiçbir hünere başvurmadan, adımları önceden belli sonlu bir işlem dizisiyle ilkel fonksiyonu bulan bir yordam vereceğiz. Bu yordam her zaman çalışır ve sonucu her zaman aynı üç malzemeden kurulur: bir rasyonel fonksiyon, sonlu çok logaritma ve sonlu çok arktanjant. Bir başka deyişle, **rasyonel bir fonksiyonun ilkeli hiçbir zaman yeni bir fonksiyon türü doğurmaz.** Bu, analizde nadir görülen bir kapalılık olgusudur ve rasyonel fonksiyonların integralini bütün integral hesabının omurgası hâline getirir: sonraki bölümlerde göreceğimiz köklü ve trigonometrik integrallerin çoğu, uygun bir değişken değiştirmeyle bu bölümdeki probleme indirgenecektir.

Yordam üç adımdan oluşur. Önce paydanın derecesi payınkinden büyük değilse **polinom bölme** yaparız; sonra paydayı **çarpanlarına ayırırız**; en sonunda kesri, paydaları bu çarpanların kuvvetleri olan küçük parçalara — **basit kesirlere** (partial fractions) — ayırırız. Bu bölümde şunları öğreneceğiz: üç adımın her birinin neden yapılabildiğini; basit kesirlere ayırmanın varlık ve teklik teoremini tam ispatıyla; dört ayrışım kalıbını; basit kesirlerin integrallerini — bu arada $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ indirgeme formülünü türeteceğiz; katsayıları belirlemenin iki yolunu ve hangisinin ne zaman kullanılacağını; ve son olarak katlı çarpanlarda rasyonel kısmı bir hamlede ayıran Ostrogradski yöntemini.

20.1 Rasyonel Fonksiyon ve Üç Adımlı Yordam

Önce üzerinde çalışacağımız nesneyi tanımlayalım.

Tanım 20.1 (Rasyonel Fonksiyon ve Öz Kesir). P ve Q reel katsayılı polinomlar ve Q sıfır polinomu olmasın. Q'nun sıfırlarının kümesi $Z(Q)$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus Z(Q)$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna **rasyonel fonksiyon** (rational function) denir.
$\deg P < \deg Q$ ise $\frac{P}{Q}$ kesrine **öz kesir** (proper fraction), $\deg P \geq \deg Q$ ise **bileşik kesir** (improper fraction) denir.

Q'nun sıfırları sonlu sayıdadır (sıfırdan farklı bir polinomun en çok derecesi kadar kökü vardır), dolayısıyla f'nin tanım kümesi sonlu sayıda noktanın çıkarıldığı bir doğrudur; bu küme açıktır ve sonlu sayıda ayrık açık aralığın birleşimidir. f bu aralıkların her birinde süreklidir ve türevlenebilirdir: süreklilik rasyonel fonksiyonun limiti sonucundan, türevlenebilirlik ise türev için bölüm kuralından çıkar. Dolayısıyla f'nin bu aralıkların **her birinde ayrı ayrı** bir ilkel fonksiyonu vardır. Aşağıda "$+C$" yazarken bu ayrıntıyı hep akılda tutuyoruz: sabit, tanım kümesinin her bileşeninde ayrı seçilebilir.
Yordamın adımlarını sırayla kuralım.

 CC BY-NC-SA 4.0

20.1.1 Adım 1 — Derece Denetimi ve Polinom Bölme

Basit kesirlere ayırma yöntemi doğrudan yalnızca **öz** kesirlere uygulanır. Payın derecesi paydanınkinden küçük değilse, önce bölme yapıp bileşik kesri "polinom + öz kesir" biçimine getirmemiz gerekir. Bunun her zaman yapılabildiğini söyleyen olgu, tam sayılardaki bölme algoritmasının polinomlardaki karşılığıdır.

Önerme 20.1 (Polinomlarda Bölme Algoritması). *P ve Q reel katsayılı polinomlar ve $Q \neq 0$ olsun. O hâlde*

$$P(x) = S(x)\,Q(x) + R(x), \qquad R = 0 \ \text{ya da}\ \deg R < \deg Q$$

*koşullarını sağlayan **tek bir** (S, R) polinom çifti vardır. Bu durumda Q'nun sıfırlarından farklı her x için*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

olur; sağdaki ikinci terim bir öz kesirdir.

> ***İspat.***
> ***Varlık.*** *$\deg Q = m$ olsun ve $\deg P$ üzerinden güçlü tümevarım yapalım (bkz. Analiz 1). $P = 0$ ya da $\deg P < m$ ise $S = 0$, $R = P$ almak yeter.*
> *Şimdi $n = \deg P \geq m$ olsun ve derecesi n'den küçük bütün polinomlar için iddianın doğru olduğunu varsayalım. P'nin baş katsayısı p_n, Q'nunki $q_m \neq 0$ olsun.*
>
> $$P_1(x) = P(x) - \frac{p_n}{q_m}\,x^{\,n-m}\,Q(x)$$
>
> *polinomunu kuralım. Sağdaki iki polinomun da x^n katsayısı p_n'dir; çıkarmada bu terimler birbirini götürür, dolayısıyla $P_1 = 0$ ya da $\deg P_1 < n$'dir. Tümevarım varsayımı gereği $P_1 = S_1 Q + R$ olacak biçimde S_1 ve ($R = 0$ ya da $\deg R < m$ olan) R polinomları vardır. Buradan*
>
> $$P(x) = \frac{p_n}{q_m}x^{\,n-m}Q(x) + P_1(x) = \left(\frac{p_n}{q_m}x^{\,n-m} + S_1(x)\right)Q(x) + R(x)$$
>
> *çıkar; $S = \frac{p_n}{q_m}x^{n-m} + S_1$ alırsak istenen ayrışım elde edilir.*
> ***Teklik.*** *$SQ + R = \tilde{S}Q + \tilde{R}$ olsun; burada R ve $\tilde{R}$ ya sıfırdır ya da dereceleri m'den küçüktür. Q'lu terimleri bir tarafa, kalanları öbür tarafa toplarsak*
>
> $$\left(\,S - \tilde{S}\,\right)Q = \tilde{R} - R$$
>
> *olur. $S \neq \tilde{S}$ olsaydı sol taraf sıfırdan farklı iki polinomun çarpımı olurdu ve derecesi $\deg(S - \tilde{S}) + m \geq m$ olurdu; oysa sağ taraf ya sıfırdır ya da derecesi m'den küçüktür. Bu çelişkiden $S = \tilde{S}$, dolayısıyla $\tilde{R} - R = 0$, yani $\tilde{R} = R$ çıkar.*
> *Son eşitlik, ilk eşitliğin $Q(x) \neq 0$ olan noktalarda $Q(x)$'e bölünmesiyle elde edilir. $R = 0$ ya da $\deg R < \deg Q$ olduğundan $\frac{R}{Q}$ bir öz kesirdir.*
> ■

Bu ayrışımın integral bakımından anlamı şudur: S bir polinomdur, integrali kuvvet kuralıyla anında alınır. Geriye kalan $\frac{R}{Q}$ öz kesri ise Adım 2 ve 3'ün konusudur. Yani bileşik kesirler hiçbir zaman gerçek bir zorluk çıkarmaz.

20.1.2 Adım 2 — Paydayı Çarpanlarına Ayırma

Öz kesre geldikten sonra yapılacak iş, paydayı **tümüyle** çarpanlarına ayırmaktır. Burada dayanağımız cebirden gelen bir olgudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Cebirin temel teoreminin reel yüzü

Cebirin temel teoremi, sabit olmayan her karmaşık katsayılı polinomun $\mathbb{C}$'de bir kökü olduğunu söyler; buradan, karmaşık katsayılı her polinomun doğrusal çarpanların çarpımı olarak yazılabildiği çıkar. Katsayılar **reel** ise, z bir kök olduğunda eşleniği $\bar{z}$ de köktür ve $z \notin \mathbb{R}$ iken $(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z)\,x + |\,z\,|^2$ çarpımı reel katsayılı, diskriminantı negatif bir ikinci derece polinomdur. Eşlenik kökleri ikişer ikişer eşleştirerek şu sonuca varılır:
Reel katsayılı, sabit olmayan her polinom, bir sabitle birlikte doğrusal çarpanların ve indirgenemez kuadratik çarpanların (yani $\Delta = p^2 - 4q < 0$ olan $x^2 + px + q$ biçimindeki çarpanların) kuvvetlerinin çarpımı olarak yazılabilir; bu yazılış, çarpanların sırası dışında tektir.
Bu olgunun ispatı cebire aittir ve burada yapılmayacaktır; biz onu, aşağıdaki bütün yordamın dayandığı bir veri olarak kullanacağız.

Buna göre, Q'nun baş katsayısını paya taşıyarak baş katsayısını 1 kabul edebiliriz ve

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}\,\big(x^2+p_1x+q_1\big)^{m_1}\cdots\big(x^2+p_sx+q_s\big)^{m_s}$$

yazabiliriz. Burada $a_1, \ldots, a_r$ birbirinden farklı reel sayılardır, $x^2 + p_l x + q_l$ çarpanları birbirinden farklı ve indirgenemezdir ($p_l^2 - 4q_l < 0$), ve

$$\deg Q = k_1 + \cdots + k_r + 2(m_1 + \cdots + m_s)$$

olur.

⚠ İndirgenemez çarpanı zorla parçalamayın

$x^2 + 4$ polinomunun reel kökü yoktur; onu $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$ gibi doğrusal parçalara ayırmaya çalışmak anlamsızdır, çünkü $x^2 + 4 \neq (x+2)(x-2)$'dir. İndirgenemez bir kuadratik çarpan, ayrışımda **bir bütün olarak** kalır ve payına — sabit değil — birinci dereceden bir polinom yazılır. Bir çarpanın indirgenemez olup olmadığı diskriminanta bakılarak anlaşılır: $\Delta = p^2 - 4q < 0$ ise indirgenemezdir.

20.1.3 Adım 3 — Basit Kesirlere Ayırma

Son adım, öz kesri paydaları bu çarpanların kuvvetleri olan parçalara ayırmaktır. Önce parçaların ne olduğunu adlandıralım.

Tanım 20.2 (Basit Kesir Türleri). Aşağıdaki iki biçimdeki rasyonel fonksiyonlara **basit kesir** (partial fraction) denir. $k \in \mathbb{N}$, $A, B, a, p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere:
I. tür.

$$\frac{A}{(x-a)^k}.$$

II. tür.

$$\frac{Ax+B}{\big(x^2+px+q\big)^k}, \qquad \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

I. türde payda bir doğrusal çarpanın kuvveti, II. türde ise indirgenemez bir kuadratik çarpanın kuvvetidir; II. türde pay birinci dereceden (ya da sabit) bir polinomdur.

Yordamın kalbi, her öz kesrin bu iki türden sonlu çok basit kesrin toplamı olarak — üstelik **tek türlü** — yazılabilmesidir.

Teorem 20.1 (Basit Kesirlere Ayırma Teoremi). *P ve Q reel katsayılı polinomlar,* $\deg P < \deg Q = n$ *ve*

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}\,g_1(x)^{m_1}\cdots g_s(x)^{m_s}, \qquad g_l(x) = x^2 + p_l x + q_l$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun; burada a_i'ler birbirinden farklı, g_l'ler birbirinden farklı ve indirgenemezdir. O hâlde

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_l}\frac{B_{lj}\,x + C_{lj}}{g_l(x)^j}$$

*eşitliğini Q'nun sıfırlarından farklı her x için sağlayan A_{ij}, B_{lj}, C_{lj} reel sayıları vardır ve bu sayılar **tek türlü** belirlidir.*

İspat.
Sağ taraftaki bilinmeyenlerin sayısını sayalım: doğrusal çarpanlardan $k_1 + \cdots + k_r$ tane, kuadratik çarpanlardan $2(m_1 + \cdots + m_s)$ tane bilinmeyen gelir. Toplam

$$N = k_1 + \cdots + k_r + 2(m_1 + \cdots + m_s) = \deg Q = n$$

olur. Bu eşitlik ispatın anahtarıdır: bilinmeyenlerin sayısı, paydanın derecesine tam olarak eşittir.
Şimdi $V = \mathbb{R}^N$ ve $\mathcal{P}_{n-1}$, derecesi $n-1$'i aşmayan polinomların vektör uzayı olsun; $\dim V = N = n$ *ve* $\dim \mathcal{P}_{n-1} = n$*'dir.*
$v = (\,A_{ij}, B_{lj}, C_{lj}\,) \in V$ için, sağ taraftaki toplamı ortak paydada birleştirdiğimizde çıkan payı $T(v)$ ile gösterelim; yani $T(v)$, sağ taraftaki ifadenin Q ile çarpımıdır:

$$T(v) = \sum_{i,j} A_{ij}\,(x-a_i)^{k_i-j}\,Q_i(x) + \sum_{l,j}\big(\,B_{lj}x + C_{lj}\,\big)\,g_l(x)^{m_l-j}\,G_l(x),$$

*burada $Q_i = \dfrac{Q}{(x-a_i)^{k_i}}$ ve $G_l = \dfrac{Q}{g_l^{m_l}}$ polinomlarıdır. Her terimin derecesini kontrol edelim: birinci toplamdaki terimin derecesi $(k_i - j) + (n - k_i) = n - j \le n-1$'dir; ikinci toplamdaki terimin derecesi en çok $1 + 2(m_l - j) + (n - 2m_l) = n - 2j + 1 \le n-1$'dir (çünkü $j \ge 1$). Demek ki T, V'den $\mathcal{P}_{n-1}$'e giden bir dönüşümdür ve tanımı gereği **lineerdir.***
İki uzayın boyutları eşit olduğundan, T'nin örten olduğunu göstermek için bire bir olduğunu göstermek yeter. Bunu yapalım.
*$T(v) = 0$, yani yukarıdaki ifade **özdeş olarak sıfır polinomu** olsun. Bütün katsayıların sıfır olduğunu göstereceğiz.*
Doğrusal çarpanlar. *Bir i sabitleyelim ve $a = a_i$, $k = k_i$ yazalım. Özdeşlikteki terimlerden $j < k$ olanlar $(x-a)^{k-j}$ çarpanını, $i' \neq i$ indisli terimler $Q_{i'}$ içinde $(x-a)^k$ çarpanını, kuadratik terimler ise G_l içinde yine $(x-a)^k$ çarpanını taşır; dolayısıyla $j = k$ terimi dışındaki **her terim $(x-a)$ ile bölünür.** Özdeşlikte $x = a$ koyarsak*

$$A_{ik}\,Q_i(a) = 0$$

kalır. a, Q'nun tam olarak k katlı bir köküdür; bu yüzden $Q_i(a) \neq 0$'dır ve $A_{ik} = 0$ bulunur. Bu terim düştükten sonra özdeşlikteki bütün terimler $(x-a)$ ile bölünür; özdeşliği $(x-a)$'ya bölüp aynı akıl yürütmeyi yinelersek $A_{i,k-1} = 0$ çıkar. Bu işlemi k kez tekrarlayarak $A_{ij} = 0$ $(1 \le j \le k)$ elde ederiz. Aynı şey her i için geçerlidir.
Kuadratik çarpanlar. *Bütün A_{ij}'ler sıfır olduğuna göre özdeşlik*

$$\sum_{l,j}\big(\,B_{lj}x + C_{lj}\,\big)\,g_l^{m_l-j}\,G_l = 0$$

hâlini alır. Bir l sabitleyelim, $g = g_l$, $m = m_l$ yazalım. Aynı gerekçeyle, $j = m$ terimi dışındaki her terim g ile bölünür. O hâlde g, kalan terimi de bölmelidir:

$$g \mid \big(\,B_{lm}x + C_{lm}\,\big)\,G_l.$$

g indirgenemezdir ve G_l, g çarpanını içermez; polinom halkasında indirgenemez bir çarpan bir çarpımı bölüyorsa çarpanlardan birini böler, dolayısıyla $g \mid (\,B_{lm}x + C_{lm}\,)$ olmalıdır. Ama $\deg g = 2$ iken $B_{lm}x + C_{lm}$'in derecesi en çok 1'dir; derecesi daha büyük olan bir polinom, sıfırdan farklı bir polinomu bölemez. Demek ki $B_{lm}x + C_{lm}$ sıfır polinomudur, yani $B_{lm} = C_{lm} = 0$'dır. Bu terim düştükten sonra kalan bütün terimler g ile bölünür; özdeşliği g'ye bölüp yineleyerek bütün j için $B_{lj} = C_{lj} = 0$ buluruz. Böylece $T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$, yani T bire birdir. Boyutlar eşit olduğundan T örtendir de.

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi teoremi bitirelim. $\deg P < n$ *olduğundan* $P \in \mathcal{P}_{n-1}$*'dir.* T *örten olduğundan* $T(v) = P$ *olacak bir* $v \in V$ *vardır; bu* v*'nin bileşenlerini ortak payda üzerinden geri okursak,* $Q(x) \neq 0$ *olan her* x *için istenen ayrışım elde edilir.* T *bire bir olduğundan bu* v *tektir; yani katsayılar tek türlü belirlidir.*
■

Teklik, pratikte çok işe yarar: katsayıları **hangi yolla** bulursak bulalım — kök yerine koyarak, katsayı eşitleyerek, ya da ikisini karıştırarak — bulduğumuz sayılar aynıdır. Ayrıca bir hesabı iki farklı yolla yapıp aynı sonucu bulmak, hesabın doğruluğunun güvenilir bir denetimidir.

20.2 Dört Ayrışım Kalıbı

Q'nun çarpanlarına göre ayrışımın nasıl kurulacağını dört durumda toparlayalım. Bunlar Teorem 20.1'nın özel hâlleridir; ayrı ayrı yazmanın nedeni, uygulamada kalıbı hatasız kurmayı kolaylaştırmasıdır.

20.2.1 Durum 1 — Farklı Doğrusal Çarpanlar

Q, hiçbiri tekrarlamayan doğrusal çarpanların çarpımıysa, yani

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)$$

ise (çarpanlar birbirinin sabit katı değil), ayrışım her çarpana **bir sabit** düşürür:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}.$$

20.2.2 Durum 2 — Katlı Doğrusal Çarpanlar

Q, $(ax + b)^k$ biçiminde katlı bir doğrusal çarpan içeriyorsa, bu çarpan için ayrışıma **birinciden k'ıncıya kadar bütün kuvvetler** girer:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}.$$

Ara kuvvetlerden herhangi birini atlamak yanlıştır: Teorem 20.1'nın boyut sayımı tam olarak k bilinmeyene ihtiyaç duyar; k'dan az bilinmeyenle kurulan bir sistemin çözümü genellikle yoktur.

20.2.3 Durum 3 — Farklı İndirgenemez Kuadratik Çarpanlar

Q, $ax^2 + bx + c$ biçiminde ($\Delta < 0$) indirgenemez bir kuadratik çarpan içeriyorsa, bu çarpanın payına **birinci dereceden bir polinom** yazılır:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Buradaki $Ax + B$ payı, ayrışımın $\deg Q$ kadar bilinmeyene sahip olmasını sağlar; ikinci dereceden bir payda iki bilinmeyen getirir.

20.2.4 Durum 4 — Katlı İndirgenemez Kuadratik Çarpanlar

Q, $(ax^2 + bx + c)^k$ biçiminde katlı ve indirgenemez bir kuadratik çarpan içeriyorsa, Durum 2'deki gibi bütün kuvvetler yazılır; tek fark, payların birinci dereceden olmasıdır:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

Bir Q paydası bu dört durumun herhangi bir karışımını içerebilir; o zaman kalıp, her çarpanın kendi kalıbının toplanmasıyla kurulur. Örnek olarak

$$Q(x) = x^2(x - 3)\,\big(x^2 + 1\big)^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

paydası için kalıp şudur:

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-3} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+1)^2}.$$

Bilinmeyen sayısı 7'dir ve gerçekten $\deg Q = 2 + 1 + 4 = 7$'dir.

20.3 Basit Kesirlerin İntegralleri

Ayrışımı kurduktan sonra geriye tek tek basit kesirleri integrallemek kalır. I. tür kesirler kolaydır. II. tür kesirlerde ise iki iş yaparız: önce paydayı **tam kareye tamamlarız**, sonra $k \geq 2$ ise bir **indirgeme formülü** kullanırız. O formülü şimdi kuralım.

Önerme 20.2 (Kuadratik Paydanın Kuvvetleri için İndirgeme Formülü). *$a > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$J_n = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}$$

yazalım. O hâlde

$$J_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C$$

ve her $n \geq 2$ için

$$J_n = \frac{t}{2a^2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} J_{n-1}.$$

İspat.
$n = 1$ hâli standart bir integraldir: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{t^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+t^2}$ olduğundan doğrudur (Teorem 5.5).
Şimdi $n \geq 2$ olsun. Püf nokta, payda $a^2 = (t^2+a^2) - t^2$ yazıp kesri ikiye bölmektir:

$$J_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right) - t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}\,dt = \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}.$$

Kalan integrali kısmi integrasyonla hesaplayalım. $t^2 = t \cdot t$ yazıp

$$u = t, \qquad dv = \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

seçelim. dv'den v'yi bulmak için $w = t^2 + a^2$ değişken değiştirmesi yapalım: $dw = 2t\,dt$ olduğundan

$$v = \int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{w^{1-n}}{1-n} = -\frac{1}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}$$

olur ($n \geq 2$ olduğundan $1-n \neq 0$). $du = dt$ ile kısmi integrasyon formülünü uygulayalım:

$$\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = -\frac{t}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}.$$

Sağdaki integral J_{n-1}'dir. Bunu yukarıdaki eşitlikte yerine koyalım:

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}J_{n-1}\right) \\ &= \frac{t}{2a^2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)J_{n-1} \\ &= \frac{t}{2a^2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}J_{n-1}. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Son satırda $1-\frac{1}{2(n-1)}=\frac{2n-2-1}{2(n-1)}=\frac{2n-3}{2(n-1)}$ *hesabını kullandık. İstenen formül elde edildi.*
Formülün $n=2, a=1$ *hâlini türev alarak denetleyelim: formül* $J_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t$ *verir ve*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t\right)=\frac{(t^2+1)-t\cdot 2t}{2(t^2+1)^2}+\frac{1}{2(t^2+1)}=\frac{1-t^2+(t^2+1)}{2(t^2+1)^2}=\frac{1}{(t^2+1)^2}$$

olur; doğrudur.
■

Formül, üstü n olan integrali üstü $n-1$ olan integrale bağlar; n kez uygulandığında J_1'e, yani arktanjanta iner. Bu yüzden $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ integrali her n için "bir rasyonel fonksiyon artı arktanjant" biçimindedir. Artık bütün basit kesirlerin integralini yazabiliriz.

Teorem 20.2 (Basit Kesirlerin İntegralleri). *$A, B, a, p, q \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun.*
I. tür. *$x \neq a$ olan her aralıkta*

$$\int \frac{A\,dx}{x-a}=A\ln|\,x-a\,|+C, \qquad \int \frac{A\,dx}{(x-a)^k}=-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C \quad (k\geq 2).$$

II. tür. *$\Delta=p^2-4q<0$ ve $a_0=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}>0$ olsun. $t=x+\frac{p}{2}$ değişken değiştirmesiyle $x^2+px+q=t^2+a_0^2$ olur ve*

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left(\,x^2+px+q\right)^k}=A\int \frac{t\,dt}{\left(\,t^2+a_0^2\right)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)J_k$$

yazılır; burada J_k, Önerme 20.2'ndeki integraldir ve

$$\int \frac{t\,dt}{\left(\,t^2+a_0^2\right)^k}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left(\,t^2+a_0^2\,\right)+C, & k=1,\\ -\frac{1}{2(k-1)\left(\,t^2+a_0^2\right)^{k-1}}+C, & k\geq 2\end{cases}$$

olur. Özel olarak $k=1$ için, x değişkenine dönülünce

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\ln\left(\,x^2+px+q\,\right)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

elde edilir.

İspat.
I. tür. *$k=1$ için: $x>a$ olan bir aralıkta $\frac{d}{dx}\left(\,A\ln(x-a)\,\right)=\frac{A}{x-a}$; $x<a$ olan bir aralıkta $\frac{d}{dx}\left(\,A\ln(a-x)\,\right)=\frac{-A}{a-x}=\frac{A}{x-a}$'dır. İki durum $|\,x-a\,|$ yazılarak birleştirilir (Teorem 5.1 ve Teorem 4.1).*
$k\geq 2$ için doğrudan türev alalım:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{A}{k-1}(x-a)^{1-k}\right)=-\frac{A}{k-1}\,(1-k)(x-a)^{-k}=\frac{A}{(x-a)^k}.$$

Burada Teorem 5.3 ve zincir kuralı kullanıldı.
II. tür. *Önce paydayı tam kareye tamamlayalım:*

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2+a_0^2, \qquad t=x+\frac{p}{2}.$$

$\Delta<0$ olduğundan $q-\frac{p^2}{4}=\frac{4q-p^2}{4}>0$'dır; dolayısıyla $a_0=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}>0$ gerçekten tanımlıdır ve payda hiçbir x için sıfırlanmaz. $dt=dx$ olduğundan değişken değiştirme kuralı doğrudan uygulanır. Payı yeni değişkenle yazalım: $x=t-\frac{p}{2}$ olduğundan

$$Ax+B=A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B=At+\left(B-\frac{Ap}{2}\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu, integrali iddiadaki iki parçaya ayırır. İlk parçadaki $\int \frac{t\,dt}{(t^2+a_0^2)^k}$ *integrali, Önerme 20.2'nün ispatında* v*'yi hesaplarken yaptığımız gibi* $w = t^2 + a_0^2$ *değişken değiştirmesiyle bulunur:*

$$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a_0^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|\,w\,| + C = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+a_0^2\right) + C, & k = 1, \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{w^{1-k}}{1-k} + C = -\frac{1}{2(k-1)\left(t^2+a_0^2\right)^{k-1}} + C, & k \geq 2. \end{cases}$$

$w = t^2 + a_0^2 > 0$ *olduğundan mutlak değer işaretine gerek kalmaz. İkinci parça ise tanımı gereği* $\left(B - \frac{Ap}{2}\right) J_k$*'dır.*
Son olarak $k = 1$ *formülünü açalım. Bu durumda*

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a_0^2\right) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{a_0}\arctan\frac{t}{a_0} + C$$

olur. $t^2 + a_0^2 = x^2 + px + q$, $a_0 = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ *ve* $\frac{t}{a_0} = \frac{x+p/2}{\sqrt{4q-p^2}/2} = \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$ *ile*

$$\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a_0} = \frac{2B-Ap}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}$$

bulunur; iddia edilen formül budur.
■

i Sonuç neye benzer

Bu teoremle Teorem 20.1 birlikte şunu söyler: **her rasyonel fonksiyonun ilkeli**, bir polinomun, bir rasyonel fonksiyonun, sonlu çok $\ln|\,x-a\,|$ ve $\ln(x^2+px+q)$ teriminin ve sonlu çok arctan teriminin bir doğrusal birleşimidir. Yeni bir fonksiyon türü ortaya çıkmaz. Bir hesabın sonunda bunların dışında bir şey görüyorsanız, ya integrand rasyonel değildir ya da bir yerde hata vardır.

20.4 Katsayıları Belirlemenin İki Yolu

Ayrışım kalıbını kurduktan sonra her iki tarafı ortak paydayla çarparız ve elimizde bir **polinom özdeşliği** kalır. Bu özdeşlikten katsayıları çekmenin iki standart yolu vardır.
Yol 1 — Kök yerine koyma. Özdeşlik bütün x değerleri için doğru olduğundan, x yerine paydanın köklerini koyabiliriz. Bir kök yerine konduğunda o kökü içeren çarpanlar sıfırlanır ve terimlerin çoğu düşer; genellikle tek bir bilinmeyen ayakta kalır ve doğrudan okunur. Bu yol, paydanın **birbirinden farklı reel kökleri** olduğunda en hızlısıdır. Katlı doğrusal çarpanlarda ise yalnızca **en yüksek kuvvetin** katsayısını verir; alt kuvvetlerin katsayıları için başka bir hamle gerekir.
Yol 2 — Katsayı eşitleme. Özdeşliğin sağ tarafını açıp x'in kuvvetlerine göre gruplarız ve iki taraftaki aynı dereceli terimlerin katsayılarını eşitleriz. Elde edilen doğrusal denklem sistemi, Teorem 20.1 gereği tek çözümlüdür. Bu yol her durumda çalışır ve **indirgenemez kuadratik çarpan** varken (böyle bir çarpanın reel kökü olmadığından yerine konacak kök de yoktur) tek seçenektir.

Hangisini seçmeli

Uygulamada en verimlisi ikisini **karıştırmaktır**: önce her doğrusal çarpanın kökünü yerine koyup ucuza gelen katsayıları alın, sonra kalan bilinmeyenler için $x = 0$ gibi kolay bir değer koyun ya da yalnızca en yüksek dereceli terimin katsayısını eşitleyin. Katlı bir çarpan varken en yüksek kuvvetin katsayısı hep kök yerine koymayla gelir; alt kuvvetler için ise bir tane fazladan denklem yeter.
Ayrıca **kapatma kuralı** (cover-up) diye bilinen kısa yol vardır: $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$ ve $Q_1(a) \neq 0$ ise, $\frac{1}{x-a}$'nın katsayısı doğrudan $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$'dır. Bunun ispatı Alıştırma 20.1'in son şıkkındadır.

Şimdi bu yordamı dört durumun her birinde çalıştıralım.

 CC BY-NC-SA 4.0

20.5 Dört Durumun Örnekleri

Örnek 20.1 (Farklı Doğrusal Çarpanlar).

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1. Payın derecesi 1, paydanınki 2'dir; $1 < 2$ olduğundan kesir özdür ve polinom bölmeye gerek yoktur.
Adım 2. Paydayı çarpanlarına ayıralım. $x^2+x-2=0$ denkleminin kökleri $x=1$ ve $x=-2$'dir, dolayısıyla

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

İki farklı doğrusal çarpan vardır; Durum 1 kalıbı geçerlidir.
Adım 3. Ayrışımı kuralım:

$$\frac{x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}.$$

Her iki tarafı ortak payda $(x+2)(x-1)$ ile çarparsak, $x \neq -2, 1$ için

$$x+5 = A(x-1) + B(x+2)$$

olur. Sol ve sağ taraf, sonsuz çok noktada çakışan iki polinomdur; dolayısıyla özdeştirler ve eşitlik **her** x için geçerlidir. Şimdi paydanın köklerini yerine koyalım:

- $x=1$ için: $1+5 = A\cdot 0 + B\cdot 3$, yani $6=3B$ ve $B=2$.
- $x=-2$ için: $-2+5 = A\cdot(-3) + B\cdot 0$, yani $3=-3A$ ve $A=-1$.

İntegral. Katsayıları yerine koyup Teorem 20.2'ni uygulayalım:

$$I = \int\left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -\int\frac{dx}{x+2} + 2\int\frac{dx}{x-1} = -\ln|\,x+2\,| + 2\ln|\,x-1\,| + C.$$

Denetim. Bulduğumuz fonksiyonun türevini alalım:

$$\frac{d}{dx}\left(-\ln|\,x+2\,| + 2\ln|\,x-1\,|\right) = -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} = \frac{-(x-1)+2(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}.$$

İntegrand geri geldi; sonuç doğrudur.
■

Örnek 20.2 (Katlı Doğrusal Çarpan).

$$I = \int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1. Payın derecesi 2, paydanın açılmış derecesi 3'tür; kesir özdür.
Adım 2. Payda zaten çarpanlarına ayrılmış durumdadır: bir farklı doğrusal çarpan $(x+1)$ ve bir katlı doğrusal çarpan $(x-1)^2$.
Adım 3. Durum 1 ve Durum 2 kalıplarını birleştirelim; $(x-1)^2$ için hem birinci hem ikinci kuvvet yazılmalıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Ortak payda $(x+1)(x-1)^2$ ile çarpalım:

$$x^2+1 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1).$$

Katsayıları bulalım.

- $x=1$ için: sol taraf $1^2+1=2$; sağ tarafta ilk iki terim sıfırlanır ve $C(1+1)=2C$ kalır. Buradan $2=2C$, yani $C=1$.
- $x=-1$ için: sol taraf $(-1)^2+1=2$; sağ tarafta ikinci ve üçüncü terimler sıfırlanır ve $A(-1-1)^2 = 4A$ kalır. Buradan $2=4A$, yani $A=\frac{1}{2}$.

Görüldüğü gibi kök yerine koyma B'yi vermedi: $x=1$ koyduğumuzda B'nin çarpanı $(x+1)(x-1)$ de sıfırlandı. Katlı çarpanlarda beklenen durum budur. B'yi bulmak için kolay bir değer, örneğin $x=0$ seçelim ve bilinen A, C değerlerini kullanalım:

$$0^2+1 = \frac{1}{2}(0-1)^2 + B(0+1)(0-1) + 1\cdot(0+1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} - B + 1.$$

Buradan $B=\frac{1}{2}$ çıkar.
Katsayı eşitlemeyle denetim. Sağ tarafı açalım:

$$A(x^2-2x+1) + B(x^2-1) + C(x+1) = (A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C).$$

x^2 katsayıları: $A+B=1$; gerçekten $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. x katsayıları: $-2A+C=0$; gerçekten $-1+1=0$. Sabit terimler: $A-B+C=1$; gerçekten $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1$. Üç denklem de sağlanıyor.
İntegral.

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \int (x-1)^{-2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|\,x+1\,| + \frac{1}{2}\ln|\,x-1\,| - \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Son terimde Teorem 20.2'nin $k=2$ hâlini kullandık: $\int (x-1)^{-2}dx = -\frac{1}{x-1}$.
Denetim. Türev alalım:

$$\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)+(x+1)}{2(x+1)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ortak paydayı $(x+1)(x-1)^2$ alalım:

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{x+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x^2-x+x+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}.$$

İntegrand geri geldi.
■

Örnek 20.3 (İndirgenemez Kuadratik Çarpan).

$$I = \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1. Payın derecesi 2, paydanınki 3'tür; kesir özdür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2. Paydayı çarpanlarına ayıralım:

$$x^3 + 4x = x\left(x^2 + 4\right).$$

$x^2 + 4$ çarpanının diskriminantı $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0$'dır; reel kökü yoktur ve reeller üzerinde daha ileri çarpanlara ayrılamaz. Durum 3 kalıbı geçerlidir.
Adım 3. Doğrusal çarpana bir sabit, indirgenemez kuadratik çarpana birinci dereceden bir pay yazalım:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x\left(x^2 + 4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

Ortak paydayla çarpalım:

$$2x^2 - x + 4 = A\left(x^2 + 4\right) + (Bx + C)\,x = (A + B)x^2 + Cx + 4A.$$

Burada indirgenemez çarpanın reel kökü olmadığından kök yerine koyma yalnızca $x = 0$'ı verir; katsayı eşitleme daha doğrudandır. x'in kuvvetlerine göre eşitleyelim:

1. Sabit terim: $4A = 4$, yani $A = 1$.
2. x katsayısı: $C = -1$.
3. x^2 katsayısı: $A + B = 2$, yani $1 + B = 2$ ve $B = 1$.

Böylece

$$I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

olur.
İntegral. İkinci kesri ikiye bölmek işi kolaylaştırır; payın x'li kısmı bir değişken değiştirmeyle, sabit kısmı ise arktanjantla gelir:

$$I = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x\,dx}{x^2 + 4} - \int \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

Üç integrali sırayla hesaplayalım.

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C_1$.
- $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$ integralinde $u = x^2 + 4$ diyelim; $du = 2x\,dx$, yani $x\,dx = \frac{du}{2}$'dir. O hâlde bu integral $\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|\,u\,| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 4\right)$ olur ($x^2 + 4 > 0$ olduğundan mutlak değer gereksizdir).
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 4}$ standart bir biçimdir; Önerme 20.2'nün $n = 1$, $a = 2$ hâli gereği $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$'dir.

Üçünü birleştirelim:

$$I = \ln|\,x\,| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 4\right) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C.$$

Denetim. Türev alalım. Son terim için zincir kuralı gerekir:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4 + x^2} = -\frac{1}{x^2 + 4}.$$

Diğer iki terimin türevleriyle birlikte

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 4} - \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{\left(x^2 + 4\right) + x\cdot x - x}{x\left(x^2 + 4\right)} = \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$$

bulunur; integrand geri geldi.
■

Örnek 20.4 (Katlı İndirgenemez Kuadratik Çarpan).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$I = \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{\left(x^2 + 1\right)^2}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1. Payın derecesi 3, paydanın açılmış derecesi 4'tür; kesir özdür.
Adım 2. $x^2 + 1$ çarpanının diskriminantı $-4 < 0$'dır; indirgenemezdir ve karesi alınmıştır. Durum 4 kalıbı geçerlidir.
Adım 3. Kuadratik çarpanın her kuvveti için birinci dereceden bir pay yazalım:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Ortak payda $(x^2 + 1)^2$ ile çarpalım:

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax + B)\left(x^2 + 1\right) + (Cx + D).$$

Sağ tarafı açalım:

$$x^3 + x^2 + x + 2 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D,$$

ve x'in kuvvetlerine göre gruplayalım:

$$x^3 + x^2 + x + 2 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D).$$

Katsayıları eşitleyelim:

1. x^3 katsayısı: $A = 1$.
2. x^2 katsayısı: $B = 1$.
3. x katsayısı: $A + C = 1$, yani $1 + C = 1$ ve $C = 0$.
4. Sabit terim: $B + D = 2$, yani $1 + D = 2$ ve $D = 1$.

Bu değerleri yerine koyunca

$$I = \int \left(\frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{\left(x^2 + 1\right)^2} \right) dx = \int \frac{x\, dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

olur.
Birinci parça. $u = x^2 + 1$, $du = 2x\, dx$ ile

$$\int \frac{x\, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 1\right).$$

İkinci parça. Standart biçimdir: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x$.
Üçüncü parça. Bu, bölümün asıl yeni hesabıdır; iki ayrı yolla yapalım.
Trigonometrik dönüşümle. $x = \tan\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ diyelim. Bu aralıkta tanjant kesin artan ve türevlenebilirdir, dolayısıyla değişken değiştirme meşrudur (Teorem 1.1). $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ ve $x^2 + 1 = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta.$$

Yarım açı özdeşliği $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ ile

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}$$

bulunur. Şimdi x değişkenine dönelim: $\theta = \arctan x$'tir; ayrıca $\sec^2\theta = 1 + x^2$ olduğundan $\cos^2\theta = \frac{1}{1 + x^2}$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sin\theta\cos\theta = \tan\theta\cos^2\theta = \frac{x}{1+x^2}$$

olur. Demek ki

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

İndirgeme formülüyle. Önerme 20.2'nü $n=2$, $a=1$ ile uygulayalım:

$$J_2 = \frac{x}{2\cdot 1\cdot(2-1)(x^2+1)^1} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 1\cdot(2-1)}J_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x.$$

İki yol aynı sonucu verdi.
Birleştirme. Üç parçayı toplayalım:

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C,$$

yani

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

Denetim. Türev alalım:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}\arctan x\right) = \frac{3}{2(x^2+1)},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2(x^2+1)}\right) = \frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{2(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)^2}.$$

Üçünü ortak payda $2(x^2+1)^2$ üzerinde toplayalım:

$$\frac{2x(x^2+1)+3(x^2+1)+1-x^2}{2(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x+3x^2+3+1-x^2}{2(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x^2+2x+4}{2(x^2+1)^2}.$$

Pay ve paydayı 2'ye bölersek $\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)^2}$ elde ederiz; integrand geri geldi.
■

20.6 Polinom Bölme Gerektiren İntegraller

Yukarıdaki dört örnekte de kesir özdü. Bileşik kesirlerde Adım 1 atlanamaz; atlanırsa kurulan ayrışım sistemi çözümsüz çıkar.

> ⚠ Önce derece denetimi
>
> $\deg P \geq \deg Q$ iken doğrudan basit kesir kalıbı kurmak yanlıştır. Örneğin $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ denemesi $x^2 = A(x+1)+B(x-1)$ verir; sağ taraf birinci dereceden, sol taraf ikinci derecedendir, dolayısıyla hiçbir A, B çifti bu özdeşliği sağlayamaz. Doğrusu önce $\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}$ yazmaktır.

Örnek 20.5 (Bileşik Kesirlerde Bölme Adımı). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-1}\,dx$

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^4+x^3+3x^2+x+3}{x^4+x^2}\,dx$

Çözüm.

a) Payın derecesi 3, paydanınki 2'dir; kesir bileşiktir ve Önerme 20.1 gereği önce bölme yapmalıyız. x^3+1'i x^2-1'e bölelim: $x\cdot(x^2-1)=x^3-x$ olduğundan

$$x^3+1 = x\,\left(\,x^2-1\,\right)+(x+1),$$

yani bölüm $S(x)=x$, kalan $R(x)=x+1$'dir ve $\deg R = 1 < 2 = \deg Q$'dur. O hâlde

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = x + \frac{x+1}{x^2-1}.$$

Şimdi kalan öz kesre bakalım. Paydayı çarpanlarına ayıralım: $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Payla payda ortak bir $(x+1)$ çarpanı taşıyor; $x\neq -1$ olduğu sürece sadeleştirebiliriz:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}, \qquad x\neq \pm 1.$$

Sadeleştirmeyi görmek burada bütün basit kesir hesabını gereksiz kılar. (Sadeleştirmeseydik $\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ kalıbı $A=1$, $B=0$ verirdi; aynı sonuç.) Böylece

$$I_1 = \int\left(x+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|\,x-1\,| + C.$$

Burada bir ayrıntıya dikkat edelim: integrandın tanım kümesi $x\neq\pm1$ noktalarından oluşur, yani üç ayrık aralıktır; bulduğumuz ilkel fonksiyon ise $x=-1$'de de tanımlıdır. Bu bir çelişki değildir — integrandın $x=-1$'de kaldırılabilir bir süreksizliği vardır ve ilkel fonksiyon o boşluğu doldurur. Ama sabit C, integrandın tanım kümesinin üç bileşeninde ayrı ayrı seçilebilir.
Denetim. Bulduğumuz ilkelin türevini alalım:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}+\ln|\,x-1\,|\right) = x+\frac{1}{x-1} = \frac{x(x-1)+1}{x-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

Öte yandan integrandı sadeleştirirsek

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)\,\left(\,x^2-x+1\,\right)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

olur; ikisi aynıdır.
b) Pay ve paydanın dereceleri eşittir (4); kesir bileşiktir. Bölme burada çok kolaydır, çünkü payı paydanın kendisi artı bir kalan olarak yazabiliriz:

$$x^4+x^3+3x^2+x+3 = \left(\,x^4+x^2\,\right)+\left(\,x^3+2x^2+x+3\,\right).$$

Demek ki $S(x)=1$ ve $R(x)=x^3+2x^2+x+3$'tür; $\deg R=3<4$ olduğundan bölme tamamlanmıştır:

$$\frac{x^4+x^3+3x^2+x+3}{x^4+x^2} = 1+\frac{x^3+2x^2+x+3}{x^2\,\left(\,x^2+1\,\right)}.$$

Payda $x^4+x^2=x^2(x^2+1)$ biçiminde çarpanlarına ayrıldı: katlı bir doğrusal çarpan x^2 ve indirgenemez bir kuadratik çarpan x^2+1. Kalıp Durum 2 ile Durum 3'ün birleşimidir:

$$\frac{x^3+2x^2+x+3}{x^2\,\left(\,x^2+1\,\right)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Ortak paydayla çarpalım:

$$x^3+2x^2+x+3 = A\,x\,\left(\,x^2+1\,\right)+B\,\left(\,x^2+1\,\right)+(Cx+D)\,x^2.$$

Sağ tarafı açıp gruplayalım:

$$= (A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Katsayıları eşitleyelim:

- x^0: $B = 3$.
- x^1: $A = 1$.
- x^3: $A + C = 1 \Rightarrow C = 0$.
- x^2: $B + D = 2 \Rightarrow D = -1$.

Böylece

$$I_2 = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x + \ln|\,x\,| - \frac{3}{x} - \arctan x + C.$$

Burada $\int 3x^{-2}dx = -3x^{-1}$ hesabını kullandık.
Denetim. Türev alalım:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Ortak payda $x^2(x^2+1) = x^4 + x^2$ üzerinde toplayalım:

$$\frac{\left(\,x^4 + x^2\,\right) + x\,\left(\,x^2+1\,\right) + 3\,\left(\,x^2+1\,\right) - x^2}{x^4+x^2} = \frac{x^4 + x^2 + x^3 + x + 3x^2 + 3 - x^2}{x^4+x^2} = \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^4+x^2}.$$

İntegrand geri geldi.
■

20.7 Tam Kareye Tamamlama Gereken Bir Karma Örnek

Şimdiye kadarki kuadratik çarpanlar hep $x^2 + a^2$ biçimindeydi; genel durumda x'li bir orta terim de bulunur ve Teorem 20.2'nin ikinci kısmındaki tam kareye tamamlama devreye girer. Yordamın üç adımını da çalıştıran bir örnekle bunu görelim.

Örnek 20.6 (Doğrusal ve Kuadratik Çarpanın Birlikte Bulunduğu İntegral).

$$I = \int \frac{3x+1}{(x-1)\,\left(\,x^2+2x+5\,\right)}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1. Payın derecesi 1, paydanın açılmış derecesi 3'tür; kesir özdür.
Adım 2. $x^2 + 2x + 5$ çarpanının diskriminantı $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$'dır; indirgenemezdir. Payda tam olarak çarpanlarına ayrılmış hâldedir.
Adım 3. Kalıp, bir doğrusal çarpan ile bir indirgenemez kuadratik çarpanın birleşimidir:

$$\frac{3x+1}{(x-1)\,\left(\,x^2+2x+5\,\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}.$$

Ortak paydayla çarpalım:

$$3x + 1 = A\,\left(\,x^2+2x+5\,\right) + (Bx+C)(x-1).$$

Karma yolu kullanalım: önce tek reel kökü yerine koyalım.

- $x = 1$ için: $3 + 1 = A(1 + 2 + 5)$, yani $4 = 8A$ ve $A = \frac{1}{2}$.

Kalan iki bilinmeyeni katsayı eşitlemeyle bulalım. Sağ tarafı açalım:

$$Ax^2 + 2Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C = (A+B)x^2 + (2A - B + C)x + (5A - C).$$

- x^2 katsayısı: $A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$.
- Sabit terim: $5A - C = 1 \Rightarrow \frac{5}{2} - C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

x katsayısı bir denetim verir: $2A - B + C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 3$; sol taraftaki 3 ile uyuşuyor.
İntegral. Ayrışımı yerine koyalım:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\,x-1\,| - \frac{1}{2}\int \frac{x-3}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Kalan integral II. tür bir basit kesirdir ve $k = 1$'dir. İki hamlede hallolur: payı, paydanın türevinin bir katı artı sabit olarak yazmak ve paydayı tam kareye tamamlamak. Paydanın türevi $2x + 2$'dir; payı buna göre düzenleyelim:

$$x - 3 = \frac{1}{2}(2x+2) - 4.$$

Böylece

$$\int \frac{x-3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+5} - 4\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Birinci integralde payda tam olarak paydanın türevidir; $u = x^2+2x+5$ dönüşümüyle $\frac{1}{2}\ln\left(\,x^2+2x+5\,\right)$ verir. (Payda hiç sıfırlanmadığından ve $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 \geq 4 > 0$ olduğundan mutlak değere gerek yoktur.)
İkinci integralde tam kareye tamamlayalım:

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2 + 4.$$

$t = x+1$ diyelim; $dt = dx$'tir ve Önerme 20.2'nün $n = 1$, $a = 2$ hâli gereği

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}.$$

Toplarsak

$$\int \frac{x-3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\,x^2+2x+5\,\right) - 2\arctan\frac{x+1}{2}$$

ve buradan

$$I = \frac{1}{2}\ln|\,x-1\,| - \frac{1}{4}\ln\left(\,x^2+2x+5\,\right) + \arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

Denetim. Türev alalım. Arktanjant terimi için zincir kuralı:

$$\frac{d}{dx}\arctan\frac{x+1}{2} = \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{4}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{4+(x+1)^2} = \frac{2}{x^2+2x+5}.$$

Üç terimin türevlerini toplayalım:

$$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{2}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-(x+1)+4}{2\left(\,x^2+2x+5\,\right)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3-x}{2\left(\,x^2+2x+5\,\right)}.$$

Ortak payda $2(x-1)(x^2+2x+5)$ üzerinde toplayalım:

$$\frac{\left(\,x^2+2x+5\,\right) + (3-x)(x-1)}{2(x-1)\left(\,x^2+2x+5\,\right)} = \frac{x^2+2x+5+3x-3-x^2+x}{2(x-1)\left(\,x^2+2x+5\,\right)} = \frac{6x+2}{2(x-1)\left(\,x^2+2x+5\,\right)}.$$

Pay ve paydayı 2'ye bölünce $\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+2x+5)}$ elde ederiz; integrand geri geldi.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

20.8 Ostrogradski Ayrıştırması

Paydada katlı çarpanlar varsa yukarıdaki yordam çalışır, ama uzar: her katlı çarpan için bütün ara kuvvetlerin katsayıları hesaplanır ve sonra bunların integralleri tek tek alınır. Sonucun **rasyonel** kısmı ile **transandant** (logaritma ve arktanjant) kısmı, aslında birbirinden çok daha ucuza ayrılabilir. Bunu yapan yönteme Ostrogradski ayrıştırması denir.
Fikri anlamak için Önerme 20.2'ne ve Teorem 20.2'ne geri bakalım: $j \geq 2$ üstlü bir basit kesrin integrali daima "bir rasyonel fonksiyon + daha düşük üstlü bir integral" biçiminde çıkar. Üsler 1'e indiğindeyse artık rasyonel kısım doğmaz; yalnızca logaritma ve arktanjant kalır. Demek ki sonucun rasyonel kısmının paydası, Q'nun her çarpanının **bir eksik** kuvvetinden oluşur.

Önerme 20.3 (Ostrogradski Ayrıştırması). *P, Q reel katsayılı polinomlar, $\deg P < \deg Q$ olsun; genelliği bozmadan Q'nun baş katsayısını 1 kabul edelim (gerekirse paya taşınır).*

$$Q_1 = \gcd\big(\, Q, Q' \,\big), \qquad Q_2 = \frac{Q}{Q_1}$$

yazalım; burada gcd, *baş katsayısı 1 olacak biçimde seçilen en büyük ortak bölendir. $Q = \prod_i f_i^{e_i}$, f_i'ler farklı (baş katsayısı 1 olan) indirgenemez çarpanlar olmak üzere*

$$Q_1 = \prod_i f_i^{e_i - 1}, \qquad Q_2 = \prod_i f_i$$

olur; özel olarak Q_2'nin bütün indirgenemez çarpanları tek katlıdır. Bu durumda

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

eşitliğini sağlayan, $\deg P_1 < \deg Q_1$ ve $\deg P_2 < \deg Q_2$ koşullarını gerçekleyen P_1, P_2 polinomları vardır ve tektir. Sağdaki integral yalnızca logaritma ve arktanjant terimleri üretir.

İspat.
Önce Q_1 için verilen çarpan yazılışını doğrulayalım. $Q = f^e h$ ve $f \nmid h$ olsun. Çarpım kuralıyla

$$Q' = e\,f^{e-1} f'\,h + f^e h' = f^{e-1}\,\big(\, e f' h + f h' \,\big).$$

Buradan $f^{e-1} \mid Q'$ görülür. Ayrıca $f \nmid \big(\, e f' h + f h' \,\big)$'dir: $f \mid f h'$ olduğundan bu ancak $f \mid e f' h$ olması hâlinde mümkün olurdu; f indirgenemez, $f \nmid h$ ve $\deg f' < \deg f$ ile $f' \neq 0$ olduğundan $f \nmid f'$'dir, dolayısıyla $f \nmid e f' h$. Demek ki $f^e \nmid Q'$'dür ve Q ile Q''nün ortak çarpanında f tam olarak $e-1$ kez bulunur. Her indirgenemez çarpan için aynı hesap yapılırsa $Q_1 = \prod f_i^{e_i - 1}$ ve $Q_2 = Q/Q_1 = \prod f_i$ çıkar. Şimdi asıl iddiaya gelelim. Teorem 20.1 gereği $\frac{P}{Q}$ basit kesirlerin toplamıdır. Bu toplamı iki gruba ayıralım: üstü $j \geq 2$ olan kesirler ve üstü $j = 1$ olan kesirler.
Üstü $j \geq 2$ olan kesirler. *Teorem 20.2'ne göre I. türden $\frac{A}{(x-a)^j}$ kesrinin integrali $-\frac{A}{(j-1)(x-a)^{j-1}}$'dir; paydası $(x-a)^{j-1}$'dir ve $j - 1 \leq e - 1$ olduğundan bu payda Q_1'i böler. II. türden $\frac{Bx+C}{g^j}$ kesrinin integrali ise, aynı teoremdeki ayrışım ve Önerme 20.2'nün ardışık uygulanmasıyla, paydası g^{j-1}'i bölen bir rasyonel fonksiyon ile J_1'in, yani bir arktanjantın katı olarak yazılır. Yine payda Q_1'i böler.*
Üstü $j = 1$ olan kesirler. *$\frac{A}{x-a}$ kesrinin integrali $A \ln|\, x - a \,|$'dır; $\frac{Bx+C}{g}$ kesrinin integrali ise Teorem 20.2'nin son formülü gereği bir logaritma ile bir arktanjantın toplamıdır. Bunların hiçbirinde rasyonel bir terim doğmaz. Öte yandan bu kesirlerin toplamı, paydası $\prod f_i = Q_2$ olan bir öz kesirdir; payını P_2 ile gösterelim, $\deg P_2 < \deg Q_2$'dir.*
İki grubu birleştirirsek, birinci grubun integrallerinin toplamı paydası Q_1'i bölen bir rasyonel fonksiyondur; ortak paydaya getirilince $\frac{P_1}{Q_1}$ biçimini alır ve öz kesir olduğundan $\deg P_1 < \deg Q_1$'dir. Böylece

$$\int \frac{P}{Q}\,dx = \frac{P_1}{Q_1} + \int \frac{P_2}{Q_2}\,dx$$

elde edilir ve sağdaki integral yalnızca logaritma ve arktanjant üretir.
Teklik. *$\frac{P_1}{Q_1} + \int \frac{P_2}{Q_2}\,dx = \frac{\widetilde{P}_1}{Q_1} + \int \frac{\widetilde{P}_2}{Q_2}\,dx$ olsun. Her iki tarafın türevini alıp düzenlersek*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(\frac{P_1 - \tilde{P}_1}{Q_1}\right)' = \frac{\tilde{P}_2 - P_2}{Q_2}$$

çıkar. $R = P_1 - \tilde{P}_1$ yazalım ve $R \neq 0$ olduğunu varsayıp çelişki arayalım. $\frac{R}{Q_1}$ kesrini sadeleştirip en sade hâline getirelim: $\frac{R}{Q_1} = \frac{u}{v}$ olsun, burada $v \mid Q_1$ ve $\gcd(u, v) = 1$'dir; $\deg R < \deg Q_1$ olduğundan $\deg u < \deg v$'dir. v sabit olsaydı $\frac{u}{v}$, derecesi negatif olan bir polinom, yani sıfır olurdu ve $R = 0$ çıkardı; demek ki $\deg v \geq 1$'dir.
v'nin bir indirgenemez çarpanı f olsun ve f'nin v'deki katı $d \geq 1$ olsun; $v = f^d w$ ve $f \nmid w$ yazalım. Bölüm kuralıyla

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad v' = f^{\,d-1}\,\left(\, d\,f'w + f\,w' \,\right)$$

olur; buradan

$$u'v - uv' = f^{\,d-1}\left(\, f\,\left(\, u'w - u\,w' \,\right) - d\,u\,f'w \,\right)$$

çıkar. Parantez içindeki ifade f ile bölünmez: birinci terim f ile bölünür, ama ikinci terim bölünmez; çünkü $f \nmid u$ (kesri sadeleştirdik), $f \nmid w$ ve $f \nmid f'$'dür ($f' \neq 0$ ve $\deg f' < \deg f$), ayrıca d sıfırdan farklı bir sabittir. Demek ki f çarpanı, payı veren $u'v - uv'$ ifadesinde tam olarak $d - 1$ kez, paydayı veren $v^2 = f^{2d}w^2$ ifadesinde ise $2d$ kez bulunur; sadeleştirmeden sonra f, paydada tam olarak $2d - (d-1) = d + 1 \geq 2$ kuvvetiyle kalır.
Oysa eşitliğin sağ tarafı $\frac{\tilde{P}_2 - P_2}{Q_2}$'dir ve Q_2'de her indirgenemez çarpan yalnızca birinci kuvvetiyle bulunur; sadeleştirme bu kuvveti ancak düşürebilir. İki taraf aynı rasyonel fonksiyon olduğuna göre bu bir çelişkidir. Demek ki $R = 0$, yani $P_1 = \tilde{P}_1$'dir; bu durumda $\frac{\tilde{P}_2 - P_2}{Q_2} = 0$, yani $P_2 = \tilde{P}_2$ olur.
■

Yöntemin pratikteki kullanımı şudur: P_1 ve P_2'yi belirsiz katsayılı polinomlar olarak yazarız, eşitliğin **iki tarafının türevini alırız** ve ortak paydayla çarparak katsayı eşitleriz. Böylece hiçbir integral hesaplamadan sonucun rasyonel kısmını buluruz; geriye kalan integralde ise paydanın bütün çarpanları tek katlı olduğundan hesap kısadır. Bunu bir örnekte çalıştıralım.

Örnek 20.7 (Ostrogradski Yöntemiyle Bir İntegral).

$$I = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

integralini Ostrogradski ayrıştırmasıyla hesaplayınız.

Çözüm.
Burada $P(x) = 1$, $Q(x) = x(x+1)^2$ ve $\deg P = 0 < 3 = \deg Q$'dur.
Q_1 ve Q_2'yi bulalım. Önerme 20.3'deki çarpan yazılışını doğrudan kullanabiliriz: Q'nun indirgenemez çarpanları x (katı 1) ve $x+1$ (katı 2)'dir, dolayısıyla

$$Q_1 = x^0(x+1)^1 = x + 1, \qquad Q_2 = x(x+1) = x^2 + x.$$

(İsteyen bunu gcd hesabıyla da görebilir: $Q' = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1)$ ve $\gcd\left(\, x(x+1)^2, (x+1)(3x+1) \,\right) = x + 1$'dir.)
Kalıbı kuralım. $\deg P_1 < \deg Q_1 = 1$ olduğundan P_1 bir sabittir: $P_1 = a$. $\deg P_2 < \deg Q_2 = 2$ olduğundan $P_2 = bx + c$'dir. Ayrıştırma:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \int \frac{bx + c}{x^2 + x}\,dx.$$

Türev alıp katsayı eşitleyelim. Her iki tarafın türevini alalım:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = -\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{bx + c}{x(x+1)}.$$

Her iki tarafı $x(x+1)^2$ ile çarpalım:

$$1 = -a\,x + (bx+c)(x+1) = -ax + bx^2 + bx + cx + c = b\,x^2 + (b+c-a)\,x + c.$$

Katsayıları eşitleyelim:

- x^2: $b = 0$.
- x^0: $c = 1$.
- x^1: $b + c - a = 0 \Rightarrow 0 + 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$.

Kalan integrali hesaplayalım. $b = 0$, $c = 1$ ile

$$I = \frac{1}{x+1} + \int \frac{dx}{x(x+1)}.$$

Kalan integralin paydasının çarpanları tek katlıdır; Durum 1 kalıbı geçerlidir:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 1 = A(x+1) + Bx.$$

$x = 0$ için $A = 1$; $x = -1$ için $1 = -B$, yani $B = -1$. O hâlde

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln|\,x\,| - \ln|\,x+1\,| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

ve sonuç

$$I = \frac{1}{x+1} + \ln|\,x\,| - \ln|\,x+1\,| + C$$

olur.
Denetim. Türev alalım:

$$-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Ortak payda $x(x+1)^2$ üzerinde toplayalım:

$$\frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{-x + x^2 + 2x + 1 - x^2 - x}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

İntegrand geri geldi.
Karşılaştırma. Aynı integrali klasik yordamla yapsaydık $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ kalıbını kurar, $A = 1$, $C = -1$, $B = -1$ bulur ve

$$I = \ln|\,x\,| - \ln|\,x+1\,| + \frac{1}{x+1} + C$$

elde ederdik — aynı sonuç. Ostrogradski yönteminin üstünlüğü, katlılık büyüdükçe belirginleşir: paydada $(x+1)^5$ gibi bir çarpan varsa klasik yol beş katsayı ve beş integral, Ostrogradski ise dört katsayılı tek bir rasyonel kısım ve tek katlı bir paydayla kısa bir logaritma hesabı gerektirir.
■

20.9 Alıştırmalar

Alıştırma 20.1 (Rasyonel Fonksiyonların İntegrali Üzerine).

a) $a > 0$ olmak üzere $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ integralini hesaplayınız.

b) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ integralini hesaplayınız.

d) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx$ integralini hesaplayınız.

e) Önerme 20.2'nü kullanarak $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}$ integralini hesaplayınız.

f) **(Kapatma kuralı.)** $\deg P < \deg Q$, $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$ ve $Q_1(a) \neq 0$ olsun. $\frac{P}{Q}$'nun basit kesirlere ayrışımında $\frac{1}{x-a}$ teriminin katsayısının $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ olduğunu gösteriniz ve bunu $\frac{x^2+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ kesrine uygulayınız.

Çözüm.
a) Payda iki farklı doğrusal çarpanın çarpımıdır: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. Durum 1 kalıbı:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a} \Rightarrow 1 = A(x+a)+B(x-a).$$

$x=a$ için $1=2aA$, yani $A=\frac{1}{2a}$; $x=-a$ için $1=-2aB$, yani $B=-\frac{1}{2a}$. O hâlde

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\,x-a\,| - \frac{1}{2a}\ln|\,x+a\,| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Denetim: türev alalım.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right) &= \frac{1}{2a}\cdot\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\\ &= \frac{1}{2a}\cdot\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}\end{aligned}$$

Doğru.
b) Payın derecesi 1, paydanın açılmış derecesi 3'tür; kesir özdür. Kalıp, bir farklı doğrusal çarpan ile bir katlı doğrusal çarpanın birleşimidir:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}.$$

Ortak paydayla çarpalım:

$$3x+5 = A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1).$$

$x=1$ için: $8=9A$, yani $A=\frac{8}{9}$. $x=-2$ için: $-1=-3C$, yani $C=\frac{1}{3}$. B için x^2 katsayılarını eşitleyelim: sol tarafta x^2 yoktur, sağ tarafta katsayı $A+B$'dir; dolayısıyla $A+B=0$ ve $B=-\frac{8}{9}$'dur. Denetim olarak sabit terimlere bakalım: sağ tarafta $4A-2B-C=\frac{32}{9}+\frac{16}{9}-\frac{3}{9}=\frac{45}{9}=5$; sol taraftaki sabit terim de 5'tir.
İntegral:

$$\int \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)^2}\,dx = \frac{8}{9}\ln|\,x-1\,| - \frac{8}{9}\ln|\,x+2\,| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2} + C.$$

Denetim: türev alalım.

$$\frac{8}{9(x-1)}-\frac{8}{9(x+2)}+\frac{1}{3(x+2)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{3}{(x-1)(x+2)}+\frac{1}{3(x+2)^2} = \frac{8}{3(x-1)(x+2)}+\frac{1}{3(x+2)^2}.$$

Ortak payda $3(x-1)(x+2)^2$ üzerinde:

$$\frac{8(x+2)+(x-1)}{3(x-1)(x+2)^2} = \frac{9x+15}{3(x-1)(x+2)^2} = \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Doğru.
c) Önce paydayı çarpanlarına ayıralım. $x=-1$ bir köktür, dolayısıyla $x+1$ bir çarpandır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right).$$

x^2-x+1 çarpanının diskriminantı $1-4=-3<0$'dır; indirgenemezdir. Kalıp:

$$\frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\Rightarrow 1=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1).$$

$x=-1$ için: $1=A(1+1+1)=3A$, yani $A=\frac{1}{3}$. x^2 katsayıları: $A+B=0\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$. Sabit terimler: $A+C=1\Rightarrow C=\frac{2}{3}$. Denetim ($x$ katsayısı): $-A+B+C=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$; sol tarafta x terimi yok, uyuşuyor.
İntegrali kuralım:

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|\,x+1\,|+\int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln|\,x+1\,|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx.$$

Kalan integralde payı, paydanın türevi $2x-1$'e göre düzenleyelim: $x-2=\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}$. Buradan

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Paydayı tam kareye tamamlayalım: $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. $t=x-\frac{1}{2}$ ve $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ile Önerme 20.2'nün $n=1$ hâli:

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Böylece

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

ve sonuç

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|\,x+1\,|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

olur.
Denetim: arktanjant teriminin türevi

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3+(2x-1)^2}=\frac{2}{4x^2-4x+4}=\frac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}$$

olur. Üç terimin türevlerini toplayalım:

$$\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2x-1}{6\left(x^2-x+1\right)}+\frac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-(2x-1)+3}{6\left(x^2-x+1\right)}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}.$$

Ortak payda $3(x+1)(x^2-x+1)=3\left(x^3+1\right)$ üzerinde:

$$\frac{\left(x^2-x+1\right)+(2-x)(x+1)}{3\left(x^3+1\right)}=\frac{x^2-x+1+2x+2-x^2-x}{3\left(x^3+1\right)}=\frac{3}{3\left(x^3+1\right)}=\frac{1}{x^3+1}.$$

Doğru.
d) Payın derecesi 3, paydanınki 2'dir; kesir bileşiktir, önce bölme yapalım. $2x\cdot\left(x^2-2x-3\right)=2x^3-4x^2-6x$ olduğundan

$$2x^3-4x^2-x-3=2x\left(x^2-2x-3\right)+(5x-3),$$

yani bölüm $2x$, kalan $5x-3$'tür. Payda $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ biçiminde iki farklı doğrusal çarpana ayrılır. Kalan kesir için Durum 1 kalıbı:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 5x-3 = A(x+1) + B(x-3).$$

$x=3$ için $12 = 4A$, yani $A=3$; $x=-1$ için $-8 = -4B$, yani $B=2$.
İntegral:

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \left(2x + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1}\right)dx = x^2 + 3\ln|\,x-3\,| + 2\ln|\,x+1\,| + C.$$

Denetim:

$$2x + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1} = 2x + \frac{3(x+1)+2(x-3)}{(x-3)(x+1)} = 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}.$$

Bu da tam olarak bölme sonucunda elde ettiğimiz ifadedir; doğru.
e) Önerme 20.2'nü $n=2$, $a=3$ ile uygulayalım:

$$J_2 = \frac{x}{2\cdot 9\cdot(2-1)\left(x^2+9\right)^1} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 9\cdot(2-1)}\,J_1 = \frac{x}{18\left(x^2+9\right)} + \frac{1}{18}J_1.$$

Formülün $n=1$ hâli $J_1 = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}$ verir. Böylece

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2} = \frac{x}{18\left(x^2+9\right)} + \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + C.$$

Denetim: iki terimin türevini alalım.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{18\left(x^2+9\right)}\right) = \frac{\left(x^2+9\right) - x\cdot 2x}{18\left(x^2+9\right)^2} = \frac{9-x^2}{18\left(x^2+9\right)^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{54}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{162}\cdot\frac{9}{9+x^2} = \frac{1}{18\left(x^2+9\right)} = \frac{x^2+9}{18\left(x^2+9\right)^2}.$$

Toplarsak

$$\frac{9-x^2+x^2+9}{18\left(x^2+9\right)^2} = \frac{18}{18\left(x^2+9\right)^2} = \frac{1}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

Doğru.
f) $\frac{P}{Q}$'nun ayrışımını yazalım. $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$ ve $Q_1(a) \neq 0$ olduğundan a, Q'nun **basit** (tek katlı) bir köküdür; Teorem 20.1 gereği ayrışımda $x-a$'ya ait tek bir terim bulunur:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + H(x),$$

burada H, paydası Q_1 olan (ve $x-a$ çarpanı içermeyen) kalan basit kesirlerin toplamıdır; H, a noktasında tanımlıdır ve süreklidir. Her iki tarafı $(x-a)$ ile çarpalım. $x \neq a$ için

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = A + (x-a)H(x)$$

olur. Sol ve sağ taraf a noktasının bir komşuluğunda süreklidir ($Q_1(a) \neq 0$ olduğundan sol taraf a'da tanımlıdır); $x \to a$ limitine geçelim:

$$\frac{P(a)}{Q_1(a)} = A + 0\cdot H(a) = A.$$

Demek ki $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$'dır. Bu kural pratikte şöyle uygulanır: $\frac{P}{Q}$ ifadesinde $x-a$ çarpanı **elle kapatılır** ve geri kalanda $x=a$ yazılır — adı buradan gelir.
Şimdi $\frac{x^2+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ kesrine uygulayalım. Ayrışım $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$ biçimindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

- A için $(x-1)$ kapatılır ve $x=1$ yazılır: $A = \frac{1^2+2}{(1-2)(1-3)} = \frac{3}{(-1)(-2)} = \frac{3}{2}$.
- B için $(x-2)$ kapatılır ve $x=2$ yazılır: $B = \frac{2^2+2}{(2-1)(2-3)} = \frac{6}{(1)(-1)} = -6$.
- C için $(x-3)$ kapatılır ve $x=3$ yazılır: $C = \frac{3^2+2}{(3-1)(3-2)} = \frac{11}{(2)(1)} = \frac{11}{2}$.

Denetim: $A + B + C = \frac{3}{2} - 6 + \frac{11}{2} = 7 - 6 = 1$ olmalıdır, çünkü ortak paydayla çarpıldığında x^2 katsayıları eşitlenir ve sol tarafta bu katsayı 1'dir. Uyuşuyor.
Buradan, istenirse, integral de yazılabilir:

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = \frac{3}{2}\ln|\,x-1\,| - 6\ln|\,x-2\,| + \frac{11}{2}\ln|\,x-3\,| + C.$$

■

Bu bölümde, bir fonksiyon sınıfının integralini hünere değil algoritmaya bağlayan ilk yordamı kurduk: derece denetimi, çarpanlara ayırma, basit kesirlere ayırma. Sonuç her zaman bir rasyonel fonksiyon, logaritmalar ve arktanjantlardan oluşuyor. Bundan sonraki bölümlerde bu yordamın gücünden dolaylı olarak yararlanacağız: köklü ifadeler içeren integrallerde uygun bir değişken değiştirme, integrandı rasyonel bir fonksiyona dönüştürür ve iş yeniden bu bölümün yordamına iner: İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali.

 CC BY-NC-SA 4.0

21. İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali

Rasyonel Fonksiyonların İntegrali bölümünde şunu gördük: paydası çarpanlara ayrılmış her rasyonel fonksiyon **basit kesirlere ayırma** (partial fraction decomposition) ile sonlu sayıda basit parçaya bölünür ve bu parçaların her birinin ilkel fonksiyonu logaritma, arktanjant ve kuvvet fonksiyonlarıyla yazılabilir. Yani rasyonel fonksiyonlar için integral hesabı bitmiş bir iştir: yöntem her zaman işler ve her zaman elemanter bir yanıt verir.

İntegrand köklü bir ifade içerdiğinde bu rahatlık kaybolur. $\sqrt{x^2+2x+2}$ ya da $\sqrt[3]{x}$ gibi bir çarpan, fonksiyonu rasyonel olmaktan çıkarır; basit kesirlere ayırma makinesi doğrudan çalışmaz. Buna karşılık elimizde çok güçlü bir başka araç var: **değişken değiştirme** (Değişken Değiştirme ve Kısmi İntegrasyon). Akıllıca seçilmiş bir u değişkeni, köklü integrandı u'nun rasyonel bir fonksiyonuna çevirebilir; böyle bir değişim bulunduğunda iş biter, çünkü yeni integral bir önceki bölümün yöntemiyle sonuna kadar hesaplanır.

Bu bölümün konusu tam olarak budur: **köklü integrandları rasyonelleştiren değişimler.** Üç büyük sınıf inceleyeceğiz. Birincisi, integrandda yalnızca $\frac{ax+b}{cx+d}$ ifadesinin kökleri geçtiğinde kullanılan doğrudan değişim; farklı dereceden kökler varsa derecelerin **en küçük ortak katı** (EKOK) devreye girer. İkincisi, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ biçimindeki ifadeleri rasyonelleştiren üç **Euler değişimi**; bunların arkasında bir koniği doğrularla parametrelendirmek gibi net bir geometrik fikir yatar. Üçüncüsü, $\int x^r(a+bx^p)^q\,dx$ biçimindeki **binom integralleri** ve bunların ne zaman rasyonelleşebileceğini tam olarak söyleyen **Çebişev koşulları**.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: bir köklü integrandın hangi değişimle rasyonelleşeceğini tanımayı; Euler değişimlerinin üçünü de kurup uygulamayı; $\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ integralini tek bir doğrusal denklem sistemiyle çözen belirsiz katsayılar yöntemini; binom integrallerinin üç uygun hâlini ayırt etmeyi. Ve son olarak bu bölümde ilk kez, bir integralin **hiçbir elemanter fonksiyonla ifade edilemeyebileceği** olgusuyla yüzleşeceğiz.

21.1 Rasyonelleştirme Fikri

Yöntemleri tek tek ele almadan önce hepsinin ortak iskeletini görelim. $R(s,t)$ ile, iki değişkenli iki polinomun oranı olan **rasyonel fonksiyonu** göstereceğiz; örneğin $R(s,t)=\dfrac{s+2t}{s(2+t^2)}$ böyledir. Bu gösterim sayesinde "integrand, x ile bir kökün rasyonel bileşimidir" cümlesini kısaca $R\left(x,\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)$ diye yazabiliriz.

Rasyonelleştirme fikri şöyle işler. Diyelim ki bir $u\mapsto x=\psi(u)$ dönüşümü bulduk ve bu dönüşüm iki şeyi birden sağlıyor: ψ **rasyonel** bir fonksiyondur (dolayısıyla ψ' de rasyoneldir) ve integranddaki kök u'nun rasyonel bir ifadesine dönüşür. O zaman değişken değiştirme kuralı gereği

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)dx=\int R\left(\psi(u),\text{(rasyonel ifade)}\right)\psi'(u)\,du$$

olur ve sağ taraftaki integrand, rasyonel fonksiyonların toplam-çarpım-bölümüyle kurulduğundan **rasyoneldir**. Rasyonel fonksiyonların integralini almayı bildiğimize göre iş bitmiştir; geriye yalnızca u yerine $u(x)$ yazmak kalır.

Her seferinde denetlenmesi gereken teknik nokta şudur: $x=\psi(u)$ dönüşümü çalıştığımız aralıkta **birebir ve türevi sıfırdan farklı** olmalıdır. Bu sağlanırsa, bulduğumuz G ilkel fonksiyonu için $F(x)=G(u(x))$ yazdığımızda zincir kuralı (Teorem 4.1) ve ters fonksiyonun türev kuralı (Teorem 4.2) gereği $\psi'(u(x))\,u'(x)=1$ olduğundan $F'(x)=R\left(x,\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)$ çıkar. Aşağıdaki her yöntemde bu koşulun sağlandığını ayrıca belirteceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Yöntemin sınırı

Rasyonelleştirme her köklü integrandda mümkün değildir. Örneğin $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$ integrali için hiçbir rasyonel değişim işe yaramaz; bu integral hiçbir elemanter fonksiyonla ifade edilemez. Bölümün sonunda, binom integralleri için bu ayrımı **tam olarak** yapan bir ölçüt göreceğiz.

21.2 Doğrusal Kesirli Köklü İfadeler

En kolay hâlle başlıyoruz: kökün içinde **birinci dereceden bir kesir** varsa. Bu durumda kökün kendisini yeni değişken seçmek doğrudan sonuç verir.

Önerme 21.1 (Doğrusal Kesirli Kökün Rasyonelleştirilmesi). *$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ve $ad-bc\neq 0$ olsun. $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ ve R iki değişkenli bir rasyonel fonksiyon olmak üzere*

$$\int R\!\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

integralinde

$$u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \qquad\Leftrightarrow\qquad u^n=\frac{ax+b}{cx+d}$$

değişimi yapılırsa, integral u değişkeninin bir rasyonel fonksiyonunun integraline dönüşür. Bu değişimde

$$x=\frac{b-d\,u^n}{c\,u^n-a},\qquad dx=\frac{n(ad-bc)\,u^{n-1}}{\left(c\,u^n-a\right)^2}\,du$$

olur.

İspat.
Önce x'i u cinsinden çözelim. $u^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ eşitliğinde içler dışlar çarpımı yapıp x'li terimleri bir yana toplayalım:

$$u^n(cx+d)=ax+b \quad\Rightarrow\quad x\left(c\,u^n-a\right)=b-d\,u^n \quad\Rightarrow\quad x=\frac{b-d\,u^n}{c\,u^n-a}.$$

Bu, u'nun rasyonel bir fonksiyonudur; ona $\psi(u)$ diyelim. (Paydayı sıfırlayan u değerleri en çok n tanedir ve çalıştığımız aralıktan dışlanır.)
Şimdi dx'i hesaplayalım. Bölüm kuralıyla (Teorem 3.2)

$$\psi'(u)=\frac{\left(-d\,n\,u^{n-1}\right)\left(c\,u^n-a\right)-\left(b-d\,u^n\right)\left(c\,n\,u^{n-1}\right)}{\left(c\,u^n-a\right)^2}=\frac{n\,u^{n-1}\left[-d\left(c\,u^n-a\right)-c\left(b-d\,u^n\right)\right]}{\left(c\,u^n-a\right)^2}.$$

Köşeli parantezin içini açalım: $-dc\,u^n+ad-bc+cd\,u^n=ad-bc$. Böylece u^n'li terimler birbirini götürür ve

$$\psi'(u)=\frac{n(ad-bc)\,u^{n-1}}{\left(c\,u^n-a\right)^2}$$

bulunur; bu da u'nun rasyonel bir fonksiyonudur.
Değişim meşru mudur? $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ diyelim; bölüm kuralıyla

$$\varphi'(x)=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\neq 0,$$

çünkü $ad-bc\neq 0$'dır. Demek ki φ, tanımlı olduğu her aralıkta kesin monotondur (Sonuç 8.3) ve $t\mapsto\sqrt[n]{t}$ de kesin artan olduğundan $u=\sqrt[n]{\varphi(x)}$ kesin monotondur, dolayısıyla birebirdir. Ayrıca $u^n=\varphi(x)$ eşitliğinin iki yanının türevini alırsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$n\,u^{n-1}\,u'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

elde ederiz; sağ taraf sıfırdan farklı olduğundan $u \neq 0$ olan noktalarda $u'(x) \neq 0$'dır. ($u = 0$ yalnızca $ax+b=0$ noktasında olur; bu tek nokta aralıktan çıkarılır.)
Son adım kolay: $x = \psi(u)$ rasyonel olduğundan $R\left(\psi(u), u\right)$ da u'nun rasyonel bir fonksiyonudur (rasyonel fonksiyonların bileşkesi rasyoneldir); bunu yine rasyonel olan $\psi'(u)$ ile çarparsak

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\varphi(x)}\right)dx = \int R\left(\psi(u), u\right)\psi'(u)\,du$$

integralinin integrandı rasyonel çıkar.
■

$ad-bc \neq 0$ koşulu boş bir teknik ayrıntı değildir: $ad=bc$ olsaydı $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ifadesi sabit olurdu, kök de sabit olurdu ve ortada rasyonelleştirilecek bir şey kalmazdı.
Önermenin en çok kullanılan özel hâli $c=0, d=1$ durumudur: integrandda yalnızca $\sqrt[n]{ax+b}$ geçiyorsa $u = \sqrt[n]{ax+b}$, yani $u^n = ax+b$ alınır; buradan $x = \dfrac{u^n-b}{a}$ ve $dx = \dfrac{n}{a}u^{n-1}\,du$ çıkar. Daha da özel olarak $\sqrt[n]{x}$ için $x = u^n$, $dx = n\,u^{n-1}\,du$.

Farklı dereceden kökler: EKOK kuralı

İntegrandda **aynı** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ifadesinin farklı dereceden kökleri geçiyorsa — diyelim $\sqrt[n_1]{\cdot}, \ldots, \sqrt[n_k]{\cdot}$ — hepsini birden rasyonelleştirmek için $n = \text{ekok}\,(n_1, \ldots, n_k)$ alınır ve $u^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ değişimi yapılır. Gerçekten her i için $n_i \mid n$ olduğundan

$$\sqrt[n_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = \left(u^n\right)^{1/n_i} = u^{n/n_i}$$

olur ve n/n_i bir doğal sayıdır; yani her kök u'nun bir **kuvveti**ne dönüşür. Daha küçük bir n seçilirse köklerden en az biri kurtulamaz; daha büyüğü ise gereksiz yere yüksek dereceli bir rasyonel fonksiyon üretir.

Bunu bir örnekte sonuna kadar çalıştıralım.

Örnek 21.1 (EKOK Değişimiyle Rasyonelleştirme). $x > 0$ için

$$I = \int \frac{x + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x\left(2 + \sqrt[3]{x}\right)}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İntegrandda geçen kökler $\sqrt{x}$ ve $\sqrt[3]{x}$'tir; kökün içindeki ifade her ikisinde de aynıdır ($\varphi(x) = x$, yani $a=d=1, b=c=0$ ve $ad-bc = 1 \neq 0$). EKOK kuralı gereği

$$n = \text{ekok}\,(2,3) = 6, \qquad x = u^6, \qquad dx = 6u^5\,du$$

alıyoruz. $x>0$ olduğundan $u = \sqrt[6]{x} > 0$'dır ve $u \mapsto u^6$ dönüşümü $(0,\infty)$ üzerinde kesin artan olduğundan değişim meşrudur. Bu değişimle $\sqrt{x} = u^3$, $\sqrt[3]{x} = u^2$ olur; integrandı yazalım:

$$\frac{x + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x\left(2 + \sqrt[3]{x}\right)} \cdot dx = \frac{u^6 + 2u^3 + u^2}{u^6\left(2 + u^2\right)} \cdot 6u^5\,du = 6\,\frac{u^6 + 2u^3 + u^2}{u\left(u^2+2\right)}\,du.$$

Payın u^2 ortak çarpanını görelim: $u^6 + 2u^3 + u^2 = u^2\left(u^4 + 2u + 1\right)$. Bunu paydadaki u ile sadeleştirirsek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$I = 6\int \frac{u\left(u^4+2u+1\right)}{u^2+2}\,du = 6\int \frac{u^5+2u^2+u}{u^2+2}\,du$$

buluruz. Beklendiği gibi elimizde bir **rasyonel** integral var. Payın derecesi paydanınkinden büyük olduğu için önce polinom bölmesi yapıyoruz:

$$\begin{aligned} u^5+2u^2+u &= u^3\left(u^2+2\right) - 2u^3 + 2u^2 + u \\ &= u^3\left(u^2+2\right) - 2u\left(u^2+2\right) + 2u^2 + 5u \\ &= u^3\left(u^2+2\right) - 2u\left(u^2+2\right) + 2\left(u^2+2\right) + 5u - 4. \end{aligned}$$

Yani

$$\frac{u^5+2u^2+u}{u^2+2} = u^3 - 2u + 2 + \frac{5u-4}{u^2+2}.$$

Kalan kesir zaten basit kesir biçimindedir (u^2+2 indirgenemez); onu da payda türevini içeren kısım ile sabit kısma ayırıyoruz:

$$\int \frac{5u-4}{u^2+2}\,du = \frac{5}{2}\int \frac{2u}{u^2+2}\,du - 4\int \frac{du}{u^2+2} = \frac{5}{2}\ln\left(u^2+2\right) - \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}.$$

($u^2+2>0$ olduğundan mutlak değere gerek yoktur; ayrıca $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$'dir.) Polinom kısmını da integralleyip hepsini 6 ile çarpalım:

$$\begin{aligned} I &= 6\left[\frac{u^4}{4} - u^2 + 2u + \frac{5}{2}\ln\left(u^2+2\right) - 2\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right] + C \\ &= \frac{3u^4}{2} - 6u^2 + 12u + 15\ln\left(u^2+2\right) - 12\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

Son adım geri dönüştür: $u = \sqrt[6]{x}$ olduğundan $u^4 = x^{2/3}$, $u^2 = x^{1/3}$, $u = x^{1/6}$'dır:

$$I = \frac{3}{2}x^{2/3} - 6x^{1/3} + 12x^{1/6} + 15\ln\left(x^{1/3}+2\right) - 12\sqrt{2}\arctan\frac{x^{1/6}}{\sqrt{2}} + C.$$

Doğrulama. $u = \sqrt[6]{x}$ için $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{6}x^{-5/6} = \dfrac{1}{6u^5}$'tir. Sonucun u'ya göre türevi (arctan terimi için $\left(\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{\sqrt{2}}{u^2+2}$ kullanılarak)

$$6u^3 - 12u + 12 + \frac{30u-24}{u^2+2} = 6\left(u^3 - 2u + 2 + \frac{5u-4}{u^2+2}\right) = \frac{6\left(u^5+2u^2+u\right)}{u^2+2}$$

olur. Zincir kuralıyla

$$\frac{dI}{dx} = \frac{6\left(u^5+2u^2+u\right)}{u^2+2}\cdot\frac{1}{6u^5} = \frac{u^4+2u+1}{u^4\left(u^2+2\right)},$$

ki bu, $x = u^6$ için integrandın ta kendisidir:

$$\frac{u^6+2u^3+u^2}{u^6\left(u^2+2\right)} = \frac{u^4+2u+1}{u^4\left(u^2+2\right)}. \qquad \checkmark$$

■

21.3 Euler Değişimleri

Şimdi asıl ilginç sınıfa geliyoruz: integrandda **ikinci dereceden** bir polinomun karekökü geçiyorsa ne yapmalı? Yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \qquad a \neq 0$$

biçimindeki integraller. Burada Önerme 21.1 işe yaramaz, çünkü $\sqrt{ax^2+bx+c} = u$ demek x'i u cinsinden ikinci dereceden bir denklemden çözmek demektir ve çözüm yine köklü çıkar. Euler'in fikri, kökü **tek başına** değil, x'te birinci dereceden bir ifadeyle **birlikte** yeni değişkene eşitlemektir; böylece karesi alındığında x^2'li terimler götürülür ve geriye x için birinci dereceden bir denklem kalır.

Tanım 21.1 (Euler Değişimleri). $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $\Delta = b^2 - 4ac$ olsun. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ifadesini içeren integrallerde aşağıdaki **Euler değişimleri** kullanılır.

1. **Birinci Euler değişimi ($a > 0$ ise).**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = u - x\sqrt{a}.$$

   Kare alındığında ax^2 terimleri iki tarafta da çıkar ve x için birinci dereceden bir denklem kalır:

$$bx + 2\sqrt{a}\,u\,x = u^2 - c, \qquad x = \frac{u^2-c}{b+2\sqrt{a}\,u}.$$

   ($u + x\sqrt{a}$ seçimi de aynı işi görür; yalnızca u'nun işareti değişir.)

2. **İkinci Euler değişimi ($c > 0$ ise).**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = ux + \sqrt{c}.$$

   Kare alındığında sabit terimler götürülür, kalan denklem x ile sadeleşir:

$$ax + b = u^2 x + 2\sqrt{c}\,u, \qquad x = \frac{2\sqrt{c}\,u - b}{a - u^2}.$$

3. **Üçüncü Euler değişimi ($\Delta > 0$ ise).** Bu durumda $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ biçiminde iki farklı reel kökle çarpanlara ayrılır ve

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = u\,(x-x_1)$$

   alınır. Kare alınıp ortak $(x-x_1)$ çarpanı sadeleştirilirse

$$a(x-x_2) = u^2(x-x_1), \qquad x = \frac{a\,x_2 - u^2 x_1}{a-u^2}$$

   bulunur.

Üç durumda da x, u'nun rasyonel bir fonksiyonu olarak çözülür; dolayısıyla dx ve $\sqrt{ax^2+bx+c}$ de u'nun rasyonel fonksiyonları olur ve integral rasyonelleşir.

Hangi değişimi ne zaman kullanacağımıza karar vermek zor değildir. İntegrandın anlamlı olması için ax^2+bx+c ifadesinin bir aralık boyunca **pozitif** olması gerekir. $a > 0$ ise birinci değişim **her zaman** kullanılabilir; Δ'nın işaretinin hiçbir önemi yoktur. $a < 0$ ise ax^2+bx+c ancak ve ancak $\Delta > 0$ olduğunda pozitif değerler alır (aksi hâlde aşağı açılan parabolün tepe noktası bile x ekseninin üstüne çıkmaz ve ifade her yerde ≤ 0 olur); demek ki bu hâlde üçüncü değişim her zaman kullanılabilir. Yani **birinci ve üçüncü değişimler, integralin anlamlı olduğu bütün durumları kapsar.** İkinci değişim vazgeçilmez değildir; ama $c > 0$ olduğunda hesabı çoğu kez kısalttığı için ayrı bir seçenek olarak tutulur.
Bölümün başında, her rasyonelleştirmede $u = u(x)$ dönüşümünün çalıştığımız aralıkta birebir ve türevi sıfırdan farklı olduğunu ayrıca denetleyeceğimizi söylemiştik. Üç Euler değişimi için bu denetimi bir kerede yapalım. $\Delta \neq 0$ olsun ve kısaca $Y = \sqrt{ax^2+bx+c} > 0$ yazalım.
Birinci değişimde $u = x\sqrt{a} + Y$'dir; türevi

$$u'(x) = \sqrt{a} + \frac{2ax+b}{2Y} = \frac{2\sqrt{a}\,Y + 2ax + b}{2Y}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Pay sıfır olsaydı $2\sqrt{a}\,Y = -(2ax+b)$ olurdu; iki yanın karesini alırsak $4a\left(\,ax^2+bx+c\,\right) = (2ax+b)^2$, yani $4ac = b^2$, yani $\Delta = 0$ çıkardı. Demek ki $\Delta \neq 0$ iken pay hiçbir noktada sıfırlanmaz; sürekli olduğu için işaretini de değiştiremez ve u kesin monotondur.

İkinci değişimde $u = \dfrac{Y-\sqrt{c}}{x}$'tir. Bölüm kuralıyla türevi alıp $2Yx^2$ ile çarparsak, $Y^2 = ax^2+bx+c$ olduğundan

$$2Y\,x^2\,u'(x) = (2ax+b)\,x - 2Y^2 + 2\sqrt{c}\,Y = 2\sqrt{c}\,Y - (bx+2c)$$

buluruz. Sağ tarafın sıfır olması $2\sqrt{c}\,Y = bx+2c$ demektir; kare alınca bu koşul $\left(\,4ac-b^2\,\right)x^2 = 0$'a indirgenir. Öyleyse $x \neq 0$ ve $\Delta \neq 0$ iken $u'(x) \neq 0$'dır.

Üçüncü değişimde $u^2 = \dfrac{a(x-x_2)}{x-x_1}$'dir ve

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}\right) = \frac{a\,(x_2-x_1)}{(x-x_1)^2} \neq 0$$

olur, çünkü $a \neq 0$ ve $x_1 \neq x_2$'dir. Demek ki u^2 kesin monotondur; kökün pozitif dalını ($u>0$) seçtiğimizde u da kesin monoton, dolayısıyla birebirdir.

Dışarıda bıraktığımız $\Delta = 0$ hâlinde ise zaten yapacak bir şey yoktur: $ax^2+bx+c = a\left(\,x+\frac{b}{2a}\right)^2$ olduğundan $a>0$ için $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,\left|\,x+\frac{b}{2a}\,\right|$ olur, kök kendiliğinden kaybolur ve integrand rasyonel bir fonksiyona (daha doğrusu iki aralıkta ayrı ayrı rasyonel fonksiyonlara) dönüşür.

> **i** Geometrik anlamı
>
> $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ eğrisi, $y^2 = ax^2+bx+c$ koniğinin üst yarısıdır. Birinci Euler değişimi $y = u - x\sqrt{a}$, eğim $-\sqrt{a}$ olan **paralel doğrular ailesi** demektir; bu eğim koniğin asimptot eğimidir, bu yüzden her doğru koniği tam olarak **bir** noktada keser ve u parametresi eğri üzerindeki noktaları birebir tarar. Üçüncü Euler değişimi $y = u(x-x_1)$ ise eğrinin x eksenini kestiği $(x_1,0)$ noktasından geçen doğrular ailesidir; bu noktadan geçen bir doğru koniği zaten $(x_1,0)$'da kestiğinden geriye tek bir kesişim noktası kalır. Her iki durumda da "bir noktadan geçen doğrularla koniği parametrelendirme" fikri, kökü rasyonel bir ifadeye çevirir.

İlk örneğimizde birinci Euler değişimini sonuna kadar çalıştıracağız.

Örnek 21.2 (Birinci Euler Değişimi).

$$I = \int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Burada $a=1$, $b=2$, $c=2$ ve $\Delta = 4-8 = -4 < 0$'dır. $\Delta<0$ olduğu için üçüncü değişim kullanılamaz; ama $a=1>0$ olduğundan **birinci** Euler değişimi uygulanabilir. $\sqrt{a}=1$ olduğundan

$$\sqrt{x^2+2x+2} = u - x$$

alalım. İki tarafın karesini alırsak

$$x^2+2x+2 = u^2-2ux+x^2 \quad\Rightarrow\quad 2x+2ux = u^2-2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{u^2-2}{2(1+u)}.$$

Türev alarak dx'i bulalım:

$$dx = \frac{2u\cdot 2(1+u) - 2\left(\,u^2-2\,\right)}{4(1+u)^2}\,du = \frac{4u+4u^2-2u^2+4}{4(1+u)^2}\,du = \frac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2}\,du.$$

Kökü de u cinsinden yazalım:

$$\sqrt{x^2+2x+2} = u - \frac{u^2-2}{2(1+u)} = \frac{2u(1+u)-u^2+2}{2(1+u)} = \frac{u^2+2u+2}{2(1+u)}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu yüzden paydada duran ifade çok güzel sadeleşir:

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{2(1+u)+u^2+2u+2}{2(1+u)}=\frac{u^2+4u+4}{2(1+u)}=\frac{(u+2)^2}{2(1+u)}.$$

Şimdi her şeyi yerine koyalım:

$$\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{u^2-2}{2(1+u)}\cdot\frac{2(1+u)}{(u+2)^2}\cdot\frac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2}\,du=\frac{\left(u^2-2\right)\left(u^2+2u+2\right)}{2\,(u+1)^2(u+2)^2}\,du,$$

yani $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\left(u^2-2\right)\left(u^2+2u+2\right)}{(u+1)^2(u+2)^2}\,du$. Rasyonel integrale ulaştık. Pay u^4+2u^3-4u-4, payda ise $\left[(u+1)(u+2)\right]^2=u^4+6u^3+13u^2+12u+4$'tür. Dereceler eşit olduğundan önce bölme yapıyoruz; bölüm 1, kalan

$$\left(u^4+2u^3-4u-4\right)-\left(u^4+6u^3+13u^2+12u+4\right)=-4u^3-13u^2-16u-8$$

olur. Böylece

$$\frac{\left(u^2-2\right)\left(u^2+2u+2\right)}{(u+1)^2(u+2)^2}=1+\frac{-4u^3-13u^2-16u-8}{(u+1)^2(u+2)^2}.$$

Kalan kesri basit kesirlere ayıralım. Pay polinomuna $N(u)=-4u^3-13u^2-16u-8$ diyelim; payda iki katlı doğrusal çarpan içerdiğinden ayrışım $\dfrac{A}{u+1}+\dfrac{B}{(u+1)^2}+\dfrac{C}{u+2}+\dfrac{D}{(u+2)^2}$ biçimindedir ve iki yanı $(u+1)^2(u+2)^2$ ile çarpınca

$$N(u)=A(u+1)(u+2)^2+B(u+2)^2+C(u+2)(u+1)^2+D(u+1)^2$$

özdeşliğini buluruz. $u=-1$ koyarsak sağda yalnızca B kalır: $N(-1)=-1$, yani $B=-1$. $u=-2$ koyarsak $N(-2)=4$, yani $D=4$. Kalan iki bilinmeyen için u^3 katsayılarını eşitleriz ($A+C=-4$) ve $u=0$ koyarız ($4A+4B+2C+D=-8$, yani $2A+C=-4$); bu iki denklemden $A=0$ ve $C=-4$ çıkar. (Kontrol: u^2 katsayıları $5A+B+4C+D=-13$, u katsayıları $8A+4B+5C+2D=-16$; ikisi de N'ninkilerle uyuşuyor.)
Böylece integrand

$$1-\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{4}{u+2}+\frac{4}{(u+2)^2}$$

hâline gelir. Terim terim integralleyip $\frac{1}{2}$ ile çarpalım:

$$I=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{u+1}-4\ln|\,u+2\,|-\frac{4}{u+2}\right]+C.$$

Geri dönüş için $u=x+\sqrt{x^2+2x+2}$ yazıyoruz. İşaretleri denetleyelim: $t=x+1$ dersek $\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{t^2+1}>|\,t\,|$ olduğundan $u+1=t+\sqrt{t^2+1}>0$ ve $u+2>1>0$'dır; yani logaritmada mutlak değere gerek yoktur.
Sonucu güzelleştirebiliriz: $\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)=1$ olduğundan

$$\frac{1}{u+1}=\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}=\sqrt{t^2+1}-t=\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)$$

yazılır ve ilk iki terim birleşir:

$$\frac{u}{2}+\frac{1}{2(u+1)}=\frac{x+\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}{2}=\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}.$$

Sabit $-\frac{1}{2}$ integral sabitine karışır. Sonuç:

$$I=\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}-2\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. En kısa yol, u değişkenindeki ilkel fonksiyonu türetip zincir kuralını kullanmaktır. Bulduğumuz ifadeye

$$G(u) = \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{u+1} - 4\ln(u+2) - \frac{4}{u+2}\right]$$

diyelim. Türevi

$$G'(u) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{4}{u+2} + \frac{4}{(u+2)^2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(u^2-2\right)\left(u^2+2u+2\right)}{(u+1)^2(u+2)^2}$$

olur; son eşitlik, yukarıda kurduğumuz basit kesirlere ayırmanın ta kendisidir. Öte yandan $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2}$ olduğundan, ters fonksiyonun türev kuralıyla (Teorem 4.2)

$$\frac{dI}{dx} = \frac{G'(u)}{dx/du} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(u^2-2\right)\left(u^2+2u+2\right)}{(u+1)^2(u+2)^2}\cdot\frac{2(1+u)^2}{u^2+2u+2} = \frac{u^2-2}{(u+2)^2}$$

bulunur. Bu ise integrandın kendisidir: yukarıda $x = \dfrac{u^2-2}{2(1+u)}$ ve $1+\sqrt{x^2+2x+2} = \dfrac{(u+2)^2}{2(1+u)}$ olduğunu görmüştük, dolayısıyla

$$\frac{x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{u^2-2}{(u+2)^2}. \qquad \checkmark$$

Son yazdığımız x'li biçim, $G(u(x))$'ten yalnızca cebirsel sadeleştirmeyle — ve yol boyunca sabite karışan $-\frac{1}{2}$ terimiyle — elde edildiği için, bir sabit farkıyla aynı fonksiyondur; ikisinin de türevi integranddır.
■

İkinci örnekte aynı değişimi biraz farklı bir integrandda kullanacağız; bu kez hesap çok daha kısa çıkacak.

Örnek 21.3 (Birinci Euler Değişiminin İkinci Uygulaması).

$$I = \int \frac{dx}{x-2+\sqrt{x^2-2x+2}}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Burada $a = 1 > 0$ ve $\Delta = -4 < 0$'dır; yine birinci Euler değişimini kullanıyoruz. Bu kez işaret seçimini değiştirip $\sqrt{x^2-2x+2} = u + x$ alalım (bu, $u \mapsto -u$ değişikliğinden ibarettir ve sonucu etkilemez). Kare alalım:

$$x^2 - 2x + 2 = u^2 + 2ux + x^2 \quad\Rightarrow\quad -2x - 2ux = u^2 - 2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{2-u^2}{2(1+u)}.$$

Türev:

$$dx = \frac{-2u\cdot 2(1+u) - \left(2-u^2\right)\cdot 2}{4(1+u)^2}\,du = \frac{-4u-4u^2-4+2u^2}{4(1+u)^2}\,du = -\frac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2}\,du.$$

Kök ve paydadaki ifade:

$$\sqrt{x^2-2x+2} = u + x = \frac{2u(1+u)+2-u^2}{2(1+u)} = \frac{u^2+2u+2}{2(1+u)},$$

$$x - 2 = \frac{2-u^2-4(1+u)}{2(1+u)} = \frac{-u^2-4u-2}{2(1+u)}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İkisini toplarsak paydadaki ifade çarpıcı biçimde sadeleşir:

$$x-2+\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{-u^2-4u-2+u^2+2u+2}{2(1+u)}=\frac{-2u}{2(1+u)}=\frac{-u}{1+u}.$$

Şimdi integrandı yazalım:

$$\frac{dx}{x-2+\sqrt{x^2-2x+2}}=\left(-\frac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2}\right)\cdot\left(-\frac{1+u}{u}\right)du=\frac{u^2+2u+2}{2\,u\,(u+1)}\,du.$$

Yani

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{u^2+2u+2}{u(u+1)}\,du.$$

Pay ile paydanın dereceleri eşit; önce bölme yapalım. $u^2+2u+2=\left(\,u^2+u\,\right)+(u+2)$ olduğundan

$$\frac{u^2+2u+2}{u(u+1)}=1+\frac{u+2}{u(u+1)}.$$

Kalan kesri basit kesirlere ayıralım: $\dfrac{u+2}{u(u+1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{u+1}$ yazıp iki yanı $u(u+1)$ ile çarparsak $u+2=A(u+1)+Bu$ olur. $u=0$ için $A=2$, $u=-1$ için $-B=1$, yani $B=-1$'dir. Böylece

$$I=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{u}{2}+\ln|\,u\,|-\frac{1}{2}\ln|\,u+1\,|+C.$$

Geri dönüş: $\sqrt{x^2-2x+2}=u+x$ olduğundan

$$u=\sqrt{x^2-2x+2}-x.$$

İşaretlere bakalım: $s=x-1$ dersek $u+1=\sqrt{s^2+1}-s>0$ daima pozitiftir, orada mutlak değere gerek yoktur. Buna karşılık u kendisi $x<1$ için pozitif, $x>1$ için negatiftir ve $x=1$'de sıfır olur — nitekim $x=1$'de integrandın paydası da sıfırdır, yani orası gerçek bir tekil noktadır ve hesap $x<1$ ile $x>1$ aralıklarında ayrı ayrı geçerlidir. Mutlak değeri koruyarak yazalım:

$$I=\frac{\sqrt{x^2-2x+2}-x}{2}+\ln\left|\sqrt{x^2-2x+2}-x\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right)+C.$$

Doğrulama. u değişkenindeki ilkel fonksiyona

$$G(u)=\frac{u}{2}+\ln|\,u\,|-\frac{1}{2}\ln(u+1)$$

diyelim. Türevini ortak paydada toplayalım:

$$G'(u)=\frac{1}{2}+\frac{1}{u}-\frac{1}{2(u+1)}=\frac{u(u+1)+2(u+1)-u}{2u(u+1)}=\frac{u^2+2u+2}{2u(u+1)}.$$

Değişimin kuruluşundan $\dfrac{dx}{du}=-\dfrac{u^2+2u+2}{2(1+u)^2}$ ve $x-2+\sqrt{x^2-2x+2}=\dfrac{-u}{1+u}$ olduğunu biliyoruz. Ters fonksiyonun türev kuralıyla (Teorem 4.2)

$$\frac{dI}{dx}=\frac{G'(u)}{dx/du}=\frac{u^2+2u+2}{2u(u+1)}\cdot\left(-\frac{2(1+u)^2}{u^2+2u+2}\right)=-\frac{u+1}{u}=\frac{1}{\frac{-u}{1+u}}=\frac{1}{x-2+\sqrt{x^2-2x+2}}.\qquad\checkmark$$

Bulduğumuz türev tam olarak integranddır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Üçüncü örnekte $\Delta > 0$ hâlini kullanacağız; bu değişim, kökün içindeki polinomun reel kökleri olduğunda çoğu zaman en kısa yoldur.

Örnek 21.4 (Üçüncü Euler Değişimi). $x > 2$ için

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kökün içindeki polinomu çarpanlarına ayıralım: $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, yani $a=1$, $x_1=1$, $x_2=2$ ve $\Delta = 1 > 0$. $a>0$ olduğu için birinci değişim de kullanılabilirdi; ama $\Delta>0$ olduğundan **üçüncü** değişim çok daha kısa bir hesap verir. $x_1 = 1$ köküne göre

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} = u\,(x-1)$$

alalım. Kare alıp ortak $(x-1)$ çarpanını sadeleştirirsek ($x>2$ olduğundan $x-1 \neq 0$)

$$x-2 = u^2(x-1) \quad\Rightarrow\quad x\left(1-u^2\right) = 2-u^2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{2-u^2}{1-u^2}.$$

Bu ifadeden hemen şunu okuyoruz:

$$x-1 = \frac{2-u^2-\left(1-u^2\right)}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2}.$$

Türev alalım ve kökü yazalım:

$$dx = \frac{-2u\left(1-u^2\right)+2u\left(2-u^2\right)}{\left(1-u^2\right)^2}\,du = \frac{2u}{\left(1-u^2\right)^2}\,du, \qquad \sqrt{x^2-3x+2} = u(x-1) = \frac{u}{1-u^2}.$$

Şimdi integrandın paydası kurulabilir:

$$(x-1)\sqrt{x^2-3x+2} = \frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{u}{1-u^2} = \frac{u}{\left(1-u^2\right)^2},$$

ve bu, dx ile birebir sadeleşecek biçimdedir:

$$I = \int \frac{\left(1-u^2\right)^2}{u}\cdot\frac{2u}{\left(1-u^2\right)^2}\,du = \int 2\,du = 2u + C.$$

Geri dönüşte $u = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$ yazıyoruz:

$$I = \frac{2\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C \qquad (x>2).$$

Son eşitlikte $x>2$ için $\dfrac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x-1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ olduğunu kullandık.

Doğrulama. $X = x^2-3x+2$ diyelim; $X' = 2x-3$'tür. Bölüm kuralıyla

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{X}}{x-1}\right) = 2\,\frac{\frac{2x-3}{2\sqrt{X}}(x-1)-\sqrt{X}}{(x-1)^2} = \frac{(2x-3)(x-1)-2X}{\sqrt{X}\,(x-1)^2}.$$

Payı hesaplayalım: $(2x-3)(x-1) = 2x^2-5x+3$ ve $2X = 2x^2-6x+4$ olduğundan pay $x-1$'e eşittir. Böylece

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{X}}{x-1}\right) = \frac{x-1}{\sqrt{X}\,(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}. \qquad \checkmark$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu hesapta $x-1$'in işaretini hiç kullanmadık: $\dfrac{2\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$ ifadesi, integrandın tanımlı olduğu **iki** aralıkta da ($x<1$ ve $x>2$) bir ilkel fonksiyondur.
■

⚠ Değişim seçimi hesabın uzunluğunu belirler

Üç Euler değişiminden birden fazlası uygulanabiliyorsa hepsi doğru sonuca götürür; ama ürettikleri rasyonel integraller çok farklı zorlukta olabilir. Son örnekte birinci değişim ($\sqrt{x^2-3x+2}=u-x$) de kullanılabilirdi; o yol basit kesirlere ayırma gerektiren çok daha uzun bir hesap verirdi. Genel kural: kökün içindeki polinomun **reel kökleri varsa** üçüncü değişimi, yoksa ve $c>0$ ise ikinci değişimi denemek hesabı kısaltır.

21.4 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Euler değişimleri her zaman işe yarar, ama bazı biçimlerde gereksiz yere uzundur. Bunların en sık karşılaşılanı

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \qquad p_n \text{ bir } n\text{-inci dereceden polinom}$$

biçimidir. Sonucun neye benzeyeceğini tahmin edebiliriz: $q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$ biçimindeki bir ifadenin türevi, paydası $\sqrt{ax^2+bx+c}$ olan bir kesir verir. Öyleyse yanıt da bu biçimde olmalı — artı, tek başına kalan bir "temel" integral. Yanıtın biçimini önceden yazıp katsayılarını bilinmeyen bırakmaya ve sonra bu katsayıları bir denklem sisteminden çözmeye **belirsiz katsayılar yöntemi** (method of undetermined coefficients) denir. Bu tahmini bir teoreme çevirelim.

Teorem 21.1 (Belirsiz Katsayılar Yöntemi). *$a\neq 0$ ve $X(x)=ax^2+bx+c$ olsun; X'in pozitif olduğu bir aralıkta çalışalım. p_n, derecesi $n\geq 1$ olan bir polinom olmak üzere, derecesi $n-1$ olan **tek bir** q_{n-1} polinomu ve **tek bir** $\lambda\in\mathbb{R}$ sayısı vardır ki*

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{X(x)}}\,dx = q_{n-1}(x)\,\sqrt{X(x)}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{X(x)}}$$

olur. q_{n-1} ile λ, yukarıdaki eşitliğin iki yanının türevi alınıp $\sqrt{X}$ ile çarpılarak elde edilen

$$p_n(x)=q_{n-1}'(x)\,X(x)+\frac{1}{2}\,q_{n-1}(x)\,X'(x)+\lambda$$

polinom özdeşliğinden, katsayılar eşitlenerek bulunur.

İspat.
Önce özdeşliğin nereden geldiğini görelim. İddia edilen eşitliğin iki yanının türevini alalım. Sağ tarafta çarpım kuralı ve zincir kuralıyla (Teorem 4.1), $\left(\sqrt{X}\right)'=\dfrac{X'}{2\sqrt{X}}$ olduğundan

$$\frac{p_n(x)}{\sqrt{X}}=q_{n-1}'(x)\sqrt{X}+q_{n-1}(x)\,\frac{X'(x)}{2\sqrt{X}}+\frac{\lambda}{\sqrt{X}}.$$

İki yanı $\sqrt{X}>0$ ile çarparsak, $\left(\sqrt{X}\right)^2=X$ olduğundan

$$p_n(x)=q_{n-1}'(x)\,X(x)+\frac{1}{2}\,q_{n-1}(x)\,X'(x)+\lambda$$

*polinom özdeşliğini buluruz; buna kısaca **temel özdeşlik** diyelim. Tersine, temel özdeşliği sağlayan bir q_{n-1} ve λ bulursak, yukarıdaki adımları geri yürüterek*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{d}{dx}\left[q_{n-1}(x)\sqrt{X(x)}\right] = \frac{p_n(x)}{\sqrt{X(x)}} - \frac{\lambda}{\sqrt{X(x)}}$$

elde ederiz; iki yanın ilkel fonksiyonlarını alınca teoremdeki eşitlik (bir sabit farkıyla) çıkar. Demek ki bütün mesele temel özdeşliğin çözülebilirliğidir.

Dereceler tutuyor mu? *$n \geq 2$ iken $q'_{n-1}X$ çarpımının derecesi $(n-2)+2 = n$, $q_{n-1}X'$ çarpımının derecesi $(n-1)+1 = n$'dir ($a \neq 0$ olduğundan X' birinci derecedendir); $n = 1$ iken ise $q'_0 = 0$ olduğu için ilk çarpım hiç görünmez ve ikinci çarpımın derecesi 1'dir. Her iki durumda da temel özdeşliğin sağ tarafı, tıpkı sol tarafı gibi, en çok n-inci derecedendir. Bilinmeyenler q_{n-1}'in n katsayısı ile λ, toplam $n+1$ tanedir; denklemler ise $x^n, \ldots, x^1, x^0$ katsayılarının eşitliği, yine $n+1$ tanedir. Sayılar tutuyor; ama bu tek başına varlık ve teklik vermez. Sistemin yapısına bakalım.*

Sistem üçgenseldir. *$q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k$ yazalım. $X = ax^2+bx+c$ ve $X' = 2ax+b$ olduğundan*

$$q'_{n-1}X = \sum_{k=1}^{n-1} kA_k x^{k-1}\,\left(\,ax^2+bx+c\,\right) = \sum_{k=1}^{n-1} kA_k\,\left(\,ax^{k+1}+bx^k+cx^{k-1}\,\right),$$

$$\frac{1}{2}q_{n-1}X' = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\left(ax^{k+1}+\frac{b}{2}x^k\right).$$

Şimdi sağ tarafta x^m'in katsayısını toplayalım ($0 \leq m \leq n$). x^{k+1} terimlerinden $k = m-1$, x^k terimlerinden $k = m$, x^{k-1} terimlerinden $k = m+1$ katkı verir:

$$a(m-1)A_{m-1} + aA_{m-1} + b\,m\,A_m + \frac{b}{2}A_m + c\,(m+1)A_{m+1} + \lambda\,[m=0]$$

$$= a\,m\,A_{m-1} + b\left(m+\frac{1}{2}\right)A_m + c\,(m+1)\,A_{m+1} + \lambda\,[m=0],$$

*burada $[m=0]$ ifadesi $m=0$ ise 1, değilse 0 demektir. Denklemleri $m = n$'den $m = 0$'a doğru sıralayalım. Her $j = n-1, n-2, \ldots, 0$ için $m = j+1$ denklemi, katsayısı $a(j+1) \neq 0$ olan A_j ile yalnızca daha önce belirlenmiş A_{j+1}, A_{j+2}'yi içerir; buradan A_j **tek türlü** çözülür. (İlk adımda, yani $m = n$ denkleminde $a\,n\,A_{n-1} = (p_n$ 'in x^n katsayısı$)$ olur; $a \neq 0$ ve $n \geq 1$ olduğundan A_{n-1} hemen bulunur.) Bütün A_k'lar belirlendikten sonra geriye $m = 0$ denklemi kalır: $\frac{b}{2}A_0 + cA_1 + \lambda = (p_n$ 'in sabit terimi$)$, buradan λ tek türlü çıkar. Katsayı matrisi bu sıralamada alt üçgenseldir ve köşegeninde $an, a(n-1), \ldots, a, 1$ sayıları bulunur; hepsi sıfırdan farklı olduğundan sistem tek çözümlüdür.*

■

Yöntemin bütün yükü tek bir doğrusal sisteme indi. Geriye kalan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integrali ise **temel** bir integraldir: kareyi tamamlayarak $a > 0$ hâlinde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

biçimine, $a < 0$ hâlinde ise

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{k} + C \qquad (k>0)$$

biçimine gelir. Birincisini doğrulamak kolaydır: $\ln\left|\,x+\sqrt{x^2+k}\,\right|$ ifadesinin türevi

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$$

olur; ikincisi ise ters trigonometrik fonksiyonların türev kuralının (Teorem 5.5) doğrudan sonucudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı fikrin küçük bir uzantısı da vardır: paydada bir kuvvet çarpanı bulunan $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinde $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$ değişimi yapılırsa integral yine "polinom bölü karekök" biçimine gelir ve yukarıdaki yöntem doğrudan çalışır.
Şimdi yöntemi en tipik örneğinde çalıştıralım. Dikkat edilecek tek şey, integrandın önce doğru biçime sokulmasıdır.

Örnek 21.5 (Belirsiz Katsayılarla Bir Hesap).

$$I=\int x^2\sqrt{x^2+4}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İntegrand şu anda "polinom bölü karekök" biçiminde değil; $\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2=x^2+4$ olduğunu kullanarak kökü paydaya taşıyalım:

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx=\int\frac{x^2\left(x^2+4\right)}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$$

Artık $p_4(x)=x^4+4x^2$ ve $X(x)=x^2+4$'tür ($a=1,\ b=0,\ c=4$). Teorem 21.1 gereği, üçüncü dereceden bir $q_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ ve bir λ sayısı için

$$\int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

yazabiliriz. Teoremdeki temel özdeşliği kuralım: $X'=2x$ olduğundan

$$x^4+4x^2=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+4\right)+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)x+\lambda.$$

Sağ tarafı açalım:

$$3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+12Ax^2+8Bx+4C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda.$$

Şimdi katsayıları eşitliyoruz; teoremin ispatındaki gibi en yüksek dereceden başlayarak:

$$\begin{aligned}
x^4:&\quad 3A+A=1 &\Rightarrow&\quad A=\frac{1}{4},\\
x^3:&\quad 2B+B=0 &\Rightarrow&\quad B=0,\\
x^2:&\quad 12A+2C=4\Rightarrow &&\quad 3+2C=4\Rightarrow C=\frac{1}{2},\\
x^1:&\quad 8B+D=0 &\Rightarrow&\quad D=0,\\
x^0:&\quad 4C+\lambda=0 &\Rightarrow&\quad \lambda=-2.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi her denklem, bir önceki adımda bulunan değerler yerine konduğunda tek bir bilinmeyen bırakıyor — teoremdeki üçgensel yapı tam olarak budur. Bulduklarımızı yerine koyalım:

$$\int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{x^2+4}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Kalan integral temel biçimdedir:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C$$

(burada $\sqrt{x^2+4}>|\,x\,|$ olduğundan $x+\sqrt{x^2+4}>0$'dır, mutlak değere gerek yoktur). Sonuç:

$$I=\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. $S = \sqrt{x^2+4}$ ve $S' = \dfrac{x}{S}$'dir. Birinci terimin türevi çarpım kuralıyla

$$\left(\frac{3x^2}{4}+\frac{1}{2}\right)S + \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{S} = \frac{\frac{3x^4}{4}+3x^2+\frac{x^2}{2}+2+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}}{S} = \frac{x^4+4x^2+2}{S}$$

olur; ikinci terimin türevi ise yukarıda hesapladığımız gibi $-\dfrac{2}{S}$'dir. Toplarsak

$$\frac{x^4+4x^2+2}{S} - \frac{2}{S} = \frac{x^4+4x^2}{S} = \frac{x^2\,(\,x^2+4\,)}{\sqrt{x^2+4}} = x^2\sqrt{x^2+4}. \qquad \checkmark$$

Türev, başladığımız integranda birebir eşit.
■

21.5 Binom İntegralleri

Bölümün son ve en ilginç sınıfına geliyoruz. Şimdiye kadar hep "uygun bir değişim vardır" diyebiliyorduk; binom integrallerinde durum farklıdır. Burada uygun değişimin **ne zaman var olduğunu** tam olarak söyleyen bir ölçüt vardır ve bu ölçüt sağlanmadığında integral hiçbir elemanter fonksiyonla yazılamaz.

Tanım 21.2 (Binom İntegrali). $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ve $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$ olmak üzere

$$\int x^r\,\left(\,a + b\,x^p\right)^q\,dx$$

biçimindeki integrallere **binom integrali** (binomial integral) ya da **binom diferansiyelinin integrali** denir. Burada $x > 0$ alınır; kesirli üsler bu aralıkta tek türlü tanımlıdır.

Tanımın kapsamı sanıldığından geniştir: $\int \sqrt{x}\left(\,3+\sqrt[3]{x}\right)^{-1}dx$ integralinde $r=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{3}$, $q=-1$; $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ integralinde $r=-4$, $p=2$, $q=-\frac{1}{2}$'dir. Şimdi bunların ne zaman rasyonelleşeceğini söyleyen teoremi kuralım.

Teorem 21.2 (Çebişev Koşulları). *$\displaystyle\int x^r\,\left(\,a+bx^p\right)^q\,dx$ binom integralini ele alalım ($p, q, r \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$, $ab \neq 0$). Aşağıdaki üç koşuldan **en az biri** sağlanıyorsa, uygun bir değişimle bu integral bir rasyonel fonksiyonun integraline dönüşür; dolayısıyla elemanter fonksiyonlarla hesaplanır.*

1. ***Birinci hâl:* $q \in \mathbb{Z}$.** *k, p ile r'nin (en sade biçimdeki) paydalarının en küçük ortak katı olsun. Değişim: $x = u^k$.*
2. ***İkinci hâl:* $\dfrac{r+1}{p} \in \mathbb{Z}$.** *$n$, q'nun (en sade biçimdeki) paydası olsun. Değişim: $a + bx^p = u^n$.*
3. ***Üçüncü hâl:* $\dfrac{r+1}{p} + q \in \mathbb{Z}$.** *$n$, q'nun paydası olsun. Değişim: $\dfrac{a+bx^p}{x^p} = u^n$, yani $a\,x^{-p} + b = u^n$.*

İspat.
*Üç hâli sırayla ele alıyoruz. Her seferinde göstereceğimiz şey aynı: değişimden sonra integrandın u'nun **tam sayı** kuvvetlerinden kurulu bir ifadeye, yani bir rasyonel fonksiyona dönüştüğü.*
Birinci hâl. *$q \in \mathbb{Z}$ olsun. k, p ve r'nin paydalarının EKOK'u olduğundan $kp, kr \in \mathbb{Z}$'dir. $x = u^k$ değişiminde $dx = k\,u^{k-1}\,du$ olur ve*

$$x^r\,\left(\,a+bx^p\right)^q\,dx = u^{kr}\,\left(\,a+b\,u^{kp}\right)^q\,k\,u^{k-1}\,du.$$

Burada u^{kr} ve u^{k-1} birer tam sayı kuvvettir; $a + bu^{kp}$ ifadesi u'nun bir polinomu ya da ($kp < 0$ ise) rasyonel fonksiyonudur ve q tam sayı olduğundan onun q-inci kuvveti de rasyoneldir. Rasyonel fonksiyonların çarpımı rasyonel olduğundan integrand rasyoneldir.
İkinci hâl. *$m := \dfrac{r+1}{p} \in \mathbb{Z}$ olsun ve n, q'nun paydası olsun; yani $nq \in \mathbb{Z}$. Değişim $a + bx^p = u^n$'dir; buradan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^p = \frac{u^n - a}{b}.$$

İki yanın türevini alalım: $b\,p\,x^{p-1}\,dx = n\,u^{n-1}\,du$, *yani*

$$x^{p-1}\,dx = \frac{n}{bp}\,u^{n-1}\,du.$$

Şimdi integrandı bu ifadeye uyacak biçimde parçalayalım:

$$x^r\,\left(a + bx^p\right)^q dx = x^{r-p+1}\cdot\left(a + bx^p\right)^q \cdot x^{p-1}dx = x^{r+1-p}\cdot u^{nq}\cdot\frac{n}{bp}u^{n-1}\,du.$$

Son olarak x^{r+1-p} *ifadesini* x^p *cinsinden yazalım:*

$$x^{r+1-p} = \left(x^p\right)^{\frac{r+1-p}{p}} = \left(x^p\right)^{\frac{r+1}{p}-1} = \left(\frac{u^n - a}{b}\right)^{m-1}.$$

$m \in \mathbb{Z}$ *olduğundan üs* $m-1$ *bir tam sayıdır ve bu ifade* u*'nun rasyonel bir fonksiyonudur. Ayrıca* $nq \in \mathbb{Z}$ *olduğundan* u^{nq} *da rasyoneldir. Demek ki integrandın tamamı* u*'nun rasyonel bir fonksiyonudur.*
Üçüncü hâl. $m := \dfrac{r+1}{p} + q \in \mathbb{Z}$ *olsun ve yine* n*,* q*'nun paydası olsun. Buradaki püf nokta, parantezin içinden* x^p*'yi dışarı almaktır:*

$$a + bx^p = x^p\,\left(a\,x^{-p} + b\right) \quad\Rightarrow\quad \left(a + bx^p\right)^q = x^{pq}\,\left(ax^{-p} + b\right)^q.$$

Böylece integrand

$$x^r\,\left(a + bx^p\right)^q = x^{r+pq}\,\left(ax^{-p} + b\right)^q$$

hâline gelir. Şimdi $ax^{-p} + b = u^n$ *değişimini yapalım; buradan*

$$x^{-p} = \frac{u^n - b}{a}$$

ve türev alarak $-a\,p\,x^{-p-1}dx = n\,u^{n-1}du$*, yani*

$$x^{-p-1}\,dx = -\frac{n}{ap}\,u^{n-1}\,du$$

buluruz. İntegrandı buna uyacak biçimde parçalayalım:

$$x^{r+pq}\,\left(ax^{-p} + b\right)^q\,dx = x^{r+pq+p+1}\cdot u^{nq}\cdot x^{-p-1}dx = x^{r+pq+p+1}\cdot u^{nq}\cdot\left(-\frac{n}{ap}\right)u^{n-1}du.$$

Kalan x *kuvvetini* x^{-p} *cinsinden yazalım:*

$$x^{r+pq+p+1} = \left(x^{-p}\right)^{-\frac{r+pq+p+1}{p}} = \left(x^{-p}\right)^{-\left(\frac{r+1}{p}+q+1\right)} = \left(\frac{u^n - b}{a}\right)^{-(m+1)}.$$

$m \in \mathbb{Z}$ *olduğundan üs yine bir tam sayıdır ve ifade rasyoneldir;* u^{nq} *da rasyoneldir. Böylece integrand* u*'nun rasyonel bir fonksiyonuna dönüşmüş olur.*
Son olarak değişimlerin meşruluğunu denetleyelim. Birinci hâlde $x = u^k$ *dönüşümü* $(0,\infty)$ *üzerinde kesin artandır ve türevi* $k\,u^{k-1}$ *orada sıfırdan farklıdır. İkinci hâlde* $p \neq 0$ *olduğundan* $x \mapsto x^p$*,* $b \neq 0$ *olduğundan* $x \mapsto a + bx^p$ *kesin monotondur;* $t \mapsto t^{1/n}$ *pozitif sayılarda kesin arttığından* $u = \left(a + bx^p\right)^{1/n}$ *de kesin monotondur. Türevi* $n\,u^{n-1}u'(x) = b\,p\,x^{p-1}$ *bağıntısından okunur: sağ taraf* $(0,\infty)$ *üzerinde sıfırdan farklı olduğundan* $u \neq 0$ *olan her noktada* $u'(x) \neq 0$*'dır. (*$u = 0$ *ancak* $a + bx^p = 0$ *noktasında olur; orada* $q < 0$ *ise integrand zaten tanımsızdır, bu tek nokta aralıktan çıkarılır.) Üçüncü hâl,* x^p *yerine* x^{-p} *ile aynıdır. Demek ki üç hâlde de değişken değiştirme meşrudur.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

! Üç koşul da sağlanmazsa

Çebişev, 1853'te bu üç koşulun yalnızca **yeterli** değil aynı zamanda **gerekli** olduğunu kanıtladı: p, q, r rasyonel sayıları için q, $\dfrac{r+1}{p}$ ve $\dfrac{r+1}{p}+q$ sayılarından hiçbiri tam sayı değilse,

$$\int x^r \left(a+bx^p\right)^q dx$$

integrali **elemanter fonksiyonlarla ifade edilemez** — yani sonucu polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, kökler, üstel, logaritmik, trigonometrik ve ters trigonometrik fonksiyonlar ile bunların sonlu bileşkeleriyle yazmak imkânsızdır. Bu, "henüz bir yol bulunamadı" demek değildir; olanaksızlığın kanıtıdır. Kanıt, elemanter fonksiyonların cebirsel yapısını inceleyen Liouville kuramına dayanır ve bu dersin kapsamı dışındadır.

Klasik bir örnek: $\displaystyle\int \sqrt{1+x^3}\,dx$ integralinde $r=0, p=3, q=\tfrac{1}{2}$'dir ve üç sayı sırasıyla $\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{6}$ olup hiçbiri tam sayı değildir. Kökün altında üçüncü ya da dördüncü dereceden, katlı kökü olmayan bir polinomun bulunduğu bu türden integrallere **eliptik integral** (elliptic integral) denir.

Şimdi üç hâlin her birini birer örnekte çalıştıralım.

Örnek 21.6 (Birinci Hâl: Tam Sayı Üs). $x>0$ için

$$I=\int \sqrt{x}\left(3+\sqrt[3]{x}\right)^{-1}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Önce integrali binom biçiminde yazalım:

$$I=\int x^{1/2}\left(3+x^{1/3}\right)^{-1}dx.$$

Buradan $r=\dfrac{1}{2}$, $p=\dfrac{1}{3}$, $q=-1$ okunur. $q=-1\in\mathbb{Z}$ olduğundan Teorem 21.2'nin **birinci hâli** uygulanır. r ve p'nin paydaları 2 ve 3'tür; dolayısıyla

$$k=\text{ekok}\,(2,3)=6,\qquad x=u^6,\qquad dx=6u^5\,du.$$

Bu değişimle $x^{1/2}=u^3$, $x^{1/3}=u^2$ olur:

$$I=\int \frac{u^3}{3+u^2}\cdot 6u^5\,du=6\int \frac{u^8}{u^2+3}\,du.$$

Rasyonel bir integrale ulaştık; payın derecesi paydanınkinden büyük olduğu için polinom bölmesi yapıyoruz. Doğrudan çarparak

$$\left(u^2+3\right)\left(u^6-3u^4+9u^2-27\right)=u^8-3u^6+9u^4-27u^2+3u^6-9u^4+27u^2-81=u^8-81$$

olduğunu görürüz. Demek ki

$$\frac{u^8}{u^2+3}=u^6-3u^4+9u^2-27+\frac{81}{u^2+3}.$$

Şimdi terim terim integralleyelim. Son terim için $\displaystyle\int\frac{du}{u^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}$ olduğunu kullanıyoruz:

$$I=6\left[\frac{u^7}{7}-\frac{3u^5}{5}+3u^3-27u+\frac{81}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

$\dfrac{81}{\sqrt{3}}=27\sqrt{3}$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$I = \frac{6u^7}{7} - \frac{18u^5}{5} + 18u^3 - 162u + 162\sqrt{3}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}} + C.$$

Geri dönüşte $u = x^{1/6}$ yazıyoruz; $u^7 = x^{7/6}$, $u^5 = x^{5/6}$, $u^3 = x^{1/2}$:

$$I = \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{18}{5}x^{5/6} + 18\sqrt{x} - 162\,x^{1/6} + 162\sqrt{3}\arctan\frac{x^{1/6}}{\sqrt{3}} + C.$$

Doğrulama. Sonucu u değişkeninde türetip zincir kuralını kullanmak en kısa yoldur. $u = x^{1/6}$ için $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{6}x^{-5/6} = \dfrac{1}{6u^5}$'tir. Yukarıdaki u'lu ifadenin u'ya göre türevi

$$6u^6 - 18u^4 + 54u^2 - 162 + 162\sqrt{3}\cdot\frac{1/\sqrt{3}}{1+\frac{u^2}{3}} = 6\left(u^6 - 3u^4 + 9u^2 - 27 + \frac{81}{u^2+3}\right) = \frac{6u^8}{u^2+3}$$

olur. Zincir kuralıyla

$$\frac{dI}{dx} = \frac{6u^8}{u^2+3}\cdot\frac{1}{6u^5} = \frac{u^3}{u^2+3} = \frac{x^{1/2}}{x^{1/3}+3} = \sqrt{x}\,\big(3+\sqrt[3]{x}\big)^{-1}. \qquad \checkmark$$

■

Örnek 21.7 (İkinci Hâl: Parantezin Kuvveti). $x > 0$ için

$$I = \int x^{-2/3}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Binom biçiminde yazalım:

$$I = \int x^{-2/3}\,\big(1+x^{1/3}\big)^{1/2}dx,$$

yani $r = -\dfrac{2}{3}$, $p = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{1}{2}$. Koşulları sırayla deneyelim. $q = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan birinci hâl uygulanmaz. İkinci hâli sınayalım:

$$\frac{r+1}{p} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 \in \mathbb{Z}. \qquad \checkmark$$

Demek ki **ikinci hâl** geçerlidir. $q = \frac{1}{2}$'nin paydası $n = 2$ olduğundan değişim

$$1 + x^{1/3} = u^2$$

olur. İki yanın türevini alalım:

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}\,dx = 2u\,du \quad\Rightarrow\quad x^{-2/3}\,dx = 6u\,du.$$

İntegrandın $x^{-2/3}dx$ parçası bir bütün olarak dönüşüyor; geriye kalan çarpan ise $\big(1+x^{1/3}\big)^{1/2} = u$'dur ($u > 0$ seçiyoruz). Böylece

$$I = \int u\cdot 6u\,du = 6\int u^2\,du = 2u^3 + C.$$

Geri dönüşte $u = \sqrt{1+x^{1/3}}$ yazıyoruz:

$$I = 2\,\big(1+x^{1/3}\big)^{3/2} + C = 2\sqrt{\big(1+\sqrt[3]{x}\big)^3} + C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. Zincir kuralıyla

$$\frac{d}{dx}\left[2\left(1+x^{1/3}\right)^{3/2}\right] = 2\cdot\frac{3}{2}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3} = x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2}. \qquad \checkmark$$

Bu, integrandın kendisidir.
■

Örnek 21.8 (Üçüncü Hâl: Parantezi Bölerek). $x>0$ için

$$I=\int \frac{dx}{x^4\left(1+x^2\right)^{1/2}}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Binom biçiminde yazalım:

$$I=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-1/2}dx,$$

yani $r=-4$, $p=2$, $q=-\dfrac{1}{2}$. Koşulları sırayla sınayalım:

$$q=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}, \qquad \frac{r+1}{p}=-\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}, \qquad \frac{r+1}{p}+q=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2\in\mathbb{Z}. \quad \checkmark$$

Demek ki **üçüncü hâl** geçerlidir. q'nun paydası $n=2$ olduğundan değişim

$$\frac{1+x^2}{x^2}=u^2, \qquad \text{yani} \qquad x^{-2}+1=u^2$$

olur. İki yanın türevini alalım:

$$-2x^{-3}\,dx = 2u\,du \quad\Rightarrow\quad x^{-3}\,dx=-u\,du,$$

ve değişimden doğrudan

$$x^{-2}=u^2-1$$

çıkar. Ayrıca $x>0$ olduğundan $\sqrt{1+x^2}=x\,u$'dur (gerçekten $u=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}>0$). Şimdi integrandı, $x^{-3}dx$ parçası bir bütün olarak görünecek biçimde parçalayalım:

$$x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-1/2}dx = x^{-4}\cdot\frac{1}{x\,u}\,dx = x^{-5}u^{-1}dx = x^{-2}\cdot u^{-1}\cdot\left(x^{-3}dx\right).$$

Her parçayı u cinsinden yazalım:

$$I=\int\left(u^2-1\right)\cdot u^{-1}\cdot\left(-u\,du\right)=\int\left(1-u^2\right)du = u-\frac{u^3}{3}+C.$$

Geri dönüşte $u=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ yazıyoruz:

$$I=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+C.$$

Ortak paydaya alıp $3x^2\sqrt{1+x^2}-\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}=\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}$ olduğunu kullanırsak sonuç tek kesirde de yazılabilir:

$$I=\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. $u(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ için, bölüm kuralıyla

$$u'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{x^2 - \left(\,1+x^2\,\right)}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Sonucumuz $F = u - \frac{u^3}{3}$ biçiminde olduğundan zincir kuralıyla

$$F'(x) = \left(\,1-u^2\,\right) u'(x) = \left(1 - \frac{1+x^2}{x^2}\right) \cdot \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}. \qquad \checkmark$$

İntegrandı bulduk. Bu hesapta x'in işaretini hiç kullanmadık; bulunan ifade $x<0$ aralığında da bir ilkel fonksiyondur.
■

21.6 Alıştırmalar

Alıştırma 21.1 (İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali Üzerine). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız; her birinde önce hangi yöntemin (doğrusal kesirli kök, Euler değişimi, belirsiz katsayılar, binom) uygun olduğunu belirtiniz. Bulduğunuz her sonucu türev alarak doğrulayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Ayrıca $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ integralinin Çebişev koşullarından hiçbirini sağlamadığını doğrulayınız.

Çözüm.
a) İntegrandda aynı $x+1$ ifadesinin 2 ve 3 dereceli kökleri geçiyor; Önerme 21.1 ve EKOK kuralı gereği $n = \text{ekok}\,(2,3) = 6$ alıyoruz:

$$x+1 = u^6, \qquad dx = 6u^5\,du, \qquad \sqrt{x+1} = u^3, \qquad \sqrt[3]{x+1} = u^2.$$

($x > -1$ alıyoruz, böylece $u>0$'dır.) İntegral

$$\int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du$$

hâline gelir. $u^3 = (u+1)\left(\,u^2-u+1\,\right) - 1$ olduğundan $\dfrac{u^3}{u+1} = u^2 - u + 1 - \dfrac{1}{u+1}$'dir ve

$$6\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln(u+1)\right] + C = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln(u+1) + C$$

bulunur. Geri dönüşte $u = \sqrt[6]{x+1}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right) + C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulama. u'ya göre türev $6u^2 - 6u + 6 - \dfrac{6}{u+1}$'dir. Ortak paydaya alırsak, $\left(u^2 - u + 1\right)(u+1) = u^3 + 1$ olduğundan bu ifade $\dfrac{6\left(u^3+1\right) - 6}{u+1} = \dfrac{6u^3}{u+1}$'e eşittir. $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{6u^5}$ olduğundan zincir kuralıyla türev

$$\frac{6u^3}{u+1}\cdot\frac{1}{6u^5} = \frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{1}{u^3+u^2} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

çıkar; integrandın kendisi.

b) Burada kökün içinde doğrusal kesirli bir ifade var; Önerme 21.1'te $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=1$ ve $ad-bc = 1+1 = 2 \neq 0$'dır. Değişim:

$$u = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad u^3 = \frac{x-1}{x+1}.$$

x'i çözelim: $u^3(x+1) = x-1$, yani $x\left(u^3-1\right) = -1-u^3$ ve $x = \dfrac{1+u^3}{1-u^3}$. Buradan $x+1 = \dfrac{2}{1-u^3}$, dolayısıyla $\dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{\left(1-u^3\right)^2}{4}$'tür. Türev alalım:

$$dx = \frac{3u^2\left(1-u^3\right) + 3u^2\left(1+u^3\right)}{\left(1-u^3\right)^2}\,du = \frac{6u^2}{\left(1-u^3\right)^2}\,du.$$

Her şeyi yerine koyalım:

$$\int \frac{\left(1-u^3\right)^2}{4}\cdot u\cdot\frac{6u^2}{\left(1-u^3\right)^2}\,du = \frac{6}{4}\int u^3\,du = \frac{3}{8}u^4 + C.$$

Sonuç:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{4/3} + C.$$

Doğrulama. $w = \dfrac{x-1}{x+1}$ dersek $w' = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$'dir. Zincir kuralıyla

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{8}w^{4/3}\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}w^{1/3}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{w^{1/3}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}. \checkmark$$

c) İntegrandda $\sqrt{x^2+x+1}$ geçiyor: bir Euler değişimi gerekli. Burada $a = 1 > 0$, $c = 1 > 0$ ve $\Delta = -3 < 0$'dır; birinci ya da ikinci değişim kullanılabilir. $\sqrt{c} = 1$ olduğu için en temiz hesabı veren **ikinci** değişimi seçelim: $\sqrt{x^2+x+1} = ux + 1$. Kare alırsak $x^2 + x = u^2x^2 + 2ux$; iki yanı $x \neq 0$ ile bölersek $x + 1 = u^2x + 2u$ ve buradan

$$x = \frac{2u-1}{1-u^2}, \qquad dx = \frac{2\left(1-u^2\right) - (2u-1)(-2u)}{\left(1-u^2\right)^2}\,du = \frac{2u^2-2u+2}{\left(1-u^2\right)^2}\,du.$$

Kökü de yazalım:

$$\sqrt{x^2+x+1} = ux + 1 = \frac{u(2u-1)}{1-u^2} + 1 = \frac{2u^2-u+1-u^2}{1-u^2} = \frac{u^2-u+1}{1-u^2}.$$

Böylece paydadaki çarpım

$$x\sqrt{x^2+x+1} = \frac{(2u-1)\left(u^2-u+1\right)}{\left(1-u^2\right)^2}$$

olur ve integral çarpıcı biçimde sadeleşir:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\left(1-u^2\right)^2}{(2u-1)\left(u^2-u+1\right)}\cdot\frac{2\left(u^2-u+1\right)}{\left(1-u^2\right)^2}\,du = \int \frac{2\,du}{2u-1} = \ln|\,2u-1\,| + C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Geri dönüşte $\sqrt{x^2+x+1} = ux+1$ eşitliğinden $u = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$ yazıyoruz:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right| + C.$$

Doğrulama. u değişkenindeki ilkel fonksiyon $\ln|\,2u-1\,|$'dir; u'ya göre türevi $\dfrac{2}{2u-1}$'dir. Değişimin kuruluşundan $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{2\,(\,u^2-u+1\,)}{(\,1-u^2)^2}$ olduğunu biliyoruz. Ters fonksiyonun türev kuralıyla (Teorem 4.2)

$$\frac{dI}{dx} = \frac{2}{2u-1}\cdot\frac{(\,1-u^2)^2}{2\,(\,u^2-u+1\,)} = \frac{(\,1-u^2)^2}{(2u-1)\,(\,u^2-u+1\,)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}},$$

çünkü yukarıda $x\sqrt{x^2+x+1} = \dfrac{(2u-1)\,(\,u^2-u+1\,)}{(\,1-u^2)^2}$ olduğunu bulmuştuk. ✓

d) İntegrand "polinom bölü karekök" biçimindedir; Teorem 21.1 doğrudan uygulanır. Burada $p_2(x) = x^2$ ve $X(x) = 1-x^2$ ($a=-1$, $b=0$, $c=1$, $X' = -2x$) olduğundan birinci dereceden bir $q_1(x) = Ax+B$ ve bir λ arıyoruz:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = (Ax+B)\sqrt{1-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Teoremdeki polinom özdeşliğini kuralım:

$$x^2 = A\,(\,1-x^2\,) + \frac{1}{2}(Ax+B)(-2x) = A - Ax^2 - Ax^2 - Bx = -2Ax^2 - Bx + A.$$

Katsayıları eşitleyelim: x^2 için $-2A = 1$, yani $A = -\tfrac{1}{2}$; x için $B = 0$; sabit terim için $A+\lambda = 0$, yani $\lambda = \tfrac{1}{2}$. Kalan integral temeldir. Sonuç:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C, \qquad |\,x\,| < 1.$$

Doğrulama. Çarpım kuralıyla

$$\frac{d}{dx}\Big(-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\Big) = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\,(\,1-x^2\,)+x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

ve Teorem 5.5 gereği $\dfrac{d}{dx}\big(\tfrac{1}{2}\arcsin x\big) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$'dir. Toplarsak

$$\frac{2x^2-1+1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$ ✓

e) Binom biçiminde $\displaystyle\int x^{-2}\,(\,1+x^2)^{-1/2}dx$, yani $r=-2$, $p=2$, $q=-\dfrac{1}{2}$. Koşulları sınayalım:

$$q = -\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}, \qquad \frac{r+1}{p} = -\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}, \qquad \frac{r+1}{p}+q = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -1\in\mathbb{Z}.$$

Demek ki **üçüncü hâl** geçerli. q'nun paydası $n=2$ olduğundan değişim $x^{-2}+1 = u^2$'dir; buradan

$$-2x^{-3}dx = 2u\,du \quad\Rightarrow\quad x^{-3}dx = -u\,du,$$

ve $x>0$ için $\sqrt{1+x^2} = xu$'dur. İntegrandı $x^{-3}dx$ görünecek biçimde parçalayalım:

$$x^{-2}\,(\,1+x^2)^{-1/2}dx = x^{-2}\cdot\frac{1}{xu}\,dx = u^{-1}\,(\,x^{-3}dx\,) = u^{-1}\,(\,-u\,du\,) = -\,du.$$

O hâlde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -u + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Doğrulama. Bölüm kuralıyla

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = -\frac{x^2 - \left(1+x^2\right)}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}. \checkmark$$

Şimdi ikinci soruya bakalım: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int x^0 \left(1+x^4\right)^{-1/2} dx$ integralinde $r=0$, $p=4$, $q=-\frac{1}{2}$'dir ve

$$q = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \qquad \frac{r+1}{p} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}, \qquad \frac{r+1}{p} + q = -\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$$

olur. Üç koşuldan hiçbiri sağlanmıyor; Çebişev'in teoremi gereği bu integral hiçbir elemanter fonksiyonla ifade edilemez.
■

Köklü integrandları rasyonelleştirmenin yollarını gördük; şimdi sıra, integral hesabının bir başka büyük ailesindedir. Trigonometrik fonksiyonların kuvvetleri ve çarpımları da uygun özdeşlikler ve değişimlerle — özellikle de her trigonometrik integrandı bir rasyonel integrale çeviren evrensel bir değişimle — hesaplanabilir hâle gelir: Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali.

 CC BY-NC-SA 4.0

22. Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

Bir önceki bölümde, İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali başlığı altında köklü ifadeleri uygun değişken değiştirmelerle rasyonel biçime indirgemeyi öğrendik. Oradaki yöntemin ruhu şuydu: integral almayı gerçekten bildiğimiz **tek** bir sınıf vardır — rasyonel fonksiyonlar — ve öteki bütün sınıflarla baş etmenin yolu, onları bu sınıfa taşıyan bir değişken değiştirme bulmaktır.

Şimdi aynı stratejiyi trigonometrik fonksiyonlara uygulayacağız. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ve bunların kuvvetlerinden kurulu ifadeler ilk bakışta çok çeşitli görünür; oysa hepsinin altında iki basit gerçek yatar. Birincisi, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliği sayesinde çift kuvvetleri tek bir değişkenin polinomuna dönüştürebiliriz. İkincisi, $(\sin x)' = \cos x$ ve $(\cos x)' = -\sin x$ olduğundan (Teorem 5.4), üssü **tek** olan bir çarpandan ayrılan tek bir $\sin x$ ya da $\cos x$ çarpanı du rolünü üstlenebilir. Bölümün ilk yarısı bu iki gözlemin sistematik kullanımıdır.

İkinci yarıda daha güçlü bir araç kuruyoruz: **Weierstrass değişimi** olarak bilinen $u = \tan(x/2)$ dönüşümü. Bu dönüşüm $\sin x$ ile $\cos x$'i aynı anda u'nun rasyonel fonksiyonlarına çevirir; dolayısıyla bu ikisinin rasyonel bir ifadesi olan **her** integrali rasyonel fonksiyon integraline indirger. Yöntem her zaman işler; bedeli çoğu kez gereğinden karmaşık bir rasyonel fonksiyonla uğraşmaktır. Bu yüzden önce özel yöntemleri, sonra genel yöntemi öğreniyoruz.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: yarım açı (derece düşürme) formülleriyle çift kuvvetlerin integralini; $\int \sin^n x\,dx$ ve $\int \cos^n x\,dx$ için **indirgeme formüllerini** ve bunların kısmi integrasyonla ispatını; $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ ile $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ biçimindeki integrallerin kurallarını; $\int \sec x\,dx$ ve $\int \csc x\,dx$'i; Weierstrass değişimini ve türetimini; çarpımı toplama çeviren formülleri; son olarak hiperbolik fonksiyonların integrallerini ve yarım argüman değişimi $u = \tanh(x/2)$'yi.

22.1 Çift Kuvvetler ve Derece Düşürme

$\int \sin^2 x\,dx$ integralini doğrudan hesaplamaya kalkışırsak takılırız: $\sin^2 x$'in ilkeli, temel fonksiyonların bilinen türev tablosunda görünmez. Çözüm, integrali almadan önce **integrandın derecesini düşürmektir.** Bunu sağlayan özdeşlikler, iki kat açı formüllerinin yeniden düzenlenmiş hâlleridir.

Önerme 22.1 (Yarım Açı (Derece Düşürme) Formülleri). *Her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Bu üç özdeşlik, iki kat açı formüllerinden doğrudan çıkar: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ *eşitliğinde* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ *yazılırsa* $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$*, buradan birinci formül;* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ *yazılırsa* $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$*, buradan ikinci formül elde edilir. Üçüncüsü* $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ *eşitliğinin ikiye bölünmüşüdür.*

Bu formüllerin sağladığı şey basittir: **karesi alınmış bir trigonometrik fonksiyon, daha büyük bir açının birinci dereceden fonksiyonuna dönüşür** ve birinci dereceden fonksiyonların integralini biliyoruz. Numara gerekirse art arda uygulanır; her uygulamada derece yarıya iner, açı ikiye katlanır.

Örnek 22.1 (Sinüs ve Kosinüsün Çift Kuvvetleri). Aşağıdaki integralleri hesaplayalım:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \cos^2 x\,dx, \qquad \int \sin^4 x\,dx.$$

Çözüm.
Birinci integral. Önerme 22.1 gereği $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ yazalım. İntegral lineer olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Burada $\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2}$ eşitliğini kullandık; bu, $u = 2x$ değişken değiştirmesinden ya da doğrudan zincir kuralından (Teorem 4.1) görülür. Sonucu **türev alarak doğrulayalım:**

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{2\cos 2x}{4} = \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x. \checkmark$$

İkinci integral. Bu kez $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ kullanılır:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Doğrulama: $\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)' = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} = \cos^2 x$. ✓ İki sonucu toplarsak $\int(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = x + C$ çıkar; bu, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ile uyumludur. Böyle küçük tutarlılık denetimleri, işaret hatalarını yakalamanın en ucuz yoludur.

Üçüncü integral. $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ yazıp derece düşürmeyi **iki kez** uygulayacağız. Önce

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}.$$

Sağ tarafta hâlâ bir kare var: $\cos^2 2x$. Derece düşürme formülünü bu kez $2x$ açısına uygulayalım, yani $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ özdeşliğinde $t = 2x$ alalım; $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ olur. Yerine koyalım:

$$\sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}.$$

Artık integrandın her terimi birinci derecedendir:

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 4x}{4} + C = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}\right)' = \frac{3}{8} - \frac{2\cos 2x}{4} + \frac{4\cos 4x}{32} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8} = \sin^4 x. \checkmark$$

■

i Derece düşürmenin bedeli

Derece düşürme her adımda kuvveti yarıya indirir, ama açıyı ikiye katlar: $\sin^8 x$ için üç adım gerekir ve sonuçta x, $\sin 2x$, $\sin 4x$, $\sin 8x$ terimleri belirir. Bir sonraki alt bölümdeki **indirgeme formülü** ise kuvveti ikişer düşürür ve açıyı hiç değiştirmez. İki yöntem de doğrudur; hangisinin kısa olduğu soruya göre değişir.

22.2 İndirgeme Formülleri

$\int \sin^n x\,dx$ integralini n'in her değeri için ayrı hesaplamak yerine, n'inci integrali $(n-2)$'inciye bağlayan bir **indirgeme formülü** (reduction formula) kurmak çok daha ekonomiktir: n çift ise $\int dx = x$'e, tek ise $\int \sin x\,dx = -\cos x$'e kadar inmek yeter. Aracımız kısmi integrasyondur.

Teorem 22.1 (Sinüsün Kuvvetleri için İndirgeme Formülü). *Her $n \geq 2$ tam sayısı için, $\mathbb{R}$ üzerinde*

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$I_n = \int \sin^n x\,dx$ yazalım. Amacımız I_n'i I_{n-2} cinsinden ifade etmektir. İntegrandı, bir çarpanı kolayca integrallenecek biçimde ayıralım:

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx.$$

Kısmi integrasyonu

$$u = \sin^{n-1} x, \qquad dv = \sin x\,dx$$

seçimiyle uygulayacağız. O hâlde $v = -\cos x$'tir ve $n-1 \geq 1$ olduğundan zincir kuralı ile

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx.$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ formülü gereği

$$I_n = \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Şimdi sağdaki integralde $\cos^2 x$ yerine $1 - \sin^2 x$ yazalım; böylece her şey yeniden sinüs kuvvetleri cinsinden kalır:

$$\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = \int \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx = \int \sin^{n-2} x\,dx - \int \sin^n x\,dx = I_{n-2} - I_n.$$

Bu ayrıştırma meşrudur: sağdaki iki integralin ikisi de vardır, çünkü integrandları $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Yerine koyarsak $I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ olur. Aradığımız I_n hem solda hem sağda göründü; bu, kısmi integrasyonun tipik ve çok kullanışlı bir davranışıdır. $(n-1)I_n$ terimini sola taşıyalım:

$$I_n + (n-1)I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}, \qquad \text{yani} \qquad n\,I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}.$$

$n \geq 2 > 0$ olduğundan n'e bölebiliriz:

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Bu, istenen formüldür; sağdaki I_{n-2} zaten bir ilkel ailesini temsil ettiğinden ayrıca sabit eklemeye gerek yoktur.
Sonucu türev alarak da denetleyelim: sağ tarafın türevi $-\frac{1}{n}\left[\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x\,\right] + \frac{n-1}{n}\sin^{n-2} x$'tir ve burada $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ yazılırsa $\sin^{n-2} x$ terimleri götürülür, geriye

$$\frac{n-1}{n}\sin^n x + \frac{1}{n}\sin^n x = \sin^n x \checkmark$$

kalır.
■

Kosinüs için de tamamen benzer bir formül geçerlidir; ancak "benzer" demekle yetinmeyip ispatı eksiksiz yazalım, çünkü işaretler bir yerde sinüstekinden farklı gelişir.

Teorem 22.2 (Kosinüsün Kuvvetleri için İndirgeme Formülü). *Her $n \geq 2$ tam sayısı için, $\mathbb{R}$ üzerinde*

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

İspat.
$J_n = \int \cos^n x\,dx$ diyelim ve integrandı $J_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x\,dx$ biçiminde ayıralım. Kısmi integrasyonda

$$u = \cos^{n-1} x, \qquad dv = \cos x\,dx$$

 CC BY-NC-SA 4.0

alalım. Bu seçimle $v = \sin x$ *ve*

$$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\, dx$$

olur; buradaki eksi işareti $(\cos x)' = -\sin x$ *olmasından gelir ve sinüs durumundaki tabloyu tersine çevirir. Kısmi integrasyon:*

$$J_n = \cos^{n-1} x \sin x - \int \sin x \cdot \big(-(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\big)\, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx.$$

Görüldüğü gibi eksi işaretlerinden ikisi birbirini götürdü. Şimdi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ *yazalım:*

$$\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx = \int \cos^{n-2} x\, dx - \int \cos^n x\, dx = J_{n-2} - J_n.$$

Böylece

$$J_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n \quad \Rightarrow \quad n\,J_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)J_{n-2},$$

ve n*'e bölünce iddia edilen formül çıkar.*
Türevle doğrulayalım: sağ tarafın türevi $\frac{1}{n}\big[-(n-1)\cos^{n-2} x \sin^2 x + \cos^n x\big] + \frac{n-1}{n}\cos^{n-2} x$*'tir ve* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ *yazılınca* $\cos^{n-2} x$ *terimleri götürülüp*

$$\frac{n-1}{n}\cos^n x + \frac{1}{n}\cos^n x = \cos^n x \checkmark$$

kalır.
■

İki formülü karşılaştırmakta yarar var. Sinüs formülünde ilk terim $-\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x$, kosinüs formülünde ise $+\frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x$'tir: her ikisinde de "kuvveti bir azalmış fonksiyon çarpı ötekisi" görünür, yalnızca işaret değişir; kesirli katsayı $\frac{n-1}{n}$ ise ikisinde de aynıdır.
Bir örnek üzerinde çalıştıralım: $n = 4$ için sinüs formülü

$$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3x}{8} - \frac{3\sin 2x}{16} + C$$

verir. Bu, Örnek 22.1'nde bulduğumuz $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$ ifadesinden farklı görünüyor; oysa ikisi de aynı fonksiyonun ilkeli olduğundan Sonuç 8.2 gereği en çok bir sabitle ayrılırlar — burada o sabit sıfırdır. Gerçekten

$$\sin^3 x \cos x = \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8}$$

olduğundan $-\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x = -\frac{\sin 2x}{16} + \frac{\sin 4x}{32}$ olur ve bu terim $-\frac{3\sin 2x}{16}$ ile toplanınca $-\frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$ verir: iki sonuç birebir aynıdır.

22.3 Sinüs ve Kosinüs Kuvvetlerinin Çarpımı

Şimdi $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ biçimindeki integrallere geçiyoruz ($m, n \geq 0$ tam sayı). Karar kuralı tek bir soruya bakar: **üslerden biri tek mi?**

Önerme 22.2 (Sinüs Kosinüs Çarpımı için Kural). $m, n \geq 0$ *tam sayıları verilsin ve* $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ *integrali istensin.*

1. ***n tek ise.*** *Kosinüsten bir çarpan ayırın:* $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$*. Geriye kalan* $\cos^{n-1} x$ *çift kuvvet olduğundan* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ *ile sinüs cinsinden yazılır. Ardından* $u = \sin x$*,* $du = \cos x\, dx$ *değişimi integrali bir polinom integraline çevirir.*

2. ***m tek ise.*** *Sinüsten bir çarpan ayırın:* $\sin^m x = \sin^{m-1} x \cdot \sin x$. *Kalan* $\sin^{m-1} x$ *çift kuvveti* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ *ile kosinüs cinsinden yazılır ve* $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$ *değişimi yine bir polinom integrali verir.*
3. ***m ve n'in ikisi de çift ise.*** *Tek çarpan ayrılamaz; bu durumda Önerme 22.1 ile derece düşürülür ve gerekirse işlem yinelenir.*

İkisi de tek ise iki kuraldan hangisi seçilirse seçilsin sonuç doğrudur; genellikle üssü küçük olan çarpandan ayırmak hesabı kısaltır.

İspat.
n tek olsun, $n = 2k+1$ yazalım ($k \geq 0$). O hâlde

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^m x\,(\cos^2 x)^k \cos x = \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k \cos x.$$

$u = \sin x$ dönüşümü türevlenebilirdir ve $du = \cos x\,dx$'tir; yani sağdaki son çarpan tam olarak du'dur. Değişken değiştirme kuralı gereği

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int u^m (1-u^2)^k\,du$$

olur; sağdaki integrand u'nun bir polinomudur, binom açılımıyla terim terim integrallenir ve sonunda $u = \sin x$ geri konur.
m tek ise, $m = 2j+1$ için

$$\sin^m x \cos^n x = (\sin^2 x)^j \cos^n x \sin x = (1-\cos^2 x)^j \cos^n x \sin x$$

olur ve $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$ ile

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\int (1-u^2)^j u^n\,du$$

elde edilir; yine bir polinom integrali.
Üçüncü durumda $m = 2j$, $n = 2k$ olsun. Önerme 22.1 gereği

$$\sin^{2j} x \cos^{2k} x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^j \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k$$

yazılır. Sağ taraf açıldığında $\cos 2x$'in kuvvetlerinin bir lineer birleşimi çıkar; tek kuvvetler birinci kuralla (açı $2x$ olarak), çift kuvvetler derece düşürme yinelenerek hesaplanır. Her adımda toplam derece kesin azaldığından süreç sonlu adımda biter.
■

Örnek 22.2 (Sinüs Kosinüs Çarpımlarının İntegrali). Aşağıdaki üç integrali hesaplayalım:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx, \qquad \int \sin^3 x \cos^4 x\,dx, \qquad \int \sin^2 x \cos^2 x\,dx.$$

Çözüm.
Birinci integral. Burada $n = 3$ tektir; Önerme 22.2'nin birinci maddesini uygularız. Kosinüsten bir çarpan ayıralım: $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$. Böylece

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\cos x\,dx.$$

$u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$ dersek

$$\int u^2(1-u^2)\,du = \int (u^2 - u^4)\,du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C.$$

Geri koyarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\right)' = \sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x = \sin^2 x \cos x(1 - \sin^2 x) = \sin^2 x \cos^3 x. \checkmark$$

İkinci integral. Bu kez $m = 3$ tek, $n = 4$ çifttir; ikinci maddeyi uygularız. Sinüsten bir çarpan ayıralım: $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x)\sin x$. $u = \cos x$, $du = -\sin x\, dx$ ile

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x \sin x\, dx = -\int (1 - u^2)u^4\, du = \int (u^6 - u^4)\, du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C.$$

Geri koyarsak

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5}\right)' = -\cos^6 x \sin x + \cos^4 x \sin x = \cos^4 x \sin x\,(1 - \cos^2 x) = \cos^4 x \sin^3 x. \checkmark$$

Üçüncü integral. Şimdi iki üs de çifttir; tek çarpan ayrılamaz. En hızlı yol önce $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ özdeşliğini, sonra $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ özdeşliğini $t = 2x$ için kullanmaktır:

$$\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 4x}{8}.$$

Buradan

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x)\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}\right)' = \frac{1}{8} - \frac{4\cos 4x}{32} = \frac{1 - \cos 4x}{8} = \frac{\sin^2 2x}{4} = \sin^2 x \cos^2 x. \checkmark$$

■

22.4 Tanjant ve Sekant Kuvvetlerinin Çarpımı

$\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ biçimindeki integraller de aynı mantıkla ele alınır; bu kez kullandığımız özdeşlik $\sin^2 + \cos^2 = 1$ yerine onun $\cos^2 x$'e bölünmüş hâli olan $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$'tir. Türev tablosundaki (Teorem 5.4) $(\tan x)' = \sec^2 x$ ve $(\sec x)' = \sec x \tan x$ eşitlikleri hangi çarpanın du rolü üstlenebileceğini belirler ve kuralı doğrudan doğurur.

Önerme 22.3 (Tanjant Sekant Çarpımı için Kural). *$m, n \geq 0$ tam sayıları verilsin ve $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ integrali, $\cos x \neq 0$ olan bir aralıkta istensin.*

1. ***n çift ve $n \geq 2$ ise.*** *İntegrandan $\sec^2 x\, dx$ çarpanını ayırın: $\sec^n x = \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x$. Kalan $\sec^{n-2} x$ çift kuvvet olduğundan $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ile tanjant cinsinden yazılır. $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$ değişimi integrali bir polinom integraline çevirir.*
2. ***m tek ise.*** *İntegrandan $\sec x \tan x\, dx$ çarpanını ayırın: $\tan^m x \sec^n x = \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \cdot (\sec x \tan x)$. Kalan $\tan^{m-1} x$ çift kuvvet olduğundan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ile sekant cinsinden yazılır.*

$u = \sec x$, $du = \sec x \tan x\, dx$ *değişimi yine bir polinom integrali verir. (Bu maddede* $n \geq 1$ *olmalıdır;* $n = 0$ *ise ayrılacak bir* $\sec x$ *çarpanı yoktur.)*

Her iki durumda da ayırdığımız çarpan tam olarak du*'dur ve geri kalan kısım tek bir değişkenin polinomuna dönüşür; iki koşuldan biri sağlanıyorsa integral tamamen cebirsel bir hesaba iner.*

⚠ Kalan durumlar

m çift **ve** n tek ise ($\int \sec x\, dx$, $\int \sec^3 x\, dx$, $\int \tan^2 x \sec x\, dx$ gibi) yukarıdaki iki kuralın hiçbiri uygulanamaz; bu durumda $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ile her şey sekant kuvvetlerine çevrilir ve kısmi integrasyonla inilen zincirin son halkası $\int \sec x\, dx$ olur. $n = 0$ durumunda ($\int \tan^m x\, dx$) da iki kural işlemez — birincisi $n \geq 2$, ikincisi $n \geq 1$ ister; burada $\tan^m x = \tan^{m-2} x(\sec^2 x - 1)$ yazılarak üs ikişer düşürülür ve zincir m tek ise $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$ ile, m çift ise $\int dx = x + C$ ile kapanır.

Örnek 22.3 (Tanjant Sekant İntegralleri). Aşağıdaki iki integrali hesaplayalım:

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx, \qquad \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx.$$

Çözüm.
Birinci integral. Burada $n = 3$ tek olduğundan birinci kural uygulanamaz; $m = 3$ tek olduğu için Önerme 22.3'nin **ikinci** maddesini kullanacağız. İntegrandan $\sec x \tan x\, dx$ ayırıp kalan $\tan^2 x$ çift kuvvetini $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ile sekanta çevirelim:

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \cdot \sec x \tan x\, dx.$$

$u = \sec x$, $du = \sec x \tan x\, dx$ dersek

$$\int (u^2 - 1)u^2\, du = \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C,$$

yani

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C.$$

Doğrulayalım. $(\sec^5 x)' = 5\sec^4 x \cdot (\sec x)' = 5\sec^4 x \sec x \tan x = 5\sec^5 x \tan x$ ve benzer biçimde $(\sec^3 x)' = 3\sec^3 x \tan x$'tir. O hâlde

$$\left(\frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3}\right)' = \sec^5 x \tan x - \sec^3 x \tan x = \sec^3 x \tan x(\sec^2 x - 1) = \sec^3 x \tan x \cdot \tan^2 x = \tan^3 x \sec^3 x. \checkmark$$

İkinci integral. Burada $n = 2$ çifttir; birinci maddeyi uygularız. $\sec^2 x\, dx$ çarpanını ayırdığımızda geriye yalnızca $\tan^4 x$ kalır, dolayısıyla ek bir dönüşüme gerek yoktur. $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$ ile

$$\int u^4\, du = \frac{u^5}{5} + C \quad \Rightarrow \quad \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx = \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\tan^5 x}{5}\right)' = \tan^4 x \cdot (\tan x)' = \tan^4 x \sec^2 x. \checkmark$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

22.5 Sekant ve Kosekantın İntegrali

$\int \sec x\,dx$, kuralların doğrudan uygulanamadığı ilk ciddi örnektir. Aşağıda iki farklı yol izleyeceğiz: birincisi kısa ve akıllıcadır ama nereden geldiği ilk bakışta belirsizdir, ikincisi daha uzun ama tamamen sistematiktir. Sonuçlar farklı görünür; **denk olduklarını açıkça göstereceğiz.**

Örnek 22.4 (Sekantın İntegrali: İki Yöntem). $\cos x \neq 0$ olan bir aralıkta $\displaystyle\int \sec x\,dx$ integralini iki ayrı yöntemle hesaplayalım, sonuçların denkliğini gösterelim ve aynı fikirle $\displaystyle\int \csc x\,dx$'i bulalım.

Çözüm.
Yöntem 1 — cebirsel numara. İntegrandı $\sec x + \tan x$ ile çarpıp bölelim ($\sec x + \tan x \neq 0$ olan bir aralıkta çalışıyoruz):

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx.$$

Numaranın sırrı şudur: paydanın türevi $(\sec x + \tan x)' = \sec x \tan x + \sec^2 x$ olup tam olarak paya eşittir. O hâlde $u = \sec x + \tan x$ dersek

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|\,u\,| + C = \ln|\sec x + \tan x\,| + C.$$

Doğrulayalım:

$$\big(\ln|\sec x + \tan x\,|\big)' = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x. \checkmark$$

Yöntem 2 — rasyonel değişime indirgeme. Bu kez hiçbir numaraya başvurmayalım: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ yazıp pay ve paydayı $\cos x$ ile çarpalım, böylece payda yalnızca $\sin x$ cinsinden kalsın:

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1 - \sin^2 x}.$$

Artık $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$ değişimi doğrudan işler:

$$\int \frac{du}{1 - u^2}.$$

Bu bir rasyonel integraldir; Rasyonel Fonksiyonların İntegrali bölümündeki basit kesirlere ayırma yöntemiyle $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)$ yazılır (sağ tarafı ortak paydada topladığımızda pay $\frac{1}{2}\,[\,(1-u) + (1+u)\,] = 1$ çıkar). Buradan

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2}\Big(\ln|\,1+u\,| - \ln|\,1-u\,|\Big) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C,$$

yani

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

İki sonucun denkliği. İki yöntem

$$F_1(x) = \ln|\sec x + \tan x\,| \qquad \text{ve} \qquad F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$

fonksiyonlarını verdi. Bunlar aynı fonksiyonun ilkelleri olduğundan Sonuç 8.2 gereği en kötü ihtimalle bir sabitle ayrılırlar; ama aslında **birbirine eşittirler.** Gösterelim. Önce F_1'i tek bir kesir olarak yazalım:

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x}{\cos x} \quad\Rightarrow\quad F_1(x) = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi F_2'de logaritmanın argümanının pay ve paydasını $1+\sin x$ ile çarpalım. Seçilen aralıkta $\cos x \neq 0$ olduğundan $\sin x \neq \pm 1$, yani $1+\sin x \neq 0$'dır; işlem meşrudur:

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} = \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2.$$

Mutlak değer alıp logaritma özelliklerini kullanalım:

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| = F_1(x).$$

Demek ki iki sonuç yalnızca "denk" değil, **birebir aynıdır**; aradaki sabit sıfırdır. Farklı görünmelerinin tek nedeni, aynı ifadenin iki ayrı cebirsel kılığa girmiş olmasıdır.

Kosekantın integrali. Aynı yol kosekant için de yürür: $\csc x$'i $\csc x - \cot x$ ile çarpıp bölelim; çünkü $(\csc x - \cot x)' = \csc^2 x - \csc x \cot x$ olup bu, $\csc x(\csc x - \cot x)$'e eşittir. $u = \csc x - \cot x$ ile

$$\int \csc x\,dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x\cot x}{\csc x - \cot x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

Bu sonucun çok daha derli toplu bir yazılışı vardır:

$$\csc x - \cot x = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad \int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Doğrulayalım; zincir kuralı ve $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ ile

$$\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)' = \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} = \csc x. \checkmark$$

Buradaki $\tan\frac{x}{2}$ tesadüf değildir; bir sonraki alt bölümdeki genel yöntemin habercisidir.
■

22.6 Weierstrass Yarım Açı Tanjantı Değişimi

Şimdiye kadarki yöntemler belirli kalıplara uyan integraller içindi. Peki $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$ gibi hiçbir kalıba uymayan bir integralle ne yapacağız? Cevap, $\sin x$ ile $\cos x$'i **aynı anda** rasyonelleştiren bir değişimdir: yarım açının tanjantı.

Teorem 22.3 (Weierstrass Değişimi). *$x \in (-\pi, \pi)$ olsun ve*

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

konsun. O hâlde u, $(-\pi,\pi)$ aralığını $\mathbb{R}$ üzerine birebir örten olarak resmeder ve

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Sonuç olarak, R iki değişkenli bir rasyonel fonksiyon olmak üzere

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2\,du}{1+u^2}$$

olur ve sağ taraftaki integrandın kendisi u'nun bir rasyonel fonksiyonudur.

İspat.
$x \in (-\pi,\pi)$ iken $\frac{x}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$'dir. Tanjant bu aralıkta kesin artandır (Tanım 1.1) ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$'dir; dolayısıyla $x \mapsto \tan\frac{x}{2}$ dönüşümü $(-\pi,\pi)$ ile $\mathbb{R}$ arasında birebir örtendir (Teorem 1.1) ve tersi $x = 2\arctan u$'dur.
Diferansiyel. *Teorem 5.5 gereği $(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}$ olduğundan $x = 2\arctan u$ eşitliğinden*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}, \qquad \text{yani} \qquad dx = \frac{2\,du}{1+u^2}.$$

Sinüs. *İki kat açı formülünden başlayalım;* $\frac{x}{2}$ *açısında* $\cos\frac{x}{2} \neq 0$*'dır:*

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}.$$

Şimdi $\cos^2 t = \frac{1}{\sec^2 t} = \frac{1}{1+\tan^2 t}$ *özdeşliğini* $t = \frac{x}{2}$ *için kullanalım:*

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2} \quad\Rightarrow\quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}.$$

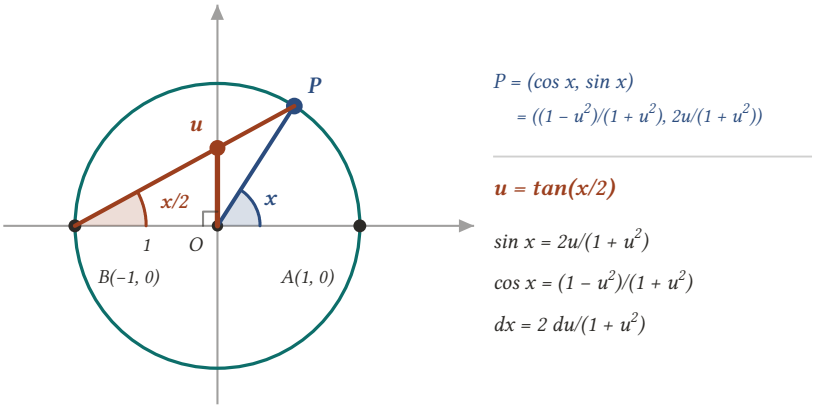
Kosinüs. *Aynı fikri kosinüsün iki kat açı formülüne uygulayalım:*

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Tanjant. $\cos x \neq 0$ *olan noktalarda iki sonucun oranını alalım:*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2u/(1+u^2)}{(1-u^2)/(1+u^2)} = \frac{2u}{1-u^2}.$$

İntegralin dönüşümü. *Rasyonel fonksiyonların toplamı, çarpımı ve bölümü rasyonel olduğundan,* R*'nin argümanlarına yukarıdaki iki rasyonel ifade konduğunda sonuç yine* u*'nun rasyonel bir fonksiyonudur;* $\frac{2}{1+u^2}$ *çarpanı da rasyonelliği bozmaz. Dönüşüm* $(-\pi,\pi)$ *üzerinde sürekli türevlenebilir ve birebir olduğundan değişken değiştirme kuralı uygulanabilir ve iddia edilen eşitlik çıkar.*
Bulunan ilkel $(-\pi,\pi)$ *aralığında geçerlidir;* sin *ve* cos *fonksiyonları* 2π *periyotlu olduğundan aynı formül her* $k \in \mathbb{Z}$ *için* $\big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big)$ *aralığında ayrı ayrı, sabitleri birbirinden bağımsız seçilerek kullanılır.*



Şekil 22.1: Weierstrass değişiminin resmi. Merkezdeki x *açısı* AP *yayını gördüğünden, aynı yayı gören* B*(−1, 0) köşesindeki çevre açı onun yarısı,* x*/2'dir; dolayısıyla* B*'den* P*'ye çizilen kirişin eğimi tan(*x*/2)'dir.* B *ile* y *ekseni arasındaki yatay uzaklık tam olarak 1 olduğu için bu eğim, kirişin* y *eksenini kestiği yükseklik eşittir: turuncu parçanın boyu* u *= tan(*x*/2)'dir.* x*, (−π, π) aralığında dolaşırken* u *bütün gerçel sayıları tarar ve* P *= (cos* x*, sin* x*) noktasının koordinatları* u*'nun rasyonel ifadeleri olarak okunur; sağdaki üç eşitlik de buradan çıkar.*

■

Ne zaman kullanmalı

Weierstrass değişimi **her zaman** çalışır, ama çoğu kez gereğinden ağır bir rasyonel fonksiyon üretir. Pratik kural: integrand özel kalıplardan birine uyuyorsa önce onu deneyin, hiçbirine uymuyorsa $u=\tan\frac{x}{2}$'ye başvurun. Örneğin $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$ Weierstrass ile de çözülür, fakat çıkan rasyonel fonksiyonun ayrıştırılması Örnek 22.2'ndeki üç satırlık hesaptan çok daha uzundur.

Örnek 22.5 (Weierstrass Değişimiyle Bir Hesap). $2\sin x-3\cos x\neq 0$ olan bir aralıkta

$$I=\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x}$$

integralini hesaplayalım.

Çözüm.
İntegrand $\sin x$ ile $\cos x$'in rasyonel bir ifadesidir ve hiçbir özel kalıba uymaz; Teorem 22.3'ni uygulayalım. $u=\tan\frac{x}{2}$ diyelim:

$$2\sin x-3\cos x=2\cdot\frac{2u}{1+u^2}-3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}=\frac{4u-3+3u^2}{1+u^2}=\frac{3u^2+4u-3}{1+u^2}.$$

$dx=\frac{2\,du}{1+u^2}$ olduğundan

$$I=\int \frac{\frac{2\,du}{1+u^2}}{\frac{3u^2+4u-3}{1+u^2}}=\int\frac{2\,du}{3u^2+4u-3}.$$

Görüldüğü gibi $1+u^2$ çarpanları sadeleşti; bu, paydası birinci dereceden trigonometrik olan integrallerde tipik davranıştır. Geriye ikinci dereceden bir paydanın integrali kaldı.
Paydayı çarpanlarına ayıralım. $3u^2+4u-3=0$ denkleminin diskriminantı $\Delta=16+36=52>0$'dır; kökler $u_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{52}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$ olur. $u_1=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$, $u_2=\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ diyelim; o hâlde $3u^2+4u-3=3(u-u_1)(u-u_2)$ ve $u_1-u_2=\frac{2\sqrt{13}}{3}$'tür.
Basit kesirlere ayıralım. Payda iki farklı reel kök verdiğinden

$$\frac{2}{3(u-u_1)(u-u_2)}=\frac{A}{u-u_1}+\frac{B}{u-u_2}$$

yazılır. Paydaları temizleyelim: $2=3A(u-u_2)+3B(u-u_1)$. $u=u_1$ koyarsak $2=3A(u_1-u_2)$, yani $A=\frac{2}{3(u_1-u_2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$; $u=u_2$ koyarsak $B=-\frac{1}{\sqrt{13}}$ çıkar.
İntegralleyelim.

$$I=\frac{1}{\sqrt{13}}\int\left(\frac{1}{u-u_1}-\frac{1}{u-u_2}\right)du=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\ln|\,u-u_1\,|-\ln|\,u-u_2\,|\right)+C=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{u-u_1}{u-u_2}\right|+C.$$

Kökleri yerine koyup pay ve paydayı 3 ile çarparak sadeleştirelim:

$$\frac{u-u_1}{u-u_2}=\frac{u-\frac{-2+\sqrt{13}}{3}}{u-\frac{-2-\sqrt{13}}{3}}=\frac{3u+2-\sqrt{13}}{3u+2+\sqrt{13}}.$$

Geri koyalım. $u=\tan\frac{x}{2}$ ile

$$I=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{13}}{3\tan\frac{x}{2}+2+\sqrt{13}}\right|+C.$$

Doğrulama. Sonucu u değişkeninde türevleyelim:

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{3}{3u+2-\sqrt{13}}-\frac{3}{3u+2+\sqrt{13}}\right)=\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{6\sqrt{13}}{(3u+2)^2-13}=\frac{6}{9u^2+12u-9}=\frac{2}{3u^2+4u-3}.\checkmark$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu, değişimden sonraki integrandın ta kendisidir.
Bir ikinci yol ve çapraz denetim. Aynı integral, paydayı tek bir sinüse toplayarak da hesaplanır. $\varphi = \arctan\frac{3}{2}$ alalım; o hâlde $\sqrt{13}\cos\varphi = 2$, $\sqrt{13}\sin\varphi = 3$ olur ve

$$\sqrt{13}\sin(x-\varphi) = \sqrt{13}\,\big(\sin x\cos\varphi - \cos x\sin\varphi\big) = 2\sin x - 3\cos x.$$

Buradan, Örnek 22.4'de bulduğumuz kosekant integraliyle

$$I = \frac{1}{\sqrt{13}}\int \frac{dx}{\sin(x-\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\tan\frac{x-\varphi}{2}\right| + C$$

çıkar. İki ifade farklı görünse de aynı fonksiyonun ilkelleridir; Sonuç 8.2 gereği her aralıkta sabit bir farkla ayrılırlar. İkinci biçim daha kısadır ama φ gibi yardımcı bir açı gerektirir; birinci biçim tamamen mekaniktir. Weierstrass değişiminin değeri de tam olarak budur.
■

22.7 Çarpımı Toplama Çeviren Formüller

$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx$ türü integrallerde integrand iki farklı açının fonksiyonlarının çarpımıdır; bu yüzden ne derece düşürme ne de tek çarpan ayırma doğrudan işler. Çözüm basittir: **çarpımı toplama çevirmek.**

Önerme 22.4 (Çarpımı Toplama Çeviren Formüller). *Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için*

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\Big],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\Big].$$

Bunlar toplam ve fark formüllerinden çıkar: $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ *eşitlikleri taraf tarafa toplanıp ikiye bölünürse birinci formül;* $\cos(\alpha\mp\beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$ *eşitlikleri çıkarılırsa ikinci, toplanırsa üçüncü formül elde edilir.*
Buradan, $a \neq \pm b$ olmak üzere

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} - \frac{\cos\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C,$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} - \frac{\sin\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C,$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin\big((a-b)x\big)}{2(a-b)} + \frac{\sin\big((a+b)x\big)}{2(a+b)} + C$$

formülleri çıkar. Sıfır payda yalnızca iki durumda doğar: $a=b$ ise $(a-b)$, $a=-b$ ise $(a+b)$ sıfırlanır. Böyle bir durumda o terim için yukarıdaki hazır ifade kullanılmaz; integrali zaten doğrudan alınır, çünkü sıfırlanan açının fonksiyonu sabittir. İntegrandı $\sin 0 = 0$ *olan terim tümüyle kaybolur; integrandı* $\cos 0 = 1$ *olan terim ise* $\frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2}$ *verir. Örneğin $a=b$ alındığında*

$$\int \sin(ax)\cos(ax)\,dx = -\frac{\cos(2ax)}{4a} + C, \qquad \int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C, \qquad \int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$$

bulunur; bunlar derece düşürmenin verdiği sonuçların ta kendisidir.

Örnek 22.6 (Farklı Açıların Çarpımı). Aşağıdaki iki integrali hesaplayalım:

$$\int \sin 3x\cos 5x\,dx, \qquad \int \sin 2x\sin 5x\,dx.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Birinci integral. Önerme 22.4'nın birinci formülünde $\alpha = 3x$, $\beta = 5x$ alalım:

$$\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}\Big[\sin(3x-5x) + \sin(3x+5x)\Big] = \frac{1}{2}\left[\sin(-2x) + \sin 8x\right] = \frac{1}{2}\left[\sin 8x - \sin 2x\right],$$

burada sinüsün tek fonksiyon olması kullanıldı. Artık integral kolaydır:

$$\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8}\right) + C = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16}\right)' = -\frac{2\sin 2x}{4} + \frac{8\sin 8x}{16} = \frac{\sin 8x - \sin 2x}{2} = \sin 3x \cos 5x. \checkmark$$

İkinci integral. İkinci formülde $\alpha = 2x$, $\beta = 5x$ alalım:

$$\sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x-5x) - \cos(2x+5x)\Big] = \frac{1}{2}\left[\cos 3x - \cos 7x\right],$$

burada kosinüsün çift fonksiyon olması, yani $\cos(-3x) = \cos 3x$ kullanıldı. Buradan

$$\int \sin 2x \sin 5x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 7x}{7}\right) + C = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14}\right)' = \frac{3\cos 3x}{6} - \frac{7\cos 7x}{14} = \frac{\cos 3x - \cos 7x}{2} = \sin 2x \sin 5x. \checkmark$$

■

22.8 Hiperbolik Fonksiyonların İntegrali

Hiperbolik fonksiyonları (Tanım 5.2) ve türevlerini (Teorem 5.6) daha önce kurmuştuk. İntegral tarafındaki tablo neredeyse trigonometrik durumun aynısıdır; tek fark, birkaç yerde eksi işaretinin kaybolmasıdır. Bunun nedeni, temel özdeşliğin $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ biçiminde, yani bir **fark** olmasıdır.

Önerme 22.5 (Temel Hiperbolik Özdeşlikler ve İntegraller). *Her $x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir:*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2},$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x, \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Nitekim $\cosh 2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ *ve* $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{(e^x+e^{-x})^2 + (e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{4}$ *olduğundan son eşitlik doğrudur; buna* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$*'i ekleyip çıkararak orta iki formül elde edilir. Aynı biçimde* $2\sinh x \cosh x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x$*'tir. Bunlar derece düşürme formüllerinin hiperbolik karşılıklarıdır; sağ tarafta* $\cos 2x$ *değil* $\cosh 2x$ *bulunmasına ve* ***işaretlerin yer değiştirmesine*** *dikkat edin.*
Temel integraller türev tablosunun tersine okunmasıyla çıkar:

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C, \qquad \int \cosh x\, dx = \sinh x + C,$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + C, \qquad \int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\coth x + C \ \ (x \neq 0),$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x + C, \qquad \int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + C \ \ (x \neq 0).$$

İlk dördü Teorem 5.6′in doğrudan sonucudur. Beşincisi için $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ *yazıp* $u = \cosh x, du = \sinh x\,dx$ *almak yeter;* $\cosh x \geq 1 > 0$ *olduğundan mutlak değere gerek yoktur. Altıncısı için* $u = \sinh x$ *alınır ve* $x \neq 0$ *iken* $\sinh x \neq 0$*'dır. Trigonometrik durumla karşılaştırıldığında iki fark göze çarpar: ne* $\int \sinh x\,dx$*'te ne de* $\int \tanh x\,dx$*'te eksi işareti vardır; oysa* $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ *ve* $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$*'dir.*

Örnek 22.7 (Hiperbolik Kuvvetlerin İntegrali). Aşağıdaki üç integrali hesaplayalım:

$$\int \sinh^2 x\,dx, \qquad \int \cosh^2 x\,dx, \qquad \int \sinh^3 x\cosh^2 x\,dx.$$

Çözüm.
Birinci integral. Önerme 22.5′deki $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$ özdeşliğiyle derece düşürelim:

$$\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh 2x}{2} - x\right) + C = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}\right)' = \frac{2\cosh 2x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\cosh 2x - 1}{2} = \sinh^2 x. \checkmark$$

İkinci integral. Bu kez $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$ kullanılır:

$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x + 1)\,dx = \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

Doğrulama: $\left(\frac{\sinh 2x}{4} + \frac{x}{2}\right)' = \frac{\cosh 2x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\cosh 2x + 1}{2} = \cosh^2 x$. ✓ İki sonucun **farkını** alırsak $\int(\cosh^2 x - \sinh^2 x)\,dx = x + C$ çıkar; bu, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ile uyumludur. Trigonometrik durumda toplama, burada farka baktığımızı gözden kaçırmayalım.
Üçüncü integral. sinh'in üssü tektir; Önerme 22.2′nin hiperbolik karşılığını uygulayalım. Bir $\sinh x$ çarpanı ayıralım ve kalan çift kuvveti $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$ ile yazalım:

$$\int \sinh^3 x\cosh^2 x\,dx = \int (\cosh^2 x - 1)\cosh^2 x \sinh x\,dx.$$

$u = \cosh x$, $du = \sinh x\,dx$ dersek

$$\int (u^2 - 1)u^2\,du = \int (u^4 - u^2)\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C,$$

yani

$$\int \sinh^3 x\cosh^2 x\,dx = \frac{\cosh^5 x}{5} - \frac{\cosh^3 x}{3} + C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\cosh^5 x}{5} - \frac{\cosh^3 x}{3}\right)' = \cosh^4 x\sinh x - \cosh^2 x\sinh x = \cosh^2 x\sinh x(\cosh^2 x - 1) = \cosh^2 x\sinh^3 x. \checkmark$$

Bunu trigonometrik eşleniğiyle (Örnek 22.2′nin ikinci integrali) karşılaştırın: yapı birebir aynıdır, yalnızca $u = \cos x$ yerine $u = \cosh x$ konmuş ve du'daki eksi işareti kaybolmuştur.
■

Trigonometrik durumda kurduğumuz $u = \tan\frac{x}{2}$ değişiminin hiperbolik durumda da tam karşılığı vardır ve aynı işi görür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 22.4 (Hiperbolik Yarım Argüman Değişimi). *$x \in \mathbb{R}$ olsun ve*

$$u = \tanh \frac{x}{2}$$

konsun. O hâlde u, $\mathbb{R}$'yi $(-1,1)$ üzerine birebir örten olarak resmeder, tersi $x = 2 \operatorname{arctanh} u$'dur ve

$$\sinh x = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \qquad \tanh x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad dx = \frac{2\,du}{1-u^2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla R iki değişkenli rasyonel bir fonksiyon olmak üzere $\int R(\sinh x, \cosh x)\,dx$ integrali, u değişkeninde bir rasyonel fonksiyon integraline dönüşür.

İspat.
$\tanh$ *fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır ve görüntü kümesi $(-1,1)$'dir; dolayısıyla $x \mapsto \tanh \frac{x}{2}$ dönüşümü $\mathbb{R}$ ile $(-1,1)$ arasında birebir örtendir ve tersi $x = 2 \operatorname{arctanh} u$'dur.*
Diferansiyel. $(\operatorname{arctanh} u)' = \frac{1}{1-u^2}$ *olduğundan (Teorem 5.7) $dx = \frac{2\,du}{1-u^2}$'dir.*
Sinüs hiperbolik. *İki kat argüman formülünden başlayalım;* $\cosh \frac{x}{2} \geq 1 > 0$ *olduğundan bölüp çarpmakta sakınca yoktur:*

$$\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2} = 2\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2}} \cdot \cosh^2 \frac{x}{2} = 2\tanh \frac{x}{2} \cdot \cosh^2 \frac{x}{2}.$$

$1 - \tanh^2 t = \operatorname{sech}^2 t$ *özdeşliğini $t = \frac{x}{2}$ için ters çevirelim:*

$$\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1-\tanh^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad \sinh x = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Kosinüs hiperbolik. *Aynı fikirle*

$$\cosh x = \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2} = \cosh^2 \frac{x}{2}\left(1 + \tanh^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Trigonometrik duruma göre iki fark vardır: iki kat argüman formülünde eksi yerine artı bulunması ve paydada $1+u^2$ yerine $1-u^2$ görünmesi. İkisi de temel özdeşliğin işaretinden gelir.
Tanjant hiperbolik. *Oranı alalım:*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{2u/(1-u^2)}{(1+u^2)/(1-u^2)} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

İntegralin dönüşümü. $\sinh x$ *ve* $\cosh x$ *yerine bulunan rasyonel ifadeler konduğunda integrand u'nun rasyonel bir fonksiyonu olur; $\frac{2}{1-u^2}$ çarpanı da rasyoneldir. Dönüşüm $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilir ve birebir olduğundan değişken değiştirme kuralı uygulanabilir.*
■

Örnek 22.8 (Yarım Argüman Değişimiyle İki Hesap). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}$ $(x \neq 0)$ ve $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh x + 1}$ integrallerini Teorem 22.4 ile hesaplayalım.

Çözüm.
Birinci integral. $u = \tanh \frac{x}{2}$ diyelim; $\sinh x = \frac{2u}{1-u^2}$ ve $dx = \frac{2\,du}{1-u^2}$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \int \frac{\frac{2\,du}{1-u^2}}{\frac{2u}{1-u^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln|\,u\,| + C = \ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right| + C$$

çıkar; $x \neq 0$ iken $\tanh \frac{x}{2} \neq 0$ olduğundan logaritma tanımlıdır. Doğrulama:

$$\left(\ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right|\right)' = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}}{\tanh \frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sinh x}. \checkmark$$

Bu, Örnek 22.4'de bulduğumuz $\int \csc x\,dx = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$ formülünün birebir hiperbolik eşleniğidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci integral. Aynı değişimle $\cosh x + 1 = \frac{1+u^2}{1-u^2} + 1 = \frac{2}{1-u^2}$ olur ve bu, dx'in payıyla tam olarak sadeleşir:

$$\int \frac{dx}{\cosh x + 1} = \int \frac{\frac{2\,du}{1-u^2}}{\frac{2}{1-u^2}} = \int du = \tanh\frac{x}{2} + C.$$

Doğrulama: $\cosh x + 1 = 2\cosh^2\frac{x}{2}$ olduğundan $\left(\tanh\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cosh x+1}$. ✓
■

22.9 Karma Bir Örnek

Bölümü, öğrendiğimiz araçların birkaçını birlikte kullanan bir hesapla kapatalım. Aşağıdaki integral Weierstrass değişimiyle de çözülebilir; ama önce integrandı akıllıca yeniden yazmak çok daha hafif bir rasyonel fonksiyona götürür.

Örnek 22.9 (Sinüs ve İki Kat Açının Toplamı). $\sin x \neq 0$ ve $1 + 2\cos x \neq 0$ olan bir aralıkta

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$$

integralini hesaplayalım.

Çözüm.
Birinci adım — paydayı yeniden yazalım. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ olduğundan payda ortak çarpana ayrılır:

$$\sin x + \sin 2x = \sin x + 2\sin x\cos x = \sin x\,(1 + 2\cos x).$$

Böylece

$$I = \int \frac{dx}{\sin x\,(1 + 2\cos x)}.$$

Şimdi pay ve paydayı $\sin x$ ile çarpalım. Amacımız paya bir $\sin x\,dx$ getirmektir; çünkü bu çarpan $u = \cos x$ değişimi için gereken du'yu üretir. Paydada oluşan $\sin^2 x$'i ise $1 - \cos^2 x$ ile kosinüs cinsinden yazarız:

$$I = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x\,(1 + 2\cos x)} = \int \frac{\sin x\,dx}{(1 - \cos^2 x)(1 + 2\cos x)}.$$

Bu adım, Önerme 22.2'nin ikinci maddesinin negatif üsler için çalışan hâlidir: paydadaki $\sin x$'in üssü tek olduğundan bir çarpan ayırıp geri kalanı çift kuvvete tamamlıyoruz.
İkinci adım — değişken değiştirme. $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$ diyelim; o hâlde $\sin x\,dx = -du$ ve

$$I = -\int \frac{du}{(1-u^2)(1+2u)} = -\int \frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}.$$

Üçüncü adım — basit kesirlere ayırma. Payda üç ayrı basit köke sahip olduğundan

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{1+2u}$$

biçiminde bir ayrışım vardır. Paydaları temizleyelim:

$$1 = A(1+u)(1+2u) + B(1-u)(1+2u) + C(1-u)(1+u).$$

Katsayıları, paydaların köklerini yerine koyarak buluruz:

$$u = 1: \quad 1 = A\cdot 2\cdot 3 = 6A \quad\Rightarrow\quad A = \frac{1}{6},$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$$u=-1:\quad 1=B\cdot 2\cdot(-1)=-2B\quad\Rightarrow\quad B=-\frac{1}{2},$$

$$u=-\frac{1}{2}:\quad 1=C\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}C\quad\Rightarrow\quad C=\frac{4}{3}.$$

Katsayıları denetleyelim: $u=0$ koyarsak sağ taraf $A+B+C=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{1-3+8}{6}=1$ olur; sol taraf da 1'dir. ✓

Dördüncü adım — integralleyelim. Baştaki eksi işaretini unutmayalım:

$$I=-\int\left(\frac{1/6}{1-u}-\frac{1/2}{1+u}+\frac{4/3}{1+2u}\right)du.$$

Birinci terimde iç türev -1 olduğundan bir eksi doğar, üçüncüde iç türev 2 olduğundan katsayı yarıya iner: $\int\frac{du}{1-u}=-\ln|\,1-u\,|$, $\int\frac{du}{1+u}=\ln|\,1+u\,|$, $\int\frac{du}{1+2u}=\frac{1}{2}\ln|\,1+2u\,|$. O hâlde

$$I=-\left(-\frac{1}{6}\ln|\,1-u\,|-\frac{1}{2}\ln|\,1+u\,|+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln|\,1+2u\,|\right)+C=\frac{1}{6}\ln|\,1-u\,|+\frac{1}{2}\ln|\,1+u\,|-\frac{2}{3}\ln|\,1+2u\,|+C.$$

Geri koyalım. $u=\cos x$ ile

$$I=\frac{1}{6}\ln|\,1-\cos x\,|+\frac{1}{2}\ln|\,1+\cos x\,|-\frac{2}{3}\ln|\,1+2\cos x\,|+C.$$

Doğrulama. Türev alalım:

$$I'=\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{2}{3}\cdot\frac{-2\sin x}{1+2\cos x}=\sin x\left[\frac{1}{6(1-\cos x)}-\frac{1}{2(1+\cos x)}+\frac{4}{3(1+2\cos x)}\right].$$

Köşeli parantezin içi, $u=\cos x$ için tam olarak üçüncü adımda kurduğumuz basit kesir ayrışımıdır; dolayısıyla

$$I'=\sin x\cdot\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+2\cos x)}=\frac{\sin x}{\sin^2 x\,(1+2\cos x)}=\frac{1}{\sin x\,(1+2\cos x)}=\frac{1}{\sin x+\sin 2x}.$$ ✓

Bu hesapta işaretlerin nasıl biriktiğine dikkat edin: bir yerde unutulan eksi, dördüncü adımda üç terimin işaretini birden bozar. Böyle bir sonucu türev alarak denetlemek lüks değil, olağan bir adımdır.

■

22.10 Alıştırmalar

Alıştırma 22.1 (Trigonometrik ve Hiperbolik İntegraller Üzerine). Aşağıdaki integralleri hesaplayın ve her sonucu türev alarak doğrulayın.

a) $\displaystyle\int\cos^4 x\,dx$

b) $\displaystyle\int\sin^5 x\,dx$

c) $\displaystyle\int\tan^3 x\,dx$

d) $\displaystyle\int\sec^3 x\,dx$

e) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x}$

f) $\displaystyle\int\cos 3x\cos 7x\,dx$

g) $\displaystyle\int\cosh^3 x\,dx$

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
a) İki üs de çift olduğundan derece düşürme uygulanır. Önce

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4},$$

sonra $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ ile

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}.$$

Terim terim integralleyelim:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

Doğrulama: $\left(\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}\right)' = \frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8} = \cos^4 x$. ✓ Aynı sonuç Teorem 22.2 ile de bulunur; iki biçimin özdeşliğini görmek için $\cos^3 x \sin x = \frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{8}$ eşitliği yeter.
b) Üs tektir; Önerme 22.2'nin ikinci maddesini $n=0$ ile uygulayalım. Bir $\sin x$ ayırıp kalanı kosinüs cinsinden yazarsak $\sin^5 x = (1-\cos^2 x)^2 \sin x$ olur. $u=\cos x$, $du = -\sin x\,dx$ ile

$$\int \sin^5 x\,dx = -\int (1-2u^2+u^4)\,du = -u+\frac{2u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C = -\cos x+\frac{2\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$$

Doğrulama:

$$\left(-\cos x+\frac{2\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^5 x}{5}\right)' = \sin x-2\cos^2 x\sin x+\cos^4 x\sin x = \sin x\,(1-\cos^2 x)^2 = \sin^5 x.\checkmark$$

c) $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ile kuvveti düşürelim:

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x\,(\sec^2 x-1)\,dx = \int \tan x\sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx.$$

Birinci integralde $u=\tan x$, $du=\sec^2 x\,dx$ alırsak $\int u\,du = \frac{\tan^2 x}{2}$ çıkar; ikincisi $-\ln|\cos x\,|$'tir. O hâlde

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x\,|+C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x\,|\right)' = \tan x\sec^2 x-\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\sec^2 x-\tan x = \tan x(\sec^2 x-1) = \tan^3 x.\checkmark$$

d) Burada $m=0$ çift, $n=3$ tektir; Önerme 22.3'nin iki maddesi de uygulanamaz, kısmi integrasyona başvururuz. $K=\int \sec^3 x\,dx$ diyelim ve integrandı $\sec x\cdot\sec^2 x$ olarak ayırıp $u=\sec x$, $dv=\sec^2 x\,dx$ alalım; o hâlde $du=\sec x\tan x\,dx$, $v=\tan x$ ve

$$K = \sec x\tan x-\int \sec x\tan^2 x\,dx = \sec x\tan x-\int \sec x(\sec^2 x-1)\,dx = \sec x\tan x-K+\int \sec x\,dx.$$

Örnek 22.4'den $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x+\tan x\,|$ olduğunu biliyoruz. K'yı sola toplayalım:

$$2K = \sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x\,| \quad\Rightarrow\quad \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x\,|+C.$$

Doğrulama:

$$\left(\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{\ln|\sec x+\tan x\,|}{2}\right)' = \frac{\sec x\tan^2 x+\sec^3 x}{2}+\frac{\sec x}{2} = \frac{\sec x(\sec^2 x-1)+\sec^3 x+\sec x}{2} = \sec^3 x.\checkmark$$

 CC BY-NC-SA 4.0

e) İntegrand $\sin x$'in rasyonel bir ifadesidir ve özel kalıplara uymaz; Teorem 22.3'ni uygulayalım. $u = \tan\frac{x}{2}$ ile

$$1+\sin x = 1+\frac{2u}{1+u^2} = \frac{1+u^2+2u}{1+u^2} = \frac{(1+u)^2}{1+u^2},$$

ve $dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2\,du}{1+u^2}}{\frac{(1+u)^2}{1+u^2}} = \int \frac{2\,du}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u} + C = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C.$$

Doğrulama: zincir kuralıyla türev $\dfrac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}$ olur; pay ve paydayı $\cos^2\frac{x}{2}$ ile çarparsak

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+\sin x}.\checkmark$$

f) Önerme 22.4'nın üçüncü formülünde $\alpha = 3x$, $\beta = 7x$ alalım:

$$\cos 3x\cos 7x = \frac{1}{2}\left[\cos(-4x)+\cos 10x\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 4x+\cos 10x\right].$$

Buradan

$$\int \cos 3x\cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 10x}{10}\right)+C = \frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 10x}{20}+C.$$

Doğrulama: bulduğumuz ilkelin türevini alalım.

$$\left(\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 10x}{20}\right)' = \frac{4\cos 4x}{8}+\frac{10\cos 10x}{20}$$
$$= \frac{\cos 4x+\cos 10x}{2} = \cos 3x\cos 7x \quad \checkmark$$

g) cosh'ın üssü tektir; bir $\cosh x$ çarpanı ayırıp kalanı $\cosh^2 x = 1+\sinh^2 x$ ile yazalım. $u = \sinh x$, $du = \cosh x\,dx$ ile

$$\int \cosh^3 x\,dx = \int (1+\sinh^2 x)\cosh x\,dx = \int (1+u^2)\,du = \sinh x+\frac{\sinh^3 x}{3}+C.$$

Doğrulama:

$$\left(\sinh x+\frac{\sinh^3 x}{3}\right)' = \cosh x+\sinh^2 x\cosh x = \cosh x\,(1+\sinh^2 x) = \cosh^3 x.\checkmark$$

■

Bu bölümde trigonometrik ve hiperbolik ifadelerin integralini, özdeşliklerle sadeleştirerek ya da rasyonelleştiren bir değişimle hesaplamayı öğrendik. Şimdi oku ters çevirip **köklü cebirsel ifadeleri** trigonometrik ve hiperbolik değişimlerle nasıl temizleyeceğimize bakacağız: Trigonometrik Dönüşümler ve Temel İntegral Biçimleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

23. Trigonometrik Dönüşümler ve Temel İntegral Biçimleri

Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali bölümünde bir integrali *trigonometrik bir ifadeden rasyonel bir ifadeye* çevirmeyi öğrenmiştik: $R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki integrandları $u = \tan\frac{x}{2}$ dönüşümüyle u'nun rasyonel fonksiyonuna indirgiyorduk. Bu bölümde tam ters yönde çalışacağız. Elimizdeki integrand **cebirsel** (algebraic) bir ifadedir, ama içinde $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ gibi bir karekök vardır ve bu karekök yüzünden ne basit kesirlere ayırma ne de doğrudan bir değişken değiştirme işe yarar. Çare, x'i bir trigonometrik fonksiyonun cinsinden yazıp **kökü yok etmektir**.
Fikrin özü tek bir özdeşliktir. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ eşitliğini üç ayrı biçimde okuyabiliriz:

$$1 - \sin^2 t = \cos^2 t, \qquad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t, \qquad \sec^2 t - 1 = \tan^2 t.$$

Üç eşitliğin de sol tarafı, başa çıkmaya çalıştığımız $a^2 - b^2x^2$, $a^2 + b^2x^2$ ve $b^2x^2 - a^2$ ifadelerinin birer modelidir; sağ tarafı ise **bir tam karedir**. Demek ki x'i uygun seçilmiş bir t değişkenine bağlarsak karekök buharlaşır ve geriye, bir önceki bölümde çözmeyi öğrendiğimiz türden trigonometrik bir integral kalır.
Ama dikkat: $\sqrt{\cos^2 t}$, $\cos t$ değil $|\cos t\,|$'dir; bu iki ifade ancak $\cos t \geq 0$ olan bir aralıkta çakışır. Bu yüzden t'yi, hem $t \mapsto x$ karşılığının **birebir** olduğu hem de kökten çıkan mutlak değerin işaretinin belli olduğu bir **dala** hapsetmemiz gerekir. Dalı doğru seçmek, bu bölümde öğreneceğimiz en önemli teknik alışkanlıktır.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: üç temel **trigonometrik dönüşümü** (trigonometric substitution) — $x = \frac{a}{b}\sin t, x = \frac{a}{b}\tan t, x = \frac{a}{b}\sec t$ — ve her birinin doğru dalını; t'den x'e geri dönerken kullanılan **yardımcı üçgen** (reference triangle) yöntemini; aynı işi gören **hiperbolik dönüşümleri** (hyperbolic substitution); sık karşılaşılan integrallerin — hepsi türetilmiş — bir **temel biçimler tablosunu**; ve $ax^2 + bx + c$ biçimindeki her ifadeyi **tam kareye tamamlayarak** (completing the square) bu tabloya indirgemeyi. Bölümün sonunda, ikinci dereceden bir polinom (ve isteğe bağlı olarak onun karekökü) içeren hemen her integrali sistematik biçimde hesaplayabiliyor olacağız.

23.1 Kökü Yok Eden Üç Dönüşüm

a, b pozitif reel sayılar olsun. Karşılaşacağımız üç kök türü ve bunların doğal tanım kümeleri şunlardır:

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2}\ \left(|\,x\,| \leq \frac{a}{b}\right), \qquad \sqrt{a^2 + b^2x^2}\ \ (x \in \mathbb{R}), \qquad \sqrt{b^2x^2 - a^2}\ \left(|\,x\,| \geq \frac{a}{b}\right).$$

Birinci kökte $a^2 - b^2x^2 \geq 0$ olması $|\,x\,| \leq \frac{a}{b}$, üçüncüde $b^2x^2 - a^2 \geq 0$ olması $|\,x\,| \geq \frac{a}{b}$ demektir; ortadaki ifade her x için pozitiftir. Bu tanım aralıkları rastgele bir ayrıntı değildir: t için seçeceğimiz aralığın x'in doğal aralığını **tam olarak** taraması gerekir, ne eksik ne fazla.
Aşağıdaki önerme üç dönüşümü tek çatıda toplar ve her birinin neden meşru olduğunu söyler. "Meşru" burada iki şey demektir: $t \mapsto x$ dönüşümü seçilen dalda **birebir örten** olmalıdır (yoksa bir x değerine karşılık gelen t tek olmaz ve geri dönüş yapılamaz) ve karekök seçilen dalda **mutlak değersiz** sadeleşmelidir.

Önerme 23.1 (Dönüşümün Seçimi ve Dalın Birebirliği). *$a, b > 0$ olsun.*

1. *$\varphi_1(t) = \frac{a}{b}\sin t$ fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığından $\left[-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right]$ aralığı üzerine kesin artan ve birebir örtendir. Bu dalda $\varphi_1'(t) = \frac{a}{b}\cos t$ ve*

$$\sqrt{a^2 - b^2\varphi_1(t)^2} = a\cos t\ \ (\geq 0).$$

2. *$\varphi_2(t) = \frac{a}{b}\tan t$ fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığından $\mathbb{R}$ üzerine kesin artan ve birebir örtendir. Bu dalda $\varphi_2'(t) = \frac{a}{b}\sec^2 t$ ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

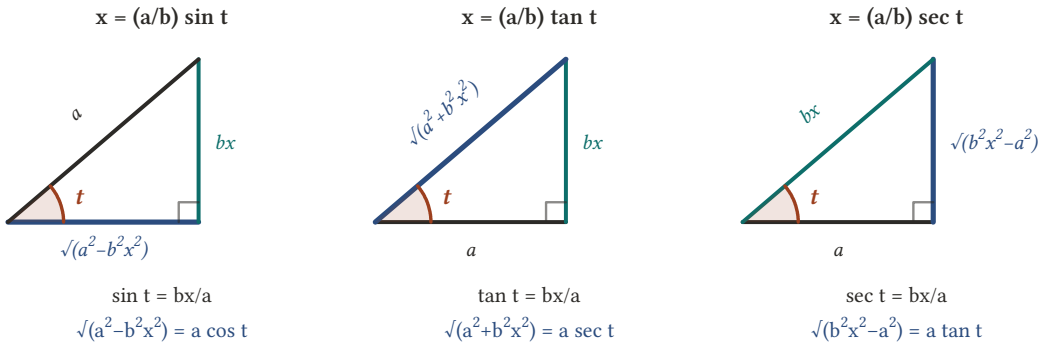
$$\sqrt{a^2 + b^2\varphi_2(t)^2} = a\sec t \ \ (>0).$$

3. $\varphi_3(t) = \dfrac{a}{b}\sec t$ *fonksiyonu* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *aralığından* $\left[\dfrac{a}{b}, \infty\right)$ *üzerine ve* $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ *aralığından* $\left(-\infty, -\dfrac{a}{b}\right]$ *üzerine kesin artan ve birebir örtendir. Bu dallarda* $\varphi_3'(t) = \dfrac{a}{b}\sec t\tan t$ *ve*

$$\sqrt{b^2\varphi_3(t)^2 - a^2} = a\,|\tan t\,| = \begin{cases} a\tan t, & 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ -a\tan t, & \frac{\pi}{2} < t \le \pi. \end{cases}$$

İspat.
Üç maddede de yöntem aynıdır: türevin işaretinden kesin monotonluğu, ara değer teoreminden örtenliği, kesin monotonluktan birebirliği okuyacağız; kökün sadeleşmesini ise Pisagor özdeşliğinden ve seçilen dalda ilgili trigonometrik fonksiyonun işaretinden elde edeceğiz.
1. Sinüs dalı. *Teorem 5.4 gereği* $\varphi_1'(t) = \frac{a}{b}\cos t$*'dir ve* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *üzerinde* $\cos t > 0$ *olduğundan* $\varphi_1' > 0$*'dır; Sonuç 8.3 gereği* φ_1*, kapalı* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *aralığında kesin artandır (süreklilik uç noktaları da içine katar); kesin artan bir fonksiyon ise Tanım 1.1 gereği farklı noktalarda farklı değerler alır, yani birebirdir. Uç değerler* $\mp\frac{a}{b}$ *olduğundan Ara Değer Teoremi gereği görüntü aradaki her sayıyı içerir; kesin artanlık nedeniyle dışına da taşmaz. Görüntü tam olarak* $\left[-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right]$ *'dir.*
Kökün sadeleşmesi: $b^2\varphi_1(t)^2 = a^2\sin^2 t$ *olduğundan* $a^2 - b^2\varphi_1(t)^2 = a^2(1-\sin^2 t) = a^2\cos^2 t$*'dir.* $a > 0$ *ve bu dalda* $\cos t \ge 0$ *olduğundan* $\sqrt{a^2\cos^2 t} = a\,|\cos t\,| = a\cos t$*'dir. Ters dönüşüm* $t = \arcsin\frac{bx}{a}$*'dır;* arcsin, sin *fonksiyonunun tam olarak bu daldaki tersidir ve Teorem 1.3 gereği süreklidir.*
2. Tanjant dalı. *Teorem 5.4 gereği* $(\tan t)' = \sec^2 t \ge 1 > 0$*'dır; dolayısıyla* $\varphi_2' > 0$*'dır,* φ_2 *kesin artandır ve birebirdir. Örtenlik için uç davranışa bakalım:* $t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ *iken* $\cos t \to 0^+$ *ve* $\sin t \to 1$ *olduğundan* $\tan t \to +\infty$*;* $t \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$ *iken ise* $\cos t \to 0^+$ *ve* $\sin t \to -1$ *olduğundan* $\tan t \to -\infty$*'dur. Sürekli ve kesin artan bir fonksiyonun görüntüsü bir aralıktır (bkz. Analiz 1); bu aralık iki yönde de sınırsız olduğuna göre* $\mathbb{R}$*'nin kendisidir.*
Kökün sadeleşmesi: $a^2 + b^2\varphi_2(t)^2 = a^2(1+\tan^2 t) = a^2\sec^2 t$ *ve seçilen dalda* $\cos t > 0$*, yani* $\sec t > 0$*'dır; o hâlde* $\sqrt{a^2\sec^2 t} = a\sec t$*. Ters dönüşüm* $t = \arctan\frac{bx}{a}$*'dır.*
3. Sekant dalı. $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ *fonksiyonu* $\cos t \ne 0$ *olan her yerde türevlenebilirdir ve Teorem 5.4 gereği* $(\sec t)' = \sec t\tan t$*'dir.*
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ *üzerinde* $\sec t > 0$*'dır; ayrıca* $0 < t < \frac{\pi}{2}$ *iken* $\tan t > 0$ *olduğundan aralığın* ***iç*** *noktalarında* $\varphi_3' > 0$*'dır. (Uç nokta* $t = 0$*'da* $\tan 0 = 0$ *olduğundan türev sıfırdır; ama Sonuç 8.3 türevin pozitifliğini yalnızca iç noktalarda istediğinden bu bir engel değildir.) Demek ki* φ_3 *bu aralıkta kesin artandır.* $\varphi_3(0) = \frac{a}{b}$ *ve* $t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ *iken* $\cos t \to 0^+$ *olduğundan* $\sec t \to +\infty$*'dur; görüntü tam olarak* $\left[\frac{a}{b}, \infty\right)$*'dur.*
$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ *üzerinde ise* $\cos t < 0$*, yani* $\sec t < 0$*; ayrıca* $\sin t > 0$ *olduğundan* $\tan t < 0$*'dır. Dolayısıyla* $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ *iken* $\varphi_3' = \frac{a}{b}\sec t\tan t$ *iki negatif sayının çarpımı olarak yine* ***pozitiftir*** *(uç nokta* $t = \pi$*'de* $\tan\pi = 0$ *olduğundan türev sıfırdır); Sonuç 8.3 gereği* φ_3 *bu dalda da kesin artandır. Uçlarda* $t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ *iken* $\sec t \to -\infty$ *ve* $\varphi_3(\pi) = -\frac{a}{b}$ *olduğundan görüntü tam olarak* $\left(-\infty, -\frac{a}{b}\right]$ *'dir.*
Kökün sadeleşmesi: $b^2\varphi_3(t)^2 - a^2 = a^2(\sec^2 t - 1) = a^2\tan^2 t$*, buradan* $\sqrt{a^2\tan^2 t} = a\,|\tan t\,|$*'dir. Birinci dalda* $\tan t \ge 0$ *olduğundan bu* $a\tan t$*'ye, ikinci dalda* $\tan t \le 0$ *olduğundan* $-a\tan t$*'ye eşittir. Ters dönüşüm,* sec *fonksiyonunun ilgili daldaki tersi olan* $t = \operatorname{arcsec}\frac{bx}{a}$*'dır;* sec *her iki dalda kesin monoton ve sürekli olduğundan bu ters vardır ve süreklidir (Teorem 1.3).*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.1: Yardımcı üçgen, hesabın sonunda t*'den* x*'e dönmenin en hızlı yoludur: dar açısı* t *olan bir dik üçgende dönüşümün verdiği oran kurulur, üçüncü kenar Pisagor teoremiyle bulunur ve aranan bütün trigonometrik oranlar doğrudan okunur. Üç dönüşümde de üçgen aynıdır, yalnızca kenarların rolleri yer değiştirir:* bx *kenarı (yeşil) sırasıyla karşı, karşı ve hipotenüs; kökü taşıyan kenar (mavi) ise komşu, hipotenüs ve karşı kenar olur. Alttaki eşitlikler her dönüşümün hangi kökü sadeleştirdiğini gösterir; sonuncusu* t*'nin dar açı olduğu* $0 \le t < \pi/2$ *dalında geçerlidir, öteki dalda işaretin elle denetlenmesi gerekir.*

■

> ⚠ **Dal seçimi bir süs değildir**
>
> Karekök **daima negatif olmayan** değer alır: $\sqrt{u^2} = |u|$'dur. Dönüşüm kurulurken t'yi belirli bir aralığa hapsetmezsek $\sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$ yazma hakkımız olmaz; $\cos t$'nin negatif olduğu t değerlerinde bu eşitlik **yanlıştır** ve integralin işaretini bozar. Aynı şekilde $t \mapsto x$ dönüşümü birebir olmazsa, hesabın sonunda "t neydi?" sorusunun tek bir cevabı olmaz ve geri dönüş yapılamaz. Üç dönüşümde de yukarıdaki standart dallar hem birebirliği hem de işaretin belirliliğini garanti eder.

23.1.1 Yardımcı Üçgen: t'den x'e Geri Dönüş

Dönüşümle hesabı bitirdiğimizde elimizde t cinsinden bir ifade kalır; onu x cinsine çevirmeliyiz. $t = \arcsin\frac{bx}{a}$ gibi bir eşitliği doğrudan yerine koymak, ifadede $\sin t$ dışında $\cos t$ ya da $\tan t$ geçtiğinde işe yaramaz. Pratik yol, **dar açısı t olan bir dik üçgen çizmektir.**
Birinci dönüşümde $\sin t = \frac{bx}{a}$'dır: karşı dik kenarı bx, hipotenüsü a olan bir dik üçgen çizelim; Pisagor teoremiyle komşu dik kenar $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ olur ve bütün oranları okuyabiliriz:

$$\sin t = \frac{bx}{a}, \qquad \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{a}, \qquad \tan t = \frac{bx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}.$$

İkinci dönüşümde $\tan t = \frac{bx}{a}$'dır; karşı kenar bx, komşu kenar a, hipotenüs $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ olur ve

$$\sin t = \frac{bx}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}, \qquad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}, \qquad \sec t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{a}.$$

Üçüncü dönüşümde $\sec t = \frac{bx}{a}$, yani $\cos t = \frac{a}{bx}$'tir; hipotenüs bx, komşu kenar a, karşı kenar $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ olur ve

$$\sin t = \frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}{bx}, \qquad \tan t = \frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}{a}.$$

Üçgen yalnızca t'nin dar açı olduğu dalda birebir bir resimdir; öteki dalda işaretleri elle kontrol etmek gerekir. Yine de üçgen, formülleri hatırlamanın en hızlı yoludur ve sonucun doğruluğu her zaman **türev alarak** sınanabilir — bu bölümde her sonucu böyle sınayacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

23.2 Birinci Dönüşüm: $x = \frac{a}{b}\sin t$

$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ içeren integraller için doğal seçim budur. Aşağıdaki teorem, en sık karşılaşılan iki temel integrali verir.

Teorem 23.1 (Sinüs Dönüşümü ile İki Temel İntegral). *$a, b > 0$ ve $|\,x\,| < \frac{a}{b}$ olsun. O hâlde*

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\arcsin\frac{bx}{a} + C$$

ve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a} + C.$$

İspat.
Önerme 23.1'nin birinci maddesindeki dönüşümü kuralım:

$$x = \frac{a}{b}\sin t, \qquad dx = \frac{a}{b}\cos t\,dt, \qquad t = \arcsin\frac{bx}{a}, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

ve bu dalda $\sqrt{a^2 - b^2x^2} = a\cos t$.
Birinci integral. *Yerine koyalım:*

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot \frac{a}{b}\cos t\,dt = \frac{a^2}{b}\int \cos^2 t\,dt.$$

Kuvvet indirgeme özdeşliği $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ ile

$$\frac{a^2}{b}\int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{b}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C.$$

Şimdi t'den x'e dönelim. $t = \arcsin\frac{bx}{a}$'dır. $\sin 2t$ için iki kat açı formülünü ve yardımcı üçgeni kullanalım:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{bx}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{a} = \frac{2bx\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{a^2}.$$

Bunu yerine yazarsak

$$\frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{bx}{a} + \frac{bx\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{2a^2}\right) + C = \frac{a^2}{2b}\arcsin\frac{bx}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$$

elde edilir; ikinci terimde $\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b}{2a^2} = \frac{1}{2}$ sadeleşmesini yaptık.
İkinci integral. *Aynı dönüşümle*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \int \frac{\frac{a}{b}\cos t\,dt}{a\cos t} = \frac{1}{b}\int dt = \frac{t}{b} + C = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a} + C.$$

Burada $\cos t$ sadeleşmesi meşrudur, çünkü seçilen açık dalda $\cos t > 0$'dır.
Doğrulama. *Her iki sonucu da türev alarak sınayalım. İkincisiyle başlayalım: Teorem 5.5 ve zincir kuralı (Teorem 4.1) gereği*

$$\left(\frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}\right)' = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2x^2}{a^2}}}\cdot\frac{b}{a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}},$$

çünkü $\sqrt{1 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{a}$'dır ($a > 0$).
Birincisi için, $R = \sqrt{a^2 - b^2x^2}$ yazarak iki terimin türevini ayrı ayrı alalım:

$$\left(\frac{x}{2}R\right)' = \frac{R}{2} - \frac{b^2x^2}{2R} = \frac{a^2 - 2b^2x^2}{2R}, \qquad \left(\frac{a^2}{2b}\arcsin\frac{bx}{a}\right)' = \frac{a^2}{2b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{R} = \frac{a^2}{2R}.$$

Toplamları $\dfrac{2(a^2 - b^2x^2)}{2R} = R$*'dir; iki sonuç da doğrulandı.*

■

Uygulamada en çok karşımıza çıkan özel hâller şunlardır: $a = b = 1$ için

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$b = 1$ için ise $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.
Birinci formülün geometrik bir okuması vardır: $y = \sqrt{1-x^2}$ eğrisi birim çemberin üst yarısıdır; formülü 0'dan 1'e değerlendirirsek $\frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi}{4}$, yani birim dairenin dörtte biri çıkar.

Örnek 23.1 (Sinüs Dönüşümüyle İki Hesap). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Çözüm.
a) İntegrand $\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$'tir; burada $a = 2$, $b = 3$'tür ve tanım aralığı $|x| < \frac{2}{3}$'tür. Teorem 23.1'nun ikinci formülünü doğrudan uygulayabiliriz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C.$$

Formülü ezberlemek yerine ara bir değişkenle de ilerleyebiliriz; bu, standart biçime indirgemenin en kısa yoludur. $u = 3x$, $du = 3\,dx$ diyelim:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{2} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C.$$

İkinci adımda $b = 1$, $a = 2$ özel hâlini kullandık.
Doğrulama. Bulduğumuz sonucun türevini alalım:

$$\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{4}}}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$$

Doğru.
b) Bu integral tablodan okunmaz; dönüşümü elle kurmalıyız. $|x| < 1$ için $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ alalım; bu dalda $\sqrt{1-x^2} = \cos t > 0$'dır:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t\cdot\cos t\,dt}{\cos t} = \int \sin^2 t\,dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C = \frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2} + C,$$

burada $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ kuvvet indirgemesini kullandık. Geri dönelim: $t = \arcsin x$, $\sin t = x$, $\cos t = \sqrt{1-x^2}$. O hâlde

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

Doğrulama. $\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ ve

$$\left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

olduğundan fark $\dfrac{1-(1-2x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ çıkar. Doğru.

■

23.3 İkinci Dönüşüm: $x = \frac{a}{b}\tan t$

$\sqrt{a^2+b^2x^2}$ ifadesinde kök hiç sıfırlanmaz ve tanım kümesi bütün $\mathbb{R}$'dir; $1+\tan^2 t = \sec^2 t$ özdeşliği tam olarak bu biçime uyar. Aynı dönüşüm, kök içermeyen $(a^2+b^2x^2)^n$ paydalarında da işe yarar.

Teorem 23.2 (Tanjant Dönüşümü ile Temel İntegral). *$a, b > 0$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b}\ln\left(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}\right) + C = \frac{1}{b}\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a} + C_1.$$

İspat.
Önerme 23.1'nin ikinci maddesindeki dönüşümü kuralım:

$$x = \frac{a}{b}\tan t, \qquad dx = \frac{a}{b}\sec^2 t\,dt, \qquad t = \arctan\frac{bx}{a}, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

ve bu dalda $\sqrt{a^2+b^2x^2} = a\sec t > 0$. Yerine koyalım:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \int \frac{\frac{a}{b}\sec^2 t\,dt}{a\sec t} = \frac{1}{b}\int \sec t\,dt = \frac{1}{b}\ln|\sec t + \tan t| + C.$$

(Sekantın integralini Örnek 22.4'de hesaplamıştık: $\sec t$ ifadesi $\frac{\sec t(\sec t+\tan t)}{\sec t+\tan t}$ biçiminde yazılıp $u = \sec t + \tan t$ dönüşümü uygulanır; $du = (\sec t\tan t + \sec^2 t)dt$ tam olarak pay olduğundan integral $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ olur.)
*Şimdi yardımcı üçgenle geri dönelim: $\tan t = \frac{bx}{a}$ ve $\sec t = \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}$ olduğundan $\sec t + \tan t = \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}+bx}{a}$'dır. Bu ifade her zaman **pozitiftir**, çünkü $\sqrt{a^2+b^2x^2} > \sqrt{b^2x^2} = |bx| \geq -bx$'tir; demek ki mutlak değere gerek yoktur:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b}\ln\frac{bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a} + C = \frac{1}{b}\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right) + C_1,$$

burada $C_1 = C - \frac{\ln a}{b}$'dir; sabit bir terimi keyfî sabitin içine yutturduk.
***Hiperbolik biçim.** Önerme 5.4'de kaydettiğimiz açık formül $\operatorname{arcsinh} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$'dır. $u = \frac{bx}{a}$ alırsak*

$$\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a} = \ln\frac{bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a} = \ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right) - \ln a,$$

yani iki ifade yalnızca bir sabitle farklıdır; ikisi de aynı ilkel fonksiyon ailesini betimler.
***Doğrulama.** $R = \sqrt{a^2+b^2x^2}$ yazalım; $R' = \dfrac{b^2x}{R}$'dir. Zincir kuralıyla*

$$\left(\frac{1}{b}\ln(bx+R)\right)' = \frac{1}{b}\cdot\frac{b+\frac{b^2x}{R}}{bx+R} = \frac{1}{b}\cdot\frac{b(R+bx)}{R(bx+R)} = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}.$$

Doğru.

■

Özel hâller:

- $a = b = 1$ alırsak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C = \operatorname{arcsinh} x + C.$$

- $b = 1$ alırsak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} + C_1.$$

> ⚠ Logaritmanın içinde x mutlaka bulunur
>
> $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ integralinin sonucunu $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$ diye yazmak yaygın bir hatadır. Bu ifadenin türevi $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$'dir ve integrandla hiç ilgisi yoktur. Doğru sonuçta logaritmanın içinde ***x*'in kendisi** görünür: $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Her belirsiz integral hesabından sonra türev alıp sınamak, tam olarak bu tür hataları yakalar.

Örnek 23.2 (Tanjant Dönüşümüyle Bir Hesap). $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+9x^2)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Burada kök yoktur, ama payda $1+9x^2$'nin kuvvetidir; $1+\tan^2 t = \sec^2 t$ özdeşliği bu paydayı tek bir çarpana indirger. $a=1$, $b=3$ ile

$$x = \frac{1}{3}\tan t, \qquad dx = \frac{1}{3}\sec^2 t\, dt, \qquad t = \arctan 3x, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

alalım. O hâlde $1+9x^2 = 1+\tan^2 t = \sec^2 t$ ve $(1+9x^2)^2 = \sec^4 t$'dir:

$$\int \frac{dx}{(1+9x^2)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}\, dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sec^2 t} = \frac{1}{3}\int \cos^2 t\, dt.$$

Kuvvet indirgemeyle $\int \cos^2 t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t)$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{(1+9x^2)^2} = \frac{1}{6}\left(\, t + \sin t\cos t \,\right) + C.$$

Geri dönüş için yardımcı üçgeni kuralım: $\tan t = 3x$ olduğundan karşı kenar $3x$, komşu kenar 1, hipotenüs $\sqrt{1+9x^2}$'dir. Buradan

$$t = \arctan 3x, \qquad \sin t = \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}, \qquad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}, \qquad \sin t\cos t = \frac{3x}{1+9x^2}.$$

Sonuç:

$$\int \frac{dx}{(1+9x^2)^2} = \frac{1}{6}\arctan 3x + \frac{1}{6}\cdot\frac{3x}{1+9x^2} + C = \frac{1}{6}\arctan 3x + \frac{x}{2(1+9x^2)} + C.$$

Doğrulama. Birinci terim:

$$\left(\frac{1}{6}\arctan 3x\right)' = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{1+9x^2} = \frac{1}{2(1+9x^2)}.$$

İkinci terim için bölüm kuralı:

$$\left(\frac{x}{2(1+9x^2)}\right)' = \frac{2(1+9x^2) - x\cdot 36x}{4(1+9x^2)^2} = \frac{2+18x^2-36x^2}{4(1+9x^2)^2} = \frac{1-9x^2}{2(1+9x^2)^2}.$$

Toplayalım; ortak paydayı $2(1+9x^2)^2$ alırsak

$$\frac{(1+9x^2)+(1-9x^2)}{2(1+9x^2)^2} = \frac{2}{2(1+9x^2)^2} = \frac{1}{(1+9x^2)^2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğru.
■

23.4 Üçüncü Dönüşüm: $x = \frac{a}{b}\sec t$

$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ ifadesi $|\,x\,| \geq \frac{a}{b}$ olduğunda tanımlıdır ve tanım kümesi **iki ayrı aralıktan** oluşur. Bu, önceki iki durumdan önemli bir farktır: hesabı iki dalda ayrı ayrı yapıp sonuçların tek bir formülde birleşip birleşmediğini kontrol etmek gerekir. Aşağıda mutlak değerli tek bir formülün her iki dalda da geçerli olduğunu göreceğiz.

Teorem 23.3 (Sekant Dönüşümü ile Temel İntegral). *$a, b > 0$ olsun. $|\,x\,| > \frac{a}{b}$ olan her x için*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left|bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right| + C.$$

Formül, $x > \frac{a}{b}$ ve $x < -\frac{a}{b}$ aralıklarının her birinde (kendi sabitiyle) geçerlidir.

İspat.
İki dalı ayrı ayrı ele alacağız. Kısaltma olarak $R = \sqrt{b^2x^2 - a^2} \geq 0$ yazalım.
Birinci dal: $x > \frac{a}{b}$. *Önerme 23.1'nin üçüncü maddesi gereği*

$$x = \frac{a}{b}\sec t, \qquad dx = \frac{a}{b}\sec t\tan t\,dt, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

alabiliriz; bu dalda $\tan t > 0$ ve $R = a\tan t$'dir. Yerine koyalım:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \int \frac{\frac{a}{b}\sec t\tan t\,dt}{a\tan t} = \frac{1}{b}\int \sec t\,dt = \frac{1}{b}\ln|\sec t + \tan t\,| + C.$$

Yardımcı üçgenden $\sec t = \frac{bx}{a}$ ve $\tan t = \frac{R}{a}$'dır, ikisi de pozitiftir:

$$\frac{1}{b}\ln\frac{bx + R}{a} + C = \frac{1}{b}\ln(bx + R) + C_1 = \frac{1}{b}\ln\left|bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right| + C_1,$$

çünkü bu dalda $bx + R > 0$ olduğundan mutlak değer bir şey değiştirmez.
İkinci dal: $x < -\frac{a}{b}$. *Bu kez $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ dalını kullanırız. Burada $\sec t < 0$, $\tan t < 0$'dır ve Önerme 23.1 gereği $R = a\,|\tan t\,| = -a\tan t$'dir. Yerine koyarken bu işaret farkı ortaya çıkar:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \int \frac{\frac{a}{b}\sec t\tan t\,dt}{-a\tan t} = -\frac{1}{b}\int \sec t\,dt = -\frac{1}{b}\ln|\sec t + \tan t\,| + C.$$

Şimdi $\sec t = \frac{bx}{a}$ ve $\tan t = -\frac{R}{a}$ olduğundan $\sec t + \tan t = \frac{bx - R}{a}$'dır. $bx < 0$ ve $R \geq 0$ olduğundan bu sayı negatiftir; mutlak değeri $\frac{-bx+R}{a}$'dır ve sonuç $-\frac{1}{b}\ln\frac{-bx+R}{a} + C$ olur.
Bu ifadeyi istenen biçime sokmak için $s = -bx > 0$ yazalım. $s^2 - R^2 = b^2x^2 - (b^2x^2 - a^2) = a^2$, yani $(s + R)(s - R) = a^2$'dir; ayrıca $s^2 > R^2$ ve $s, R \geq 0$ olduğundan $s - R > 0$'dır. Buradan $s + R = \frac{a^2}{s - R}$ ve

$$-\frac{1}{b}\ln\frac{s + R}{a} = -\frac{1}{b}\ln\frac{a}{s - R} = \frac{1}{b}\ln\frac{s - R}{a}.$$

Son olarak $bx + R = -(s - R)$ olduğundan $|\,bx + R\,| = s - R$'dir. Demek ki

$$-\frac{1}{b}\ln\frac{-bx + R}{a} + C = \frac{1}{b}\ln\frac{|\,bx + R\,|}{a} + C = \frac{1}{b}\ln\left|bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right| + C_1.$$

İki dalda da aynı formül çıktı.
Doğrulama. *$R = \sqrt{b^2x^2 - a^2}$ için $R' = \frac{b^2x}{R}$'dir. $bx + R \neq 0$ olduğu her noktada (birinci dalda $bx + R > 0$, ikinci dalda $bx + R = -(s - R) < 0$) logaritmanın türevi alınabilir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(\frac{1}{b}\ln|\,bx+R\,|\right)' = \frac{1}{b}\cdot\frac{b+\frac{b^2x}{R}}{bx+R} = \frac{1}{b}\cdot\frac{b(R+bx)}{R(bx+R)} = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}.$$

Doğru.
■

Özel hâller:

- $a=b=1$ alırsak $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$ ($|\,x\,|>1$).
- $b=1$ alırsak $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$ ($|\,x\,|>a$).

Örnek 23.3 (Sekant Dönüşümüyle İki Hesap). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}},\ x>\frac{2}{3}$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}},\ x>3$

Çözüm.
a) $a=2$, $b=3$'tür. Teorem 23.3 doğrudan uygulanır:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2-4}\right) + C,$$

son eşitlikte $x>\frac{2}{3}$ olduğundan logaritmanın argümanının pozitif olduğunu kullandık.
Doğrulama. $R=\sqrt{9x^2-4}$, $R'=\frac{9x}{R}$'dir:

$$\left(\frac{1}{3}\ln(3x+R)\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3+\frac{9x}{R}}{3x+R} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3(R+3x)}{R(3x+R)} = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-4}}.$$

Doğru.
b) $a=3$, $b=1$'dir. $x>3$ olduğundan $x=3\sec t$, $0<t<\frac{\pi}{2}$ alalım; bu dalda $dx=3\sec t\tan t\,dt$, $\sqrt{x^2-9}=3\tan t$ ($\tan t>0$) ve $x^2=9\sec^2 t$'dir:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int\frac{3\sec t\tan t\,dt}{9\sec^2 t\cdot 3\tan t} = \frac{1}{9}\int\frac{dt}{\sec t} = \frac{1}{9}\int\cos t\,dt = \frac{1}{9}\sin t + C.$$

Yardımcı üçgen: $\sec t=\frac{x}{3}$, yani hipotenüs x, komşu kenar 3, karşı kenar $\sqrt{x^2-9}$'dur; buradan $\sin t=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ ve

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

Doğrulama. Bölüm kuralıyla

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}\right)' = \frac{1}{9}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}-\sqrt{x^2-9}}{x^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^2-(x^2-9)}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$$

Doğru.
■

23.5 Hiperbolik Dönüşümler

Trigonometrik özdeşliklerin hiperbolik karşılıkları vardır (Tanım 5.2):

$$\cosh^2 t-\sinh^2 t=1 \quad\Rightarrow\quad 1+\sinh^2 t=\cosh^2 t, \qquad \cosh^2 t-1=\sinh^2 t.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu iki özdeşlik, $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ ve $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ kökleri için trigonometrik dönüşümlere tam bir alternatif sunar. Üstelik bazı bakımlardan daha rahattır: $\cosh t$ her zaman pozitiftir, dolayısıyla ilk kökte hiçbir işaret tartışması çıkmaz; ayrıca $\int \sec t\,dt$ gibi biraz hüner isteyen bir integrale gerek kalmaz, çünkü ortaya çıkan integral doğrudan $\int dt$ olur.

Önerme 23.2 (Hiperbolik Dönüşümler ve Ters Hiperbolik Biçimler). *$a, b > 0$ olsun.*

1. *$x = \dfrac{a}{b}\sinh t$ dönüşümü $t \in \mathbb{R}$ için birebir örtendir, $dx = \dfrac{a}{b}\cosh t\,dt$'dir ve $\sqrt{a^2+b^2x^2} = a\cosh t$ olur. Bu dönüşümle*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b}\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a} + C.$$

2. *$x = \dfrac{a}{b}\cosh t$ dönüşümü $t > 0$ için $x > \dfrac{a}{b}$ üzerine birebir örtendir, $dx = \dfrac{a}{b}\sinh t\,dt$'dir ve $\sqrt{b^2x^2-a^2} = a\sinh t$ olur. Bu dönüşümle, $x > \dfrac{a}{b}$ için*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{b}\operatorname{arccosh}\frac{bx}{a} + C = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{bx}{a} + \sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}-1}\right) + C.$$

$x < -\dfrac{a}{b}$ için ise $x = -\dfrac{a}{b}\cosh t$, $t > 0$ alınır ve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = -\frac{1}{b}\operatorname{arccosh}\left(-\frac{bx}{a}\right) + C$$

bulunur.

İspat.
1. $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *birebir örtendir ve tersi* $\operatorname{arcsinh}$*'tir; Teorem 5.6 gereği* $(\sinh t)' = \cosh t$*'dir. Kök sadeleşir:* $a^2+b^2x^2 = a^2(1+\sinh^2 t) = a^2\cosh^2 t$ *ve her* t *için* $\cosh t \geq 1 > 0$ *olduğundan* $\sqrt{a^2\cosh^2 t} = a\cosh t$*'dir — burada hiçbir dal ayrımı gerekmez. Şimdi*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \int \frac{\frac{a}{b}\cosh t\,dt}{a\cosh t} = \frac{1}{b}\int dt = \frac{t}{b} + C = \frac{1}{b}\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a} + C,$$

çünkü $x = \frac{a}{b}\sinh t$ *eşitliği* $t = \operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a}$ *demektir. Bu sonucun Teorem 23.2'ndaki logaritmik biçimden yalnızca* $\frac{\ln a}{b}$ *sabiti kadar farklı olduğunu orada görmüştük; iki ilkel fonksiyonun sabit farklı olması şaşırtıcı değildir (Sonuç 8.2).*
2. $\cosh$ *fonksiyonunun* $[0,\infty)$*'a kısıtlaması* $[1,\infty)$ *üzerine birebir örtendir ve tersi* $\operatorname{arccosh}$*'tur.* $t > 0$ *için* $\sinh t > 0$ *olduğundan* $b^2x^2-a^2 = a^2(\cosh^2 t - 1) = a^2\sinh^2 t$ *ve* $\sqrt{a^2\sinh^2 t} = a\sinh t$*'dir. Yerine koyalım:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \int \frac{\frac{a}{b}\sinh t\,dt}{a\sinh t} = \frac{1}{b}\int dt = \frac{t}{b} + C = \frac{1}{b}\operatorname{arccosh}\frac{bx}{a} + C.$$

Önerme 5.4 gereği $\operatorname{arccosh} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$ *$(u \geq 1)$ olduğundan ikinci ifade de elde edilir; bu, Teorem 23.3'ndaki logaritmik biçimden* $\frac{\ln a}{b}$ *kadar farklıdır.*
$x < -\frac{a}{b}$ *hâli için* $x = -\frac{a}{b}\cosh t$, $t > 0$ *alalım. Bu kez* $dx = -\frac{a}{b}\sinh t\,dt$*'dir; kök yine* $a\sinh t$*'dir, çünkü* b^2x^2 *işaretten bağımsızdır. O hâlde*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \int \frac{-\frac{a}{b}\sinh t\,dt}{a\sinh t} = -\frac{t}{b} + C = -\frac{1}{b}\operatorname{arccosh}\left(-\frac{bx}{a}\right) + C.$$

Doğrulama. *İki formülü de türev alarak sınayalım. Birincisi için Teorem 5.7 ve zincir kuralı:*

$$\left(\frac{1}{b}\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a}\right)' = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2}}}\cdot\frac{b}{a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}.$$

İkincisi için, $x > \frac{a}{b}$ *olduğunda* $\frac{bx}{a} > 1$*'dir ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(\frac{1}{b}\operatorname{arccosh}\frac{bx}{a}\right)' = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}-1}}\cdot\frac{b}{a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}.$$

$x < -\frac{a}{b}$ hâlinde ise iç fonksiyonun türevi $-\frac{b}{a}$ olduğundan iki eksi çarpışır ve aynı sonuç çıkar:

$$\left(-\frac{1}{b}\operatorname{arccosh}\left(-\frac{bx}{a}\right)\right)' = -\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}-1}}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}.$$

■

Hangisini seçmeli?

$\sqrt{a^2-b^2x^2}$ için pratikte tek seçenek sinüs dönüşümüdür. ($x = \frac{a}{b}\tanh t$ dönüşümü de kökü $a\operatorname{sech} t$ hâline getirir; ama $t \in \mathbb{R}$ yalnızca **açık** $\left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$ aralığını tarar ve ortaya çıkan sech kuvvetleri genellikle cos kuvvetlerinden daha zahmetlidir.) $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ ve $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ için ise iki dönüşüm de rahatça kullanılır. Pratik ölçüt şudur: integrandda kökün yanında $\boldsymbol{x}$ **kuvvetleri** varsa trigonometrik dönüşüm çoğunlukla daha kısa sürer (yardımcı üçgen her şeyi hemen verir); integrand **yalnızca kökten** ibaretse hiperbolik dönüşüm daha temizdir, çünkü $\int \sec t\,dt$ gibi ek hesaplar çıkmaz.

23.6 Temel İntegral Biçimleri

Şimdiye kadar bulduklarımızı, sıkça karşılaşılan birkaç kardeşiyle birlikte tek bir tabloda toplayalım ($a, b > 0$). Bu tablo ezberlenmek için değil, **tanınmak** için vardır: karşımıza çıkan bir integrali basit bir değişken değiştirmeyle bu satırlardan birine benzetebilirsek iş bitmiş demektir.

#	İntegral	Sonuç	Geçerlilik
1	$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$	$\frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a}+C$	$x \in \mathbb{R}$
2	$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2}$	$\frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a}+C = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{a+bx}{a-bx}\right\rvert+C$	$\lvert bx\rvert < a$
3	$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$	$-\frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a}+C$	$\lvert bx\rvert < a$
4	$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$	$-\frac{1}{ab}\operatorname{arccoth}\frac{bx}{a}+C = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{bx-a}{bx+a}\right\rvert+C$	$\lvert bx\rvert > a$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$	$\frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}+C$	$\lvert bx\rvert < a$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$	$\frac{1}{b}\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right)+C = \frac{1}{b}\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a}+C_1$	$x \in \mathbb{R}$
7	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$	$\frac{1}{b}\ln\left\lvert bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right\rvert+C$	$\lvert bx\rvert > a$

 CC BY-NC-SA 4.0

#	İntegral	Sonuç	Geçerlilik
8	$\displaystyle\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx$	$\displaystyle\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\arcsin\frac{bx}{a} + C$	$\mid bx \mid \le a$

Kök içeren satırların $a = b = 1$ ve $b = 1$ özel hâllerini ilgili teoremlerin ardında kaydetmiştik; kök içermeyen satırların en sık kullanılanları da şunlardır:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh}\, x + C \ (\mid x \mid < 1), \qquad \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \ (\mid x \mid \neq 1).$$

Beşinci ve altıncı satırları Teorem 23.1 ile Teorem 23.2'nda, yedinci satırı Teorem 23.3'nda, sekizinci satırı yine Teorem 23.1'nda türetmiştik. Geriye kalan dört satırı, yani kök içermeyen biçimleri, şimdi topluca türetelim.

Teorem 23.4 (Kök İçermeyen Standart Biçimlerin Türetimi). *$a, b > 0$ olsun.*

1. *Her $x \in \mathbb{R}$ için* $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a} + C.$
2. *$\mid bx \mid < a$ için*
$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a} + C = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| + C.$$
3. *$\mid bx \mid < a$ için* $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a} + C$*; $\mid bx \mid > a$ için*
$$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{1}{ab}\operatorname{arccoth}\frac{bx}{a} + C = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right| + C.$$

İspat.
1. Tanjant dönüşümüyle. *$x = \frac{a}{b}\tan t$, $dx = \frac{a}{b}\sec^2 t\,dt$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ alalım. Payda*

$$a^2 + b^2x^2 = a^2(1+\tan^2 t) = a^2\sec^2 t$$

olur ve $\sec^2 t$ sadeleşir:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{\frac{a}{b}\sec^2 t\,dt}{a^2\sec^2 t} = \frac{1}{ab}\int dt = \frac{t}{ab} + C = \frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a} + C.$$

Doğrulama. *Teorem 5.5 ve zincir kuralıyla*

$$\left(\frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a}\right)' = \frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{1+\frac{b^2x^2}{a^2}}\cdot\frac{b}{a} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{a^2+b^2x^2}.$$

2. Basit kesirlere ayırarak. *$a^2 - b^2x^2 = (a-bx)(a+bx)$ çarpanlarına ayrılır. Payı $\frac{1}{2a}$ katsayısıyla dağıtalım:*

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-bx} + \frac{1}{a+bx}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{(a+bx)+(a-bx)}{(a-bx)(a+bx)} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{2a}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{a^2-b^2x^2}.$$

Demek ki ayrışım doğrudur. İki terimi ayrı ayrı integralleyelim; $\mid bx \mid < a$ olduğundan $a - bx > 0$ ve $a + bx > 0$'dır:

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{b}\ln(a-bx) + \frac{1}{b}\ln(a+bx)\right) + C = \frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bx}{a-bx} + C.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu ifadeyi ters hiperbolik fonksiyon cinsinden yazalım. Önerme 5.4'de kaydettiğimiz açık formül $\operatorname{arctanh} u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}$ *(*$|\,u\,|<1$*) idi;* $u = \frac{bx}{a}$ *alıp pay ve paydayı* $a>0$ *ile çarparsak* $\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+bx}{a-bx}$ *bulunur. O hâlde*

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a} + C.$$

Aynı sonuç hiperbolik dönüşümle. $x = \frac{a}{b}\tanh t$ *alalım;* $|\,bx\,|<a$ *koşulu tam olarak* $|\tanh t\,|<1$*'e karşılık gelir. Teorem 5.6 gereği* $dx = \frac{a}{b}\operatorname{sech}^2 t\,dt$ *ve* $a^2-b^2x^2 = a^2(1-\tanh^2 t) = a^2\operatorname{sech}^2 t$ *olduğundan integral yine* $\frac{1}{ab}\int dt = \frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a} + C$ *verir.*
Trigonometrik dönüşüm de aynı sonucu verir. *Bu satırı* $x = \frac{a}{b}\sin t$ *ile de hesaplayabiliriz; sonucun yine logaritmik olması, dikkat edilmesi gereken bir noktadır. Gerçekten* $dx = \frac{a}{b}\cos t\,dt$ *ve* $a^2-b^2x^2 = a^2\cos^2 t$ *olduğundan*

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \int \frac{\frac{a}{b}\cos t\,dt}{a^2\cos^2 t} = \frac{1}{ab}\int \sec t\,dt = \frac{1}{ab}\ln|\sec t+\tan t\,| + C.$$

Yardımcı üçgenden $\sec t = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$, $\tan t = \frac{bx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$*'tir. O hâlde*

$$\frac{1}{ab}\ln\frac{a+bx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} + C = \frac{1}{2ab}\ln\frac{(a+bx)^2}{a^2-b^2x^2} + C = \frac{1}{2ab}\ln\frac{(a+bx)^2}{(a-bx)(a+bx)} + C = \frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bx}{a-bx} + C.$$

Üç yol da aynı yere çıktı.
Doğrulama. $|\,bx\,|<a$ *için*

$$\left(\frac{1}{2ab}\left[\ln(a+bx)-\ln(a-bx)\right]\right)' = \frac{1}{2ab}\left(\frac{b}{a+bx}+\frac{b}{a-bx}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{(a-bx)+(a+bx)}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{a^2-b^2x^2}.$$

3. $b^2x^2-a^2 = -(a^2-b^2x^2)$ *olduğundan üçüncü satır ikincinin işaret değiştirmişidir;* $|\,bx\,|<a$ *için*

$$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = -\frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a} + C.$$

Bunu doğrudan da görebiliriz: $x = \frac{a}{b}u$, $dx = \frac{a}{b}\,du$ *dönüşümüyle*

$$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = \int \frac{\frac{a}{b}\,du}{a^2(u^2-1)} = -\frac{1}{ab}\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{ab}\operatorname{arctanh} u + C,$$

çünkü Teorem 5.7 gereği $(\operatorname{arctanh} u)' = \frac{1}{1-u^2}$*'dir; geri koyarsak* $u = \frac{bx}{a}$*.*
$|\,bx\,|>a$ *hâlinde* $|\,u\,|>1$ *olur ve* $\operatorname{arctanh} u$ *tanımsızdır; onun yerine,* $|\,u\,|>1$ *için aynı türeve sahip olan* $\operatorname{arccoth}$ *devreye girer ve aynı hesap*

$$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = -\frac{1}{ab}\operatorname{arccoth}\frac{bx}{a} + C$$

verir. Logaritmik biçime geçmek için Önerme 5.4'deki $\operatorname{arccoth} u = \frac{1}{2}\ln\frac{u+1}{u-1}$ *(*$|\,u\,|>1$*) formülünü kullanalım:*

$$-\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{bx}{a}+1}{\frac{bx}{a}-1}\right| = -\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx+a}{bx-a}\right| = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|.$$

Bu son logaritmik biçim, mutlak değer sayesinde $b^2x^2\neq a^2$ *olan* ***her*** *aralıkta geçerlidir;* $\operatorname{arctanh}$ *ve* $\operatorname{arccoth}$ *biçimleri ise yalnızca kendi tanım aralıklarında çalışır.*
Doğrulama. $b^2x^2\neq a^2$ *olan her noktada*

$$\left(\frac{1}{2ab}\left[\ln|\,bx-a\,|-\ln|\,bx+a\,|\,\right]\right)' = \frac{1}{2ab}\left(\frac{b}{bx-a}-\frac{b}{bx+a}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{(bx+a)-(bx-a)}{b^2x^2-a^2} = \frac{1}{b^2x^2-a^2}.$$

Doğru.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Kök var mı, yok mu?

Tablodaki 2. ve 5. satırları karıştırmak çok kolaydır, çünkü ikisinde de $a^2 - b^2x^2$ ifadesi geçer. Ama sonuçları **taban tabana zıt** türdendir:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctanh}\frac{bx}{a} + C.$$

Karekök varsa sonuç **ters trigonometriktir** (arcsin); karekök yoksa sonuç **ters hiperboliktir** (yani logaritmiktir). Aynı ayrım $a^2 + b^2x^2$ için de geçerlidir: kök varsa arcsinh (logaritmik), kök yoksa arctan çıkar. Kaba bir hafıza kancası: *karekök işaretini kaldırdığınızda sonucun cinsi de değişir.* Her hesabın sonunda türev alarak sınamak, bu karışıklığın panzehiridir.

23.7 Tam Kareye Tamamlama

Yukarıdaki tablonun bütün satırlarında ikinci derece ifade $\pm a^2 \pm b^2x^2$ biçimindedir, yani **birinci dereceden terim içermez.** Oysa uygulamada karşımıza $x^2 + 4x + 8$ gibi tam bir ikinci derece polinom çıkar. Çare, ortaokuldan tanıdığımız **tam kareye tamamlamadır**: her ikinci derece polinom, uygun bir öteleme sonrası birinci dereceden terimden kurtulur.

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ polinomunu ele alalım. x^2'nin katsayısını dışarı alıp içerideki ilk iki terimi tam kareye tamamlarız:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Şimdi $u = x + \dfrac{b}{2a}$ dönüşümü yapalım; $du = dx$ olduğundan diferansiyel hiç değişmez. Diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac$ ile gösterirsek $ax^2 + bx + c = au^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ olur. Ortaya çıkan dört durumu ayıralım:

- $a > 0$, $\Delta < 0$: ifade $a(u^2 + k^2)$ biçimindedir, $k = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} > 0$. Kök içindeyse 6. satır, kök yoksa 1. satır uygulanır. İfade her x için pozitiftir.
- $a > 0$, $\Delta > 0$: ifade $a(u^2 - k^2)$ biçimindedir, $k = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Kök içindeyse 7. satır, kök yoksa 3. ya da 4. satır uygulanır.
- $a < 0$, $\Delta > 0$: ifade $|\,a\,|\,(k^2 - u^2)$ biçimindedir. Kök içindeyse 5. ya da 8. satır, kök yoksa 2. satır uygulanır.
- $a < 0$, $\Delta < 0$: ifade her x için negatiftir; karekökü reel değildir. Kök yoksa $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c} = -\dfrac{1}{|\,a\,|\,(u^2 + k^2)}$ yazılıp 1. satır kullanılır.

$\Delta = 0$ hâli ayrı bir dönüşüm gerektirmez: ifade $a(x - x_0)^2$ biçiminde tam kare olur ve tablo hiç devreye girmez. Kök yoksa integral doğrudan kuvvet kuralıyla alınır:

$$\int \frac{dx}{a(x - x_0)^2} = -\frac{1}{a(x - x_0)} + C \qquad (x \neq x_0).$$

Kök varsa ($a > 0$ olmak üzere) $\sqrt{a(x - x_0)^2} = \sqrt{a}\,|\,x - x_0\,|$ olduğundan iki dalı ayırmak gerekir: $x > x_0$ için integral $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(x - x_0) + C$, $x < x_0$ için ise $-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(x_0 - x) + C$'dir.

Örnek 23.4 (Tam Kareye Tamamlamayla İki Hesap). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$

Çözüm.
a) Önce kökün içini tam kareye tamamlayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^2+4x+8=(x^2+4x+4)+4=(x+2)^2+4.$$

Diskriminant $16-32=-16<0$ olduğundan ifade her x için pozitiftir; integral bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır. $u=x+2$, $du=dx$ dönüşümüyle integral $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}$ olur; bu, tablonun 6. satırıdır ($a=2$, $b=1$) ve $\ln\!\left(u+\sqrt{u^2+4}\right)+C$ verir. $u^2+4=x^2+4x+8$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}=\ln\!\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+8}\right)+C.$$

Aynı sonucu ters hiperbolik biçimde de yazabiliriz: $\operatorname{arcsinh}\dfrac{x+2}{2}+C_1$. İki ifade $\ln 2$ sabiti kadar farklıdır.

Doğrulama. $R=\sqrt{x^2+4x+8}$ yazalım; $R'=\dfrac{2x+4}{2R}=\dfrac{x+2}{R}$'dir. Zincir kuralıyla

$$\Big(\ln(x+2+R)\Big)'=\frac{1+\frac{x+2}{R}}{x+2+R}=\frac{\frac{R+x+2}{R}}{x+2+R}=\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}.$$

Doğru. (Sadeleştirme meşrudur, çünkü $R>|\,x+2\,|$ olduğundan $x+2+R>0$'dır.)

b) Paydayı tam kareye tamamlayalım:

$$x^2-6x+13=(x^2-6x+9)+4=(x-3)^2+4.$$

Diskriminant $36-52=-16<0$'dır; payda hiç sıfırlanmaz. $u=x-3$ ile integral $\int \frac{du}{u^2+4}$ olur; bu, tablonun 1. satırıdır ($a=2$, $b=1$) ve $\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}+C$ verir. O hâlde

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2}+C.$$

Doğrulama.

$$\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-3)^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4+(x-3)^2}=\frac{1}{(x-3)^2+4}=\frac{1}{x^2-6x+13}.$$

Doğru.

■

23.8 Doğrusal Paylı Karma Biçimler

Şimdi bölümün bütün araçlarını tek bir hesapta birleştirelim. Paydasında ikinci dereceden bir polinom (ya da onun karekökü), payında ise **birinci dereceden** bir polinom bulunan integraller çok sık karşımıza çıkar:

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \qquad \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Standart yöntem şudur: payı, **paydanın (ya da kök içinin) türevinin bir katı** ile bir sabitin toplamı olarak yazarız. Yani $D(x)=ax^2+bx+c$ ise $D'(x)=2ax+b$'dir ve

$$px+q=\frac{p}{2a}\,(\,2ax+b\,)+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)$$

yazarız. Böylece integral ikiye ayrılır: birinci parçada pay, kök içinin (ya da paydanın) türevidir; bu parça doğrudan $u=D(x)$ dönüşümüyle alınır ve $2\sqrt{D}$ ya da $\ln|\,D\,|$ verir. İkinci parçada pay sabittir; onu da tam kareye tamamlayarak tablodan okuruz.

Örnek 23.5 (Doğrusal Paylı Karma Örnekler). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

 CC BY-NC-SA 4.0

b) $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Çözüm.
a) Kök içi $D(x)=x^2+2x+5$'tir ve $D'(x)=2x+2$'dir. Payı bu türev artı sabit biçiminde yazalım:

$$2x+3=(2x+2)+1.$$

İntegrali ikiye ayıralım:

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \underbrace{\int \frac{(2x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}}_{I_2}.$$

Birinci parça. $u=x^2+2x+5$, $du=(2x+2)\,dx$ dönüşümüyle (burada $D(x)=(x+1)^2+4\geq 4>0$ olduğundan $\sqrt{u}$ hiç sıfırlanmaz)

$$I_1=\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C = 2\sqrt{x^2+2x+5}+C.$$

İkinci parça. Tam kareye tamamlayalım: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. $v=x+1$ ile

$$I_2=\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+4}} = \ln\!\left(v+\sqrt{v^2+4}\right)+C = \ln\!\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C.$$

Toplam.

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = 2\sqrt{x^2+2x+5}+\ln\!\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C,$$

ters hiperbolik biçimde ise $2\sqrt{x^2+2x+5}+\operatorname{arcsinh}\dfrac{x+1}{2}+C_1$.
Doğrulama. $R=\sqrt{x^2+2x+5}$ ve $R'=\dfrac{x+1}{R}$ olsun:

$$(2R)'=\frac{2x+2}{R},\qquad \Big(\ln(x+1+R)\Big)'=\frac{1+\frac{x+1}{R}}{x+1+R}=\frac{R+x+1}{R(x+1+R)}=\frac{1}{R}.$$

İki türevin toplamı $\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}$'tir. Doğru.
b) Kök içini tam kareye tamamlayalım:

$$3-2x-x^2=-(x^2+2x-3)=-\left[(x+1)^2-4\right]=4-(x+1)^2;$$

bu ifade ancak $\mid x+1\mid<2$, yani $-3<x<1$ iken pozitiftir. Payı $x+3=(x+1)+2$ biçiminde ayırıp $u=x+1$ koyarsak

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{u\,du}{\sqrt{4-u^2}} + 2\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}.$$

Birinci integralde $w=4-u^2$, $dw=-2u\,du$ dönüşümü $-\sqrt{4-u^2}$ verir; ikincisi tablonun 5. satırıdır ($a=2$, $b=1$) ve $2\arcsin\frac{u}{2}$ verir. O hâlde

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C,\qquad -3<x<1.$$

Doğrulama. $S=\sqrt{3-2x-x^2}$ için $S'=\dfrac{-(x+1)}{S}$, dolayısıyla $(-S)'=\dfrac{x+1}{S}$'dir; ayrıca

$$\left(2\arcsin\frac{x+1}{2}\right)' = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\frac{2}{S}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki türevin toplamı $\dfrac{x+3}{S}$'dir. Doğru.

■

i Bölümün özeti bir cümlede

İkinci dereceden bir ifade içeren integrali görünce sırasıyla şunu yapın: (i) **tam kareye tamamlayıp** öteleyin, böylece birinci dereceden terimden kurtulun; (ii) pay birinci dereceden ise onu **kök içinin türevi artı sabit** biçiminde parçalayın; (iii) geriye kalan sabit paylı parçayı **temel biçimler tablosundan** okuyun; tabloda yoksa uygun **trigonometrik ya da hiperbolik dönüşümü** kurun; (iv) sonucu **türev alarak sınayın.**

23.9 Alıştırmalar

Alıştırma 23.1 (Trigonometrik ve Hiperbolik Dönüşümler Üzerine).

a) $a, b > 0$ olmak üzere $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\,dx$ integralini hiperbolik dönüşümle hesaplayınız ve sonucu türev alarak doğrulayınız.

b) $a, b > 0$ ve $x > \dfrac{a}{b}$ olmak üzere $\displaystyle\int \sqrt{b^2x^2 - a^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 - 25}$ integralini hesaplayınız; sonucu hem logaritmik hem de ters hiperbolik biçimde yazınız ve hangi biçimin hangi aralıkta geçerli olduğunu belirtiniz.

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ integralini hesaplayınız ve tanım aralığını belirtiniz.

e) $\displaystyle\int \frac{(4x-1)\,dx}{x^2 + 2x + 10}$ integralini hesaplayınız.

f) $a, b > 0$ olmak üzere $F(x) = \dfrac{1}{b}\ln\!\left(bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$ ve $G(x) = \dfrac{1}{b}\operatorname{arcsinh}\dfrac{bx}{a}$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ üzerinde sabit farklı olduğunu iki farklı yolla gösteriniz: doğrudan hesapla ve türev üzerinden.

Çözüm.
a) Önerme 23.2'ün birinci maddesindeki dönüşümü kuralım:

$$x = \frac{a}{b}\sinh t, \qquad dx = \frac{a}{b}\cosh t\,dt, \qquad \sqrt{a^2 + b^2x^2} = a\cosh t, \qquad t = \operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a}.$$

Hiperbolik kuvvet indirgeme özdeşliği $\cosh^2 t = \dfrac{\cosh 2t + 1}{2}$'dir ($\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$ ile $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ eşitliklerinin toplanmasıyla çıkar); ayrıca $\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t$'dir. O hâlde

$$\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\,dx = \frac{a^2}{b}\int \cosh^2 t\,dt = \frac{a^2}{b}\left(\frac{\sinh t\cosh t}{2} + \frac{t}{2}\right) + C.$$

Geri dönüşte $\sinh t = \dfrac{bx}{a}$ ve $\cosh t = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{a}$, dolayısıyla $\sinh t\cosh t = \dfrac{bx\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{a^2}$'dir. Sonuç:

$$\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a} + C.$$

Doğrulama. $R = \sqrt{a^2 + b^2x^2}$ için

$$\left(\frac{x}{2}R\right)' = \frac{R}{2} + \frac{b^2x^2}{2R} = \frac{a^2 + 2b^2x^2}{2R}, \qquad \left(\frac{a^2}{2b}\operatorname{arcsinh}\frac{bx}{a}\right)' = \frac{a^2}{2b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{R} = \frac{a^2}{2R}$$

olduğundan toplamları $\dfrac{2(a^2+b^2x^2)}{2R} = R$ çıkar. Doğru.

b) Önerme 23.2'ün ikinci maddesindeki dönüşümü kuralım: $x = \dfrac{a}{b}\cosh t$, $t>0$, $dx = \dfrac{a}{b}\sinh t\,dt$ ve $\sqrt{b^2x^2-a^2} = a\sinh t$. $\sinh^2 t = \dfrac{\cosh 2t - 1}{2}$ ve $\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t$ olduğundan

$$\int \sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx = \frac{a^2}{b}\int \sinh^2 t\,dt = \frac{a^2}{b}\left(\frac{\sinh t\cosh t}{2} - \frac{t}{2}\right) + C.$$

Geri dönüşte $\cosh t = \dfrac{bx}{a}$, $\sinh t = \dfrac{\sqrt{b^2x^2-a^2}}{a}$ ve $t = \operatorname{arccosh}\dfrac{bx}{a}$ koyarsak

$$\int \sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2x^2-a^2} - \frac{a^2}{2b}\operatorname{arccosh}\frac{bx}{a} + C, \qquad x > \frac{a}{b}.$$

Doğrulama. $R = \sqrt{b^2x^2-a^2}$ için

$$\left(\frac{x}{2}R\right)' = \frac{R}{2} + \frac{b^2x^2}{2R} = \frac{2b^2x^2-a^2}{2R}, \qquad \left(\frac{a^2}{2b}\operatorname{arccosh}\frac{bx}{a}\right)' = \frac{a^2}{2b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{R} = \frac{a^2}{2R}$$

olduğundan fark $\dfrac{2(b^2x^2-a^2)}{2R} = R$ çıkar. Doğru.

c) $4x^2-25 = b^2x^2-a^2$ biçimindedir; $b=2$, $a=5$'tir. Teorem 23.4'nin üçüncü maddesi gereği logaritmik biçim

$$\int \frac{dx}{4x^2-25} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right| + C = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right| + C$$

olur ve bu ifade $x \neq \pm\frac{5}{2}$ olan **her** aralıkta geçerlidir. Ters hiperbolik biçimler ise aralığa göre değişir:

$$\int \frac{dx}{4x^2-25} = \begin{cases} -\frac{1}{10}\operatorname{arctanh}\frac{2x}{5} + C, & |\,x\,| < \frac{5}{2}, \\ -\frac{1}{10}\operatorname{arccoth}\frac{2x}{5} + C, & |\,x\,| > \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Sebebi, arctanh'ın tanım kümesinin $(-1,1)$, arccoth'unkinin $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ olmasıdır.

Doğrulama. Logaritmik biçimi türevleyelim; $x \neq \pm\frac{5}{2}$ için

$$\left(\frac{1}{20}\left[\ln|\,2x-5\,| - \ln|\,2x+5\,|\right]\right)' = \frac{1}{20}\left(\frac{2}{2x-5} - \frac{2}{2x+5}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{(2x+5)-(2x-5)}{4x^2-25} = \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{4x^2-25} = \frac{1}{4x^2-25}.$$

Doğru.

d) Kök içini tam kareye tamamlayalım:

$$2x - x^2 = -(x^2-2x) = -\left[(x-1)^2-1\right] = 1-(x-1)^2.$$

Bu ifadenin pozitif olması $|\,x-1\,| < 1$, yani $0<x<2$ demektir; integral bu aralıkta tanımlıdır. $u = x-1$ dönüşümüyle, tablonun 5. satırı ($a=b=1$) gereği

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin(x-1) + C.$$

Doğrulama. $0<x<2$ için

$$\big(\arcsin(x-1)\big)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Doğru.

e) Payda $D(x) = x^2+2x+10$'dur; diskriminant $4-40 = -36 < 0$ olduğundan payda hiç sıfırlanmaz ve integral bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır. $D'(x) = 2x+2$'dir; payı bu türevin katı artı sabit biçiminde yazalım:

$$4x - 1 = 2(2x+2) - 5.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerçekten $2(2x+2) = 4x+4$ ve $4x+4-5 = 4x-1$'dir. İntegral ikiye ayrılır:

$$\int \frac{(4x-1)\,dx}{x^2+2x+10} = 2\int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+10} - 5\int \frac{dx}{x^2+2x+10}.$$

Birinci parçada $u = x^2+2x+10 > 0$, $du = (2x+2)\,dx$ ile $2\int \frac{du}{u} = 2\ln(x^2+2x+10)$ elde edilir. İkinci parçada $x^2+2x+10 = (x+1)^2+9$ ve $v = x+1$ ile, tablonun 1. satırı ($a=3$, $b=1$) gereği $-5\int \frac{dv}{v^2+9} = -\frac{5}{3}\arctan\frac{x+1}{3}$ çıkar. Toplam:

$$\int \frac{(4x-1)\,dx}{x^2+2x+10} = 2\ln(x^2+2x+10) - \frac{5}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + C.$$

Doğrulama. $D = x^2+2x+10$ yazalım:

$$\Big(2\ln D\Big)' = \frac{4x+4}{D}, \qquad \Big(-\frac{5}{3}\arctan\frac{x+1}{3}\Big)' = -\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{9+(x+1)^2} = -\frac{5}{D}$$

olduğundan toplamları $\dfrac{4x-1}{x^2+2x+10}$'dur. Doğru.

f) *Doğrudan hesapla.* Açık formül $\operatorname{arcsinh} u = \ln\Big(u+\sqrt{u^2+1}\Big)$'dir (Önerme 5.4). $u = \dfrac{bx}{a}$ ve $a>0$ için $\sqrt{u^2+1} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}$ olduğundan

$$G(x) = \frac{1}{b}\ln\frac{bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a} = \frac{1}{b}\ln\Big(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\Big) - \frac{\ln a}{b}.$$

Demek ki her $x\in\mathbb{R}$ için $F(x)-G(x) = \frac{\ln a}{b}$'dir, yani fark sabittir. (Logaritmanın argümanı her zaman pozitiftir: $\sqrt{a^2+b^2x^2} > |\,bx\,| \geq -bx$'tir.)

Türev üzerinden. Teorem 23.2 ve Önerme 23.2'ün doğrulama hesaplarında gördüğümüz gibi her $x\in\mathbb{R}$ için $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = G'(x)$'tir. O hâlde $F-G$ fonksiyonunun türevi $\mathbb{R}$ üzerinde özdeş olarak sıfırdır; $\mathbb{R}$ bir aralık olduğundan Sonuç 8.1 (eşdeğer olarak Sonuç 8.2) gereği $F-G$ sabittir. Sabitin değerini bulmak için $x=0$ almak yeter: $F(0) = \frac{1}{b}\ln a$ ve $G(0)=0$ olduğundan sabit $\frac{\ln a}{b}$'dir.

Bu alıştırma sık karşılaşılan bir duruma dikkat çeker: aynı integralin farklı görünen iki cevabı olabilir ve ikisi de doğrudur. Ancak bu akıl yürütme yalnızca **bir aralık** üzerinde geçerlidir; tanım kümesi ayrık parçalardan oluşuyorsa her parçada sabit farklı olabilir.

■

Bu bölümle birlikte belirsiz integral hesabına ayırdığımız kısmı tamamlamış olduk. Ancak şimdiye kadar hep bir *fonksiyon ailesi* hesapladık; ne bir sayı ne bir alan. Sıradaki kısımda soruyu tersine çeviriyoruz: bir eğrinin altında kalan alan tam olarak nedir ve nasıl tanımlanır? Bu soruya bölünüşler ve Darboux toplamlarıyla cevap vereceğiz: Bölünüşler ve Darboux Toplamları.

 CC BY-NC-SA 4.0

24. Bölünüşler ve Darboux Toplamları

Trigonometrik Dönüşümler ve Temel İntegral Biçimleri bölümüyle birlikte belirsiz integral konusunu tamamladık. Orada hep aynı soruyu sorduk: verilen bir f fonksiyonunun türevi olan bir F fonksiyonunu nasıl buluruz? Bu soru cebirseldi; yanıtı da cebirseldi, yani bir formülden başka bir formüle geçiyorduk. Şimdi bambaşka bir soruya geçiyoruz ve bu soru **geometriktir**: bir eğrinin altında kalan bölgenin alanı nedir?

Sorunun tarihi eskidir. Arşimet, bir parabol parçasının alanını içine çizilen üçgenlerle tüketerek hesaplamıştı. Ancak alan ile teğet arasındaki bağın, yani **integral ile türevin ters işlemler olduğunun** anlaşılması 17. yüzyılı buldu; bu birleştirmeyi birbirlerinden bağımsız olarak Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz yaptı. Buna karşın onların "sonsuz küçükler" diliyle kurdukları hesap, bugünkü ölçütlere göre bir **tanım** değildi; hangi fonksiyonların böyle bir alanının bulunduğu sorusu açıkta kalmıştı. Bugün kullandığımız kesin tanımı, 19. yüzyılda Alman matematikçi Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) verdi. Riemann'ın tanımını supremum ve infimumla yeniden düzenleyen, böylece limit almadan yalnızca sıralama kullanarak çalışan biçimi ise Jean Gaston Darboux'ya borçluyuz; bu bölümde kuracağımız yapı odur.

Fikir çok basittir. Alanını merak ettiğimiz bölgeyi ince dikey şeritlere ayırırız. Her şeridin içine, o şeride sığan **en yüksek** dikdörtgeni; her şeridin dışına ise şeridi örten **en alçak** dikdörtgeni çizeriz. İçteki dikdörtgenlerin toplam alanı aradığımız alanı aşamaz, dıştakilerin toplam alanı ise ondan küçük olamaz. Böylece alan, iki sayı arasına sıkıştırılmış olur. Şeritleri inceltirsek bu iki sayı birbirine yaklaşır; eğer aralarındaki boşluk sıfıra kadar kapanıyorsa, ortak değer "alan" adını hak eder. Kapanmıyorsa, fonksiyonun bir alanından söz etmenin anlamı yoktur. Bu son cümle şaşırtıcı gelebilir; ama göreceğimiz gibi boşluğun kapanmadığı fonksiyonlar gerçekten vardır.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: bir kapalı aralığın **bölünüşü** (partition) ve bölünüşün **normu** (norm, mesh); sınırlı bir fonksiyonun bir bölünüşe göre **alt** ve **üst Darboux toplamları** (lower and upper Darboux sums); bu toplamların her zaman $m(b-a)$ ile $M(b-a)$ arasında kaldığı; bir bölünüşe nokta eklendiğinde alt toplamın büyüyüp üst toplamın küçüldüğünü söyleyen **incelme** (refinement) teoremi; buradan çıkan ve hiç de bariz olmayan sonuç: **herhangi** bir alt toplam **herhangi** bir üst toplamı aşamaz; ve nihayet **alt integral** ile **üst integral** kavramları. Bölümü, bir sonraki adımın anahtarı olan **salınım** (oscillation) kavramıyla kapatacağız.

24.1 Bölünüşler

Her şey aralığı parçalara ayırmakla başlar. Parçalar, uç noktaları seçilerek belirlenir.

Tanım 24.1 (Bölünüş). $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kapalı ve sınırlı bir aralık olsun ($a<b$). Sonlu bir

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$$

nokta kümesi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

koşulunu sağlıyorsa, P kümesine $[a,b]$ aralığının bir **bölünüşü** (partition) denir. P'nin belirlediği

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

kapalı aralıklarına P'nin **alt aralıkları**, I_k aralığının

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$$

uzunluğuna da k-inci **alt aralık uzunluğu** denir. $[a,b]$ aralığının bütün bölünüşlerinin oluşturduğu küme $\mathcal{P}[a,b]$ ile gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir bölünüşü belirtirken noktaları küçükten büyüğe sıralı yazmayı âdet ediniriz; nitekim P sonlu bir küme olduğundan noktalarını böyle sıralamanın **tek** bir yolu vardır. Ayrıca a ile b'nin P'ye ait olması zorunludur: bölünüş, aralığın tamamını kaplar.
Alt aralık uzunluklarının toplamı üzerine sık kullanacağımız basit ama önemli bir gözlemle başlayalım. Toplam **teleskopiktir**:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Ortadaki bütün terimler birbirini götürür; geriye yalnızca uçlar kalır. Yani bir bölünüş $[a, b]$ aralığının uzunluğunu n parçaya dağıtır, ama toplam uzunluğu değiştirmez. Bu eşitlik bölümdeki hemen her hesapta karşımıza çıkacak.
Bölünüşün "ne kadar ince" olduğunu ölçmek için tek bir sayı yeterlidir: en geniş parçanın uzunluğu.

Tanım 24.2 (Bölünüşün Normu ve Düzgün Bölünüş). $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir bölünüşü olsun.

- P'nin **normu** (norm, mesh), en uzun alt aralığın uzunluğudur:

$$\| P \| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, ..., n\}.$$

- Bütün alt aralıklar aynı uzunluktaysa, yani her k için

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

ise P'ye **düzgün bölünüş** (uniform partition) denir. n parçalı düzgün bölünüşü P_n ile göstereceğiz; noktaları

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad k = 0, 1, ..., n$$

ile verilir ve $\| P_n \| = \dfrac{b-a}{n}$'dir.

Norm sonlu bir kümenin maksimumu olduğundan her zaman vardır ve $0 < \| P \| \leq b - a$ eşitsizliğini sağlar. $\| P \|$ küçüldükçe bölünüş "incelir". Ama dikkat: norm **en kötü** parçaya bakar. Bir bölünüşün çok sayıda noktası olması normunun küçük olmasını gerektirmez; örneğin $[0, 1]$ üzerinde $Q = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{51}{100}, \frac{52}{100}, ..., 1\right\}$ bölünüşünde elli iki nokta bulunmasına karşın $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ parçası hiç bölünmediğinden $\| Q \| = \frac{1}{2}$'dir.

24.2 Alt ve Üst Darboux Toplamları

Şimdi aralığın üzerine bir fonksiyon koyalım. Her alt aralıkta iki dikdörtgen çizeceğiz: biri fonksiyonun o aralıktaki en küçük değeri yüksekliğinde, öteki en büyük değeri yüksekliğinde. Ama "en küçük değer" ve "en büyük değer" her zaman **alınmayabilir**; bu yüzden maksimum ve minimum yerine infimum ve supremum kullanırız. Bunların var olması için de f'nin **sınırlı** olması gerekir.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ bir bölünüş olsun. Her k için f'nin $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki değerler kümesi

$$f(I_k) = \{f(x) : x \in I_k\}$$

boş değildir (çünkü I_k boş değildir) ve sınırlıdır (çünkü f sınırlıdır). Supremumun varlık aksiyomu ve infimumun varlığı (bkz. Analiz 1) gereği bu kümenin hem infimumu hem supremumu vardır. Bunları

$$m_k = m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

ile gösteririz. Tanımları gereği her $x \in I_k$ için

$$m_k \leq f(x) \leq M_k$$

olur; yani m_k yüksekliğindeki dikdörtgen grafiğin altında, M_k yüksekliğindeki dikdörtgen grafiğin üstünde kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Sınırlılık vazgeçilmezdir

Darboux toplamlarının tanımlanabilmesi için f'nin $[a,b]$ üzerinde **sınırlı** olması şarttır. Örneğin $f(0)=0$ ve $x\in(0,1]$ için $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ile tanımlı fonksiyonda, 0'ı içeren her alt aralıkta $\sup f=+\infty$'dur; M_1 diye bir reel sayı yoktur, dolayısıyla $U(P,f)$ hiç kurulamaz. Bu yüzden bu bölüm boyunca **bütün fonksiyonlar sınırlı kabul edilir**. Sınırsız fonksiyonlar için "genelleştirilmiş integral" adı verilen ayrı bir kuram gerekir.

Tanım 24.3 (Alt ve Üst Darboux Toplamları). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon, $P=\{x_0<x_1<\cdots<x_n\}$ ise $[a,b]$'nin bir bölünüşü olsun. Yukarıdaki m_k ve M_k sayılarıyla

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k$$

sayısına f'nin P bölünüşüne göre **alt Darboux toplamı** (lower Darboux sum),

$$U(P,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k$$

sayısına da **üst Darboux toplamı** (upper Darboux sum) denir.

$f\ge 0$ olduğunda bu iki sayının anlamı doğrudan geometriktir: $L(P,f)$, tabanları I_k ve yükseklikleri m_k olan ve tamamı grafiğin altında kalan dikdörtgenlerin toplam alanıdır; $U(P,f)$ ise tabanları yine I_k, yükseklikleri M_k olan ve grafiği yukarıdan örten dikdörtgenlerin toplam alanıdır. Eğri altındaki bölgenin bir alanı varsa, bu alan zorunlu olarak

$$L(P,f)\le\text{eğri altındaki alan}\le U(P,f)$$

eşitsizliğini her P için sağlamalıdır. Şu anda "alan" henüz tanımlanmış bir kavram değildir; bu satır bir teorem değil, kurmakta olduğumuz tanımın hedefidir. Nitekim **alanı, tam da bu iki toplamın kıstırdığı sayı olarak tanımlayacağız.**
f'nin işaret değiştirdiği yerlerde dikdörtgenler ekseni altına iner ve katkıları negatif olur; bu durumda L ile U "işaretli alan" okumasına karşılık gelir. Tanım hiçbir yerde $f\ge 0$ varsayımına dayanmadığından, kuram bütün sınırlı fonksiyonlar için aynı biçimde işler.
İlk teoremimiz, bu iki toplamın nereye hapsolduğunu söyler. Toplamların bir yerde birikmesini bekliyorsak, önce onların ortalıkta serbestçe dolaşamadığını bilmemiz gerekir.

Önerme 24.1 (Darboux Toplamlarının Sınırları). *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun ve*

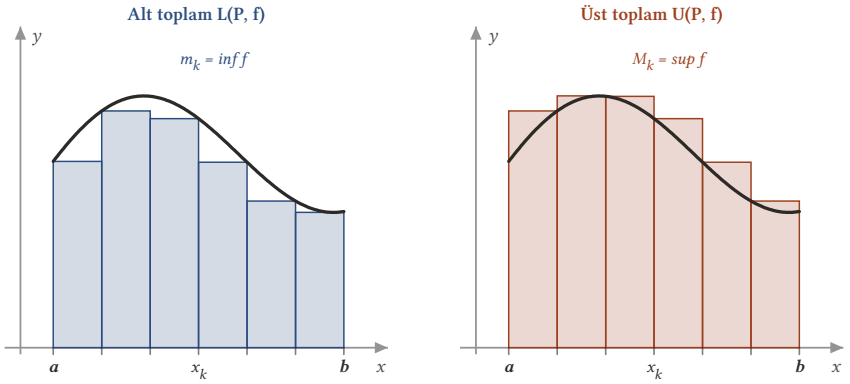
$$m=\inf\{f(x):x\in[a,b]\},\qquad M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$$

*yazalım. O hâlde $[a,b]$'nin **her** P bölünüşü için*

$$m(b-a)\le L(P,f)\le U(P,f)\le M(b-a)$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 24.1: Aynı bölünüş için alt ve üst Darboux toplamları. Solda her dikdörtgenin yüksekliği o alt aralıktaki infimum, *sağda* supremum*'dur; eğrinin altındaki alan her zaman ikisinin arasındadır. Bölünüş inceldikçe iki toplam birbirine yaklaşır — Riemann ölçütü tam bunu ister.*

İspat.
$P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ *olsun ve her zamanki gibi* m_k, M_k, Δx_k *yazalım. İspat üç gözlemden ibarettir.*
Adım 1: Her k ***için*** $m \le m_k \le M_k \le M$.
Bir k *sabitleyelim.* $I_k = [x_{k-1}, x_k] \subseteq [a,b]$ *olduğundan* $f(I_k) \subseteq f([a,b])$*'dir.* m, $f([a,b])$ *kümesinin bir alt sınırı olduğundan, bu kümenin bir alt kümesi olan* $f(I_k)$*'nin de bir alt sınırıdır;* m_k *ise* $f(I_k)$*'nin* ***en büyük*** *alt sınırı olduğundan*

$$m \le m_k$$

olur. Bakışımlı biçimde M, $f([a,b])$*'nin bir üst sınırıdır, dolayısıyla* $f(I_k)$*'nin de üst sınırıdır;* M_k *ise en küçük üst sınır olduğundan*

$$M_k \le M$$

olur. Ortadaki eşitsizlik için I_k *boş olmadığından bir* $x \in I_k$ *seçelim;* $m_k \le f(x) \le M_k$ *olduğundan* $m_k \le M_k$*'dir. Böylece*

$$m \le m_k \le M_k \le M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

elde edilir.
Adım 2: Δx_k ***ile çarpıp toplama.***
$\Delta x_k > 0$ *olduğundan, Adım 1'deki eşitsizlik zinciri* Δx_k *ile çarpıldığında yön değiştirmez:*

$$m\,\Delta x_k \le m_k\,\Delta x_k \le M_k\,\Delta x_k \le M\,\Delta x_k.$$

Bu eşitsizlikleri $k = 1$*'den* n*'ye kadar toplayalım. Sonlu sayıda eşitsizliğin taraf tarafa toplanması sıralamayı korur; dolayısıyla*

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta x_k$$

olur. Ortadaki iki toplam tam olarak $L(P,f)$ *ve* $U(P,f)$*'dir.*
Adım 3: Uçtaki toplamların hesabı.
m *ve* M *sabit sayılar olduğundan toplamın dışına çıkarılabilir; teleskopik toplam gereği* $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$ *olduğundan*

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta x_k = m\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = m(b-a), \qquad \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta x_k = M(b-a)$$

bulunur. Adım 2'deki zincirde bu değerleri yerine koyarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$$

elde ederiz. P keyfî olduğundan iddia bütün bölünüşler için doğrudur.
■

Bu önermenin iki sonucunu şimdiden not edelim, çünkü alt ve üst integralleri tanımlarken tam olarak bunlara dayanacağız:

- Bütün alt toplamların kümesi $\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$, $M(b-a)$ sayısıyla **yukarıdan sınırlıdır**;
- Bütün üst toplamların kümesi $\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$, $m(b-a)$ sayısıyla **aşağıdan sınırlıdır**.

Ayrıca her iki küme de boş değildir; örneğin $P = \{a, b\}$ bölünüşü her zaman kullanılabilir ve bu bölünüş için $L(P,f) = m(b-a)$, $U(P,f) = M(b-a)$ olur. Demek ki $\{L(P,f)\}$ kümesinin supremumu ile $\{U(P,f)\}$ kümesinin infimumu vardır.

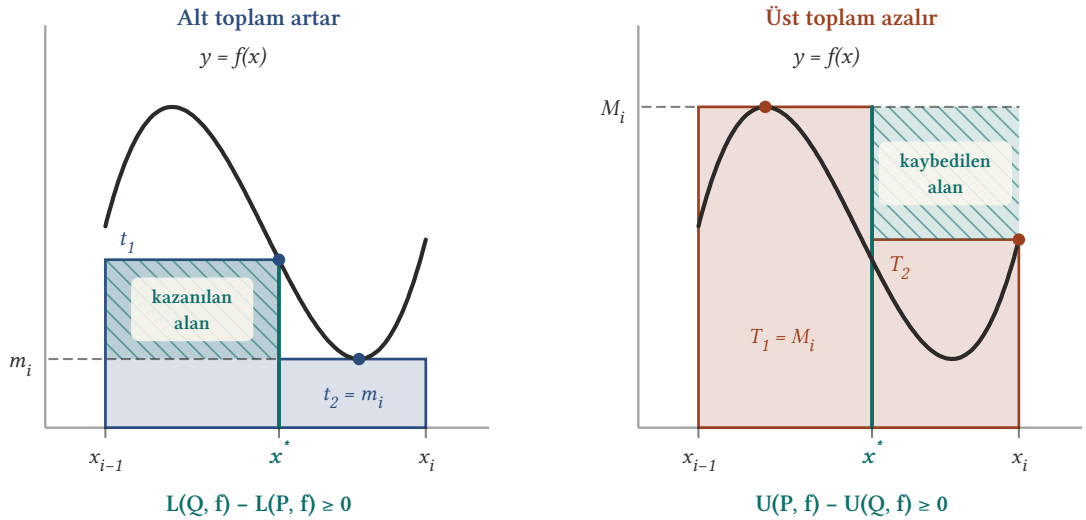
24.3 Bölünüşün İncelmesi

Bir bölünüşe yeni noktalar eklemek ne yapar? Sezgi açıktır: parçalar küçüldükçe, infimumlar alındığı kümeler daraldığı için büyür, supremumlar ise küçülür. Yani alt toplam yükselir, üst toplam alçalır; iki toplam birbirine yaklaşır. Bu, kuramın motorudur.
P ve Q, $[a,b]$'nin iki bölünüşü olsun. $P \subseteq Q$ ise, yani Q kümesi P'nin bütün noktalarını (ve belki fazladan noktalar) içeriyorsa, Q'ya P'nin bir **incelmesi** (refinement) denir. Q, P'nin noktalarını koruyup arasına yeni noktalar serpiştirdiği için Q'nun alt aralıkları P'nin alt aralıklarının parçalarıdır; buradan hemen $\| Q \| \leq \| P \|$ çıkar.

Teorem 24.1 (İncelme Teoremi). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon, P ve Q ise $[a,b]$'nin bölünüşleri olsun. $P \subseteq Q$ ise*

$$L(P,f) \leq L(Q,f) \qquad \text{ve} \qquad U(Q,f) \leq U(P,f)$$

olur. Kısacası bir bölünüş inceldikçe alt toplam azalmaz, üst toplam artmaz.



Şekil 24.2: Bir bölünüşe tek bir x^* noktası eklendiğinde yalnızca o noktanın içine düştüğü $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığının terimi değişir; öteki bütün terimler aynı kalır. Solda infimumlar alınır: t_1 ve t_2 sayıları daha küçük kümelerin en büyük alt sınırları olduğundan m_i'nin altına inemez, bu yüzden alt toplam yalnızca artabilir. Sağda supremumlar alınır: T_1 ve T_2 sayıları M_i'yi aşamaz, bu yüzden üst toplam yalnızca azalabilir. Taralı şeritler tam olarak kazanılan ve kaybedilen alanlardır: bölünüş inceldikçe L yükselir, U alçalır ve iki toplam birbirine yaklaşır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
*İspatı iki aşamada yapacağız: önce Q'nun P'den yalnızca **bir** nokta fazlası olduğu durumu çözeceğiz, sonra tümevarımla genel duruma geçeceğiz.*
Aşama 1: Tek nokta eklenmesi.
*$P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ ve $Q = P \cup \{x^*\}$ olsun; burada $x^* \notin P$'dir. $x^* \in [a,b]$ ve $x^* \neq x_j$ olduğundan, x^* tam olarak bir alt aralığın **içine** düşer: öyle bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ vardır ki*

$$x_{i-1} < x^* < x_i.$$

Alt toplamlar. *$L(P,f)$ ile $L(Q,f)$ toplamlarında $k \neq i$ olan bütün terimler aynıdır, çünkü o alt aralıklar ve dolayısıyla üzerlerindeki infimumlar hiç değişmemiştir. Fark yalnızca i-inci terimdedir. P'de bu terim*

$$m_i(x_i - x_{i-1})$$

iken, Q'da onun yerine iki terim gelir:

$$t_1(x^* - x_{i-1}) + t_2(x_i - x^*), \qquad t_1 = \inf_{[x_{i-1},x^*]} f, \quad t_2 = \inf_{[x^*,x_i]} f.$$

$[x_{i-1}, x^*] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$ olduğundan, m_i sayısı $f\left(\,[x_{i-1}, x^*]\,\right)$ kümesinin de bir alt sınırıdır; t_1 ise bu kümenin en büyük alt sınırı olduğundan

$$m_i \leq t_1$$

olur. Aynı gerekçeyle $m_i \leq t_2$'dir. Şimdi $x_i - x_{i-1} = (x^* - x_{i-1}) + (x_i - x^*)$ ayrışmasını kullanalım; iki uzunluk da pozitif olduğundan

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i(x^* - x_{i-1}) + m_i(x_i - x^*) \leq t_1(x^* - x_{i-1}) + t_2(x_i - x^*)$$

elde ederiz. Öteki bütün terimler ortak olduğundan, bu eşitsizliği toplamlara taşıdığımızda

$$L(P,f) \leq L(Q,f)$$

bulunur.
Üst toplamlar. *Aynı i indisi için Q'daki iki terimin yükseklikleri*

$$T_1 = \sup_{[x_{i-1},x^*]} f, \qquad T_2 = \sup_{[x^*,x_i]} f$$

olsun. Bu kez M_i, $f\left(\,[x_{i-1}, x_i]\,\right)$ kümesinin en küçük üst sınırıdır ve alt kümeler $f\left(\,[x_{i-1}, x^*]\,\right)$ ile $f\left(\,[x^*, x_i]\,\right)$ için de bir üst sınırdır; en küçük üst sınırlar bu üst sınırı aşamayacağından

$$T_1 \leq M_i \qquad \text{ve} \qquad T_2 \leq M_i$$

olur. Buradan

$$T_1(x^* - x_{i-1}) + T_2(x_i - x^*) \leq M_i(x^* - x_{i-1}) + M_i(x_i - x^*) = M_i(x_i - x_{i-1})$$

çıkar. Öteki terimler yine ortak olduğundan

$$U(Q,f) \leq U(P,f)$$

elde edilir. Aşama 1 tamamlandı.
Aşama 2: Tümevarım.
Şimdi genel duruma geçelim. $P \subseteq Q$ olsun ve $Q \setminus P$ kümesinin eleman sayısına p diyelim ($p \geq 0$; her iki küme de sonlu olduğundan p bir doğal sayı ya da sıfırdır). İddiamız şu önermedir:

$$\mathcal{A}(p): \quad P \subseteq Q \ \text{ ve } \ |\, Q \setminus P \,| = p \Rightarrow L(P,f) \leq L(Q,f) \ \text{ ve } \ U(Q,f) \leq U(P,f).$$

Temel adım. *$p = 0$ ise $Q \setminus P = \varnothing$ ve $P \subseteq Q$ olduğundan $Q = P$'dir. Bu durumda $L(P,f) = L(Q,f)$ ve $U(P,f) = U(Q,f)$ olduğundan iddia (eşitlik hâliyle) doğrudur.*
Tümevarım adımı. *$\mathcal{A}(p)$'nin doğru olduğunu varsayalım ve $|\, Q \setminus P \,| = p+1$ olsun. $Q \setminus P$ boş olmadığından bir $y \in Q \setminus P$ seçelim ve*

$$Q' = Q \setminus \{y\}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

diyelim. $y \notin P$ olduğundan $P \subseteq Q'$'dür; ayrıca $a, b \in P \subseteq Q'$ olduğundan Q' da $[a,b]$'nin bir bölünüşüdür. Üstelik

$$| Q' \setminus P | = | Q \setminus P | - 1 = p$$

olduğundan tümevarım varsayımı Q' için uygulanabilir:

$$L(P,f) \leq L(Q',f), \qquad U(Q',f) \leq U(P,f).$$

Öte yandan $Q = Q' \cup \{y\}$ ve $y \notin Q'$ olduğundan Q, Q''ye tek nokta eklenerek elde edilmiştir; Aşama 1 gereği

$$L(Q',f) \leq L(Q,f), \qquad U(Q,f) \leq U(Q',f).$$

İki eşitsizlik dizisini birleştirirsek

$$L(P,f) \leq L(Q',f) \leq L(Q,f), \qquad U(Q,f) \leq U(Q',f) \leq U(P,f)$$

olur; yani $\mathcal{A}(p+1)$ doğrudur. Tümevarım ilkesi (bkz. Analiz 1) gereği $\mathcal{A}(p)$ her $p \geq 0$ için doğrudur, dolayısıyla teorem her incelme için geçerlidir.
■

İncelme teoremi, aynı bölünüş ailesi içinde ilerledikçe alt toplamların yukarı, üst toplamların aşağı doğru hareket ettiğini söyler. Buna Önerme 24.1'ni eklersek şu resmi görürüz: bir bölünüşü sürekli inceltirsek L artan ve yukarıdan sınırlı, U ise azalan ve aşağıdan sınırlı olur. Ama şu ana kadar yalnızca **birbirini içeren** bölünüşleri karşılaştırabildik. Peki hiçbir ortak yanı olmayan iki bölünüşün toplamları arasında bir düzen var mıdır?

i Neden apaçık değil?

$P = \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\}$ ve $Q = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ bölünüşlerini düşünelim. Ne $P \subseteq Q$ ne de $Q \subseteq P$'dir; incelme teoremi bu ikisi hakkında tek kelime söylemez. Buna karşın $L(P,f) \leq U(Q,f)$ olmasını bekleriz: $L(P,f)$ "grafiğin altında kalan bir alan", $U(Q,f)$ ise "grafiği örten bir alan" olduğuna göre birincisi ikincisini aşmamalıdır. Bu beklentiyi ispata çevirmenin yolu, iki bölünüşü **ortak bir incelmede buluşturmaktır.**

Sonuç 24.1 (Her Alt Toplam Her Üst Toplamdan Küçüktür). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $[a,b]$'nin **herhangi** iki P ve Q bölünüşü için*

$$L(P,f) \leq U(Q,f)$$

olur.

İspat.
*$R = P \cup Q$ diyelim. P ve Q sonlu kümeler olduğundan R de sonludur; $a, b \in P \subseteq R$ olduğundan R'nin en küçük elemanı a, en büyük elemanı b'dir ve $R \subseteq [a,b]$'dir. Öyleyse R, $[a,b]$'nin bir bölünüşüdür. R'ye P ile Q'nun **ortak incelmesi** denir.*
Tanım gereği $P \subseteq R$ ve $Q \subseteq R$'dir. Teorem 24.1'yi önce $P \subseteq R$ çiftine (alt toplamlar için), sonra $Q \subseteq R$ çiftine (üst toplamlar için) uygulayalım; arada Önerme 24.1'nin ortadaki $L(R,f) \leq U(R,f)$ eşitsizliğini kullanacağız:

$$L(P,f) \underset{P \subseteq R}{\leq} L(R,f) \leq U(R,f) \underset{Q \subseteq R}{\leq} U(Q,f).$$

Zincirin iki ucunu okursak $L(P,f) \leq U(Q,f)$ elde ederiz. P ile Q keyfî seçildiğinden iddia ispatlanmıştır.
■

Bu sonucun anlamı şudur: **alt toplamlar kümesinin tamamı, üst toplamlar kümesinin tamamının solundadır.** Sayı doğrusunda alt toplamlar bir bölgeyi, üst toplamlar başka bir bölgeyi doldurur ve bu iki

 CC BY-NC-SA 4.0

bölge birbirinin içine geçmez. Aralarında bir boşluk olabilir; olmayabilir de. İntegrallenebilirlik sorusu, tam olarak bu boşluğun genişliğiyle ilgilidir.

24.4 Toplamların Hesabı: Üç Örnek

Tanımları somutlaştırmak için üç fonksiyonda toplamları elle hesaplayalım. Her üçünde de düzgün bölünüşü kullanacağız; düzgün bölünüşün üstünlüğü, Δx_k'nin toplamın dışına çıkabilmesidir.

Örnek 24.1 (Birim Fonksiyon). $f(x) = x$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki alt ve üst Darboux toplamlarını, n parçalı düzgün bölünüş P_n için hesaplayınız ve $n \to \infty$ iken davranışlarını belirleyiniz.

Çözüm.
P_n'nin noktaları $x_k = \dfrac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ ve alt aralık uzunlukları $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$'dir.
Adım 1: m_k ve M_k. $f(x) = x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır (Tanım 1.1). Artan bir fonksiyon $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında en küçük değerini sol uçta, en büyük değerini sağ uçta alır; her ikisi de gerçekten **alındığından** infimum ile minimum, supremum ile maksimum çakışır:

$$m_k = f(x_{k-1}) = \frac{k-1}{n}, \qquad M_k = f(x_k) = \frac{k}{n}.$$

Adım 2: Alt toplam. Tanımı yazıp $\dfrac{1}{n}$ çarpanlarını dışarı alalım:

$$L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{1}{n^2} \left(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) \right).$$

İlk $n-1$ doğal sayının toplamı $\dfrac{(n-1)n}{2}$ olduğundan

$$L(P_n, f) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Adım 3: Üst toplam. Benzer biçimde

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Adım 4: Değerlendirme. İki toplamı yan yana yazalım:

$$L(P_n, f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \qquad U(P_n, f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Buradan her n için

$$L(P_n, f) < \frac{1}{2} < U(P_n, f), \qquad U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{1}{n}$$

olur. $n \to \infty$ iken $\dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan (bkz. Analiz 1) her iki dizi de $\dfrac{1}{2}$ sayısına yakınsar:

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f) = \frac{1}{2}.$$

Alt toplamlar aşağıdan, üst toplamlar yukarıdan $\dfrac{1}{2}$ sayısına sokulur ve aradaki boşluk $\dfrac{1}{n}$ hızıyla kapanır. Bu hesabın $\dfrac{1}{2}$ sayısını neden "$f(x) = x$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerindeki integrali" yapmaya yettiğini, alt ve üst integralleri tanımladıktan sonra Önerme 24.2 ile göreceğiz.
■

Örnek 24.2 (Kare Fonksiyonu). $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki alt ve üst toplamlarını n parçalı düzgün bölünüş için hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Yine $x_k = \dfrac{k}{n}$ ve $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$'dir.
Adım 1: m_k ve M_k. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde artandır: $0 \le u < v \le 1$ ise $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u) > 0$'dır. Dolayısıyla

$$m_k = f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2, \qquad M_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Adım 2: Kareler toplamı formülü. Hesaplarda

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

eşitliğini kullanacağız (tümevarımla kolayca doğrulanır).
Adım 3: Üst toplam.

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Payı açarsak

$$U(P_n, f) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Adım 4: Alt toplam. Toplamda $j = k - 1$ değişken değişimi yapalım; k 1'den n'ye giderken j 0'dan $n-1$'e gider:

$$L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2.$$

Kareler toplamı formülünü n yerine $n-1$ ile uygularsak

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

olur, dolayısıyla

$$L(P_n, f) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Adım 5: Değerlendirme. $n \to \infty$ iken $\dfrac{1}{2n} \to 0$ ve $\dfrac{1}{6n^2} \to 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f) = \frac{1}{3}.$$

İki toplamın farkı ise

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{(2n^2 + 3n + 1) - (2n^2 - 3n + 1)}{6n^2} = \frac{6n}{6n^2} = \frac{1}{n}$$

olur; birim fonksiyondaki farkla aynı çıkması rastlantı değildir, bunun nedenini Önerme 24.3'dan sonra göreceğiz. Ayrıca her n için $L(P_n, f) < \dfrac{1}{3} < U(P_n, f)$ olduğuna dikkat edelim.
■

Örnek 24.3 (Sabit Fonksiyon). $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki bütün alt ve üst toplamlarını belirleyiniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ **herhangi** bir bölünüş olsun. Her k için f'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki değerler kümesi tek noktalı $\{c\}$ kümesidir; tek noktalı bir kümenin hem infimumu hem supremumu o noktanın kendisidir:

$$m_k = c, \qquad M_k = c.$$

Buradan teleskopik toplam gereği

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$$

ve aynı hesapla

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c(b-a)$$

bulunur. Yani sabit bir fonksiyon için **her** bölünüş aynı iki sayıyı verir ve bu iki sayı birbirine eşittir:

$$L(P,f) = U(P,f) = c(b-a) \qquad (\text{her } \ P \ \text{ için}) \ .$$

Alt toplamlar kümesi ile üst toplamlar kümesi tek noktalı $\{c(b-a)\}$ kümesine indiğinden, supremum ve infimum da $c(b-a)$'dır. Bu, bir dikdörtgenin alanının taban çarpı yükseklik olması gerektiği yolundaki en temel beklentiyi doğrular. ($c < 0$ ise $c(b-a) < 0$ çıkar; bu, işaretli alan okumasına uygundur.) ■

24.5 Alt İntegral ve Üst İntegral

Her bölünüş bize bir alt toplam ve bir üst toplam veriyor. Alt toplamlar alttan yaklaşan tahminler, üst toplamlar üstten yaklaşan tahminlerdir. Doğal olarak **en iyi** tahminleri arıyoruz: alt tahminlerin en büyüğünü ve üst tahminlerin en küçüğünü. Bunlar birer maksimum ya da minimum olmayabilir; bu yüzden supremum ve infimum kullanırız. Önerme 24.1'nin ardından not ettiğimiz sınırlılık gözlemleri sayesinde bu supremum ve infimum gerçekten vardır.

Tanım 24.4 (Alt İntegral ve Üst İntegral). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

- f'nin $[a,b]$ üzerindeki **alt integrali** (lower integral), bütün alt toplamların supremumudur:

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\ L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\ \right\}.$$

- f'nin $[a,b]$ üzerindeki **üst integrali** (upper integral), bütün üst toplamların infimumudur:

$$\overline{I}(f) = \inf\left\{\ U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\ \right\}.$$

Gösterim. Bu kitapta alt integral $\underline{I}(f)$, üst integral $\overline{I}(f)$ simgeleriyle yazılır. Aralık vurgulanmak istendiğinde $\underline{I}_a^b(f)$ ve $\overline{I}_a^b(f)$ yazılır. Bazı kaynaklarda bu iki sayı, integral işaretinin altına ve üstüne çizgi konarak gösterilir; biz her yerde $\underline{I}(f)$ ve $\overline{I}(f)$ gösterimini kullanacağız.

Tanımın anlamlı olduğunu bir kez daha vurgulayalım. $\mathcal{P}[a,b]$ boş değildir ($\{a,b\}$ bir bölünüştür), dolayısıyla söz konusu iki küme de boş değildir. Önerme 24.1 gereği alt toplamlar kümesi $M(b-a)$ ile yukarıdan, üst toplamlar kümesi $m(b-a)$ ile aşağıdan sınırlıdır. Supremumun varlığı ve infimumun varlığı (bkz. Analiz 1) gereği $\underline{I}(f)$ ile $\overline{I}(f)$ birer reel sayıdır. Ayrıca $\{a,b\}$ bölünüşünün verdiği değerlerle karşılaştırırsak

$$m(b-a) \le \underline{I}(f) \qquad \text{ve} \qquad \overline{I}(f) \le M(b-a)$$

olduğunu da görürüz.
Tanımın doğrudan iki sonucunu, sık kullanacağımız için ayrıca yazalım. Supremum bir üst sınır, infimum bir alt sınır olduğundan **her** P bölünüşü için

$$L(P,f) \le \underline{I}(f) \qquad \text{ve} \qquad \overline{I}(f) \le U(P,f).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi bu iki sayı arasındaki ilişkiyi kuralım. Adlarından beklediğimiz sıralamanın gerçekten geçerli olduğunu görmek, Sonuç 24.1'nin ilk ciddi meyvesidir.

Teorem 24.2 (Alt İntegral Üst İntegrali Aşmaz). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. O hâlde*

$$\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$$

olur. Dahası

$$m(b-a) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le M(b-a)$$

geçerlidir; burada $m = \inf_{[a,b]} f$ ve $M = \sup_{[a,b]} f$'dir.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: Sabit bir Q için supremum alma.***
> *Q bir bölünüş olsun ve şimdilik sabit tutalım. Sonuç 24.1 gereği **her** P bölünüşü için*
>
> $$L(P,f) \le U(Q,f)$$
>
> *olur. Bu, $U(Q,f)$ sayısının $\{\, L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \,\}$ kümesinin bir **üst sınırı** olduğunu söyler. Supremum, en küçük üst sınır olduğundan hiçbir üst sınırı aşamaz:*
>
> $$\underline{I}(f) = \sup_P L(P,f) \le U(Q,f).$$
>
> ***Adım 2: Şimdi Q üzerinde infimum alma.***
> *Adım 1'de Q keyfiydi; dolayısıyla elde ettiğimiz eşitsizlik her Q bölünüşü için geçerlidir. Bu, $\underline{I}(f)$ sayısının $\{\, U(Q,f) : Q \in \mathcal{P}[a,b] \,\}$ kümesinin bir **alt sınırı** olduğunu söyler. İnfimum, en büyük alt sınır olduğundan hiçbir alt sınırın altına inmez:*
>
> $$\underline{I}(f) \le \inf_Q U(Q,f) = \overline{I}(f).$$
>
> ***Adım 3: Uçtaki eşitsizlikler.***
> *$P_0 = \{a,b\}$ bölünüşünü alalım. Bu bölünüşün tek bir alt aralığı vardır: $I_1 = [a,b]$ ve $\Delta x_1 = b-a$'dır. Bu alt aralık üzerindeki infimum ile supremum, bütün aralıktaki m ve M sayılarının kendisi olduğundan*
>
> $$L(P_0,f) = m_1\,\Delta x_1 = m(b-a), \qquad U(P_0,f) = M_1\,\Delta x_1 = M(b-a)$$
>
> *olur. Supremum ve infimum tanımları gereği*
>
> $$m(b-a) = L(P_0,f) \le \underline{I}(f), \qquad \overline{I}(f) \le U(P_0,f) = M(b-a).$$
>
> *Bu üç eşitsizliği birleştirirsek istenen zincir elde edilir.*
> ■

Böylece her sınırlı fonksiyona iki sayı iliştirmiş olduk: $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$. Bu iki sayı **eşitse** fonksiyona integrallenebilir diyeceğiz ve ortak değere integral adını vereceğiz; **farklıysa** fonksiyonun integrali yoktur. Bu ayrımın ayrıntılı incelemesi bir sonraki bölümün konusudur; burada, bu iki sayıyı somut fonksiyonlarda nasıl bulacağımıza odaklanacağız.

Alt ve üst integrali doğrudan tanımdan hesaplamak zordur; çünkü tanım, **bütün** bölünüşler üzerinde bir supremum/infimum ister ve bölünüşler sınıfı çok büyüktür. Neyse ki tek bir bölünüş **dizisi** çoğu zaman yeter.

Önerme 24.2 (Bölünüş Dizisiyle Sıkıştırma). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve (P_n) de $[a,b]$'nin bölünüşlerinden oluşan bir dizi olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = A$$

ise

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = A$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Her n için, tanımın doğrudan sonuçları ve Teorem 24.2 bir araya getirilirse

$$L(P_n,f)\leq \underline{I}(f)\leq \overline{I}(f)\leq U(P_n,f)$$

zinciri elde edilir. Buradaki $\underline{I}(f)$ ve $\overline{I}(f)$ sayıları n'den bağımsız sabitlerdir.
Şimdi $n\to\infty$ limitine geçelim. Yakınsak dizilerde sıralama korunduğundan, soldaki eşitsizlikten

$$A=\lim_{n\to\infty} L(P_n,f)\leq \underline{I}(f),$$

sağdaki eşitsizlikten de

$$\overline{I}(f)\leq \lim_{n\to\infty} U(P_n,f)=A$$

elde ederiz. Ortadaki $\underline{I}(f)\leq\overline{I}(f)$ eşitsizliğiyle birlikte

$$A\leq \underline{I}(f)\leq \overline{I}(f)\leq A$$

olur; bir zincirin iki ucu eşitse bütün ara terimler de eşittir. Öyleyse $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=A$'dır.
■

Bu önerme, yaptığımız hesapları anında sonuca bağlar.

- Örnek 24.1'nda $f(x)=x$ için $L(P_n,f)\to\frac{1}{2}$ ve $U(P_n,f)\to\frac{1}{2}$ bulmuştuk. Öyleyse

$$\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=\frac{1}{2}.$$

- Örnek 24.2'nda $f(x)=x^2$ için her iki limit de $\frac{1}{3}$ çıkmıştı. Öyleyse

$$\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=\frac{1}{3}.$$

- Örnek 24.3'da $f\equiv c$ için bütün toplamlar $c(b-a)$'ya eşitti; sabit bir dizi kendi değerine yakınsadığından

$$\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=c(b-a).$$

Üç fonksiyonda da alt ve üst integral çakıştı. Bu üç fonksiyon, bir sonraki bölümde tanımlayacağımız anlamda integrallenebilirdir ve integralleri sırasıyla $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ve $c(b-a)$'dır. Şimdi işlerin ters gittiği bir fonksiyona bakalım.

> ⚠ Limit hangi yönde?
>
> Önerme 24.2'da iki limitin **aynı** sayıya gitmesi şarttır. Yalnızca $L(P_n,f)$'nin bir limiti olması ya da yalnızca $\|P_n\|\to 0$ olması hiçbir şey söylemez: az sonra göreceğimiz Dirichlet fonksiyonunda her iki dizi de yakınsar (biri 0'a, öteki 1'e) ve normlar sıfıra gider; buna karşın alt ve üst integraller farklıdır. Sıkıştırma, ancak boşluk kapandığında çalışır.

Örnek 24.4 (Dirichlet Fonksiyonu). $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

ile tanımlansın (Dirichlet fonksiyonu). f'nin alt ve üst integrallerini hesaplayınız.

Çözüm.
f sınırlıdır: bütün değerleri $\{0,1\}$ kümesinde olduğundan $0\leq f(x)\leq 1$'dir. Dolayısıyla Darboux toplamları tanımlıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Bir alt aralıkta infimum ve supremum. $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ herhangi bir bölünüş ve $[x_{k-1}, x_k]$ herhangi bir alt aralığı olsun. $x_{k-1} < x_k$ olduğundan (x_{k-1}, x_k) boş olmayan bir açık aralıktır. Rasyonel sayıların yoğunluğu (bkz. Analiz 1) gereği bu aralıkta bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır; irrasyonel sayıların yoğunluğu (bkz. Analiz 1) gereği bir $s \notin \mathbb{Q}$ vardır. O hâlde

$$f(r) = 1 \quad \text{ve} \quad f(s) = 0$$

olduğundan f'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki değerler kümesi tam olarak $\{0, 1\}$'dir. Buradan

$$m_k = \inf\{0, 1\} = 0, \qquad M_k = \sup\{0, 1\} = 1$$

çıkar. Dikkat: bu, **hangi** bölünüşü aldığımızdan ve alt aralıkların ne kadar küçük olduğundan tümüyle bağımsızdır. Bölünüşü ne kadar incelttiğimiz bir şeyi değiştirmez; rasyoneller ve irrasyoneller her aralıkta iç içedir.
Adım 2: Toplamlar. Teleskopik toplamla

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0, \qquad U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1.$$

Yani her bölünüş için $L(P, f) = 0$ ve $U(P, f) = 1$'dir.
Adım 3: Alt ve üst integral. Alt toplamlar kümesi $\{0\}$, üst toplamlar kümesi $\{1\}$ olduğundan

$$\underline{I}(f) = \sup\{0\} = 0, \qquad \overline{I}(f) = \inf\{1\} = 1.$$

Sonuç. $0 \neq 1$ olduğundan Dirichlet fonksiyonunda alt ve üst integral **çakışmaz**; aralarındaki boşluk hiçbir bölünüşle daraltılamaz, hep 1 genişliğinde kalır. Bu fonksiyon bir sonraki bölümde tanımlayacağımız anlamda integrallenebilir **değildir**; kurduğumuz kuramda "integrali olmayan sınırlı fonksiyon" diye bir şeyin gerçekten var olduğunu gösteren ilk örnektir. Not edelim ki Teorem 24.2 burada da doğrudur: $\underline{I}(f) = 0 \leq 1 = \overline{I}(f)$.
■

Dirichlet fonksiyonu bize önemli bir ders verir: alt ve üst integralin çakışması, fonksiyonun **düzenliliğiyle** ilgili bir koşuldur. Her alt aralıkta $M_k - m_k$ farkı büyük kaldığı sürece boşluk kapanmaz. İşte bu fark, bölümün son kavramıdır.

24.6 Salınım

Alt ve üst toplamların farkına bakmak, integrallenebilirliği incelemenin en pratik yoludur; çünkü bu fark, iki ayrı toplamı karşılaştırmak yerine **tek bir toplam** olarak yazılabilir.

Tanım 24.5 (Bir Küme Üzerinde Salınım). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $A \subseteq [a, b]$ boş olmayan bir alt küme olsun. f'nin A üzerindeki **salınımı** (oscillation)

$$\omega(f, A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

sayısıdır. $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ bir bölünüş olduğunda, f'nin k-inci alt aralıktaki salınımı için kısaca

$$\omega_k = \omega\left(f, [x_{k-1}, x_k]\right) = M_k - m_k$$

yazarız.

$m_k \leq M_k$ olduğundan her zaman $\omega_k \geq 0$'dır. Salınım, "fonksiyon bu alt aralıkta ne kadar oynuyor?" sorusunun sayısal yanıtıdır: $\omega_k = 0$ demek f'nin o alt aralıkta sabit olması, ω_k'nin büyük olması ise fonksiyonun orada geniş bir aralığa yayılması demektir.
Salınımın en kullanışlı özelliği, supremum ve infimumu tek tek bilmeye gerek kalmadan, yalnızca **değer farklarıyla** ifade edilebilmesidir. Bir sonraki bölümde integrallenebilirliği süreklilikle bağlarken tam olarak bu biçimi kullanacağız: düzgün süreklilik bize $|f(s) - f(t)|$ üzerinde denetim verir, salınım da doğrudan bu farklardan okunur.

Önerme 24.3 (Üst ve Alt Toplamın Farkı). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

a) Boş olmayan her $A \subseteq [a,b]$ için

$$\omega(f,A) = \sup\left\{ \mid f(s) - f(t) \mid : s,t \in A \right\}.$$

b) $[a,b]$'nin her $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ bölünüşü için

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\Delta x_k \geq 0.$$

İspat.
(a) *$\alpha = \sup_A f$, $\beta = \inf_A f$ ve*

$$S = \sup\left\{ \mid f(s) - f(t) \mid : s,t \in A \right\}$$

yazalım. Önce S'nin var olduğunu görelim: A boş olmadığından söz konusu küme boş değildir; ayrıca her $s,t \in A$ için $\beta \leq f(s) \leq \alpha$ ve $\beta \leq f(t) \leq \alpha$ olduğundan $\mid f(s) - f(t) \mid \leq \alpha - \beta$'dır, yani küme yukarıdan sınırlıdır. Öyleyse S bir reel sayıdır. İki yönlü eşitsizlik göstereceğiz.
Yön 1: *$S \leq \alpha - \beta$. Yukarıdaki gözlemi tekrarlayalım. $s,t \in A$ olsun. Genelliği bozmadan $f(s) \geq f(t)$ diyebiliriz (aksi hâlde s ile t'nin rollerini değiştiririz; $\mid f(s) - f(t) \mid$ bu değişimden etkilenmez). O hâlde*

$$\mid f(s) - f(t) \mid = f(s) - f(t) \leq \alpha - \beta,$$

çünkü $f(s) \leq \alpha$ ve $-f(t) \leq -\beta$'dır. Demek ki $\alpha - \beta$ sayısı $\left\{ \mid f(s) - f(t) \mid : s,t \in A \right\}$ kümesinin bir üst sınırıdır; supremum en küçük üst sınır olduğundan $S \leq \alpha - \beta$ olur.
Yön 2: *$\alpha - \beta \leq S$. $\varepsilon > 0$ verilsin. Supremumun ε-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği öyle bir $s \in A$ vardır ki*

$$f(s) > \alpha - \frac{\varepsilon}{2};$$

infimumun ε-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği de öyle bir $t \in A$ vardır ki

$$f(t) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bu iki eşitsizliği taraf tarafa çıkarırsak

$$f(s) - f(t) > \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\beta + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \alpha - \beta - \varepsilon$$

olur. $\mid f(s) - f(t) \mid \geq f(s) - f(t)$ ve $S \geq \mid f(s) - f(t) \mid$ olduğundan

$$S > \alpha - \beta - \varepsilon$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ keyfî olduğundan $S \geq \alpha - \beta$'dır: gerçekten de $S < \alpha - \beta$ olsaydı, $\varepsilon = \alpha - \beta - S > 0$ seçildiğinde $S > \alpha - \beta - \varepsilon = S$ gibi bir saçmalık çıkardı.
İki yön birleşince $S = \alpha - \beta = \omega(f,A)$ bulunur.
(b) *Tanımları yazıp toplamları birleştirelim. Her iki toplam da $k = 1$'den n'ye gittiğinden*

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\,\Delta x_k$$

olur. Her k için $\omega_k \geq 0$ ve $\Delta x_k > 0$ olduğundan toplamın her terimi negatif değildir; dolayısıyla $U(P,f) - L(P,f) \geq 0$'dır. (Bu eşitsizliği Önerme 24.1'nde başka bir yoldan da elde etmiştik.)
■

(b) maddesindeki formül, bir sonraki bölümün anahtarıdır. $U(P,f) - L(P,f)$ farkını küçültmek istiyorsak, $\omega_k\,\Delta x_k$ çarpımlarının toplamını küçültmemiz gerekir. Bunun iki yolu vardır ve pratikte ikisi birden kullanılır:

- **Salınımları küçültmek.** f düzgün sürekliyse, alt aralıklar yeterince kısa olduğunda bütün ω_k'ler istediğimiz kadar küçük yapılabilir; $\sum \Delta x_k = b - a$ sabit olduğundan toplam da küçülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

- **Toplam uzunluğu küçültmek.** ω_k'nin büyük kaldığı alt aralıklar varsa (örneğin f'nin sıçradığı noktaların çevresinde), bu aralıkların **toplam uzunluğunu** küçük tutmak yeterlidir; oradaki katkı $\omega_k \Delta x_k \le \omega(f,[a,b]) \cdot \Delta x_k$ ile sınırlanır.

Dirichlet fonksiyonunda ise her iki yol da tıkanır: her alt aralıkta $\omega_k = 1 - 0 = 1$'dir, dolayısıyla bölünüş ne olursa olsun

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1$$

çıkar ve fark asla küçülmez. Örnek 24.4'te bulduğumuz $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) = 1$ değerinin nedeni tam olarak budur.
Buna karşılık monoton fonksiyonlarda hesap çok temizdir; Örnek 24.1 ile Örnek 24.2'nda farkın ikisinde de $\dfrac{1}{n}$ çıkmasının nedeni de budur. f, $[a,b]$ üzerinde artansa (bkz. Analiz 1) her alt aralıkta $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$ olur, dolayısıyla $\omega_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$'dir. n parçalı düzgün bölünüş için $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ sabit olduğundan toplam teleskopik hâle gelir:

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1}) \big) = \frac{(b-a)\,\big(f(b) - f(a) \big)}{n}.$$

Her iki örnekte de $b-a = 1$ ve $f(1) - f(0) = 1$ olduğundan fark $\dfrac{1}{n}$ çıkar. Bu gözlem, monoton fonksiyonların integrallenebilirliğinin ispatının tamamıdır; alıştırmalarda bunu ayrıntılandıracağız.

24.7 Alıştırmalar

Alıştırma 24.1 (Bölünüşler ve Darboux Toplamları Üzerine).

a) $f(x) = x$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığındaki n parçalı düzgün bölünüşe göre alt ve üst toplamlarını hesaplayınız, farklarını bulunuz ve $\underline{I}(f)$ ile $\overline{I}(f)$ değerlerini belirleyiniz.

b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon olsun. n parçalı düzgün bölünüş P_n için

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) = \frac{(b-a)\,\big(f(b) - f(a) \big)}{n}$$

olduğunu gösteriniz ve buradan $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ sonucunu çıkarınız. (Artan bir fonksiyonun sınırlı olduğunu da doğrulayınız.)

c) $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki düzgün bölünüşe göre alt ve üst toplamlarını, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ formülünü kullanarak hesaplayınız ve alt ile üst integrali bulunuz.

d) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, x rasyonel ise $g(x) = 1$, irrasyonel ise $g(x) = -1$ olarak tanımlansın. Her bölünüş için $L(P,g)$, $U(P,g)$ ve ω_k değerlerini bulunuz; $\underline{I}(g)$ ile $\overline{I}(g)$'yi belirleyiniz.

e) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı ve her x için $|\, f(x) \,| \le K$ olsun. P bir bölünüş olsun ve Q bölünüşü, P'ye p tane nokta eklenerek elde edilsin. O hâlde

$$0 \le U(P,f) - U(Q,f) \le 2Kp \,\|\, P \,\|$$

olduğunu gösteriniz.

f) $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki n parçalı düzgün bölünüşe göre ω_k salınımlarını hesaplayınız ve $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$ toplamının Önerme 24.3 ile uyumlu olduğunu doğrulayınız. Ayrıca Önerme 24.3 (a) maddesini bu örnekte, $\sup\{|\, f(s) - f(t) \,|\}$ hesabını doğrudan yaparak sınayınız.

> **Çözüm.**
> **a)** P_n'nin noktaları $x_k = \dfrac{2k}{n}$ ve alt aralık uzunlukları $\Delta x_k = \dfrac{2}{n}$'dir. $f(x) = x$ artan olduğundan
>
> $$m_k = \frac{2(k-1)}{n}, \qquad M_k = \frac{2k}{n}.$$

Alt toplam:

$$L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(k-1)}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{4}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n}.$$

Üst toplam:

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{n} = 2 + \frac{2}{n}.$$

Fark $U(P_n, f) - L(P_n, f) = \dfrac{4}{n}$'dir. Her iki dizi de 2'ye yakınsadığından Önerme 24.2 gereği

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = 2.$$

Bu, tabanı 2 ve yüksekliği 2 olan dik üçgenin alanı $\dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$ ile uyumludur.

b) Önce sınırlılık: f artan olduğundan her $x \in [a, b]$ için $a \le x \le b$ eşitsizliği $f(a) \le f(x) \le f(b)$ verir; öyleyse f sınırlıdır ve Darboux toplamları tanımlıdır. Ayrıca $m = f(a)$, $M = f(b)$'dir.

P_n düzgün bölünüş olsun; $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$'dir. f artan olduğundan $[x_{k-1}, x_k]$ üzerinde en küçük değer sol uçta, en büyük değer sağ uçta alınır:

$$m_k = f(x_{k-1}), \qquad M_k = f(x_k), \qquad \omega_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

Önerme 24.3 (b) gereği

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(\, f(x_k) - f(x_{k-1}) \, \big) \, .$$

Sondaki toplam teleskopiktir: ardışık terimlerde $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$ değerleri bir kez artı bir kez eksi işaretle görünüp götürülür, geriye yalnızca $f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$ kalır. Böylece

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{(b-a) \, \big(\, f(b) - f(a) \, \big)}{n}$$

bulunur.

Şimdi sonucu çıkaralım. Her n için

$$0 \le \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{(b-a) \, \big(\, f(b) - f(a) \, \big)}{n}$$

olur; soldaki eşitsizlik Teorem 24.2'ndan, sağdaki ise $L(P_n, f) \le \underline{I}(f)$ ve $\overline{I}(f) \le U(P_n, f)$ eşitsizliklerinden gelir. $C = (b-a) \, \big(\, f(b) - f(a) \, \big) \ge 0$ sabit bir sayıdır ve $\dfrac{C}{n} \to 0$'dır. Negatif olmayan sabit bir sayı, sıfıra giden bir dizinin bütün terimlerinden küçük ya da onlara eşitse sıfırdır: $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) > 0$ olsaydı, Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $\dfrac{C}{n} < \overline{I}(f) - \underline{I}(f)$ olacak bir n bulunur ve çelişki doğardı. Öyleyse

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Yani **artan her fonksiyon** için alt ve üst integraller çakışır. Azalan bir f için ise her alt aralıkta $m_k = f(x_k)$ ve $M_k = f(x_{k-1})$ olur; aynı teleskopik hesap bu kez

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{(b-a) \, \big(\, f(a) - f(b) \, \big)}{n}$$

verir ve sağ taraf yine sıfıra gittiğinden yukarıdaki gerekçe olduğu gibi işler. Dolayısıyla monoton her fonksiyon bu özelliği taşır.

c) $x_k = \dfrac{k}{n}$, $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$'dir. $f(x) = x^3$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde artandır (çünkü $0 \le u < v$ için $v^3 - u^3 = (v-u)(v^2 + uv + u^2) > 0$'dır), dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^3, \qquad M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^3.$$

Üst toplam:

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

Alt toplam ($j = k-1$ değişimiyle):

$$L(P_n, f) = \frac{1}{n^4} \sum_{j=0}^{n-1} j^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2}.$$

Açık biçimde

$$U(P_n, f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}, \qquad L(P_n, f) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

olur; her iki dizi de $\frac{1}{4}$'e yakınsar. Önerme 24.2 gereği

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \frac{1}{4}.$$

Farkı da kontrol edelim: $U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{1}{n}$'dir; bu, (b) şıkkındaki formülle uyumludur, çünkü $(b-a)\,\big(\,f(b)-f(a)\,\big) = 1 \cdot (1-0) = 1$'dir.

d) $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ herhangi bir bölünüş olsun. Her (x_{k-1}, x_k) açık aralığında hem rasyonel hem irrasyonel sayı bulunduğundan (bkz. Analiz 1 ve İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu), g'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki değerler kümesi $\{-1, 1\}$'dir. Buradan

$$m_k = -1, \qquad M_k = 1, \qquad \omega_k = M_k - m_k = 2.$$

Toplamlar:

$$L(P, g) = \sum_{k=1}^{n} (-1)\Delta x_k = -\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = -1, \qquad U(P, g) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1.$$

Bu değerler bölünüşten bağımsız olduğundan alt toplamlar kümesi $\{-1\}$, üst toplamlar kümesi $\{1\}$'dir ve

$$\underline{I}(g) = -1, \qquad \overline{I}(g) = 1.$$

Fark Önerme 24.3 ile de doğrulanır: $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 2\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 2 = U(P, g) - L(P, g)$. Aradaki boşluk hiçbir bölünüşle daraltılamadığından g de integrallenebilir değildir. ($g = 2f - 1$ olduğuna dikkat ediniz; burada f Örnek 24.4'teki Dirichlet fonksiyonudur.)

e) Önce **tek nokta** eklenmesi durumunu inceleyelim. $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ ve $Q = P \cup \{x^*\}$ olsun; $x_{i-1} < x^* < x_i$ olsun. Teorem 24.1'nin ispatındaki gösterimlerle $T_1 = \sup_{[x_{i-1}, x^*]} f$, $T_2 = \sup_{[x^*, x_i]} f$ diyelim. $U(P, f)$ ile $U(Q, f)$ arasında yalnızca i-inci terim farklı olduğundan

$$U(P, f) - U(Q, f) = M_i \Delta x_i - T_1(x^* - x_{i-1}) - T_2(x_i - x^*).$$

$\Delta x_i = (x^* - x_{i-1}) + (x_i - x^*)$ ayrışmasını kullanıp terimleri gruplarsak

$$U(P, f) - U(Q, f) = (M_i - T_1)(x^* - x_{i-1}) + (M_i - T_2)(x_i - x^*)$$

elde ederiz. $T_1 \le M_i$ ve $T_2 \le M_i$ olduğundan bu ifade negatif değildir; öte yandan $|\,f\,| \le K$ olduğundan $-K \le T_j \le M_i \le K$ ve dolayısıyla $0 \le M_i - T_j \le 2K$'dır ($j = 1, 2$). Buradan

$$0 \le U(P, f) - U(Q, f) \le 2K\,\big[\,(x^* - x_{i-1}) + (x_i - x^*)\,\big] = 2K\Delta x_i \le 2K\,\|\,P\,\|$$

çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi p noktaya geçelim; p üzerinden tümevarım yapacağız. $p = 0$ için $Q = P$ ve fark sıfırdır. İddianın p için doğru olduğunu varsayalım ve Q, P'ye $p+1$ nokta eklenerek elde edilmiş olsun. Eklenen noktalardan birini y ile gösterip $Q' = Q \setminus \{y\}$ diyelim; Q', P'ye p nokta eklenerek elde edilmiştir ve $Q = Q' \cup \{y\}$'dir. Tümevarım varsayımıyla

$$0 \le U(P,f) - U(Q',f) \le 2Kp \parallel P \parallel .$$

Q' da P'nin bir incelmesi olduğundan $\parallel Q' \parallel \le \parallel P \parallel$'dir; tek nokta durumunu Q' ile Q çiftine uygularsak

$$0 \le U(Q',f) - U(Q,f) \le 2K \parallel Q' \parallel \le 2K \parallel P \parallel .$$

İki eşitsizliği toplayalım; sol taraflarda teleskopik sadeleşme olur:

$$0 \le U(P,f) - U(Q,f) = \big(U(P,f) - U(Q',f) \big) + \big(U(Q',f) - U(Q,f) \big) \le 2Kp \parallel P \parallel + 2K \parallel P \parallel = 2K(p+1) \parallel P \parallel .$$

Tümevarım ilkesi (bkz. Analiz 1) gereği iddia her $p \ge 0$ için doğrudur. (Alt toplamlar için bakışımlı biçimde $0 \le L(Q,f) - L(P,f) \le 2Kp \parallel P \parallel$ elde edilir.)

f) $f(x) = x^2$, $x_k = \dfrac{k}{n}$, $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$'dir. Örnek 24.2'nda $m_k = \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2$ ve $M_k = \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ bulmuştuk; öyleyse

$$\omega_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Salınımlar k büyüdükçe artar: parabol sağ tarafta daha dik olduğundan aynı genişlikteki alt aralıkta daha çok değişir. Şimdi toplamı hesaplayalım; ilk n tek sayının toplamının n^2 olduğunu kullanacağız:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{1}{n^3}\left(2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Bu, Örnek 24.2'nda doğrudan hesapladığımız $U(P_n,f) - L(P_n,f) = \dfrac{1}{n}$ değeriyle çakışır; Önerme 24.3 (b) doğrulanmış oldu.

Son olarak (a) maddesini sınayalım. $A = [x_{k-1}, x_k] = \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$ alalım. Her $s, t \in A$ için $m_k \le s^2 \le M_k$ ve $m_k \le t^2 \le M_k$ olduğundan iki değerin farkı $[m_k, M_k]$ aralığının boyunu aşamaz:

$$\mid f(s) - f(t) \mid = \mid s^2 - t^2 \mid \le M_k - m_k = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Demek ki $\dfrac{2k-1}{n^2}$ sayısı söz konusu kümenin bir üst sınırıdır. Üstelik bu üst sınıra ulaşılır: $s = \dfrac{k}{n}$ ve $t = \dfrac{k-1}{n}$ seçildiğinde $\mid s - t \mid = \dfrac{1}{n}$ ve $s + t = \dfrac{2k-1}{n}$ olduğundan

$$\mid f(s) - f(t) \mid = \mid s - t \mid (s+t) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2k-1}{n} = \frac{2k-1}{n^2}$$

değeri gerçekten **alınır.** Demek ki

$$\sup \big\{ \mid f(s) - f(t) \mid : s, t \in A \big\} = \frac{2k-1}{n^2} = \omega_k,$$

yani supremum burada bir maksimumdur ve (a) maddesiyle uyuşur.

■

Bu bölümde belirli integralin bütün altyapısını kurduk: bölünüşler, Darboux toplamları, incelme, alt ve üst integral. Elimizde artık her sınırlı fonksiyona iliştirilmiş $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$ çifti var; geriye bu ikisinin ne zaman çakıştığını belirlemek kalıyor. Sıradaki bölümde bu soruyu, salınım toplamı üzerinden verilen tek bir koşula indirgeyeceğiz ve sürekli fonksiyonların bu koşulu her zaman sağladığını göreceğiz: Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü.

 CC BY-NC-SA 4.0

25. Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü

Bölünüşler ve Darboux Toplamları bölümünde bir $[a,b]$ aralığını sonlu sayıda parçaya bölmeyi ve her parçada sınırlı bir f fonksiyonunun infimum ile supremumunu alarak $L(P,f)$ alt toplamıyla $U(P,f)$ üst toplamını kurmayı öğrendik. Vardığımız iki sonuç şuydu: bir incelmede alt toplamlar azalamaz, üst toplamlar artamaz; ve **hangi** iki bölünüş alınırsa alınsın alt toplam üst toplamı aşamaz. İkinci gözlem bize iki sayı verdi: bütün alt toplamların supremumu olan **alt integral** ile bütün üst toplamların infimumu olan **üst integral**; her sınırlı fonksiyon için birincisi ikincisini geçemez.

Şimdi asıl soruyu soruyoruz: bu iki sayı ne zaman **birbirine eşittir**? Eşit oldukları durumda eğrinin altındaki alanı aşağıdan ve yukarıdan istediğimiz kadar iyi kıstırabiliyoruz demektir ve ortak değere "integral" adını vermek meşrudur; eşit olmadıkları durumda ise hiçbir dikdörtgen yaklaşımı iki yandan aynı sayıya yaklaşmaz ve fonksiyona alan atamak anlamsızdır. **Riemann integrallenebilirlik** kavramı tam olarak bu ayrımı yapar.

Tanımı yazmak kolaydır ama doğrudan kullanmak zordur: alt ve üst integrali hesaplamak, bütün bölünüşler üzerinden bir supremum ve bir infimum hesaplamak demektir. Bu yüzden bölümün kalbinde, tek bir bölünüşe bakarak karar vermeyi sağlayan **Riemann ölçütü** duruyor: f integrallenebilirdir ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ olan bir P bölünüşü varsa. Bu ölçüt her şeyi, "üst ve alt dikdörtgenler arasında kalan alan istendiği kadar küçültülebiliyor mu?" sorusuna indirger.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Riemann integralinin tanımı ve ilk hesap örnekleri; integrallenemeyen bir fonksiyonun (Dirichlet fonksiyonu) nasıl göründüğü; Riemann ölçütü ile onun pratikte en çok kullanılan dizisel biçimi; sürekli ve monoton fonksiyonların integrallenebilirliği; sonlu sayıda süreksizliği olan sınırlı fonksiyonlar; sayılabilir sonsuzlukta süreksizliği olduğu hâlde integrallenebilen Thomae fonksiyonu; ve sonlu sayıda noktadaki değeri değiştirmenin integrali hiç etkilememesi. Bölümün sonunda Lebesgue ölçütünden de kısaca söz edeceğiz.

25.1 Riemann İntegralinin Tanımı

Sınırlı bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $[a,b]$'nin bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bölünüşü için

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

olmak üzere alt ve üst Darboux toplamları

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \qquad U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

biçiminde tanımlanmıştı. Bütün alt toplamların supremumu ile bütün üst toplamların infimumu, sırasıyla alt ve üst integraldir; bu iki sayı bölümün her yerinde geçeceği için onlara kısa birer ad veriyoruz.

Tanım 25.1 (Riemann İntegrallenebilirlik). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $\mathcal{P}[a,b]$, $[a,b]$'nin bütün bölünüşlerinin kümesi olsun. f'nin **alt integrali** (lower integral) ve **üst integrali** (upper integral) sırasıyla

$$\underline{I}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(P,f), \qquad \overline{I}(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(P,f)$$

sayılarıdır. (Kitap boyunca alt integral için $\underline{I}(f)$, üst integral için $\overline{I}(f)$ gösterimini kullanacağız; hangi aralıkta çalışıldığı bağlamdan bellidir, gerektiğinde $\underline{I}_a^b(f)$, $\overline{I}_a^b(f)$ yazılır.)

Bu iki sayı birbirine eşitse, yani $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ ise, f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde **Riemann integrallenebilir** (Riemann integrable) denir. Ortak değere f'nin $[a,b]$ üzerindeki **Riemann integrali** ya da **belirli integrali** (definite integral) denir ve $\int_a^b f(x)\,dx$ ile gösterilir. $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{R}[a,b]$ ile gösterilir; "$f \in \mathcal{R}[a,b]$" yazımı "f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir" demektir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanımın iki noktasına dikkat edelim. Birincisi, **sınırlılık tanımın bir parçasıdır**: f sınırlı değilse bir alt aralıkta $m_k = -\infty$ ya da $M_k = +\infty$ olur ve Darboux toplamları reel sayı olmaktan çıkar. İkincisi, alt ve üst integral **her** sınırlı fonksiyon için vardır; integrallenebilirlik, bunların **eşit olması** koşuludur. Önceki bölümde gördüğümüz gibi her sınırlı f için

$$m(b-a) \le L(P,f) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le U(Q,f) \le M(b-a)$$

eşitsizlikleri, P ve Q hangi bölünüşler olursa olsun geçerlidir; burada $m = \inf_{[a,b]} f$ ve $M = \sup_{[a,b]} f$'dir (uç eşitsizlikler için Önerme 24.1, ortadaki $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$ için Teorem 24.2). Bu zincir bölüm boyunca durmadan kullanacağımız temel araçtır.
Şimdi tanımı birkaç somut fonksiyonda çalıştıralım.

Örnek 25.1 (Sabit Fonksiyonun İntegrali). $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ için $f(x) = c$ olsun. f'nin integrallenebilir olduğunu ve

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$P = \{x_0, \dots, x_n\}$ herhangi bir bölünüş olsun. Her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında f yalnızca c değerini aldığından $m_k = M_k = c$'dir. Alt aralık uzunluklarının toplamı teleskopik olduğundan, yani

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

olduğundan

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c(b-a) = U(P,f)$$

bulunur. Bütün alt toplamlar da bütün üst toplamlar da tek elemanlı $\{c(b-a)\}$ kümesini oluşturur; tek elemanlı bir kümenin supremumu da infimumu da o eleman olduğundan $\underline{I}(f) = c(b-a) = \overline{I}(f)$'dir. Öyleyse f integrallenebilirdir ve $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$'dır; $c > 0$ hâlinde bu, taban uzunluğu $b-a$, yüksekliği c olan dikdörtgenin alanıdır.
■

Bir sonraki örnekte, bütün bölünüşleri tek tek incelemek yerine akıllıca seçilmiş **tek bir bölünüş dizisi** kullanacağız; bu yöntemin neden yeterli olduğunu birazdan bir sonuç olarak kayda geçireceğiz.

Örnek 25.2 (Kare Fonksiyonunun İntegrali). $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu ve

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: Düzgün bölünüş. $n \in \mathbb{N}$ için $[0,1]$'in düzgün bölünüşünü $x_k = \dfrac{k}{n}$, $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$ olmak üzere $P_n = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n}{n}\right\}$ ile alalım. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde artan olduğundan her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında infimum sol uçta, supremum sağ uçta alınır:

$$m_k = f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2, \qquad M_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Adım 2: Toplamların kapalı biçimi. Kare toplamı formülü $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ile

$$U(P_n,f)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

bulunur.
Alt toplamda ise k yerine $k-1$ geçtiğinden, $j=k-1$ değişken değişimiyle

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\sum_{j=1}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

olur ve

$$L(P_n,f)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

elde edilir.
Adım 3: Limitler. Her iki ifadede de payın baş terimi $2n^2$ olduğundan

$$U(P_n,f)=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{3},\qquad L(P_n,f)=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{3},$$

ve farkları çok sadedir: $U(P_n,f)-L(P_n,f)=\dfrac{6n}{6n^2}=\dfrac{1}{n}$.
Adım 4: Sonuç. Alt integral bütün alt toplamların supremumu olduğundan her n için $L(P_n,f)\le\underline{I}(f)$'dir; $n\to\infty$ için limit alıp sıralamanın korunmasını kullanırsak $\dfrac{1}{3}\le\underline{I}(f)$ elde ederiz. Benzer biçimde her n için $\overline{I}(f)\le U(P_n,f)$ olduğundan $\overline{I}(f)\le\dfrac{1}{3}$'tür. Her sınırlı fonksiyon için $\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)$ olduğunu da biliyoruz; üçünü birleştirirsek

$$\frac{1}{3}\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\frac{1}{3}$$

olur, yani hepsi eşittir. Demek ki $f(x)=x^2$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}.$$

■

İntegrallenebilirliği anlamak için integrallenebilir **olmayan** bir fonksiyona da bakmak şarttır; aşağıdaki, analizin en ünlü karşı örneğidir.

Örnek 25.3 (Dirichlet Fonksiyonu İntegrallenemez). $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

ile tanımlansın (**Dirichlet fonksiyonu**). f'nin $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
f sınırlıdır ($0\le f\le 1$), dolayısıyla alt ve üst integrali vardır; göstereceğimiz, bunların farklı olduğudur. $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ herhangi bir bölünüş olsun. Her $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı pozitif uzunlukta olduğundan, rasyonellerin (bkz. Analiz 1) ve irrasyonellerin (bkz. Analiz 1) yoğunluğu gereği hem bir rasyonel hem bir irrasyonel sayı içerir. Rasyonel noktalarda $f=1$, irrasyonel noktalarda $f=0$ olduğundan, bölünüşten ve k'den bağımsız olarak $m_k=0$ ve $M_k=1$ olur. Öyleyse

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{n}0\cdot\Delta x_k=0,\qquad U(P,f)=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta x_k=1\cdot(1-0)=1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bütün alt toplamlar 0, bütün üst toplamlar 1 olduğundan

$$\underline{I}(f) = \sup_P L(P,f) = 0, \qquad \overline{I}(f) = \inf_P U(P,f) = 1.$$

$0 \neq 1$ olduğundan alt ve üst integral eşit değildir; Tanım 25.1 gereği Dirichlet fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir **değildir.**
Tıkanmanın kaynağı açıktır: bölünüşü ne kadar incelirsek incelelim, her alt aralık hem $f=1$ hem $f=0$ noktaları içerir; alt dikdörtgenler hep tabanda, üst dikdörtgenler hep tavanda kalır ve aradaki boşluk asla küçülmez.
■

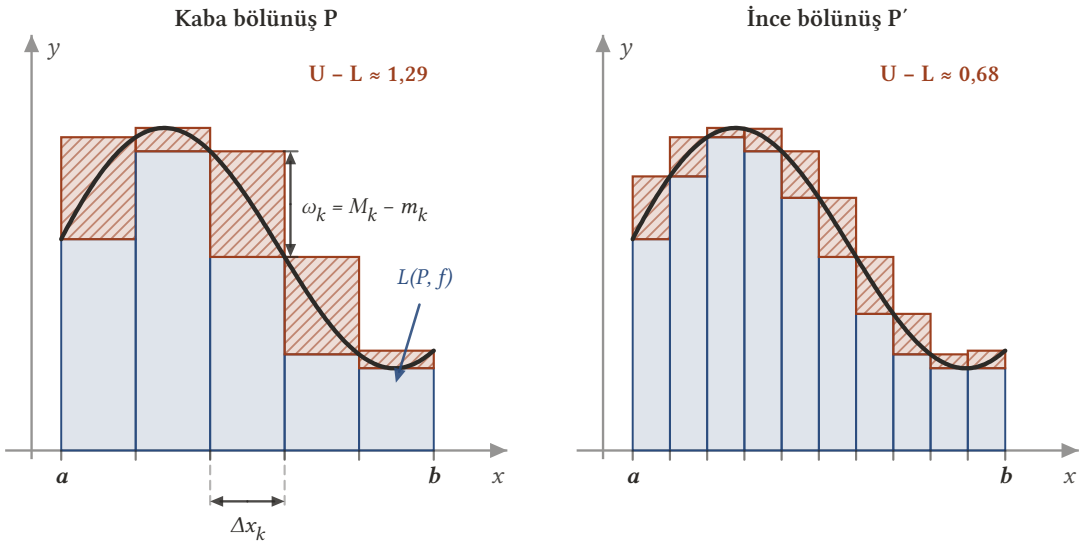
25.2 Riemann Ölçütü

Yukarıdaki üç örnekte de aynı şeyi yaptık: $U(P,f)$ ile $L(P,f)$ arasındaki farka baktık. Sabit fonksiyonda bu fark her bölünüşte sıfırdı; x^2'de $1/n$ idi ve küçültülebiliyordu; Dirichlet fonksiyonunda ise her bölünüşte 1'e eşitti ve asla küçülmüyordu. Bu tesadüf değildir: **integrallenebilirlik tam olarak bu farkın küçültülebilmesi demektir.** Bunu teorem olarak yazmak, integrallenebilirlik sorularını supremum–infimum hesabından kurtarıp tek bir bölünüş bulma işine indirger.

Teorem 25.1 (Riemann Ölçütü). *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f'nin $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul şudur: her $\varepsilon>0$ için, $[a,b]$'nin*

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir P bölünüşü vardır.



Şekil 25.1: Ölçütün geometrik okunuşu. Her alt aralıkta alt dikdörtgenle onu örten üst dikdörtgen arasında kalan taralı şeridin yüksekliği f'nin o aralıktaki salınımı $\omega_k = M_k - m_k$, genişliği Δx_k'dır; bu şeritlerin toplam alanı tam olarak U(P, f) − L(P, f)'dir. Solda kaba bir bölünüşte şeritler geniştir, sağda aynı eğri daha ince bir bölünüşle bölündüğünde hepsi birden incelir ve toplam alan yarıya iner. Riemann ölçütü işte bunu ister: verilen her ε > 0 için taralı alanı ε'nin altına indiren bir bölünüş bulunabilmesi.

İspat.
(⇒) İntegrallenebilirlikten ölçüte. *f'nin integrallenebilir olduğunu varsayalım ve ortak değeri $I = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ ile gösterelim. $\varepsilon>0$ verilsin.*

 CC BY-NC-SA 4.0

$I = \sup_P L(P,f)$ olduğundan, supremumun ε-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği $I - \frac{\varepsilon}{2}$ sayısı alt toplamlar kümesinin üst sınırı olamaz; yani $L(P_1,f) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir P_1 bölünüşü vardır. Benzer biçimde $I = \inf_P U(P,f)$ olduğundan, infimumun ε-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği $U(P_2,f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir P_2 bölünüşü vardır.
*Şimdi $P = P_1 \cup P_2$ **ortak incelmesini** alalım; P, hem P_1'in hem P_2'nin bir incelmesidir. Bir incelmede alt toplamların azalmadığını, üst toplamların artmadığını önceki bölümde görmüştük (Teorem 24.1): $L(P_1,f) \le L(P,f)$ ve $U(P,f) \le U(P_2,f)$. Ayrıca her bölünüş için $L(P,f) \le U(P,f)$'dir. Hepsini bir zincirde toplarsak*

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1,f) \le L(P,f) \le U(P,f) \le U(P_2,f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $L(P,f)$ ile $U(P,f)$, uzunluğu ε olan bir aralığın içinde kaldığından

$$U(P,f) - L(P,f) < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

elde ederiz. Aradığımız bölünüş P'dir.
***(⇐) Ölçütten integrallenebilirliğe.** Şimdi her $\varepsilon > 0$ için $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ olan bir P bulunabildiğini varsayalım; $\varepsilon > 0$ verilsin ve böyle bir P seçilsin. Alt integral bütün alt toplamların supremumu olduğundan $L(P,f) \le \underline{I}(f)$, üst integral bütün üst toplamların infimumu olduğundan $\overline{I}(f) \le U(P,f)$'dir; ortada ise her sınırlı fonksiyon için geçerli olan $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$ vardır. Üçünü birleştirip uçlardan çıkarma yaparsak*

$$0 \le \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

*olur. Burada $\overline{I}(f) - \underline{I}(f)$ sabit, negatif olmayan bir sayıdır ve **her** $\varepsilon > 0$'dan küçüktür; böyle tek reel sayı 0'dır (aksi hâlde ε olarak bu sayının kendisini alıp çelişki elde ederdik). Öyleyse $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$, yani f integrallenebilirdir.*
■

Ölçütün geometrik okunuşu şudur: önceki bölümde gördüğümüz gibi (Önerme 24.3) $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$ toplamı, üst ve alt dikdörtgenler arasında kalan ince şeritlerin toplam alanıdır; burada $\omega_k = M_k - m_k$ sayısı f'nin k-inci alt aralıktaki **salınımıdır** (Tanım 24.5). Bu toplamı küçültmenin iki yolu vardır ve bölümün geri kalanı bu iki yoldan ibarettir: alt aralıkları kısaltarak salınımları **hep birden** küçültmek (sürekli ve monoton fonksiyonlarda); ya da salınımın büyük kaldığı birkaç yeri, toplam uzunluğu çok küçük alt aralıklarla **örtmek** (süreksizliği olan fonksiyonlarda).
Uygulamada ölçütü çoğu zaman şu dizisel biçimde kullanırız; bu biçim hem integrallenebilirliği verir hem de integralin **değerini** hesaplatır.

Sonuç 25.1 (Ölçütün Dizisel Biçimi). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$'nin*

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

koşulunu sağlayan bir $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bölünüş dizisi varsa, f integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f)$$

olur; yani integral, alt ve üst toplam dizilerinin ortak limitidir.

İspat.
***Adım 1: İntegrallenebilirlik.** $\varepsilon > 0$ verilsin. $U(P_n,f) - L(P_n,f) \to 0$ olduğundan, limit tanımı gereği öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \ge n_0$ için*

$$\left|\, U(P_n,f) - L(P_n,f) \,\right| < \varepsilon$$

olur. $U(P_n,f) - L(P_n,f) \ge 0$ olduğundan bu, doğrudan $U(P_{n_0},f) - L(P_{n_0},f) < \varepsilon$ demektir. Aradığımız bölünüş $P = P_{n_0}$'dır; Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: İntegralin değeri. *$I = \int_a^b f(x)\,dx$ olsun. Her n için, Teorem 25.1'nun ispatındaki gibi $L(P_n, f) \le \underline{I}(f) = I = \overline{I}(f) \le U(P_n, f)$ yazabiliriz. Buradan*

$$0 \le I - L(P_n, f) \le U(P_n, f) - L(P_n, f), \qquad 0 \le U(P_n, f) - I \le U(P_n, f) - L(P_n, f)$$

elde edilir. Sağ taraftaki dizi 0'a yakınsadığından, sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $L(P_n, f) \to I$ ve $U(P_n, f) \to I$'dır; her iki dizi de I'ya yakınsar ve ortak limitleri integraldir.
■

Örnek 25.2'nde yaptığımız hesap tam olarak budur. Aynı yolla, önceki bölümde $f(x) = x$ için hesapladığımız $L(P_n, f) = \dfrac{n-1}{2n}$ ve $U(P_n, f) = \dfrac{n+1}{2n}$ toplamlarından, farkları $\dfrac{1}{n} \to 0$ olduğu için $\int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$ sonucu çıkar.

> **Ölçütü kullanırken**
>
> Farkı sıfıra götüren **tek bir** bölünüş dizisi bulmak yeter. Düzgün bölünüşler çoğu zaman iş görür; süreksizliği olan fonksiyonlarda ise süreksizlik noktalarını çevreleyen ince aralıklar içeren "kişiye özel" bölünüşler kurmak daha kolaydır.

25.3 Sürekli Fonksiyonlar İntegrallenebilir

Riemann ölçütünün ilk büyük ödülü şudur: kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan **her** fonksiyon integrallenebilirdir. İspatın anahtarı ince bir noktadadır: tek bir bölünüşün bütün alt aralıklarını aynı anda denetlemek istediğimizden, verilen bir ε için seçilen δ'nın **noktadan bağımsız** olması gerekir. Bu tam olarak **düzgün sürekliliktir** (bkz. Analiz 1); Cantor teoremi (bkz. Analiz 1) de kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekliliğin düzgün sürekliliği gerektirdiğini söyler.

Teorem 25.2 (Sürekli Fonksiyonların İntegrallenebilirliği). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f, $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir.*

İspat.
Adım 0: Sınırlılık. *$[a, b]$ kapalı ve sınırlı bir aralık, f orada sürekli olduğundan f sınırlıdır (bkz. Analiz 1). Böylece Darboux toplamları anlamlıdır ve Teorem 25.1'nu uygulayabiliriz.*
Adım 1: Düzgün süreklilik. *$\varepsilon > 0$ verilsin. f, kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan Cantor teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $[a, b]$ üzerinde düzgün süreklidir. Düzgün sürekliliği $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ pozitif sayısına uygulayalım: öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her $x, y \in [a, b]$ için*

$$|\,x - y\,| < \delta \Longrightarrow |\,f(x) - f(y)\,| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Buradaki δ'nın x ve y'den bağımsız olması, ispatın can alıcı noktasıdır.
Adım 2: Normu küçük bir bölünüş. *$\|\,P\,\| < \delta$ olan bir $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ bölünüşü seçelim. Böyle bir bölünüş vardır: Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ seçip düzgün bölünüşü almak yeter.*
Adım 3: Alt aralıklardaki salınım. *$k \in \{1, \ldots, n\}$ olsun. f, kapalı ve sınırlı $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında sürekli olduğundan orada en büyük ve en küçük değerlerini gerçekten alır (bkz. Analiz 1): $m_k = f(u_k)$ ve $M_k = f(v_k)$ olan $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ noktaları vardır. Bu iki nokta aynı alt aralıkta olduğundan $|\,u_k - v_k\,| \le \Delta x_k \le \|\,P\,\| < \delta$'dır ve Adım 1'deki gerektirmeden*

$$M_k - m_k = f(v_k) - f(u_k) = |\,f(v_k) - f(u_k)\,| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

elde ederiz (mutlak değeri kaldırabildik, çünkü $M_k \ge m_k$'dir).
Adım 4: Darboux toplamlarının farkı. *Her Δx_k pozitif olduğundan eşitsizliğin yönü korunur ve*

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Verilen her $\varepsilon > 0$ için istenen bölünüşü elde ettik; Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir. ■

Bu teorem, "eğrinin altındaki alan" sezgisini sağlam bir zemine oturtur: polinomlar, sin, cos, exp ve bunların sürekli bileşkeleri kapalı aralıklarda integrallenebilirdir. Ancak süreklilik yalnızca **yeter** koşuldur.

⚠ Karşıtı doğru değildir

İntegrallenebilir olmak, sürekli olmayı gerektirmez: süreklilik integrallenebilirlik için **yeter** koşuldur, **gerek** koşul değildir. Aşağıdaki basamak fonksiyonu, bir sıçrama süreksizliği olduğu hâlde integrallenebilirdir; ilerideki örneklerde sonsuz sayıda süreksizliği olan integrallenebilir fonksiyonlar bile göreceğiz.

Örnek 25.4 (Basamak Fonksiyonu). $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

ile tanımlansın. f, $x = 1$ noktasında sıçrama süreksizliğine sahiptir. Buna karşın f'nin $[0,2]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 0: Süreksizlik. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ ama $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$'dir; iki tek yönlü limit de sonlu ama birbirinden farklı olduğundan Süreksizlik Çeşitleri gereği $x = 1$ bir **sıçrama süreksizliğidir**. Öyleyse f sürekli değildir, Teorem 25.2 uygulanamaz ve doğrudan Riemann ölçütünü kullanacağız.
Adım 1: Bölünüşün kurulması. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $0 < \delta < 1$ ile $2\delta < \varepsilon$ koşullarını birlikte sağlayan bir δ seçelim; örneğin $\delta = \dfrac{1}{2}\min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ işi görür. ($\delta < 1$ koşulu, aşağıdaki noktaların sırasının bozulmaması içindir.) Şimdi

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0, 1-\delta, 1+\delta, 2\}$$

bölünüşünü alalım. $\delta < 1$ olduğundan $0 < 1-\delta < 1+\delta < 2$'dir, yani P gerçekten $[0,2]$'nin bir bölünüşüdür. Buradaki fikir açıktır: sıçramanın olduğu $x = 1$ noktasını, uzunluğu 2δ olan çok ince bir alt aralığın içine hapsettik.
Adım 2: Alt aralıklarda infimum ve supremum. Birinci alt aralıkta $x \le 1-\delta < 1$ olduğundan $f \equiv 1$, üçüncüde $x \ge 1+\delta > 1$ olduğundan $f \equiv 2$'dir. Orta alt aralıkta ise f hem 1 (örneğin $x = 1$'de) hem 2 (örneğin $x = 1+\delta$'da) değerini alır, başka değer almaz.

Alt aralık	m_k	M_k	Δx_k
$[0, 1-\delta]$	1	1	$1-\delta$
$[1-\delta, 1+\delta]$	1	2	2δ
$[1+\delta, 2]$	2	2	$1-\delta$

Adım 3: Toplamlar.

$$L(P,f) = 1\cdot(1-\delta) + 1\cdot 2\delta + 2\cdot(1-\delta) = 1 - \delta + 2\delta + 2 - 2\delta = 3 - \delta,$$

$$U(P,f) = 1\cdot(1-\delta) + 2\cdot 2\delta + 2\cdot(1-\delta) = 1 - \delta + 4\delta + 2 - 2\delta = 3 + \delta.$$

Adım 4: Ölçüt. Fark

$$U(P,f) - L(P,f) = (3+\delta) - (3-\delta) = 2\delta < \varepsilon$$

olur. Verilen her $\varepsilon > 0$ için istenen bölünüş bulunduğundan Teorem 25.1 gereği f, $[0,2]$ üzerinde integrallenebilirdir.
Adım 5: İntegralin değeri. $\delta = \dfrac{1}{n}$ ($n \ge 2$) seçerek bir (P_n) bölünüş dizisi kuralım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$L(P_n, f) = 3 - \frac{1}{n} \to 3, \qquad U(P_n, f) = 3 + \frac{1}{n} \to 3, \qquad U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{2}{n} \to 0.$$

Sonuç 25.1 gereği $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$'tür. Bu sonuç sezgiyle uyumludur: $[0,1]$ üzerinde yüksekliği 1, $[1,2]$ üzerinde yüksekliği 2 olan iki dikdörtgenin alanları toplamı 3'tür. Tek bir noktadaki değer ($f(1) = 1$) sonucu hiç etkilememiştir; bunun neden kaçınılmaz olduğunu bölümün sonunda göreceğiz.
■

25.4 Monoton Fonksiyonlar İntegrallenebilir

Monoton fonksiyonlar, sürekli fonksiyonlardan tümüyle farklı bir sınıftır: bir monoton fonksiyonun sonsuz (ama sayılabilir) çoklukta süreksizliği olabilir (bkz. Analiz 1). Yine de monotonluk, Darboux toplamlarının farkını denetlemeye tek başına yeter; bunun nedeni çok güzel bir **teleskopik toplama**dır.

Teorem 25.3 (Monoton Fonksiyonların İntegrallenebilirliği). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon (artan ya da azalan; Monoton Fonksiyon) ise f, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir.*

İspat.
Durum 1: f azalmayan. *Yani $x < y$ iken $f(x) \le f(y)$ olsun.*
Adım 0: Sınırlılık. *Her $x \in [a,b]$ için $f(a) \le f(x) \le f(b)$ olduğundan f sınırlıdır ve Darboux toplamları anlamlıdır.*
Adım 1: Yozlaşmış durum. *$f(a) = f(b)$ ise bu eşitsizlikten her x için $f(x) = f(a)$ çıkar; f sabittir ve Örnek 25.1 gereği integrallenebilirdir (integrali $f(a)(b-a)$'dır). Bundan sonra $f(a) < f(b)$, yani $f(b) - f(a) > 0$ varsayalım.*
Adım 2: Bölünüşün seçilmesi. *$\varepsilon > 0$ verilsin. Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $\dfrac{b-a}{n} < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $[a,b]$'nin n eşit parçaya bölünmesiyle elde edilen düzgün bölünüş olsun:*

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad \Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Adım 3: İnfimum ve supremumlar. *f azalmayan olduğundan her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında $f(x_{k-1}) \le f(x) \le f(x_k)$'dir; bu iki uç değer alt aralıkta gerçekten **alındığından** alt sınır infimum, üst sınır supremumdur:*

$$m_k = f(x_{k-1}), \qquad M_k = f(x_k).$$

Adım 4: Teleskopik toplam. *Bütün alt aralıklar aynı uzunlukta olduğundan Δx'i toplamın dışına alabiliriz ve ara terimlerin hepsi birbirini götürür:*

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1}) \big)\, \Delta x = \Delta x \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1}) \big) = \Delta x \,\big[f(b) - f(a) \big].$$

Adım 5: Sonuç. *Adım 2'deki seçimimizi yerine koyalım:*

$$U(P,f) - L(P,f) = \frac{b-a}{n} \big[f(b) - f(a) \big] < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \big[f(b) - f(a) \big] = \varepsilon.$$

Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir.
Durum 2: f artmayan. *Bu kez her x için $f(b) \le f(x) \le f(a)$ olduğundan f yine sınırlıdır; $f(a) = f(b)$ ise f sabittir ve işimiz biter. $f(a) > f(b)$ olsun ve $\dfrac{b-a}{n} < \dfrac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}$ olan bir n ile düzgün bölünüşü alalım. Her alt aralıkta en büyük değer sol uçta, en küçük değer sağ uçta olduğundan $m_k = f(x_k)$, $M_k = f(x_{k-1})$'dir ve aynı teleskopik hesapla*

$$U(P,f) - L(P,f) = \Delta x \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_{k-1}) - f(x_k) \big) = \Delta x \,\big[f(a) - f(b) \big] < \varepsilon$$

elde edilir. Her iki durumda da Teorem 25.1 sağlanmıştır; monoton her fonksiyon integrallenebilirdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Sürekli fonksiyonlarda olduğu gibi, burada da monotonluk yalnızca bir **yeter** koşuldur.

⚠ Monotonluk da gerek koşul değildir

Elimizde artık iki geniş integrallenebilir sınıf var: sürekliler ve monotonlar. Bu iki sınıfın **hiçbiri** integrallenebilirliğe denk değildir. Monoton olmayan integrallenebilir fonksiyonlar vardır: $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[0, 2\pi]$ üzerinde monoton değildir ama süreklidir, dolayısıyla Teorem 25.2 gereği integrallenebilirdir. Dahası, ne sürekli ne monoton olan integrallenebilir fonksiyonlar vardır: bölümün ilerisindeki Örnek 25.6 ve Önerme 25.2 örnekleri böyledir. Öte yandan yalnızca sınırlı olmak yetmez; Örnek 25.3'deki fonksiyon sınırlıdır ama integrallenebilir değildir. Kısacası "sürekli ⇒ integrallenebilir" ve "monoton ⇒ integrallenebilir" gerektirmelerinin karşıtları doğru değildir.

Şimdi de süreksizliği bir uç noktada olan, ince aralıkla örtme fikrinin en yalın biçimini gösteren bir örnek yapalım.

Örnek 25.5 (Uç Noktada Süreksiz Bir Fonksiyon). $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin $x = 0$'da süreksiz olmasına karşın integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 0: Süreksizlik. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$ olduğundan $f, x = 0$ noktasında sürekli değildir; başka her noktada yerel olarak sabit 1 olduğundan süreklidir.
Adım 1: Bölünüş. $\varepsilon > 0$ verilsin. Genelliği bozmadan $\frac{\varepsilon}{2} < 2$ varsayabiliriz, çünkü küçük bir ε için bulunan bölünüş daha büyüğü için de işe yarar. Böylece $\frac{\varepsilon}{2} < 1$ olur ve $P = \left\{0, \frac{\varepsilon}{2}, 1\right\}$ bir bölünüştür.
Adım 2: İnfimum ve supremumlar. Birinci alt aralık $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ üzerinde $f, x = 0$'da 0, öteki noktalarda 1 değerini alır: $m_1 = 0$, $M_1 = 1$, $\Delta x_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. İkinci alt aralık $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$ üzerinde $x > 0$ olduğundan $f \equiv 1$'dir: $m_2 = M_2 = 1$, $\Delta x_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.
Adım 3: Fark.

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{2} (M_k - m_k)\,\Delta x_k = (1-0)\cdot\frac{\varepsilon}{2} + (1-1)\cdot\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Teorem 25.1 gereği f, $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir.
Adım 4: İntegralin değeri. Aynı bölünüşle $U(P,f) = \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1$ ve $L(P,f) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ bulunur; öyleyse her $\varepsilon \in (0,2)$ için

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{I}(f) = \overline{I}(f) \leq 1$$

olur. $\varepsilon \to 0^+$ için soldaki ifade 1'e gittiğinden ortak değer 1'dir: $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Yine, tek bir noktadaki değer değişikliği ($f(0) = 0$ olması) integrali etkilememiştir; sonuç, sabit 1 fonksiyonunun integraliyle aynıdır.
■

25.5 Süreksizliği Olan Fonksiyonlar

Son iki örnek aynı numarayı kullandı: süreksizlik noktası, uzunluğu istendiği kadar küçük yapılabilen bir alt aralığın içine kapatıldı. O alt aralıkta salınım büyük olabilir ama uzunluk küçük olduğundan katkısı küçüktür; geri kalan yerlerde fonksiyon süreklidir ve düzgün süreklilik devreye girer. Bu fikri genel bir önerme hâline getirelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 25.1 (Sonlu Sayıda Süreksizlik). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f'nin $[a,b]$ üzerindeki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f integrallenebilirdir.*

İspat.
f'nin süreksizlik noktaları $c_1 < c_2 < \cdots < c_p$ olsun ($p \geq 0$). $p = 0$ ise f süreklidir ve Teorem 25.2 işi bitirir; bundan sonra $p \geq 1$ varsayalım.
*$M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$ ve $\Omega = M - m$ olsun (f sınırlı olduğundan bunlar reel sayılardır). Her alt aralıkta $M_k - m_k \leq \Omega$ olduğuna dikkat edelim: Ω, f'nin bütün aralıktaki **salınımının** üst sınırıdır. $\Omega = 0$ ise f sabittir ve işimiz biter; öyleyse $\Omega > 0$ varsayalım.*
$\varepsilon > 0$ verilsin.
***Adım 1: Süreksizlik noktalarının örtülmesi.** Öyle bir $\eta > 0$ seçelim ki üç koşul birden sağlansın:*

$$\eta < \frac{\varepsilon}{8p\Omega}, \qquad \eta < \frac{1}{2}\min\{c_{i+1} - c_i : 1 \leq i \leq p-1\}, \qquad \eta < \frac{b-a}{4}.$$

*(İkinci koşul $p = 1$ ise boştur; üçüncüsü, J_i aralıklarının $[a,b]$'yi tümüyle yutmasını engeller.) İkinci koşul sayesinde ardışık iki süreksizlik noktası için $c_{i+1} - c_i > 2\eta$, yani $c_i + \eta < c_{i+1} - \eta$ olur; dolayısıyla $J_i = (c_i - \eta, c_i + \eta)$ açık aralıkları **ikişer ikişer ayrıktır.** Şimdi*

$$F = [a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{p} J_i = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \cdots \cup [a_r,b_r], \qquad r \leq p+1$$

*kümesine bakalım: F, $[a,b]$'den sonlu sayıda ayrık açık aralığın çıkarılmasıyla elde edildiğinden sonlu sayıda **kapalı ve sınırlı aralığın** ayrık birleşimidir. ($c_1 - \eta < a$ ya da $c_p + \eta > b$ ise uçlardaki parçalar ortaya çıkmaz; buna karşılık $c_i + \eta < c_{i+1} - \eta$ olduğundan aradaki parçaların hiçbiri tek noktaya inmez.) F boş değildir, yani $r \geq 1$'dir: $p \geq 2$ ise $[c_1 + \eta, c_2 - \eta]$ parçası zaten F'dedir; $p = 1$ ise çıkarılan tek aralığın uzunluğu en çok $2\eta < \dfrac{b-a}{2}$ olduğundan $[a,b]$'nin en az yarısı geride kalır.*
***Adım 2: F üzerinde düzgün süreklilik.** Her c_i noktası kendi J_i aralığının **içinde** kaldığından F hiçbir süreksizlik noktası içermez; öyleyse f, her $[a_j,b_j]$ üzerinde süreklidir ve kapalı sınırlı bir aralıkta sürekli olduğundan Cantor teoremi (bkz. Analiz 1) gereği orada düzgün süreklidir. Bu yüzden her j için, $x, y \in [a_j,b_j]$ ve $|\,x - y\,| < \delta_j$ iken $|\,f(x) - f(y)\,| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ olmasını sağlayan bir $\delta_j > 0$ vardır. $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_r\} > 0$ diyelim.*
***Adım 3: Bölünüşün kurulması.** P bölünüşünün noktaları şunlar olsun: a ve b; J_i aralıklarının $[a,b]$ içinde kalan $c_i \pm \eta$ uç noktaları; ve her $[a_j,b_j]$ parçasını uzunluğu δ'dan küçük alt aralıklara bölen ek noktalar. $\overline{J_i} = [c_i - \eta, c_i + \eta] \cap [a,b]$ kapalı aralıkları ile $[a_j,b_j]$ parçaları birlikte $[a,b]$'yi uç uca döşediğinden, P'nin her alt aralığı ya bir $\overline{J_i}$ içinde kalır (bunlara **örtücü** diyelim) ya da bir $[a_j,b_j]$ içinde kalır ve uzunluğu δ'dan küçüktür (bunlara **düzgün** diyelim).*
***Adım 4: Örtücü alt aralıkların katkısı.** Bunların toplam uzunluğu, her biri 2η uzunluğunda p tane $\overline{J_i}$ aralığının toplam uzunluğunu, yani $2p\eta$'yı aşamaz. Her alt aralıkta $M_k - m_k \leq \Omega$ olduğundan*

$$\sum_{k\,\text{örtücü}} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \Omega \cdot 2p\eta < \Omega \cdot 2p \cdot \frac{\varepsilon}{8p\Omega} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

***Adım 5: Düzgün alt aralıkların katkısı.** Böyle bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı bir $[a_j,b_j]$ içinde kalır ve uzunluğu δ'dan, dolayısıyla δ_j'den küçüktür; öyleyse herhangi iki noktası x, y için $|\,f(x) - f(y)\,| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, dolayısıyla $M_k - m_k \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$'dır. Bu alt aralıkların toplam uzunluğu en çok $b - a$ olduğundan katkıları en çok $\dfrac{\varepsilon}{2}$'dir.*
***Adım 6: Toplam.** İki katkıyı toplarsak $U(P,f) - L(P,f) < \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur. Verilen her $\varepsilon > 0$ için istenen bölünüşü kurduk; Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir.*
■

Bu önerme, Örnek 25.4 ve Örnek 25.5 örneklerini tek çatı altında toplar. Aşağıdaki örnek de aynı çatının altındadır; yine de hesabı açıkça yapmak öğreticidir.

Örnek 25.6 (Parçalı Sürekli Bir Fonksiyon). $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x)=\begin{cases}7, & 1\le x<2\\ 10, & x=2\\ -4, & 2<x\le 3\end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 0: Süreksizlik ve sınırlılık. Her x için $-4\le f(x)\le 10$ olduğundan f sınırlıdır. $x=2$ dışındaki her noktada f yerel olarak sabit, dolayısıyla süreklidir; $x=2$'de ise $\lim_{x\to 2^-}f(x)=7$, $\lim_{x\to 2^+}f(x)=-4$ ve $f(2)=10$ olduğundan bir sıçrama süreksizliği vardır. Süreksizlik sayısı sonlu olduğundan Önerme 25.1 gereği f integrallenebilirdir; şimdi bunu açık bir bölünüşle doğrulayıp integrali hesaplayalım.
Adım 1: Bölünüş ve toplamlar. $0<\delta<\dfrac{1}{2}$ olmak üzere $P_\delta=\{1,2-\delta,2+\delta,3\}$ bölünüşünü alalım; süreksizlik noktası $x=2$, uzunluğu 2δ olan orta alt aralığın içindedir. Üç alt aralıkta (m_k,M_k) ikilileri sırasıyla $(7,7)$, $(-4,10)$, $(-4,-4)$; uzunluklar ise $1-\delta$, 2δ, $1-\delta$'dır. (Orta alt aralıkta f yalnızca 7, 10 ve -4 değerlerini alır ve $\delta>0$ olduğundan üçü de gerçekten alınır; öyleyse infimum -4, supremum 10'dur.) Buradan

$$L(P_\delta,f)=7(1-\delta)-4(2\delta)-4(1-\delta)=3-11\delta,\qquad U(P_\delta,f)=7(1-\delta)+10(2\delta)-4(1-\delta)=3+17\delta.$$

Adım 2: Ölçüt ve değer. Fark $U(P_\delta,f)-L(P_\delta,f)=28\delta$'dır (orta alt aralıkta $M_2-m_2=14$ ve $\Delta x_2=2\delta$ olduğundan doğrudan da görülür). Verilen bir $\varepsilon>0$ için $\delta<\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{28}\right\}$ seçersek fark ε'dan küçük olur ve Teorem 25.1 sağlanır. Değeri bulmak için $\delta=\dfrac{1}{n}$ $(n\ge 3)$ alalım:

$$L(P_n,f)=3-\frac{11}{n}\to 3,\qquad U(P_n,f)=3+\frac{17}{n}\to 3,\qquad U(P_n,f)-L(P_n,f)=\frac{28}{n}\to 0.$$

Sonuç 25.1 gereği $\int_1^3 f(x)\,dx=3$'tür. Sezgisel karşılığı, $[1,2]$ üzerinde yüksekliği 7 olan dikdörtgenle $[2,3]$ üzerinde yüksekliği -4 olan dikdörtgenin alanları toplamıdır: $7-4=3$. $x=2$ noktasındaki 10 değeri sonuca hiç girmez.
■

Önerme 25.1'de süreksizlik sayısının sonlu olması şart mıdır? Hayır. Sayılabilir sonsuzlukta süreksizliği olan integrallenebilir fonksiyonlar da vardır; bunun en zarif örneği **Thomae fonksiyonudur** (popçu fonksiyonu, Riemann fonksiyonu diye de anılır). Bu fonksiyon $[0,1]$'deki **her rasyonel noktada** süreksizdir (rasyoneller sayılabilir sonsuz çokluktadır, Rasyonel Sayılar Sayılabilirdir), buna karşın integrallenebilirdir ve integrali sıfırdır. İspattaki fikir sonlu durumdakinin aynısıdır; tek fark, örtülecek noktaların "büyük değer alan" sonlu bir alt kümeyle sınırlanmasıdır.

Önerme 25.2 (Thomae Fonksiyonunun İntegrallenebilirliği). *$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, x=\frac{p}{q} & \text{en sade biçimde rasyonel}\quad (p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N})\\ 0, & x\ \text{irrasyonel}\end{cases}$$

*ile tanımlansın (**Thomae fonksiyonu**). O hâlde f, $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir ve*

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0$$

olur.

İspat.
Tanım gereği $f(0)=f\left(\frac{0}{1}\right)=1$ ve $f(1)=f\left(\frac{1}{1}\right)=1$'dir.
***Adım 0: Sınırlılık.** Her x için $0\le f(x)\le 1$'dir.*
***Adım 1: Bütün alt toplamlar sıfırdır.** P herhangi bir bölünüş olsun. Her $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı pozitif uzunlukta olduğundan en az bir irrasyonel sayı içerir (bkz. Analiz 1) ve orada $f=0$'dır; ayrıca $f\ge 0$*

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan $m_k = 0$ olur. Demek ki her P için $L(P,f) = 0$ ve dolayısıyla $\underline{I}(f) = 0$'dır. Geriye $\overline{I}(f) = 0$ olduğunu, yani $U(P,f)$'nin istendiği kadar küçültülebildiğini göstermek kalıyor.

Adım 2: Büyük değerlerin sonluluğu. *$\varepsilon \in (0,1)$ verilsin (küçük ε'lar için kanıtlamak yeter) ve*

$$E = \left\{ x \in [0,1] : f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

*kümesine bakalım. $x \in E$ ise $f(x) > 0$, yani x rasyoneldir; $x = \dfrac{p}{q}$ en sade biçim olmak üzere $\dfrac{1}{q} \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$, yani $q \leq \dfrac{2}{\varepsilon}$ olur. Payda için sonlu sayıda seçenek vardır ve her sabit q için $[0,1]$ aralığındaki $\dfrac{p}{q}$ biçimli sayılar en çok $q+1$ tanedir; öyleyse E **sonlu** bir kümedir. Eleman sayısını N ile gösterelim; $f(0) = f(1) = 1 \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ ve $\varepsilon < 1$ olduğundan $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$'dir, yani $0, \dfrac{1}{2}, 1 \in E$ ve $N \geq 3$'tür.*

Adım 3: E'nin örtülmesi. *$N \geq 3$ olduğundan E'nin farklı iki elemanı arasındaki uzaklıkların kümesi boş değildir ve sonlu olduğundan pozitif bir minimumu vardır. Öyle bir $\eta > 0$ seçelim ki*

$$\eta < \frac{\varepsilon}{8N} \qquad \text{ve} \qquad \eta < \frac{1}{2}\min\{\,|\,x-y\,| : x,y \in E, x \neq y\}$$

olsun. İkinci koşul sayesinde E'nin ardışık iki elemanı $x < x'$ için $x' - x > 2\eta$, yani $x + \eta < x' - \eta$'dır; dolayısıyla $x \in E$ için $(x-\eta, x+\eta)$ açık aralıkları ikişer ikişer ayrıktır. $\overline{J_x} = [x-\eta, x+\eta] \cap [0,1]$ kapalı aralıklarını alalım.

P bölünüşünü şu noktalardan kuralım: 0, 1 ve her $x \in E$ için $[0,1]$ içinde kalan $x \pm \eta$ noktaları. E'nin elemanlarını $0 = z_1 < z_2 < \cdots < z_N = 1$ diye sıralarsak, P'nin noktaları küçükten büyüğe

$$0, \eta, z_2 - \eta, z_2 + \eta, \ldots, z_{N-1} - \eta, z_{N-1} + \eta, 1 - \eta, 1$$

*olur. Demek ki P'nin her alt aralığı ya bir $\overline{J_{z_i}}$'nin kendisidir (**örtücü**) ya da ardışık iki E elemanı $z_i < z_{i+1}$ için $[z_i + \eta, z_{i+1} - \eta]$ biçimindedir (**boş**).*

Adım 4: Boş alt aralıklarda E noktası yoktur. *$[z_i + \eta, z_{i+1} - \eta]$ boş bir alt aralık ve $z \in E$ olsun. z_i ile z_{i+1} ardışık olduğundan ya $z \leq z_i$ ya da $z \geq z_{i+1}$'dir. Birinci durumda $z \leq z_i < z_i + \eta$, ikinci durumda $z \geq z_{i+1} > z_{i+1} - \eta$ olur; her iki durumda da z bu alt aralığın dışındadır. Öyleyse boş alt aralıkların **hiçbir** noktası E'de değildir, yani böyle bir alt aralığın her noktasında $f < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ve dolayısıyla $M_k \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$'dir.*

Adım 5: Üst toplamın tahmini. *İki türü ayrı ayrı toplayalım. Örtücü alt aralıklarda $M_k \leq 1$'dir ve toplam uzunlukları en çok $2N\eta$'dır; boş alt aralıklarda $M_k \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$'dir ve toplam uzunlukları en çok 1'dir. Öyleyse*

$$U(P,f) = \sum_{k\,\text{örtücü}} M_k \Delta x_k + \sum_{k\,\text{boş}} M_k \Delta x_k \leq 1 \cdot 2N\eta + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 < 2N \cdot \frac{\varepsilon}{8N} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Adım 6: Sonuç. *$L(P,f) = 0$ olduğundan $U(P,f) - L(P,f) = U(P,f) < \varepsilon$ olur. $\varepsilon \in (0,1)$ için ölçütü sağlayan bir bölünüş bulmak yeterlidir, çünkü $\varepsilon \geq 1$ verildiğinde aynı bölünüşü $\varepsilon' = \dfrac{1}{2}$ için kurmak işi görür; öyleyse Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir. Ayrıca her $\varepsilon \in (0,1)$ için $0 \leq \overline{I}(f) \leq U(P,f) < \varepsilon$ olduğundan $\overline{I}(f) = 0$'dır. Alt integral de 0 olduğuna göre*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Thomae fonksiyonu nerede süreklidir?

Thomae fonksiyonu her **irrasyonel** noktada sürekli, her **rasyonel** noktada süreksizdir. Süreksizlik kolaydır: x_0 rasyonelse $f(x_0) > 0$'dır, ama x_0'a yakınsayan irrasyonel bir dizi boyunca f değerleri sabit 0'dır. Süreklilik için yukarıdaki Adım 2 kullanılır: x_0 irrasyonel ve $\varepsilon > 0$ verilmişse $f(x) \geq \varepsilon$ olan noktalar sonlu sayıdadır ve x_0 bunların hiçbiri olmadığından, x_0'ın hepsinden uzak duran bir komşuluğunda $\mid f(x) - f(x_0) \mid = f(x) < \varepsilon$ olur.
Demek ki süreksizlik kümesi $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, yani sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir (bkz. Analiz 1), buna karşın fonksiyon integrallenebilirdir; oysa Dirichlet fonksiyonunun süreksizlik kümesi $[0,1]$'in **tamamıdır** ve o integrallenemez. Bu karşıtlık, gerçek ölçütün "süreksizlik kümesinin ne kadar büyük olduğu" ile ilgili olduğunu sezdiriyor.

25.6 Sonlu Sayıda Değeri Değiştirmek

Örnek 25.4, Örnek 25.5 ve Örnek 25.6 hesaplarında hep aynı olguyla karşılaştık: birkaç noktadaki değer integrale hiç yansımadı. Bu tesadüf değildir; Darboux toplamlarında bir noktanın katkısı, onu içeren alt aralığın uzunluğuyla çarpılır ve bu uzunluk istendiği kadar küçültülebilir.

Önerme 25.3 (Değer Değiştirmenin Etkisizliği). *$f \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a,b]$'nin sonlu sayıda $c_1, \ldots, c_p$ noktası dışında f ile aynı olsun; yani $x \notin \{c_1, \ldots, c_p\}$ için $g(x) = f(x)$ olsun. O hâlde g de integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

olur.

> ***İspat.***
> ***Adım 0: Sınırlılık ve gösterimler.*** *f sınırlıdır; g, f'den yalnızca sonlu sayıda noktada ayrıldığından g de sınırlıdır. $I = \int_a^b f(x)\,dx$ olsun ve $C = \max\{\sup_{[a,b]} \mid f \mid, \mid g(c_1) \mid, \ldots, \mid g(c_p) \mid\}$ diyelim; böylece hem f hem g mutlak değerce C ile sınırlıdır. $C = 0$ ise f ve g özdeş olarak sıfırdır ve iddia açıktır; öyleyse $C > 0$ varsayalım. $\varepsilon > 0$ verilsin.*
> ***Adım 1: f için iyi bir bölünüş.*** *f integrallenebilir olduğundan Teorem 25.1 gereği $U(P_0, f) - L(P_0, f) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olan bir P_0 bölünüşü vardır.*
> ***Adım 2: Ayrık noktaların yalıtılması.*** *$\eta > 0$ sayısını yalnızca $4Cp\,\eta < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olacak kadar küçük seçelim; başka bir koşula gerek yoktur. P_0'a, her c_i için $[a,b]$ içinde kalan $c_i \pm \eta$ noktalarını ekleyerek P bölünüşünü elde edelim. P, P_0'ın bir incelmesi olduğundan*
>
> $$U(P,f) - L(P,f) \leq U(P_0,f) - L(P_0,f) < \frac{\varepsilon}{3}$$
>
> *olur; ayrıca her zamanki gibi $L(P,f) \leq I \leq U(P,f)$'dir.*
> *P'nin alt aralıklarından, içinde bir c_i bulunanlara **kirli**, ötekilere **temiz** diyelim. Sabit bir c_i için: c_i ya bir alt aralığın içindedir (tek bir kirli alt aralık doğurur) ya da bir bölünüş noktasıdır (biri solunda biri sağında olmak üzere iki komşu kirli alt aralık doğurur). Her iki durumda da bu alt aralıklar $[c_i - \eta, c_i + \eta] \cap [a,b]$ kümesinin içinde kalır: bu kümenin uçları ya P'ye eklediğimiz $c_i \pm \eta$ noktalarıdır ya da $[a,b]$'nin uçlarıdır, dolayısıyla c_i'ye komşu bölünüş noktaları bu uçları aşamaz. Öyleyse c_i'nin doğurduğu kirli alt aralıkların toplam uzunluğu en çok 2η, p nokta için hepsinin toplam uzunluğu en çok $2p\eta$'dır.*
> ***Adım 3: Toplamların karşılaştırılması.*** *Temiz bir alt aralıkta f ile g **özdeştir**; orada m_k ve M_k değerleri iki fonksiyonda da aynıdır ve toplamlara katkıları eşittir. Farklar yalnızca kirli alt aralıklardan gelir; orada her iki fonksiyon için $\mid M_k \mid \leq C$ ve $\mid m_k \mid \leq C$ olduğundan üst toplam terimleri arasındaki fark en çok $2C\,\Delta x_k$'dır. Öyleyse*
>
> $$\mid U(P,g) - U(P,f) \mid \leq \sum_{k \text{ kirli}} 2C\,\Delta x_k \leq 2C \cdot 2p\eta = 4Cp\eta < \frac{\varepsilon}{3}$$
>
> *ve aynı gerekçeyle $\mid L(P,g) - L(P,f) \mid < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 4: g integrallenebilirdir. *Üçgen eşitsizliğiyle*

$$U(P,g)-L(P,g)\le \big|\,U(P,g)-U(P,f)\,\big|+\big(\,U(P,f)-L(P,f)\,\big)+\big|\,L(P,f)-L(P,g)\,\big|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

olur; verilen her $\varepsilon>0$ için böyle bir bölünüş kurulabildiğinden Teorem 25.1 gereği $g\in\mathcal{R}[a,b]$'dir.
Adım 5: İntegraller eşittir. *$J=\int_a^b g(x)\,dx$ olsun. $J\le U(P,g)$, $U(P,f)<L(P,f)+\dfrac{\varepsilon}{3}$ ve $L(P,f)\le I$ olduğundan*

$$J\le U(P,g)<U(P,f)+\frac{\varepsilon}{3}<L(P,f)+\frac{2\varepsilon}{3}\le I+\varepsilon;$$

benzer biçimde $J\ge L(P,g)>L(P,f)-\dfrac{\varepsilon}{3}>U(P,f)-\dfrac{2\varepsilon}{3}\ge I-\varepsilon$ olur. Demek ki her $\varepsilon>0$ için $|\,J-I\,|<\varepsilon$'dur; öyleyse $J=I$'dır.
■

Örnek 25.7 (Değer Değiştirmenin Bir Uygulaması). $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(x)=\begin{cases}5, & x=\frac{1}{3}\\ -7, & x=\frac{1}{2}\\ 100, & x=1\\ x^2, & \text{öteki durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlansın. g'nin integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve $\int_0^1 g(x)\,dx$ değerini bulunuz.

Çözüm.
$f(x)=x^2$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir; Teorem 25.2 gereği integrallenebilirdir ve Örnek 25.2'nde integralinin $\dfrac{1}{3}$ olduğunu bulmuştuk. g fonksiyonu f'den yalnızca $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$ ve 1 noktalarında, yani sonlu sayıda noktada ayrılır; Önerme 25.3 gereği g de integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}.$$

Değerlerin ne kadar büyük olduğunun hiç önemi yoktur; önemli olan yalnızca **kaç tane** noktada değişiklik yapıldığıdır.
■

> **i** İleri konu: Lebesgue ölçütü
>
> Bu bölümde topladığımız bütün örnekler tek bir teoremin özel hâlleridir: sınırlı bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Riemann integrallenebilirdir ancak ve ancak süreksizlik noktalarının kümesi **sıfır ölçülüyse** (yani her $\varepsilon>0$ için, toplam uzunlukları ε'dan küçük olan sayılabilir çoklukta aralıkla örtülebiliyorsa). Bu, **Lebesgue integrallenebilirlik ölçütüdür**; ispatı ölçü kuramının araçlarını gerektirdiğinden burada verilmeyecektir. Ölçütün bu bölümdeki sonuçları nasıl açıkladığına dikkat edin: sürekli fonksiyonların süreksizlik kümesi boş, sonlu süreksizliği olanlarınki sonlu, monoton fonksiyonlarınki ve Thomae fonksiyonunkiler sayılabilirdir (sayılabilir her küme sıfır ölçülüdür); buna karşılık Dirichlet fonksiyonununki $[0,1]$'in tamamıdır ve sıfır ölçülü değildir.

25.7 Alıştırmalar

Alıştırma 25.1 (İntegrallenebilirlik Ölçütü Üzerine).

 CC BY-NC-SA 4.0

a) Düzgün bölünüşler kullanarak $f(x)=x^3$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve integralini hesaplayınız. (İpucu: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.)

b) $f(x)=\lfloor x\rfloor$ taban fonksiyonunun (bkz. Analiz 1) $[0,3]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu iki ayrı gerekçeyle açıklayınız ve $\int_0^3 \lfloor x\rfloor\,dx$ değerini bir bölünüş dizisiyle hesaplayınız.

c) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, x irrasyonel iken $f(x)=0$, $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ iken $f(x)=x$ olsun. f'nin alt ve üst integrallerini bulunuz ve f'nin integrallenebilir olmadığını gösteriniz.

d) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ ile tanımlansın. f'nin integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

e) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $x=\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ noktalarında 1, öteki noktalarda 0 olsun. f'nin integrallenebilir olduğunu ve $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ olduğunu gösteriniz. Bu fonksiyona Önerme 25.1 doğrudan uygulanabilir mi?

Çözüm.
a) $P_n=\left\{0,\dfrac{1}{n},\ldots,\dfrac{n}{n}\right\}$ düzgün bölünüşünü alalım; $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$'dir. $f(x)=x^3$, $[0,1]$ üzerinde artan olduğundan $m_k=\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^3$ ve $M_k=\left(\dfrac{k}{n}\right)^3$'tür. İpucundaki formülle

$$U(P_n,f)=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^2}{4n^2},\qquad L(P_n,f)=\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n-1}j^3=\frac{(n-1)^2}{4n^2}.$$

Farkları $U(P_n,f)-L(P_n,f)=\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{4n^2}=\dfrac{1}{n}\to 0$ olduğundan Sonuç 25.1 uygulanır: f integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1 x^3\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}.$$

b) *Birinci gerekçe:* $\lfloor\cdot\rfloor$ azalmayandır, dolayısıyla Teorem 25.3 gereği integrallenebilirdir. *İkinci gerekçe:* $[0,3]$ üzerinde $\lfloor x\rfloor$ sınırlıdır ve yalnızca $x=1$, $x=2$, $x=3$ noktalarında süreksizdir; Önerme 25.1 gereği integrallenebilirdir.
Değeri bulmak için $0<\delta<\dfrac{1}{2}$ olmak üzere

$$P_\delta=\{0,1-\delta,1+\delta,2-\delta,2+\delta,3-\delta,3\}$$

bölünüşünü alalım; süreksizlik noktası $x=3$ sağ uçta olduğundan onu da ince bir aralığa hapsettik. Altı alt aralıkta (m_k,M_k) ikilileri sırasıyla $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$; uzunluklar ise $1-\delta$, 2δ, $1-2\delta$, 2δ, $1-2\delta$, δ'dır. Buradan

$$L(P_\delta,f)=(1-2\delta)+2\delta+2(1-2\delta)+2\delta=3-2\delta,\qquad U(P_\delta,f)=2\delta+(1-2\delta)+4\delta+2(1-2\delta)+3\delta=3+3\delta$$

olur; fark 5δ'dır. $\delta=\dfrac{1}{n}$ $(n\geq 3)$ alarak $U(P_n,f)-L(P_n,f)=\dfrac{5}{n}\to 0$ elde ederiz; Sonuç 25.1 gereği

$$\int_0^3\lfloor x\rfloor\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)=3.$$

Bu, $[0,1)$, $[1,2)$ ve $[2,3)$ üzerindeki 0, 1, 2 yüksekliğinde üç dikdörtgenin alanları toplamıdır.
c) f sınırlıdır $(0\leq f\leq 1)$. $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ herhangi bir bölünüş olsun. Her alt aralık bir irrasyonel sayı içerdiğinden (bkz. Analiz 1) ve $f\geq 0$ olduğundan $m_k=0$'dır; öyleyse $L(P,f)=0$ ve $\underline{I}(f)=0$. Üst toplamlar için: $[x_{k-1},x_k]$ üzerinde f'nin aldığı değerler oradaki rasyonel sayıların kendileri ve 0'dır; x_k'ye soldan istendiği kadar yakın rasyonel sayılar bulunduğundan (bkz. Analiz 1)

$$M_k=\sup\big(\ \mathbb{Q}\cap[x_{k-1},x_k]\ \big)=x_k$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Öyleyse $U(P,f)=\sum_{k=1}^{n} x_k\Delta x_k = U(P,\mathrm{id})$'dir; yani $U(P,f)$, artan olan $\mathrm{id}(x)=x$ fonksiyonunun aynı bölünüşteki üst toplamıdır. Bütün bölünüşler üzerinden infimum alırsak

$$\overline{I}(f)=\inf_P U(P,\mathrm{id})=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

buluruz (id süreklidir, dolayısıyla Teorem 25.2 gereği integrallenebilirdir; integralinin $\frac{1}{2}$ olduğunu Sonuç 25.1 ile bu bölümün başında hesaplamıştık, o yüzden üst integrali de $\frac{1}{2}$'dir). $\underline{I}(f)=0\neq\frac{1}{2}=\overline{I}(f)$ olduğundan f integrallenebilir değildir.

d) Her $x\neq 0$ için $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ ve $f(0)=0$ olduğundan f sınırlıdır. $x_0\neq 0$ noktalarında $x\mapsto\frac{1}{x}$ ile sin sürekli olduğundan bileşke de süreklidir; öyleyse f'nin $(0,1]$ üzerinde süreksizlik noktası yoktur. Geriye yalnızca $x=0$ kalır ve orada f gerçekten süreksizdir: $u_n=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}\to 0$ için $f(u_n)=1\neq 0=f(0)$'dır. Sınırlı ve tek süreksizliği olan bir fonksiyon olarak, Önerme 25.1 gereği f integrallenebilirdir.

e) Önerme 25.1 **doğrudan uygulanamaz**: f'nin süreksizlik noktaları $x=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ ile $x=0$'dır ve bunlar sonsuz çokluktadır. (Her $\frac{1}{n}$ noktasında f değeri 1, çevresinde 0'dır; $x=0$'da da $f\left(\frac{1}{n}\right)=1\not\to 0=f(0)$ olduğundan f süreksizdir.) Önerme 25.2'in yöntemini kullanacağız.

f sınırlıdır $(0\leq f\leq 1)$ ve her alt aralık bir irrasyonel sayı içerdiğinden (bkz. Analiz 1) orada $f=0$'dır; $f\geq 0$ olduğundan $m_k=0$ olur, yani her P için $L(P,f)=0$ ve $\underline{I}(f)=0$'dır.

$\varepsilon\in(0,1)$ verilsin; küçük ε'lar için ölçütü sağlamak yeter, çünkü küçük bir ε için kurulan bölünüş daha büyüğü için de işe yarar. Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{4}$ olan bir $N\in\mathbb{N}$ vardır (bu N ister istemez $N\geq 5$'tir, çünkü $\varepsilon<1$'dir). Kesme noktası olarak

$$c=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right)$$

sayısını alalım. $\frac{1}{N+1}<c<\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{4}$ olduğundan c hiçbir $\frac{1}{n}$'e eşit değildir ve c'nin sağında kalan $\frac{1}{n}$ noktaları tam olarak

$$E=\left\{\frac{1}{n}:1\leq n\leq N\right\}$$

kümesidir; E sonludur ve N elemanlıdır. Şimdi

$$\eta<\frac{\varepsilon}{8N},\qquad \eta<\frac{1}{2}\min\{|\,x-y\,|:x,y\in E, x\neq y\},\qquad \eta<\frac{1}{N}-c$$

koşullarını sağlayan bir $\eta>0$ seçelim; üçüncü koşul, örtücü aralıkların c'nin soluna taşmasını engeller. P bölünüşü 0, c, 1 ve her $x\in E$ için $[c,1]$ içinde kalan $x\pm\eta$ noktalarından oluşsun. Üst toplamı üç parçada tahmin edelim: $[0,c]$ alt aralığında $M_k\leq 1$ ve uzunluk $c<\frac{\varepsilon}{4}$ olduğundan katkı $\frac{\varepsilon}{4}$'ten küçüktür; E'yi örten alt aralıklarda $M_k\leq 1$ ve toplam uzunlukları en çok $2N\eta<\frac{\varepsilon}{4}$ olduğundan katkıları da $\frac{\varepsilon}{4}$'ten küçüktür; geri kalan alt aralıklar ise Önerme 25.2'in Adım 4'ündeki gerekçeyle E'nin hiçbir noktasını (uçları dâhil) içermez, üstelik c'nin sağında kaldıklarından E dışındaki $\frac{1}{n}$ noktalarını da içeremezler; öyleyse orada $f\equiv 0$, $M_k=0$ ve katkı sıfırdır. Toplarsak $U(P,f)<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ ve $L(P,f)=0$ olur; yani $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$. Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir. Ayrıca $0\leq\overline{I}(f)<\varepsilon$ her $\varepsilon\in(0,1)$ için geçerli olduğundan $\overline{I}(f)=0$'dır ve

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümde integrallenebilirliği tek bir bölünüşe indirgeyen ölçütü kurduk ve onunla sürekli, monoton ve süreksizliği olan geniş fonksiyon sınıflarını ele aldık. Ancak alt aralıklarda hep **infimum ve supremum** kullandık; oysa Riemann'ın özgün yaklaşımı, her alt aralıktan **serbestçe seçilen bir örnek nokta** üzerinden toplam kurmaktı. İki yaklaşımın aynı kapıya çıktığını bir sonraki bölümde göreceğiz: Riemann Toplamları ve Darboux Tanımıyla Denkliği.

 CC BY-NC-SA 4.0

26. Riemann Toplamları ve Darboux Tanımıyla Denkliği

Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü bölümünde bir fonksiyonun integrallenebilir olmasının ne demek olduğunu tam olarak belirledik: sınırlı bir f fonksiyonu, alt integrali ile üst integrali çakışıyorsa integrallenebilirdir; bunu sınamanın pratik yolu ise, her $\varepsilon > 0$ için $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ olacak biçimde **bir** P bölünüşü (partition) bulabilmektir. Bu kuruluşun tamamı alt toplam (lower Darboux sum) ile üst toplama (upper Darboux sum), yani her alt aralıkta f'nin **infimumu ile supremumuna** dayanıyordu. Kuramı bu biçimde düzenleyen Gaston Darboux'dur.

Oysa integralin tarihsel olarak daha eski olan ve uygulamada çok daha sık kullanılan bir tanımı daha vardır. Riemann'ın özgün yaklaşımında her alt aralıkta f'nin en büyük ya da en küçük değeri değil, o alt aralıktan **serbestçe seçilen bir noktadaki** değeri kullanılır. Böyle bir seçimle kurulan toplama **Riemann toplamı** (Riemann sum) denir. Riemann toplamı, "eğrinin altındaki alanı dikdörtgenlerle yaklaşık hesaplama" sezgisine Darboux toplamlarından daha yakındır; sayısal integrasyonun bütün yöntemleri de bu toplamların birer özel hâlidir.

Bu iki kuruluş ilk bakışta farklı görünür. Darboux toplamlarında bölünüşün **kaç parçalı** olduğu değil, ne kadar ince olduğu bile doğrudan önemli değildir: alt integral bütün alt toplamların supremumu, üst integral bütün üst toplamların infimumudur. Riemann toplamlarında ise bölünüşün **normu** $\| P \|$ sıfıra giderken toplamların bir limite gitmesi istenir ve bu limitin örnek nokta seçiminden bağımsız olması beklenir. Bu bölümün ana sonucu, bu iki tanımın reel değerli fonksiyonlar için **tam olarak aynı şeyi** söylediğidir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Riemann toplamının tanımı ve alt–üst toplamlar arasındaki sıkıştırma; alt toplamın örnek noktalara göre infimum, üst toplamın supremum olduğu gerçeği; $\| P \| \to 0$ iken alt ve üst toplamların alt ve üst integrale yakınsadığını söyleyen **Darboux limit teoremi** (bu bölümün teknik omurgası); iki tanımın denkliği; Riemann'ın özgün ε–δ tanımı; integrallenebilirliğin sınırlılığı gerektirdiği; buna karşın sınırlılığın tek başına yetmediği; ve son olarak, düzgün bölünüşler yardımıyla karmaşık toplam limitlerini belirli integrale çevirme tekniği. Bu son teknik, bölümün en çok kullanılacak pratik aracıdır.

> **i** Gösterim anlaşması: alt ve üst integral
>
> Bu bölüm boyunca, sınırlı bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun **alt integrali** ile **üst integrali** için
>
> $$\underline{I}(f) = \sup_P L(P,f), \qquad \overline{I}(f) = \inf_P U(P,f)$$
>
> gösterimlerini kullanacağız; buradaki supremum ve infimum, $[a,b]$'nin **bütün** P bölünüşleri üzerinden alınır. Yani $\underline{I}(f)$ alt integrali, $\overline{I}(f)$ üst integrali gösterir. Her sınırlı f için
>
> $$\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$$
>
> olduğunu ve eşitlik durumunda f'ye integrallenebilir denip ortak değerin $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ile gösterildiğini biliyoruz.

26.1 Riemann Toplamı

Bir bölünüş verildiğinde, her alt aralıkta f'nin infimumunu alırsak alt toplamı, supremumunu alırsak üst toplamı elde ediyorduk. Bu iki seçim, olabilecek **en kötümser** ve **en iyimser** seçimlerdir. Aradaki bütün ara seçimlere de bir ad vermek istiyoruz.

Tanım 26.1 (Riemann Toplamı). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

bir bölünüş olsun. Her $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından bir

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

noktası seçelim. Böyle seçilen

$$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

nokta ailesine P bölünüşüne ilişkin bir **örnek noktalar** (sample points) ailesi, ya da kısaca bir **işaretleme** denir. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olmak üzere

$$S(P, f, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

sayısına f'nin P bölünüşüne ve T örnek noktalarına ilişkin **Riemann toplamı** (Riemann sum) denir.

Tanımda f'nin sınırlı olduğu **varsayılmadı**; Riemann toplamı her fonksiyon için anlamlıdır, çünkü yalnızca sonlu sayıda fonksiyon değeri kullanır. Alt ve üst toplamların tanımlı olabilmesi için ise sınırlılığın şart olduğunu (her alt aralıkta m_k ile M_k'nin birer reel sayı olması gerekir) hatırlarsak, Riemann toplamlarının bu anlamda daha "cömert" olduğunu görürüz. Bu farkın bir bedeli olacak; bölümün ilerisinde integrallenebilirliğin yine de sınırlılığı zorladığını göreceğiz.
Geometrik anlamı şudur: $f \geq 0$ ise $f(t_k)\,\Delta x_k$ çarpımı, tabanı $[x_{k-1}, x_k]$ ve yüksekliği $f(t_k)$ olan dikdörtgenin alanıdır. $S(P, f, T)$ ise bu dikdörtgenlerin alanları toplamıdır; yani eğrinin altındaki alana bir yaklaşımdır. Örnek noktaların üç klasik seçimi vardır:

- **Sol uç noktalar:** $t_k = x_{k-1}$. Elde edilen toplama sol uç nokta toplamı denir.
- **Sağ uç noktalar:** $t_k = x_k$. Uygulamalarda en sık kullanılan seçimdir; düzgün bölünüşlerle birleştiğinde çok temiz formüller verir.
- **Orta noktalar:** $t_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$. Sayısal integrasyonda "orta nokta kuralı" adını alır ve genellikle uç nokta seçimlerinden daha isabetlidir.

Dikkat edilecek tek şey, T'nin P'ye bağlı olmasıdır: bölünüşü değiştirirsek örnek noktaları da yeniden seçmemiz gerekir. Bu yüzden Riemann toplamı iki değişkenin — bölünüşün ve işaretlemenin — fonksiyonudur ve gösterimde ikisi de yazılır.

Sürekli fonksiyonlarda alt ve üst toplam da birer Riemann toplamıdır

f, $[a, b]$ üzerinde sürekli olsun. Her $[x_{k-1}, x_k]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olduğundan, Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği f bu aralıkta en büyük ve en küçük değerini **gerçekten alır**: öyle $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ noktaları vardır ki

$$f(u_k) = m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \qquad f(v_k) = M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Öyleyse $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ ve $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ birer örnek nokta ailesidir ve

$$L(P, f) = S(P, f, U), \qquad U(P, f) = S(P, f, V)$$

olur. Yani sürekli fonksiyonlar için Darboux toplamları, Riemann toplamlarının özel hâlleridir. Süreklilik olmadan bu doğru olmayabilir: infimum ve supremum aralıkta alınmayabilir.

26.2 Sıkıştırma: Riemann Toplamı Alt ve Üst Toplam Arasındadır

Riemann toplamının Darboux kuramına bağlanması, tek bir gözlemle başlar: örnek nokta ne olursa olsun, $f(t_k)$ değeri m_k ile M_k arasındadır. Bunun toplamlara yansıması aşağıdaki önermenin ilk kısmıdır. İkinci kısım ise çok daha güçlüdür ve bu bölümün bütün ispatlarını taşıyacaktır: alt ve üst toplamlar, Riemann toplamlarının yalnızca birer sınırı değil, **tam olarak infimumu ve supremumudur.**

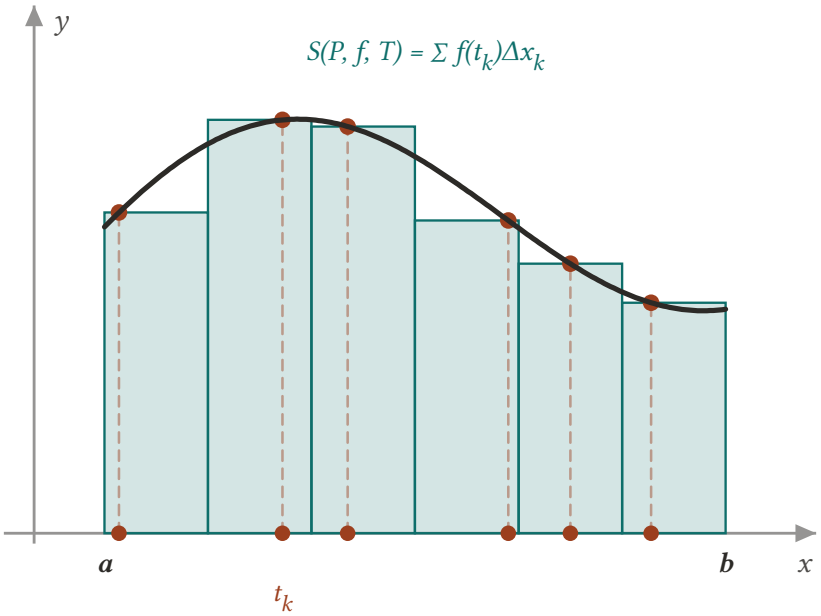
 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 26.1 (Riemann Toplamının Sıkıştırılması). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ bir bölünüş olsun.*
(i) *P'ye ilişkin her T örnek nokta ailesi için*

$$L(P,f) \le S(P,f,T) \le U(P,f).$$

(ii) *Dahası, T bütün olanaklı örnek nokta aileleri üzerinde değişirken*

$$L(P,f) = \inf_T S(P,f,T), \qquad U(P,f) = \sup_T S(P,f,T).$$



Şekil 26.1: Riemann toplamı: her alt aralıkta herhangi *bir* t_k *örnek noktası seçilir ve dikdörtgenin yüksekliği* $f(t_k)$ *alınır. Bu toplam her zaman alt ve üst Darboux toplamlarının arasında kaldığından, bölünüşün normu sıfıra giderken sıkıştırma teoremiyle integrale yakınsar.*

İspat.
(i) Sıkıştırma eşitsizliği. *$T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ verilsin. Her k için $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olduğundan, infimum ile supremumun tanımı (bkz. Analiz 1) gereği*

$$m_k \le f(t_k) \le M_k$$

olur. Her iki eşitsizliği de ***pozitif*** *olan Δx_k sayısıyla çarpalım (çarpanın pozitifliği sıralamayı korur):*

$$m_k\,\Delta x_k \le f(t_k)\,\Delta x_k \le M_k\,\Delta x_k.$$

Şimdi $k = 1$'den n'ye toplarsak

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

yani $L(P,f) \le S(P,f,T) \le U(P,f)$ elde edilir.
(ii) Üst toplam bir supremumdur. *$\mathcal{S} = \{S(P,f,T) : T, P$ 'ye ilişkin bir örnek nokta ailesi$\}$ kümesini düşünelim. (i)'den $U(P,f)$ bu kümenin bir üst sınırıdır. Supremum olduğunu göstermek için, $U(P,f)$'den küçük hiçbir sayının üst sınır olamayacağını göstermeliyiz; bunun için $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\mathcal{S}$ içinde $U(P,f) - \varepsilon$'dan büyük bir eleman bulmamız yeter (bkz. Analiz 1).*
$\varepsilon > 0$ verilsin. Her k için $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ olduğundan, supremumun ε-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(t_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

olan bir $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *noktası vardır. Burada* $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ *sayısı pozitiftir, çünkü* $a < b$*'dir. Bu* t_k*'lerden oluşan aileye* T *diyelim. O hâlde*

$$S(P,f,T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k > \sum_{k=1}^{n}\left(M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k.$$

Teleskopik toplam $\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = x_n - x_0 = b-a$ *olduğundan sağ taraf*

$$U(P,f) - \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = U(P,f) - \varepsilon$$

değerine eşittir. Yani $S(P,f,T) > U(P,f) - \varepsilon$ *olan bir* T *bulduk. Demek ki* $U(P,f) - \varepsilon$ *bir üst sınır değildir;* $\varepsilon > 0$ *keyfî olduğundan* $U(P,f) = \sup \mathcal{S}$*'dir.*
Alt toplam bir infimumdur. *Aynı akıl yürütmeyi infimum için tekrarlayalım. (i)'den* $L(P,f)$*,* $\mathcal{S}$*'nin bir alt sınırıdır.* $\varepsilon > 0$ *verilsin. Her* k *için* $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ *olduğundan, infimumun* ε*-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği*

$$f(t'_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

olan bir $t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *vardır. Bu noktalardan oluşan aileye* T' *diyelim. O hâlde*

$$S(P,f,T') = \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n}\left(m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_k = L(P,f) + \varepsilon.$$

Demek ki $L(P,f) + \varepsilon$ *bir alt sınır değildir;* $\varepsilon > 0$ *keyfî olduğundan* $L(P,f) = \inf \mathcal{S}$*'dir.*
■

Önermenin (ii) kısmı şu pratik sonucu verir: **sabit bir P için** Riemann toplamlarının alabileceği değerler $L(P,f)$ ile $U(P,f)$ arasına sıkışır ve bu iki uca istenildiği kadar yaklaşılabilir. Dolayısıyla $U(P,f) - L(P,f)$ farkı, "P bölünüşünde örnek nokta seçimindeki belirsizliğin büyüklüğü"dür. İntegrallenebilirlik ölçütünün neden tam olarak bu farkı küçültmeyi istediği böylece daha anlaşılır olur.

26.3 Darboux'nun Limit Teoremi

Şimdi bu bölümün teknik olarak en çetin sonucuna geliyoruz. Alt integralin tanımı $\underline{I}(f) = \sup_P L(P,f)$ biçimindedir; bu, "uygun seçilmiş bazı bölünüşler için $L(P,f)$ değeri $\underline{I}(f)$'ye yaklaşır" demektir. Oysa Riemann toplamlarıyla çalışırken çok daha güçlü bir şey isteriz: **normu yeterince küçük olan her bölünüşün** iyi bir yaklaşım vermesi. Bu ikisi arasındaki geçiş hiç de bedava değildir; çünkü ince bir bölünüş, iyi yerleştirilmemişse ilkesel olarak kötü bir yaklaşım verebilirmiş gibi görünür. Darboux'nun limit teoremi, bunun olamayacağını söyler.
Önce "$\| P \| \to 0$ iken limit" ifadesinin ne demek olduğunu netleştirelim. Bölünüşlere sayı atayan bir Φ kuralı ve bir $A \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$\lim_{\|P\|\to 0} \Phi(P) = A$$

yazımı şu anlama gelir: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $[a,b]$'nin $\| P \| < \delta$ olan **her** P bölünüşü için $| \Phi(P) - A | < \varepsilon$ olur. Bu, fonksiyon limitine benzeyen ama bir fonksiyon limiti **olmayan** bir kavramdır: Φ'nin tanım kümesi bölünüşler kümesidir, aynı norma sahip sonsuz çoklukta bölünüş vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ İki farklı Darboux teoremi

Darboux Teoremi: Türevin Ara Değer Özelliği bölümünde ispatladığımız Teorem 10.1, türev fonksiyonunun ara değer özelliği taşıdığını söylüyordu. Aşağıdaki teorem bambaşka bir sonuçtur ve integral kuramına aittir; ortak olan tek şey, ikisinin de aynı matematikçiye, Gaston Darboux'ya ait olmasıdır. Karıştırmamak için bu bölümdeki sonucu **Darboux limit teoremi** diye anacağız.

Teorem 26.1 (Darboux Limit Teoremi). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. O hâlde*

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(P,f) = \underline{I}(f) \qquad \text{ve} \qquad \lim_{\|P\|\to 0} U(P,f) = \overline{I}(f).$$

Açıkça yazarsak: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $\| P \| < \delta$ olan her P bölünüşü için

$$\overline{I}(f) \le U(P,f) < \overline{I}(f) + \varepsilon \qquad \text{ve} \qquad \underline{I}(f) - \varepsilon < L(P,f) \le \underline{I}(f)$$

olur.

İspat.
Hazırlık. *f sınırlı olduğundan $\sup_{x\in[a,b]} | f(x) |$ bir reel sayıdır. Hesaplarda sıfıra bölmemek için*

$$K = \sup_{x\in[a,b]} | f(x) | + 1$$

diyelim; $K > 0$'dır ve her $x \in [a,b]$ için $| f(x) | \le K$'dir. Buradan, herhangi bir $J \subseteq [a,b]$ aralığı için $\sup_J f$ ile $\inf_J f$ değerlerinin de $[-K,K]$ aralığında kaldığı çıkar. Özellikle, $J_1 \subseteq J_2 \subseteq [a,b]$ olan iki aralık için

$$0 \le \sup_{J_2} f - \sup_{J_1} f \le K - (-K) = 2K, \qquad 0 \le \inf_{J_1} f - \inf_{J_2} f \le 2K$$

olur; buradaki negatif olmama koşulları sırasıyla, daha büyük bir aralığa geçildiğinde supremumun küçülemeyeceğinden ve infimumun büyüyemeyeceğinden gelir. Üstten sınırlar ise iki sayının da $[-K,K]$ aralığında kalmasının doğrudan sonucudur.
Ayrıca Bölünüşler ve Darboux Toplamları bölümünden şu iki olguyu kullanacağız: Q, P'nin bir incelmesi (refinement) ise $L(P,f) \le L(Q,f)$ ve $U(Q,f) \le U(P,f)$'dir; ayrıca her P için $L(P,f) \le \underline{I}(f)$ ve $\overline{I}(f) \le U(P,f)$'dir (çünkü $\underline{I}(f)$ alt toplamların supremumu, $\overline{I}(f)$ üst toplamların infimumudur).
Adım 1: Üst toplamlar için uygun bir sabit bölünüş seçimi. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\overline{I}(f)$, $\{U(P,f) : P$ bölünüş$\}$ kümesinin infimumu olduğundan, infimumun ε-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği öyle bir P_0 bölünüşü vardır ki*

$$U(P_0,f) < \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

*Bu P_0 bölünüşünü artık **sabitliyoruz**. P_0'ın a ve b dışında kalan noktalarının sayısına N diyelim; yani P_0'ın (a,b) aralığının içinde kalan nokta sayısı $N \ge 0$'dır.*
Adım 2: δ'nın seçimi.

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4K(N+1)}$$

alalım; $K > 0$ ve $N+1 \ge 1$ olduğundan $\delta > 0$'dır.
Adım 3: Nokta eklemenin üst toplamı ne kadar düşürebileceği. *Q' herhangi bir bölünüş, $c \notin Q'$ bir nokta ve $Q'' = Q' \cup \{c\}$ olsun. c noktası Q''nün bir $[u,v]$ alt aralığının içine düşer. $U(Q',f)$ ile $U(Q'',f)$ arasındaki tek fark bu alt aralıktan gelen katkıdır:*

$$U(Q',f) - U(Q'',f) = \left(\sup_{[u,v]} f\right)(v-u) - \left(\sup_{[u,c]} f\right)(c-u) - \left(\sup_{[c,v]} f\right)(v-c).$$

$(v-u) = (c-u) + (v-c)$ olduğundan sağ tarafı yeniden düzenleyebiliriz:

$$U(Q',f) - U(Q'',f) = \left(\sup_{[u,v]} f - \sup_{[u,c]} f\right)(c-u) + \left(\sup_{[u,v]} f - \sup_{[c,v]} f\right)(v-c).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$[u,c] \subseteq [u,v]$ ve $[c,v] \subseteq [u,v]$ olduğundan yukarıdaki hazırlık gereği her iki parantez de $[0, 2K]$ aralığındadır. Öyleyse

$$0 \leq U(Q', f) - U(Q'', f) \leq 2K \left((c-u) + (v-c) \right) = 2K(v-u) \leq 2K \parallel Q' \parallel .$$

Adım 4: Keyfî ince bir bölünüşün üst toplamının kestirimi. $\parallel P \parallel < \delta$ olan herhangi bir P bölünüşü alalım ve

$$Q = P \cup P_0$$

ortak incelmesini kuralım. Q, hem P'nin hem P_0'ın incelmesidir. $a, b \in P$ olduğundan, Q bölünüşü P'ye en çok N tane yeni nokta eklenerek elde edilir. Bu noktaları ***teker teker*** ekleyelim:

$$P = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_m = Q, \qquad m \leq N,$$

öyle ki her adımda tam bir nokta eklenmiş olsun. Her Q_j, P'nin bir incelmesi olduğundan $\parallel Q_j \parallel \leq \parallel P \parallel$'dir (nokta eklemek alt aralıkları yalnızca kısaltır). Adım 3'ü her adıma uygulayıp topladığımızda

$$0 \leq U(P, f) - U(Q, f) = \sum_{j=1}^{m} \left(U(Q_{j-1}, f) - U(Q_j, f) \right) \leq m \cdot 2K \parallel P \parallel \leq 2KN\delta$$

elde ederiz. Seçtiğimiz δ ile

$$2KN\delta = 2KN \cdot \frac{\varepsilon}{4K(N+1)} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{N}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Öte yandan Q, P_0'ın incelmesi olduğundan $U(Q, f) \leq U(P_0, f) < \overline{I}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2}$'dir. İkisini birleştirirsek

$$U(P, f) < U(Q, f) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

Ayrıca her bölünüş için $\overline{I}(f) \leq U(P, f)$ olduğunu zaten biliyoruz. Demek ki $\parallel P \parallel < \delta$ olan her P için

$$0 \leq U(P, f) - \overline{I}(f) < \varepsilon,$$

yani $\lim_{\|P\| \to 0} U(P, f) = \overline{I}(f)$'dir.

Adım 5: Alt toplamlar. Şimdi aynı yolu alt toplamlar için yürüyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\underline{I}(f)$, $\{L(P, f) : P \text{ bölünüş}\}$ kümesinin supremumu olduğundan, supremumun ε-nitelemesi (bkz. Analiz 1) gereği öyle bir P_1 bölünüşü vardır ki

$$L(P_1, f) > \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

P_1'in (a, b) içindeki nokta sayısına N_1 diyelim ve $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{4K(N_1+1)}$ alalım.

Nokta eklemenin alt toplamı ne kadar yükseltebileceğini kestirelim. $Q'' = Q' \cup \{c\}$ ve c, Q''nün $[u, v]$ alt aralığının içinde olsun. Aynı hesapla

$$L(Q'', f) - L(Q', f) = \left(\inf_{[u,c]} f - \inf_{[u,v]} f \right)(c-u) + \left(\inf_{[c,v]} f - \inf_{[u,v]} f \right)(v-c)$$

olur ve her iki parantez $[0, 2K]$ aralığında olduğundan

$$0 \leq L(Q'', f) - L(Q', f) \leq 2K(v-u) \leq 2K \parallel Q' \parallel .$$

Şimdi $\parallel P \parallel < \delta_1$ olan herhangi bir P alalım ve $Q = P \cup P_1$ diyelim. Q, P'ye en çok N_1 nokta eklenerek elde edilir; noktaları teker teker ekleyip yukarıdaki kestirimi toplarsak

$$0 \leq L(Q, f) - L(P, f) \leq 2KN_1 \parallel P \parallel \leq 2KN_1\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{N_1}{N_1+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

buluruz. Q, P_1'in incelmesi olduğundan $L(Q, f) \geq L(P_1, f) > \underline{I}(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$'dir. Öyleyse

 CC BY-NC-SA 4.0

$$L(P,f) > L(Q,f) - \frac{\varepsilon}{2} > \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{I}(f) - \varepsilon.$$

Her bölünüş için $L(P,f) \leq \underline{I}(f)$ *olduğundan,* $\| P \| < \delta_1$ *olan her* P *için*

$$0 \leq \underline{I}(f) - L(P,f) < \varepsilon$$

olur; yani $\lim_{\|P\|\to 0} L(P,f) = \underline{I}(f)$*'dir.*
Son olarak, teoremin iki iddiasını ***aynı*** δ *ile birden sağlamak istersek* $\min\{\delta, \delta_1\}$ *almak yeter.*
■

İspatın fikrini bir cümlede özetleyelim: kötü yerleştirilmiş ama çok ince bir bölünüşün üst toplamı, iyi seçilmiş sabit bir P_0 bölünüşünün üst toplamından **çok az** sapabilir; çünkü ikisinin ortak incelmesine geçerken yalnızca P_0'ın sonlu sayıdaki noktası devreye girer ve bu noktaların her biri hesabı en çok $2K \| P \|$ kadar değiştirir. Sabit bir sayı (N) ile sıfıra giden bir sayının ($\| P \|$) çarpımı sıfıra gider; teoremin tamamı bu gözlemin üzerine kuruludur.

i Neden bu teorem gerekliydi?

İntegrallenebilirlik ölçütü, $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ olacak biçimde **bir** bölünüşün varlığını ister. Riemann toplamlarının limiti ise **normu küçük olan her** bölünüşten iyi davranış bekler. Teorem 26.1 tam olarak bu iki istek arasındaki köprüyü kurar: uygun **bir** bölünüşün varlığı, aslında yeterince ince **bütün** bölünüşlerin iyi davranmasını zorlar. Bu köprü olmadan, bir sonraki teoremin "⇒" yönü ispatlanamaz.

26.4 İki Tanımın Denkliği

Artık ana teoremi ifade edip ispatlayabiliriz.

Teorem 26.2 (Darboux ve Riemann Tanımlarının Denkliği). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sınırlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki iki önerme denktir.*
(i) f*, Darboux anlamında integrallenebilirdir; yani* $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$*'dir.*
(ii) *Öyle bir* $I \in \mathbb{R}$ *sayısı vardır ki*

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,T) = I;$$

yani her $\varepsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki,* $\| P \| < \delta$ *olan her* P *bölünüşü ve* P*'ye ilişkin* ***her*** T *örnek nokta ailesi için* $| S(P,f,T) - I | < \varepsilon$ *olur.*
Bu koşullar sağlandığında

$$I = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

olur; özellikle (ii)'deki I *sayısı tektir.*

İspat.
(⇒) (i)'den (ii)'ye. f *Darboux anlamında integrallenebilir olsun ve*

$$I = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

diyelim. $\varepsilon > 0$ *verilsin. Teorem 26.1 gereği öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki* $\| P \| < \delta$ *olan her* P *için hem*

$$I - \varepsilon < L(P,f) \leq I \qquad \text{hem de} \qquad I \leq U(P,f) < I + \varepsilon$$

olur. Şimdi böyle bir P *ve ona ilişkin herhangi bir* T *örnek nokta ailesi alalım. Önerme 26.1 (i) gereği*

$$I - \varepsilon < L(P,f) \leq S(P,f,T) \leq U(P,f) < I + \varepsilon,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yani $\mid S(P,f,T) - I \mid < \varepsilon$*'dur.* T *keyfî olduğundan bu, (ii)'nin tam olarak istediği şeydir.*
(⇐) (ii)'den (i)'ye. *(ii) sağlansın ve* I *oradaki sayı olsun.* $\varepsilon > 0$ *verilsin. Varsayım gereği öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki* $\| P \| < \delta$ *olan her* P *ve her* T *için*

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < S(P,f,T) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Böyle bir P*'nin var olduğuna dikkat edelim: Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği* $n > \dfrac{b-a}{\delta}$ *olan bir* $n \in \mathbb{N}$ *vardır ve* $[a,b]$*'nin* n *eşit parçaya bölünmesiyle elde edilen düzgün bölünüşün normu* $\dfrac{b-a}{n} < \delta$*'dır. Böyle bir* P*'yi sabitleyelim. Yukarıdaki eşitsizlik* P*'ye ilişkin* ***her*** T *için geçerli olduğundan, sağ eşitsizlikte* T *üzerinden supremum alabiliriz. Önerme 26.1 (ii) gereği bu supremum tam olarak* $U(P,f)$*'dir:*

$$U(P,f) = \sup_T S(P,f,T) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Benzer biçimde sol eşitsizlikte T *üzerinden infimum alırsak*

$$L(P,f) = \inf_T S(P,f,T) \geq I - \frac{\varepsilon}{3}$$

buluruz. (Supremum ve infimum alırken katı eşitsizlikler zayıflayabilir; bu bize zarar vermez.) İkisini çıkararak

$$U(P,f) - L(P,f) \leq \left(I + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

elde ederiz. Yani her $\varepsilon > 0$ *için* $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ *olan bir* P *bölünüşü bulduk; Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü bölümündeki ölçüt gereği* f *integrallenebilirdir. Bu, (i)'dir.*
Ortak değerin I ***olduğu.*** *Yukarıdaki* P *için, alt ve üst integralin tanımı gereği*

$$\overline{I}(f) \leq U(P,f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \underline{I}(f) \geq L(P,f) \geq I - \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Buradaki P *bölünüşü* ε*'a bağlı olsa da, sol taraflardaki* $\overline{I}(f)$ *ile* $\underline{I}(f)$ *sayıları* ε*'dan bağımsızdır; dolayısıyla bu iki eşitsizlik her* $\varepsilon > 0$ *için geçerlidir.* $\varepsilon \to 0^+$ *limitine geçersek (ya da doğrudan: her* $\varepsilon > 0$ *için* $I + \varepsilon/3$*'ü aşmayan bir sayı* I*'den büyük olamaz)*

$$\overline{I}(f) \leq I \leq \underline{I}(f)$$

buluruz. Öte yandan her sınırlı fonksiyon için $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$ *olduğunu biliyoruz. Bu ikisi birlikte*

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I$$

verir; yani $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$*'tir.*
Teklik. *(ii)'deki* I *sayısının tek olduğu da böylece çıkar: (ii)'yi sağlayan her* I*, integralin kendisine eşit olmak zorundadır. Doğrudan bir kanıt da şudur:* I_1 *ile* I_2 *ikisi de (ii)'yi sağlasa,* $\varepsilon > 0$ *için uygun* δ_1, δ_2 *alıp* $\| P \| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ *olan bir* P *ve bir* T *seçtiğimizde, üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği*

$$\mid I_1 - I_2 \mid \leq \mid I_1 - S(P,f,T) \mid + \mid S(P,f,T) - I_2 \mid < 2\varepsilon$$

olur; $\varepsilon > 0$ *keyfî olduğundan* $I_1 = I_2$*'dir.*
■

İspatın "⇐" yönünde asıl işi Önerme 26.1'nın (ii) kısmı yapar: elimizde yalnızca $L \leq S \leq U$ sıkıştırması olsaydı, S'ye ilişkin bilgiden U ile L'ye geri dönemezdik. Alt ve üst toplamların Riemann toplamlarının **tam** infimumu ve supremumu olması, S üzerindeki her kestirimi doğrudan U ve L üzerine bir kestirime çevirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

26.5 Riemann'ın Özgün Tanımı

Teorem 26.2 sayesinde integrali, alt ve üst toplamlardan hiç söz etmeden de tanımlayabiliriz. Tarihsel olarak Riemann'ın verdiği tanım tam olarak budur.

Tanım 26.2 (Riemann Anlamında İntegrallenebilirlik). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun (sınırlı olduğu **varsayılmıyor**). Eğer öyle bir $I \in \mathbb{R}$ sayısı varsa ki her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunup, $[a,b]$'nin $\| P \| < \delta$ olan her P bölünüşü ve P'ye ilişkin her T örnek nokta ailesi için

$$\left| S(P,f,T) - I \right| < \varepsilon$$

sağlanıyorsa, f'ye $[a,b]$ üzerinde **Riemann anlamında integrallenebilir** denir. Bu durumda I sayısı tektir, f'nin $[a,b]$ üzerindeki **Riemann integrali** (ya da belirli integrali) adını alır ve

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

ile gösterilir. Kısaca $\lim_{\|P\| \to 0} S(P,f,T) = \int_a^b f(x)\,dx$ yazılır.

Tanımdaki "her P ve her T" vurgusu esastır. Bir bölünüş dizisi için toplamların yakınsaması yetmez; $\| P \| < \delta$ koşulunu sağlayan **bütün** bölünüşler ve o bölünüşlerdeki **bütün** örnek nokta seçimleri aynı I'ye yaklaşmak zorundadır. Bu kadar güçlü bir isteğin sağlanabilmesi şaşırtıcıdır ve f üzerinde ciddi kısıtlar doğurur; bunlardan ilkini hemen görüyoruz.

26.6 İntegrallenebilir Fonksiyon Sınırlıdır

Darboux kuruluşunda sınırlılık en baştan varsayılıyordu, çünkü m_k ve M_k'nin reel sayı olması gerekiyordu. Tanım 26.2'nde ise böyle bir varsayım yok. Öyleyse doğal soru şudur: Riemann anlamında integrallenebilir ama sınırsız bir fonksiyon olabilir mi? Yanıt hayırdır ve nedeni tam olarak "her T için" ifadesinin gücüdür: fonksiyon bir alt aralıkta sınırsızsa, örnek noktayı orada uygun seçerek Riemann toplamını istediğimiz kadar büyütebiliriz.

Teorem 26.3 (İntegrallenebilirlik Sınırlılığı Gerektirir). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Tanım 26.2 anlamında $[a,b]$ üzerinde integrallenebiliyorsa, f bu aralıkta sınırlıdır.*

> ***İspat.***
> *Olmayana ergi yapalım: f integrallenebilir olsun, integrali I olsun; ama f, $[a,b]$ üzerinde **sınırsız** olsun.*
> ***Adım 1: Tanımı $\varepsilon = 1$ ile kullanmak.*** *İntegrallenebilirlik tanımını $\varepsilon = 1$ için uygularsak, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\| P \| < \delta$ olan her P ve her T için*
>
> $$\left| S(P,f,T) - I \right| < 1$$
>
> *olur. Üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği bundan*
>
> $$\left| S(P,f,T) \right| \le \left| S(P,f,T) - I \right| + \left| I \right| < \left| I \right| + 1$$
>
> *çıkar. Yani $\| P \| < \delta$ olan bölünüşlerde bütün Riemann toplamları $|I| + 1$ sayısıyla sınırlıdır. Şimdi bu sınırın çiğnendiği bir toplam üreterek çelişki elde edeceğiz.*
> ***Adım 2: Böyle bir bölünüş seçmek.*** *Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $n > \dfrac{b-a}{\delta}$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $[a,b]$'yi n eşit parçaya bölen düzgün bölünüşü alalım; normu $\dfrac{b-a}{n} < \delta$'dır. Bu bölünüşü $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ile gösterelim ve **sabitleyelim.***
> ***Adım 3: Sınırsızlık bir alt aralığa taşınır.*** *f, $[a,b]$ üzerinde sınırsızdır. Eğer f, P'nin her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında sınırlı olsaydı — diyelim $[x_{k-1}, x_k]$ üzerinde $|f| \le C_k$ — o zaman*
>
> $$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan f, $[a,b]$ üzerinde $C = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$ ile sınırlı olurdu (sonlu bir kümenin maksimumu vardır). Bu, varsayımımızla çelişir. Öyleyse f, en az bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında sınırsızdır. Böyle bir i indisini sabitleyelim.

Adım 4: Örnek noktaların seçimi. *$k \neq i$ olan bütün indisler için örnek noktaları **keyfî ama sabit** seçelim: $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Bu seçimle*

$$A = \left| \sum_{k \neq i} f(t_k)\, \Delta x_k \right|$$

sayısı belirli, sonlu bir reel sayıdır.
Şimdi t_i'yi seçeceğiz. $\Delta x_i > 0$ olduğundan

$$\frac{|\, I \,| + 1 + A}{\Delta x_i}$$

bir reel sayıdır. f, $[x_{i-1}, x_i]$ üzerinde sınırsız olduğundan $|\ f\ |$ bu aralıkta hiçbir reel sayıyla sınırlanmaz; öyleyse

$$|\, f(t_i) \,| > \frac{|\, I \,| + 1 + A}{\Delta x_i}$$

olan bir $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ noktası vardır.
Adım 5: Çelişki. *$T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ olsun. Riemann toplamını i'nci terimi ayırarak yazalım:*

$$S(P, f, T) = f(t_i)\, \Delta x_i + \sum_{k \neq i} f(t_k)\, \Delta x_k.$$

Ters üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği

$$|\, S(P,f,T) \,| \geq |\, f(t_i) \,| \Delta x_i - \left| \sum_{k \neq i} f(t_k)\, \Delta x_k \right| = |\, f(t_i) \,| \Delta x_i - A.$$

t_i'nin seçimini kullanırsak

$$|\, f(t_i) \,| \Delta x_i - A > \big(|\, I \,| + 1 + A \big) - A = |\, I \,| + 1,$$

yani $|\ S(P,f,T)\ | > |\ I\ | + 1$ olur. Oysa $\| P \| < \delta$ olduğundan Adım 1 gereği $|\ S(P,f,T)\ | < |\ I\ | + 1$ olmalıydı. Bu bir çelişkidir.
Demek ki f'nin sınırsız olduğu varsayımı yanlıştır; f, $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır.
■

Bu teorem sayesinde Tanım 26.2 ile Darboux tanımı arasındaki son fark da ortadan kalkar: Riemann anlamında integrallenebilir bir fonksiyon zorunlu olarak sınırlıdır, dolayısıyla Teorem 26.2 ona uygulanabilir. Böylece **iki tanım tam olarak aynı fonksiyon sınıfını ve aynı sayıyı üretir.** Bundan sonra "integrallenebilir" derken hangi tanımı kastettiğimizi belirtmeye gerek kalmayacak.

> ! Karşıtı doğru değildir
>
> f integrallenebilir $\Rightarrow$ f sınırlıdır. Bu gerektirmenin **tersi doğru değildir**: sınırlı olduğu hâlde integrallenemeyen fonksiyonlar vardır. Sınırlılık, integrallenebilirlik için **gerek** koşuldur ama **yeter** koşul değildir. Klasik karşı örnek Dirichlet fonksiyonudur; hemen aşağıda inceliyoruz.

26.7 Sınırlılık Yeter Değildir

Örnek 26.1 (Dirichlet Fonksiyonu: Sınırlı ama İntegrallenemez). $[0,1]$ üzerinde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ile tanımlanan Dirichlet fonksiyonunun sınırlı olduğunu ama $[0,1]$ üzerinde integrallenemediğini gösteriniz.

Çözüm.
Sınırlılık. Her $x \in [0,1]$ için $0 \leq f(x) \leq 1$'dir; öyleyse f sınırlıdır. Demek ki alt ve üst toplamlar tanımlıdır ve Darboux kuramı uygulanabilir.
Alt ve üst toplamların hesabı. $P = \{x_0, ..., x_n\}$, $[0,1]$'in herhangi bir bölünüşü olsun. Herhangi bir k için $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığını düşünelim; $x_{k-1} < x_k$ olduğundan bu, boş olmayan bir aralıktır.
Rasyonel sayıların yoğunluğu (bkz. Analiz 1) gereği (x_{k-1}, x_k) aralığında bir r rasyoneli vardır; $f(r) = 1$'dir. İrrasyonel sayıların yoğunluğu (bkz. Analiz 1) gereği aynı aralıkta bir s irrasyoneli vardır; $f(s) = 0$'dır. f'nin bütün değerleri $\{0,1\}$ kümesinde olduğundan

$$M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = 1, \qquad m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = 0$$

olur. Bu, alt aralığı ne kadar küçültürsek küçültelim değişmez; yoğunluk her ölçekte iş görür.
Buradan, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1$ olduğunu kullanarak

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1, \qquad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

elde ederiz. **Her** bölünüş için aynı iki sayı çıkar. Öyleyse

$$\overline{I}(f) = \inf_P U(P,f) = 1, \qquad \underline{I}(f) = \sup_P L(P,f) = 0.$$

$\underline{I}(f) = 0 \neq 1 = \overline{I}(f)$ olduğundan f, Darboux anlamında integrallenemez.
Aynı sonucun Riemann toplamlarıyla görülüşü. Bu bölümün diliyle de bakalım; sonuç daha çarpıcı görünür. P herhangi bir bölünüş olsun.

- Her k için $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ noktasını **rasyonel** seçelim (yoğunluk gereği mümkündür). O hâlde her terim $1 \cdot \Delta x_k$ olur ve $S(P,f,T) = 1$'dir.
- Şimdi her k için $t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ noktasını **irrasyonel** seçelim. Bu kez her terim sıfırdır ve $S(P,f,T') = 0$'dır.

Yani normu ne kadar küçük olursa olsun her bölünüşte Riemann toplamı, yalnızca örnek noktaların seçimine bağlı olarak 0 ile 1 arasında zıplar. $\| P \| \to 0$ iken hiçbir I sayısına yakınsayamaz: I böyle bir sayı olsaydı, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için uygun δ'yı alıp $\| P \| < \delta$ olan bir P seçtiğimizde hem $| 1 - I | < \frac{1}{2}$ hem $| 0 - I | < \frac{1}{2}$ olurdu; üçgen eşitsizliği gereği $1 = | 1 - 0 | \leq | 1 - I | + | I - 0 | < 1$ çelişkisi çıkardı.
Demek ki Dirichlet fonksiyonu sınırlıdır ama integrallenemez. Bu örnek, "sınırlılık yeter koşul değildir" uyarısının somut kanıtıdır.
■

i Karşıt tersi: sınırsızlık integrallenemezliği verir

Teorem 26.3'nin karşıt tersi (contrapositive), uygulamada çok işe yarayan bir araçtır:

$$f, [a,b] \text{ üzerinde sınırsız} \Rightarrow f, [a,b] \text{ üzerinde integrallenemez.}$$

Bir fonksiyonun integrallenemediğini göstermek için çoğu zaman tek yapmamız gereken, onun sınırsız olduğunu fark etmektir. Sınırsız fonksiyonların integrali, ileride **genelleştirilmiş integral** (improper integral) kavramıyla, yani bir limit süreciyle ayrıca ele alınacaktır; ama bu, bu bölümdeki anlamda bir Riemann integrali değildir.

Örnek 26.2 (Sınırsız Bir Fonksiyon İntegrallenemez). $[0,1]$ üzerinde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \in (0,1] \\ 0, \; x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyonun $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Kısa yol. f, $[0,1]$ üzerinde sınırsızdır: $n \in \mathbb{N}$ için $x = \dfrac{1}{n} \in (0,1]$ noktasında $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$ olur; Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $\{n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üstten sınırsız olduğundan f'nin değerler kümesi de üstten sınırsızdır. Teorem 26.3 gereği f integrallenemez.
Ayrıntılı yol: Riemann toplamları neden yakınsamıyor? Kısa yolun arkasındaki mekanizmayı görmek için doğrudan bakalım. $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[0,1]$'in herhangi bir bölünüşü olsun; $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. İlk alt aralık $[x_0, x_1] = [0, x_1]$'dir ve $x_1 > 0$'dır.
$k \geq 2$ için örnek noktaları keyfî sabitleyelim ve

$$A = \left| \sum_{k=2}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k \right|$$

diyelim. Şimdi t_1'i $(0, x_1]$ içinde seçelim. Arşimet özelliği gereği, verilen herhangi bir $C > 0$ için

$$\frac{1}{t_1} > \frac{C + A}{x_1}, \qquad \text{yani} \qquad t_1 < \frac{x_1}{C + A}$$

olacak biçimde bir $t_1 \in (0, x_1]$ vardır. Bu seçimle $\Delta x_1 = x_1 - 0 = x_1$ olduğundan $f(t_1)\Delta x_1 = \dfrac{x_1}{t_1} > C + A$ olur ve ters üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği

$$\mid S(P, f, T) \mid \geq f(t_1)\, \Delta x_1 - A > (C + A) - A = C$$

elde edilir. $C > 0$ keyfî olduğundan, **sabit** bir P bölünüşünde bile Riemann toplamları yalnızca t_1'in seçimiyle istenildiği kadar büyütülebilir. Öyleyse hiçbir I sayısı için "$\| P \| < \delta$ olan her P ve her T için $\mid S(P, f, T) - I \mid < \varepsilon$" koşulu sağlanamaz.
Bir uyarı. Bu örnekte Darboux toplamlarına başvurmadığımıza dikkat edelim. $[0, x_1]$ üzerinde f üstten sınırsız olduğundan $\sup_{[0,x_1]} f$ bir **reel sayı değildir**; dolayısıyla $U(P, f)$ üst toplamı bu fonksiyon için tanımlı bile değildir. Alt ve üst toplamlar yalnızca sınırlı fonksiyonlar için anlamlıdır; sınırsız fonksiyonlarda "üst toplam sonsuzdur" demek yerine, doğrudan Teorem 26.3'yi ya da yukarıdaki Riemann toplamı argümanını kullanmak gerekir.
■

26.8 Düzgün Bölünüşlerle Limit Hesabı

Şimdi bu bölümün en çok kullanılacak sonucuna geliyoruz. Denklik teoremi, integrallenebilir bir fonksiyon için normu sıfıra giden **her** bölünüş ailesinin ve **her** örnek nokta seçiminin aynı sayıya, integrale götürdüğünü söylüyordu. Bu serbestliği tersine çevirirsek çok güçlü bir hesap aracı elde ederiz: karmaşık görünen bir toplamın limitini, onu bir Riemann toplamı olarak tanıyıp integrale çevirerek hesaplayabiliriz.

Teorem 26.4 (Düzgün Bölünüşle Limit Formülü). *f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O hâlde*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Aynı sonuç sol uç noktalarla da geçerlidir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

İspat.
Adım 1: Bölünüşün ve örnek noktaların kurulması. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $[a,b]$'yi n eşit parçaya bölen **düzgün bölünüşü** (uniform partition) alalım:*

$$P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Gerçekten $x_0 = a$, $x_n = a + (b-a) = b$'dir ve x_k dizisi k'ye göre kesin artandır. Her alt aralığın uzunluğu

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

olduğundan bölünüşün normu

$$\| P_n \| = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

olur.

Adım 2: Normun sıfıra gitmesi. *$b - a > 0$ sabit olduğundan $\| P_n \| = \dfrac{b-a}{n} \to 0$'dır ($n \to \infty$). Bunu ε–N diliyle de yazabiliriz: verilen $\delta > 0$ için, Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $N > \dfrac{b-a}{\delta}$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ve $n \ge N$ olduğunda*

$$\| P_n \| = \frac{b-a}{n} \le \frac{b-a}{N} < \delta$$

olur.

Adım 3: Örnek noktalar sağ uç noktalar. *$T_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ ailesini*

$$t_k = x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

ile seçelim. $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olduğundan bu geçerli bir örnek nokta ailesidir. Karşılık gelen Riemann toplamı

$$S(P_n, f, T_n) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f a + k\,\frac{b-a}{n} \right)$$

olur; bu, tam olarak teoremdeki toplamdır.

Adım 4: Limite geçiş. *f integrallenebilir olduğundan Teorem 26.2 gereği*

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(P, f, T) = I := \int_a^b f(x)\,dx$$

olur. Bunu açalım: $\varepsilon > 0$ verilsin; öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\| P \| < \delta$ olan her bölünüş ve her örnek nokta seçimi için $| S(P, f, T) - I | < \varepsilon$'dur. Adım 2'deki N'yi bu δ için seçersek, $n \ge N$ olan her n için $\| P_n \| < \delta$ ve dolayısıyla

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f a + k\,\frac{b-a}{n} \right) - I \right| = | S(P_n, f, T_n) - I | < \varepsilon$$

olur. Dizi limitinin tanımı gereği bu, tam olarak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f a + k\,\frac{b-a}{n} \right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

demektir.

Adım 5: Sol uç noktalar. *Aynı P_n bölünüşünde bu kez $t_k = x_{k-1} = a + (k-1)\dfrac{b-a}{n}$ seçelim; bu da geçerli bir örnek nokta ailesidir. Riemann toplamı*

$$S(P_n, f, T_n') = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f a + (k-1)\frac{b-a}{n} \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(f a + j\,\frac{b-a}{n} \right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur ($j = k-1$ değişken değişimiyle). Adım 4'teki akıl yürütme, örnek nokta seçiminden bağımsız olarak geçerli olduğundan, bu toplam da $\int_a^b f(x)\,dx$'e yakınsar.

■

Teoremin en çok kullanılan özel hâli $[a,b]=[0,1]$ durumudur; bu durumda $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ ve $a+k\frac{b-a}{n}=\frac{k}{n}$ olur:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Bu formülü kullanabilmek için verilen toplamı $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\frac{k}{n}\right)$ biçimine sokmayı öğrenmek gerekir. Pratikte izlenecek yol şudur:

- Toplamın önündeki ya da içindeki $\frac{1}{n}$ çarpanını ayırıp Δx rolüne koy.
- Geri kalan ifadede k ile n'nin **yalnızca $\frac{k}{n}$ oranı** biçiminde göründüğünü doğrula; gerekiyorsa pay ve paydayı uygun n kuvvetine böl.
- $\frac{k}{n}$ yerine x yaz; ortaya çıkan fonksiyon f'dir, aralık $[0,1]$'dir.
- f'nin $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu doğrula (çoğu kez süreklidir, bu yeter) ve integrali hesapla.

i Değerleri hesaplarken kullanacağımız formül

Aşağıdaki örneklerde ortaya çıkan integralleri, ilkel fonksiyon (antiderivative) yardımıyla hesaplayacağız:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),\qquad F'=f.$$

Bu **Newton–Leibniz formülü**dür ve Analizin Temel Teoremleri bölümünde ispatlanacaktır. Şu an için onu yalnızca bir hesap aracı olarak kullanıyoruz; bu bölümde ispatladığımız hiçbir sonuç ona dayanmıyor. İlkel fonksiyonları ise İlkel Fonksiyon ve Belirsiz İntegral bölümünden biliyoruz.

26.9 Uygulamalar: Toplam Limitlerinden İntegrale

Şimdi tekniği örneklerde çalıştıralım. Her örnekte iki şeyi açıkça belirteceğiz: hangi f fonksiyonu ve hangi $[a,b]$ aralığı.

Örnek 26.3 (Kareler Toplamının Limiti).

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.
Riemann toplamı biçimine getirme. $n^3=n\cdot n^2$ yazarak toplamı düzenleyelim:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k^2}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Fonksiyon ve aralığın belirlenmesi. Elde ettiğimiz ifade, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\frac{k}{n}\right)$ kalıbındadır ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = x^2, \qquad [a,b] = [0,1]$$

seçimine karşılık gelir. Gerçekten $[0,1]$'in n eşit parçaya bölünmesiyle $\Delta x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$ ve sağ uç noktalar $x_k = 0 + k \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{k}{n}$ olur.

İntegrallenebilirlik. $f(x) = x^2$ bir polinom olduğundan $[0,1]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1); Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü bölümünde kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyonun integrallenebilir olduğunu görmüştük. Öyleyse Teorem 26.4 uygulanabilir.

Sonuç. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ fonksiyonu f'nin bir ilkelidir; dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \int_0^1 x^2\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Doğrudan denetim. Bu özel toplamda kapalı biçim bildiğimiz için sonucu bağımsız olarak sınayabiliriz. Kareler toplamı formülü

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Son iki terim $n \to \infty$ iken sıfıra gider (bkz. Analiz 1), yani limit $\dfrac{1}{3}$'tür. İki hesap uyuşuyor.

■

Örnek 26.4 (Harmonik Tipte Bir Toplamın Limiti).

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.

Toplamı düzenleme. Terimleri tek bir toplam altında yazalım:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Gerçekten $k=1$ için $\dfrac{1}{n+1}$, $k=n$ için $\dfrac{1}{2n}$ terimi çıkar. Şimdi pay ve paydayı n'ye bölelim:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Fonksiyon ve aralık. Bu ifade $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\!\left(\dfrac{k}{n}\right)$ kalıbındadır ve

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad [a,b] = [0,1]$$

seçimine karşılık gelir.

İntegrallenebilirlik. $[0,1]$ üzerinde $1+x \geq 1 > 0$ olduğundan f bu aralıkta tanımlıdır ve sürekli fonksiyonların bölümü olarak süreklidir (bkz. Analiz 1). Süreklilik integrallenebilirliği verir.

Sonuç. $x \in [0,1]$ için $1+x > 0$ olduğundan $F(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonu f'nin bir ilkelidir. Öyleyse

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Yaklaşık olarak $\ln 2 \approx 0{,}693$'tür. Toplamda n tane terim vardır ve her biri $\dfrac{1}{2n}$ ile $\dfrac{1}{n+1}$ arasındadır; buradan $\dfrac{1}{2} \le S_n \le \dfrac{n}{n+1} < 1$ kaba kestirimi çıkar ve bulduğumuz limit bu aralığın içindedir.
■

Örnek 26.5 (Karekök İçeren Bir Toplamın Limiti).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$$

limitini hesaplayınız. Aynı limitin $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ biçiminde de yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm.
Fonksiyon ve aralık. Verilen ifade zaten $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\!\left(\frac{k}{n}\right)$ kalıbındadır:

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad [a,b] = [0,1].$$

İntegrallenebilirlik. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1) ve $0 \le \sqrt{x} \le 1$ olduğundan sınırlıdır; öyleyse integrallenebilirdir.
Sonuç. $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde $F'(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ sağlar ve $[0,1]$ üzerinde süreklidir. Öyleyse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \Big[\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

İkinci yazım. Karekökü paylara dağıtalım:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

Demek ki

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

Bu ikinci yazım, tekniğin neden bu kadar güçlü olduğunu iyi gösterir: $\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}$ toplamının kapalı bir formülü yoktur, ama $n\sqrt{n}$ ile ölçeklendiğinde limiti bir integral olarak tam biçimde hesaplanabilir.
■

Örnek 26.6 (Sinüslü Bir Toplamın Limiti).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.
Birinci okuma: $[0,1]$ aralığı. Toplamın içindeki argümanı $\dfrac{k\pi}{n} = \pi \cdot \dfrac{k}{n}$ biçiminde yazalım. O hâlde ifade

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\!\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)$$

olur; bu, $\frac{1}{n}\sum f\!\left(\frac{k}{n}\right)$ kalıbıdır ve

$$f(x)=\sin(\pi x),\qquad [a,b]=[0,1]$$

seçimine karşılık gelir. sin süreklidir (bkz. Analiz 1), $x\mapsto \pi x$ süreklidir ve bileşkeleri de süreklidir (bkz. Analiz 1); öyleyse f integrallenebilirdir. $F(x)=-\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi}$ bir ilkeldir ve

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx=\Big[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1=-\frac{\cos\pi}{\pi}+\frac{\cos 0}{\pi}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

Öyleyse limit $\dfrac{2}{\pi}$'dir.

İkinci okuma: $[0,\pi]$ aralığı. Aynı toplamı başka bir aralıkta da tanıyabiliriz:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\!\left(0+k\cdot\frac{\pi-0}{n}\right).$$

Sağdaki $\dfrac{\pi}{n}\sum\sin\!\left(k\dfrac{\pi}{n}\right)$ toplamı, $g(x)=\sin x$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığındaki düzgün bölünüşe ve sağ uç noktalara ilişkin Riemann toplamıdır; Teorem 26.4 gereği

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2.$$

Öyleyse aranan limit $\dfrac{1}{\pi}\cdot 2=\dfrac{2}{\pi}$'dir; iki okuma aynı sonucu verdi.

Doğrudan denetim. Bu toplamın kapalı bir biçimi de vardır: $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1\cdot\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

olur; burada $\dfrac{n\theta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ ve $\sin\!\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2n}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2n}$ kullanıldı. $u_n=\dfrac{\pi}{2n}\to 0^+$ dersek $\dfrac{1}{n}=\dfrac{2u_n}{\pi}$ olduğundan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2u_n}{\pi}\cdot\frac{\cos u_n}{\sin u_n}=\frac{2}{\pi}\cdot\cos u_n\cdot\frac{u_n}{\sin u_n}.$$

$\cos u_n\to 1$ ve $\dfrac{\sin u_n}{u_n}\to 1$ (bkz. Analiz 1) olduğundan limit yine $\dfrac{2}{\pi}$'dir.

■

Örnek 26.7 (Arktanjanta Götüren Bir Toplam).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.
Toplamı düzenleme. İfade

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

biçimindedir. Pay ve paydayı n^2'ye bölelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Fonksiyon ve aralık. Bu, $\frac{1}{n}\sum f\left(\frac{k}{n}\right)$ kalıbıdır ve

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad [a,b] = [0,1]$$

seçimine karşılık gelir.
İntegrallenebilirlik. Her x için $1+x^2 \geq 1 > 0$ olduğundan f, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve süreklidir (bkz. Analiz 1); özellikle $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir.
Sonuç. $F(x) = \arctan x$ fonksiyonu f'nin bir ilkelidir. Öyleyse

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Bir kestirimle denetim. $1 \leq k \leq n$ için $n^2 \leq n^2+k^2 \leq 2n^2$ olduğundan her terim $\frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$ ile $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ arasındadır. n tane terim olduğundan

$$\frac{1}{2} \leq T_n \leq 1$$

olur. Bulduğumuz $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ değeri bu aralıktadır.
■

Tekniğin sınırı

Bu yöntem yalnızca $\frac{k}{n}$ oranına bağlı toplamlarda işler. Örneğin $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^2}$ toplamında terimleri $\frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right)$ biçimine sokamayız; bu toplamın limiti sıfırdır ve bunu görmek için sıkıştırma yeter, integral gerekmez. Ayrıca ortaya çıkan f fonksiyonunun ilgili kapalı aralıkta **sınırlı** olması şarttır: $f(x) = \ln x$ gibi uçta patlayan fonksiyonlar için Teorem 26.4 doğrudan uygulanamaz, çünkü Teorem 26.3 gereği böyle bir fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir değildir.

26.10 Alıştırmalar

Alıştırma 26.1 (Riemann Toplamları Üzerine).

a) $f(x) = x^2$ fonksiyonunu ve $P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ bölünüşünü alınız. Örnek noktalar alt aralıkların orta noktaları olmak üzere $S(P,f,T)$ Riemann toplamını hesaplayınız; ayrıca $L(P,f)$ ve $U(P,f)$ değerlerini bulup Önerme 26.1'nın sağlandığını doğrulayınız. Sonuçları $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ ile karşılaştırınız.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$ limitini hesaplayınız.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ limitini hesaplayınız.

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ limitini hesaplayınız.

e) (d) şıkkını kullanarak $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n}$ limitini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

f) $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu x rasyonelse $g(x)=1$, irrasyonelse $g(x)=-1$ olarak tanımlansın. g'nin integrallenebilir olmadığını, buna karşın $|\,g\,|$'nin integrallenebilir olduğunu gösteriniz. Bu, "$|\,f\,|$ integrallenebilir ise f de integrallenebilirdir" önermesi hakkında ne söyler?

Çözüm.
a) Bölünüşün dört alt aralığı $\left[0,\frac14\right],\left[\frac14,\frac12\right],\left[\frac12,\frac34\right],\left[\frac34,1\right]$ olup her birinin uzunluğu $\Delta x_k=\frac14$'tür. Orta noktalar $t_1=\frac18, t_2=\frac38, t_3=\frac58, t_4=\frac78$'dir. O hâlde

$$S(P,f,T)=\frac14\left[\left(\frac18\right)^2+\left(\frac38\right)^2+\left(\frac58\right)^2+\left(\frac78\right)^2\right]=\frac14\cdot\frac{1+9+25+49}{64}=\frac14\cdot\frac{84}{64}=\frac{21}{64}.$$

$f(x)=x^2$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde artan olduğundan her alt aralıkta infimum sol uçta, supremum sağ uçta alınır:

$$m_k=\left(\frac{k-1}{4}\right)^2,\qquad M_k=\left(\frac{k}{4}\right)^2,\qquad k=1,2,3,4.$$

Buradan

$$L(P,f)=\frac14\left[0+\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}\right]=\frac14\cdot\frac{14}{16}=\frac{14}{64}=\frac{7}{32},$$

$$U(P,f)=\frac14\left[\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}+\frac{16}{16}\right]=\frac14\cdot\frac{30}{16}=\frac{30}{64}=\frac{15}{32}.$$

Ondalık olarak $L(P,f)=0{,}21875$, $S(P,f,T)=0{,}328125$, $U(P,f)=0{,}46875$'tir. Gerçekten

$$L(P,f)\le S(P,f,T)\le U(P,f)$$

sağlanmaktadır; bu, Önerme 26.1'nın (i) kısmının somut bir doğrulamasıdır. Ayrıca integralin değeri $\frac13\approx0{,}3333$ olup yine bu iki sınırın arasındadır ve orta nokta toplamı ona oldukça yakındır. Fark $\left|\frac13-\frac{21}{64}\right|=\left|\frac{64-63}{192}\right|=\frac{1}{192}\approx0{,}0052$'dir; buna karşılık $U(P,f)-L(P,f)=\frac{16}{64}=\frac14$'tür. Orta nokta seçiminin neden tercih edildiği burada görülüyor.
b) Toplamın pay ve paydasını n^2'ye bölelim:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Bu, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki düzgün bölünüşe ve sağ uç noktalara ilişkin Riemann toplamıdır. f süreklidir (payda hiç sıfır olmaz), dolayısıyla integrallenebilirdir. $F(x)=\frac12\ln(1+x^2)$ bir ilkeldir; gerçekten $F'(x)=\dfrac12\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{x}{1+x^2}$'dir. Öyleyse

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\Big[\,\frac12\ln(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{\ln 2}{2}.$$

c) Kök içindeki ifadeden n^2 çekelim:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

Bu, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki Riemann toplamıdır; f süreklidir. $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ bir ilkeldir:

$$F'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Öyleyse

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\Big[\ln\!\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big]_0^1=\ln\!\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln 1=\ln\!\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Sayısal olarak bu $\approx 0{,}8814$'tür; toplamın her terimi $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,n}$ ile $\dfrac{1}{n}$ arasında olduğundan limitin $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]\approx[0{,}707,\,1]$ aralığında çıkması beklenirdi ve öyle oldu.

d) İfade zaten $\dfrac{1}{n}\sum f\!\left(\dfrac{k}{n}\right)$ kalıbındadır:

$$f(x)=\ln(1+x),\qquad [a,b]=[0,1].$$

$[0,1]$ üzerinde $1+x\in[1,2]$ olduğundan f süreklidir ve $0\le f(x)\le \ln 2$ ile sınırlıdır; dolayısıyla integrallenebilirdir. İlkeli kısmi integrasyonla bulalım (Teorem 19.2): $u=\ln(1+x)$, $dv=dx$ alırsak $du=\dfrac{dx}{1+x}$, $v=1+x$ seçebiliriz (sabit farkı serbesttir). O hâlde

$$\int \ln(1+x)\,dx=(1+x)\ln(1+x)-\int(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\,dx=(1+x)\ln(1+x)-x+C.$$

Buradan

$$\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\Big[\,(1+x)\ln(1+x)-x\Big]_0^1=\big(\,2\ln 2-1\,\big)-\big(\,1\cdot\ln 1-0\,\big)=2\ln 2-1.$$

Öyleyse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\!\left(1+\frac{k}{n}\right)=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{e}.$$

e) $a_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n}$ olsun. Önce parantez içini sadeleştirelim:

$$\frac{(2n)!}{n!}=(n+1)(n+2)\cdots(2n)=\prod_{k=1}^{n}(n+k),$$

çünkü $(2n)!$'in ilk n çarpanı $n!$ ile sadeleşir. O hâlde

$$\frac{(2n)!}{n!\,n^n}=\frac{1}{n^n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Bütün çarpanlar pozitif olduğundan logaritma alabiliriz:

$$\ln a_n=\frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\!\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

(d) şıkkına göre $\ln a_n\to 2\ln 2-1$'dir. exp fonksiyonu sürekli olduğundan, süreklilik için dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği

$$a_n=e^{\ln a_n}\to e^{2\ln 2-1}=\frac{e^{\ln 4}}{e}=\frac{4}{e}.$$

Yani aranan limit $\dfrac{4}{e}\approx 1{,}4715$'tir.

f) Önce g'nin integrallenemediğini gösterelim. g sınırlıdır: her x için $\mid g(x)\mid=1$'dir. $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ herhangi bir bölünüş olsun. Her $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı hem rasyonel hem irrasyonel sayı içerir (bkz. Analiz 1, İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu); g'nin aldığı değerler yalnızca 1 ve -1 olduğundan

$$M_k=1,\qquad m_k=-1$$

olur. Öyleyse her P için

$$U(P,g)=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta x_k=1,\qquad L(P,g)=\sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot\Delta x_k=-1$$

ve dolayısıyla $\overline{I}(g)=1$, $\underline{I}(g)=-1$'dir. Bunlar eşit olmadığından g integrallenemez. (Riemann toplamlarıyla da aynı sonuç çıkar: bütün örnek noktalar rasyonel seçilirse $S=1$, irrasyonel seçilirse $S=-1$ olur; norm ne kadar küçük olursa olsun toplam iki farklı değer arasında zıplar.)
Şimdi $|\,g\,|$'ye bakalım. Her $x\in[0,1]$ için $|\,g(x)\,|=1$'dir; yani $|\,g\,|$ sabit fonksiyondur. Sabit fonksiyon için her alt aralıkta $M_k=m_k=1$ olduğundan her P bölünüşünde

$$U(P,|\,g\,|)=L(P,|\,g\,|)=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=1$$

olur; öyleyse $\overline{I}(|\,g\,|)=\underline{I}(|\,g\,|)=1$ ve $|\,g\,|$ integrallenebilirdir:

$$\int_0^1 |\,g(x)\,|\,dx=1.$$

Sonuç. "$|\,f\,|$ integrallenebilir ise f de integrallenebilirdir" önermesi **yanlıştır**; g bunun karşı örneğidir. Bu gerektirmenin doğru olan yönünü (İntegralin Cebirsel Özellikleri bölümünde göreceğiz) şudur: f integrallenebilirse $|\,f\,|$ de integrallenebilirdir. Yani mutlak değer almak integrallenebilirliği korur ama geri döndürmez.
■

Bu bölümde integralin iki farklı kuruluşunun aynı kapıya çıktığını gördük ve elimize hem kuramsal hem hesapsal güçlü araçlar geçti. Artık integralin **varlığı** üzerine söyleyeceklerimizi büyük ölçüde tamamladık; bundan sonra integralin bir işlem olarak nasıl davrandığına, yani toplama, sabitle çarpma ve aralığın parçalanması karşısında hangi kurallara uyduğuna bakacağız: İntegralin Cebirsel Özellikleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

27. İntegralin Cebirsel Özellikleri

Riemann Toplamları ve Darboux Tanımıyla Denkliği bölümünde integrallenebilirliği iki ayrı yoldan tarif edip bu iki yolun aynı kapıya çıktığını gösterdik: Darboux'nun alt ve üst toplamlarıyla kurulan tanım ile Riemann toplamlarının, normu sıfıra giden bölünüşler boyunca yakınsamasıyla kurulan tanım denktir. Elimizde artık iki farklı el var; hangisi bir soruya daha uygunsa onu kullanacağız.

Ne var ki şimdiye kadar yaptığımız her şey **tek bir** fonksiyonla ilgiliydi. Oysa analizde fonksiyonlar yalnız gezmez: toplanır, çarpılır, bölünür, birbirinin içine konur. Doğal soru şudur: **integrallenebilirlik bu işlemler altında korunur mu, korunuyorsa integralin kendisi nasıl davranır?** Bir de $[a,b]$ aralığını bir c noktasından ikiye böldüğümüzde integralin de ikiye bölünüp bölünmediği sorusu var.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: integralin **lineer** bir işlem olduğunu, ama bunun tersinin geçerli olmadığını; integrallenebilir bir fonksiyonun **sürekli** bir fonksiyonla bileşkesinin yine integrallenebilir olduğunu ve buradan f^n, $|f|$, $f\cdot g$ ve $1/f$ için sonuçlar devşirilebileceğini; sürekliliği kaldırdığımızda bileşke teoreminin çöktüğünü gösteren ünlü karşı örneği; integralin **aralık üzerinde toplamsal** olduğunu ve parçalı fonksiyonların bu sayede nasıl integrallendiğini. Son olarak $\int_a^a f$ ile $b<a$ hâlindeki $\int_a^b f$ için tanım yapacağız; bu tanımlarla aralık toplamsallığı a, b, c noktalarının **hangi sırada olduğuna bakmaksızın** geçerli olacak.

27.1 Gösterim ve Elimizdeki Araçlar

Bölüm boyunca kullanacağımız gösterimi bir arada toplayalım. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **sınırlı** bir fonksiyon ve $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ $(a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$ bir **bölünüş** (partition) olsun. k-ıncı alt aralık $I_k=[x_{k-1},x_k]$, uzunluğu $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, bölünüşün **normu** $\|P\|=\max_k \Delta x_k$'dır. $m_k(f)=\inf_{I_k} f$ ve $M_k(f)=\sup_{I_k} f$ olmak üzere **alt toplam** ile **üst toplam** (lower/upper Darboux sum)

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta x_k, \qquad U(P,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k$$

biçiminde tanımlanır.

> **i** Alt ve üst integralin gösterimi
>
> Bu kitapta **alt integral** ile **üst integral** için
>
> $$\underline{I}(f)=\sup_P L(P,f), \qquad \overline{I}(f)=\inf_P U(P,f)$$
>
> gösterimini kullanıyoruz; supremum ve infimum $[a,b]$'nin bütün bölünüşleri üzerinden alınır. Yani $\underline{I}(f)$ alt integrali, $\overline{I}(f)$ üst integrali gösterir; hangi aralıkta çalışıldığı bağlamdan anlaşılmadığında $\underline{I}_a^b(f)$, $\overline{I}_a^b(f)$ yazacağız. Her sınırlı f için $\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)$'dir; f'ye **Riemann integrallenebilir** (Riemann integrable) denmesi tam olarak $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ demektir ve bu ortak değer $\int_a^b f(x)\,dx$'tir.

Sık kullanacağımız üç aracı hatırlatalım.

1. Riemann ölçütü. Sınırlı bir f'nin $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon>0$ için $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$ sağlayan bir P bölünüşünün var olmasıdır; bu ölçüt Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü bölümünde kanıtlanmıştı. Ayrıca bir bölünüşü **incelttiğimizde** (ona yeni noktalar eklediğimizde) alt toplam azalmaz, üst toplam artmaz; dolayısıyla $U-L$ farkı büyümez.

2. Riemann toplamları. $t_k\in I_k$ olacak biçimde seçilmiş **ara noktalar** kümesi $T=\{t_k\}_{k=1}^n$ için **Riemann toplamı** $S(f,P,T)=\sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k$'dır. Denklik teoremi şunu söyler: f'nin integrallenebilir ve integralinin I olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ bulunmasıdır ki $\|P\|<\delta$ olan **her** P ve ara noktaların **her** T seçimi için $\left|S(f,P,T)-I\right|<\varepsilon$ olsun.

3. Salınım. I_k alt aralığında f'nin **salınımı** (oscillation) $\omega_k(f)=M_k(f)-m_k(f)$ sayısıdır. Supremum ve infimumun tanımından

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\omega_k(f) = \sup_{s,t\in I_k} \big(f(s) - f(t) \big) = \sup_{s,t\in I_k} \big| f(s) - f(t) \big|$$

olduğu görülür; bu eşitlik, "alt aralıkta iki değerin farkı küçükse salınım da küçüktür" biçimindeki akıl yürütmeleri kolaylaştıracak.
Hesap yaparken kullanacağımız üç temel integrali de hatırlatalım:

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a), \qquad \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}, \qquad \int_0^t x^2\,dx = \frac{t^3}{3} \quad (t \ge 0).$$

Birincisinde sabit k için bütün Darboux toplamları $k(b-a)$'ya eşittir. İkincisinde $[a,b]$'yi n eşit parçaya bölüp $h = \frac{b-a}{n}$, $t_k = a + kh$ (sağ uç noktalar) alırsak $S(f,P,T) = \sum_{k=1}^{n}(a+kh)h = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$ olur ve $n\to\infty$ iken limit $\frac{b^2-a^2}{2}$'dir. Üçüncüsünde $[0,t]$'yi n eşit parçaya bölüp $h = \frac{t}{n}$, $t_k = kh$ alalım. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ formülü gereği Riemann toplamı şu değeri alır:

$$S(f,P,T) = \sum_{k=1}^{n}(kh)^2 h = h^3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{t^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Burada $n\to\infty$ iken bu ifadenin limiti $\frac{t^3}{3}$'tür.

27.2 İntegralin Lineerliği

Bir işlemin "lineer" olması, toplamı toplama, sabitle çarpımı sabitle çarpıma taşıması demektir. Türev almanın lineer olduğunu biliyoruz (Teorem 3.2). İntegral almanın da lineer olduğunu göstereceğiz. Bu, integralin bütün cebirsel özelliklerinin temel taşıdır: bölümün geri kalanındaki hemen her sonuç, er ya da geç lineerliğe dayanır.
İspat için Riemann toplamlarını kullanacağız; nedeni basit: Riemann toplamı sonlu bir toplamdır ve sonlu toplamlar zaten lineerdir, yani $\sum(u_k+v_k) = \sum u_k + \sum v_k$. İspatın bütün işi, bu apaçık cebirsel eşitliği limit alma sürecine taşımaktan ibarettir.

Teorem 27.1 (İntegralin Lineerliği). *$f, g : [a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde:*
1. $f+g$ de $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Her $c\in\mathbb{R}$ sabiti için cf de integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

> ***İspat.***
> ***(1) Toplam.*** *$I_f = \int_a^b f(x)\,dx$ ve $I_g = \int_a^b g(x)\,dx$ diyelim; f ve g integrallenebilir olduğundan bu iki sayı vardır.*
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. Riemann toplamlarıyla verilen ölçütü $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için hem f'ye hem g'ye uygulayalım: öyle $\delta_1, \delta_2 > 0$ sayıları vardır ki $\|P\| < \delta_1$ olan her P ve her T için $\big|S(f,P,T) - I_f\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|P\| < \delta_2$ olan her P ve her T için $\big|S(g,P,T) - I_g\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ olsun.*
> *$\delta = \min(\delta_1,\delta_2) > 0$ alalım. $\|P\| < \delta$ olan bir $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ bölünüşü ve $T = \{t_k\}_{k=1}^{n}$ ara noktaları verilsin. Sonlu toplamların lineerliği gereği $f+g$'nin Riemann toplamı ikiye ayrılır:*

$$S(f+g,P,T) = \sum_{k=1}^{n}\big(f(t_k)+g(t_k)\big)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta x_k = S(f,P,T) + S(g,P,T).$$

> *Şimdi $S(f+g,P,T)$ ile $I_f + I_g$ arasındaki farka bakalım; terimleri gruplayıp üçgen eşitsizliğini (bkz. Analiz 1) uygularsak*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mid S(f+g,P,T)-(I_f+I_g)\mid = \mid \big(S(f,P,T)-I_f\big)+\big(S(g,P,T)-I_g\big)\mid \le \mid S(f,P,T)-I_f\mid + \mid S(g,P,T)-I_g\mid < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde ederiz; $\| P \| < \delta \le \delta_1$ *ve* $\| P \| < \delta \le \delta_2$ *olduğundan iki kestirimi de kullanma hakkımız vardı. Verilen her* $\varepsilon > 0$ *için böyle bir* δ *bulunduğundan, denklik teoremi gereği* $f+g$ *integrallenebilirdir ve integrali* $I_f + I_g$*'dir.*

(2) Skalerle çarpım. $c = 0$ *ise* cf *özdeş olarak sıfırdır; sabit fonksiyonlar integrallenebilir olduğundan* $\int_a^b 0\,dx = 0 = 0 \cdot I_f$*'dir ve iddia doğrudur.*

$c \neq 0$ *olsun ve* $\varepsilon > 0$ *verilsin.* $\frac{\varepsilon}{|c|} > 0$ *olduğundan,* f*'nin integrallenebilirliği gereği öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki* $\| P \| < \delta$ *olan her* P *ve her* T *için* $\mid S(f,P,T) - I_f \mid < \frac{\varepsilon}{|c|}$ *olur. Sonlu toplamdan sabit çarpanı dışarı alabildiğimiz için* $S(cf,P,T) = c\,S(f,P,T)$*'dır; öyleyse aynı* P *ve* T *için*

$$\mid S(cf,P,T) - cI_f \mid = |c| \cdot \mid S(f,P,T) - I_f \mid < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Demek ki cf *integrallenebilirdir ve integrali* cI_f*'dir.*

■

İkinci maddeyi Darboux toplamlarıyla görmek de öğreticidir: $c > 0$ ise $U(P,cf) = c\,U(P,f)$ ve $L(P,cf) = c\,L(P,f)$, $c < 0$ ise supremum ile infimumun rolleri değişerek $U(P,cf) = c\,L(P,f)$ ve $L(P,cf) = c\,U(P,f)$ olur; her iki durumda da fark $|c|\,\big(U(P,f) - L(P,f)\big)$ çıkar ve Riemann ölçütü doğrudan taşınır. Özellikle $c = -1$ için $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$'dir; bu özel durumu birazdan kullanacağız.

> ⚠ Teoremin karşıtı doğru değildir
>
> Teorem 27.1 "f ve g integrallenebilirse $f+g$ integrallenebilirdir" der. Bunun **tersi** doğru değildir: toplama işlemi, iki fonksiyonun düzensizliklerinin birbirini götürmesine izin verir. Aşağıdaki örnek bunun en uç hâlini gösteriyor: iki fonksiyonun ikisi de integrallenemezken toplamları sabit fonksiyondur.

Örnek 27.1 (Toplamı İntegrallenebilir İki İntegrallenemez Fonksiyon). $[-1,1]$ kapalı aralığında f ve g fonksiyonlarını

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad g(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. f ve g'nin ikisinin de integrallenemez olduğunu, buna karşın $f+g$'nin integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Adım 1: f integrallenemez. $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $[-1,1]$'in herhangi bir bölünüşü olsun. Her $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı, ne kadar kısa olursa olsun, hem rasyonel hem irrasyonel sayı içerir (bkz. Analiz 1, İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu). Dolayısıyla f her alt aralıkta hem 1 hem -1 değerini alır: $m_k(f) = -1$, $M_k(f) = 1$'dir. Buradan her P için

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} (-1)\,\Delta x_k = -\big(1 - (-1)\big) = -2, \qquad U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 2$$

bulunur. Bütün alt toplamlar -2, bütün üst toplamlar 2 olduğundan $\underline{I}(f) = -2 \neq 2 = \overline{I}(f)$'dir; alt ve üst integraller çakışmadığından f integrallenemez.

Adım 2: g integrallenemez. $g = -f$ olduğundan aynı hesap $m_k(g) = -1$, $M_k(g) = 1$ verir ve yine $\underline{I}(g) = -2 \neq 2 = \overline{I}(g)$'dir.

Adım 3: Toplam integrallenebilirdir. Her $x \in [-1,1]$ için

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 1 + (-1) = 0, & x \in \mathbb{Q} \\ -1 + 1 = 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olur; yani $f+g$ özdeş olarak sıfır fonksiyonudur ve $\int_{-1}^{1} (f+g)(x)\,dx = 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 4: Aynı olay çarpım için de olur. $(f \cdot g)(x)$, rasyonellerde $1 \cdot (-1) = -1$, irrasyonellerde $(-1) \cdot 1 = -1$'dir; yani $f \cdot g \equiv -1$ sabit fonksiyonudur ve $\int_{-1}^{1} (f \cdot g)(x)\,dx = (-1)\,\big(\,1 - (-1)\,\big) = -2$'dir. Demek ki iki integrallenemez fonksiyonun yalnızca toplamı değil, çarpımı da integrallenebilir olabilir. Toplama ve çarpma integrallenebilirliği **korur** (Teorem 27.1 ve bu bölümde birazdan kanıtlayacağımız çarpım sonucu), ama bu koruma **tek yönlüdür**: sonucun integrallenebilir olması, parçaların integrallenebilir olduğu anlamına gelmez.
■

Lineerlik teoreminin iki maddesini birleştirmek, fark için beklediğimiz kuralı hemen verir.

Sonuç 27.1 (Farkın İntegrallenebilirliği). *f ve g, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir ise $f - g$ de integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

İspat.
Üç adımda ilerliyoruz.
1. Teorem 27.1'in ikinci maddesinde $c = -1$ seçelim: $-g$ integrallenebilirdir ve $\int_a^b (-g) = -\int_a^b g$'dir.
2. İki fonksiyonun farkını bir toplam olarak yazalım: $f - g = f + (-g)$.
3. f ve $-g$ integrallenebilir olduğundan, Teorem 27.1'in birinci maddesi gereği toplamları da integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

■

Daha genel olarak, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve f, g integrallenebilir ise $\alpha f + \beta g$ integrallenebilirdir ve $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$'dir; tümevarımla bu, sonlu sayıda fonksiyonun lineer birleşimlerine genişler. Kısacası, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar kümesi bir **vektör uzayı**dır ve $f \mapsto \int_a^b f$ dönüşümü bu uzay üzerinde bir **lineer fonksiyonel**dir.

27.3 Bileşke Fonksiyonun İntegrallenebilirliği

Toplama ve skalerle çarpımı hallettik. Sırada çarpım, bölüm, kuvvet ve mutlak değer var. Bunları tek tek ele almak yerine hepsini birden veren bir teorem ispatlayacağız: **integrallenebilir bir fonksiyonun dışına sürekli bir fonksiyon uygularsak integrallenebilirlik bozulmaz.** Gerçekten de f^2, $|f|$ ve (uygun koşullar altında) $1/f$ fonksiyonlarının hepsi $g \circ f$ biçimindedir; g burada sırasıyla $t \mapsto t^2$, $t \mapsto |t|$ ve $t \mapsto 1/t$ sürekli fonksiyonlarıdır.
İspattaki fikri önce anlatalım. f integrallenebilir olduğundan, uygun bir bölünüşte f'nin salınımlarının **ağırlıklı toplamı** küçüktür; ama bu, salınımların her alt aralıkta küçük olduğu anlamına gelmez: birkaç alt aralıkta f hâlâ çok salınıyor, yalnızca o alt aralıkların toplam uzunluğu küçük oluyor olabilir. İspatın kalbi bu ayrımdır; alt aralıkları ikiye böleceğiz:

- **iyi** alt aralıklar (A kümesi): f'nin salınımı küçük. Burada g'nin **düzgün sürekliliği** devreye girer ve $g \circ f$'nin salınımını da küçük yapar.
- **kötü** alt aralıklar (B kümesi): f'nin salınımı küçük değil. Burada $g \circ f$'nin salınımını kontrol edemeyiz, ama g sınırlı olduğundan salınım en fazla $2K$'dır; buna karşılık bu aralıkların toplam uzunluğunun çok küçük olduğunu göstereceğiz.

İkinci grubu kontrol edebilmek için integrallenebilirlik ölçütünü δ değil, **karesi alınmış** bir eşikle, δ^2 ile uygulamak gerekir; bu, kötü aralıkların toplam uzunluğunu δ mertebesine indirmenin klasik hilesidir.

Teorem 27.2 (Bileşke Fonksiyonun İntegrallenebilirliği). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrallenebilir ve görüntü kümesi $[c,d]$ aralığının içinde kalsın, yani $f\,\big([a,b]\big) \subseteq [c,d]$ olsun. $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ **sürekli** bir fonksiyon ise, $h = g \circ f$ bileşkesi $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Adım 1: g düzgün sürekli ve sınırlıdır. *$[c,d]$ kapalı ve sınırlı, g ise bu aralıkta süreklidir. Cantor teoremi (bkz. Analiz 1) gereği g* ***düzgün süreklidir*** *(uniformly continuous); Weierstrass teoremi (bkz. Analiz 1) gereği de sınırlıdır, yani her $t \in [c,d]$ için $\mid g(t) \mid \leq K$ olacak biçimde bir $K > 0$ vardır ($\sup \mid g \mid = 0$ ise $K = 1$ alınır). Buradan $\mid h(x) \mid \leq K$ çıkar, yani h de sınırlıdır ve Darboux toplamları anlamlıdır.*
Adım 2: Sayıların seçimi. *$\varepsilon > 0$ verilsin. Sonraki hesabı temiz bırakmak için*

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a+2K} > 0$$

sayısını tanımlayalım. g düzgün sürekli olduğundan, bu ε' için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her $s,t \in [c,d]$ için $\mid s-t \mid < \delta$ olması $\mid g(s)-g(t) \mid < \varepsilon'$ gerektirsin. δ'yı küçültmek bu koşulu bozmayacağından ayrıca $\delta < \varepsilon'$ olduğunu da varsayabiliriz.
Adım 3: Uygun bölünüşün seçimi. *$\delta^2 > 0$ olduğundan, f'nin integrallenebilirliği ve Riemann ölçütü gereği $[a,b]$'nin $U(P,f) - L(P,f) < \delta^2$ koşulunu sağlayan bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bölünüşü vardır. Bu bölünüşü sabitliyoruz.*
Adım 4: Alt aralıkların ikiye ayrılması. *$\{1,\ldots,n\}$ indis kümesini, salınımın küçük olduğu "iyi" indisler $A = \left\{\, i : M_i(f) - m_i(f) < \delta \,\right\}$ ile salınımın büyük olduğu "kötü" indisler $B = \left\{\, i : M_i(f) - m_i(f) \geq \delta \,\right\}$ biçiminde ayrık iki parçaya bölelim. Amacımız $U(P,h) - L(P,h) < \varepsilon$ göstermek; toplamı bu iki küme üzerinden ayıralım:*

$$U(P,h) - L(P,h) = \sum_{i \in A} \big(\, M_i(h) - m_i(h) \,\big)\, \Delta x_i + \sum_{i \in B} \big(\, M_i(h) - m_i(h) \,\big)\, \Delta x_i.$$

Adım 5: A kümesinin katkısı. *$i \in A$ olsun ve $s,t \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$ alalım. $f(s)$ ile $f(t)$ sayılarının ikisi de $[m_i(f), M_i(f)]$ aralığında olduğundan $\mid f(s) - f(t) \mid \leq M_i(f) - m_i(f) < \delta$'dır. $f(s), f(t) \in [c,d]$ olduğundan düzgün sürekliliğin verdiği gerektirme uygulanabilir:*

$$\mid h(s) - h(t) \mid = \big|\, g(f(s)) - g(f(t)) \,\big| < \varepsilon'.$$

Bu, I_i'deki ***bütün*** *s,t çiftleri için doğrudur; salınımın supremum karakterizasyonu gereği $M_i(h) - m_i(h) = \sup_{s,t \in I_i} \big(\, h(s) - h(t) \,\big) \leq \varepsilon'$ olur. Böylece*

$$\sum_{i \in A} \big(\, M_i(h) - m_i(h) \,\big)\, \Delta x_i \leq \sum_{i \in A} \varepsilon'\, \Delta x_i \leq \varepsilon' \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon'(b-a)$$

elde ederiz; ortadaki eşitsizlikte $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$ ve bütün terimlerin negatif olmadığını kullandık.
Adım 6: B kümesinin toplam uzunluğu. *$i \in B$ için $M_i(f) - m_i(f) \geq \delta$'dır; bu eşitsizliği $\Delta x_i > 0$ ile çarpıp B üzerinden toplarsak*

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} \big(\, M_i(f) - m_i(f) \,\big)\, \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(\, M_i(f) - m_i(f) \,\big)\, \Delta x_i = U(P,f) - L(P,f) < \delta^2$$

olur. (Ortadaki eşitsizlikte toplamı bütün indislere genişlettik; eklenen terimler negatif olmadığından toplam artmıştır.) Her iki tarafı $\delta > 0$'a bölersek $\sum_{i \in B} \Delta x_i < \delta$ çıkar: kötü alt aralıkların ***toplam uzunluğu*** *δ'dan küçüktür. Burası ispatın can alıcı noktasıdır; ölçütü δ yerine δ^2 ile uygulamamızın nedeni tam olarak budur.*
Adım 7: B kümesinin katkısı. *$\mid h \mid \leq K$ olduğundan her alt aralıkta $-K \leq m_i(h) \leq M_i(h) \leq K$, yani $M_i(h) - m_i(h) \leq 2K$'dır. Bir önceki adımla birleştirirsek*

$$\sum_{i \in B} \big(\, M_i(h) - m_i(h) \,\big)\, \Delta x_i \leq 2K \sum_{i \in B} \Delta x_i < 2K\delta$$

olur.
Adım 8: Kestirimlerin birleştirilmesi. *Adım 5 ile Adım 7'yi toplayıp $\delta < \varepsilon'$ seçtiğimizi hatırlarsak*

$$U(P,h) - L(P,h) < \varepsilon'(b-a) + 2K\delta < \varepsilon'(b-a+2K) = \frac{\varepsilon}{b-a+2K} \cdot (b-a+2K) = \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $U(P,h) - L(P,h) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir P bölünüşü bulduğumuzdan, Riemann ölçütü gereği $h = g \circ f$, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir.
■

⚠ Dıştaki fonksiyonun sürekliliğinden vazgeçilemez

Teorem 27.2'de g'nin sürekli olması koşulunu **atamayız**: g'nin yalnızca integrallenebilir olduğunu varsayarsak $g \circ f$ integrallenebilir olmayabilir. Başka bir deyişle **iki integrallenebilir fonksiyonun bileşkesi integrallenebilir olmak zorunda değildir.** Bunu, bileşkesi Dirichlet fonksiyonu çıkan iki integrallenebilir fonksiyonla göstereceğiz.

Örnek 27.2 (İntegrallenebilir İki Fonksiyonun Bileşkesi). $[0,1]$ üzerinde tanımlı, ikisi de Riemann integrallenebilir olan f ve g fonksiyonları bulunuz; öyle ki $g \circ f$ bileşkesi Riemann integrallenemez olsun.

Çözüm.
İçteki fonksiyon: Thomae fonksiyonu. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ q \in \mathbb{N},\ \text{kesir en sade hâlinde} \\ 0,\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Buna **Thomae fonksiyonu** (patlamış mısır fonksiyonu da denir) adı verilir. $0 = \frac{0}{1}$ olduğundan $f(0) = 1$'dir; ayrıca her x için $0 \le f(x) \le 1$, yani $f\left([0,1]\right) \subseteq [0,1]$'dir.
f integrallenebilirdir ve integrali sıfırdır. Her alt aralık irrasyonel sayı içerdiğinden (bkz. Analiz 1) her bölünüş ve her k için $m_k(f) = 0$, dolayısıyla $L(P,f) = 0$ ve $\underline{I}(f) = 0$'dır. Geriye üst toplamların küçültülebildiğini göstermek kalıyor. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $E = \left\{ x \in [0,1] : f(x) \ge \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ kümesine bakalım. $f(x) \ge \frac{\varepsilon}{2} > 0$ olması x'in rasyonel ve en sade yazımında $q \le \frac{2}{\varepsilon}$ olmasını gerektirir; $[0,1]$'de paydası $\frac{2}{\varepsilon}$'u aşmayan sonlu sayıda rasyonel bulunduğundan E sonludur; eleman sayısı N_0 olmak üzere $N = \max(N_0, 1)$ diyelim (böylece $N \ge 1$ olur ve E boş çıksa bile aşağıdaki kestirimler geçerli kalır). Normu $\| P \| < \frac{\varepsilon}{8N}$ olan bir P bölünüşü alıp alt aralıkları ikiye ayıralım:

- E ile kesişenler: E'nin her noktası en fazla iki alt aralıkta bulunabildiğinden bunların sayısı en fazla $2N$'dir. $M_k(f) \le 1$ kestirimiyle toplam katkı en fazla $2N \| P \| < \frac{\varepsilon}{4}$ olur.
- E ile kesişmeyenler: buralarda f'nin bütün değerleri $\frac{\varepsilon}{2}$'den küçüktür, yani $M_k(f) \le \frac{\varepsilon}{2}$'dir; toplam katkı en fazla $\frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}$'dir.

Toplarsak $U(P,f) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfî olduğundan $\overline{I}(f) = 0$'dır; böylece $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = 0$, yani $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$'dır.
f'nin süreksizlik yapısı. Aynı E kümesi, Thomae fonksiyonunun nerede sürekli olduğunu da söyler: f **her irrasyonel noktada süreklidir, her rasyonel noktada süreksizdir.** Gerçekten, x_0 irrasyonel ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun; E sonlu ve $x_0 \notin E$ olduğundan x_0'ın E'yi kesmeyen bir $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ komşuluğu vardır ve bu komşulukta $| f(x) - f(x_0) | = f(x) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur. Buna karşılık $x_0 = \frac{p}{q}$ rasyonel ise $f(x_0) = \frac{1}{q} > 0$'dır, oysa irrasyoneller yoğun olduğundan (bkz. Analiz 1) x_0'a istediğimiz kadar yakın, f değeri 0 olan noktalar vardır; süreklilik $\varepsilon = \frac{1}{q}$ için bozulur.
Dıştaki fonksiyon: tek süreksizliği olan bir basamak fonksiyonu. $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$g(t) = \begin{cases} 1, t \in (0,1] \\ 0, t = 0 \end{cases}$$

ile tanımlayalım; g, yalnızca $t = 0$'da süreksiz olan bir basamak fonksiyonudur. *İntegrallenebilirdir:* $[0,1]$'in bir P bölünüşünde ilk alt aralık dışındaki her yerde $g \equiv 1$, ilk alt aralık $[0, x_1]$'de ise $m_1(g) = 0$, $M_1(g) = 1$'dir; öyleyse $U(P,g) - L(P,g) = \Delta x_1 \le \| P \|$'dır. Normu ε'dan küçük bir bölünüş seçmek Riemann ölçütünü sağlar; alt toplamların supremumu 1 olduğundan $\int_0^1 g(t)\,dt = 1$'dir.
Bileşke: Dirichlet fonksiyonu. $h = g \circ f$ olsun; f'nin görüntüsü $[0,1]$ içinde kaldığından bileşke tanımlıdır. $x \in \mathbb{Q}$ ise $f(x) = \frac{1}{q} \in (0,1]$ ve $h(x) = 1$; $x \notin \mathbb{Q}$ ise $f(x) = 0$ ve $h(x) = g(0) = 0$'dır. Yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$h(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olur; bu tam olarak **Dirichlet fonksiyonu**dur. *İntegrallenemez:* her alt aralık hem rasyonel hem irrasyonel içerdiğinden her bölünüş için $m_k(h) = 0$, $M_k(h) = 1$, dolayısıyla $L(P,h) = 0$, $U(P,h) = 1$ ve $\underline{I}(h) = 0 \neq 1 = \overline{I}(h)$'dir.
Sonuç. f ve g integrallenebilirken $g \circ f$ integrallenemez; bileşke teoremindeki süreklilik koşulu bu yüzden vazgeçilmezdir. g'nin **tek bir** süreksizlik noktası olması bile bileşkeyi bozmaya yetmiştir.
■

Şimdi bileşke teoreminin ilk meyvelerini toplayalım.

Sonuç 27.2 (Kuvvetlerin ve Mutlak Değerin İntegrallenebilirliği). *f, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde*
1. her $n \in \mathbb{N}$ için f^n (yani $x \mapsto \big(f(x)\big)^n$) integrallenebilirdir;
2. $|f|$ integrallenebilirdir.

İspat.
f integrallenebilir olduğundan sınırlıdır: her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ vardır, yani $f\big([a,b]\big) \subseteq [-C,C]$'dir. Bileşke teoremini $[c,d] = [-C,C]$ ile uygulayacağız.
1. $g(t) = t^n$ bir polinom, dolayısıyla $[-C,C]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1); Teorem 27.2 gereği $g \circ f = f^n$ integrallenebilirdir. Özellikle $n = 2$ için $\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$ anlamlıdır; bunu birazdan kullanacağız.
2. $g(t) = |t|$ süreklidir (bkz. Analiz 1); nitekim ters üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği $\big||s| - |t|\big| \leq |s-t|$'dir, yani g bir Lipschitz fonksiyonudur (bkz. Analiz 1). Teorem 27.2 gereği $g \circ f = |f|$ integrallenebilirdir.
■

⚠ İkinci maddenin karşıtı doğru değildir

$|f|$'nin integrallenebilir olması f'nin integrallenebilir olmasını gerektirmez: Örnek 27.1'teki f fonksiyonu ($\mathbb{Q}$'da 1, dışında -1) integrallenemez, oysa $|f| \equiv 1$ integrallenebilirdir. Mutlak değer almak, fonksiyonun işaretindeki bütün düzensizliği siler.

27.4 Çarpım ve Bölüm

Çarpımın integrallenebilirliğini doğrudan Darboux toplamlarıyla göstermek zahmetlidir: $\sup(fg)$ ile $\sup f \cdot \sup g$ arasındaki ilişki temiz değildir. Bunun yerine küçük bir cebirsel numara kullanacağız. Her u, v reel sayısı için $\frac{(u+v)^2-(u-v)^2}{4} = \frac{4uv}{4} = uv$ olduğundan, fonksiyonlar düzeyinde de

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big)$$

yazabiliriz. Sağ tarafta yalnızca toplama, çıkarma, kareye yükseltme ve sabitle çarpma var; bunların hepsini artık kontrol ediyoruz.

Sonuç 27.3 (Çarpımın İntegrallenebilirliği). *f ve g, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir ise çarpımları $f \cdot g$ de $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir.*

İspat.
Yukarıdaki özdeşliği kullanacağız:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big).$$

1. Teorem 27.1 gereği $f+g$, Sonuç 27.1 gereği $f-g$ integrallenebilirdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Sonuç 27.2'in birinci maddesini $n = 2$ ile bu iki fonksiyona uygularsak $(f+g)^2$ ve $(f-g)^2$ integrallenebilirdir.
3. Sonuç 27.1 gereği bu iki karenin farkı integrallenebilirdir; Teorem 27.1'in ikinci maddesini $c = \frac{1}{4}$ ile uygularsak $f \cdot g$'nin integrallenebilir olduğu çıkar.
■

Bu ispatın bir yan ürünü, çarpımın integrali için bir **formül** vermesidir:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2 dx - \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^2 dx\right).$$

Bu formül pratikte hesap için pek işe yaramaz; ama şunu net biçimde gösterir: çarpımın integrali, çarpanların integrallerinden **hesaplanamaz**.

⚠ İntegral çarpma ile uyumlu değildir

Sık yapılan bir yanılgı, çarpımın integralini integrallerin çarpımı sanmaktır. Çarpım gerçekten integrallenebilirdir, ama integral işlemcisi çarpma üzerine dağılmaz:

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \qquad \text{(genel olarak)}\ .$$

Lineerlik yalnızca **toplama** ve **skalerle çarpma** için geçerlidir. Aynı uyarı bölüm için de geçerlidir: $\int(f/g) \neq (\int f)/(\int g)$.

Örnek 27.3 (Çarpımın İntegrali İçin Karşı Örnek). $[0,1]$ aralığında $f(x) = x$ ve $g(x) = x$ alalım. $\int_0^1 (f\cdot g)$ ile $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right)$ sayılarını karşılaştırınız.

Çözüm.
Çarpım fonksiyonu $(f\cdot g)(x) = x\cdot x = x^2$'dir ve $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$'tür. Her bir fonksiyonun integrali ise $\int_0^1 x\,dx = \frac{1^2-0^2}{2} = \frac{1}{2}$'dir; bu iki integralin çarpımı

$$\left(\int_0^1 x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 x\,dx\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

'tür. $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$ olduğundan $\int_0^1 (x\cdot x)\,dx \neq \left(\int_0^1 x\,dx\right)^2$'dir. Aradaki fark $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$'dir; küçük ama sıfırdan farklıdır ve bu kadarı iddiayı çürütmeye yeter.
■

Sırada bölüm var. $1/f$'nin tanımlı olması için f'nin hiçbir yerde sıfırlanmaması gerekir, ama bu yetmez: f sıfıra istediği kadar yaklaşabiliyorsa $1/f$ sınırsız olur ve sınırsız bir fonksiyonun Darboux toplamları tanımlı değildir. Bu yüzden f'nin sıfırdan **düzgün biçimde** uzak durmasını, yani bir $m > 0$ için $f \geq m$ olmasını isteyeceğiz.

Teorem 27.3 (Bölümün İntegrallenebilirliği). *f, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq m > 0$ olacak biçimde bir m sayısı varsa, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir.*

İspat.
$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ diyelim. $f \geq m > 0$ olduğundan $0 < g(x) \leq \frac{1}{m}$'dir, yani g sınırlıdır ve Darboux toplamları anlamlıdır. İntegrallenebilirliği Riemann ölçütüyle göstereceğiz.
Adım 1: Bir alt aralıkta g'nin supremumu ve infimumu. *$P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ herhangi bir bölünüş ve $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ olsun. Her $x \in I_k$ için $0 < m \leq m_k(f) \leq f(x) \leq M_k(f)$ olduğundan, pozitif sayılarda ters alma sıralamayı tersine çevirir:*

$$\frac{1}{M_k(f)} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m_k(f)}.$$

*Demek ki $\frac{1}{m_k(f)}$ sayısı g'nin I_k üzerindeki bir üst sınırı, $\frac{1}{M_k(f)}$ ise bir alt sınırıdır. Bunların **en iyi** sınırlar olduğunu da görelim.*

Supremum. *İnfimumun karakterizasyonu (bkz. Analiz 1) gereği I_k'de $f(x_j) \to m_k(f)$ olacak biçimde bir (x_j) dizisi vardır; $t \mapsto \frac{1}{t}$ fonksiyonu $m_k(f) \geq m > 0$ noktasında sürekli olduğundan $g(x_j) \to \frac{1}{m_k(f)}$ olur (bkz. Analiz 1). Bir supremum, fonksiyonun aldığı değerlerin limitlerinden küçük olamayacağından $M_k(g) \geq \frac{1}{m_k(f)}$'dir; üst sınır olduğunu zaten bildiğimizden $M_k(g) = \frac{1}{m_k(f)}$ çıkar.*

İnfimum. *Bu kez supremumun karakterizasyonunu (bkz. Analiz 1) kullanalım: I_k'de $f(y_j) \to M_k(f)$ olacak biçimde bir (y_j) dizisi vardır ve $M_k(f) \geq m > 0$ olduğundan yine aynı süreklilik akıl yürütmesiyle $g(y_j) \to \frac{1}{M_k(f)}$ olur. Bir infimum, fonksiyonun aldığı değerlerin limitlerinden büyük olamayacağından $m_k(g) \leq \frac{1}{M_k(f)}$'dir; alt sınır olduğunu bildiğimizden $m_k(g) = \frac{1}{M_k(f)}$ çıkar. Elde ettiklerimizi bir arada yazalım:*

$$M_k(g) = \frac{1}{m_k(f)}, \qquad m_k(g) = \frac{1}{M_k(f)}.$$

Kısacası $g = 1/f$'nin supremumu, f'nin infimumunun bulunduğu yerde oluşur; infimumu ise supremumunun bulunduğu yerde.

Adım 2: Salınımın kestirimi. *g'nin I_k üzerindeki salınımı*

$$M_k(g) - m_k(g) = \frac{1}{m_k(f)} - \frac{1}{M_k(f)} = \frac{M_k(f) - m_k(f)}{M_k(f) \cdot m_k(f)}$$

'dır. Hipotez gereği $M_k(f) \geq m$ ve $m_k(f) \geq m$, dolayısıyla payda alttan sınırlıdır: $M_k(f) \cdot m_k(f) \geq m^2 > 0$. Payda en az m^2 olduğundan

$$M_k(g) - m_k(g) \leq \frac{1}{m^2} \left(M_k(f) - m_k(f) \right).$$

Adım 3: Darboux toplamlarının farkı. *Bu kestirimi Δx_k ile çarpıp toplar ve sabit $\frac{1}{m^2}$ çarpanını dışarı alırsak, **her** P bölünüşü için*

$$U(P,g) - L(P,g) = \sum_{k=1}^{n} \left(M_k(g) - m_k(g) \right) \Delta x_k \leq \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{n} \left(M_k(f) - m_k(f) \right) \Delta x_k = \frac{1}{m^2} \Big(U(P,f) - L(P,f) \Big)$$

elde ederiz.

Adım 4: Ölçütün uygulanması. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\frac{m^2\varepsilon}{2} > 0$ olduğundan, f'nin integrallenebilirliği gereği $U(P,f) - L(P,f) < \frac{m^2\varepsilon}{2}$ koşulunu sağlayan bir P bölünüşü vardır. Bunu Adım 3'teki eşitsizlikte kullanırsak*

$$U(P,g) - L(P,g) \leq \frac{1}{m^2} \cdot \frac{m^2\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

buluruz. Verilen her $\varepsilon > 0$ için böyle bir bölünüş bulunduğundan, Riemann ölçütü gereği $g = \dfrac{1}{f}$ integrallenebilirdir.

■

Bu teoremi çarpım sonucuyla birleştirmek bölüm için beklenen genel sonucu verir: f ve g integrallenebilir ve bir $m > 0$ için her x'te $g(x) \geq m$ ise, $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ fonksiyonu Teorem 27.3 ile Sonuç 27.3'in ardışık uygulanmasıyla integrallenebilirdir. Hipotez $g \leq -m < 0$ ile de değiştirilebilir; o zaman $-g \geq m > 0$ olur ve $\frac{f}{g} = -\frac{f}{-g}$ yazılır. Kaçınılmaz olan şey, g'nin sıfıra keyfî yakın değerler almamasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

27.5 Aralık Üzerinde Toplamsallık

Şimdiye kadarki sonuçlar integralin **integrali alınan fonksiyona** göre davranışıyla ilgiliydi; şimdi **integrasyon aralığına** göre davranışını inceleyeceğiz. Sezgi basittir: $[a,b]$'yi bir c noktasında ikiye böldüğümüzde grafiğin altındaki alan da ikiye bölünür. Bunu kesinleştirirken yalnızca integralin toplandığını değil, **integrallenebilirliğin kendisinin** de bu bölünmeyle uyumlu olduğunu göreceğiz.

Teorem 27.4 (İntegralin Aralık Üzerinde Toplamsallığı). *f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon ve $c \in (a,b)$ olsun. f'nin $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul, hem $[a,c]$ hem de $[c,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olmasıdır. Bu durumda*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

İspat.
Adım 1: Gereklilik. *f'nin $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu varsayalım ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Riemann ölçütü gereği $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir P bölünüşü vardır. c noktası P'de yoksa onu ekleyip $P^* = P \cup \{c\}$ incelmesini oluşturalım; inceltmek üst toplamı artırmaz, alt toplamı azaltmaz, dolayısıyla*

$$U(P^*,f) - L(P^*,f) \le U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

olur. P^*, c'yi içerdiğinden doğal biçimde $P_1 = P^* \cap [a,c]$ ve $P_2 = P^* \cap [c,b]$ bölünüşlerine ayrılır. P^*'ın her alt aralığı ya tümüyle c'nin solunda ya tümüyle sağında olduğundan Darboux toplamları da ayrışır:

$$U(P^*,f) = U(P_1,f) + U(P_2,f), \qquad L(P^*,f) = L(P_1,f) + L(P_2,f).$$

Bunları yukarıdaki eşitsizlikte yerine koyarsak

$$\Big(U(P_1,f) - L(P_1,f)\Big) + \Big(U(P_2,f) - L(P_2,f)\Big) < \varepsilon$$

elde ederiz. Her bölünüş için $U \ge L$ olduğundan parantez içindeki iki terim de negatif değildir; negatif olmayan iki sayının toplamı ε'dan küçükse her biri de ayrı ayrı ε'dan küçüktür. Verilen her $\varepsilon > 0$ için bu koşulu sağlayan bölünüşler bulunduğundan, Riemann ölçütü gereği f hem $[a,c]$ hem $[c,b]$ üzerinde integrallenebilirdir.
Adım 2: Yeterlilik. *Şimdi f'nin hem $[a,c]$ hem $[c,b]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Riemann ölçütünü iki aralıkta da $\frac{\varepsilon}{2}$ ile uygularsak, $[a,c]$'nin bir P_1 bölünüşü ve $[c,b]$'nin bir P_2 bölünüşü için*

$$U(P_1,f) - L(P_1,f) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ve} \qquad U(P_2,f) - L(P_2,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $P = P_1 \cup P_2$ diyelim; P_1'in en büyük noktasıyla P_2'nin en küçük noktası c'de çakıştığından P, $[a,b]$'nin geçerli bir bölünüşüdür. Toplamlar yine ayrıştığından

$$U(P,f) - L(P,f) = \Big(U(P_1,f) - L(P_1,f)\Big) + \Big(U(P_2,f) - L(P_2,f)\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Riemann ölçütü gereği f, $[a,b]$'nin tamamı üzerinde integrallenebilirdir.
Adım 3: İntegrallerin eşitliği. *Artık üç aralıkta da integrallenebilirlik elimizde; integralin alt toplamların supremumuna ve üst toplamların infimumuna eşit olduğunu kullanacağız.*
Bir yön. *Q, $[a,b]$'nin herhangi bir bölünüşü ve $Q^* = Q \cup \{c\}$ olsun. Q^* bir incelme olduğundan $L(Q,f) \le L(Q^*,f)$'dir; ayrıca Q^*, c'de Q_1 ve Q_2 bölünüşlerine ayrılır. Bir alt toplam kendi aralığındaki alt integrali (yani integrali) aşamayacağından $L(Q_1,f) \le \int_a^c f$ ve $L(Q_2,f) \le \int_c^b f$'dir. Bunları birleştirirsek*

$$L(Q,f) \le L(Q^*,f) = L(Q_1,f) + L(Q_2,f) \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

olur. Sağ taraf Q'dan bağımsız olduğundan bütün Q bölünüşleri üzerinden supremum alabiliriz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}_a^b(f) = \sup_Q L(Q,f) \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Öteki yön. *Aynı akıl yürütmeyi üst toplamlarla yapalım. İncelme üst toplamı artırmadığından ve bir üst toplam kendi aralığındaki integralden küçük olamayacağından*

$$U(Q,f) \ge U(Q^*,f) = U(Q_1,f) + U(Q_2,f) \ge \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

olur. Bütün Q bölünüşleri üzerinden infimum alırsak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{I}_a^b(f) = \inf_Q U(Q,f) \ge \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

çıkar.
Sonuç. *$\int_a^b f$ sayısı, $\int_a^c f + \int_c^b f$ sayısından hem küçük ya da eşit hem büyük ya da eşit olduğuna göre ona eşittir.*
■

Teoremin ilk kullanımı, integrallenebilirliğin **kalıtsal** olduğunu göstermektir: büyük aralıkta integrallenebilen bir fonksiyon, içindeki her kapalı alt aralıkta da integrallenebilir. Bu, sonraki bölümlerde $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ biçimindeki fonksiyonları tanımlarken sürekli ihtiyaç duyacağımız bir gerçektir.

Sonuç 27.4 (Alt Aralıklara Kısıtlama). *f, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. $[c,d] \subseteq [a,b]$ olan her kapalı aralık için f, $[c,d]$ üzerinde de Riemann integrallenebilirdir.*

İspat.
$a \le c \le d \le b$ olsun. $c = d$ ise iddia boştur (tek noktalı aralıkta integral, birazdan vereceğimiz tanım gereği sıfırdır); bu yüzden $c < d$ varsayalım.
Adım 1: Soldaki fazlalığı atalım. *$a < c$ ise $c \in (a,b)$'dir; Teorem 27.4'ni $[a,b]$ aralığına ve c noktasına uygularsak f, hem $[a,c]$ hem $[c,b]$ üzerinde integrallenebilirdir. Özellikle $[c,b]$ üzerinde integrallenebilirdir. $a = c$ ise zaten $[c,b] = [a,b]$'dir ve aynı sonuç doğrudan geçerlidir.*
Adım 2: Sağdaki fazlalığı atalım. *$d < b$ ise $d \in (c,b)$'dir; Teorem 27.4'ni bu kez $[c,b]$ aralığına ve d noktasına uygularsak f'nin $[c,d]$ üzerinde integrallenebilir olduğu çıkar. $d = b$ ise $[c,d] = [c,b]$'dir ve sonuç Adım 1'de zaten elde edilmiştir.*
■

Toplamsallık, tümevarımla sonlu sayıda parçaya da genişler: $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_p = b$ ise ve f bunların her birinde integrallenebilirse $\int_a^b f = \sum_{j=1}^{p} \int_{c_{j-1}}^{c_j} f$ olur. Bu, **parçalı tanımlı** (piecewise) fonksiyonların integralini hesaplamanın standart yöntemidir: fonksiyonun tanımının değiştiği noktalardan aralığı kırar, her parçada bilinen formülleri kullanırız. İlk örneğimiz mutlak değer fonksiyonudur.

Örnek 27.4 (Mutlak Değerli Bir Fonksiyonun İntegrali). $\displaystyle\int_0^3 |\,x-1\,|\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1: Kırılma noktasının belirlenmesi. Mutlak değer, içindeki ifadenin işaret değiştirdiği yerde davranışını değiştirir. $x - 1 = 0$ denkleminin kökü $x = 1$'dir ve $1 \in (0,3)$'tür:

$$|\,x-1\,| = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \quad (\text{çünkü } x-1 \le 0) \\ x-1, & 1 \le x \le 3 \quad (\text{çünkü } x-1 \ge 0). \end{cases}$$

$x \mapsto |\,x-1\,|$ sürekli olduğundan $[0,3]$ üzerinde integrallenebilirdir; Teorem 27.4'ni $c = 1$ ile uygulayabiliriz:

$$\int_0^3 |\,x-1\,|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Parçaların hesabı. Lineerlik (Teorem 27.1) ve temel integrallerle

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = 1\cdot(1-0) - \frac{1^2-0^2}{2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_1^3 (x-1)\,dx = \frac{3^2-1^2}{2} - 1\cdot(3-1) = 4-2 = 2.$$

Adım 3: Toplama. $\displaystyle\int_0^3 \mid x-1 \mid dx = \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2}.$

Geometrik doğrulama. $y = \mid x-1 \mid$ grafiği iki doğru parçasından oluşur: $[0,1]$ üzerindeki parça dik kenarları 1 ve 1 olan bir dik üçgen sınırlar (alanı $\frac{1}{2}$), $[1,3]$ üzerindeki parça ise dik kenarları 2 ve 2 olan bir dik üçgen sınırlar (alanı 2). Toplam alan $\frac{5}{2}$ olup hesabımızı doğrular.

■

Toplamsallığın gerçek gücü, parçalar arasında **sıçrama** olduğunda görülür: fonksiyon kırılma noktasında sürekli olmasa bile teorem çalışır.

Örnek 27.5 (Sıçramalı Parçalı Bir Fonksiyonun İntegrali). $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin $[0,2]$ üzerinde integrallenebilir olduğunu gösterip $\int_0^2 f(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
f, $x=1$ noktasında bir sıçramaya sahiptir: soldan yaklaşırken değerler 2'ye, sağdan yaklaşırken 3'e gider ve $f(1)=2$'dir. Yine de aralığı $c=1$ noktasından ayıracağız.

Adım 1: $[0,1]$ parçası. Bu aralıkta $f(x)=2x$ bir polinomdur, dolayısıyla süreklidir ve integrallenebilirdir; lineerlikle $\int_0^1 f = 2\int_0^1 x\,dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$'dir.

Adım 2: $[1,2]$ parçası. Burada dikkatli olmalıyız: $[1,2]$ üzerinde f, $x=1$ noktası dışında 3'e eşittir, o noktada ise 2 değerini alır; yani f bu aralıkta sabit değildir. Bunun bir sorun yaratmadığını doğrudan gösterelim. $P=\{x_0=1, x_1, \ldots, x_n=2\}$, $[1,2]$'nin bir bölünüşü olsun. İlk alt aralık dışındaki her alt aralıkta $f\equiv 3$, yani $m_k(f)=M_k(f)=3$'tür; ilk alt aralık $[1,x_1]$'de ise $M_1(f)=3$ ve $m_1(f)=2$'dir. Öyleyse

$$U(P,f) = 3\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = 3, \qquad L(P,f) = 2\,\Delta x_1 + 3\sum_{k=2}^{n}\Delta x_k = 3-\Delta x_1.$$

Buradan $U(P,f)-L(P,f)=\Delta x_1 \le \| P \|$ çıkar; normu ε'dan küçük bir bölünüş seçmek Riemann ölçütünü sağlar, dolayısıyla f, $[1,2]$ üzerinde integrallenebilirdir. Bütün üst toplamlar 3'e eşit olduğundan $\overline{I}_1^2(f)=3$, yani $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$'tür.

Adım 3: Birleştirme. f, hem $[0,1]$ hem $[1,2]$ üzerinde integrallenebilir olduğundan Teorem 27.4 gereği $[0,2]$ üzerinde de integrallenebilirdir ve

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 1+3 = 4.$$

Not. Adım 2'deki hesap şu genel olguyu da gösterir: bir fonksiyonun değerini **tek bir** noktada değiştirmek ne integrallenebilirliğini ne de integralinin değerini bozar.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

27.6 Yönlü İntegral

Şimdiye kadar $\int_a^b f(x)\,dx$ yazarken hep $a < b$ varsaydık; $[a,b]$'nin bölünüşlerinden söz edebilmek için buna ihtiyacımız vardı. Pratikte bu kısıt can sıkıcıdır: ileride $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ gibi fonksiyonlarla çalışacağız ve x'in a'nın solunda mı sağında mı olduğunu her seferinde denetlemek istemeyiz.
Çözüm, integrali bir **yönlü** (oriented) nesne olarak görmektir: a'dan b'ye giderken hesaplanan integral ile b'den a'ya giderken hesaplanan integral aynı büyüklükte ama ters işaretli olsun. Bu, tek amacı cebirsel kuralları istisnasız kılmak olan bir işaret sözleşmesidir.

Tanım 27.1 (Yönlü İntegral). f bir J aralığında Riemann integrallenebilir ve $a, b \in J$ olsun.
1. **Bir noktada integral.** Her a için

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2. **Yönün ters çevrilmesi.** $b < a$ ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

olarak tanımlanır; sağdaki integral alışılmış anlamdaki (yani soldan sağa) integraldir.
Bu iki maddeyle birlikte $\int_a^b f(x)\,dx$ ifadesi, a ile b arasındaki sıralamaya bakılmaksızın anlamlıdır. Buna f'nin a'dan b'ye **yönlü integrali** denir.

İki gözlem yapalım. Birincisi, **ters çevirme kuralı** her $a, b \in J$ için geçerlidir: $\int_a^b f = -\int_b^a f$. Gerçekten, $a < b$ ise bu tanımın ikinci maddesinin (a ile b rollerinin değişmiş hâlinin) kendisidir; $a > b$ ise doğrudan tanımın ikinci maddesidir; $a = b$ ise her iki taraf da 0'dır. İkincisi, lineerlik ve Sonuç 27.1 gibi cebirsel kurallar yönlü integral için de geçerlidir, çünkü iki tarafın işareti aynı anda değişir; örneğin $b < a$ için

$$\int_a^b (f+g) = -\int_b^a (f+g) = -\left(\int_b^a f + \int_b^a g\right) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

olur. Asıl kazanç ise aralık toplamsallığının **her** sıralamada geçerli olmasıdır.

Önerme 27.1 (Yönlü İntegralde Toplamsallık). *J bir aralık ve f, J'nin her kapalı ve sınırlı alt aralığında Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde $a, b, c \in J$ noktalarının **sıralaması ne olursa olsun***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

eşitliği geçerlidir.

> ***İspat.***
> *Önce bütün terimlerin tanımlı olduğuna dikkat edelim: a, b, c'nin herhangi ikisinin belirlediği kapalı aralık J'nin içinde kaldığından ve f orada integrallenebilir olduğundan (gerekirse Sonuç 27.4 ile) üç yönlü integral de anlamlıdır.*
> ***Durum 1: Noktalardan ikisi çakışıyor.*** *$a = b$ ise sol taraf 0'dır, sağ taraf ise ters çevirme gözlemiyle $\int_a^c f + \int_a^a f = \int_a^c f - \int_a^c f = 0$'dır. $a = c$ ise sağ taraf $\int_a^a f + \int_a^b f = 0 + \int_a^b f$; $b = c$ ise sağ taraf $\int_a^b f + \int_b^b f = \int_a^b f + 0$ olur. Üç durumda da eşitlik sağlanır.*
> ***Durum 2: Üç nokta da farklı.*** *Altı olası sıralama vardır; hepsini tek tek ele alalım. Her seferinde kullanacağımız tek araç, klasik toplamsallık (Teorem 27.4) ile ters çevirme kuralıdır.*
> (i) *$a < c < b$. Bu, Teorem 27.4′nin doğrudan kendisidir.*
> (ii) *$a < b < c$. Teorem 27.4′ni $[a,c]$ aralığına ve içindeki b noktasına uygularsak $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ olur. Buradan, ters çevirme kuralıyla $-\int_b^c f = \int_c^b f$ olduğu da kullanılarak*

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

(iii) $c < a < b$. *Bu kez* $[c,b]$ *aralığını ve içindeki* a *noktasını alırsak* $\int_c^b f = \int_c^a f + \int_a^b f$ *olur;* $-\int_c^a f = \int_a^c f$ *olduğundan*

$$\int_a^b f = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(iv) $b < c < a$. $[b,a]$ *aralığını ve içindeki* c *noktasını alırsak* $\int_b^a f = \int_b^c f + \int_c^a f$ *olur; her iki tarafı* -1 *ile çarpıp ters çevirme kuralını üç yerde de kullanırsak*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f = -\int_b^c f - \int_c^a f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(v) $b < a < c$. $[b,c]$ *aralığını ve içindeki* a *noktasını alırsak* $\int_b^c f = \int_b^a f + \int_a^c f$, *yani* $\int_b^a f = \int_b^c f - \int_a^c f$ *olur; her iki tarafı* -1 *ile çarparsak*

$$\int_a^b f = -\int_b^c f + \int_a^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(vi) $c < b < a$. $[c,a]$ *aralığını ve içindeki* b *noktasını alalım:*

$$\int_c^a f = \int_c^b f + \int_b^a f,$$

yani $\int_b^a f = \int_c^a f - \int_c^b f$. *Her iki tarafı* -1 *ile çarpalım:*

$$\int_a^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bütün durumlarda iddia doğrulanmıştır.
■

Yönlü integral neden işe yarar

Önerme 27.1'ten sonra artık "c, a ile b arasında mı?" diye sormamıza gerek kalmaz; $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ kuralını, a, b, c nerede olurlarsa olsunlar serbestçe kullanabiliriz. Örneğin $\int_2^5 f = 9$ ve $\int_2^7 f = 4$ biliniyorsa,

$$\int_5^7 f = \int_5^2 f + \int_2^7 f = -\int_2^5 f + \int_2^7 f = -9 + 4 = -5$$

diye hiç düşünmeden yazabiliriz. Bu esneklik, analizin temel teoremlerini ve türev alma kurallarını integral üzerinde uygularken vazgeçilmez olacaktır.

27.7 Alıştırmalar

Alıştırma 27.1 (İntegralin Cebirsel Özellikleri Üzerine).

a) $\int_0^2 |\, x^2 - 1 \,|\, dx$ integralini hesaplayınız.

b) $f, [a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu f ile yalnızca sonlu sayıda noktada farklı olsun. g'nin de integrallenebilir olduğunu ve $\int_a^b g = \int_a^b f$ olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

c) f ve g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun ve bir $m>0$ için her $x\in[a,b]$'de $g(x)\geq m$ olsun. $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu gösteriniz. Ayrıca $g\geq m>0$ koşulunu "her x için $g(x)\neq 0$" ile değiştirmenin yetmediğini bir örnekle gösteriniz.

d) f ve g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $f^+=\max(f,0)$, $f^-=\max(-f,0)$, $\max(f,g)$ ve $\min(f,g)$ fonksiyonlarının da integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

e) $\int_a^b f(x)\,dx=0$ olması $\int_a^b \big(\ f(x)\big)^2dx=0$ olmasını gerektirir mi? Yanıtınızı bir örnekle destekleyiniz.

f) f, $[1,4]$ üzerinde integrallenebilir olsun ve $\int_1^4 f=7$, $\int_1^2 f=2$ verilsin. $\int_2^4 f$, $\int_4^2 f$ ve $\int_2^4 f+\int_4^1 f$ değerlerini bulunuz; son sonucu Önerme 27.1 ile doğrulayınız.

Çözüm.
a) x^2-1 ifadesi $x=1$'de işaret değiştirir ve $1\in(0,2)$'dir. $0\leq x\leq 1$ için $x^2\leq 1$, yani $x^2-1\leq 0$; $1\leq x\leq 2$ için $x^2\geq 1$, yani $x^2-1\geq 0$'dır. Öyleyse

$$\mid x^2-1\mid=\begin{cases}1-x^2, 0\leq x\leq 1\\ x^2-1, 1\leq x\leq 2.\end{cases}$$

İntegrali alınan fonksiyon sürekli olduğundan Teorem 27.4'ni $c=1$ ile uygulayabiliriz. Önce $\int_1^2 x^2\,dx$'i bulalım: toplamsallık gereği $\int_0^2 x^2\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 x^2\,dx$ olduğundan $\int_1^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$'tür. Şimdi iki parçayı lineerlikle hesaplayalım:

$$\int_0^1(1-x^2)\,dx=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\qquad \int_1^2(x^2-1)\,dx=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}.$$

Toplarsak $\int_0^2\mid x^2-1\mid dx=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$ bulunur.
b) Önce f ile g'nin yalnızca **tek bir** $x_0\in[a,b]$ noktasında farklı olduğu durumu ele alalım. $d=g-f$ diyelim; d, x_0 dışında özdeş olarak sıfırdır ve $d(x_0)=\alpha$ olsun. $\alpha=0$ ise yapacak bir şey yok; $\alpha\neq 0$ varsayalım.
P, $[a,b]$'nin bir bölünüşü olsun. x_0 en fazla iki alt aralıkta bulunabilir; bu alt aralıklarda $M_k(d)\leq\mid\alpha\mid$ ve $m_k(d)\geq-\mid\alpha\mid$, yani salınım en fazla $2\mid\alpha\mid$'dır. Öteki alt aralıklarda $d\equiv 0$ olduğundan salınım sıfırdır. Öyleyse

$$U(P,d)-L(P,d)\leq 2\cdot 2\mid\alpha\mid\cdot\parallel P\parallel=4\mid\alpha\mid\parallel P\parallel.$$

$\varepsilon>0$ verildiğinde $\parallel P\parallel<\frac{\varepsilon}{4\mid\alpha\mid}$ olan bir bölünüş seçersek Riemann ölçütü sağlanır; d integrallenebilirdir. Ayrıca $\mid U(P,d)\mid\leq 2\mid\alpha\mid\parallel P\parallel$ ve $\mid L(P,d)\mid\leq 2\mid\alpha\mid\parallel P\parallel$ olduğundan, normu sıfıra giden bölünüşler alarak $\underline{I}(d)=\overline{I}(d)=0$, yani $\int_a^b d(x)\,dx=0$ buluruz. $g=f+d$ olduğundan Teorem 27.1 gereği g integrallenebilirdir ve $\int_a^b g=\int_a^b f+0=\int_a^b f$'dir.
f ile g sonlu sayıda, diyelim N noktada farklıysa, bu noktaları teker teker düzelterek N adımda f'den g'ye ulaşırız; her adımda integrallenebilirlik ve integralin değeri korunduğundan sonuç N üzerinden tümevarımla çıkar (bkz. Analiz 1).
c) $g\geq m>0$ olduğundan Teorem 27.3 gereği $\frac{1}{g}$ integrallenebilirdir; f de integrallenebilir olduğundan Sonuç 27.3 gereği $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$ integrallenebilirdir.
Koşulu yalnızca "g hiçbir yerde sıfır değildir" biçiminde zayıflatmak yetmez. $[0,1]$ üzerinde $f\equiv 1$ ve

$$g(x)=\begin{cases}x, 0<x\leq 1\\ 1, x=0\end{cases}$$

alalım. g hiçbir noktada sıfır olmaz ve (b) şıkkı gereği integrallenebilirdir (sürekli $x\mapsto x$ fonksiyonundan yalnızca $x=0$'da farklıdır). Buna karşın $\frac{f}{g}$, $(0,1]$ üzerinde $\frac{1}{x}$'e eşittir ve $x\to 0^+$ iken sınırsızca büyür; sınırsız bir fonksiyonun Darboux toplamları tanımlı olmadığından $\frac{f}{g}$ Riemann integrallenemez. Demek ki g'nin sıfırdan **düzgün** biçimde uzak durması şarttır.
d) Her $u\in\mathbb{R}$ için $\max(u,0)=\frac{u+\mid u\mid}{2}$ ve $\max(-u,0)=\frac{\mid u\mid-u}{2}$'dir ($u\geq 0$ ise sağ taraflar u ve 0; $u<0$ ise 0 ve $-u$ verir). Fonksiyonlar düzeyinde

$$f^+=\frac{f+\mid f\mid}{2},\qquad f^-=\frac{\mid f\mid-f}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Sonuç 27.2'in ikinci maddesi gereği $|f|$ integrallenebilirdir; Teorem 27.1 ve Sonuç 27.1 gereği bu iki lineer birleşim de integrallenebilirdir. (Bu arada $f = f^+ - f^-$ ve $|f| = f^+ + f^-$ eşitliklerini de kaydedelim.) max ve min için de benzer özdeşlikler vardır:

$$\max(u,v) = \frac{u+v+|u-v|}{2}, \qquad \min(u,v) = \frac{u+v-|u-v|}{2}.$$

Sonuç 27.1 gereği $f-g$, Sonuç 27.2 gereği $|f-g|$, Teorem 27.1 gereği de $\max(f,g)$ ve $\min(f,g)$ integrallenebilirdir.
e) Gerektirmez. $[0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

alalım. Teorem 27.4'ni $c = \frac{1}{2}$ ile uygulayalım: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde $f \equiv 1$ olduğundan bu parçadaki integral $\frac{1}{2}$'dir; $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ üzerinde f, tek bir nokta ($x = \frac{1}{2}$) dışında -1'e eşit olduğundan (b) şıkkı gereği bu parçadaki integral $-\frac{1}{2}$'dir. Öyleyse $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$'dır. Buna karşın her x için $\big(f(x)\big)^2 = 1$ olduğundan

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx = \int_0^1 1\,dx = 1 \neq 0.$$

Sezgisel olarak: f'nin integralinin sıfır olması, pozitif ve negatif katkıların birbirini götürmesinden kaynaklanır; kare almak bütün katkıları pozitife çevirdiğinden bu iptal ortadan kalkar.
f) f, $[1,4]$ üzerinde integrallenebilir olduğundan Sonuç 27.4 gereği bütün kapalı alt aralıklarda da integrallenebilirdir; aşağıdaki integrallerin hepsi anlamlıdır. $2 \in (1,4)$ olduğundan Teorem 27.4 gereği

$$\int_1^4 f = \int_1^2 f + \int_2^4 f \Rightarrow 7 = 2 + \int_2^4 f \Rightarrow \int_2^4 f = 5.$$

Yönün ters çevrilmesi kuralı (Tanım 27.1) gereği $\int_4^2 f = -\int_2^4 f = -5$ ve $\int_4^1 f = -\int_1^4 f = -7$'dir; öyleyse $\int_2^4 f + \int_4^1 f = 5 + (-7) = -2$'dir.
Doğrulama: Önerme 27.1'i $a = 2, c = 4, b = 1$ ile ($b < a < c$ sıralamasıyla) uygularsak $\int_2^1 f = \int_2^4 f + \int_4^1 f$ olmalıdır. Sol taraf ters çevirme kuralıyla $\int_2^1 f = -\int_1^2 f = -2$'dir ve gerçekten $-2 = 5 + (-7)$ çıkmıştır. Yönlü integral tanımı, üç nokta hiç de "soldan sağa" sıralı olmadığı hâlde toplamsallığı korumuştur.
■

Bu bölümde integralin cebirsel iskeletini kurduk: lineerlik, bileşkeyle uyum, çarpım ve bölüm, aralık üzerinde toplamsallık ve yönlü integral. Sırada integralin **sıralamayla** ilişkisi var; büyük fonksiyonun integralinin de büyük olduğunu ve bu basit gözlemin ne kadar güçlü kestirimler ürettiğini göreceğiz: İntegralde Sıralama ve Temel Eşitsizlikler.

 CC BY-NC-SA 4.0

28. İntegralde Sıralama ve Temel Eşitsizlikler

İntegralin Cebirsel Özellikleri bölümünde integralin **cebirle** nasıl uyuştuğunu inceledik: toplama, sabitle çarpma, çarpım, bölüm ve aralıkların birleştirilmesi. Bütün o sonuçlar "=" işaretiyle çalışıyordu. Oysa reel sayılar kümesinin cebirsel yapısı kadar önemli bir de **sıralama** yapısı vardır ve analizde asıl iş çoğu zaman eşitliklerle değil, eşitsizliklerle görülür. Bir integralin tam değerini bulamadığımız durumda bile, onun hangi iki sayı arasında sıkıştığını söyleyebilmek çoğu zaman yeterlidir.

Bu bölümde integralin sıralamayla nasıl uyuştuğunu göreceğiz. Çıkış noktası son derece sezgisel bir gözlemdir: eğer f'nin grafiği her yerde g'nin grafiğinin altındaysa, f'nin altındaki alan da g'nin altındaki alandan büyük olamaz. Bu basit gözlemin ardından, alanı kaba dikdörtgenlerle sıkıştıran kestirim eşitsizlikleri, integraller için üçgen eşitsizliği ve — en incesi — "pozitif bir şeyin integrali gerçekten pozitiftir" diyen **kesin pozitiflik** teoremi gelecektir.

Kesin pozitiflik teoremi, ilk bakışta apaçık göründüğü hâlde ispatı özen isteyen bir sonuçtur; çünkü Riemann integrali tek tek noktaları görmez. Bir fonksiyonun bir noktada pozitif olması, integralinin pozitif olması için **yetmez**; fonksiyonun o noktanın çevresinde de pozitif kalması gerekir ve bunu garanti eden şey sürekliliktir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: $f \le g$ ise $\int f \le \int g$ olduğu; negatif olmayan bir fonksiyonun integralinin negatif olamayacağı; $m \le f \le M$ koşulunun integrali $m(b-a)$ ile $M(b-a)$ arasına hapsettiği; $\left|\int f\right| \le \int |f|$ üçgen eşitsizliği ve bu eşitsizliğin gizlediği bir tuzak; sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyonun integralinin ancak fonksiyon özdeş olarak sıfırsa sıfır olabileceği; süreklilik düşürdüğümüzde bu sonucun neden çöktüğü; ve bütün bunların hesaplanamayan integralleri kestirmekte nasıl kullanıldığı.

28.1 Hazırlık: Gösterim ve Yönelim

Bölümün ispatlarında Darboux toplamlarına sık sık döneceğiz; gösterimi bir kez daha netleştirelim.

i Gösterim hatırlatması

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ olan bir **bölünüş** (partition) olsun. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ve

$$m_k(f) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \qquad M_k(f) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

olmak üzere **alt toplam** ve **üst toplam** (lower and upper Darboux sum)

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta x_k, \qquad U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k$$

biçiminde tanımlanır. **Alt integral** (lower integral) ve **üst integral** (upper integral) ise bütün bölünüşler üzerinden

$$\underline{I}(f) = \sup_P L(P,f), \qquad \overline{I}(f) = \inf_P U(P,f)$$

sayılarıdır. Bu bölümde ve kitabın geri kalanında alt integrali $\underline{I}(f)$, üst integrali $\overline{I}(f)$ simgesiyle göstereceğiz. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde **Riemann integrallenebilir**dir ancak ve ancak $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ ise; bu ortak değer $\int_a^b f(x)\,dx$ olarak yazılır. Her P bölünüşü ve her sınırlı f için

$$L(P,f) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le U(P,f)$$

zinciri geçerlidir; aşağıdaki ispatlarda bu zinciri sık sık kullanacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci hazırlık, integralin **yönü** ile ilgilidir. Riemann integralini kurarken $a < b$ varsaydık; bölünüşler soldan sağa dizilir. Buna karşın hesaplarda uç noktaların çakıştığı ya da ters sırada geldiği ifadelerle karşılaşırız. Bunları anlamlı kılmak için önceki bölümde iki tanım yapmıştık (Tanım 27.1):

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \text{ve} \quad b < a \quad \text{iken} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Bu iki tanım, aralık toplamsallığı kuralının uç noktaların sırasından bağımsız olarak geçerli kalmasını sağlar (Önerme 27.1). Ancak sıralama söz konusu olduğunda büyük bir tuzak doğar.

⚠ Eşitsizlikler yön değiştirir

Bu bölümdeki bütün sıralama sonuçlarında $\boldsymbol{a \le b}$ **varsayılır.** Nedeni açıktır: ispatlarda $\Delta x_k > 0$ olduğunu kullanıyoruz, yani eşitsizlikleri **pozitif** sayılarla çarpıyoruz. Uç noktalar ters sıradaysa, yani $b < a$ ise, tanım gereği integral işaret değiştirir ve bütün eşitsizlikler de yön değiştirir. Örneğin $[0,1]$ üzerinde $0 \le x \le 1$ olduğundan

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \ge 0$$

olur; ama aynı fonksiyon için

$$\int_1^0 x\,dx = -\frac{1}{2} \le 0$$

olur. Yani "negatif olmayan bir fonksiyonun integrali negatif değildir" cümlesi ancak $a \le b$ iken doğrudur. Bir eşitsizlik kurarken uç noktaların sırasını kontrol etmek, integral hesabında en sık atlanan adımlardan biridir.

28.2 Sıralama Teoremi

Şimdi bölümün temel taşını koyalım. Sezgi şudur: f'nin grafiği g'nin grafiğinin altındaysa, her bir dikdörtgen şeridinde f'nin ulaştığı en yüksek değer g'nin ulaştığı en yüksek değeri geçemez; dolayısıyla f'nin üst toplamı g'nin üst toplamını geçemez. Üst toplamlar üzerinden infimum alındığında eşitsizlik korunur ve integrallere geçmiş oluruz.

Teorem 28.1 (Sıralama Teoremi). *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde $(a \le b)$ Riemann integrallenebilir olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için*

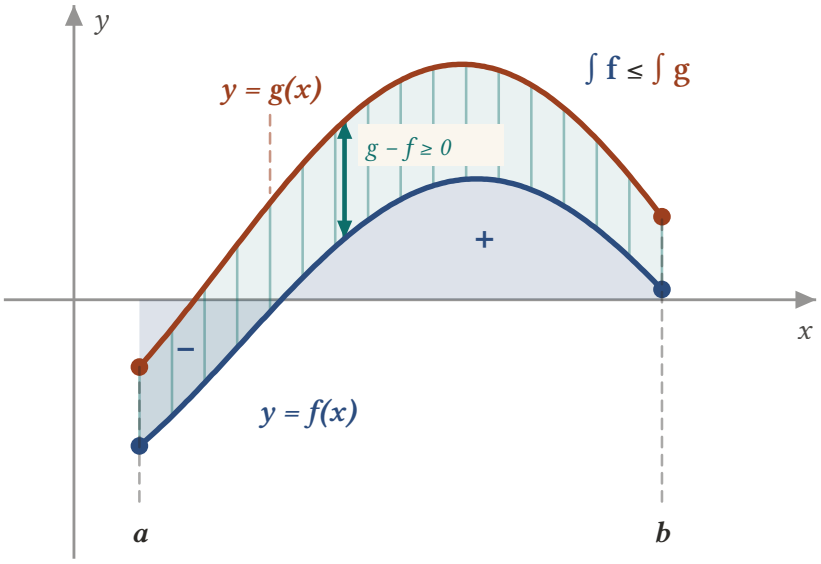
$$f(x) \le g(x)$$

ise, o hâlde

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 28.1: [a, b] üzerinde f ≤ g ise, f'nin grafiğiyle x ekseni arasında kalan işaretli alan (mavi bölge) g için hesaplanan alandan büyük olamaz; aradaki fark, her yerde negatif olmayan g − f fonksiyonunun taralı bölgesidir. Alan işaretlidir: eksenin altında kalan parça eksi sayılır, bu yüzden solda f'nin negatif katkısı g'ninkinden daha büyüktür. Darboux toplamlarıyla söylenirse her alt aralıkta $M_k(f) \le M_k(g)$ olduğundan $U(P, f) \le U(P, g)$ olur; infimum alındığında eşitsizlik integrallere geçer.

İspat.
$a = b$ hâlinde her iki integral de sıfırdır ve iddia eşitlik olarak sağlanır; bu yüzden $a < b$ varsayalım.
*$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $[a, b]$ aralığının **herhangi** bir bölünüşü olsun ve $1 \le k \le n$ için $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığına bakalım.*
Adım 1: Alt aralıklarda supremumların karşılaştırılması. *$x \in [x_{k-1}, x_k]$ keyfî olsun. Hipotez gereği*

$$f(x) \le g(x) \le \sup_{t \in [x_{k-1}, x_k]} g(t) = M_k(g).$$

Demek ki $M_k(g)$ sayısı, f'nin $[x_{k-1}, x_k]$ üzerindeki değerler kümesinin bir üst sınırıdır. Supremum, üst sınırların en küçüğü olduğundan (bkz. Analiz 1)

$$M_k(f) \le M_k(g)$$

elde ederiz.
Adım 2: Üst toplamlara geçiş. *$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizliği Δx_k ile çarpmak yönü bozmaz:*

$$M_k(f)\,\Delta x_k \le M_k(g)\,\Delta x_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Bu n eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k(g)\,\Delta x_k = U(P, g)$$

*buluruz. Burada P keyfî bir bölünüştü; dolayısıyla bu eşitsizlik $[a, b]$'nin **bütün** bölünüşleri için geçerlidir.*
Adım 3: Üst integrallere geçiş. *Üst integralin tanımı gereği her P bölünüşü için $\overline{I}(f) \le U(P, f)$'dir. Adım 2 ile birleştirirsek her P için*

$$\overline{I}(f) \le U(P, f) \le U(P, g)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

*olur. Yani $\overline{I}(f)$ sayısı, $\{U(P,g) : P \text{ bir bölünüş}\}$ kümesinin bir **alt sınırıdır.** İnfimum, alt sınırların en büyüğü olduğundan*

$$\overline{I}(f) \le \inf_P U(P,g) = \overline{I}(g)$$

sonucuna varırız.
***Adım 4: İntegrallere geçiş.** f ve g integrallenebilir olduklarından üst integralleri belirli integrallerine eşittir:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{I}(f) \le \overline{I}(g) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

İspat tamamlanmıştır.
***Not.** Aynı akıl yürütme alt toplamlarla da yapılabilir: $m_k(f) \le m_k(g)$ olduğundan $L(P,f) \le L(P,g)$ ve supremum alarak $\underline{I}(f) \le \underline{I}(g)$ bulunur. İntegrallenebilirlik varsayımı olmadan bile bu iki sonuç ayrı ayrı doğrudur; yani $f \le g$ ise alt integraller ve üst integraller **her zaman** aynı yönde sıralanır. İntegrallenebilirlik yalnızca son adımda, alt ve üst integrali tek bir sayıya indirgemek için kullanılmıştır.*
■

Teoremin en sık kullanılan özel hâli, f'nin yerine sabit sıfır fonksiyonunu koymakla elde edilir.

Sonuç 28.1 (Negatif Olmayan Fonksiyonun İntegrali). *f, $[a,b]$ üzerinde $(a \le b)$ integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \ge 0$ olsun. O hâlde*

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

olur.

İspat.
Sabit sıfır fonksiyonu $\mathbf{0}(x) = 0$ süreklidir, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2) ve her bölünüş için bütün Darboux toplamları sıfır olduğundan (Örnek 25.1)

$$\int_a^b 0\,dx = 0$$

olur. Hipotez gereği her $x \in [a,b]$ için $\mathbf{0}(x) = 0 \le f(x)$'tir. Teorem 28.1'yı $\mathbf{0} \le f$ ikilisine uygularsak

$$0 = \int_a^b 0\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

elde ederiz.
***Doğrudan ispat.** Aynı sonuç tek satırda da görülür: $f \ge 0$ olduğundan her bölünüşün her alt aralığında $m_k(f) \ge 0$'dır, dolayısıyla $L(P,f) \ge 0$'dır. Alt integral bu toplamların supremumu olduğundan*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}(f) = \sup_P L(P,f) \ge 0$$

olur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Sıralamayı türetmenin ikinci yolu

Teorem 28.1 ile Sonuç 28.1 arasındaki ilişki iki yönlüdür. Yukarıda teoremden sonuca gittik; ters yönde de gidilebilir: $h = g - f$ diyelim. Hipotez $f \le g$, tam olarak $h \ge 0$ demektir. f ve g integrallenebilir olduğundan farkları h de integrallenebilirdir (Sonuç 27.1) ve integralin lineerliği gereği (Teorem 27.1)

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx \ge 0$$

olur; bu da tam olarak $\int_a^b f \le \int_a^b g$ demektir. İkinci yol, sıralama özelliğinin aslında lineerlik ile "pozitiflik" özelliğinin birleşiminden ibaret olduğunu güzel gösterir.

28.3 Kaba Sınırlar: İntegrali İki Dikdörtgen Arasına Sıkıştırmak

Sıralama teoreminin en pratik yansıması, karşılaştırma fonksiyonu olarak sabitler seçildiğinde ortaya çıkar. Bir integralin değerini bilmesek bile, integrandın alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bilmek integrali iki dikdörtgenin alanı arasına hapsetmeye yeter.

Sonuç 28.2 (İntegral için Kaba Alt ve Üst Sınırlar). *f, $[a,b]$ üzerinde $(a \le b)$ integrallenebilir olsun ve $m, M \in \mathbb{R}$ sayıları her $x \in [a,b]$ için*

$$m \le f(x) \le M$$

koşulunu sağlasın. O hâlde

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

olur.

İspat.
Sabit fonksiyonlar süreklidir, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2). $c \in \mathbb{R}$ sabiti için, her bölünüşün her alt aralığında infimum ve supremum c'ye eşit olduğundan

$$L(P,c) = U(P,c) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = c(b-a)$$

olur; burada şu teleskopik toplamı kullandık:

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

Bütün Darboux toplamları aynı sayıya eşit olduğundan (Örnek 25.1)

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Şimdi hipotezi ikiye ayıralım. Her $x \in [a,b]$ için $m \le f(x)$ olduğundan, Teorem 28.1'yı sabit m fonksiyonu ile f ikilisine uygularsak

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

buluruz. Benzer biçimde her $x \in [a,b]$ için $f(x) \le M$ olduğundan, aynı teoremi f ile sabit M fonksiyonu ikilisine uygularsak

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

buluruz. İki eşitsizliği birleştirmek istenen sonucu verir.
■

Bu sonucun en doğal seçimi, f'nin gerçek infimum ve supremumudur: $m = \inf_{[a,b]} f$ ve $M = \sup_{[a,b]} f$ alınırsa elde edilen sınırlar mümkün olanların en dar olanıdır. f ayrıca sürekliyse, Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bu infimum ve supremum birer minimum ve maksimumdur; yani f bu değerleri gerçekten alır.

Ortalama değer sezgisi

Sonuç 28.2'nı $(b-a)$ ile bölersek ($a < b$ iken)

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

elde ederiz. Ortadaki niceliğe f'nin $[a,b]$ üzerindeki **ortalama değeri** denir; eşitsizlik, bir fonksiyonun ortalamasının en küçük ve en büyük değerleri arasında kalması gerektiğini söyler. f sürekliyse ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bu ortalama gerçekten f'nin bir değeridir; yani $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$ olan bir $c \in [a,b]$ vardır. Bu gözlem, ileride İntegral için Ortalama Değer Teoremleri bölümünde ayrıntılı biçimde işlenecektir.

28.4 İntegral için Üçgen Eşitsizliği

Reel sayılarda $|\,x+y\,| \le |\,x\,| + |\,y\,|$ üçgen eşitsizliğini (bkz. Analiz 1) biliyoruz; tümevarımla bu, sonlu toplamlara

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,|$$

biçiminde genişler. İntegral, Riemann toplamlarının bir limiti olduğuna göre benzer bir eşitsizliğin integraller için de geçerli olmasını bekleriz. Gerçekten öyledir; ve ispatta Riemann toplamlarına dönmeye bile gerek yoktur, sıralama teoremi tek başına yeter.
Ancak dikkat edilecek bir nokta var: eşitsizliğin sağ tarafında $\int_a^b |\,f\,|$ yazabilmek için önce $|\,f\,|$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu bilmeliyiz. Bunu ayrı bir adım olarak, integrallenebilirlik ölçütünü kullanarak göstereceğiz.

Teorem 28.2 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a \le b)$ Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde $|\,f\,|$ fonksiyonu da $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir ve*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$$

olur.

İspat.
Adım 1: Salınımların karşılaştırılması. *Önce şu genel gözlemi kaydedelim: h bir alt aralık J üzerinde sınırlıysa,*

$$\sup_J h - \inf_J h = \sup_{x,y\in J}\big(\,h(x) - h(y)\,\big)$$

*olur. Gerçekten, her $x, y \in J$ için $h(x) - h(y) \le \sup_J h - \inf_J h$'tir, yani sağ taraf bir üst sınırdır; öte yandan supremum ve infimum özellikleri (bkz. Analiz 1, İnfimum için Epsilon Ölçütü) gereği verilen her $\varepsilon > 0$ için $h(x) > \sup_J h - \varepsilon/2$ ve $h(y) < \inf_J h + \varepsilon/2$ olan $x, y \in J$ bulunabilir; bu ikili için $h(x) - h(y) > \sup_J h - \inf_J h - \varepsilon$'dur. Demek ki sağ taraf, üst sınırların en küçüğüdür. Bu farka h'nin J üzerindeki **salınımı** (oscillation) denir.*

Şimdi $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ herhangi bir bölünüş, $1 \leq k \leq n$ ve $J = [x_{k-1}, x_k]$ olsun; $x, y \in J$ alalım (f integrallenebilir olduğundan sınırlıdır, dolayısıyla J üzerindeki bütün infimum ve supremumlar vardır). Ters üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği

$$\big|\, |\, f(x)\, | - |\, f(y)\, |\, \big| \leq |\, f(x) - f(y)\, |,$$

dolayısıyla

$$|\, f(x)\, | - |\, f(y)\, | \leq |\, f(x) - f(y)\, | \leq M_k(f) - m_k(f)$$

olur (son adımda $f(x) \leq M_k(f)$ ve $f(y) \geq m_k(f)$ ile bunların yer değiştirmiş hâli kullanıldı; her iki durumda da fark $M_k(f) - m_k(f)$'yi aşamaz). Sol taraf üzerinden $x, y \in J$ supremumunu alırsak, yukarıdaki salınım gözlemi gereği

$$M_k(|\, f\, |) - m_k(|\, f\, |) \leq M_k(f) - m_k(f), \qquad k = 1, ..., n.$$

*Bu eşitsizlik, $[a, b]$'nin **her** bölünüşünün her alt aralığı için geçerlidir.*
Adım 2: İntegrallenebilirlik. *$\varepsilon > 0$ verilsin. f integrallenebilir olduğundan, Riemann ölçütü (Teorem 25.1) gereği öyle bir P bölünüşü vardır ki*

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

olur. Adım 1'deki eşitsizliği $\Delta x_k > 0$ ile çarpıp toplarsak

$$U(P, |\, f\, |) - L(P, |\, f\, |) = \sum_{k=1}^{n} \big(\, M_k(|\, f\, |) - m_k(|\, f\, |)\, \big)\, \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \big(\, M_k(f) - m_k(f)\, \big)\, \Delta x_k = U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

elde ederiz. Verilen her $\varepsilon > 0$ için böyle bir bölünüş bulunduğundan, yine Teorem 25.1 gereği $|\, f\, |$ integrallenebilirdir.
Adım 3: Eşitsizlik. *Mutlak değerin temel özelliği (bkz. Analiz 1) gereği her $x \in [a, b]$ için*

$$-|\, f(x)\, | \leq f(x) \leq |\, f(x)\, |$$

olur. Buradaki üç fonksiyon da integrallenebilirdir; Teorem 28.1'yı önce sol, sonra sağ eşitsizliğe uygularsak

$$-\int_a^b |\, f(x)\, |\, dx = \int_a^b \big(-|\, f(x)\, |\big)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |\, f(x)\, |\, dx$$

buluruz (ortadaki adımda lineerlik, yani $\int(-h) = -\int h$ kullanıldı; Teorem 27.1). $A = \int_a^b f$ ve $B = \int_a^b |\, f\, |$ dersek elimizdeki bilgi $-B \leq A \leq B$'dir; bu ise tam olarak $|\, A\, | \leq B$ demektir (bkz. Analiz 1). Yani

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\, f(x)\, |\, dx.$$

Not. *Adım 2'nin sonucu, bileşke teoreminden de okunabilir: mutlak değer fonksiyonu sürekli olduğundan $|\, f\, | = |\cdot| \circ f$ bileşkesi integrallenebilirdir (Sonuç 27.2). Yukarıdaki doğrudan hesabı yine de tercih ettik; çünkü $|\, f\, |$'nin salınımının f'nin salınımını aşamayacağını açıkça göstererek eşitsizliğin nereden geldiğini görünür kılıyor.*
■

Bu eşitsizliği Sonuç 28.2 ile birleştirmek çok kullanışlı bir kestirim verir: $|\, f(x)\, | \leq M$ ise

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\, f(x)\, |\, dx \leq M(b - a).$$

Analizde bir integralin "küçük" olduğunu göstermek istediğimizde neredeyse her zaman bu zincir kullanılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Karşıtı doğru değildir

Teorem 28.2 tek yönlüdür: f integrallenebilirse $|f|$ de integrallenebilirdir. **Tersi doğru değildir.** $|f|$ fonksiyonunun integrallenebilir olması, f'nin integrallenebilir olmasını gerektirmez. Bunun nedeni, mutlak değer almanın bilgi yok etmesidir: işareti silerek son derece düzensiz bir fonksiyonu bir anda sabit bir fonksiyona dönüştürebiliriz. Aşağıdaki örnek, bunun tam olarak nasıl olduğunu gösteriyor.
Bu yüzden teoremin ifadesinde "$|f|$ de integrallenebilirdir" cümlesi bir süs değil, ispatlanması gereken gerçek bir adımdır ve yukarıda Adım 2 olarak ispatlanmıştır.

Örnek 28.1 (İşaret Değiştiren Dirichlet Fonksiyonu). $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir **olmadığını**, buna karşın $|f|$'nin integrallenebilir olduğunu ve $\int_0^1 |f(x)|\,dx = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: f integrallenebilir değildir. $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $[0,1]$ aralığının herhangi bir bölünüşü olsun. Her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı, uzunluğu pozitif olan bir aralıktır; rasyonel sayıların yoğunluğu (bkz. Analiz 1) gereği içinde en az bir rasyonel sayı, irrasyonel sayıların yoğunluğu (bkz. Analiz 1) gereği de en az bir irrasyonel sayı bulunur. Rasyonel noktalarda $f = 1$, irrasyonel noktalarda $f = -1$ olduğundan, her k için

$$M_k(f) = 1, \qquad m_k(f) = -1$$

olur. Buradan

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1 \cdot (1-0) = 1, \qquad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} (-1)\,\Delta x_k = -1 \cdot (1-0) = -1$$

elde ederiz. Bu değerler bölünüşten bağımsız olduğundan

$$\overline{I}(f) = \inf_P U(P,f) = 1, \qquad \underline{I}(f) = \sup_P L(P,f) = -1$$

olur. $\underline{I}(f) = -1 \neq 1 = \overline{I}(f)$ olduğundan f, $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir değildir. (Genel bir $[a,b]$ aralığında aynı hesap $\overline{I}(f) = b - a$ ve $\underline{I}(f) = -(b-a)$ verir; $a < b$ olduğu sürece bu iki sayı yine farklıdır.)
Adım 2: $|f|$ integrallenebilirdir. Mutlak değer alalım:

$$|f(x)| = \begin{cases} |1| = 1, & x \in \mathbb{Q} \\ |-1| = 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Yani $|f|$, $[0,1]$ üzerinde **sabit 1 fonksiyonudur.** Sabit fonksiyonlar integrallenebilirdir (Örnek 25.1) ve

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1 \cdot (1-0) = 1$$

olur.
Sonuç. $|f|$ integrallenebilirken f integrallenebilir değildir; yani Teorem 28.2'nin karşıtı yanlıştır. Bu örnekte f hiçbir noktada sürekli değildir: her $x_0 \in [0,1]$ noktasının her komşuluğunda hem rasyonel hem irrasyonel sayılar bulunduğundan f orada 1 ile -1 arasında zıplar. Mutlak değer almak bu zıplamayı tümüyle siler ve geriye pürüzsüz bir sabit kalır.
Dikkat edilecek bir ayrıntı daha var: bu örnekte $\left|\int_0^1 f\right|$ ifadesi **tanımsızdır**, çünkü $\int_0^1 f$ diye bir sayı yoktur. Yani üçgen eşitsizliğinin sol tarafı bile yazılamaz. Teoremin hipotezinde f'nin integrallenebilirliğini istememizin nedeni budur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

28.5 Kesin Pozitiflik

Buraya kadar hep "$\leq$" ile çalıştık. Şimdi doğal soru şu: eşitsizlik ne zaman **kesin** olur? $f \geq 0$ ve $f \not\equiv 0$ olması $\int_a^b f > 0$ demek için yeter mi?
Yanıt: **hayır.** Riemann integrali tek tek noktaları göremez. $[0,1]$ üzerinde yalnızca $x = \frac{1}{2}$ noktasında 1, başka her yerde 0 değerini alan fonksiyon negatif değildir ve özdeş olarak sıfır da değildir; ama integrali 0'dır (birazdan hesaplayacağız). Demek ki tek bir noktada pozitif olmak yetmiyor; fonksiyonun o noktanın **çevresinde** de pozitif kalması gerekiyor.
İşte bu "çevresinde de pozitif kalma" özelliğini bize hediye eden şey **süreklilik**tir. Bir noktada sürekli olan ve orada pozitif değer alan bir fonksiyon, o noktanın bir komşuluğunda pozitif kalır (bkz. Analiz 1). O komşuluk pozitif uzunlukta bir aralık içerdiğinden, altında gerçek bir alan bulunur ve bu alan integrali sıfırdan uzaklaştırır. Aşağıdaki teorem bu fikri tam bir ispata dönüştürüyor.

Teorem 28.3 (Kesin Pozitiflik Teoremi). *f, $[a,b]$ üzerinde $(a<b)$ integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Eğer f, bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında sürekli ve $f(x_0) > 0$ ise, o hâlde*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

olur. Burada x_0'ın $[a,b]$'nin bir iç noktası ya da uç noktası olması fark etmez; uç noktalarda süreklilikten tek yönlü süreklilik anlaşılır.

İspat.
Adım 1: Süreklilikten yerel bir alt sınır. *$\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ diyelim; hipotez gereği $\varepsilon > 0$'dır. f, x_0 noktasında sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) bu ε'a karşılık öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $x \in [a,b]$ ve $|\,x - x_0\,| < \delta$ olduğunda*

$$|\,f(x) - f(x_0)\,| < \frac{f(x_0)}{2}$$

olur. Mutlak değeri açarsak

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2},$$

yani soldaki eşitsizlikten

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \qquad (\text{her } \; x \in [a,b],\, |\,x - x_0\,| < \delta \;\; \text{için})$$

elde ederiz. Kısaca f, x_0'ın δ yarıçaplı komşuluğunun $[a,b]$ ile kesişiminde $\dfrac{f(x_0)}{2}$ düzeyinin üstünde kalır.
Adım 2: İçinde çalışacağımız kapalı alt aralık. *Yukarıdaki eşitsizlik **açık** bir komşulukta geçerli; oysa integral almak için kapalı bir alt aralığa ihtiyacımız var. Bu yüzden yarıçapı biraz küçültelim:*

$$\eta = \min\left\{\frac{\delta}{2},\, \frac{b-a}{2}\right\} > 0$$

diyelim ve

$$\alpha = \max\{a,\, x_0 - \eta\}, \qquad \beta = \min\{b,\, x_0 + \eta\}$$

*alalım. Tanımdan doğrudan $a \leq \alpha \leq x_0 \leq \beta \leq b$ olduğu görülür, yani $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$'dir. Ayrıca her $x \in [\alpha,\beta]$ için $|\,x - x_0\,| \leq \eta \leq \dfrac{\delta}{2} < \delta$ olduğundan, Adım 1'deki eşitsizlik $[\alpha,\beta]$'nin **tamamında** geçerlidir:*

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}, \qquad x \in [\alpha,\beta].$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Geriye bu aralığın uzunluğunun pozitif olduğunu göstermek kalıyor. Üç durumu ayrı ayrı inceleyelim.
Durum 1 (iç nokta, tam komşuluk sığıyor). $x_0 - \eta \geq a$ *ve* $x_0 + \eta \leq b$ *ise* $\alpha = x_0 - \eta$, $\beta = x_0 + \eta$ *ve* $\beta - \alpha = 2\eta$*'dır.*
Durum 2 (sol uca yakın; $x_0 = a$ hâli dâhil). $x_0 - \eta < a$ *olsun, yani* $\alpha = a$. *Bu durumda* $x_0 < a + \eta$*'dır.* $\eta \leq \dfrac{b-a}{2}$ *olduğundan* $a + 2\eta \leq b$, *dolayısıyla* $x_0 + \eta < a + 2\eta \leq b$ *olur; demek ki* $\beta = x_0 + \eta$*'dır. Buradan*

$$\beta - \alpha = x_0 + \eta - a \geq \eta$$

çıkar (çünkü $x_0 \geq a$*).*
Durum 3 (sağ uca yakın; $x_0 = b$ hâli dâhil). $x_0 + \eta > b$ *olsun, yani* $\beta = b$. *Bakışımlı hesapla* $\alpha = x_0 - \eta$ *ve* $\beta - \alpha = b - x_0 + \eta \geq \eta$ *olur.*
Bu üç durum bütün olasılıkları kapsar (Durum 2 ile Durum 3 aynı anda gerçekleşemez: aksi hâlde $b - a < 2\eta \leq b - a$ *gibi bir çelişki doğardı). Her hâlde*

$$\beta - \alpha \geq \eta > 0$$

olduğunu gösterdik.
Adım 3: İntegrali üç parçaya ayırma. f, $[a, b]$ *üzerinde integrallenebilir olduğundan her alt aralığında da integrallenebilirdir (Sonuç 27.4) ve aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) gereği*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx$$

yazılabilir. ($\alpha = a$ *ise ilk terim* $\int_a^a f = 0$, $\beta = b$ *ise son terim* $\int_b^b f = 0$*'dır; bölümün başında yaptığımız tanım tam da burada işe yarıyor.)*
Adım 4: Üç parçanın kestirimi. *Hipotez gereği* $f \geq 0$ *olduğundan, Sonuç 28.1* $[a, \alpha]$ *ve* $[\beta, b]$ *aralıklarına uygulanınca*

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx \geq 0, \qquad \int_\beta^b f(x)\,dx \geq 0$$

verir. Ortadaki terim için Adım 2'deki alt sınırı kullanalım: $[\alpha, \beta]$ *üzerinde* $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$ *olduğundan Teorem 28.1 gereği*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \frac{f(x_0)}{2}\,(\beta - \alpha) \geq \frac{f(x_0)}{2}\,\eta.$$

Adım 5: Sonuç. *Üç kestirimi Adım 3'teki eşitlikte birleştirirsek*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 + \frac{\eta\, f(x_0)}{2} + 0 = \frac{\eta\, f(x_0)}{2}.$$

$\eta > 0$ *ve* $f(x_0) > 0$ *olduğundan sağ taraf kesin pozitiftir. Öyleyse*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{\eta\, f(x_0)}{2} > 0$$

olur; ispat tamamlanmıştır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i İspatın anahtarı nerede?

İspatın bütün ağırlığı Adım 1 ile Adım 2'dedir: süreklilik, "bir noktadaki pozitiflik" bilgisini "pozitif uzunlukta bir aralıkta pozitiflik" bilgisine çevirir. Riemann integrali uzunluğu sıfır olan kümeleri görmediğinden, tek bir noktadaki bilgi integral için hiçbir şey ifade etmez; ama pozitif uzunlukta bir aralıktaki bilgi, altında $\frac{\eta\, f(x_0)}{2}$ alanlı bir dikdörtgen barındırır ve integrali sıfırdan koparır. Elde edilen alt sınırın hem $f(x_0)$ hem de η ile birlikte küçüldüğüne dikkat edin: fonksiyon x_0 civarında ne kadar hızlı değişiyorsa dikdörtgen o kadar incelir; ama eni hiçbir zaman sıfır olmaz.

Teoremin en çok kullanılan biçimi, onun karşıt tersidir: integral sıfırsa, fonksiyonun hiçbir noktada pozitif olamayacağını söyler.

Sonuç 28.3 (Sıfır İntegral Özdeşlik Sonucu). *f, $[a,b]$ üzerinde $(a<b)$ **sürekli** ve her $x\in[a,b]$ için $f(x)\geq 0$ olsun. Eğer*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

ise, o hâlde her $x\in[a,b]$ için $f(x)=0$'dır; yani f özdeş olarak sıfırdır.

> ***İspat.***
> *Olmayana ergi yöntemiyle ilerleyelim. f'nin özdeş olarak sıfır **olmadığını** varsayalım. O hâlde $f(x_0)\neq 0$ olan bir $x_0\in[a,b]$ vardır. Hipotez gereği $f(x_0)\geq 0$ olduğundan bu ancak*
>
> $$f(x_0) > 0$$
>
> *demektir.*
> *f, $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan özel olarak x_0 noktasında da süreklidir. Ayrıca sürekli fonksiyonlar kapalı ve sınırlı aralıklarda integrallenebilir olduğundan (Teorem 25.2) f integrallenebilirdir ve $f\geq 0$'dır. Böylece Teorem 28.3'in bütün hipotezleri sağlanır ve teorem*
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$
>
> *sonucunu verir.*
> *Oysa hipotezimiz $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ idi. Bir sayı hem sıfıra eşit hem sıfırdan büyük olamaz; çelişki.*
> *Demek ki başlangıçtaki varsayım yanlıştır: $f(x_0)>0$ olan bir x_0 noktası yoktur. $f\geq 0$ olduğu da bilindiğine göre her $x\in[a,b]$ için $f(x)=0$'dır.*
> ■

Bu sonuç, ilerideki bölümlerde şaşırtıcı derecede sık kullanılacak. Sezgisel okuması şudur: **sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyonun altında hiç alan yoksa, fonksiyonun kendisi yoktur.** Fonksiyonun bir yerde küçücük bir tümseği olsa bile, süreklilik o tümseği pozitif uzunlukta bir aralığa yayacak ve integral bunu görecektir.

28.6 Sürekliliğin Vazgeçilmezliği

Sonuç 28.3'da süreklilik hipotezi bir süs değildir; onu düşürdüğümüzde sonuç anında çöker. Nedeni Riemann integralinin doğasındadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Süreklilik düşürülemez

Riemann integrali, bir fonksiyonun **sonlu sayıda** noktadaki değerine duyarsızdır. Daha kesin bir ifadeyle (Önerme 25.3): f ile g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde yalnızca sonlu sayıda noktada farklı değerler alıyorsa, biri integrallenebilirse öteki de integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

olur. Bunun nedeni açıktır: $h = f - g$ farkı yalnızca sonlu sayıda noktada sıfırdan farklıdır; normu küçük bir bölünüş alındığında bu noktaları içeren alt aralıkların toplam uzunluğu istendiği kadar küçültülebilir ve h'nin Darboux toplamları sıfıra sıkışır, yani $\int_a^b h = 0$ olur.
Buradan doğrudan şu çıkar: **sürekli olmayan bir fonksiyon, özdeş olarak sıfır olmadan da sıfır integrale sahip olabilir.** Özdeş sıfır fonksiyonunu alıp değerini tek bir noktada değiştirmek yeter. Aşağıdaki örnek bunu somutlaştırıyor.

Örnek 28.2 (Sürekli Olmayan Bir Karşı Örnek). $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = \frac{1}{2} \\ 0, x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $f \geq 0$ olduğunu, f'nin integrallenebilir olduğunu ve $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ olduğunu gösteriniz; buna karşın f'nin özdeş sıfır fonksiyonu olmadığını gözlemleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: Negatiflik yok. Tanımdan her $x \in [0,1]$ için $f(x) \in \{0,1\}$ olduğundan $f(x) \geq 0$'dır.
Adım 2: Alt toplamlar. $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ herhangi bir bölünüş olsun. Her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı, uzunluğu pozitif olduğundan $\frac{1}{2}$'den farklı en az bir nokta içerir; o noktada $f = 0$'dır. f negatif değer almadığından

$$m_k(f) = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = 0, \qquad k = 1, \ldots, n$$

olur. Dolayısıyla her bölünüş için

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0, \qquad \text{yani} \qquad \underline{I}(f) = \sup_P L(P,f) = 0.$$

Adım 3: Üst toplamlar. $M_k(f)$, ancak $\frac{1}{2} \in [x_{k-1}, x_k]$ olan alt aralıklarda 1'e eşittir; öteki alt aralıklarda 0'dır. $\frac{1}{2}$ noktası, bölünüşün en çok **iki** alt aralığında bulunabilir (bölünüş noktalarından biriyse tam iki, değilse tek bir alt aralıkta). Öyleyse

$$U(P,f) = \sum_{k\,:\,1/2 \in [x_{k-1},x_k]} 1 \cdot \Delta x_k \leq 2 \parallel P \parallel$$

olur; burada $\parallel P \parallel = \max_k \Delta x_k$ bölünüşün normudur.
Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. n eşit parçalı bölünüş P_n'yi alalım; bunun normu $\parallel P_n \parallel = \dfrac{1}{n}$'dir. Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $\dfrac{2}{n} < \varepsilon$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Bu bölünüş için

$$0 \leq U(P_n, f) \leq \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Üst integral bütün üst toplamların infimumu olduğundan $0 \leq \overline{I}(f) \leq U(P_n,f) < \varepsilon$'dur ve bu her $\varepsilon > 0$ için geçerli olduğundan

$$\overline{I}(f) = 0.$$

Adım 4: Sonuç. $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = 0$ olduğundan f, $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Aynı hesap, aradaki fark için de bir kanıt sağlar: bu bölünüşler için $U(P_n, f) - L(P_n, f) \leq \dfrac{2}{n} < \varepsilon$ olduğundan Riemann ölçütü (Teorem 25.1) de doğrudan sağlanmıştır.
Adım 5: Sonuç neden çöktü? f negatif değildir ve integrali sıfırdır; buna karşın $\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \neq 0$ olduğundan f özdeş sıfır fonksiyonu **değildir.** Yani Sonuç 28.3'un sonucu burada geçerli değildir.
Nedeni tek bir yerdedir: f, $x = \frac{1}{2}$ noktasında sürekli değildir. Gerçekten $x \to \frac{1}{2}$ iken $f(x) \to 0$ olur (fonksiyon delinmiş komşulukta özdeş sıfırdır), ama $\left(\frac{1}{2}\right) = 1$'dir; bu, kaldırılabilir türden bir süreksizliktir. Teorem 28.3 uygulanamaz, çünkü teoremin "x_0 noktasında süreklilik" hipotezi $x_0 = \frac{1}{2}$ için sağlanmaz. Fonksiyonun pozitifliği, çevresine yayılamadan tek bir noktada hapsolmuş durumdadır ve Riemann integrali böyle bir hapsi görmez.
■

Aynı fikrin daha uç bir hâli

Örnekteki fonksiyonu sonlu sayıda noktada pozitif olacak biçimde genişletmek de sonucu değiştirmez. Hatta sayılabilir sonsuz çoklukta noktada pozitif olup integrali yine sıfır olan fonksiyonlar vardır: $[0,1]$ üzerinde $x = \dfrac{1}{n}$ noktalarında 1, başka her yerde 0 olan fonksiyon böyledir. Riemann integrali çerçevesinde bize düşen, süreklilik hipotezini asla düşürmemektir.

28.7 Sıralamada Eşitlik Hâli

Kesin pozitiflik teoremi elimizdeyken, sıralama teoremindeki eşitsizliğin ne zaman kesin, ne zaman eşitlik olduğunu tam olarak belirleyebiliriz. Önce kesin sıralama sonucunu yazalım.

Sonuç 28.4 (Kesin Sıralama). *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde $(a<b)$ integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Eğer bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında f ile g'nin ikisi de sürekli ve*

$$f(x_0) < g(x_0)$$

ise, o hâlde

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

olur.

İspat.
$h = g - f$ diyelim. İki integrallenebilir fonksiyonun farkı integrallenebilir olduğundan (Sonuç 27.1) h, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir. Hipotezden:

- *Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ olduğundan $h(x) \geq 0$'dır.*
- *f ve g, x_0'da sürekli olduğundan sürekli fonksiyonların farkı da x_0'da süreklidir (bkz. Analiz 1); yani h, x_0'da süreklidir.*
- *$h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) > 0$'dır.*

Bunlar tam olarak Teorem 28.3'in hipotezleridir. Teorem gereği

$$\int_a^b h(x)\,dx > 0.$$

Lineerlikle (Teorem 27.1) sol tarafı açarsak

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx > 0,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yani $\int_a^b f < \int_a^b g$ *elde edilir.*
■

Şimdi bunun karşıt tersini alalım: sürekli fonksiyonlarda sıralama eşitsizliğinin eşitliğe dönüşmesi, ancak fonksiyonların çakışmasıyla mümkündür.

Önerme 28.1 (Sıralamada Eşitlik Ancak Fonksiyonlar Çakışırsa Olur). *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde $(a<b)$ **sürekli** ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \le g(x)$ olsun. Eğer*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

ise, o hâlde her $x \in [a,b]$ için $f(x) = g(x)$'tir.

İspat.
$h = g - f$ diyelim. Sürekli fonksiyonların farkı sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) h, $[a,b]$ üzerinde süreklidir; dolayısıyla integrallenebilirdir. Hipotez $f \le g$ tam olarak

$$h(x) \ge 0, \qquad x \in [a,b]$$

demektir. Ayrıca lineerlik gereği (Teorem 27.1)

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Böylece h sürekli, negatif olmayan ve integrali sıfır olan bir fonksiyondur. Sonuç 28.3 gereği h özdeş olarak sıfırdır: her $x \in [a,b]$ için $h(x) = 0$, yani

$$f(x) = g(x).$$

İkinci ispat (kesin sıralamayla). *Aynı sonuca Sonuç 28.4 ile de varılır: bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında $f(x_0) < g(x_0)$ olsaydı, f ve g orada sürekli olduklarından o sonuç $\int_a^b f < \int_a^b g$ verirdi; bu ise integrallerin eşitliğiyle çelişir. Öyleyse hiçbir noktada $f(x_0) < g(x_0)$ olamaz; $f \le g$ ile birleştirince $f \equiv g$ çıkar.*
■

Son olarak, aynı düşüncenin çok kullanılan bir başka biçimini verelim. Bir sürekli fonksiyon, bütün sürekli fonksiyonlara "dik" ise sıfır olmak zorundadır. Bu, fonksiyon uzaylarında iç çarpım kavramının temel taşıdır ve ispatı bir püf noktasına dayanır: karşı fonksiyon olarak fonksiyonun kendisi seçilir.

Önerme 28.2 (Bütün Sürekli Fonksiyonlara Dik Olan Fonksiyon Sıfırdır). *f, $[a,b]$ üzerinde $(a<b)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde sürekli **her** g fonksiyonu için*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

oluyorsa, o hâlde f özdeş olarak sıfırdır: her $x \in [a,b]$ için $f(x) = 0$.

İspat.
Hipotez "her sürekli g için" dediğine göre, g'yi istediğimiz gibi seçmekte serbestiz. En verimli seçim

$$g = f$$

olanıdır; f sürekli olduğundan bu seçim serbesttir. Hipotezi bu g ile yazarsak

$$\int_a^b f(x)\,f(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx = 0$$

elde ederiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi $\varphi(x) = \big(f(x)\big)^2$ fonksiyonuna bakalım. İki sürekli fonksiyonun çarpımı sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) φ, $[a,b]$ üzerinde süreklidir. Ayrıca bir reel sayının karesi negatif olamayacağından her $x \in [a,b]$ için

$$\varphi(x) = \big(f(x)\big)^2 \geq 0$$

olur. Son olarak yukarıda $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ olduğunu gösterdik.
Demek ki φ, Sonuç 28.3'un bütün hipotezlerini sağlar: sürekli, negatif değil ve integrali sıfır. O hâlde φ özdeş olarak sıfırdır; yani her $x \in [a,b]$ için

$$\big(f(x)\big)^2 = 0.$$

Bir reel sayının karesi ancak sayının kendisi sıfırken sıfırdır; öyleyse her $x \in [a,b]$ için $f(x) = 0$'dır.
■

i Neden bu kadar önemli?

Önerme 28.2, "integral altında bilgi kaybolmaz" diyen sonuçların prototipidir. Bir fizik ya da diferansiyel denklem probleminde f hakkında doğrudan bilgi edinemeyiz; edindiğimiz bilgi $\int fg$ biçimindeki ağırlıklı ortalamalardır. Bu önerme, yeterince çok ağırlık fonksiyonu için ortalamayı bilmenin fonksiyonun kendisini bilmeye denk olduğunu söyler; aynı fikir Fourier serilerinde ve varyasyonlar hesabının temel lemmasında karşımıza çıkacaktır.
Dikkat: burada da süreklilik vazgeçilmezdir. Örnek 28.2'deki fonksiyon için $\int_0^1 fg = 0$ her sürekli g için sağlanır (çarpım da yalnızca tek bir noktada sıfırdan farklıdır), ama f özdeş sıfır değildir.

28.8 İntegral Kestirimleri

Şimdi bu bölümdeki araçları asıl işlerinde kullanalım. Analizde karşılaşılan integrallerin çoğunun ilkel fonksiyonu temel fonksiyonlarla yazılamaz; buna karşın integralin değerini yeterince dar bir aralığa hapsetmek çoğu zaman mümkündür ve çoğu zaman da yeterlidir. Yöntem hep aynıdır: **integrandı, integrali kolayca hesaplanan iki fonksiyon arasına sıkıştırmak ve Teorem 28.1'yı uygulamak.**

Örnek 28.3 (Rasyonel Bir İntegrandın Kestirimi).

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$$

integrali için önce kaba, sonra daha ince alt ve üst sınırlar bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Kaba sınırlar. $x \in [0,1]$ olsun. $0 \leq x \leq 1$ olduğundan $0 \leq x^4 \leq 1$'dir, dolayısıyla

$$1 \leq 1 + x^4 \leq 2.$$

Pozitif sayılarda ters alma sıralamayı ters çevirdiğinden

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1, \qquad x \in [0,1].$$

İntegrand sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir. Sonuç 28.2'nı $m = \frac{1}{2}$, $M = 1$ ve $b - a = 1$ ile uygularsak

$$\frac{1}{2} \leq I \leq 1.$$

Bu kestirim doğrudur ama epey gevşektir: genişliği $\frac{1}{2}$'dir.
Adım 2: İnce ayar için iki cebirsel özdeşlik. $t \geq 0$ olsun. Doğrudan hesapla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$1-t+\frac{t^2}{1+t}=\frac{(1-t)(1+t)+t^2}{1+t}=\frac{1-t^2+t^2}{1+t}=\frac{1}{1+t}$$

ve

$$1-t+t^2-\frac{t^3}{1+t}=\frac{(1-t+t^2)(1+t)-t^3}{1+t}=\frac{1+t^3-t^3}{1+t}=\frac{1}{1+t}$$

olur. $t\geq 0$ iken $\dfrac{t^2}{1+t}\geq 0$ ve $\dfrac{t^3}{1+t}\geq 0$ olduğundan bu iki özdeşlikten

$$1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2,\qquad t\geq 0$$

çıkar.

Adım 3: Eşitsizliği integrale taşıma. $x\in[0,1]$ için $t=x^4\geq 0$ alalım:

$$1-x^4\leq\frac{1}{1+x^4}\leq 1-x^4+x^8.$$

Üç fonksiyon da $[0,1]$ üzerinde süreklidir. Teorem 28.1'yı iki kez uygularsak

$$\int_0^1\left(1-x^4\right)dx\leq I\leq\int_0^1\left(1-x^4+x^8\right)dx$$

olur. Kenardaki integraller polinom integralleridir:

$$\int_0^1\left(1-x^4\right)dx=\left[x-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5},$$

$$\int_0^1\left(1-x^4+x^8\right)dx=\left[x-\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}\right]_0^1=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{45-9+5}{45}=\frac{41}{45}.$$

Böylece

$$\frac{4}{5}\leq I\leq\frac{41}{45},\qquad\text{yani}\qquad 0{,}8000\leq I\leq 0{,}9112.$$

Kestirimin genişliği $\dfrac{41}{45}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{41-36}{45}=\dfrac{5}{45}=\dfrac{1}{9}\approx 0{,}111$ oldu; Adım 1'dekinin dörtte birinden az.

Adım 4: Daha da ince ayar. Aynı özdeşlik zinciri istenildiği kadar uzatılabilir. Adım 2'dekilerle aynı biçimde paydaları eşitleyerek her $t\geq 0$ için

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\frac{t^4}{1+t},\qquad\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+t^4-\frac{t^5}{1+t}$$

olduğu görülür; ilkinde eklenen, ikincisinde çıkarılan terim negatif olmadığından

$$1-t+t^2-t^3\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2-t^3+t^4,\qquad t\geq 0$$

olur. $t=x^4$ koyup integral alırsak

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}=\frac{488}{585}\approx 0{,}8342\leq I\leq\frac{488}{585}+\frac{1}{17}\approx 0{,}8930$$

bulunur. Sınırlar her adımda birbirine yaklaşır ve ortak limitleri I'nın kendisidir; sayısal değeri $I\approx 0{,}8670$'tir.

Yorum. Buradaki yöntem, bir integrali hesaplamadan onun hakkında ne kadar çok şey söylenebileceğinin güzel bir örneğidir. Tek yaptığımız, integrandı polinomlarla kuşatıp Teorem 28.1'yı uygulamaktı; polinomların integrallerini ise hesaplamayı biliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Şimdi de analizin en ünlü "ilkel fonksiyonu temel fonksiyonlarla yazılamayan" integrandını ele alalım.

Örnek 28.4 (Gauss İntegralinin Kestirimi).

$$J = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

integrali için alt ve üst sınırlar bulunuz. (e^{-x^2} fonksiyonunun temel fonksiyonlarla yazılabilen bir ilkel fonksiyonu yoktur; dolayısıyla kestirim burada bir seçenek değil, zorunluluktur.)

Çözüm.
Adım 1: Kaba sınırlar. $x \in [0,1]$ için $0 \le x^2 \le 1$, dolayısıyla $-1 \le -x^2 \le 0$'dır. Üstel fonksiyon artan olduğundan

$$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0 = 1, \qquad x \in [0,1].$$

Sonuç 28.2 ile ($b-a=1$)

$$\frac{1}{e} \le J \le 1, \qquad \text{yani} \qquad 0{,}3679 \le J \le 1.$$

Çok gevşek bir kestirim; iyileştirelim.
Adım 2: Üstel fonksiyon için temel eşitsizlik. Her $u \in \mathbb{R}$ için

$$e^u \ge 1 + u$$

olduğunu gösterelim. $\psi(u) = e^u - 1 - u$ diyelim. ψ her yerde türevlenebilirdir ve $\psi'(u) = e^u - 1$'dir. $u < 0$ için $e^u < 1$, yani $\psi' < 0$; $u > 0$ için $e^u > 1$, yani $\psi' > 0$'dır. Monotonluk testi (Sonuç 8.3) gereği ψ, $(-\infty, 0]$ üzerinde azalan, $[0, \infty)$ üzerinde artandır; dolayısıyla en küçük değerini $u = 0$'da alır ve $\psi(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$'dır. Öyleyse her u için $\psi(u) \ge 0$, yani $e^u \ge 1 + u$'dur.
$u = -x^2$ alırsak

$$e^{-x^2} \ge 1 - x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Adım 3: Alt sınır. Teorem 28.1 gereği

$$J \ge \int_0^1 \left(\,1 - x^2\,\right) dx = \left[\,x - \frac{x^3}{3}\,\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667.$$

Adım 4: Üst sınır (Taylor kalanıyla). $u \ge 0$ olsun ve $\varphi(u) = e^{-u}$ fonksiyonunu 0 civarında Taylor formülüyle yazalım. $\varphi'(u) = -e^{-u}$, $\varphi''(u) = e^{-u}$, $\varphi'''(u) = -e^{-u}$ olduğundan Lagrange kalanlı Taylor formülü (Teorem 12.1) gereği, 0 ile u arasında bir ξ için

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{e^{-\xi}}{6}\,u^3$$

olur. $u \ge 0$ ve $e^{-\xi} > 0$ olduğundan çıkarılan terim negatif değildir; dolayısıyla

$$e^{-u} \le 1 - u + \frac{u^2}{2}, \qquad u \ge 0.$$

$u = x^2 \ge 0$ alırsak

$$e^{-x^2} \le 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

elde ederiz. Sıralama teoremiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$J \le \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{23}{30} \approx 0{,}7667.$$

Böylece

$$\frac{2}{3} \le J \le \frac{23}{30}, \qquad \text{yani} \qquad 0{,}6667 \le J \le 0{,}7667.$$

Adım 5: Bir adım daha. Taylor formülünü birer mertebe daha uzatalım. $\varphi(u) = e^{-u}$ fonksiyonunun n -inci türevi $(-1)^n e^{-u}$ olduğundan, dördüncü ve beşinci mertebeden Lagrange kalanlı Taylor formülleri (Teorem 12.1), 0 ile u arasındaki uygun ξ değerleri için

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{e^{-\xi}}{24}\,u^4, \qquad e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} - \frac{e^{-\xi}}{120}\,u^5$$

biçimindedir. $u \ge 0$ iken birinci formülde eklenen kalan negatif değildir, ikincisinde ise negatif olmayan bir terim çıkarılmaktadır; öyleyse

$$1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} \le e^{-u} \le 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24}, \qquad u \ge 0$$

olur. $u = x^2$ koyup integral alalım:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \approx 0{,}7429 \le J \le \frac{26}{35} + \frac{1}{216} \approx 0{,}7475.$$

Artık J'yi genişliği tam olarak $\dfrac{1}{216} \approx 0{,}0046$ olan bir aralığa hapsetmiş olduk; aralığın orta noktasını alırsak $J \approx 0{,}745$ değerini $\dfrac{1}{432} \approx 0{,}0023$'ten küçük bir yanılgıyla elde ederiz. (Gerçek değer $J = 0{,}746824\ldots$'tür.)

Adım 6: Bir başka üst sınır. Adım 2'deki eşitsizliği bu kez $u = x^2$ ile kullanırsak $e^{x^2} \ge 1 + x^2 > 0$ olur; her iki tarafın tersini alıp sıralama teoremini uygularsak

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad J \le \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$

Bu, Adım 4'te bulduğumuz $\dfrac{23}{30} \approx 0{,}7667$ sınırından gevşektir; ama tek satırda elde edilmesi ve kapalı bir biçimde (π cinsinden) yazılması onu yine de kullanışlı kılar. Kestirimde hangi karşılaştırma fonksiyonunun seçileceği, ne kadar kesinlik istendiğine bağlıdır.

■

Kestirim yapmanın üç adımı

Bir integrali kestirirken izlenecek yol hemen her zaman şudur:

- İntegrandın işaretini ve değişim aralığını belirle; gerekirse aralığı işaret değiştirme noktalarında parçala.
- İntegrandı, integrali kolay hesaplanan iki fonksiyon arasına sıkıştır (sabitler, Taylor polinomları, $\dfrac{1}{1+x^2}$ gibi standart integrandlar).
- Teorem 28.1'yı uygula ve kenar integralleri hesapla.

İntegralin mutlak değerini kestirmek gerekiyorsa araya Teorem 28.2'ni sokmayı unutma: $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |\,f\,| \le M(b-a)$.

 CC BY-NC-SA 4.0

28.9 Alıştırmalar

Alıştırma 28.1 (Sıralama ve Eşitsizlikler Üzerine).

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integrali için önce Sonuç 28.2 ile kaba, sonra $1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2$ eşitsizliğiyle daha ince alt ve üst sınırlar bulunuz. Bulduğunuz sınırları integralin tam değeriyle karşılaştırınız.

b) $f, [a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $\mid f(x) \mid \le M$ olsun. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b-a)$ olduğunu gösteriniz. Eşitliğin sağlandığı bir örnek ve eşitsizliğin kesin olduğu bir örnek veriniz.

c) f ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ olsun. $f(c) = g(c)$ olan bir $c \in [a,b]$ bulunduğunu gösteriniz.

d) f, $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun ve $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b \mid f(x) \mid dx$ olsun. f'nin $[a,b]$ üzerinde işaret değiştirmediğini, yani ya her yerde $f \ge 0$ ya da her yerde $f \le 0$ olduğunu gösteriniz.

e) $f, [a,b]$ üzerinde sürekli olsun ve $g(a) = g(b) = 0$ koşulunu sağlayan **her** sürekli g fonksiyonu için $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ olsun. f'nin özdeş olarak sıfır olduğunu gösteriniz.

f) $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ olsun. $\dfrac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$ olduğunu gösteriniz ve buradan $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ sonucunu çıkarınız.

Çözüm.
a) $x \in [0,1]$ için $0 \le x^2 \le 1$, dolayısıyla $1 \le 1+x^2 \le 2$ ve

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1.$$

Sonuç 28.2 ile $(b-a=1)$ doğrudan

$$\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \le 1$$

bulunur.
İnce ayar için $t = x^2 \ge 0$ alalım. Örnek 28.3'nin Adım 2'sinde kanıtladığımız eşitsizlik

$$1 - x^2 \le \frac{1}{1+x^2} \le 1 - x^2 + x^4, \qquad x \in [0,1]$$

verir. Teorem 28.1 ile

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \le \int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4\right) dx.$$

Kenar integraller:

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad \int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4\right) dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-5+3}{15} = \frac{13}{15}.$$

Böylece

$$\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \le \frac{13}{15}, \qquad \text{yani} \qquad 0{,}6667 \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \le 0{,}8667.$$

Bu integralin tam değeri $\left[\arctan x\right]_0^1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$'tür ve gerçekten $0{,}6667 \le 0{,}7854 \le 0{,}8667$ sağlanır. Kaba kestirim $[0{,}5;\,1]$ aralığını, ince kestirim ise $[0{,}6667;\,0{,}8667]$ aralığını vermiştir; genişlik $0{,}5$'ten $0{,}2$'ye inmiştir.
b) $\mid f(x) \mid \le M$ hipotezi, $\mid f \mid$ fonksiyonunun sabit M fonksiyonuyla sınırlandığını söyler. f integrallenebilir olduğundan Teorem 28.2 gereği $\mid f \mid$ de integrallenebilirdir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx.$$

Şimdi $0 \le |\,f(x)\,| \le M$ olduğundan Sonuç 28.2 ile

$$\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \le M(b-a)$$

olur. İki eşitsizliği zincirlersek

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \le M(b-a).$$

Eşitlik örneği. $[0,1]$ üzerinde $f(x)=M$ sabit fonksiyonunu alalım ($M>0$). O hâlde $|\,f(x)\,|=M$, $\left|\int_0^1 M\,dx\right| = M = M(1-0)$ olur; zincirdeki her iki eşitsizlik de eşitliğe dönüşür.
Kesin eşitsizlik örneği. $[-1,1]$ üzerinde $f(x)=x$ alalım; $M=1$ ve $b-a=2$'dir. Tek fonksiyon olduğundan (ya da doğrudan hesapla)

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$$

olur, yani $\left|\int_{-1}^{1} f\right| = 0$. Öte yandan

$$\int_{-1}^{1} |\,x\,|\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

ve $M(b-a) = 1\cdot 2 = 2$'dir. Böylece $0<1<2$; her iki eşitsizlik de kesindir. İlk eşitsizliğin kesin olmasının nedeni f'nin işaret değiştirmesi, ikincisinin kesin olmasının nedeni $|\,f\,|$'nin M değerine yalnızca uç noktalarda ulaşmasıdır.
c) $h=f-g$ diyelim. Sürekli fonksiyonların farkı sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) h, $[a,b]$ üzerinde süreklidir; dolayısıyla integrallenebilirdir ve lineerlik gereği (Teorem 27.1)

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = 0.$$

İstediğimiz, $h(c)=0$ olan bir c bulmaktır. Olmayana ergi ile ilerleyelim: her $x\in[a,b]$ için $h(x)\neq 0$ olduğunu varsayalım.
h sürekli ve $[a,b]$ üzerinde hiç sıfırlanmıyorsa, h işaret değiştiremez. Gerçekten, $h(u)<0<h(v)$ olan $u,v\in[a,b]$ bulunsaydı, Bolzano teoremi (bkz. Analiz 1) gereği u ile v arasında h'yi sıfırlayan bir nokta bulunurdu; bu varsayımla çelişir. Demek ki ya her x için $h(x)>0$ ya da her x için $h(x)<0$'dır.
Birinci hâlde $h\ge 0$'dır, h herhangi bir $x_0\in[a,b]$ noktasında süreklidir ve $h(x_0)>0$'dır; Teorem 28.3 gereği $\int_a^b h>0$ olur. Bu, $\int_a^b h = 0$ ile çelişir.
İkinci hâlde $-h$ fonksiyonuna aynı akıl yürütmeyi uygularız: $-h\ge 0$, sürekli ve $-h(x_0)>0$ olduğundan $\int_a^b(-h)>0$, yani $\int_a^b h<0$ olur; bu da yine çelişkidir.
Her iki hâlde de çelişki doğduğuna göre varsayım yanlıştır: $h(c)=0$, yani $f(c)=g(c)$ olan bir $c\in[a,b]$ vardır.
d) Önce $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ hâlini ele alalım. Bu durumda

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b f(x)\,dx$$

olduğundan hipotez

$$\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{yani} \qquad \int_a^b \Big(\,|\,f(x)\,| - f(x)\,\Big)dx = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

hâline gelir (son adımda lineerlik kullanıldı). $\varphi(x) = |\,f(x)\,| - f(x)$ diyelim.

- f sürekli olduğundan $|\,f\,|$ de süreklidir (mutlak değer fonksiyonu sürekli olup sürekli fonksiyonla bileşkesi süreklidir; bkz. Mutlak Değer ve Kök Fonksiyonları Süreklidir). Dolayısıyla φ süreklidir.
- Her x için $f(x) \le |\,f(x)\,|$ olduğundan $\varphi(x) \ge 0$'dır.
- Yukarıda $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ olduğunu gösterdik.

Sonuç 28.3 gereği $\varphi \equiv 0$, yani her $x \in [a,b]$ için $|\,f(x)\,| = f(x)$'tir. Bu ise tam olarak $f(x) \ge 0$ demektir.
Şimdi $\int_a^b f(x)\,dx < 0$ hâlini ele alalım ve $F = -f$ diyelim. F süreklidir, $\int_a^b F = -\int_a^b f > 0$'dır ve $|\,F\,| = |\,f\,|$ olduğundan

$$\left|\int_a^b F(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx = \int_a^b |\,F(x)\,|\,dx$$

sağlanır. Yukarıdaki birinci hâli F'ye uygularsak $F \ge 0$, yani $f \le 0$ çıkar.
Demek ki her iki durumda da f işaret değiştirmez.
e) Püf nokta, g'yi f'den üretmek ama uç noktalarda sıfırlanmasını sağlamaktır. Şu seçimi yapalım:

$$g(x) = f(x)\,(x-a)\,(b-x), \qquad x \in [a,b].$$

f sürekli, $(x-a)$ ve $(b-x)$ polinom olduklarından sürekli; sürekli fonksiyonların çarpımı sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) g süreklidir. Ayrıca $g(a) = f(a)\cdot 0\cdot(b-a) = 0$ ve $g(b) = f(b)\,(b-a)\cdot 0 = 0$'dır; yani g, hipotezdeki koşulları sağlar.
Hipotezi bu g ile yazarsak

$$0 = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b \big(\,f(x)\big)^2 (x-a)(b-x)\,dx.$$

$\varphi(x) = \big(\,f(x)\big)^2(x-a)(b-x)$ diyelim. φ süreklidir. Ayrıca $x \in [a,b]$ için $x-a \ge 0$ ve $b-x \ge 0$ olduğundan, kare terimiyle birlikte $\varphi(x) \ge 0$'dır. İntegrali de sıfır olduğuna göre Sonuç 28.3 gereği $\varphi \equiv 0$'dır:

$$\big(\,f(x)\big)^2(x-a)(b-x) = 0, \qquad x \in [a,b].$$

$x \in (a,b)$ ise $(x-a)(b-x) > 0$ olduğundan $\big(\,f(x)\big)^2 = 0$, yani $f(x) = 0$'dır. Geriye yalnızca uç noktalar kalıyor; orada süreklilik yardımımıza koşar:

$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} 0 = 0, \qquad f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x) = 0.$$

Demek ki f, $[a,b]$'nin tamamında özdeş olarak sıfırdır.
f) $x \in [0,1]$ olsun. $0 \le x \le 1$ olduğundan $1 \le 1+x \le 2$'dir. Ayrıca $x^n \ge 0$'dır. Negatif olmayan bir sayıyı daha büyük bir sayıya bölmek sonucu büyütmeyeceğinden

$$\frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{1+x} \le \frac{x^n}{1} = x^n, \qquad x \in [0,1].$$

Üç fonksiyon da $[0,1]$ üzerinde süreklidir. Teorem 28.1'yı iki kez uygularsak

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \le I_n \le \int_0^1 x^n\,dx.$$

Kenar integraller kuvvet fonksiyonunun integralidir:

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}, \qquad \int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Böylece istenen kestirim elde edilir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}.$$

Limit için sıkıştırma teoremini (bkz. Analiz 1) kullanalım. $\frac{1}{n+1} \to 0$ olduğundan (bkz. Analiz 1) hem $\frac{1}{2(n+1)} \to 0$ hem de $\frac{1}{n+1} \to 0$'dır; arada sıkışan I_n dizisi de sıfıra yakınsar:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0.$$

Sonucun sezgisel açıklaması şudur: n büyüdükçe x^n fonksiyonu $[0,1)$ üzerinde sıfıra çöker ve yalnızca $x=1$ noktasının çok küçük bir komşuluğunda kayda değer değerler alır; o komşuluğun uzunluğu da sıfıra gittiğinden integral kaybolur.

■

Bu bölümde integralin sıralamayla nasıl uyuştuğunu gördük: sıralamayı koruduğunu, mutlak değerle üçgen eşitsizliği biçiminde uyuştuğunu ve sürekli fonksiyonlar söz konusu olduğunda "sıfır integral" ile "sıfır fonksiyon" arasında tam bir denklik kurduğunu öğrendik. Böylece belirli integralin kuruluşunu ve temel özelliklerini tamamlamış olduk; ama hâlâ elimizde onu hesaplamanın pratik bir yolu yok — bugüne kadar her integrali Darboux toplamlarına dönerek hesapladık. Sıradaki bölümde türev ile integral arasındaki derin bağı kurup bu sorunu bir çırpıda çözeceğiz: Analizin Temel Teoremleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

29. Analizin Temel Teoremleri

Buraya kadar iki büyük kavramı birbirinden tümüyle bağımsız kurduk. Bir yanda **türev** vardı: bir eğriye çizilen teğetin eğimini, yani anlık değişim hızını ölçen bir limit işlemi (Tanım 2.2). Öte yanda **integral** vardı: bir eğrinin altında kalan alanı alttan ve üstten kuşatan Darboux toplamlarının ortak sınırı (Tanım 25.1). İki kavramın tanımlarında ortak hiçbir şey yok gibidir; biri farkların oranını inceler, öteki çarpımların toplamını.

Matematik tarihi de uzun süre bu iki kavramı ayrı ayrı ele aldı. Alan hesapları Arşimet'e kadar geri gider ve tüketme yöntemiyle yapılırdı; teğet çizme problemi ise Fermat, Descartes ve Barrow'un elinde bambaşka tekniklerle çözülüyordu. Birbirinden bağımsız gelişen bu iki damarı 17. yüzyılın ikinci yarısında Newton ve Leibniz birleştirdi ve şaşırtıcı olan şuydu: **alan problemiyle teğet problemi birbirinin tersidir.** Bir fonksiyonun altındaki alanı üst sınırın fonksiyonu olarak yazarsanız, elde ettiğiniz fonksiyonun türevi başladığınız fonksiyondur; tersine, bir fonksiyonun türevini integrallerseniz fonksiyonun uçlardaki değerlerinin farkına dönersiniz. Bu keşif, alanı hesaplamak için sonsuz toplamlarla boğuşmak yerine bir ilkel fonksiyon (Tanım 18.1) aramanın yettiğini gösterir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: **birinci temel teorem** (Newton–Leibniz formülü), yani integrallenebilir bir fonksiyonun bir ilkeli biliniyorsa belirli integralin iki değerin farkına indirgenmesi; bu teoremin iki hipotezinin — integrallenebilirlik ve ilkelin varlığı — birbirinden **tümüyle bağımsız** olduğu ve hiçbirinin ötekini gerektirmediği; bunu gösteren iki karşı örnek; **integral fonksiyonu** $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ kavramı; **ikinci temel teorem**, yani F'nin her zaman Lipschitz koşulunu sağladığı ve f'nin sürekli olduğu noktalarda $F' = f$ olduğu; bunun en önemli sonucu olarak **her sürekli fonksiyonun bir ilkelinin bulunduğu**; ve son olarak türev ile integralin hangi anlamda birbirinin ters işlemi olduğu.

Bölümü, hipotezleri denetlemeden Newton–Leibniz formülünü uygulamanın nasıl saçma sonuçlar doğurduğunu gösteren örneklerle kapatacağız. Bu son kısım süs değildir: temel teoremler o kadar kullanışlıdır ki, uygulanabilirlik koşullarını yoklamayı unutmak sık yapılan bir hatadır.

29.1 Birinci Temel Teorem: Newton–Leibniz Formülü

Şimdiye kadar bir belirli integrali hesaplamanın tek yolu vardı: bölünüşler seçmek, alt ve üst toplamları yazmak (Tanım 24.3) ve bunların ortak limitini bulmak. Bu yol, $\int_0^1 x^2\,dx$ gibi masum görünen bir integralde bile kare toplamı formülüne başvurmayı gerektirir; $\int_0^\pi \sin x\,dx$ için trigonometrik toplam kimlikleri gerekir. Yöntem işler ama ölçeklenmez.

Birinci temel teorem bu zahmeti tümüyle ortadan kaldırır. Söylediği şey kısaca şudur: f integrallenebiliyorsa ve f'nin türevi olduğu bir F fonksiyonu bulabiliyorsak, bütün bölünüş hesaplarını unutup F'nin uçlardaki iki değerini çıkarmak yeterlidir.

Teoremin ispatındaki fikri önce sözle anlatalım. $[a,b]$'yi küçük parçalara bölelim. Her küçük parçada F'nin uçlardaki değerlerinin farkı, ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) sayesinde "türev çarpı uzunluk" biçiminde yazılabilir; ama $F' = f$ olduğundan bu tam olarak bir dikdörtgen alanıdır. Bütün parçalarda toplayınca soldaki fark toplamı teleskopik olarak sadeleşir ve geriye $F(b) - F(a)$ kalır; sağda ise f'nin bir Riemann toplamı (Tanım 26.1) durur. Yani $F(b) - F(a)$ sayısı, f'nin **her** bölünüşe karşılık gelen bir Riemann toplamına eşittir. Bir sayı bütün Riemann toplamlarının arasına sıkışıyorsa, integralden başka bir şey olamaz.

Teorem 29.1 (Birinci Temel Teorem (Newton–Leibniz Formülü)). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. Ayrıca $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde f'nin bir ilkeli olsun; yani F, $[a,b]$'nin her noktasında türevlenebilir olsun (uç noktalarda tek yönlü türevler kastedilir) ve her $x \in [a,b]$ için*

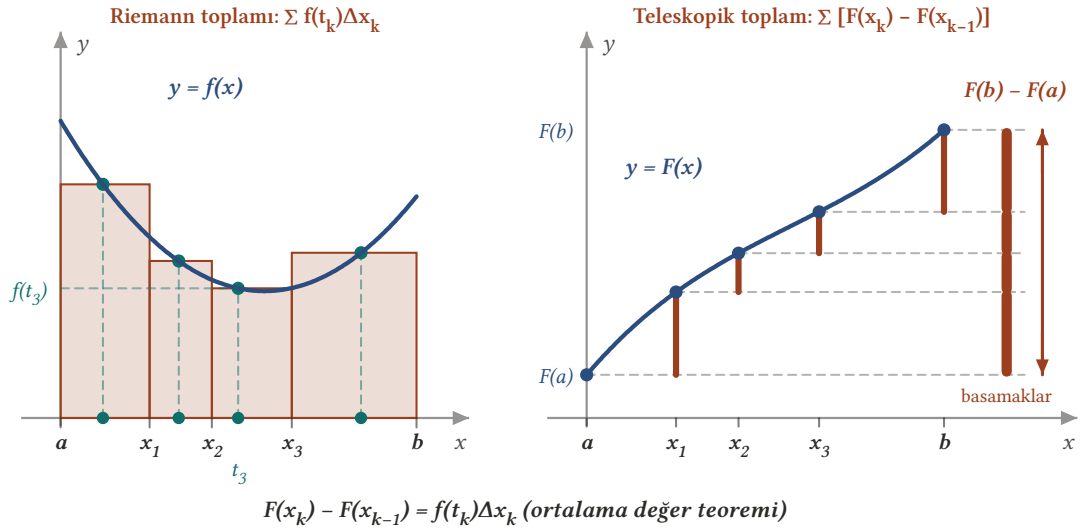
$$F'(x) = f(x)$$

sağlansın. O hâlde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur.



Şekil 29.1: Birinci temel teoremin ispatı bu resimdedir. Solda [a, b]*'nin bir bölünüşü ve her alt aralıkta yüksekliği* $f(t_k)$ *olan dikdörtgenler duruyor; sağda aynı bölünüş üzerinde* F*'nin grafiği ve her alt aralıkta* F*'nin yükselişini gösteren basamaklar var. Ortalama değer teoremi bir basamağın yüksekliğini karşısındaki dikdörtgenin alanına eşitler:* $F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(t_k)\Delta x_k$*. Basamaklar üst üste konduğunda ara yükseklikler birbirini götürür ve geriye yalnızca* F(b) – F(a) *kalır; yani bu sayı,* f*'nin o bölünüşe karşılık gelen bir Riemann toplamına eşittir.*

İspat.
Adım 1: Kurulum. *f integrallenebilir olduğundan sınırlıdır (Teorem 26.3); dolayısıyla her bölünüş için alt ve üst Darboux toplamları tanımlıdır. $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ olmak üzere $[a,b]$'nin **keyfî** bir bölünüşü olsun (Tanım 24.1). Her $k \in \{1, \ldots, n\}$ için $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ yazalım.*
Adım 2: Her alt aralıkta ortalama değer teoremi. *F, $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında da türevlenebilirdir; özel olarak (x_{k-1}, x_k) üzerinde türevlenebilir, $[x_{k-1}, x_k]$ üzerinde ise süreklidir (Teorem 3.1; a ve b uç noktalarında tek yönlü türevin varlığı o yandan sürekliliği verir). Ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) gereği öyle bir $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır ki*

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(t_k)\,(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)\,\Delta x_k.$$

*Burada son eşitlikte $F' = f$ hipotezini kullandık. Dikkat edilecek nokta: t_k noktalarını biz seçmiyoruz, ortalama değer teoremi veriyor; ispatın bütün gücü bu noktaların **var olmasından** geliyor.*
Adım 3: Teleskopik toplam. *Yukarıdaki eşitlikleri $k = 1$'den $k = n$'e kadar toplayalım. Sol taraf teleskopiktir:*

$$\sum_{k=1}^{n} \big[\, F(x_k) - F(x_{k-1}) \,\big] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Gerçekten de ardışık terimlerde $-F(x_1)$ ile $+F(x_1)$, $-F(x_2)$ ile $+F(x_2)$, … çiftleri birbirini götürür; ayakta yalnızca en baştaki $-F(x_0)$ ile en sondaki $+F(x_n)$ kalır. Buna göre

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k.$$

*Sağ taraf, P bölünüşüne ve t_k ara noktalarına karşılık gelen bir **Riemann toplamıdır** (Tanım 26.1); bunu $S(P, f, t)$ ile gösterelim.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 4: Riemann toplamı Darboux toplamları arasındadır. $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ *ve* $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ *olsun.* $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *olduğundan*

$$m_k \leq f(t_k) \leq M_k$$

olur. Her iki tarafı $\Delta x_k > 0$ *ile çarpıp* k *üzerinden toplarsak*

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = U(P,f)$$

elde ederiz. Adım 3 ile birleştirince

$$L(P,f) \leq F(b) - F(a) \leq U(P,f)$$

bulunur.

Adım 5: Bölünüş üzerinden sup ve inf alma. *Son eşitsizlikte* P ***keyfî*** *bir bölünüştü ve ortadaki* $F(b) - F(a)$ *sayısı* P*'den bağımsızdır. Öyleyse* $F(b) - F(a)$*, bütün alt toplamların bir üst sınırı ve bütün üst toplamların bir alt sınırıdır. Supremum ve infimum tanımları gereği (bkz. Analiz 1)*

$$\underline{I}(f) = \sup_P L(P,f) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_P U(P,f) = \overline{I}(f)$$

olur. f *integrallenebilir olduğundan alt ve üst integral eşittir ve ortak değerleri* $\int_a^b f(x)\,dx$*'tir. Böylece*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(x)\,dx,$$

yani

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

sonucuna varırız.

■

i İspatın ikinci bitirişi

Adım 5 yerine Riemann toplamlarının yakınsaklığını da kullanabilirdik. Adım 3, $F(b) - F(a)$ sayısının her P bölünüşü için uygun ara noktalarla oluşturulmuş bir Riemann toplamına eşit olduğunu söylüyordu. Riemann ve Darboux tanımlarının denkliği (Teorem 26.2) gereği $\| P \| \to 0$ iken bütün Riemann toplamları $\int_a^b f$'ye yakınsar; normu sıfıra giden bir bölünüş dizisinde limite geçince, sabit bir sayı olan $F(b) - F(a)$ ancak kendisine yakınsayabileceğinden yine aynı sonuç çıkar. Yukarıdaki bitiriş limit kavramına hiç başvurmadığı için biraz daha ekonomiktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Uç noktalardaki hipotez gevşetilebilir

İspata bir kez daha bakalım: ortalama değer teoremini her $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında uygularken F'den istediğimiz şey, alt aralığın **kapalısında sürekli**, **açığında türevlenebilir** olmasıydı; t_k ara noktaları da hep açık aralıklardan geldiği için $F'(t_k) = f(t_k)$ eşitliğini yalnızca (a,b)'nin noktalarında kullandık. Uç noktalardaki türevler hesaba hiç girmedi. Dolayısıyla teorem şu daha zayıf hipotezlerle de doğrudur:

> f, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir; F, $[a,b]$ üzerinde **sürekli** ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olup her $x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ ise, yine $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ olur.

Gevşetme boş bir kazanç değildir. $[0,1]$ üzerinde

$$F(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. $\mid F(x) \mid \le x$ olduğundan F, 0'da süreklidir; $(0,1)$ üzerinde ise $F'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$'tir ve bu türev $\sqrt{2}$ ile sınırlıdır. Buna karşılık 0 noktasındaki fark oranı $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \sin(\ln x)$ olup $x \to 0^+$ iken salınır ve bir limiti yoktur: F, 0'da türevlenebilir **değildir**. Yine de F' sınırlıdır ve (değerini 0'da nasıl tanımlarsak tanımlayalım) yalnız bir noktada süreksiz olduğundan $[0,1]$ üzerinde integrallenebilirdir (Önerme 25.1); gevşetilmiş biçim

$$\int_0^1 \big[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\big]\,dx = F(1) - F(0) = 1 \cdot \sin 0 - 0 = 0$$

sonucunu verir. Vazgeçilemeyecek olan, f'nin integrallenebilirliği ile F'nin **kapalı** aralıktaki sürekliliğidir.

Teoremin pratikte kullanılışı için standart bir gösterim vardır:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a), \qquad \text{ya da} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Bir ayrıntıya dikkat edelim. Belirsiz integralde (Tanım 18.2) ilkeller bir sabitle belirlenir; F bir ilkelse $F + C$ de ilkeldir (Teorem 18.2). Belirli integralde bu sabiti taşımaya gerek yoktur, çünkü

$$\big(\,F(b) + C\,\big) - \big(\,F(a) + C\,\big) = F(b) - F(a)$$

olur ve sabit sadeleşir. Yani hangi ilkeli seçtiğimiz sonucu değiştirmez.

Örnek 29.1 (Newton–Leibniz Formülüyle Dört Hesap). Aşağıdaki belirli integralleri birinci temel teoremi kullanarak hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_1^2 (x+5)\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$

d) $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$

Çözüm.
Dört integralde de integrand kapalı aralıkta süreklidir, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2); ayrıca her birinin ilkeli temel fonksiyonlarla yazılabilmektedir. Böylece Teorem 29.1'in iki hipotezi de sağlanır.
a) $f(x) = x + 5$ için ilkel arıyoruz. Kuvvet kuralını tersine çevirip terim terim integralleyelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x, \qquad F'(x) = x + 5 = f(x). \checkmark$$

Şimdi uç değerleri hesaplayalım:

$$F(2) = \frac{2^2}{2} + 5 \cdot 2 = 2 + 10 = 12, \qquad F(1) = \frac{1^2}{2} + 5 \cdot 1 = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}.$$

Öyleyse

$$\int_1^2 (x+5)\,dx = F(2) - F(1) = 12 - \frac{11}{2} = \frac{24}{2} - \frac{11}{2} = \frac{13}{2}.$$

Sonucu bir kez de geometriyle denetleyelim: integrand $[1,2]$ üzerinde pozitiftir ve grafiği bir doğru parçasıdır; eğrinin altında kalan bölge, paralel kenarları $f(1) = 6$ ile $f(2) = 7$, yüksekliği 1 olan bir yamuktur. Alanı $\dfrac{6+7}{2} \cdot 1 = \dfrac{13}{2}$'dir. ✓

b) $F(x) = -\cos x$ alırsak $F'(x) = \sin x$ olur. Buna göre

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

Yani sinüs eğrisinin bir yarım dalgasının altında kalan alan tam olarak 2'dir. Bu, Riemann toplamlarıyla hesaplanması hiç de kolay olmayan bir sayının bir satırda çıkmasıdır.

c) $(0,\infty)$ üzerinde $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ olduğundan $F(x) = \ln x$, $\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $[1,e]$ üzerinde bir ilkelidir. Buna göre

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Bu eşitlik, e sayısının analizdeki en doğal tanımlarından birini verir: e, $\dfrac{1}{x}$ eğrisinin altında 1'den başlayarak tam 1 birim alan biriktirdiğimiz noktadır.

d) $n \geq 0$ tam sayı olsun. $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ alırsak $F'(x) = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$ olur ($n+1 \neq 0$ olduğu için bölme meşrudur). Böylece

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Özel olarak $n = 0$ için $\int_0^1 1\,dx = 1$, $n = 1$ için $\int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$, $n = 2$ için $\int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{1}{3}$ bulunur. Son integral doğrudan Darboux toplamlarıyla hesaplansaydı $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ formülüne ihtiyaç duyulurdu; temel teoremin kazandırdığı kolaylık burada çıplak gözle görülür.

■

29.2 İki Hipotez de Gereklidir

Teorem 29.1 iki şey istiyordu: f **integrallenebilir** olacak ve f'nin bir **ilkeli** olacak. Doğal bir soru şudur: bu ikisinden biri ötekini gerektirir mi? Belki de her integrallenebilir fonksiyonun ilkeli vardır; ya da belki ilkeli olan her fonksiyon integrallenebilirdir. Eğer öyle olsaydı, teoremin hipotezlerinden biri gereksiz olurdu.

Yanıt her iki yönde de olumsuzdur: **iki koşul birbirinden mantıksal olarak bağımsızdır.** Bunu iki karşı örnekle göreceğiz. Birinci örnek, ilkeli olan ama integrallenebilir olmayan bir fonksiyon verir; ikincisi, integrallenebilir olan ama hiçbir ilkeli bulunmayan bir fonksiyon. İki örnek de kendi başına öğreticidir, çünkü Riemann integralinin ve türev fonksiyonunun sınırlarını gösterirler.

Önce birincisine bakalım. Bir fonksiyonun **her noktada türevlenebilir** olması, türevinin uslu durmasını gerektirmez; türev süreksiz olabileceği gibi (bkz. Teorem 10.1 çevresindeki tartışma) sınırsız da olabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Riemann integralinin ilk kuralı ise integrallenebilir her fonksiyonun sınırlı olmasıdır (Teorem 26.3). Bu iki gözlem çarpışınca aranan karşı örnek doğar.

Örnek 29.2 (Sınırsız Türev: İlkeli Var, İntegrali Yok). $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin $[0,1]$'in her noktasında türevlenebilir olduğunu, ama f' fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde sınırsız, dolayısıyla Riemann integrallenebilir **olmadığını** gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: $x \neq 0$ noktalarında türev. $x \neq 0$ için f, türevlenebilir fonksiyonların çarpımı ve bileşkesidir. Çarpım kuralı (Teorem 3.2) ve zincir kuralı (Teorem 4.1) ile

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Adım 2: 0 noktasında türev. Fark oranını doğrudan yazalım. $h \neq 0$ için

$$\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = h \sin \frac{1}{h^2}.$$

Her $h \neq 0$ için $\left|\sin \frac{1}{h^2}\right| \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq \left| h \sin \frac{1}{h^2} \right| \leq |\, h \,|$$

olur; $|\, h \,| \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bu fark oranı 0'a gider. Demek ki f, 0'da (sağdan) türevlenebilirdir ve $f'(0) = 0$'dır. Böylece f, $[0,1]$'in her noktasında türevlenebilirdir; başka bir deyişle f, f' fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde bir **ilkelidir** (Tanım 18.1).
Adım 3: f' sınırsızdır. Birinci terim için $\left|2x \sin \frac{1}{x^2}\right| \leq 2 \,|\, x \,| \to 0$'dır; yani o terim 0'a yaklaşırken uslu davranır. Bütün sorun ikinci terimdedir: $\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ ifadesinin genliği $\frac{2}{|\, x \,|}$ olup $x \to 0^+$ iken sınırsız büyür. Bunu somut bir diziyle belgeleyelim: $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$

alalım. $2\pi > 1$ olduğundan $x_n \in (0,1)$'dir ve $x_n \to 0$'dır. Ayrıca $\frac{1}{x_n^2} = 2n\pi$ olduğundan

$$\sin \frac{1}{x_n^2} = \sin(2n\pi) = 0, \qquad \cos \frac{1}{x_n^2} = \cos(2n\pi) = 1$$

olur. Buna göre

$$f'(x_n) = 2x_n \cdot 0 - \frac{2}{x_n} \cdot 1 = -\frac{2}{x_n} = -2\sqrt{2n\pi} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty.$$

Demek ki $\{f'(x_n)\}$ dizisi sınırsızdır; oysa bütün x_n noktaları $[0,1]$ içindedir. Öyleyse f' fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sınırlı değildir. (Dahası, her $\delta > 0$ için yeterince büyük n'lerde $x_n \in (0, \delta)$ olduğundan f', 0'ın **hiçbir** komşuluğunda sınırlı değildir.)
Adım 4: Sonuç. Riemann integrallenebilir her fonksiyon sınırlıdır (Teorem 26.3). f' sınırsız olduğundan f', $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir değildir. Yani $\int_0^1 f'(x)\,dx$ ifadesi Riemann anlamında **tanımsızdır**; oysa f' fonksiyonunun bir ilkeli — üstelik açık formülüyle verilen f'nin kendisi — elimizdedir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi ters yöne geçelim. İntegrallenebilirlik için sürekli olmak gerekmez; monoton bir fonksiyon, sonlu sayıda sıçraması olsa bile integrallenebilirdir (Teorem 25.3). Oysa **ilkelin varlığı** çok daha katı bir koşuldur: bir türev fonksiyonu, sürekli olmasa bile ara değer özelliğini taşımak zorundadır (Teorem 10.1). Sıçraması olan bir fonksiyon bu sınavı geçemez. İki gözlemi birleştirelim.

Önerme 29.1 (Newton–Leibniz Formülünün Hipotezleri Bağımsızdır). *Aşağıdaki iki önerme doğrudur; dolayısıyla Teorem 29.1'in "integrallenebilir" ve "ilkeli var" hipotezlerinden hiçbiri ötekini gerektirmez.*

a) Öyle bir $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki g'nin $[0,1]$ üzerinde bir ilkeli vardır, ama g Riemann integrallenebilir değildir.

b) Öyle bir $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki h Riemann integrallenebilirdir, ama h'nin $[-1,1]$ üzerinde hiçbir ilkeli yoktur.

İspat.
(a) şıkkı. *Örnek 29.2'de kurduğumuz $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$ ($f(0) = 0$) fonksiyonunun türevi $g = f'$ olsun. Orada gösterdik ki f, $[0,1]$'in her noktasında türevlenebilirdir; yani $F = f$ alındığında $F' = g$ olur ve g'nin bir ilkeli vardır. Öte yandan g sınırsızdır, dolayısıyla Teorem 26.3 gereği Riemann integrallenebilir değildir.*
(b) şıkkı. *$h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ basamak fonksiyonunu*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ile tanımlayalım.
İntegrallenebilirlik. *h azalmayan bir fonksiyondur, dolayısıyla $[-1,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir (Teorem 25.3). Değerini hesaplayalım: aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) gereği*

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx + \int_{0}^{1} h(x)\,dx.$$

$[-1,0]$ üzerinde h, yalnız $x = 0$ noktasında 0'dan farklıdır; tek bir noktadaki değer alt ve üst toplamların limitini etkilemez ve bu integral 0'dır. $[0,1]$ üzerinde ise $h \equiv 1$ olduğundan integral 1'dir. Toplam olarak

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 0 + 1 = 1.$$

İlkelin yokluğu. *Diyelim ki $H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve her $x \in [-1,1]$ için $H'(x) = h(x)$ olsun. O hâlde*

$$H'(-1) = h(-1) = 0, \qquad H'(1) = h(1) = 1$$

olur. $\lambda = \dfrac{1}{2}$ sayısı $H'(-1)$ ile $H'(1)$ arasındadır. Darboux teoremi (Teorem 10.1) gereği $H'(c) = \dfrac{1}{2}$ olan bir $c \in (-1,1)$ bulunmalıdır. Oysa $H' = h$ fonksiyonunun aldığı bütün değerler $\{0,1\}$ kümesindedir ve $\dfrac{1}{2} \notin \{0,1\}$'dir. Çelişki. Demek ki böyle bir H yoktur; h'nin $[-1,1]$ üzerinde ilkeli bulunmaz.
■

⚠ Hipotezlerin her biri gereklidir

Önerme 29.1, Newton–Leibniz formülünü uygularken iki ayrı denetim yapmak gerektiğini söyler: integrand gerçekten integrallenebilir mi (en azından **sınırlı** mı?), ve bulduğumuz ilkel integral aralığının **her** noktasında tanımlı ve türevlenebilir mi? Bu iki soru birbirinin yerini tutmaz. Birincisi çökerse integral yazmanın anlamı kalmaz; ikincisi çökerse $F(b) - F(a)$ ifadesi bir sayı üretir ama bu sayının integralle ilgisi olmayabilir. Bölümün sonunda bunun somut örneklerini göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

29.3 İntegral Fonksiyonu

Birinci temel teorem, "elimizde ilkel varsa integrali hesaplayabiliriz" diyordu. Şimdi ters soruyu soralım: **ilkeli nereden bulacağız?** Belirsiz integral bölümlerinde bunun için bir teknik cephanelik kurmuştuk; ama hiçbir teknik, ilkelin *var olduğunu* garanti etmiyordu. Örneğin e^{-x^2} fonksiyonunun ilkelini temel fonksiyonlarla yazmak mümkün değildir; peki böyle bir ilkel gerçekten var mıdır?
İkinci temel teoremin cevabı olumludur ve son derece zariftir: ilkeli **integralin kendisiyle** inşa ederiz. Fikir şudur: f integrallenebilir bir fonksiyonsa, üst sınırı serbest bırakıp $x \mapsto \int_a^x f$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon "a'dan x'e kadar biriken alanı" ölçer. Alan birikme hızı, o anda eğrinin yüksekliği kadar olmalıdır; yani türevin f çıkması beklenir. Teorem tam olarak bunu, gereken hipotezlerle birlikte söyler.

Tanım 29.1 (İntegral Fonksiyonu). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde f, $[a,b]$'nin her kapalı alt aralığında da integrallenebilirdir (Sonuç 27.4); dolayısıyla her $x \in [a,b]$ için $\int_a^x f(t)\,dt$ sayısı tanımlıdır. Bu eşleşmeyle elde edilen

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

fonksiyonuna f'nin **integral fonksiyonu** (integral function) ya da **belirsiz integral fonksiyonu** denir. Burada t bir **kukla değişkendir** (dummy variable): $\int_a^x f(t)\,dt$ ile $\int_a^x f(u)\,du$ aynı sayıdır. Serbest olan tek değişken üst sınır x'tir; bu yüzden integralin içindeki değişkeni x ile göstermemek iyi bir alışkanlıktır. Tanımdan hemen $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ çıkar. Ayrıca yönlü integral anlaşması (Tanım 27.1) sayesinde $x < y$ olsa bile $\int_y^x f(t)\,dt = -\int_x^y f(t)\,dt$ yazabiliriz; bu anlaşma ile aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) her x, y, z üçlüsü için geçerlidir ve özel olarak her $x, y \in [a,b]$ için

$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(t)\,dt$$

olur.

Şimdi bölümün ikinci ana teoremine geliyoruz. Teorem iki kısımdan oluşur ve iki kısmın hipotezleri farklıdır: birincisi yalnızca integrallenebilirlik ister ve karşılığında **süreklilik** verir; ikincisi bir noktada süreklilik ister ve karşılığında o noktada **türevlenebilirlik** verir. İntegral almanın "düzleştirici" bir işlem olduğunu bundan iyi anlatan bir ifade yoktur: integral, fonksiyonun düzgünlüğünü bir basamak yukarı taşır.

Teorem 29.2 (İkinci Temel Teorem). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun ve*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

ile tanımlansın (Tanım 29.1). O hâlde:
1. F, $[a,b]$ üzerinde bir Lipschitz koşulunu sağlar; özel olarak F, $[a,b]$ üzerinde düzgün süreklidir.
2. Eğer f, bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında sürekli ise, F o noktada türevlenebilirdir ve

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

olur. (Uç noktalarda tek yönlü türev kastedilir.)

> ***İspat.***
> ***(1) Lipschitz koşulu ve düzgün süreklilik.***
> *f integrallenebilir olduğundan sınırlıdır (Teorem 26.3); öyleyse her $t \in [a,b]$ için*
>
> $$|\, f(t)\,| \le M$$
>
> *olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. (f özdeş olarak sıfır olsa bile $M = 1$ alarak $M > 0$ olmasını sağlayabiliriz; bunu birazdan M'ye bölerken kullanacağız.)*
> *$x, y \in [a,b]$ olsun ve genelliği bozmadan $y < x$ kabul edelim (eşit olmaları hâlinde iddia açıktır, $y > x$ hâli ise x ile y'nin rollerini değiştirmekle aynıdır). Tanım 29.1'nda kaydettiğimiz gibi*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(t)\,dt$$

olur. İntegral için üçgen eşitsizliği (Teorem 28.2) ve ardından sıralama özelliği (Teorem 28.1) ile

$$\mid F(x) - F(y) \mid = \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \leq \int_y^x \mid f(t) \mid dt \leq \int_y^x M\,dt = M(x-y) = M \mid x - y \mid$$

elde ederiz. Burada $\int_y^x M\,dt = M(x-y)$ *eşitliği sabit fonksiyonun integralidir. Demek ki her* $x, y \in [a,b]$ *için*

$$\mid F(x) - F(y) \mid \leq M \mid x - y \mid,$$

yani F, M *sabitiyle bir Lipschitz koşulunu sağlar (bkz. Analiz 1). Lipschitz koşulunu sağlayan her fonksiyon düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1); istenirse* $\varepsilon > 0$ *verildiğinde* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ *seçmek yeterlidir, çünkü* $\mid x - y \mid < \delta$ *olduğunda*

$$\mid F(x) - F(y) \mid \leq M \mid x - y \mid < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

olur. Böylece F, $[a,b]$ *üzerinde düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1).*
(2) Süreklilik noktasında türevlenebilirlik.
f, $x_0 \in [a,b]$ *noktasında sürekli olsun.* $F'(x_0) = f(x_0)$ *olduğunu göstermek için fark oranının* $f(x_0)$*'a yakınsadığını kanıtlamalıyız (Tanım 2.2).* $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$ *olsun.*
Hazırlık. *Tanım 29.1'nun son eşitliği gereği*

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

olur (yönlü integral anlaşmasıyla bu, $x < x_0$ *hâlinde de doğrudur). Öte yandan sabit fonksiyonun integrali*

$$f(x_0)\,(x - x_0) = \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt$$

biçiminde yazılabilir; burada integralin içindeki $f(x_0)$ *bir* ***sabittir****, çünkü integrasyon değişkeni* t*'dir. İki eşitliği taraf tarafa çıkarıp* $x - x_0$*'a bölersek*

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \left[\, f(t) - f(x_0) \,\right] dt$$

elde ederiz; burada integralin lineerliğini (Teorem 27.1) kullandık.
Süreklilikten gelen tahmin. $\varepsilon > 0$ *verilsin.* f, x_0*'da sürekli olduğundan öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki* $t \in [a,b]$ *ve* $\mid t - x_0 \mid < \delta$ *olduğunda*

$$\mid f(t) - f(x_0) \mid < \varepsilon$$

olur (bkz. Analiz 1). Şimdi $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ *olan bir* $x \in [a,b]$ *alalım ve iki durumu ayrı ayrı ele alalım.*
Durum 1: $x > x_0$. *Bu hâlde* $x - x_0 > 0$*'dır.* t *değişkeni* $[x_0, x]$ *aralığında dolaştığında* $\mid t - x_0 \mid \leq x - x_0 < \delta$ *olur, dolayısıyla* $\mid f(t) - f(x_0) \mid < \varepsilon$*'dur. Üçgen eşitsizliği (Teorem 28.2) ve sıralama (Teorem 28.1) ile*

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x \left[\, f(t) - f(x_0) \,\right] dt \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \mid f(t) - f(x_0) \mid dt$$

ve buradan

$$\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon\,dt = \frac{\varepsilon\,(x - x_0)}{x - x_0} = \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur.
Durum 2: $x < x_0$. *Bu hâlde* $x - x_0 < 0$*'dır, dolayısıyla* $\mid x - x_0 \mid = x_0 - x$ *olur. Yönlü integral anlaşması (Tanım 27.1) gereği*

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} [\, f(t) - f(x_0) \,]\, dt = \frac{-1}{x_0 - x} \cdot \left(- \int_{x}^{x_0} [\, f(t) - f(x_0) \,]\, dt \right) = \frac{1}{x_0 - x} \int_{x}^{x_0} [\, f(t) - f(x_0) \,]\, dt$$

yazılır; iki eksi işareti birbirini götürmüştür. Artık integralin sınırları doğru sıradadır. $t \in [x, x_0]$ *için* $\mid t - x_0 \mid \leq x_0 - x < \delta$ *olduğundan yine* $\mid f(t) - f(x_0) \mid < \varepsilon$*'dur ve*

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x_0 - x} \int_{x}^{x_0} \mid f(t) - f(x_0) \mid dt \leq \frac{1}{x_0 - x} \int_{x}^{x_0} \varepsilon \, dt = \varepsilon$$

elde edilir.
Sonuç. *Her iki durumda da* $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ *olduğunda*

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

bulduk. $\varepsilon > 0$ *keyfî olduğundan limit tanımı gereği*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

yani F, x_0*'da türevlenebilirdir ve* $F'(x_0) = f(x_0)$*'dır. (*$x_0 = a$ *ya da* $x_0 = b$ *ise yukarıdaki* x*'ler yalnızca bir yandan yaklaşabilir ve elde edilen şey ilgili tek yönlü türevdir.)*
Son bir ayrıntı: yazdığımız integraller anlamlıdır, çünkü f *integrallenebilir ve* $f(x_0)$ *sabit olduğundan* $f - f(x_0)$ *integrallenebilirdir (Teorem 27.1) ve mutlak değer alınca da integrallenebilirlik bozulmaz (Teorem 28.2).*
■

İkinci temel teoremin birinci kısmında f hakkında **hiçbir süreklilik** varsayımı yoktur; f sonsuz sayıda noktada süreksiz olsa bile F düzgün süreklidir. İntegral, süreksizlikleri "yutar". İkinci kısımda ise talep edilen şey f'nin **yalnızca o noktada** sürekli olmasıdır; f'nin başka noktalardaki davranışı $F'(x_0)$ hesabına karışmaz.
Bu teoremin en önemli sonucu, bölümün başında sorduğumuz varlık sorusunu kapatır.

Sonuç 29.1 (Her Sürekli Fonksiyonun İlkeli Vardır). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olsun. O hâlde*

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt, \qquad x \in [a, b]$$

fonksiyonu $[a, b]$ *üzerinde* f*'nin bir ilkelidir; yani her* $x \in [a, b]$ *için* $F'(x) = f(x)$*'tir. Dolayısıyla kapalı bir aralıkta sürekli olan* ***her*** *fonksiyonun o aralıkta bir ilkeli vardır ve bu ilkel açıkça bir integralle verilir. Üstelik* f*'nin bütün ilkelleri* $F + C$ $(C \in \mathbb{R})$ *biçimindedir.*

İspat.
f*, kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olduğundan Riemann integrallenebilirdir (Teorem 25.2); dolayısıyla* F *tanımlıdır (Tanım 29.1).* f*,* $[a, b]$*'nin* ***her*** x *noktasında sürekli olduğundan Teorem 29.2'in (2) kısmı her* $x \in [a, b]$ *için uygulanabilir ve* $F'(x) = f(x)$ *verir. Demek ki* F*,* f*'nin bir ilkelidir (Tanım 18.1).*
Son iddia için: G *de* $[a, b]$ *üzerinde* f*'nin bir ilkeliyse* $(G - F)' = f - f = 0$ *olur ve türevi özdeş sıfır olan bir fonksiyon aralıkta sabittir (Sonuç 8.1); yani* $G = F + C$*'dir. Aynı gözlem Teorem 18.2'nde de kayıtlıdır.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Var olmak ile formülle yazılabilmek aynı şey değildir

Sonuç 29.1, e^{-x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1+x^4}$ gibi sürekli fonksiyonların ilkellerinin **var olduğunu** söyler. Bu ilkellerin temel fonksiyonlarla (polinom, üstel, logaritma, trigonometrik fonksiyonlar ve bunların sonlu bileşkeleri) yazılamaması, var olmadıkları anlamına gelmez. Nitekim olasılık kuramının hata fonksiyonu

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

tam olarak böyle tanımlanır: kapalı formülü yoktur, ama bir integral fonksiyonu olarak pekâlâ vardır, düzgün süreklidir ve türevi $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$'dir. "İntegrali alınamıyor" cümlesi, çoğu zaman "ilkeli temel fonksiyonlarla ifade edilemiyor" demektir; ikisini karıştırmamak gerekir.

29.4 İki Örnek: Teoremin Sınırları

İkinci temel teoremi iki örnekte çalıştıralım. Birincisi teoremin tam kapasiteyle çalıştığı, ikincisi ise süreklilik hipotezi kaldırıldığında ne olduğunu gösteren örnektir.

Örnek 29.3 (Mutlak Değerin İntegral Fonksiyonu). $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x) = \int_0^x |\, t \,|\, dt$$

ile tanımlansın. F'yi açıkça hesaplayınız ve her $x \in \mathbb{R}$ için $F'(x) = |\, x \,|$ olduğunu doğrudan doğrulayınız.

Çözüm.
Adım 1: $x \geq 0$ hâli. $t \in [0, x]$ için $|\, t \,| = t$ olduğundan

$$F(x) = \int_0^x t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - 0 = \frac{x^2}{2}.$$

Burada Teorem 29.1'i $f(t) = t$ ve ilkeli $\dfrac{t^2}{2}$ ile kullandık.
Adım 2: $x < 0$ hâli. Bu kez üst sınır alt sınırdan küçüktür; yönlü integral anlaşması (Tanım 27.1) gereği

$$F(x) = \int_0^x |\, t \,|\, dt = -\int_x^0 |\, t \,|\, dt.$$

$t \in [x, 0]$ için $t \leq 0$, dolayısıyla $|\, t \,| = -t$'dir. Buna göre

$$\int_x^0 |\, t \,|\, dt = \int_x^0 (-t)\, dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_x^0 = 0 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2},$$

ve dolayısıyla

$$F(x) = -\frac{x^2}{2}, \qquad x < 0.$$

Adım 3: Tek formül. İki hâli birleştirirsek

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{yani} \qquad F(x) = \frac{x\,|\,x\,|}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerçekten $x \geq 0$ için $\dfrac{x \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{2}$, $x < 0$ için $\dfrac{x \cdot (-x)}{2} = -\dfrac{x^2}{2}$'dir.

Adım 4: Türevin doğrudan hesabı. $x > 0$ için $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ olduğundan $F'(x) = x = \mid x \mid$'tir. $x < 0$ için $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ olduğundan $F'(x) = -x = \mid x \mid$'tir. Geriye $x = 0$ kalıyor; fark oranını yazalım:

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x \mid x \mid}{2} - 0}{x} = \frac{\mid x \mid}{2} \underset{x \to 0}{\to} 0.$$

Demek ki $F'(0) = 0 = \mid 0 \mid$'dır. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için

$$F'(x) = \mid x \mid$$

olduğu doğrudan hesapla doğrulanmış oldu — ki bu, $\mid t \mid$ fonksiyonu sürekli olduğundan Sonuç 29.1'ın zaten öngördüğü şeydi.

Adım 5: Gözlem. $f(t) = \mid t \mid$ fonksiyonu 0'da türevlenebilir değildir (orada bir köşe vardır), ama integral fonksiyonu F türevlenebilirdir ve türevi süreklidir: integral alma, düzgünlüğü bir basamak artırmıştır.

■

Şimdi süreklilik hipotezini kaldıralım. Teorem 29.2'in (1) kısmı hâlâ geçerlidir — integral fonksiyonu yine süreklidir — ama (2) kısmı, sürekliliğin bozulduğu noktada çöker.

Örnek 29.4 (Basamak Fonksiyonunun İntegral Fonksiyonu). $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ile tanımlansın ve $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ olsun. F'yi açıkça bulunuz; F'nin $[-1, 1]$ üzerinde sürekli olduğunu ama $x = 0$ noktasında türevlenebilir **olmadığını** gösteriniz.

Çözüm.

Adım 1: F'nin hesabı. f azalmayan olduğundan integrallenebilirdir (Teorem 25.3) ve F tanımlıdır. $-1 \leq x \leq 0$ için: $[-1, x]$ aralığında f yalnızca $x = 0$ olduğunda tek bir noktada ($t = 0$'da) 1 değerini alır, geri kalan her yerde 0'dır. Tek bir noktadaki değer alt ve üst toplamların ortak limitini değiştirmez; dolayısıyla

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = 0, \qquad -1 \leq x \leq 0.$$

$0 < x \leq 1$ için: aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) ile

$$F(x) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{x} 1\,dt = x.$$

Böylece

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{yani} \qquad F(x) = \max\{x, 0\}.$$

Adım 2: F süreklidir. İki parça da doğru parçasıdır ve $x = 0$'da değerleri uyuşur: soldan 0, sağdan $\lim_{x \to 0^+} x = 0 = F(0)$. Aslında daha güçlü bir şey doğrudur: $\mid f \mid \leq 1$ olduğundan Teorem 29.2 (1) gereği F, 1 sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar ve $[-1, 1]$ üzerinde düzgün süreklidir. Bunu elle de görebiliriz: $\big|\max\{x, 0\} - \max\{y, 0\}\big| \leq \mid x - y \mid$'dir.

Adım 3: F, 0'da türevlenebilir değildir. Tek yönlü fark oranlarını hesaplayalım. $x > 0$ için

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x} = 1 \to 1 \quad (x \to 0^+),$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$x < 0$ için ise

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0 \to 0 \quad (x \to 0^-).$$

Sağdan ve soldan türevler 1 ile 0 olup birbirinden farklıdır; dolayısıyla $\lim_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ yoktur ve F, 0'da türevlenebilir değildir. Grafikte bu, $x = 0$'daki köşe olarak görünür.
Adım 4: Yorum. f, 0 noktasında süreksizdir (sıçrama süreksizliği: soldan limit 0, sağdan limit 1). Teorem 29.2'in (2) kısmının hipotezi tam olarak burada çöktüğü için sonucu da çöker. Buna karşılık $x \neq 0$ olan her noktada f süreklidir ve gerçekten $F'(x) = f(x)$'tir: $x < 0$ için $F'(x) = 0 = f(x)$, $x > 0$ için $F'(x) = 1 = f(x)$.
Bu, Önerme 29.1 ile de tutarlıdır: f'nin $[-1, 1]$ üzerinde hiçbir ilkeli olmadığından, integral fonksiyonu F de f'nin ilkeli olamazdı.
■

29.5 Türev ile İntegral Birbirinin Ters İşlemidir

İki temel teoremi yan yana koyunca bölümün başında söz verdiğimiz tablo tamamlanır. Türev alma ile integral alma, uygun hipotezler altında birbirini geri alan iki işlemdir. "Uygun hipotezler altında" kaydını vurgulamak gerekiyor: Önerme 29.1, bu tersliğin koşulsuz olmadığını göstermişti.

Sonuç 29.2 (Türev ve İntegral Ters İşlemlerdir). *$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kapalı ve sınırlı bir aralık olsun.*
*1. **(Önce integralle, sonra türev al.)** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ise, her $x \in [a, b]$ için*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

olur. Yani integral alma işlemini türev alma işlemi tam olarak geri alır.
*2. **(Önce türev al, sonra integralle.)** $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve F' fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir ise, her $x \in [a, b]$ için*

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

olur; özel olarak $x = b$ için $\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$'dır. Yani türev alma işlemini integral alma işlemi, yalnızca $F(a)$ sabiti kadar bir belirsizlikle geri alır.

İspat.
***(1)** f sürekli olduğundan integrallenebilirdir (Teorem 25.2) ve $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tanımlıdır. f her noktada sürekli olduğundan Teorem 29.2 (2) gereği F her noktada türevlenebilirdir ve $F'(x) = f(x)$'tir. Bu, tam olarak iddia edilen eşitliktir.*
***(2)** $x \in (a, b]$ olsun. F, $[a, x]$ üzerinde türevlenebilirdir ve orada F' fonksiyonunun bir ilkelidir. Ayrıca F', $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olduğundan $[a, x]$ üzerinde de integrallenebilirdir. Teorem 29.1'i $[a, x]$ aralığında F' fonksiyonuna uygularsak*

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

çıkar. $x = a$ için iki taraf da 0 olduğundan eşitlik orada da geçerlidir.
■

Bu sonucu bir cümlede özetleyelim: **süreklilik varsa "integralle, sonra türev al" özdeşlik işlemidir; türevin integrallenebilirliği varsa "türev al, sonra integralle" fonksiyonu bir sabite kadar geri getirir.** İki koşuldan biri düşerse ilgili yön çöker; Örnek 29.4 birinci yöndeki (süreklilik yoksa "integralle, sonra türev al" başarısızdır), Örnek 29.2 ikinci yöndeki (türev integrallenebilir değilse "türev al, sonra integralle" başarısızdır) tehlikeyi gösterir. Kaybolan $F(a)$ sabiti ise belirsiz integraldeki $+C$'nin karşılı-

 CC BY-NC-SA 4.0

ğıdır: türev alma sabitleri yok eder, integral alma onları geri getiremez; geri getirebildiği tek şey uçlardaki değerlerin **farkıdır**.

29.6 Hipotezleri Denetlemenin Önemi

Newton–Leibniz formülü öyle kullanışlıdır ki, mekanik biçimde uygulanmaya çok elverişlidir: "ilkeli bul, uçları koy, çıkar". Bu mekaniklik, integrand aralığın içinde tanımsız olduğunda ya da sınırsızlaştığında sessizce yanlış sayılar üretir. Formülün ürettiği sayı bir hata mesajı vermez; sadece anlamsızdır. Aşağıdaki örnek bu tuzağın üç tipik biçimini gösterir.

Örnek 29.5 (Newton–Leibniz Formülünün Yanlış Uygulanması). Aşağıdaki hesapların her birinde bir hata vardır. Hatayı bulunuz ve neyin yanlış gittiğini açıklayınız.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \Big[\ln|\,x\,|\Big]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0$

c) $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}$ (ve $f(0) = 0$) olmak üzere $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = \sin 1$

Çözüm.

a) Sonucun yanlış olduğu, hesabı yapmadan önce anlaşılabilir: integrand $\dfrac{1}{x^2}$, tanımlı olduğu her noktada **pozitiftir**. Pozitif bir fonksiyonun integrali, varsa, negatif olamaz (Teorem 28.1). -2 gibi negatif bir sayı çıkması, bir yerde yanlış bir adım atıldığının kesin işaretidir.

Hata iki katmanlıdır.

Birincisi: $\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımlı bile değildir; $x = 0$ ise $[-1, 1]$ aralığının bir iç noktasıdır. Fonksiyonu 0'da nasıl tanımlarsak tanımlayalım, $x \to 0$ iken $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$ olduğundan elde edeceğimiz fonksiyon $[-1, 1]$ üzerinde **sınırsızdır**. Riemann integrallenebilir her fonksiyon sınırlı olmak zorunda olduğundan (Teorem 26.3) $\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x^2}$ Riemann anlamında **tanımsızdır**. Yani eşitliğin sol tarafı bir sayı göstermemektedir.

İkincisi: Kullanılan $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $[-1, 1]$ üzerinde bir ilkel değildir, çünkü 0'da tanımlı değildir. Teorem 29.1, F'nin aralığın **her** noktasında türevlenebilir olmasını ister. F, $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ üzerinde ayrı ayrı ilkeldir; ama iki parçanın uç değerlerini birbirinden çıkarmanın hiçbir gerekçesi yoktur.

Kısacası: hem sol taraf tanımsızdır, hem de sağ tarafı üretme hakkımız yoktur. (İleride bu tür integraller **genelleştirilmiş integral** olarak ayrıca ele alınır; orada $\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x^2}$ integrali $+\infty$'a ıraksar, yani yine -2 değildir.)

b) Aynı hata daha sinsi bir kılıkta karşımızdadır, çünkü bu kez çıkan sayı (0) makul, hatta simetri sezgisiyle "doğru" bile görünür. Ama $\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu da $x = 0$'da tanımsızdır ve 0'ın her komşuluğunda sınırsızdır; dolayısıyla $[-1, 1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir değildir (Teorem 26.3). $\ln|\,x\,|$ fonksiyonu 0'da tanımlı olmadığından $[-1, 1]$ üzerinde bir ilkel de değildir.

Buradaki ders şudur: **sonucun makul görünmesi doğruluğun kanıtı değildir.**

c) Bu şıkta integrand aralığın hiçbir noktasında tanımsız değildir: Örnek 29.2'de gördüğümüz gibi f, $[0, 1]$'in her noktasında türevlenebilirdir, dolayısıyla f' her noktada tanımlıdır. Üstelik f, f' fonksiyonunun bir ilkelidir — yani Teorem 29.1'in **ikinci** hipotezi eksiksiz sağlanmaktadır.

Çöken hipotez birincisidir: f' sınırsız olduğundan Riemann integrallenebilir değildir (Örnek 29.2, Adım 3–4). Öyleyse $\int_0^1 f'(x)\,dx$ ifadesi Riemann anlamında tanımsızdır ve ona bir değer atamak — sağ taraftaki $f(1) - f(0) = \sin 1$ sayısı ne kadar masum görünürse görünsün — meşru değildir.

Bu şıkkın taşıdığı uyarı öncekilerden farklıdır: sorun her zaman "integrand bir noktada tanımsız" biçiminde gözle görülür bir kusur olarak ortaya çıkmaz. Burada f' her noktada tanımlıdır; sınırsızlık, 0'a yaklaşırken salınımın genliğinde saklıdır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Belirli integral hesaplamadan önce üç soru

Bir $\int_a^b f(x)\,dx$ integralini Newton–Leibniz formülüyle hesaplamaya kalkmadan önce şu üç soruyu yanıtlayın:

- f fonksiyonu $[a,b]$'nin **her** noktasında tanımlı ve sınırlı mı?
- f integrallenebilir mi? (Sürekli olması ya da monoton olması yeter; Teorem 25.2, Teorem 25.3.)
- Kullanacağım ilkel F, $[a,b]$'nin **her** noktasında tanımlı ve türevlenebilir mi ve orada $F' = f$ mi?

Üçünün de yanıtı "evet" ise formül güvenle uygulanır. Herhangi biri "hayır" ise elde edilen sayı, olsa olsa bir rastlantı sonucu doğru çıkar.

29.7 Alıştırmalar

Alıştırma 29.1 (Temel Teoremler Üzerine).

a) Aşağıdaki belirli integralleri Newton–Leibniz formülüyle hesaplayınız:

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 3x)\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx, \quad \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) $x > 0$ için $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ olsun. L'nin $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilir olduğunu ve $L'(x) = \dfrac{1}{x}$ olduğunu gösteriniz. Buradan, her $x, y > 0$ için

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

olduğunu kanıtlayınız.

c) $G(x) = \displaystyle\int_0^x |\,t-1\,|\,dt$ fonksiyonunu $x \in [0,3]$ için açıkça hesaplayınız ve G'nin $[0,3]$'ün her noktasında türevlenebilir olduğunu, $G'(x) = |\,x-1\,|$ sağlandığını doğrulayınız.

d) sgn işaret fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde $\operatorname{sgn}(x) = -1$ $(x<0)$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ $(x>0)$ ile tanımlansın. $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx = 0$ olduğunu gösteriniz; buna karşılık sgn fonksiyonunun $[-1,1]$ üzerinde hiçbir ilkelinin bulunmadığını kanıtlayınız.

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{-2}^{2} = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$ hesabındaki hatayı bulunuz.

f) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun ve her $x \in [a,b]$ için $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 0$ olsun. f'nin özdeş olarak sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
a) Dört integrandın da ilgili kapalı aralıkta sürekli olduğuna, dolayısıyla integrallenebilir olduğuna dikkat edelim (Teorem 25.2).

Birinci integral. $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2}$ alırsak $F'(x) = x^3 - 3x$ olur. Buna göre

$$F(2) = \frac{16}{4} - \frac{3\cdot 4}{2} = 4 - 6 = -2, \qquad F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -\frac{5}{4},$$

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 3x)\,dx = -2 - \left(-\frac{5}{4}\right) = -2 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}.$$

İkinci integral. $(\sin x)' = \cos x$ olduğundan

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Üçüncü integral. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ olup $\left(\,2\sqrt{x}\right)' = 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$'tir. $[1,4]$ aralığı 0'ı içermediğinden $2\sqrt{x}$ burada geçerli bir ilkeldir:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[\,2\sqrt{x}\Big]_1^4 = 2\cdot 2 - 2\cdot 1 = 4 - 2 = 2.$$

Dördüncü integral. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ olduğundan

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

b) $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde süreklidir. Herhangi bir $x_0 > 0$ alalım ve $0 < c < \min\{1, x_0\}$, $d > \max\{1, x_0\}$ olacak biçimde c, d seçelim; böylece $[c,d] \subset (0,\infty)$ aralığı hem 1'i hem x_0'ı içerir. Aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) gereği $x \in [c,d]$ için

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_c^x \frac{dt}{t} - \int_c^1 \frac{dt}{t}$$

olur; sağdaki ikinci terim x'ten bağımsız bir sabittir. Birinci terim, $\dfrac{1}{t}$ fonksiyonunun $[c,d]$ üzerindeki integral fonksiyonudur; $\dfrac{1}{t}$ burada sürekli olduğundan Sonuç 29.1 gereği türevlenebilirdir ve türevi $\dfrac{1}{x}$'tir. Sabitin türevi sıfır olduğundan $L'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$ bulunur. $x_0 > 0$ keyfî olduğundan L, $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $L'(x) = \dfrac{1}{x}$'tir. Ayrıca tanım gereği $L(1) = 0$'dır.
Şimdi $y > 0$ sabit tutulsun ve

$$\varphi(x) = L(xy) - L(x), \qquad x > 0$$

fonksiyonuna bakalım. $x \mapsto xy$ fonksiyonu $(0,\infty)$'u $(0,\infty)$'a götürür ve türevi y'dir; zincir kuralı (Teorem 4.1) ile

$$\varphi'(x) = y\cdot L'(xy) - L'(x) = y\cdot\frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

olur. Türevi $(0,\infty)$ aralığında özdeş olarak sıfır olan bir fonksiyon sabittir (Sonuç 8.1); yani bir C sayısı için $\varphi(x) = C$'dir. Sabiti belirlemek için $x = 1$ koyalım:

$$C = \varphi(1) = L(y) - L(1) = L(y) - 0 = L(y).$$

Öyleyse her $x > 0$ için $L(xy) - L(x) = L(y)$, yani

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

olur. $y > 0$ da keyfî olduğundan eşitlik bütün $x, y > 0$ için geçerlidir. (Bu, doğal logaritmanın çarpımı toplama çeviren temel özelliğidir; nitekim $L = \ln$'dir.)
c) $t \mapsto |\,t-1\,|$ fonksiyonu $[0,3]$ üzerinde süreklidir; dolayısıyla integrallenebilirdir ve Sonuç 29.1 gereği G, $[0,3]$'ün her noktasında türevlenebilir olup $G'(x) = |\,x-1\,|$'dir. Geriye G'yi açıkça hesaplamak kalıyor.
Durum $0 \le x \le 1$. Bu aralıkta $t \le 1$, dolayısıyla $|\,t-1\,| = 1 - t$'dir:

$$G(x) = \int_0^x (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{2}.$$

Durum $1 \le x \le 3$. Aralık toplamsallığı ile

$$G(x) = \int_0^1 (1-t)\,dt + \int_1^x (t-1)\,dt.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci integral $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$'dir. İkincisi için $\dfrac{(t-1)^2}{2}$ bir ilkeldir:

$$\int_1^x (t-1)\,dt = \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x = \frac{(x-1)^2}{2} - 0 = \frac{(x-1)^2}{2}.$$

Öyleyse $G(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{2}$'dir. Toplu olarak

$$G(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2}, & 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

Denetim. İki formül $x = 1$'de uyuşur: birinciden $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, ikinciden $\dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}$. Türevlere bakalım: $0 < x < 1$ için $G'(x) = 1 - x = |\,x - 1\,|$ ✓; $1 < x < 3$ için $G'(x) = (x-1) = |\,x-1\,|$ ✓. $x = 1$ noktasında soldan türev $\lim_{x\to 1^-}(1-x) = 0$, sağdan türev $\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$'dır; ikisi eşit olduğundan $G'(1) = 0 = |\,1-1\,|$'dir ✓. Uç noktalarda tek yönlü türevler de aynı formülü verir. Demek ki G, $[0,3]$'ün her noktasında türevlenebilirdir ve $G'(x) = |\,x-1\,|$'dir.

d) *İntegralin hesabı.* sgn fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde sınırlıdır ve yalnızca $x = 0$ noktasında süreksizdir. Aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) ile

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \operatorname{sgn}(x)\,dx + \int_{0}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx.$$

$[-1,0]$ üzerinde sgn, tek bir nokta ($x = 0$) dışında -1'e eşittir; tek bir noktadaki değer integrali değiştirmediğinden bu integral -1'dir. Benzer biçimde $[0,1]$ üzerinde tek bir nokta dışında $+1$'e eşittir ve bu integral $+1$'dir. Toplayınca

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx = -1 + 1 = 0.$$

İlkelin yokluğu. $S : [-1,1] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $S' = \operatorname{sgn}$ olsun. O hâlde $S'(-1) = -1$ ve $S'(1) = 1$'dir. $\lambda = \dfrac{1}{2}$ sayısı bu iki değer arasındadır; Darboux teoremi (Teorem 10.1) gereği $S'(c) = \dfrac{1}{2}$ olan bir $c \in (-1,1)$ bulunmalıdır. Oysa sgn fonksiyonunun değer kümesi $\{-1, 0, 1\}$ olup $\dfrac{1}{2}$ bu kümede değildir. Çelişki; demek ki böyle bir S yoktur.

İntegralin 0 çıkması "artı ve eksi alanların birbirini götürmesi" diye yorumlanabilir; ama bu simetri ilkelin varlığı konusunda hiçbir şey söylemez (Önerme 29.1).

e) Yine sonucun işareti ele veriyor: $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ fonksiyonu tanımlı olduğu her yerde pozitiftir, dolayısıyla integrali negatif çıkamaz (Teorem 28.1).

Hata, integrandın $x = 1$ noktasında tanımsız olmasıdır ve $1 \in (-2,2)$'dir. $x \to 1$ iken $\dfrac{1}{(x-1)^2} \to +\infty$ olduğundan, fonksiyonu $x = 1$'de nasıl tanımlarsak tanımlayalım $[-2,2]$ üzerinde sınırsız kalır; sınırsız bir fonksiyon Riemann integrallenebilir değildir (Teorem 26.3). Ayrıca kullanılan $F(x) = -\dfrac{1}{x-1}$ ilkeli de $x = 1$'de tanımlı olmadığından $[-2,2]$ üzerinde Teorem 29.1'in istediği türden bir ilkel değildir. Sol taraf tanımsız, sağ tarafın hesabı meşru değil.

(Hesabın aritmetiği de kontrol edilebilir: $-\dfrac{1}{2-1} = -1$ ve $-\dfrac{1}{-2-1} = \dfrac{1}{3}$ olduğundan fark $-1 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{4}{3}$'tür; yani aritmetikte hata yoktur, hata yöntemin kendisindedir. Bu, yanlış uygulamaların neden fark edilmesi güç olduğunu da gösterir.)

f) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ diyelim. Hipotez, her $x \in [a,b]$ için $F(x) = 0$ olduğunu söylüyor; yani F özdeş olarak sıfır fonksiyonudur. Sıfır fonksiyonunun türevi de özdeş olarak sıfırdır: her $x \in [a,b]$ için $F'(x) = 0$.

Öte yandan f sürekli olduğundan Sonuç 29.1 (ya da doğrudan Teorem 29.2 (2)) gereği F türevlenebilirdir ve her $x \in [a,b]$ için $F'(x) = f(x)$'tir.

İki hesabı birleştirirsek her $x \in [a,b]$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = F'(x) = 0$$

bulunur; yani f özdeş olarak sıfırdır.
Süreklilik burada gerçekten gereklidir: $[0,1]$ üzerinde $f(1/2) = 1$, başka her yerde $f = 0$ olan fonksiyon için her x'te $\int_0^x f = 0$'dır, ama f sıfır fonksiyonu değildir (krş. Teorem 28.3).
■

Bu bölümde türev ile integral arasındaki köprüyü kurduk: bir ilkel bulabildiğimizde belirli integral iki değerin farkına indi, sürekli her fonksiyonun ilkelinin var olduğunu ve bu ilkelin integralle inşa edilebileceğini gördük. Sıradaki bölümde bu köprüyü hesap yapmak için kullanacağız; belirsiz integralde öğrendiğimiz değişken değiştirme ve kısmi integrasyon yöntemlerinin belirli integraldeki biçimlerini kuracak ve integral fonksiyonunun sınırları da değiştiğinde türevini veren Leibniz formülünü elde edeceğiz: Belirli İntegralde Yöntemler ve Leibniz Formülü.

 CC BY-NC-SA 4.0

30. Belirli İntegralde Yöntemler ve Leibniz Formülü

Analizin Temel Teoremleri bölümünde belirli integral ile türev arasındaki köprüyü kurduk: sürekli bir fonksiyonun değişken üst sınırlı integrali onun bir ilkel fonksiyonudur ve bir ilkel fonksiyon bilindiğinde belirli integral iki uç değerin farkına indirgenir. Böylece $\int_a^b f$ hesabı, f'nin bir ilkel fonksiyonunu bulma sorusuna dönüşmüş oldu.
İlkel fonksiyon bulmanın iki büyük aracını Değişken Değiştirme ve Kısmi İntegrasyon bölümünde belirsiz integral çerçevesinde görmüştük: **değişken değiştirme** zincir kuralının, **kısmi integrasyon** ise çarpım kuralının integral karşılığıdır. Bu bölümde aynı iki yöntemi belirli integral için yeniden kuruyoruz. Fark küçük görünür ama pratikte çok işe yarar: belirli integralde değişken değiştirirken **sınırları da dönüştürürüz** ve böylece eski değişkene geri dönme zahmetinden kurtuluruz.
Yöntemlerin kendisi kadar, onların doğurduğu birkaç zarif sonuç da bu bölümün konusudur. Simetrik bir aralıkta çift bir fonksiyonun integrali yarım aralıktakinin iki katıdır, tek bir fonksiyonunki ise sıfırdır; bu iki gözlem, uzun hesapları tek satırda bitirir. Periyodik bir fonksiyonun bir tam periyot boyunca integrali, periyodun nereden başladığına bağlı değildir. Son olarak, sınırları x'e bağlı olan bir integralin x'e göre türevini veren **Leibniz formülü**nü kuracağız; bu formül, hem türev hesaplarında hem de belirsiz biçimli limitlerde kullanacağımız çok güçlü bir araçtır.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: belirli integralde değişken değiştirme kuralı ve tam ispatı; sınırların nasıl dönüştüğü ve değiştiren fonksiyonun birebir olmasının neden gerekmediği; çift, tek ve periyodik fonksiyonlar için integral formülleri; belirli integralde kısmi integrasyon; integral işareti altında sınırların türevini veren Leibniz formülü; ve bütün bunların bir uygulaması olarak $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ integralleri için Wallis indirgeme formülü ile Wallis çarpımı.

30.1 Belirli İntegralde Değişken Değiştirme

Belirsiz integralde değişken değiştirme (Teorem 19.1) bize $\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C$ eşitliğini vermişti; burada F, f'nin bir ilkel fonksiyonuydu. Belirli integralde bu kuralın çok daha kullanışlı bir biçimi vardır: hesabı bitirdikten sonra t değişkenine geri dönmek yerine **sınırları baştan dönüştürürüz.** Kuralın hangi hipotezler altında geçerli olduğuna dikkat edelim. Sağ taraftaki $f(g(t))g'(t)$ ifadesinin anlamlı ve integrallenebilir olması için g'nin türevlenebilir, g''nün sürekli ve f'nin g'nin aldığı bütün değerler üzerinde tanımlı olması gerekir. Bu yüzden g'nin **sürekli türevli** (yani C^1) olmasını isteriz.

Teorem 30.1 (Belirli İntegralde Değişken Değiştirme). *$g : [c,d] \to [a,b]$ fonksiyonu sürekli türevli olsun, yani g türevlenebilir ve g' $[c,d]$ üzerinde sürekli olsun (uç noktalarda tek yönlü türevler kastedilir). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. O hâlde*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f\,\big(\,g(t)\,\big)\,g'(t)\,dt.$$

İspat.
Adım 1: f'nin bir ilkel fonksiyonu. *f, $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan analizin ikinci temel teoremi (Teorem 29.2) gereği*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds, \qquad x \in [a,b]$$

fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir ve her $x \in [a,b]$ için $F'(x) = f(x)$'tir. Yani F, f'nin bir ilkel fonksiyonudur (Tanım 18.1).
Adım 2: Bileşke fonksiyonun türevi. *$h : [c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu*

$$h(t) = F\,\big(\,g(t)\,\big)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ile tanımlayalım. g, $[c,d]$'yi $[a,b]$'nin içine gönderdiğinden bu tanım anlamlıdır. g türevlenebilir, F de $g(t)$ noktasında türevlenebilir olduğundan zincir kuralı (Teorem 4.1) gereği h türevlenebilirdir ve

$$h'(t) = F'\left(\, g(t) \,\right) g'(t) = f\left(\, g(t) \,\right) g'(t), \qquad t \in [c,d].$$

Uç noktalarda bu eşitlik tek yönlü türevler için geçerlidir.

Adım 3: Sağ tarafın integrallenebilirliği. *f sürekli, g sürekli (çünkü türevlenebilir, bkz. Teorem 3.1) olduğundan $f \circ g$ süreklidir; g' de varsayım gereği süreklidir. Sürekli fonksiyonların çarpımı sürekli olduğundan $h' = (f \circ g) \cdot g'$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde süreklidir, dolayısıyla Teorem 25.2 gereği $[c,d]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir.*

Adım 4: Newton–Leibniz formülünün iki kez uygulanması. *h, $[c,d]$ üzerinde h' fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonudur ve h' integrallenebilirdir. Analizin birinci temel teoremi (Teorem 29.1, Newton–Leibniz formülü) gereği*

$$\int_c^d f\left(\, g(t) \,\right) g'(t)\, dt = \int_c^d h'(t)\, dt = h(d) - h(c) = F\left(\, g(d) \,\right) - F\left(\, g(c) \,\right).$$

Öte yandan F, f'nin $[a,b]$ üzerindeki bir ilkel fonksiyonu ve f integrallenebilir olduğundan, aynı teorem uç noktaları $g(c)$ ile $g(d)$ olan aralıkta da uygulanabilir:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = F\left(\, g(d) \,\right) - F\left(\, g(c) \,\right).$$

Burada $g(d) < g(c)$ olma olasılığı bir sorun çıkarmaz: yönlü integral tanımı (Tanım 27.1) gereği sınırlar ters çevrildiğinde integral işaret değiştirir, sağ taraftaki fark da öyle. İki eşitliğin sağ tarafları aynı olduğundan sol tarafları da eşittir; istenen elde edilmiş olur.

■

Formülü iki yönde de okuyabiliriz ve iki okuma iki farklı hesap tekniğine karşılık gelir.

i Formülün iki okunuşu

Sağdan sola (yerine koyma). Elimizde $\int_c^d f(g(t))g'(t)\, dt$ biçiminde bir integral varsa, $x = g(t)$ yazar, $dx = g'(t)\, dt$ diye kısaltır ve sınırları $t = c \mapsto x = g(c)$, $t = d \mapsto x = g(d)$ kuralıyla dönüştürürüz. Bu, klasik "u yerine koyma"dır ve genellikle integrali basitleştirir.

Soldan sağa (ters yerine koyma). Elimizde $\int_a^b f(x)\, dx$ varsa ve x'i uygun bir $g(t)$ ile değiştirmek işimizi kolaylaştıracaksa, $g(c) = a$ ve $g(d) = b$ olacak biçimde c ve d arar, sonra soldan sağa okuruz. Trigonometrik değişken değiştirmeler ($x = \sin t$, $x = \tan t$ gibi) bu türdendir. Bu yönde ilerlerken a ve b'yi görüntü olarak veren c, d noktalarının **var olduğunu** göstermek bize düşer; genellikle g'yi $[c,d]$'yi $[a,b]$ üzerine örten biçimde seçerek bunu sağlarız.

Şimdi kuralı örneklerde çalıştıralım.

Örnek 30.1 (Değişken Değiştirmeyle Hesaplar). Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 x e^{x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$

 CC BY-NC-SA 4.0

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Çözüm.
a) $u = g(x) = 1 + e^x$ diyelim. g sürekli türevlidir ve $g'(x) = e^x$'tir. Sınırlar: $x = 0$ için $u = 1 + e^0 = 2$, $x = 1$ için $u = 1 + e$. İntegrandı $f(u) = \dfrac{1}{u^2}$ ile $f(g(x))g'(x)$ biçiminde yazabiliriz; g'nin görüntü kümesi $[2, 1+e]$ olduğundan ve f bu aralıkta sürekli olduğundan Teorem 30.1 uygulanabilir:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \int_2^{1+e} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_2^{1+e} = -\frac{1}{1+e} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}.$$

Ortak paydada toplarsak

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e} = \frac{(1+e)-2}{2(1+e)} = \frac{e-1}{2(1+e)}.$$

b) $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Sınırlar: $x = 0 \mapsto u = 0$, $x = 1 \mapsto u = 1$. İntegrandda $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$ olduğundan

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\left[\,e^u\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

c) $u = \ln x$, $du = \dfrac{dx}{x}$. $g(x) = \ln x$ fonksiyonu $[1, e]$ üzerinde sürekli türevlidir. Sınırlar: $x = 1 \mapsto u = 0$, $x = e \mapsto u = 1$. Böylece

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

d) $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$. Sınırlar: $x = 0 \mapsto u = 0$, $x = \pi/2 \mapsto u = 1$. $f(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$ fonksiyonu $[0, 1]$'de süreklidir:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

e) Burada integrandı doğrudan $f(g(x))g'(x)$ biçiminde göremiyoruz; onun yerine formülü soldan sağa kullanacağız. $x = g(t) = t - 1$ değişimini yapalım, yani $u = 1 + x$ diyelim: $g : [1, 4] \to [0, 3]$ sürekli türevlidir, $g(1) = 0$, $g(4) = 3$ ve $g'(t) = 1$'dir. O hâlde

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^4 \big(t^{1/2} - t^{-1/2}\big)dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{1/2}\right]_1^4.$$

Üst sınırda $\frac{2}{3}\cdot 8 - 2\cdot 2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$, alt sınırda $\frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$ elde ederiz. Fark

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

f) Bu bir ters yerine koyma örneğidir. $g(t) = \sin t$ alalım; $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ sürekli türevlidir, $g(0) = 0$, $g(\pi/2) = 1$ ve $g'(t) = \cos t$'dir. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu $[0, 1]$'de süreklidir. $t \in [0, \pi/2]$ için $\cos t \geq 0$ olduğundan $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t\,| = \cos t$'dir. Formülü soldan sağa okuyalım:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.$$

Şimdi $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ özdeşliğini kullanalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} + 0\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

Sonuç beklendiği gibidir: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, birim çemberin birinci bölgedeki çeyrek diskinin alanıdır ve bu alan $\frac{\pi}{4}$'tür.
■

30.1.1 Sınırların Değişimi ve Birebirlik Sorusu

Belirsiz integralde değişken değiştirirken, sonuçta eski değişkene dönebilmek için genellikle g'nin tersinir olmasını isteriz. Belirli integralde ise böyle bir zorunluluk **yoktur**: sınırlar yalnızca $g(c)$ ve $g(d)$ uç değerleriyle belirlenir, g'nin arada ne yaptığı formülü etkilemez. Bu, ilk bakışta şaşırtıcı görünen ama ispattan doğrudan okunan bir özelliktir; çünkü ispatta g'nin tersini hiç kullanmadık.
Bunu, teoremi biraz daha genel biçimde yazarak kayda geçirelim. Tek gereken, f'nin g'nin **bütün değerlerini içeren** bir aralıkta sürekli olmasıdır.

Önerme 30.1 (Sınırların Değişimi Kuralı). *$J \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $g : [c,d] \to J$ sürekli türevli ve $f : J \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. O hâlde*

$$\int_c^d f\big(\,g(t)\,\big)\,g'(t)\,dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$$

*eşitliği geçerlidir. Burada g'nin birebir, monoton ya da örten olması **gerekmez**; yeni sınırlar yalnızca $g(c)$ ve $g(d)$ uç değerleridir.*

İspat.
g, $[c,d]$ üzerinde süreklidir (türevlenebilir olduğu için, Teorem 3.1). Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği g bu aralıkta en küçük ve en büyük değerlerini alır; $m = \min_{[c,d]} g$ ve $M = \max_{[c,d]} g$ diyelim. Kapalı ve sınırlı bir aralığın sürekli görüntüsü yine kapalı ve sınırlı bir aralık olduğundan (bkz. Analiz 1) $g([c,d]) = [m,M]$'dir; g'nin bütün değerleri J'nin içinde olduğundan da $[m,M] \subseteq J$'dir.
$m = M$ hâli önemsizdir: bu durumda g sabittir, dolayısıyla $g' \equiv 0$ ve $g(c) = g(d)$ olur; eşitliğin iki tarafı da sıfırdır. $m < M$ ise $g : [c,d] \to [m,M]$ sürekli türevli, f ise $[m,M]$ üzerinde süreklidir. Bu, Teorem 30.1'nin hipotezlerinin tam olarak sağlandığı durumdur ve teorem doğrudan istenen eşitliği verir. $g(c)$ ile $g(d)$ noktalarının $[m,M]$ içinde olduğuna, ama g'nin ara değerlerinin $g(c)$ ile $g(d)$ arasında kalmak zorunda olmadığına dikkat edelim; ispat bu bilgiyi hiçbir yerde kullanmaz.
■

Somut bir örnekle görelim. $g(x) = x^2$ fonksiyonu $[-1,2]$ üzerinde birebir değildir; örneğin $g(-1) = g(1) = 1$'dir. Buna karşın $f(u) = \cos u$ ve Önerme 30.1 ile

$$\int_{-1}^{2} 2x\cos(x^2)\,dx = \int_{g(-1)}^{g(2)} \cos u\,du = \int_1^4 \cos u\,du = \sin 4 - \sin 1$$

yazabiliriz. Sonucu doğrudan da doğrulayabiliriz: $\sin(x^2)$ fonksiyonu $2x\cos(x^2)$'nin bir ilkel fonksiyonudur ve $\big[\sin(x^2)\big]_{-1}^{2} = \sin 4 - \sin 1$'dir.
Aynı hesabı $[-1,1]$ üzerinde yaparsak sınırlar çakışır:

$$\int_{-1}^{1} 2x\cos(x^2)\,dx = \int_1^1 \cos u\,du = 0.$$

Bu da doğrudur, çünkü $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ tek bir fonksiyondur; bir sonraki kısımda bunun genel nedenini göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Süreklilik bütün görüntü üzerinde gereklidir

f'nin yalnızca $g(c)$ ile $g(d)$ **arasında** sürekli olması yetmez; g'nin aldığı **bütün** değerler üzerinde sürekli olması gerekir. Aksi hâlde formül anlamsız sonuçlar üretir.
$g(t) = t^2 - 1$ ve $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ alalım, $[c, d] = [0, 2]$ olsun. $g(0) = -1$, $g(2) = 3$'tür ve kuralı gözü kapalı uygularsak

$$\int_0^2 \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt \overset{?}{=} \int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2} \overset{?}{=} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

buluruz. Oysa $\dfrac{1}{x^2}$ de $\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$ de ($t \in [0, 2]$ için) tanımlı oldukları her yerde negatif değildir; öyleyse hiçbir okumada negatif bir sayı çıkamaz. Üstelik iki taraf da yakınsak bir integral değildir. Hatanın kaynağı açıktır: $g([0, 2]) = [-1, 3]$ aralığı 0 noktasını içerir ve $f(x) = 1/x^2$ orada tanımlı bile değildir; $t = 1$ noktasında sol taraftaki integrand da patlar. Önerme 30.1'nin "f, g'nin görüntüsünü içeren bir aralıkta süreklidir" koşulu tam da bu tuzağı kapatır.

30.2 Çift ve Tek Fonksiyonların İntegrali

Değişken değiştirme kuralının en hoş uygulamalarından biri, simetrik $[-a, a]$ aralıklarında integral alırken ortaya çıkar. Bir fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetrikse (çift fonksiyon) ya da orijine göre simetrikse (tek fonksiyon), integral hesabı ya yarıya iner ya da hiç hesap yapmadan biter.
Hatırlatalım: f fonksiyonu $[-a, a]$ üzerinde tanımlı olsun. Her $x \in [-a, a]$ için $f(-x) = f(x)$ ise f'ye **çift fonksiyon** (even function), $f(-x) = -f(x)$ ise **tek fonksiyon** (odd function) denir.

Teorem 30.2 (Simetri Teoremi). *$a > 0$ ve $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun.*

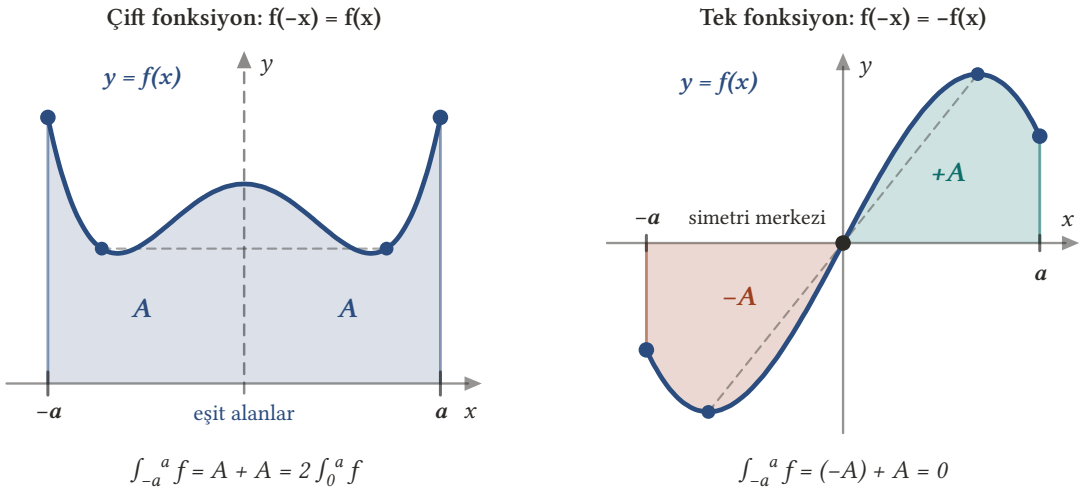
- *f çift bir fonksiyon ise*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

- *f tek bir fonksiyon ise*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 30.1: Simetri teoreminin resmi. Solda f *çifttir: grafiği* y *eksenine göre simetrik olduğundan [−*a*, 0] ile [0,* a*] üzerindeki alanlar birbirinin aynısıdır ve integral yarım aralıktaki hesabın iki katına iner. Sağda* f *tektir: grafiği orijine göre simetrik olduğundan sol yarıdaki bölge eksenin altında, onun eşi olan sağ yarıdaki bölge ise üstünde kalır; iki katkı aynı büyüklükte ama zıt işaretlidir, dolayısıyla toplamları sıfırdır. Her iki durumda da işi bitiren şey* x ↦ −x *değişken değiştirmesidir: sol yarıyı sağ yarıya taşır, çift fonksiyonda işareti korur, tek fonksiyonda ters çevirir.*

İspat.
Adım 1: İntegrali ikiye ayıralım. *f sürekli olduğundan $[-a,a]$ üzerinde integrallenebilirdir (Teorem 25.2). Aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) gereği*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Adım 2: Sol parçayı $x \mapsto -x$ ile dönüştürelim. *$g : [0,a] \to [-a,a]$ fonksiyonunu $g(t) = -t$ ile tanımlayalım. g sürekli türevlidir ve $g'(t) = -1$'dir; ayrıca $g(0) = 0$, $g(a) = -a$'dır. Teorem 30.1 gereği*

$$\int_{g(0)}^{g(a)} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f\big(\,g(t)\,\big)\,g'(t)\,dt,$$

yani

$$\int_{0}^{-a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(-t)\,dt.$$

Sol taraftaki integralin sınırlarını yönlü integral tanımıyla (Tanım 27.1) ters çevirirsek $\int_0^{-a} f = -\int_{-a}^{0} f$ olur. İki tarafı -1 ile çarparak

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt$$

elde ederiz. Bu eşitlik, f'nin çift ya da tek olmasından bağımsız olarak her sürekli f için doğrudur.
Adım 3: Simetriyi kullanalım. *f çift ise $f(-t) = f(t)$ olduğundan*

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

olur; Adım 1'deki eşitliğe koyarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

f tek ise $f(-t) = -f(t)$ olduğundan

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \big(-f(t)\big)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

olur (burada integralin lineerliğini, Teorem 27.1, kullandık) ve

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

bulunur.
■

i Süreklilik şart mı?

İspatta sürekliliği yalnızca Teorem 30.1'yi uygulayabilmek için kullandık. Aslında sonuç, f'nin $[-a,a]$ üzerinde yalnızca Riemann integrallenebilir olması hâlinde de doğrudur: bu durumda Adım 2'deki eşitlik, $[-a,0]$ bölünüşlerinin $t \mapsto -t$ ile $[0,a]$ bölünüşlerine birebir eşlenmesi ve karşılıklı alt-üst toplamların (Tanım 24.3) eşit çıkması gözlemiyle doğrudan gösterilir. Biz sürekli durumla yetineceğiz, çünkü uygulamada karşılaşacağımız fonksiyonlar süreklidir.

Örnek 30.2 (Simetriyle Hesaplar). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 \cos x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\,dx \ (a>0)$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(x^4 + x^3 + 2\big)\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(x\cos x + \sin^2 x\big)\,dx$

Çözüm.
a) $u(x) = x^3$ tek, $v(x) = \cos x$ çifttir. Tek bir fonksiyonla çift bir fonksiyonun çarpımı tektir: $u(-x)v(-x) = -u(x)v(x)$. Demek ki $f(x) = x^3\cos x$ tektir ve cos ile polinomlar sürekli olduğundan f süreklidir. Teorem 30.2 gereği

$$\int_{-1}^{1} x^3\cos x\,dx = 0.$$

b) $f(x) = x^2$ çifttir, çünkü $(-x)^2 = x^2$'dir. O hâlde

$$\int_{-a}^{a} x^2\,dx = 2\int_{0}^{a} x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3}.$$

c) sin tek olduğundan $\sin^5(-x) = (-\sin x)^5 = -\sin^5 x$'tir; yani $f(x) = \sin^5 x$ tektir. Aralık $[-\pi,\pi]$ simetriktir, dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\,dx = 0.$$

Genel olarak n tek sayı ise $\sin^n$ tek, n çift sayı ise $\sin^n$ çift bir fonksiyondur.
d) İntegrali lineerlikle (Teorem 27.1) parçalayalım. x^4 ve sabit fonksiyon 2 çift, x^3 tektir:

$$\int_{-1}^{1} \left(x^4 + x^3 + 2 \right) dx = \int_{-1}^{1} x^4\,dx + \int_{-1}^{1} x^3\,dx + \int_{-1}^{1} 2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx + 0 + 2\int_{0}^{1} 2\,dx.$$

Buradan

$$2\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$$

elde ederiz.
e) $x\cos x$ ifadesi tek (tek $\times$ çift), $\sin^2 x$ ise çifttir. Öyleyse ilk terimin integrali sıfırdır ve

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x\cos x + \sin^2 x \right) dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx.$$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ özdeşliğiyle

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

bulunur; sonuç $2\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$'dir.
■

30.3 Periyodik Fonksiyonların İntegrali

Simetriye benzer bir başka tasarruf, periyodik fonksiyonlarda ortaya çıkar. $T > 0$ olmak üzere her x için $f(x+T) = f(x)$ oluyorsa f'ye **T periyotlu** (periodic with period T) denir. Böyle bir fonksiyonun bir tam periyot boyunca integrali, periyodun nereden başladığına bağlı değildir: pencereyi sağa kaydırdığımızda sağdan giren parça, soldan çıkan parçanın tıpatıp aynısıdır.

Önerme 30.2 (Periyot Boyunca İntegralin Kaymadan Bağımsızlığı). *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ve T periyotlu olsun. O hâlde her $a\in\mathbb{R}$ için*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

İspat.
Adım 1: İntegrali parçalayalım. *f sürekli olduğundan her kapalı sınırlı aralıkta integrallenebilirdir. Yönlü integralde toplamsallık (Önerme 27.1) uç noktaların sıralamasından bağımsız olarak geçerli olduğundan, ara nokta olarak T'yi alıp*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\,dx$$

yazabiliriz. (Bu eşitlik $a<0$, $0\le a\le T$ ya da $a>T$ durumlarının hepsinde geçerlidir; sınırların sıralaması değişse bile yönlü integral geleneği sayesinde işaretler kendiliğinden yerine oturur.)
Adım 2: Sağdaki parçayı T kadar geri kaydıralım. *$g(t) = t+T$ diyelim; g sürekli türevlidir, $g'(t)=1$'dir, $g(0)=T$ ve $g(a)=a+T$'dir. Önerme 30.1 gereği*

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{g(0)}^{g(a)} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t+T)\,dt.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Kuralı $a>0$ ise $[0,a]$, $a<0$ ise $[a,0]$ aralığında uyguladığımıza dikkat edelim: ikinci durumda kural doğrudan $\int_a^0 f(t+T)\,dt = \int_{a+T}^{T} f(x)\,dx$ verir ve iki tarafın işaretini değiştirmek yukarıdaki eşitliği getirir. $a=0$ ise iki taraf da sıfırdır.

Adım 3: Periyodikliği kullanalım. *Her t için $f(t+T)=f(t)$ olduğundan*

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

Adım 4: Toplayalım. *Adım 1'e geri koyarsak*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{T} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

olur; son eşitlikte yine Önerme 27.1'i, bu kez ara nokta olarak a'yı alarak kullandık. İspat tamamlanmıştır. ■

Örnek 30.3 (Periyodik İntegral Hesapları).

a) Her $a\in\mathbb{R}$ için $\displaystyle\int_a^{a+\pi} |\sin x|\,dx$ değerini bulunuz.

b) $\displaystyle\int_{100}^{100+2\pi} \sin^2 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
a) $|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ olduğundan $f(x)=|\sin x|$ fonksiyonu π periyotludur; ayrıca sin sürekli ve mutlak değer sürekli olduğundan bileşke süreklidir (bkz. Analiz 1). Önerme 30.2 gereği

$$\int_a^{a+\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx.$$

$[0,\pi]$ üzerinde $\sin x\geq 0$ olduğundan $|\sin x| = \sin x$'tir ve

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -(-1)-(-1) = 2.$$

Demek ki değer, a'dan bağımsız olarak 2'dir.
b) $\sin^2$ fonksiyonu 2π periyotludur (aslında periyodu π'dir, ama 2π de bir periyottur ve bize bu yeter). Önerme 30.2 gereği

$$\int_{100}^{100+2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x-\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

Alt sınırın 100 gibi tuhaf bir sayı olması hesabı hiç zorlaştırmadı; bütün iş periyodikliği fark etmekti. ■

30.4 Belirli İntegralde Kısmi İntegrasyon

Değişken değiştirme zincir kuralının integral karşılığıydı; kısmi integrasyon ise çarpım kuralının integral karşılığıdır. Belirsiz integraldeki biçimini Teorem 19.2'da görmüştük. Belirli integralde tek fark, çarpım teriminin uç noktalarda değerlendirilmesidir.
Hipotezlere dikkat edelim: f ve g'nin türevlenebilir olması yetmez, f' ve g''nün de integrallenebilir olması istenir. Bunun nedeni ispatta görülecek: $(fg)'$ fonksiyonunun integralini alacağız ve bu integralin var olduğunu bilmemiz gerekiyor.

Teorem 30.3 (Belirli İntegralde Kısmi İntegrasyon). *$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir olsun ve f' ile g' türevleri $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde $f'g$ ve fg' fonksiyonları da integrallenebilirdir ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[\, f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

eşitliği geçerlidir; burada $\Big[\, f(x)g(x)\Big]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$*'dır.*

İspat.
Adım 1: Çarpımların integrallenebilirliği. *f ve g türevlenebilir olduklarından süreklidirler (Teorem 3.1), dolayısıyla integrallenebilirdirler (Teorem 25.2) ve sınırlıdırlar. f' ile g' de varsayım gereği integrallenebilir, dolayısıyla sınırlıdır (Teorem 26.3).*
İki integrallenebilir fonksiyonun çarpımının integrallenebilir olduğunu görmek için şu özdeşliği kullanalım: u ve v integrallenebilir ise

$$uv = \frac{1}{4}\left[\,(u+v)^2 - (u-v)^2\,\right].$$

$u+v$ ve $u-v$ integrallenebilirdir (Teorem 27.1) ve sınırlıdır; $\varphi(s) = s^2$ fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 27.2 gereği $(u+v)^2$ ve $(u-v)^2$ integrallenebilirdir. Yine lineerlik ile uv integrallenebilirdir. Bunu $u = f', v = g$ ve $u = f, v = g'$ seçimleriyle uygulayınca $f'g$ ile fg' integrallenebilir çıkar.
Adım 2: Çarpım kuralı. *f ve g türevlenebilir olduğundan çarpımları da türevlenebilirdir ve türev aritmetiği (Teorem 3.2) gereği her $x \in [a,b]$ için*

$$\big(\, f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Sağ taraf, Adım 1'e göre integrallenebilir iki fonksiyonun toplamıdır; öyleyse $(fg)'$ de $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir.
Adım 3: Newton–Leibniz formülü. *fg fonksiyonu, integrallenebilir olan $(fg)'$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde bir ilkel fonksiyonudur. Analizin birinci temel teoremi (Teorem 29.1) gereği*

$$\int_a^b \big(\, f(x)g(x)\big)'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) = \Big[\, f(x)g(x)\Big]_a^b.$$

Adım 4: Lineerlik ve düzenleme. *Adım 2'deki eşitliğin iki tarafının da integralini alıp lineerliği (Teorem 27.1) kullanırsak*

$$\Big[\, f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

olur. Buradan $\int_a^b f'g$ terimini yalnız bırakmak istenen formülü verir.
■

Uygulamada formülü genellikle $u = g(x)$, $dv = f'(x)\,dx$ (dolayısıyla $du = g'(x)\,dx$, $v = f(x)$) kısaltmasıyla

$$\int_a^b u\,dv = \Big[\, uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

biçiminde yazarız. Seçimi yaparken ölçüt şudur: u, türev alındıkça **basitleşen** çarpan olmalı; dv ise ilkel fonksiyonu kolayca bulunabilen çarpan.

Örnek 30.4 (Kısmi İntegrasyonla Hesaplar). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

 CC BY-NC-SA 4.0

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \arctan x\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{1} x^2 e^x\,dx$

Çözüm.
a) $u = x$, $dv = \sin x\,dx$ alalım; o hâlde $du = dx$ ve $v = -\cos x$'tir. Her iki fonksiyon da sürekli türevlidir, dolayısıyla Teorem 30.3 uygulanabilir:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$$

Sınır terimi: $-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} - 0 = 0$. Kalan integral: $\Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$. Sonuç

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = 0 + 1 = 1.$$

b) $u = x$, $dv = e^x\,dx$; $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[\,xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \Big[\,e^x\Big]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

c) $\ln x$ tek başına bir çarpan gibi görünmese de $1\cdot\ln x$ yazarak kısmi integrasyona sokabiliriz: $u = \ln x$, $dv = dx$; $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$. $[1, e]$ üzerinde ln sürekli türevlidir:

$$\int_1^e \ln x\,dx = \Big[\,x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx = (e\cdot 1 - 1\cdot 0) - \int_1^e 1\,dx = e - (e-1) = 1.$$

d) Burada kısmi integrasyonu iki kez uygulayıp aranan integrali kendi kendine bağlayacağız. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$ diyelim. Önce $u = \cos x$, $dv = e^x dx$ seçelim; $du = -\sin x\,dx$, $v = e^x$:

$$I = \Big[\,e^x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x\sin x\,dx = \big(\,e^{\pi/2}\cdot 0 - 1\cdot 1\,\big) + J = -1 + J,$$

burada $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\sin x\,dx$'tir. Şimdi J'ye aynı yöntemi uygulayalım: $u = \sin x$, $dv = e^x dx$; $du = \cos x\,dx$, $v = e^x$:

$$J = \Big[\,e^x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx = \big(\,e^{\pi/2}\cdot 1 - 1\cdot 0\,\big) - I = e^{\pi/2} - I.$$

İki eşitliği birleştirirsek $I = -1 + e^{\pi/2} - I$, yani $2I = e^{\pi/2} - 1$ ve

$$I = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}.$$

e) $u = \arctan x$, $dv = dx$; $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$:

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = \Big[\,x\arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Kalan integral için $w = 1 + x^2$ değişimini yapalım; $dw = 2x\,dx$, sınırlar $x = 0 \mapsto w = 1$ ve $x = 1 \mapsto w = 2$:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\Big[\ln w\Big]_1^2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Sonuç

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

f) $u = x^2$, $dv = e^x dx$; $du = 2x\,dx$, $v = e^x$:

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \Big[\,x^2 e^x\Big]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x\,dx = e - 2\cdot 1 = e - 2,$$

burada son adımda **(b)** şıkkında bulduğumuz $\int_0^1 x e^x dx = 1$ değerini kullandık. Polinom çarpanlı integrallerde kısmi integrasyonun her uygulanışında polinomun derecesinin bir azaldığına dikkat edelim; bu, yöntemin en tipik kullanım biçimidir.
■

30.5 Leibniz Formülü: İntegral İşareti Altında Sınırların Türevi

Analizin ikinci temel teoremi bize $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ eşitliğini vermişti: üst sınır x olan bir integralin türevi, integrandın x noktasındaki değeridir. Peki üst sınır x değil de x^2 ise? Ya alt sınır da sabit değil, $\sin x$ gibi bir fonksiyon ise?
Yanıt, ikinci temel teoremi zincir kuralıyla birleştirmekten ibarettir ve çok sade bir formüle götürür. Sezgi de basittir: üst sınır $h(x)$ birim hızla sağa kaydığında alan $f(h(x))$ hızıyla artar; ama h birim hızla değil $h'(x)$ hızıyla kaydığı için katkı $f(h(x))h'(x)$ olur. Alt sınırın kayması ise alanı **azaltır**, bu yüzden onun katkısı eksi işaretlidir.

Teorem 30.4 (Leibniz Formülü). *$J \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : J \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $g, h : I \to J$ fonksiyonları I üzerinde türevlenebilir olsun. O hâlde*

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt, \qquad x \in I$$

ile tanımlanan F fonksiyonu I üzerinde türevlenebilirdir ve

$$F'(x) = f\,\big(\,h(x)\,\big)\,h'(x) - f\,\big(\,g(x)\,\big)\,g'(x).$$

İspat.
Adım 1: Bir ilkel fonksiyon seçelim. *f, J aralığında sürekli olduğundan bir ilkel fonksiyonu vardır: $\alpha \in J$ bir nokta olmak üzere*

$$K(y) = \int_\alpha^y f(t)\,dt, \qquad y \in J$$

tanımlayalım. Analizin ikinci temel teoremi (Teorem 29.2) gereği K, J üzerinde türevlenebilirdir ve her $y \in J$ için

$$K'(y) = f(y).$$

Adım 2: F'yi K cinsinden yazalım. *$\alpha, g(x), h(x) \in J$ olduğundan, yönlü integralde toplamsallık (Önerme 27.1) ile*

$$\int_\alpha^{h(x)} f(t)\,dt = \int_\alpha^{g(x)} f(t)\,dt + \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

yazabiliriz (bu eşitlik, üç noktanın hangi sırada olduğundan bağımsız olarak geçerlidir). Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = K\left(\,h(x)\,\right) - K\left(\,g(x)\,\right).$$

Adım 3: Zincir kuralı. *K fonksiyonu J üzerinde, h fonksiyonu ise I üzerinde türevlenebilir ve $h(I) \subseteq J$ olduğundan, zincir kuralı (Teorem 4.1) $K \circ h$ bileşkesine uygulanabilir. Sabit bir $x_0 \in I$ için: h, x_0'da türevlenebilir ve K, $h(x_0)$ noktasında türevlenebilir olduğundan $K \circ h$ da x_0'da türevlenebilirdir ve*

$$(K \circ h)'(x_0) = K'\left(\,h(x_0)\,\right) h'(x_0) = f\left(\,h(x_0)\,\right) h'(x_0).$$

Son eşitlikte Adım 1'deki $K' = f$ bilgisini $y = h(x_0) \in J$ noktasında kullandık. Aynı akıl yürütme $K \circ g$ için de geçerlidir:

$$(K \circ g)'(x_0) = f\left(\,g(x_0)\,\right) g'(x_0).$$

Adım 4: Farkın türevi. *Türev aritmetiği (Teorem 3.2) gereği iki türevlenebilir fonksiyonun farkı türevlenebilirdir ve türevi türevlerin farkıdır. $x_0 \in I$ keyfî olduğundan*

$$F'(x) = (K \circ h)'(x) - (K \circ g)'(x) = f\left(\,h(x)\,\right) h'(x) - f\left(\,g(x)\,\right) g'(x)$$

her $x \in I$ için geçerlidir.

■

Formülün en sık kullanılan özel hâli, alt sınırın sabit ve üst sınırın x'in kendisi olduğu durumdur.

Sonuç 30.1 (Sabit Sınırlı Özel Durum). *f, J aralığında sürekli ve $a \in J$ olsun. O hâlde her $x \in J$ için*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = -f(x).$$

İspat.
İlk eşitlik için Teorem 30.4'nu $g(x) = a$ (sabit fonksiyon, $g'(x) = 0$) ve $h(x) = x$ ($h'(x) = 1$) seçimiyle uygulayalım:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\cdot 1 - f(a)\cdot 0 = f(x).$$

İkinci eşitlik için $g(x) = x$, $h(x) = a$ alalım:

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = f(a)\cdot 0 - f(x)\cdot 1 = -f(x).$$

■

> **i** Bu yeni bir ispat değil, bir tutarlılık kontrolü
>
> Sonuç 30.1'teki ilk eşitlik aslında analizin ikinci temel teoreminin kendisidir ve biz Teorem 30.4'nun ispatında tam da ondan yararlandık. Dolayısıyla burada ikinci temel teoremin **yeni bir ispatını** elde etmiş olmuyoruz; Leibniz formülünün onu bir özel durum olarak içerdiğini, yani genelleştirmenin tutarlı olduğunu görüyoruz. Bir formülü genelleştirdiğimizde, çıkış noktamızı özel durum olarak geri verip vermediğine bakmak her zaman iyi bir alışkanlıktır.

Leibniz formülü, daha önce ispatladığımız bir sonucu bambaşka bir yoldan da vermektedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Periyodiklik sonucunun ikinci ispatı

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ve T periyotlu olsun. $\Phi(a)=\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ tanımlayalım. Teorem 30.4'nu $g(a)=a$, $h(a)=a+T$ ile uygularsak ($g'(a)=h'(a)=1$)

$$\Phi'(a)=f(a+T)\cdot 1-f(a)\cdot 1=f(a+T)-f(a)=0$$

buluruz; son eşitlik periyodiklikten gelir. Türevi $\mathbb{R}$ üzerinde özdeş olarak sıfır olan bir fonksiyon sabittir (Sonuç 8.1); öyleyse her a için $\Phi(a)=\Phi(0)=\displaystyle\int_0^{T} f(x)\,dx$'tir. Bu, Önerme 30.2'in ikinci ve daha kısa bir ispatıdır.

Örnek 30.5 (Leibniz Formülüyle Türev Hesapları). Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

b) $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^3}\sqrt{1+t^4}\,dt$

c) $F(x)=\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{dt}{1+t^2}$

d) $x>0$ için $F(x)=\displaystyle\int_{2x}^{3x}\frac{dt}{t}$

e) f sürekli olmak üzere $F(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$

Çözüm.
a) Burada $f(t)=e^{-t^2}$ (bütün $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli), $g(x)=x$ ve $h(x)=x^2$'dir; $g'(x)=1$, $h'(x)=2x$. İntegralin kendisini hesaplamamıza gerek yoktur — zaten e^{-t^2}'nin ilkel fonksiyonu temel fonksiyonlarla yazılamaz. Teorem 30.4 doğrudan verir:

$$F'(x)=e^{-(x^2)^2}\cdot 2x-e^{-x^2}\cdot 1=2xe^{-x^4}-e^{-x^2}.$$

b) $f(t)=\sqrt{1+t^4}$ süreklidir, $g(x)=1$ sabittir ($g'=0$), $h(x)=x^3$ ve $h'(x)=3x^2$'dir:

$$F'(x)=\sqrt{1+(x^3)^4}\cdot 3x^2-0=3x^2\sqrt{1+x^{12}}.$$

c) $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ süreklidir, $g(x)=\sin x$, $h(x)=\cos x$; $g'(x)=\cos x$, $h'(x)=-\sin x$:

$$F'(x)=\frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}-\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

Sonucu doğrulayalım: $\arctan$ fonksiyonu $\dfrac{1}{1+t^2}$'nin bir ilkel fonksiyonu olduğundan $F(x)=\arctan(\cos x)-\arctan(\sin x)$'tir ve zincir kuralıyla türev alırsak yukarıdaki ifadenin aynısını buluruz.
d) $f(t)=\dfrac{1}{t}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde süreklidir; $x>0$ için $2x,3x\in(0,\infty)$'dur. $g(x)=2x$, $h(x)=3x$; $g'(x)=2$, $h'(x)=3$:

$$F'(x)=\frac{1}{3x}\cdot 3-\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0.$$

Türev $(0,\infty)$ aralığında özdeş olarak sıfır olduğundan F sabittir (Sonuç 8.1). Sabitin değerini bulmak için doğrudan hesaplayalım:

$$F(x)=\Big[\ln t\Big]_{2x}^{3x}=\ln(3x)-\ln(2x)=\ln\frac{3}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerçekten de F sabittir; Leibniz formülü bu sabitliği integrali hiç hesaplamadan görmemizi sağladı.
e) İntegrandda x hem sınırlarda hem de integralin içinde göründüğü için formülü doğrudan uygulayamayız. Çare, x'i integralin dışına çıkarmaktır: t'ye göre integral alırken x bir sabit gibi davrandığından lineerlik (Teorem 27.1) ile

$$F(x) = \int_0^x \big(xf(t) - tf(t) \big)\, dt = x\int_0^x f(t)\, dt - \int_0^x tf(t)\, dt.$$

Şimdi $A(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ ve $B(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\, dt$ diyelim. Sonuç 30.1 gereği $A'(x) = f(x)$ ve $B'(x) = xf(x)$'tir. Çarpım kuralı (Teorem 3.2) ile

$$F'(x) = \big(xA(x)\big)' - B'(x) = A(x) + xA'(x) - B'(x) = \int_0^x f(t)\, dt + xf(x) - xf(x),$$

yani

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Bir kez daha türev alırsak $F''(x) = f(x)$ buluruz. Yani F, f'nin "iki kez integrali"dir; bu gözlem diferansiyel denklemlerde sıkça kullanılır.
■

30.5.1 Leibniz Formülü ile Limit Hesapları

Leibniz formülünün belki de en pratik kullanımı, integral içeren belirsiz biçimli limitlerdedir. $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ biçimindeki bir limitte pay bir integral ise, L'Hôpital Kuralı uygulandığında payın türevi Leibniz formülüyle anında yazılır; böylece hesaplanamayan bir integral bile limitten temizlenmiş olur.

Örnek 30.6 (İntegralli Limitler). Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\, dt$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} \sin t\, dt$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt}{e^{x^2}}$

Çözüm.
a) $N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\, dt$ diyelim. İntegrand $t \mapsto \frac{t^2}{1+t}$, $t = -1$ dışında süreklidir; 0 çevresindeki küçük bir aralıkta rahatça çalışabiliriz. $N(0) = 0$ ve $x^3 \to 0$ olduğundan limit $\frac{0}{0}$ belirsiz biçimindedir.
Sonuç 30.1 gereği $N'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$'tir; paydanın türevi ise $3x^2$'dir. $x \neq 0$ için

$$\frac{N'(x)}{3x^2} = \frac{x^2}{(1+x)\cdot 3x^2} = \frac{1}{3(1+x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}.$$

Türevlerin oranının limiti var olduğundan L'Hôpital kuralı (Teorem 11.2) uygulanabilir. Limit iki yönlü olduğu için kuralı 0'ın sağındaki ve solundaki birer aralıkta ayrı ayrı uygularız; iki tek yönlü limit de $\frac{1}{3}$ çıktığından (bkz. Analiz 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\, dt = \frac{1}{3}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

b) Bu kez üst sınır x^2 olduğu için zincir kuralı devreye girer. $M(x) = \int_0^{x^2} \sin t\,dt$ olsun; Teorem 30.4'nu $g(x) = 0$, $h(x) = x^2$ ile uygularsak

$$M'(x) = \sin(x^2) \cdot 2x.$$

$M(0) = 0$ ve $x^4 \to 0$ olduğundan limit yine $\frac{0}{0}$ biçimindedir. L'Hôpital kuralıyla (Teorem 11.2), $x \neq 0$ için

$$\frac{M'(x)}{4x^3} = \frac{2x\sin(x^2)}{4x^3} = \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2},$$

çünkü $u = x^2 \to 0$ iken $\frac{\sin u}{u} \to 1$'dir (bkz. Analiz 1). Demek ki limit $\frac{1}{2}$'dir.
Not olarak, integrali doğrudan hesaplayarak da doğrulayabiliriz: $M(x) = 1 - \cos(x^2)$ ve $\frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2}$ olduğundan $u = x^2$ ile aynı sonuç çıkar.
c) $x \to \infty$ iken $e^{x^2} \to \infty$'dur; pay da $\int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1\,dt = x \to \infty$ olduğundan (burada $e^{t^2} \geq 1$ ve Teorem 28.1 kullanıldı) limit $\frac{\infty}{\infty}$ biçimindedir. Payın türevi Sonuç 30.1 ile e^{x^2}, paydanın türevi zincir kuralıyla $2xe^{x^2}$'dir. $x > 0$ için

$$\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2x} \underset{x\to\infty}{\to} 0.$$

L'Hôpital kuralının $\frac{\infty}{\infty}$ hâli (Teorem 11.3) gereği aranan limit 0'dır. Sonuç sezgiyle de uyumludur: e^{x^2} o kadar hızlı büyür ki, altında biriken alan bile ona yetişemez.
■

30.6 Wallis Formülü

Bölümü, kısmi integrasyonun klasik ve çok verimli bir uygulamasıyla kapatalım. Amacımız her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$$

integralini hesaplamak. Bunları tek tek hesaplamak yerine, I_n ile I_{n-2} arasında bir **indirgeme bağıntısı** kuracağız; sonra I_0 ile I_1'den başlayarak bütün değerleri türeteceğiz.

Önerme 30.3 (Wallis İndirgeme Formülü). *Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ olsun. O hâlde:*

- $I_0 = \frac{\pi}{2}$ *ve* $I_1 = 1$*'dir.*
- *Her $n \geq 2$ için*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

- *$n = 2m$ çift ise ($m \geq 1$)*

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{(2m)(2m-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k}.$$

- *$n = 2m+1$ tek ise ($m \geq 1$)*

$$I_{2m+1} = \frac{(2m)(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5\cdot 3} = \prod_{k=1}^{m} \frac{2k}{2k+1}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Ayrıca her n için $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = I_n$'dir.

İspat.
Adım 1: Başlangıç değerleri.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1.$$

Adım 2: İndirgeme bağıntısı. *$n \geq 2$ olsun. İntegrandı $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ diye ayıralım ve kısmi integrasyon uygulayalım: $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x\,dx$; buradan $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx$ ve $v = -\cos x$. Her iki fonksiyon da $[0, \pi/2]$ üzerinde sürekli türevlidir, dolayısıyla Teorem 30.3 uygulanabilir:*

$$I_n = \Big[-\sin^{n-1} x \cos x\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Sınır terimi sıfırdır: $x = \pi/2$'de $\cos(\pi/2) = 0$, $x = 0$'da ise $n - 1 \geq 1$ olduğundan $\sin^{n-1} 0 = 0$'dır.
Adım 3: Kosinüsü sinüs cinsine çevirelim. *$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ yazıp lineerliği (Teorem 27.1) kullanalım:*

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \left(\,1 - \sin^2 x\,\right) dx = (n-1)\left(\,I_{n-2} - I_n\,\right).$$

Buradan $I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$, yani $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ve

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

elde edilir.
Adım 4: Kapalı biçimler. *İndirgemeyi $n = 2m$ için tekrar tekrar uygulayalım:*

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} = \cdots = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0.$$

$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan istenen çarpım biçimi çıkar. Aynı şekilde $n = 2m+1$ için

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1} = \cdots = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1$$

ve $I_1 = 1$'dir. (Bu iki eşitlik m üzerinden tümevarımla, Tümevarım İlkesi kullanılarak da yazılabilir: temel adım $m = 1$ için doğrudan doğrulanır, tümevarım adımı ise Adım 3'teki bağıntının bir kez uygulanmasından ibarettir.)
Adım 5: Kosinüslü integral. *$g(t) = \dfrac{\pi}{2} - t$ alalım; g sürekli türevlidir, $g([0, \tfrac{\pi}{2}]) = [0, \tfrac{\pi}{2}]$, $g'(t) = -1$, $g(0) = \dfrac{\pi}{2}$ ve $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$'dır. $f(x) = \sin^n x$ ile Teorem 30.1:*

$$\int_{\pi/2}^{0} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n\!\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cdot(-1)\,dt.$$

Sol taraf $-I_n$'dir; sağ tarafta $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ olduğundan sağ taraf $-\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$'dir. İki tarafı -1 ile çarpınca

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = I_n$$

bulunur.
■

Örnek 30.7 (Wallis Formülünün Uygulamaları). Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^8 x\,dx$

Çözüm.
a) $n=6$ çifttir; indirgemeyi üç kez uygulayalım:

$$I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 = \frac{15}{48}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

b) Önerme 30.3'nun son maddesi gereği $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^7 x\,dx = I_7$'dir ve $n=7$ tektir:

$$I_7 = \frac{6}{7}I_5 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}I_3 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1 = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}.$$

c) Önce $x=\sin t$ değişimiyle integrali trigonometrik biçime sokalım. $g(t)=\sin t$ fonksiyonu $[0,\tfrac{\pi}{2}]$'yi $[0,1]$ üzerine örter, sürekli türevlidir ve $g(0)=0$, $g(\pi/2)=1$'dir. $t\in[0,\pi/2]$ için $\cos t\geq 0$ olduğundan $\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$'dir ve Teorem 30.1 gereği

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt.$$

Şimdi $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$ yazarsak

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,\left(\,1-\sin^2 t\,\right)dt = I_2 - I_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}.$$

d) $n=8$ çift olduğundan $\sin^8$ çift bir fonksiyondur; Teorem 30.2 gereği

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^8 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^8 x\,dx = 2I_8.$$

İndirgemeyle

$$I_8 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{105}{384}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{128}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256},$$

dolayısıyla aranan değer $2\cdot\dfrac{35\pi}{256} = \dfrac{35\pi}{128}$'dir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Wallis çarpımı

I_n dizisi, π sayısı için ünlü bir sonsuz çarpım verir. Önce her n için $I_n > 0$ olduğunu kaydedelim: $\sin^n x \geq 0$'dır ve $x = \frac{\pi}{4}$ noktasında $\sin^n x > 0$ olup integrand orada süreklidir, dolayısıyla kesin pozitiflik teoremi (Teorem 28.3) gereği $I_n > 0$'dır. Şimdi dizinin azalan olduğunu görelim: her $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $0 \leq \sin x \leq 1$ olduğundan $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$'tir ve Teorem 28.1 gereği $I_{n+1} \leq I_n$'dir. Öyleyse $m \geq 1$ için

$$I_{2m+1} \leq I_{2m} \leq I_{2m-1}.$$

İndirgeme bağıntısı $I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1}$ olduğundan $\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$'dir. Yukarıdaki eşitsizliği pozitif olan I_{2m+1}'e bölersek

$$1 \leq \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \leq \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m}.$$

Sağ taraf 1'e yakınsadığından sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Öte yandan kapalı biçimleri yerine koyarsak

$$\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^{m} \frac{2k+1}{2k} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{m} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

Bu ifade 1'e yakınsadığına göre

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

elde ederiz. Bu eşitliğe **Wallis çarpımı** denir ve π'yi yalnızca tam sayılarla ifade eden ilk sonsuz çarpımlardan biridir.

30.7 Alıştırmalar

Alıştırma 30.1 (Belirli İntegralde Yöntemler Üzerine).

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

b) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(x^2 \tan x + \cos x \right) dx$ integralini hesaplayınız.

c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

d) $x > 0$ için $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x t \sin t\,dt$ limitini hesaplayınız.

f) $\displaystyle\int_0^{10\pi} |\sin x|\,dx$ integralini hesaplayınız.

g) f fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli olsun. $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ olduğunu gösteriniz ve bunu kullanarak $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
a) $u = 1 + x^2$ diyelim; $du = 2x\,dx$ ve sınırlar $x = 0 \mapsto u = 1$, $x = 1 \mapsto u = 2$'dir. $f(u) = \dfrac{1}{u^2}$ fonksiyonu $[1, 2]$'de süreklidir, dolayısıyla Teorem 30.1 uygulanabilir:

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}.$$

b) İntegrali lineerlikle ikiye ayıralım. x^2 çift, $\tan x$ tektir; çarpımları $x^2 \tan x$ tektir. tan fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ üzerinde süreklidir, çünkü bu aralıkta $\cos x \neq 0$'dır. Teorem 30.2 gereği

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 \tan x\,dx = 0.$$

cos çift olduğundan

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\pi/4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Toplam sonuç $\sqrt{2}$'dir.
c) İki kez kısmi integrasyon uygulayacağız. Önce $u = x^2$, $dv = e^{-x}dx$; $du = 2x\,dx$, $v = -e^{-x}$:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 x e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 x e^{-x}\,dx.$$

Kalan integral için $u = x$, $dv = e^{-x}dx$; $du = dx$, $v = -e^{-x}$:

$$\int_0^1 x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1\right) = 1 - \frac{2}{e}.$$

Yerine koyarsak

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 2 - \frac{5}{e}.$$

d) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde süreklidir ve $x > 0$ için $x, 2x \in (0, \infty)$'dur. $g(x) = x$, $h(x) = 2x$; $g'(x) = 1$, $h'(x) = 2$. Teorem 30.4 gereği

$$F'(x) = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 - \frac{\sin x}{x} \cdot 1 = \frac{\sin 2x - \sin x}{x}.$$

e) $N(x) = \displaystyle\int_0^x t \sin t\,dt$ olsun. İntegrand sürekli, $N(0) = 0$ ve $x^3 \to 0$ olduğundan limit $\dfrac{0}{0}$ biçimindedir. Sonuç 30.1 gereği $N'(x) = x \sin x$'tir. L'Hôpital kuralıyla (Teorem 11.2), $x \neq 0$ için

$$\frac{N'(x)}{3x^2} = \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\to} \frac{1}{3},$$

çünkü Sinüs x Bölü x Limiti gereği $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$'dir. Aranan limit $\dfrac{1}{3}$'tür.
f) $|\sin x|$ fonksiyonu π periyotludur ve süreklidir. Aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) ile $[0, 10\pi]$ aralığını $[k\pi, (k+1)\pi]$ biçiminde on parçaya ayıralım:

$$\int_0^{10\pi} |\sin x|\,dx = \sum_{k=0}^{9} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx.$$

Önerme 30.2 gereği her parça $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$'ye eşittir. Toplam

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{10\pi} |\sin x|\,dx = 10 \cdot 2 = 20.$$

g) $\varphi(x) = xf(\sin x)$ diyelim; f sürekli, sin sürekli olduğundan φ, $[0,\pi]$ üzerinde süreklidir (ayrıca $x \in [0,\pi]$ için $\sin x \in [0,1]$ olduğundan $f(\sin x)$ tanımlıdır).
$g(t) = \pi - t$ değişimini yapalım: g sürekli türevlidir, $g([0,\pi]) = [0,\pi]$, $g'(t) = -1$, $g(0) = \pi$, $g(\pi) = 0$'dır. Teorem 30.1 gereği

$$\int_\pi^0 \varphi(x)\,dx = \int_0^\pi \varphi(\pi - t)\cdot(-1)\,dt,$$

yani her iki tarafı -1 ile çarparak

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = \int_0^\pi \varphi(\pi - t)\,dt.$$

$J = \displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx$ diyelim. $\sin(\pi - t) = \sin t$ olduğundan

$$J = \int_0^\pi (\pi - t) f\left(\sin(\pi - t)\right) dt = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\,dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t)\,dt - J,$$

burada son adımda lineerliği (Teorem 27.1) kullandık. Buradan $2J = \pi \displaystyle\int_0^\pi f(\sin t)\,dt$ ve

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

elde edilir.
Şimdi uygulamaya geçelim. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğundan

$$\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} = f(\sin x), \qquad f(u) = \frac{u}{2-u^2}$$

yazabiliriz; $u \in [0,1]$ için $2 - u^2 \geq 1 > 0$ olduğundan f, $[0,1]$ üzerinde süreklidir. İspatladığımız özdeşlik gereği

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Sağdaki integralde $w = \cos x$ değişimini yapalım: $dw = -\sin x\,dx$, sınırlar $x = 0 \mapsto w = 1$ ve $x = \pi \mapsto w = -1$'dir. Teorem 30.1 ile

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_1^{-1} \frac{dw}{1+w^2} = \int_{-1}^1 \frac{dw}{1+w^2} = \Big[\arctan w\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Sonuç olarak

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

■

Bu bölümde belirli integrali hesaplamanın temel tekniklerini kurduk ve integral işareti altında türev almanın kuralını öğrendik. Bundan sonra dikkatimizi hesaptan tahmine çevireceğiz: bir integralin **değerini** bulamasak bile, integrandın aldığı değerlere bakarak o integrali sıkıştırabilir miyiz? Bu sorunun yanıtı, ortalama değer teoreminin integral karşılığıdır: İntegral için Ortalama Değer Teoremleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

31. İntegral için Ortalama Değer Teoremleri

Belirli İntegralde Yöntemler ve Leibniz Formülü bölümünde belirli integrali **hesaplamayı** öğrendik: değişken değiştirme, bakışım (simetri), kısmi integrasyon ve değişken sınırlı integrallerin türevi. Bütün bu araçların ortak amacı $\int_a^b f(x)\,dx$ sayısını elde etmekti. Şimdi soruyu tersine çeviriyoruz: bu sayı, f fonksiyonu hakkında **ne söyler?**

Yanıtın çekirdeği çok basit bir sezgide saklıdır. Sonlu sayıda $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sayısının aritmetik ortalaması $\frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)$ sayısıdır ve bu ortalamanın iki temel özelliği vardır: en küçük sayı ile en büyük sayı arasındadır, ve n tane sayının hepsini bu tek sayıyla değiştirsek toplam değişmez. Bir f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki "bütün değerlerinin ortalaması" da aynı iki özelliği taşımalıdır: $\inf f$ ile $\sup f$ arasında bulunmalı ve f'yi bu sabit değerle değiştirdiğimizde integral değişmemelidir. Bu bölümün ana teoremleri, böyle bir sayının **her zaman var olduğunu** söyler.

Üstelik bunun ağırlıklı (weighted) bir biçimi de vardır. Sonlu durumda ağırlıklı ortalama $\frac{\sum w_k y_k}{\sum w_k}$ ile verilir; burada $w_k \geq 0$ sayıları hangi terimin ne kadar önemsendiğini belirler. İntegral karşılığında ağırlıkların yerini $g(x) \geq 0$ biçiminde bir **ağırlık fonksiyonu** (weight function) alır ve ortalama $\dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ olur. Birinci ortalama değer teoremi tam olarak bu ifadenin $\inf f$ ile $\sup f$ arasında kaldığını söyler.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: ağırlıklı birinci ortalama değer teoremi ve tam ispatı ($\int_a^b g = 0$ olan sınır durumu dâhil); f sürekliyken ortalamanın gerçekten bir fonksiyon değeri olarak, yani $f(x_0)$ biçiminde yazılabilmesi; ortalama değerin tanımı ve "eğrinin altındaki alanla aynı alana sahip dikdörtgen" yorumu; süreksizliğin neden vazgeçilmez olduğunu gösteren parçalı bir karşı örnek; ağırlık yerine **monotonluk** koyan ikinci (Bonnet) ortalama değer teoremi ve onun Abel toplamıyla ispatı; bu teoremin $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{2}{a}$ gibi ince kestirimlerde kullanımı; integral ortalama değer teoreminin türevin ortalama değer teoremiyle denkliği; son olarak limit hesabı ve eşitsizlik kurma uygulamaları.

31.1 Birinci Ortalama Değer Teoremi

İlk teorem, aslında zaten bildiğimiz bir eşitsizliğin ustaca yeniden okunmasından ibarettir. $m \leq f(x) \leq M$ eşitsizliğini $g(x) \geq 0$ ile çarpıp integrallersek, $\int_a^b fg$ sayısının $m\int_a^b g$ ile $M\int_a^b g$ arasında sıkıştığını görürüz. Geriye "arada olmak"ı bir **eşitliğe** çevirmek kalır: arada olan bir sayı, uçların uygun bir ara değerinin katıdır. Teoremin bütün içeriği budur.

Teorem 31.1 (Birinci Ortalama Değer Teoremi). *$a < b$ ve $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun (Tanım 25.1). Ayrıca her $x \in [a,b]$ için*

$$g(x) \geq 0$$

olsun. f integrallenebilir olduğundan sınırlıdır (Teorem 26.3); bu yüzden

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

sayıları sonludur. O hâlde

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)\,dx$$

olan bir $c \in [m,M]$ sayısı vardır.

> ***İspat.***

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 0: fg integrallenebilirdir. *Eşitliğin sol yanının anlamlı olduğunu önce görmemiz gerekir. f ve g integrallenebilir olduğundan $f+g$ ve $f-g$ de integrallenebilirdir (Teorem 27.1). İntegrallenebilir fonksiyonlar sınırlı olduğundan (Teorem 26.3) $f+g$ ve $f-g$ fonksiyonlarının görüntüleri uygun bir $[c,d]$ aralığının içinde kalır; $\varphi(t)=t^2$ fonksiyonu ise bu aralıkta süreklidir. İntegrallenebilir bir fonksiyonun sürekli bir fonksiyonla bileşkesi integrallenebilir olduğundan (Teorem 27.2) $(f+g)^2$ ve $(f-g)^2$ integrallenebilirdir. Özdeşlik*

$$fg=\frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$$

olduğundan, yine lineerlik gereği fg integrallenebilirdir.
Adım 1: Temel eşitsizliği kuralım. *m ve M tanımı gereği her $x\in[a,b]$ için*

$$m\le f(x)\le M$$

olur. Bu eşitsizliği $g(x)\ge 0$ ile çarpalım. Negatif olmayan bir sayıyla çarpmak sıralamayı korur; dolayısıyla her $x\in[a,b]$ için

$$m\,g(x)\le f(x)g(x)\le M\,g(x).$$

Adım 2: Eşitsizliği integralleyelim. *Üç fonksiyon da $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir (mg ve Mg için lineerlik, fg için Adım 0). İntegralin sıralamayı koruma özelliği (Teorem 28.1) gereği*

$$\int_a^b m\,g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\int_a^b M\,g(x)\,dx,$$

yani sabitleri integral dışına alarak

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{$*$}$$

Ayrıca $g\ge 0$ olduğundan yine Teorem 28.1 gereği

$$\int_a^b g(x)\,dx\ge\int_a^b 0\,dx=0$$

olur. Demek ki $\int_a^b g$ ya sıfırdır ya da kesin pozitiftir. İki durumu ayrı ayrı ele alalım.
Adım 3: $\int_a^b g=0$ durumu. *Bu durumda $(*)$ eşitsizliğinin hem sol hem sağ ucu 0'dır:*

$$0=m\cdot 0\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le M\cdot 0=0.$$

Sıkışma gereği $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$ olur. Öte yandan istenen eşitliğin sağ yanı da her c için

$$c\int_a^b g(x)\,dx=c\cdot 0=0$$

*değerini alır. Yani bu durumda eşitlik **her** c sayısı için sağlanır; özel olarak $c=m$ seçebiliriz. Burada dikkat edilecek tek nokta $[m,M]$ aralığının boş olmamasıdır: f sınırlı olduğundan m ve M sonludur ve $a<b$ olduğundan $[a,b]$ boş değildir, dolayısıyla $m\le M$'dir. Böylece seçtiğimiz $c=m$ gerçekten $[m,M]$ içindedir ve teorem bu durumda ispatlanmış olur.*
Adım 4: $\int_a^b g>0$ durumu. *Şimdi $(*)$ eşitsizliğinin her yanını pozitif olan $\int_a^b g$ sayısına bölebiliriz; pozitif bir sayıya bölmek sıralamayı korur:*

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\le M.$$

Ortadaki sayıyı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$c = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

ile adlandıralım. Yukarıdaki eşitsizlik tam olarak $c \in [m, M]$ demektir. Paydayı sol tarafa geçirirsek

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)\,dx$$

elde ederiz. İki durumda da istenen c bulunduğundan ispat tamamlanmıştır.
■

Teoremin en sade hâli $g \equiv 1$ seçimiyle ortaya çıkar: bu durumda $\int_a^b g = b - a$ olur ve teorem

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a), \qquad c \in [m, M]$$

der. Yani f'nin integrali, tabanı $b-a$ ve yüksekliği uygun bir $c \in [\inf f, \sup f]$ olan bir dikdörtgenin alanına eşittir.

⚠ Ağırlığın işareti değişmemelidir

$g \geq 0$ koşulu ispatın Adım 1'inde çarpma sırasında kullanıldı ve vazgeçilmezdir. g işaret değiştirirse teorem çöker.
Örnek olarak $[-1, 1]$ üzerinde $f(x) = x$ ve $g(x) = x$ alalım. Her ikisi de sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2). Bir yandan

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

öte yandan $x \mapsto x$ tek fonksiyon olduğundan

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

olur. Öyleyse hangi c sayısını seçersek seçelim $c\int_{-1}^{1} g = 0 \neq \frac{2}{3}$'tür; istenen eşitliği sağlayan **hiçbir** c yoktur. Benzer biçimde $g \leq 0$ olduğunda teorem yine geçerlidir (o hâlde $-g \geq 0$'a uygulamak yeter); bozulan şey işaretin sabit olmamasıdır.

Teoremin verdiği c sayısı, f'nin bir **değeri** olmak zorunda değildir; yalnızca $\inf f$ ile $\sup f$ arasında bir sayıdır. Ama f sürekliyse arada kalan her sayı zaten f tarafından alınır: ara değer teoremi tam da bunu söyler. Böylece teoremin çok daha çarpıcı olan klasik biçimine geçiyoruz.

Sonuç 31.1 (Klasik Ortalama Değer Teoremi). *$a < b$ ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun.*
(i) Ağırlıklı biçim. *$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $g \geq 0$ ise*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx$$

olan bir $x_0 \in [a, b]$ vardır.
(ii) Klasik biçim. *Özel olarak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\,(b-a)$$

olan bir $x_0 \in [a, b]$ vardır.

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: En küçük ve en büyük değerler alınır. *$[a,b]$ kapalı ve sınırlı bir aralık, f ise bu aralıkta süreklidir. Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği f, $[a,b]$ üzerinde en küçük ve en büyük değerlerini gerçekten alır: öyle $p,q \in [a,b]$ noktaları vardır ki*

$$f(p) = \min_{[a,b]} f = m, \qquad f(q) = \max_{[a,b]} f = M.$$

Burada $m = \inf f$ ve $M = \sup f$ sayıları alınan değerler olduğundan, Teorem 31.1'deki m ve M ile aynıdır.
Adım 2: Teoremi uygulayalım. *f sürekli olduğundan integrallenebilirdir (Teorem 25.2). Teorem 31.1 gereği*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)\,dx$$

olan bir $c \in [m,M]$ vardır. Geriye c'nin f'nin bir değeri olduğunu, yani $c = f(x_0)$ olan bir $x_0 \in [a,b]$ bulunduğunu göstermek kalıyor.
Adım 3: c bir fonksiyon değeridir. *$c \in [m,M]$ olduğundan iki durum vardır.*

- *$c = m$ ya da $c = M$ ise: birinci durumda $x_0 = p$, ikinci durumda $x_0 = q$ alırız. Özel olarak $m = M$ ise f sabittir ve $[m,M] = \{m\}$ olduğundan $c = m = f(p)$ olur; bu da bu duruma girer.*
- *$m < c < M$ ise, yani $f(p) < c < f(q)$ ise, p ile q arasında kalan kapalı aralığı düşünelim (hangisinin büyük olduğunu bilmiyoruz; $[\min(p,q), \max(p,q)]$ aralığını alalım). Bu aralık $[a,b]$ içindedir ve f orada süreklidir. c sayısı $f(p)$ ile $f(q)$ arasında olduğundan ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bu aralıkta $f(x_0) = c$ olan bir x_0 vardır. Elbette $x_0 \in [a,b]$'dir.*

*Her durumda $c = f(x_0)$ olan bir $x_0 \in [a,b]$ bulduk; bu da **(i)**'yi verir.*
Adım 4: Klasik biçim. ***(i)***'*de $g \equiv 1$ alalım. Sabit fonksiyon integrallenebilirdir, $g \geq 0$ koşulunu sağlar ve*

$$\int_a^b 1\,dx = b - a > 0$$

olur. Böylece

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\,(b-a)$$

elde edilir.
■

i İki teorem arasındaki fark

Teorem 31.1 ile Sonuç 31.1 arasındaki farkı iyi ayırt etmek gerekir.

- Teorem 31.1 **her** integrallenebilir f için geçerlidir; ama verdiği c yalnızca bir sayıdır, f'nin aldığı bir değer olması gerekmez.
- Sonuç 31.1 ise f'nin sürekli olmasını ister; buna karşılık c'yi $f(x_0)$ biçiminde, yani fonksiyonun **gerçekten aldığı** bir değer olarak verir.

Sürekliliğin karşılığında kazanılan şey işte bu "değerin alınması"dır ve bunu sağlayan tek araç ara değer teoremidir.

31.2 Ortalama Değer ve Geometrik Yorumu

Klasik biçimi bir kez daha yazalım:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sağ taraftaki sayı, bölümün başında sözünü ettiğimiz "bütün değerlerin ortalaması"dır. Ona bir ad verelim.

Tanım 31.1 (Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri). $a < b$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir olsun. Sayı

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

sayısına f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki **ortalama değeri** (mean value / average value) denir.
Daha genel olarak, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir, $w \geq 0$ ve $\int_a^b w > 0$ ise

$$\bar{f}_w = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

sayısına f'nin w **ağırlığına göre ağırlıklı ortalama değeri** (weighted mean value) denir. $w \equiv 1$ seçimi ilk tanımı verir.

Bu tanımın sonlu durumla bağını görmek öğreticidir. $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölüp her parçadan bir t_k noktası seçelim; parçaların uzunluğu $\frac{b-a}{n}$'dir. $f(t_1), \ldots, f(t_n)$ sayılarının aritmetik ortalaması

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\frac{b-a}{n}$$

biçiminde yazılabilir ve sağdaki toplam tam olarak bir Riemann toplamıdır (Tanım 26.1). f integrallenebilir olduğundan $n \to \infty$ iken bu toplam $\int_a^b f$'ye yakınsar (Teorem 26.2). Demek ki

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}.$$

Yani $\bar{f}$, "f'nin n noktadaki değerlerinin ortalamasının $n \to \infty$ iken limiti"dir. Aritmetik ortalamanın sürekli karşılığı olduğu bu hesapla açıkça görülür.

Geometrik yorum. f'nin sürekli ve $f \geq 0$ olduğu durumu düşünelim. $\int_a^b f$ sayısı, eğrinin altında kalan bölgenin alanıdır. Klasik ortalama değer teoremi

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{eğrinin altındaki alan}} = \underbrace{f(x_0)\cdot(b-a)}_{\text{dikdörtgenin alanı}}$$

der. Yani tabanı $[a,b]$ ve yüksekliği $f(x_0)$ olan dikdörtgenin alanı, eğrinin altındaki bölgenin alanına **tam olarak** eşittir. Üstelik bu dikdörtgenin yüksekliği f'nin bir değeridir; yani $y = \bar{f}$ yatay doğrusu eğriyi en az bir noktada keser. Sezgisel olarak: eğrinin $\bar{f}$ düzeyinin üstünde kalan tümsekleri kesip altında kalan çukurlara doldurursak elimizde tam olarak o dikdörtgen kalır.

Örnek 31.1 (Sinüsün Ortalama Değeri). $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz ve $f(x_0) = \bar{f}$ olan $x_0 \in [0,\pi]$ noktalarını belirleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: İntegrali hesaplayalım. $-\cos x$ fonksiyonu $\sin x$'in bir ilkel fonksiyonudur (Tanım 18.1), sin ise süreklidir. Analizin ikinci temel teoremi gereği

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Adım 2: Ortalama değer. Tanım 31.1 gereği

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sayının $[0,1]$ aralığında olması beklenirdi: $[0,\pi]$ üzerinde $0 \le \sin x \le 1$ olduğundan Teorem 28.1 gereği $0 \le \bar{f} \le 1$'dir. Ayrıca ortalamanın $\frac{1}{2}$'den büyük çıkması da şaşırtıcı değildir; sinüs eğrisi $[0,\pi]$ üzerinde uzunca bir süre $\frac{1}{2}$'nin üstünde kalır.

Adım 3: Ortalamanın alındığı noktalar. sin fonksiyonu $[0,\pi]$ üzerinde sürekli olduğundan Sonuç 31.1 gereği $\sin x_0 = \frac{2}{\pi}$ olan bir $x_0 \in [0,\pi]$ vardır. Bu denklemi çözelim. $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında sin artan ve birebir olduğundan buradaki tek çözüm

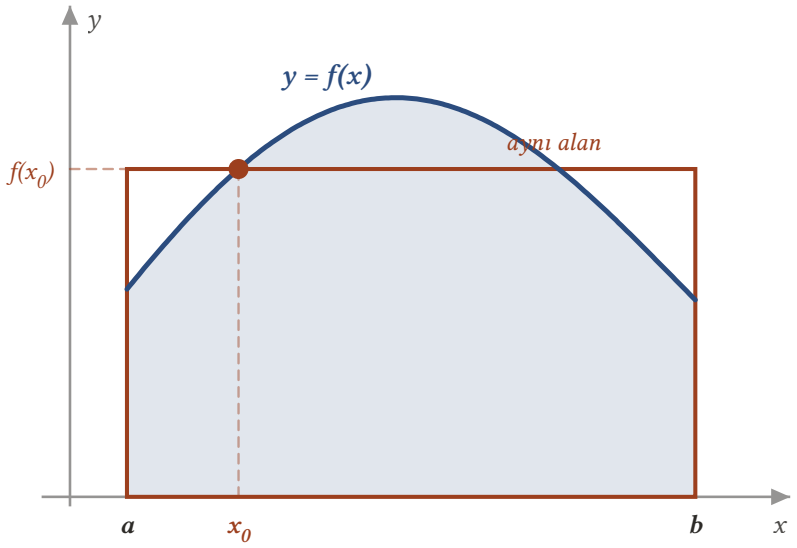
$$x_0 = \arcsin \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6901$$

sayısıdır. Öte yandan $\sin(\pi - x) = \sin x$ bakışımı gereği

$$x_0' = \pi - \arcsin \frac{2}{\pi} \approx 2{,}4515$$

de bir çözümdür. $[0,\pi]$ aralığında $\sin x = \frac{2}{\pi}$ denkleminin başka çözümü yoktur: sin, $[0, \frac{\pi}{2}]$'de kesin artan, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$'de kesin azalandır, dolayısıyla her düzeyi her yarı aralıkta en çok bir kez alır. Demek ki teoremin verdiği x_0 noktası tek olmak zorunda değildir; burada tam olarak iki tanedir.

Adım 4: Denetim. Yüksekliği $\frac{2}{\pi}$, tabanı π olan dikdörtgenin alanı $\frac{2}{\pi} \cdot \pi = 2$'dir; bu da Adım 1'de bulduğumuz integralin değeridir. Eşitlik doğrulanmış oldu.



Şekil 31.1: İntegral için ortalama değer teoremi: sürekli bir f için, eğrinin altındaki alanla *tam olarak aynı* alana sahip bir dikdörtgen vardır. Dikdörtgenin yüksekliği $f(x_0)$, fonksiyonun $[a, b]$ üzerindeki ortalama değeridir ve süreklilik sayesinde gerçekten alınan bir değerdir.

■

31.3 Sürekliliğin Gerekliliği

Sonuç 31.1 yalnızca tek bir şey istiyordu: f'nin sürekli olmasını. Süreklilik integrallenebilirliği de beraberinde getirdiğinden (Teorem 25.2) $\int_a^b f$ sayısı kendiliğinden anlamlıdır. Peki süreklilik gerçekten gerekli midir? Yanıt kesin bir "evet"tir ve nedeni tek cümleyle şudur: **süreksiz bir fonksiyon kendi ortalamasının üstünden atlayabilir.**

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Süreklilik atılamaz

f yalnızca integrallenebilirse Teorem 31.1'nin verdiği c sayısı hâlâ $[\inf f, \sup f]$ aralığındadır; bozulan şey c'nin f tarafından **alınması**dır. Yani

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$$

eşitliği yine sağlanır, ama $c = f(x_0)$ olan bir x_0 bulunamayabilir. Bunun tek nedeni, ara değer teoreminin sürekliliksiz çalışmamasıdır.

Örnek 31.2 (Ortalamasını Almayan Bir Fonksiyon). $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, 1 \le x < 2 \\ 4, 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin integrallenebilir olduğunu gösteriniz, ortalama değerini hesaplayınız ve bu ortalamanın f tarafından hiçbir noktada alınmadığını belirtiniz.

Çözüm.
Adım 1: İntegrallenebilirlik. f azalmayan bir fonksiyondur: $x \le y$ ise $f(x) \le f(y)$'dir (değerler yalnızca 1 ve 4'tür ve 4 değeri 2'den sonra başlar). Kapalı bir aralıkta monoton olan her fonksiyon Riemann integrallenebilirdir (Teorem 25.3); dolayısıyla f, $[1,3]$ üzerinde integrallenebilirdir.
Adım 2: $[1,2]$ üzerindeki integral. f, $[1,2)$ üzerinde 1'e eşit, yalnızca $x = 2$ uç noktasında 4'tür. Bu tek noktanın integrale katkısı yoktur; bunu doğrudan görelim. $0 < \delta < 1$ olmak üzere $P_\delta = \{1, 2-\delta, 2\}$ bölünüşünü alalım (Tanım 24.1). Alt ve üst toplamları yazalım (Tanım 24.3):

- $[1, 2-\delta]$ üzerinde $f \equiv 1$ olduğundan bu alt aralıkta infimum da supremum da 1'dir.
- $[2-\delta, 2]$ üzerinde f, 1 ve 4 değerlerini alır; infimum 1, supremum 4'tür.

Buradan

$$L(P_\delta, f) = 1 \cdot (1-\delta) + 1 \cdot \delta = 1, \qquad U(P_\delta, f) = 1 \cdot (1-\delta) + 4 \cdot \delta = 1 + 3\delta$$

olur. Öyleyse $U(P_\delta, f) - L(P_\delta, f) = 3\delta$ olup $\delta \to 0^+$ ile istediğimiz kadar küçültülebilir (Teorem 25.1). Her δ için

$$1 = L(P_\delta, f) \le \int_1^2 f(x)\,dx \le U(P_\delta, f) = 1 + 3\delta$$

olduğundan, $\delta \to 0^+$ limitiyle

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 1$$

buluruz.
Adım 3: $[2,3]$ üzerindeki integral. Burada $f \equiv 4$ sabittir:

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 4 \cdot (3-2) = 4.$$

Adım 4: Toplam integral ve ortalama. Aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) gereği

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 1 + 4 = 5.$$

Ortalama değer (Tanım 31.1) böylece

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\bar{f} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

olur.

Adım 5: Ortalama alınmıyor. f'nin değer kümesi yalnızca $\{1, 4\}$'tür. 2,5 sayısı bu kümede olmadığından, hiçbir $x_0 \in [1,3]$ için $f(x_0) = 2{,}5$ olamaz. Demek ki

$$\int_1^3 f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(3-1)$$

eşitliğini sağlayan bir x_0 **yoktur.** f, $x=2$ noktasında 1'den 4'e sıçradığı için kendi ortalamasının üstünden atlamıştır.

Adım 6: Birinci teorem yine de geçerlidir. Burada $m = \inf f = 1$ ve $M = \sup f = 4$'tür. Teorem 31.1'nin verdiği c sayısı

$$c = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx = 2{,}5 \in [1,4]$$

olup gerçekten $[m, M]$ aralığındadır. Yani ağırlıklı teorem hiç bozulmamıştır; bozulan yalnızca "c bir fonksiyon değeridir" iddiasıdır. Bu iddiayı sağlayan tek şey sürekliliktir.

■

31.4 İkinci Ortalama Değer Teoremi

Birinci teoremde ağırlık g üzerine bir işaret koşulu koyduk. Şimdi bambaşka bir yol izleyeceğiz: işaret koşulunu g'den kaldırıp bunun yerine f'ye **monotonluk** yükleyeceğiz. Ortaya çıkan sonuç, 1849'da Ossian Bonnet tarafından verilen biçimiyle, analizin en kullanışlı kestirim araçlarından biridir. Onunla, integrali hiçbir kapalı formülle hesaplanamayan ifadeler için bile keskin sınırlar elde edilebilir.

31.4.1 Formül nereden geliyor

Teoremi ezberlemek yerine nereden çıktığını görelim. g'nin sürekli, f'nin ise sürekli türevlenebilir ve azalan olduğunu geçici olarak varsayalım. g'nin integral fonksiyonunu

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

ile tanımlayalım; $G(a) = 0$'dır ve g sürekli olduğundan analizin birinci temel teoremi gereği G türevlenebilirdir ve $G' = g$'dir (Analizin Temel Teoremleri). Şimdi kısmi integrasyon (Teorem 19.2) uygulayalım:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx = \Big[\,f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx.$$

$G(a) = 0$ olduğundan köşeli parantez $f(b)G(b)$'ye indirgenir:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx.$$

Sondaki integrale birinci ortalama değer teoremini uygulayacağız. f azalan olduğundan $f' \le 0$, yani $-f' \ge 0$'dır: işte aradığımız **negatif olmayan ağırlık**. G süreklidir; $-f'$ ise sürekli olduğundan integrallenebilirdir. Öyleyse Sonuç 31.1'in ağırlıklı biçimi (G sürekli çarpan, $-f'$ ağırlık) gereği

$$\int_a^b G(x)\,\big(-f'(x)\big)\,dx = G(\xi)\int_a^b \big(-f'(x)\big)\,dx$$

olan bir $\xi \in [a,b]$ vardır. Sağdaki integral analizin ikinci temel teoremiyle hesaplanır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^b \big(-f'(x) \big)\,dx = -\big(f(b) - f(a) \big) = f(a) - f(b).$$

Bunları birleştirirsek

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)G(b) + G(\xi)\,\big(f(a) - f(b) \big) = f(a)G(\xi) + f(b)\,\big(G(b) - G(\xi) \big),$$

yani

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

elde edilir. (f artan olsaydı bu kez $f' \geq 0$ ağırlığıyla aynı hesap yapılır ve sonuç değişmezdi.)
Bu hesap formülün nereden geldiğini eksiksiz açıklıyor; ama f'nin türevlenebilir, g'nin sürekli olmasını istedi. Oysa teorem çok daha az şey talep eder: f'nin yalnızca **monoton**, g'nin yalnızca **integrallenebilir** olması yeter. Monoton bir fonksiyonun türevlenebilir olması gerekmediğinden (örneğin basamak fonksiyonları), genel hâli ispatlamak için türevden bütünüyle vazgeçen bir yönteme ihtiyacımız var. Kullanacağımız araç, kısmi integrasyonun ayrık (discrete) karşılığı olan **Abel toplamı** (Abel summation / summation by parts) olacaktır.

31.4.2 Bonnet yardımcı teoremi

Genel teoremin bütün ağırlığı aşağıdaki özel hâlde toplanmıştır: ağırlık fonksiyonu değil, **çarpanın kendisi** azalan ve negatif olmayandır.

Lemma 31.1 (Bonnet Yardımcı Teoremi). *$a < b$ olsun. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu azalan (yani $x \leq y$ iken $f(x) \geq f(y)$) ve her x için $f(x) \geq 0$ olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ise integrallenebilir olsun. O hâlde*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx$$

olan bir $\xi \in [a,b]$ vardır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: Hazırlık.*** *f monoton olduğundan integrallenebilirdir (Teorem 25.3); g zaten integrallenebilirdir; öyleyse Teorem 31.1'nin ispatındaki Adım 0 gereği fg de integrallenebilirdir. Kısaca*
>
> $$I = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
>
> *yazalım. g integrallenebilir olduğundan sınırlıdır (Teorem 26.3); $K = \sup_{[a,b]} |\, g \,|$ diyelim, yani her x için $|\, g(x) \,| \leq K$.*
> *g'nin integral fonksiyonunu*
>
> $$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$
>
> *ile tanımlayalım; $G(a) = 0$'dır. G süreklidir: $a \leq x < y \leq b$ için aralık toplamsallığı (Teorem 27.4) ve integral için üçgen eşitsizliği (Teorem 28.2) gereği*
>
> $$|\, G(y) - G(x) \,| = \left| \int_x^y g(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |\, g(t) \,|\,dt \leq K(y-x),$$
>
> *yani G, K sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar (bkz. Analiz 1). Lipschitz koşulunu sağlayan her fonksiyon düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1), düzgün süreklilik ise sürekliliği gerektirir (bkz. Analiz 1); demek ki G, $[a,b]$ üzerinde süreklidir. $[a,b]$ kapalı ve sınırlı olduğundan G burada en küçük ve en büyük değerlerini alır (bkz. Analiz 1):*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m_G = \min_{[a,b]} G, \qquad M_G = \max_{[a,b]} G.$$

İspatın hedefi şudur: $\boldsymbol{f(a)\, m_G \le I \le f(a)\, M_G}$ ***olduğunu göstermek.*** *Bunu gösterirsek işimiz bitmiş demektir; nedenini Adım 5'te açıklayacağız.*

Adım 2: Bir bölünüş üzerinde ayrıştırma. $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *herhangi bir bölünüş olsun ve normu* $\| P \| = \max_k (x_k - x_{k-1})$ *ile gösterilsin. Aralık toplamsallığı gereği*

$$I = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) g(x)\, dx.$$

Her alt aralıkta $f(x)$ *yerine sol uçtaki sabit değeri* $f(x_{k-1})$ *koyalım ve hatayı ayrı yazalım:*

$$I = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\, dx}_{S(P)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(x) - f(x_{k-1}) \big)\, g(x)\, dx}_{R(P)}.$$

$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g = G(x_k) - G(x_{k-1})$ *olduğundan*

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \big(G(x_k) - G(x_{k-1}) \big).$$

Adım 3: Hata terimi küçüktür. $x \in [x_{k-1}, x_k]$ *ve* f *azalan olduğundan*

$$f(x_k) \le f(x) \le f(x_{k-1}), \qquad \text{yani} \qquad 0 \le f(x_{k-1}) - f(x) \le f(x_{k-1}) - f(x_k)$$

olur. Buradan her k *için*

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(x) - f(x_{k-1}) \big)\, g(x)\, dx \right| \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} | f(x) - f(x_{k-1}) |\, | g(x) |\, dx \le \big(f(x_{k-1}) - f(x_k) \big)\, K\, (x_k - x_{k-1})$$

elde ederiz. Her k *için* $x_k - x_{k-1} \le \| P \|$ *olduğundan ve teleskopik toplam*

$$\sum_{k=1}^{n} \big(f(x_{k-1}) - f(x_k) \big) = f(x_0) - f(x_n) = f(a) - f(b)$$

verdiğinden

$$| R(P) | \le K \, \| P \| \, \big(f(a) - f(b) \big). \tag{$\dagger$}$$

f *azalan olduğundan* $f(a) - f(b) \ge 0$*'dır; sağ taraf gerçekten negatif olmayan bir sayıdır.*

Adım 4: Abel toplamı. *Şimdi* $S(P)$*'yi yeniden düzenleyelim. Toplamı açıp iki parçaya ayıralım:*

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) G(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) G(x_{k-1}).$$

İkinci toplamda $j = k - 1$ *indis değişimi yapalım;* $j = 0$ *terimi* $f(x_0)G(x_0) = f(a)G(a) = 0$ *olduğundan düşer:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) G(x_{k-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) G(x_j) = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) G(x_k).$$

Birinci toplamdan da son terimi ayıralım:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) G(x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k-1}) G(x_k) + f(x_{n-1}) G(x_n).$$

İkisini birleştirirsek, $x_n = b$ *olduğundan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n-1} \big(\ f(x_{k-1}) - f(x_k)\ \big)\, G(x_k) + f(x_{n-1})G(b)$$

buluruz. Bu, kısmi integrasyonun ayrık karşılığı olan Abel toplamıdır: G'nin farkları f'ye, f'nin farkları G'ye taşınmıştır.

Adım 5: $S(P)$, G değerlerinin negatif olmayan katsayılı bir birleşimidir. *Şimdi katsayıları adlandıralım:*

$$\lambda_k = f(x_{k-1}) - f(x_k) (1 \le k \le n-1), \qquad \lambda_n = f(x_{n-1});$$

$$\eta_k = x_k (1 \le k \le n-1), \qquad \eta_n = b.$$

f azalan olduğundan $\lambda_k \ge 0$ ($k \le n-1$); $f \ge 0$ olduğundan $\lambda_n = f(x_{n-1}) \ge 0$'dır. Katsayıların toplamı teleskopiktir:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \big(\ f(x_0) - f(x_{n-1})\ \big) + f(x_{n-1}) = f(x_0) = f(a).$$

Böylece

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, G(\eta_k), \qquad \lambda_k \ge 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = f(a)$$

olur. Katsayıların toplamı 1 değil $f(a)$ olduğundan bu, $f(a) > 0$ iken bir konveks birleşimin $f(a)$ katıdır. Her $\eta_k \in [a,b]$ için $m_G \le G(\eta_k) \le M_G$ olduğundan, negatif olmayan λ_k'larla çarpıp toplayarak

$$f(a)\, m_G = \left(\sum_k \lambda_k\right) m_G \le S(P) \le \left(\sum_k \lambda_k\right) M_G = f(a)\, M_G$$

*elde ederiz. Dikkat: bu eşitsizlik **her** bölünüş için, bölünüşten bağımsız sınırlarla geçerlidir.*

Adım 6: Bölünüşü inceltip limite geçelim. *$I = S(P) + R(P)$ ve $(\dagger)$ gereği*

$$f(a)\, m_G - K \parallel P \parallel \big(\ f(a) - f(b)\ \big) \le I \le f(a)\, M_G + K \parallel P \parallel \big(\ f(a) - f(b)\ \big)$$

olur. Şimdi P olarak $[a,b]$'nin n eşit parçaya bölünüşünü alalım; bu bölünüşün normu $\parallel P_n \parallel = \frac{b-a}{n}$'dir ve $n \to \infty$ iken 0'a gider. Her n için yukarıdaki eşitsizlik geçerli olduğundan, $n \to \infty$ limitinde

$$f(a)\, m_G \le I \le f(a)\, M_G \qquad (\ddagger)$$

elde ederiz. (Sabit bir sayı, sıfıra giden bir hata payıyla genişletilmiş sınırların hepsinin içindeyse, sınırların kendisinin de içindedir.)

Adım 7: Sonucu okuyalım. *İki durum var.*

- *$f(a) = 0$ ise: f azalan ve negatif olmadığından her x için $0 \le f(x) \le f(a) = 0$, yani $f \equiv 0$'dır. Bu durumda $I = 0$ ve $f(a) \int_a^{\xi} g = 0$ olduğundan eşitlik her ξ için sağlanır; örneğin $\xi = a$ alırız.*
- *$f(a) > 0$ ise: $(\ddagger)$ eşitsizliğini $f(a)$'ya bölerek*

$$m_G \le \frac{I}{f(a)} \le M_G$$

buluruz. G sürekli olduğundan m_G ve M_G değerlerini $[a,b]$'de gerçekten alır; ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bu iki değer arasındaki her sayıyı da alır. Öyleyse

$$G(\xi) = \frac{I}{f(a)}$$

olan bir $\xi \in [a,b]$ vardır. Bu da tam olarak

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = I = f(a)G(\xi) = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx$$

 CC BY-NC-SA 4.0

demektir.
■

31.4.3 Genel biçim

Yardımcı teoremi elde ettikten sonra genel hâl kısa bir cebirsel düzenlemeden ibarettir: monoton bir f'yi uygun bir sabit ekleyip çıkararak "azalan ve negatif olmayan" hâle getiririz.

Teorem 31.2 (İkinci Ortalama Değer Teoremi). *$a < b$ olsun. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton (artan ya da azalan) ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir olsun. O hâlde*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

olan bir $\xi \in [a,b]$ vardır.

İspat.
Durum 1: f azalan. *$h : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu*

$$h(x) = f(x) - f(b)$$

ile tanımlayalım. h de azalandır (f'den bir sabit çıkarıldı) ve f azalan olduğundan her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq f(b)$, yani

$$h(x) \geq 0$$

olur. Ayrıca h monoton olduğundan integrallenebilirdir. Lemma 31.1'i h ve g çiftine uygulayalım: öyle bir $\xi \in [a,b]$ vardır ki

$$\int_a^b h(x)g(x)\,dx = h(a)\int_a^\xi g(x)\,dx = \big(\, f(a) - f(b) \,\big)\int_a^\xi g(x)\,dx.$$

Şimdi $f = h + f(b)$ olduğunu kullanıp integralin lineerliğine (Teorem 27.1) başvuralım:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b h(x)g(x)\,dx + f(b)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Sağ taraftaki son integrali aralık toplamsallığıyla (Teorem 27.4) ξ noktasından ikiye bölelim:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^\xi g(x)\,dx + \int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Hepsini birleştirirsek

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \big(\, f(a) - f(b) \,\big)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\left(\int_a^\xi g(x)\,dx + \int_\xi^b g(x)\,dx\right)\\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx - f(b)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx\\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu, istenen eşitliktir.
Durum 2: f artan. *Bu durumda $F = -f$ fonksiyonu azalandır ve g değişmez. Durum 1'i F ve g çiftine uygulayalım: öyle bir $\xi \in [a,b]$ vardır ki*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + F(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$F = -f$ yerine konup her iki yan -1 ile çarpılırsa

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,dx$$

olur; aynı ξ iş görür. İki durumda da ispat tamamlanmıştır.
■

i Bonnet biçimleri

Lemma 31.1, teoremin en sık kullanılan özel hâlidir ve ayrıca akılda tutulmayı hak eder:

$$f \text{ azalan ve } f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b fg = f(a)\int_a^{\xi} g.$$

Bunun aynadaki görüntüsü de doğrudur:

$$f \text{ artan ve } f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b fg = f(b)\int_{\xi}^b g.$$

İkincisini birinciden çıkarmak için $t \mapsto a+b-t$ yansımasını kullanmak yeter: $\tilde{f}(t) = f(a+b-t)$ azalan ve negatif olmayandır, $\tilde{g}(t) = g(a+b-t)$ ise integrallenebilirdir (bir bölünüşün aynadaki görüntüsü yine bir bölünüştür ve karşılıklı alt/üst toplamlar birebir eşleşir; dolayısıyla yansıtılmış fonksiyonun alt ve üst integralleri değişmez). Yansıma altında $\int_a^b \tilde{f}\tilde{g} = \int_a^b fg$ olur; Lemma 31.1 bir $\eta \in [a,b]$ verir: $\int_a^b \tilde{f}\tilde{g} = \tilde{f}(a)\int_a^{\eta}\tilde{g}$. Burada $\tilde{f}(a) = f(b)$ ve değişken değiştirmeyle $\int_a^{\eta}\tilde{g}(t)\,dt = \int_{a+b-\eta}^b g(u)\,du$ olduğundan, $\xi = a+b-\eta$ konulduğunda ikinci biçim elde edilir.
Genel biçimde f'nin negatif olmasında bir sakınca olmadığına dikkat edin; $f \geq 0$ koşulu yalnızca tek terimli Bonnet biçimleri için gereklidir.

31.4.4 Bir kestirim aracı olarak Bonnet biçimi

İkinci ortalama değer teoreminin gücü, g'nin işaretinin serbest bırakılmasından gelir. g hızla salınan bir fonksiyonsa (örneğin $\sin x$), $\int_a^{\xi} g$ integralleri ξ nereye düşerse düşsün küçük kalır; f ise yavaşça azalan bir çarpan olarak dışarıda durur. Sonuç, $\int_a^b fg$ üzerinde b'den bağımsız keskin bir sınırdır. Bu fikrin klasik örneğini görelim.

Örnek 31.3 (Sinüs İntegralinin Kestirimi). $0 < a < b$ olsun. Her b için

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{2}{a}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: Kurulum. $[a,b] \subset (0,\infty)$ üzerinde

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \sin x$$

alalım. f, $(0,\infty)$ üzerinde kesin azalandır ve pozitiftir; g ise süreklidir, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2). Ayrıca $\frac{\sin x}{x}$ çarpımı $[a,b]$ üzerinde süreklidir ($a > 0$ olduğundan payda sıfırlanmaz), yani integral anlamlıdır.
Adım 2: Bonnet biçimini uygulayalım. f azalan ve $f \geq 0$ olduğundan Lemma 31.1 gereği öyle bir $\xi \in [a,b]$ vardır ki

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = f(a)\int_a^{\xi} \sin x\,dx = \frac{1}{a}\int_a^{\xi} \sin x\,dx.$$

Adım 3: İçerideki integrali hesaplayalım. $-\cos x$ fonksiyonu $\sin x$'in bir ilkel fonksiyonudur:

$$\int_a^{\xi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_a^{\xi} = \cos a - \cos \xi.$$

Adım 4: Kestirim. Kosinüsün değerleri $[-1,1]$ aralığında olduğundan üçgen eşitsizliği gereği

$$\left|\cos a - \cos \xi\right| \le |\cos a| + |\cos \xi| \le 1 + 1 = 2.$$

Öyleyse

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \frac{1}{a}\left|\cos a - \cos \xi\right| \le \frac{2}{a}.$$

Adım 5: Sonucun anlamı. Elde edilen sınır b'den **tamamen bağımsızdır.** Yani b ne kadar büyürse büyüsün, $\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun a'dan itibaren biriken integrali $\frac{2}{a}$ değerini aşamaz. Bunun nedeni açıktır: $\sin x$ ardışık yarım dalgalarda işaret değiştirdiğinden katkılar birbirini büyük ölçüde götürür, $\frac{1}{x}$ çarpanı ise bu götürmeyi bozacak kadar hızlı değişmez.
Bu kestirim, ileride genelleştirilmiş integraller ve seriler bağlamında karşılaşacağınız yakınsaklık sonuçlarının anahtarıdır: a büyüdükçe $\frac{2}{a} \to 0$ olması, "kuyruk integrallerinin" istendiği kadar küçültülebildiğini, yani bir Cauchy koşulunun sağlandığını söyler. Dikkat çekici olan, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin temel fonksiyonlarla ifade edilememesine karşın bu kadar keskin bir sınırın elde edilebilmesidir.
■

31.5 Türevin Ortalama Değer Teoremiyle Bağ

Bu bölümün adı ile Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri bölümünün adı arasındaki benzerlik rastlantı değildir. Sürekli fonksiyonlar için iki teorem birbirinin başka bir dildeki kopyasıdır; bunları birbirine çeviren sözlük, integral fonksiyonudur.

Önerme 31.1 (İki Ortalama Değer Teoremi Arasındaki Bağ). *$a < b$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun.*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O hâlde:
(i) *F, $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir ve $F' = f$'dir.*
(ii) *F'ye türevin ortalama değer teoreminin (Teorem 8.2) uygulanmasıyla elde edilen eşitlik, tam olarak Sonuç 31.1'in ifadesidir. Tersine, Sonuç 31.1'ten türevi sürekli olan fonksiyonlar için türevin ortalama değer teoremi çıkar.*
(iii) *Özel olarak, Sonuç 31.1'teki x_0 noktası* ***açık*** *(a,b) aralığından seçilebilir.*

İspat.
(i) *f sürekli olduğundan analizin birinci temel teoremi gereği F türevlenebilirdir ve her $x \in [a,b]$ için $F'(x) = f(x)$'tir (uç noktalarda tek yönlü türevler kastedilir). Bu sonuç Analizin Temel Teoremleri bölümünde kurulmuştu.*
(ii) İlk yön: türev OMT'si ⇒ integral OMT'si. *F, (a,b) üzerinde türevlenebilir olduğundan orada süreklidir (Teorem 3.1). Uç noktalar dâhil bütün $[a,b]$ üzerinde de süreklidir: f sürekli olduğundan sınırlıdır (bkz. Analiz 1), yani her $t \in [a,b]$ için $|f(t)| \le K$ olacak biçimde bir K sabiti vardır; integral için üçgen eşitsizliği (Teorem 28.2) gereği $a \le x < y \le b$ için $|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le K(y-x)$ olur. Demek ki F Lipschitz koşulunu sağlar (bkz. Analiz 1) ve dolayısıyla süreklidir (bkz. Analiz 1, Düzgün Sürekli Fonksiyon Süreklidir). Özetle F, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilirdir. Teorem 8.2 gereği*

$$F(b) - F(a) = F'(x_0)(b-a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olan bir $x_0 \in (a,b)$ vardır. Şimdi her terimi çevirelim:

- $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$;
- $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$;
- $F'(x_0) = f(x_0)$ *(birinci temel teorem).*

Yerine koyarsak

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(x_0)(b-a)$$

elde ederiz; bu tam olarak Sonuç 31.1'in ifadesidir.
Tersi yön: integral OMT'si ⇒ türev OMT'si (sürekli türev hâlinde). *$\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve Φ' sürekli olsun. Φ' sürekli olduğundan integrallenebilirdir ve Φ, Φ''nün bir ilkel fonksiyonudur; analizin ikinci temel teoremi gereği*

$$\int_a^b \Phi'(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Öte yandan Sonuç 31.1'i sürekli fonksiyon Φ''ye uygularsak

$$\int_a^b \Phi'(t)\,dt = \Phi'(x_0)(b-a)$$

olan bir $x_0 \in [a,b]$ buluruz. İki eşitliği birleştirince

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(x_0)(b-a)$$

çıkar; bu da türevin ortalama değer teoreminin ifadesidir. (Bu yön yalnızca Φ''nün sürekli olduğu durumu verir; türevin ortalama değer teoremi ise Φ''nün sürekliliğini hiç istemez. Dolayısıyla iki teorem, sürekli türevli fonksiyonlar sınıfında birebir denktir; türev teoremi bu sınıfın dışında daha geniştir.)
***(iii) (ii)**'nin ilk yönünde elde edilen x_0 noktası Teorem 8.2'den geldiği için **açık** (a,b) aralığındadır. Öyleyse f sürekli olduğunda*

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(x_0)(b-a)$$

eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a,b)$ bulunabilir; uç noktalara gerek yoktur. Sonuç 31.1'in ara değer teoremiyle yapılan ispatı bu ince bilgiyi vermiyordu, çünkü orada x_0 pekâlâ p ya da q uç noktalarından biri olabilirdi.
■

Aynı geometri, iki dil

İki teoremin geometrik içeriği de birbirinin çevirisidir:

Türevin OMT'si	İntegralin OMT'si
$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(x_0)$	$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(x_0)$
Kirişin eğimi bir teğetin eğimidir	Ortalama değer bir fonksiyon değeridir
F'nin $[a,b]$ üzerindeki ortalama değişim hızı	f'nin $[a,b]$ üzerindeki ortalama değeri

Soldaki satırda F bir yol fonksiyonu, $F' = f$ ise hız olarak okunursa ifade şu olur: bir yolculukta ortalama hız, yol boyunca bir anda gerçekten ulaşılan anlık hızdır. Sağdaki sütun aynı cümlenin hız fonksiyonu diliyle söylenişidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

31.6 Limit Hesabında Kullanım

Ortalama değer teoremi, integralin bulunduğu limitleri kırmanın en pratik yollarından biridir. Fikir hep aynıdır: integral küçük bir aralık üzerinde alınıyorsa, teorem onu **tek bir fonksiyon değerine** dönüştürür ve limit almak süreklilikten ibaret hâle gelir.

Örnek 31.4 (Küçük Aralıkta Ortalama). $\delta > 0$ ve $f : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. O hâlde

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{1/n} f(x)\,dx = f(0)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Öncelikle ifadenin anlamlı olması için $\frac{1}{n} \le \delta$, yani $n \ge \frac{1}{\delta}$ olmalıdır. Arşimet özelliği gereği (bkz. Analiz 1) böyle bir n vardır ve limit ancak yeterince büyük n'ler için yazılan terimlere bağlı olduğundan bunun bir sakıncası yoktur. Bundan sonra $n \ge \frac{1}{\delta}$ varsayılacaktır.
Birinci ispat: ortalama değer teoremiyle. f, $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ üzerinde süreklidir ve $0 < \frac{1}{n}$'dir. Sonuç 31.1 gereği öyle bir $x_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ vardır ki

$$\int_0^{1/n} f(x)\,dx = f(x_n)\left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{f(x_n)}{n}.$$

Her iki yanı n ile çarparsak

$$n \int_0^{1/n} f(x)\,dx = f(x_n)$$

olur. Şimdi (x_n) dizisine bakalım: her n için

$$0 \le x_n \le \frac{1}{n}$$

ve $\frac{1}{n} \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $x_n \to 0$'dır. f, 0 noktasında sürekli olduğundan süreklilik için dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği

$$f(x_n) \to f(0)$$

olur. Demek ki

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{1/n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0).$$

İkinci ispat: doğrudan kestirimle. Aynı sonucu ortalama değer teoremi kullanmadan da elde edebiliriz; bu ispat f'nin yalnızca 0'da sürekli olmasını ve $[0, \delta]$'da integrallenebilir olmasını ister. $n \int_0^{1/n} 1\,dx = 1$ olduğundan

$$n \int_0^{1/n} f(x)\,dx - f(0) = n \int_0^{1/n} \big(\, f(x) - f(0) \,\big)\,dx$$

yazabiliriz. $\varepsilon > 0$ verilsin. f, 0'da sürekli olduğundan öyle bir $\rho > 0$ vardır ki $0 \le x < \rho$ iken $|\, f(x) - f(0) \,| < \varepsilon$ olur. $N > \frac{1}{\rho}$ seçelim (Arşimet özelliği). $n \ge N$ için $\frac{1}{n} < \rho$ olur ve integral için üçgen eşitsizliği (Teorem 28.2) gereği

$$\left| n \int_0^{1/n} \big(\, f(x) - f(0) \,\big)\,dx \right| \le n \int_0^{1/n} |\, f(x) - f(0) \,|\,dx \le n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{n} = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ keyfî olduğundan limit $f(0)$'dır.
Genelleme. Aynı akıl yürütme, x_0 bir iç nokta ve $h \to 0^+$ olmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = f(x_0)$$

sonucunu verir. Bu, "f'nin x_0 etrafındaki küçük aralıklardaki ortalama değeri, $f(x_0)$'a yakınsar" demektir ve aslında analizin birinci temel teoreminin, yani $F'(x_0)=f(x_0)$ eşitliğinin bir başka okunuşudur.

Somut bir örnek. $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir; öyleyse

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n}\sqrt{1+x^3}\,dx = \sqrt{1+0}=1.$$

Bu integralin kapalı bir formülü olmamasına karşın limitin hesaplanabilmesi, yöntemin gücünü gösterir.

■

31.7 Eşitsizlik Kurmada Kullanım

Ağırlıklı biçimin en verimli kullanımı, çarpanlardan birinin integrali kolayca hesaplanabilirken ötekinin yalnızca sınırlarının bilinmesi durumunda ortaya çıkar. Bu durumda kolay olanı ağırlık olarak seçer, zor olanın yalnızca inf ve sup değerlerini kullanırız.

Örnek 31.5 (Ortalama Değer Teoremiyle Kestirimler). Aşağıdaki kestirimleri ispatlayınız.

a) Her $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$\frac{1}{2(n+1)} \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \le \frac{1}{n+1}$$

ve buradan $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$.

b) $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{6} \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \frac{1}{3}$.

Çözüm.

a) İntegrali bir çarpım olarak okuyalım:

$$\frac{x^n}{1+x} = f(x)\,g(x), \qquad f(x)=\frac{1}{1+x}, \qquad g(x)=x^n.$$

Burada $g(x)=x^n\ge 0$ olduğundan g meşru bir ağırlıktır ve her ikisi de $[0,1]$ üzerinde süreklidir. Önce f'nin sınırlarını bulalım. $[0,1]$ üzerinde $1\le 1+x\le 2$ olduğundan

$$\frac{1}{2}\le \frac{1}{1+x}\le 1,$$

yani $m=\inf f=\tfrac12$ ve $M=\sup f=1$'dir (bu değerler $x=1$ ve $x=0$'da alınır).
Sonra ağırlığın integralini hesaplayalım:

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Teorem 31.1 gereği

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = c\cdot\frac{1}{n+1}, \qquad c\in\left[\frac12,1\right].$$

c'nin sınırlarını yerine koymak istenen eşitsizliği verir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{2(n+1)} \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \le \frac{1}{n+1}.$$

Limit için sıkıştırma yeter: her iki uç da $n \to \infty$ iken 0'a gittiğinden

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0.$$

Denetim. $n=0$ için integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0{,}693$'tür ve gerçekten $\frac{1}{2} = 0{,}5 \le 0{,}693 \le 1$ olur. $n=1$ için

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = 1 - \ln 2 \approx 0{,}307$$

olup $\frac{1}{4} = 0{,}25 \le 0{,}307 \le 0{,}5$ sağlanır.
b) Aynı yöntemi

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)\,g(x), \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad g(x) = x^2$$

ayrışmasıyla kullanalım. $g \ge 0$'dır ve g süreklidir. f fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde azalandır ($1+x^2$ artar, karekökü artar, tersi azalır); dolayısıyla

$$m = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad M = f(0) = 1.$$

Ağırlığın integrali

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

olduğundan Teorem 31.1 gereği

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{c}{3}, \qquad c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

Buradan

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \frac{1}{3}$$

ve $\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ olduğundan istenen elde edilir.
Denetim. Bu integralin kapalı değeri de bulunabilir:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh} x\right) = \frac{1+2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

olduğundan

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\,1+\sqrt{2}\,\right) \approx 0{,}7071 - 0{,}4407 = 0{,}2664.$$

Bulduğumuz sınırlar $\frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}2357$ ve $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333$ olup kestirim doğrulanır. Yöntemin çekiciliği, bu kapalı formülü hiç bulmadan da iki basamak duyarlıkla bir sınır verebilmesidir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

31.8 Alıştırmalar

Alıştırma 31.1 (Ortalama Değer Teoremleri Üzerine).

a) $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0,3]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz ve $f(x_0) = \bar{f}$ olan x_0 noktasını belirleyiniz.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $[1,e]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz; ortalamanın alındığı x_0 noktasını bulup gerçekten $[1,e]$ içinde olduğunu doğrulayınız.

c) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sürekli olsun. $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{f(c)}{2}$ olan bir $c\in[0,1]$ bulunduğunu gösteriniz.

d) Her $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$\frac{1}{e(n+1)} \le \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \le \frac{1}{n+1}$$

olduğunu gösteriniz ve bu integralin limitini bulunuz.

e) $[0,1]$ üzerinde $f(x)=x$ ve $g(x)=x$ alınız. Teorem 31.2'nin verdiği ξ sayısını açıkça hesaplayınız.

f) $0<a<b$ olmak üzere $\left|\displaystyle\int_a^b \frac{\cos x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}$ olduğunu gösteriniz.

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n} e^{x^2}\cos x\,dx$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
a) x^2 süreklidir; ilkel fonksiyonu $\frac{x^3}{3}$'tür. Analizin ikinci temel teoremi gereği

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{3} = 9.$$

Tanım 31.1 gereği ortalama değer

$$\bar{f} = \frac{1}{3-0}\cdot 9 = 3$$

olur. f sürekli olduğundan Sonuç 31.1 bu değerin alındığını garanti eder: $x_0^2 = 3$ denklemi $[0,3]$ içinde tek çözüm verir,

$$x_0 = \sqrt{3} \approx 1{,}732 \in [0,3].$$

($x_0 = -\sqrt{3}$ kökü aralığın dışındadır.) Denetim: yüksekliği 3, tabanı 3 olan dikdörtgenin alanı 9'dur; integralle uyuşur.
b) $\frac{1}{x}$ fonksiyonu $[1,e]$ üzerinde süreklidir ve ilkel fonksiyonu $\ln x$'tir:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Ortalama değer

$$\bar{f} = \frac{1}{e-1}\cdot 1 = \frac{1}{e-1} \approx 0{,}5820$$

olur. Bu değerin alındığı nokta $\frac{1}{x_0} = \frac{1}{e-1}$ denkleminden

$$x_0 = e - 1 \approx 1{,}7183$$

biçiminde bulunur. Gerçekten $1 < e-1 < e$'dir: $e\approx 2{,}7183$ olduğundan $e-1\approx 1{,}7183 > 1$ ve elbette $e-1<e$'dir. Ayrıca $\bar{f}$ değerinin $\left[\frac{1}{e},1\right] = [\min f, \max f]$ aralığında olması gerekirdi; $\frac{1}{e}\approx 0{,}368 \le 0{,}582 \le 1$ olduğundan bu da doğrulanır.

 CC BY-NC-SA 4.0

c) $g(x) = x$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir ve $g \geq 0$'dır; f ise varsayım gereği süreklidir. Sonuç 31.1'in ağırlıklı biçimi (kısım **(i)**) gereği öyle bir $c \in [0,1]$ vardır ki

$$\int_0^1 f(x)\,x\,dx = f(c)\int_0^1 x\,dx.$$

Sağdaki ağırlık integrali

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{f(c)}{2}$$

elde edilir. Bu, istenendi.

d) Çarpanları $f(x) = e^{-x}$ ve $g(x) = x^n$ olarak ayıralım; $g \geq 0$'dır ve her iki fonksiyon da $[0,1]$ üzerinde süreklidir. e^{-x} azalan olduğundan

$$m = \inf_{[0,1]} e^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e}, \qquad M = \sup_{[0,1]} e^{-x} = e^{0} = 1$$

olur. Ağırlığın integrali $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$'dir. Teorem 31.1 gereği

$$\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \frac{c}{n+1}, \qquad c \in \left[\frac{1}{e}, 1\right],$$

yani

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

$n \to \infty$ iken her iki uç 0'a gittiğinden sıkıştırma gereği

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = 0.$$

Denetim ($n = 0$): $\int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}632$ olup $\frac{1}{e} \approx 0{,}368 \leq 0{,}632 \leq 1$ sağlanır.

e) $f(x) = x$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde artandır, $g(x) = x$ ise süreklidir; Teorem 31.2 uygulanabilir. Önce sol tarafı hesaplayalım:

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Şimdi teoremin sağ tarafını ξ cinsinden yazalım. $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olduğundan

$$f(0)\int_0^{\xi} x\,dx + f(1)\int_{\xi}^1 x\,dx = 0 + 1\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\xi}^1 = \frac{1-\xi^2}{2}.$$

Teoremin verdiği eşitlik

$$\frac{1-\xi^2}{2} = \frac{1}{3}$$

denklemine dönüşür. Buradan $1 - \xi^2 = \frac{2}{3}$, yani $\xi^2 = \frac{1}{3}$ ve $\xi \geq 0$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774 \in [0,1]$$

bulunur. Teoremin öngördüğü gibi ξ gerçekten $[0,1]$ aralığındadır.
f) $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $[a,b] \subset (0,\infty)$ üzerinde azalan ve pozitiftir; $g(x) = \cos x$ süreklidir. Lemma 31.1 gereği öyle bir $\xi \in [a,b]$ vardır ki

$$\int_a^b \frac{\cos x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^{\xi} \cos x\,dx = \frac{1}{a}\Big[\sin x\Big]_a^{\xi} = \frac{\sin\xi - \sin a}{a}.$$

Sinüsün değerleri $[-1,1]$ aralığında olduğundan üçgen eşitsizliği gereği $|\sin\xi - \sin a| \le 2$'dir; öyleyse

$$\left|\int_a^b \frac{\cos x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}.$$

Elde edilen sınır yine b'den bağımsızdır.
g) $h(x) = e^{x^2}\cos x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir: $x \mapsto x^2$ ve exp sürekli olduğundan bileşkeleri süreklidir, cos süreklidir ve sürekli fonksiyonların çarpımı süreklidir. Öyleyse Örnek 31.4'nin sonucu h'ye uygulanabilir:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n} e^{x^2}\cos x\,dx = h(0) = e^0\cos 0 = 1\cdot 1 = 1.$$

Ayrıntıyı bir kez daha yazalım: Sonuç 31.1 gereği her n için $\int_0^{1/n} h = \frac{h(x_n)}{n}$ olan bir $x_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ vardır; $0 \le x_n \le \frac{1}{n} \to 0$ olduğundan $x_n \to 0$ ve h'nin sürekliliğinden $h(x_n) \to h(0) = 1$ olur.
■

Bu bölümde integralin bir "ortalama" olduğunu ve bu ortalamanın sürekli fonksiyonlar için gerçekten alınan bir değer olduğunu gördük; ayrıca monoton çarpanlarla çalışırken ikinci ortalama değer teoreminin ne kadar keskin kestirimler verdiğini fark ettik. Her iki teorem de özünde tek bir eşitsizliğin — $m \le f \le M$ eşitsizliğinin — integrallenmesinden doğdu. Bir sonraki adımda eşitsizlik kurmayı çok daha ileri götürecek, iki fonksiyonun çarpımının integralini onların "büyüklükleriyle" karşılaştıran temel araçları kuracağız: Cauchy–Schwarz ve Minkowski Eşitsizlikleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

32. Cauchy–Schwarz ve Minkowski Eşitsizlikleri

İntegral için Ortalama Değer Teoremleri bölümünde bir integrali, integrallenen fonksiyonun bir ara noktadaki değeri cinsinden ifade etmeyi öğrendik. Bu, bir integrali **tam olarak** hesaplayamadığımızda onu **kestirmenin** yollarından biriydi. Şimdi aynı amaca hizmet eden ama çok daha güçlü bir araç kümesine geçiyoruz: iki fonksiyonun integrallerini birbirine bağlayan **eşitsizlikler**.
Buradaki temel gözlem şudur. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ integrali, f ile g'nin kendi integrallerinden hesaplanamaz; Teorem 27.1 toplama ve sabitle çarpmaya izin verir, ama **çarpma** bu listede yoktur. Öyleyse çarpımın integrali hakkında ne söyleyebiliriz? Yanıt, kesin bir eşitlik değil, keskin bir **sınır**dır: $\int fg$ mutlak değerce $\int f^2$ ile $\int g^2$'nin karekökleri çarpımını aşamaz. Bu, **Cauchy–Schwarz eşitsizliği**dir ve bütün analizin en çok kullanılan eşitsizliklerinden biridir.
Cauchy–Schwarz'ın arkasında çok net bir geometrik sezgi vardır. $\mathbb{R}^n$'de iki vektör için

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

eşitsizliği, "iç çarpım, uzunlukların çarpımını geçemez" demenin cebirsel biçimidir; eşitlik ancak iki vektör aynı doğrultudayken olur. İntegral biçimi, bu eşitsizliğin toplamlar yerine integraller konularak yazılmış hâlidir; nitekim sürekli fonksiyonlar için sonlu eşitsizliği Riemann toplamlarına (Tanım 26.1) uygulayıp limit alarak da elde edilebilir. Biz doğrudan integrallerle çalışan, daha kısa ve daha genel bir yol izleyeceğiz.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Cauchy–Schwarz eşitsizliğinin ifadesi ve **iki farklı ispatı**; karekök biçimi ve bunun $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$ "uzunluğu" olarak okunuşu; eşitliğin tam olarak ne zaman gerçekleştiği; iki çarpıcı uygulama; üçgen eşitsizliğinin integral karşılığı olan **Minkowski eşitsizliği**; Cauchy–Schwarz'ı özel hâl olarak içeren **Hölder eşitsizliği**; ve integrallenebilirlik üzerine yaygın yanlış inanışları karşı örneklerle temizleyen bir doğru–yanlış turu.

32.1 Cauchy–Schwarz Eşitsizliği

Eşitsizliği yazmadan önce, ifadedeki bütün integrallerin var olduğundan emin olalım. $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun (Tanım 25.1). f sınırlıdır (Teorem 26.3) ve $t \mapsto t^2$ süreklidir; öyleyse Teorem 27.2 gereği f^2, aynı biçimde g^2 ve $(f+g)^2$ integrallenebilirdir. Buradan

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

özdeşliği ve Teorem 27.1 ile fg çarpımının da integrallenebilir olduğu çıkar.

Teorem 32.1 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliği). *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

> ***İspat.***
> *İki ayrı ispat vereceğiz. Birincisi tek bir eşitsizlikten cebirsel manevrayla sonuca gider; ikincisi arkadaki yapıyı — bir ikinci derece polinomun işaretini — açığa çıkarır.*
> ***Birinci ispat (uygun sabitlerle).***
> ***Adım 1: Başlangıç eşitsizliği.*** *Her reel sayının karesi negatif olmadığından, hangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ seçilirse seçilsin*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\big(\ \alpha f(x) + \beta g(x)\big)^2 \geq 0, \qquad x \in [a,b]$$

olur. Sol taraftaki fonksiyon integrallenebilirdir (yukarıdaki gözlem, $\alpha f + \beta g$ integrallenebilir olduğu için aynen geçerlidir), dolayısıyla Teorem 28.1 gereği

$$\int_a^b \big(\ \alpha f(x) + \beta g(x)\big)^2 dx \geq 0.$$

Adım 2: Kareyi açalım. *$(\alpha f + \beta g)^2 = \alpha^2 f^2 + 2\alpha\beta fg + \beta^2 g^2$ olduğundan, Teorem 27.1 ile*

$$\alpha^2 \int_a^b f^2 + 2\alpha\beta \int_a^b fg + \beta^2 \int_a^b g^2 \geq 0. \qquad (*)$$

Buraya kadar α ve β tümüyle serbesttir; bütün iş onları doğru seçmektir.
Adım 3: Sabitlerin seçimi. *Gösterimi kısaltmak için $F = \int_a^b f^2$, $G = \int_a^b g^2$, $H = \int_a^b fg$ yazalım ve*

$$\alpha = \int_a^b g^2(x)\,dx = G, \qquad \beta = -\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -H$$

seçelim. Bu değerleri $(*)$'da yerine koyarsak

$$G^2F + 2G(-H)H + H^2G \geq 0, \qquad \text{yani} \qquad G^2F - 2GH^2 + GH^2 = G^2F - GH^2 \geq 0.$$

Ortak çarpan G'yi ayırırsak

$$G\ \big(\ GF - H^2\ \big) \geq 0. \qquad (**)$$

Adım 4: Durum ayrımı. *$G = \int_a^b g^2 \geq 0$'dır, çünkü $g^2 \geq 0$'dır (Teorem 28.1).*
Durum 1: *$G > 0$. $(**)$'ın her iki yanını pozitif G sayısına bölersek $GF - H^2 \geq 0$, yani*

$$H^2 \leq FG,$$

ki bu tam olarak iddia edilen eşitsizliktir.
Durum 2: *$G = 0$. Bu durumda $(**)$ hiçbir bilgi vermez; ayrıca ele almamız gerekir. Sağ taraf $FG = 0$ olduğundan, gösterilmesi gereken $H = 0$'dır. Bunun için $(*)$'a dönelim ve $\alpha = 1$, $\beta = t$ alalım ($t \in \mathbb{R}$ keyfî):*

$$F + 2tH + t^2G \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F + 2tH \geq 0 \qquad (\text{her} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{için})\ .$$

Eğer $H \neq 0$ olsaydı, $t = -\dfrac{F+1}{2H}$ seçimiyle $F + 2tH = F - (F+1) = -1 < 0$ olurdu; bu bir çelişkidir. Öyleyse $H = 0$ ve eşitsizlik $0 \leq 0$ biçiminde sağlanır.
İkinci ispat (diskriminant).
Adım 1: Bir ikinci derece polinom. *Her $t \in \mathbb{R}$ için*

$$\varphi(t) = \int_a^b \big(\ f(x) + t\,g(x)\big)^2 dx$$

tanımlayalım. İntegrallenen fonksiyon negatif olmadığından Teorem 28.1 gereği her t için $\varphi(t) \geq 0$'dır. Öte yandan kareyi açıp Teorem 27.1 uygularsak

$$\varphi(t) = \underbrace{\left(\int_a^b g^2\right)}_{A} t^2 + 2\underbrace{\left(\int_a^b fg\right)}_{B} t + \underbrace{\left(\int_a^b f^2\right)}_{C}$$

*elde ederiz. Yani φ, t değişkeninin **en çok ikinci dereceden bir polinomu**dur ve $\mathbb{R}$ üzerinde hiç negatif değer almaz.*
Adım 2: $A > 0$ hâli. *φ gerçek bir parabol belirtir ve yukarı doğru açılır. En küçük değerini tepe noktasında, yani $t^* = -\dfrac{B}{2A}$'da alır:*

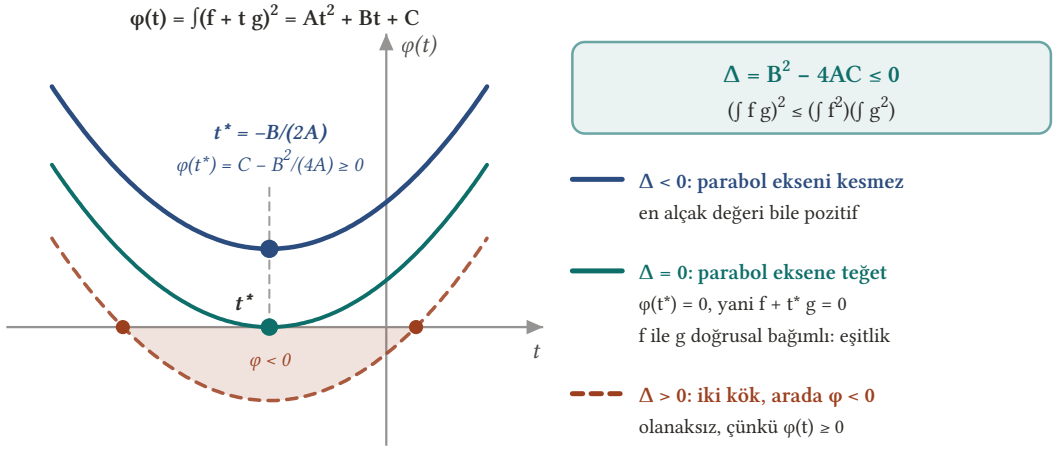
$$\varphi(t^*) = A \cdot \frac{B^2}{4A^2} - \frac{B^2}{2A} + C = C - \frac{B^2}{4A}.$$

$\varphi(t^*) \geq 0$ *olduğundan* $C - \dfrac{B^2}{4A} \geq 0$, *yani* $B^2 - 4AC \leq 0$ *olur — "hiç negatif değer almayan bir parabolün diskriminantı pozitif olamaz". A, B, C'nin değerlerini yerine koyarsak*

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b g^2\right)\left(\int_a^b f^2\right) \leq 0$$

çıkar; dörde bölünce istenen eşitsizlik elde edilir.

Adım 3: $A = 0$ hâli. *Bu durumda $\varphi(t) = Bt + C$ birinci dereceden (ya da sabit) bir fonksiyondur. $B \neq 0$ olsaydı bu doğru, $B > 0$ için $t \to -\infty$, $B < 0$ için $t \to +\infty$ giderken $-\infty$'a giderdi; yani φ mutlaka negatif değerler alırdı. $\varphi \geq 0$ olduğundan $B = 0$ olmak zorundadır, yani $\int_a^b fg = 0$'dır. Öte yandan $A = \int_a^b g^2 = 0$ olduğundan eşitsizliğin sol yanı $\left(\int_a^b fg\right)^2 = 0$, sağ yanı ise $\left(\int_a^b f^2\right) \cdot 0 = 0$'dır; eşitsizlik $0 \leq 0$ biçiminde sağlanır. İspat tamamlandı.*



Şekil 32.1: İkinci ispatın tamamı bu resimde durur. $\varphi(t) = \int_a^b (f + tg)^2$ integrali t'nin ikinci dereceden bir polinomudur; $A = \int g^2 > 0$ olduğundan yukarı açılan bir paraboldür ve integrali alınan fonksiyon negatif olmadığından hiçbir t için negatif değer alamaz. Bu yüzden parabolün t eksenine yapabileceği en fazla şey teğet olmaktır: ekseni iki noktada kesen soluk parabol ($\Delta > 0$) olanaksızdır, yani $\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$ olmak zorundadır — bu da tam olarak $(\int fg)^2 \leq \int f^2 \cdot \int g^2$ demektir. Teğetlik hâli ($\Delta = 0$) eşitlik hâline karşılık gelir: $f + t^*g$ özdeş sıfırdır, yani f ile g doğrusal bağımlıdır.

■

İki ispatı yan yana koyunca aralarındaki bağ görünür: $t^* = -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{H}{G}$ olduğundan $\alpha f + \beta g = G\left(f - \dfrac{H}{G}g\right) = G\,(\,f + t^*g\,)$'dir. Yani birinci ispattaki "akıllıca seçim", parabolün en alçak noktasına gitmekten başka bir şey değildir.

Eşitsizlik uygulamalarda çoğu zaman karekök alınmış biçimde kullanılır.

Sonuç 32.1 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliğinin Karekök Biçimi). *$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. O hâlde*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Özel olarak $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$ *de doğrudur.*

> ***İspat.***
> *Teorem 32.1 gereği* $\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$*'dir. Her iki yan da negatif değildir ve* $t \mapsto \sqrt{t}$*,* $[0,\infty)$ *üzerinde artan olduğundan karekök almak eşitsizliğin yönünü korur. Sol tarafta* $\sqrt{u^2} = |\,u\,|$ *(bkz. Analiz 1), sağ tarafta ise çarpımın karekökü kareköklerin çarpımıdır; sonuç istenen eşitsizliktir. Son iddia* $u \le |\,u\,|$ *olmasından çıkar.*
> ■

> **i** Neden bir uzunluk gibi davranıyor?
>
> $f \in \mathcal{R}[a,b]$ için
>
> $$\|\,f\,\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$
>
> sayısına f'nin **kare ortalama normu** ya da kısaca L^2 **normu** (L^2 norm) diyelim. Benzer biçimde
>
> $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
>
> sayısına f ile g'nin **iç çarpımı** (inner product) diyelim. Bu gösterimlerle Sonuç 32.1 tek satıra iner:
>
> $$|\,\langle f,g\rangle\,| \le \|\,f\,\|_2\,\|\,g\,\|_2 .$$
>
> Bu, $\mathbb{R}^n$'deki $|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \le \|\,\vec{a}\,\|\,\|\,\vec{b}\,\|$ eşitsizliğinin birebir aynısıdır: fonksiyon "sonsuz koordinatlı bir vektör" gibi düşünülür ve $[a,b]$ üzerindeki her x bir koordinat indisi rolü oynar. Fourier serilerinin ve fonksiyonel analizin dili buradan doğar.

Eşitsizlikte eşitliğin ne zaman gerçekleştiği, çoğu uygulamada eşitsizliğin kendisi kadar önemlidir; çünkü bir kestirimin **keskin** olup olmadığını söyler. Vektörlerde eşitlik, iki vektörün aynı doğrultuda olmasına denkti. Fonksiyonlarda da durum aynıdır — yeter ki süreklilik varsayalım.

Önerme 32.1 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliğinde Eşitlik Hâli). $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ***sürekli*** *fonksiyonlar olsun. O hâlde*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

eşitliği ancak ve ancak f *ile* g ***doğrusal bağımlı*** *olduğunda, yani ikisi birden sıfır olmayan* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *sayıları için*

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \qquad (\text{her } \; x \in [a,b] \;\; \text{için})$$

sağlandığında gerçekleşir. Sezgisel söylenişiyle: eşitlik ancak biri ötekinin sabit katı olduğunda olur.

> ***İspat.***
> *Yine* $F = \int_a^b f^2$*,* $G = \int_a^b g^2$*,* $H = \int_a^b fg$ *yazalım.*
> ***(⇐) Doğrusal bağımlılık eşitliği verir.*** $\lambda f + \mu g \equiv 0$ *ve* $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ *olsun.*
> Durum 1: $\mu \neq 0$*. O hâlde* $g = cf$*,* $c = -\dfrac{\lambda}{\mu}$ *olur ve Teorem 27.1 ile* $H = cF$*,* $G = c^2F$*'dir. Böylece* $H^2 = c^2F^2 = F\cdot(c^2F) = FG$*, yani eşitlik sağlanır.*
> Durum 2: $\mu = 0$*. Bu durumda* $\lambda \neq 0$ *ve* $f \equiv 0$*'dır;* $F = H = 0$ *olduğundan eşitliğin iki yanı da sıfırdır.*
> ***(⇒) Eşitlik doğrusal bağımlılığı gerektirir.*** $H^2 = FG$ *olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Durum 1: $G > 0$. *İkinci ispattaki parabolü hatırlayalım:* $\varphi(t) = \int_a^b (f+tg)^2 dx = Gt^2 + 2Ht + F$. *Tepe noktası* $t_0 = -\dfrac{H}{G}$*'dir ve orada*

$$\varphi(t_0) = F - \frac{H^2}{G} = \frac{FG - H^2}{G} = \frac{0}{G} = 0$$

olur. Demek ki

$$\int_a^b \big(\, f(x) + t_0 g(x)\big)^2 dx = 0.$$

Şimdi $h = (f + t_0 g)^2$ *diyelim.* f *ve* g *sürekli olduğundan* h *de süreklidir (bkz. Analiz 1) ve her* x *için* $h(x) \geq 0$*'dır. İntegrali sıfır olan, sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon özdeş olarak sıfırdır (Teorem 28.3). Öyleyse* $h \equiv 0$*, yani her* $x \in [a,b]$ *için*

$$f(x) + t_0 g(x) = 0.$$

$(\lambda, \mu) = (1, t_0) \neq (0,0)$ *olduğundan* f *ile* g *doğrusal bağımlıdır.*
Durum 2: $G = 0$. *Bu kez* g^2 *sürekli, negatif olmayan ve integrali sıfır olan bir fonksiyondur; yukarıdaki aynı akıl yürütmeyle* $g^2 \equiv 0$*, yani* $g \equiv 0$*'dır. O hâlde* $(\lambda, \mu) = (0,1)$ *seçimiyle* $\lambda f + \mu g \equiv 0$ *olur; yine doğrusal bağımlılık vardır.*
■

⚠ Süreklilik varsayımı atılamaz

Eşitlikten doğrusal bağımlılığa geçen yönde süreklilik gerçekten gereklidir. $[0,1]$ üzerinde

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, x = \frac{1}{2} \\ 0, x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

alalım. g, sonlu sayıda noktada sıfırdan farklı olduğundan integrallenebilirdir ve $\int_0^1 g = \int_0^1 g^2 = 0$'dır. Ayrıca $\int_0^1 fg = 0$ ve $\int_0^1 f^2 = 1$'dir. Böylece

$$\left(\int_0^1 fg\right)^2 = 0 = 1 \cdot 0 = \left(\int_0^1 f^2\right)\left(\int_0^1 g^2\right),$$

yani eşitlik gerçekleşir. Buna karşın f ile g doğrusal bağımlı **değildir**: $\lambda f + \mu g \equiv 0$ olsaydı, $x \neq \frac{1}{2}$'de $\lambda = 0$ ve ardından $x = \frac{1}{2}$'de $\mu = 0$ çıkardı. Sorunun kaynağı, integralin tek bir noktayı görmemesidir; süreklilik bu boşluğu kapatır.

32.2 Cauchy–Schwarz Eşitsizliğinin Uygulamaları

Cauchy–Schwarz'ı bir probleme uygularken tek yaratıcılık gerektiren adım, integrallenen ifadeyi **hangi iki çarpana** ayıracağımıza karar vermektir. Aşağıdaki iki örnek, bu ayrıştırmanın iki tipik biçimini gösterir: birincisinde sabit fonksiyon 1'i çarpanlarına ayırıyoruz, ikincisinde ise integrallenen ifadeyi kısmi integrasyonla tanıdığımız bir çarpım olarak yeniden yazıyoruz.

Örnek 32.1 (Bir Fonksiyon ile Tersinin İntegralleri). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) > 0$ olsun. O hâlde

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right)$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliğin ne zaman gerçekleştiğini belirleyiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Adım 1: İntegraller anlamlı mı? f sürekli olduğundan integrallenebilirdir (Teorem 25.2). Weierstrass ekstremum teoremi (bkz. Analiz 1) gereği f en küçük değerini alır: $m = \min_{[a,b]} f > 0$. Öyleyse $\dfrac{1}{f}$, $\sqrt{f}$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ de $[a,b]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1; payda hiç sıfırlanmaz), dolayısıyla integrallenebilirdir.
Adım 2: 1 sayısını çarpanlarına ayıralım. İşin bütün püf noktası, integralin içindeki 1'i uygun biçimde yazmaktır:

$$1 = \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \qquad x \in [a,b].$$

Buradan

$$b - a = \int_a^b 1 \, dx = \int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \, dx$$

olur.
Adım 3: Cauchy–Schwarz. Karekök biçimini (Sonuç 32.1) $\sqrt{f}$ ile $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ çiftine uygulayalım:

$$b - a \le \left(\int_a^b (\sqrt{f})^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\int_a^b f \right)^{1/2} \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right)^{1/2}.$$

Adım 4: Kare alalım. İki yan da negatif olmadığından kare almak eşitsizliği korur:

$$(b-a)^2 \le \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)} \, dx \right).$$

Adım 5: Eşitlik hâli. $\sqrt{f}$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sürekli olduğundan Önerme 32.1 uygulanabilir: eşitlik ancak her x için $\lambda \sqrt{f(x)} + \mu \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0$ olacak biçimde ikisi birden sıfır olmayan λ, μ varsa gerçekleşir. Bu eşitliği $\sqrt{f(x)} > 0$ ile çarparsak $\lambda f(x) + \mu = 0$ olur. $\lambda = 0$ ise $\mu = 0$ çıkar ve seçim geçersizleşir; öyleyse $\lambda \neq 0$ ve $f(x) = -\dfrac{\mu}{\lambda}$, yani f sabittir. Tersine $f \equiv c > 0$ sabitse

$$\left(\int_a^b c \, dx \right) \left(\int_a^b \frac{1}{c} \, dx \right) = c(b-a) \cdot \frac{b-a}{c} = (b-a)^2$$

olur. Demek ki eşitlik **tam olarak** f sabit olduğunda gerçekleşir. Somut bir kontrol: $[1,2]$ üzerinde $f(x) = x$ için $\int_1^2 x \, dx = \dfrac{3}{2}$, $\int_1^2 \dfrac{1}{x} \, dx = \ln 2 \approx 0{,}6931$ ve çarpım $\approx 1{,}0397 > 1 = (2-1)^2$'dir.
■

Sıradaki uygulama, matematiksel fizikte "belirsizlik eşitsizliği" adıyla bilinen sonucun en yalın biçimidir: bir fonksiyon uçlarda sıfırlanıyor ve toplam "kütlesi" 1 ise, kütlesi orijine yakın toplanmışsa türevi büyük olmak zorundadır.

Örnek 32.2 (Bir Fonksiyon ile Türevi Arasında Bir Eşitsizlik). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir olsun (yani f türevlenebilir ve f' sürekli olsun). $f(a) = f(b) = 0$ ve

$$\int_a^b f^2(x) \, dx = 1$$

olsun. O hâlde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{4} \leq \left(\int_a^b x^2 f^2(x)\, dx \right) \left(\int_a^b \big(f'(x) \big)^2 dx \right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: Ara integrali hesaplayalım. Kilit gözlem şudur: türev alma kuralları gereği (Teorem 3.2 ve Teorem 4.1)

$$\big(f^2(x) \big)' = 2f(x)f'(x)$$

olur. Öyleyse

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_a^b x \, \big(f^2(x) \big)' dx$$

yazabiliriz. Sağdaki integrali belirli integralde kısmi integrasyonla (Teorem 30.3) hesaplayalım. $u(x) = x$ ve $v(x) = f^2(x)$ alırsak $u'(x) = 1$, $v'(x) = 2f(x)f'(x)$ olur ve

$$\frac{1}{2} \int_a^b x \, \big(f^2(x) \big)' dx = \frac{1}{2} \Big[x f^2(x) \Big]_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b 1 \cdot f^2(x)\, dx$$

elde ederiz. (u ile v türevlenebilirdir; $u' = 1$ sabit, $v' = 2ff'$ ise sürekli fonksiyonların çarpımı olarak süreklidir, dolayısıyla ikisi de integrallenebilirdir — Teorem 30.3'un istediği koşullar sağlanıyor.)
Adım 2: Sınır terimi kaybolur. Hipotez gereği $f(a) = f(b) = 0$ olduğundan

$$\Big[x f^2(x) \Big]_a^b = b f^2(b) - a f^2(a) = b \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$$

olur. Ayrıca $\int_a^b f^2 = 1$ verilmiştir. Böylece

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

Adım 3: Cauchy–Schwarz'ı doğru çarpanlarla uygulayalım. İntegrallenen ifadeyi $x f(x) f'(x) = \big(x f(x) \big) \cdot f'(x)$ biçiminde, yani $x f(x)$ ile $f'(x)$ fonksiyonlarının çarpımı olarak okuyalım; her ikisi de $[a, b]$ üzerinde sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir. Teorem 32.1 gereği

$$\left(\int_a^b \big(x f(x) \big)\, f'(x)\, dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b \big(x f(x) \big)^2 dx \right) \left(\int_a^b \big(f'(x) \big)^2 dx \right).$$

Adım 4: Sol tarafı yerine koyalım. Adım 2'de bulduğumuz değer $-\frac{1}{2}$ idi; karesi $\left(-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$'tür. Ayrıca $\big(x f(x) \big)^2 = x^2 f^2(x)$'tir. Böylece

$$\frac{1}{4} \leq \left(\int_a^b x^2 f^2(x)\, dx \right) \left(\int_a^b \big(f'(x) \big)^2 dx \right)$$

elde edilir; istenen buydu.
Adım 5: Sonucun okunuşu. $\int_a^b x^2 f^2$ küçükse — yani f'nin "kütlesi" orijinin çevresinde toplanmışsa — $\int_a^b (f')^2$ zorunlu olarak büyük olur: fonksiyon dar bir bölgede $\int f^2 = 1$ değerini tutturmak için hızla yükselip alçalmak zorundadır. Bu, belirsizlik ilkesinin matematiksel çekirdeğidir.
■

32.3 Minkowski Eşitsizliği

$\| f \|_2$ niceliğine bir "uzunluk" gözüyle bakmaya başladıysak, bir uzunluktan beklenen en temel özelliği de sınamamız gerekir: vektörlerdeki $\| \vec{a} + \vec{b} \| \leq \| \vec{a} \| + \| \vec{b} \|$ **üçgen eşitsizliği**. Fonksiyonlar için aynı

 CC BY-NC-SA 4.0

ifadenin doğru olduğunu söyleyen sonuç **Minkowski eşitsizliği**dir ve doğrudan Cauchy–Schwarz'tan çıkar.

Teorem 32.2 (Minkowski Eşitsizliği). *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olsun. O hâlde*

$$\left(\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2 dx\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

İspat.
Adım 1: Kareyi açalım. *Her $x \in [a,b]$ için*

$$\big(f(x)+g(x)\big)^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)$$

olur. Bu üç fonksiyonun da integrallenebilir olduğunu bölümün başında görmüştük. Teorem 27.1 ile

$$\int_a^b (f+g)^2 dx = \int_a^b f^2\,dx + 2\int_a^b fg\,dx + \int_a^b g^2\,dx.$$

Adım 2: Orta terimi Cauchy–Schwarz ile büyütelim. *Sonuç 32.1 gereği*

$$\int_a^b fg\,dx \le \left|\int_a^b fg\,dx\right| \le \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}.$$

Bu kestirimi Adım 1'deki eşitlikte orta terimin yerine koyarsak sağ taraf ancak büyür:

$$\int_a^b (f+g)^2 dx \le \int_a^b f^2 + 2\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} + \int_a^b g^2.$$

Adım 3: Tam kareyi tanıyalım. *$X = \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$ ve $Y = \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$ yazalım; $\int f^2 \ge 0$ ve $\int g^2 \ge 0$ olduğundan bunlar tanımlı ve negatif değildir. $\int f^2 = X^2$, $\int g^2 = Y^2$ olduğundan Adım 2'deki sağ taraf $X^2 + 2XY + Y^2 = (X+Y)^2$'dir, yani*

$$\int_a^b (f+g)^2 dx \le (X+Y)^2.$$

Adım 4: Karekök alalım. *Sol taraf negatif değildir ve $X+Y \ge 0$'dır; $t \mapsto \sqrt{t}$ artan olduğundan*

$$\left(\int_a^b (f+g)^2 dx\right)^{1/2} \le X+Y = \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$$

elde ederiz. Eşitsizliğin adı da buradan gelir: kenarları $\| f \|_2$, $\| g \|_2$ ve $\| f+g \|_2$ olan bir "üçgende", bir kenar öteki ikisinin toplamını aşamaz.
■

Elde ettiğimiz sonucu $\| \cdot \|_2$ gösterimiyle yazınca ne söylediği çok daha net görünür.

Sonuç 32.2 (Kare Ortalama Normunun Özellikleri). *$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $\| f \|_2 = \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$ gösterimiyle şunlar geçerlidir:*
(i) $\| f \|_2 \ge 0$;
(ii) $\| cf \|_2 = |c| \, \| f \|_2$;
(iii) $\| f+g \|_2 \le \| f \|_2 + \| g \|_2$ *(üçgen eşitsizliği);*
(iv) f sürekli ise: $\| f \|_2 = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

 CC BY-NC-SA 4.0

*Özel olarak $\|\cdot\|_2$, $[a,b]$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde bir **norm**dur.*

> ***İspat.***
> *(i) $f^2 \geq 0$ olduğundan Teorem 28.1 gereği $\int_a^b f^2 \geq 0$'dır; karekökü de negatif değildir.*
> *(ii) Teorem 27.1 ile $\int_a^b (cf)^2 = c^2 \int_a^b f^2$'dir. Karekök alınca $\| cf \|_2 = \sqrt{c^2} \cdot \| f \|_2 = |c| \, \| f \|_2$ olur.*
> *(iii) Bu, Teorem 32.2'in gösterimsel yeniden yazılışıdır.*
> *(iv) $f \equiv 0$ ise $\| f \|_2 = 0$'dır. Tersine $\int_a^b f^2 = 0$ olsun. f sürekli olduğundan f^2 de süreklidir (bkz. Analiz 1) ve negatif değildir; Teorem 28.3 gereği $f^2 \equiv 0$, yani $f \equiv 0$'dır.*
> ■

> ⚠ Sürekli olmayan fonksiyonlarda norm bir yarınormdur
>
> (iv) maddesinde sürekliliği atarsak iddia bozulur. $[0,1]$ üzerinde $f(x) = 0$ $(x \neq \tfrac{1}{2}), f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$ alalım. f integrallenebilirdir ve $\int_0^1 f^2 = 0$, yani $\| f \|_2 = 0$'dır; oysa $f \not\equiv 0$'dır. Böyle bir durumda $\| \cdot \|_2$'ye **yarınorm** (seminorm) denir: (i), (ii), (iii) sağlanır ama "uzunluğu sıfır olan tek eleman sıfırdır" koşulu sağlanmaz. Bunun onarımı, integral bakımından ayırt edilemeyen fonksiyonları aynı saymaktır; bu fikir ileri analizde L^2 uzayının inşasına götürür.

32.4 Hölder Eşitsizliği

Cauchy–Schwarz eşitsizliğinde f ile g simetrik rollerdeydi: her ikisine de 2 üssünü uyguladık. Peki bu iki üs farklı olabilir mi? Yanıt evettir; yeter ki üsler

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad p, q > 1$$

koşulunu sağlasın. Böyle bir (p,q) çiftine **eşlenik üsler** (conjugate exponents) denir; $p = q = 2$ bu koşulu sağlayan tek simetrik çifttir, başka örnekler $\left(3, \tfrac{3}{2}\right)$ ve $\left(4, \tfrac{4}{3}\right)$'tür. Sonuca giden yol tek bir cebirsel eşitsizlikten geçer.

Lemma 32.1 (Young Eşitsizliği). *$p, q > 1$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. O hâlde her $u \geq 0$ ve $v \geq 0$ için*

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

olur.

> ***İspat.***
> *$v \geq 0$ sabitlensin ve $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu*
>
> $$h(u) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$$
>
> *ile tanımlayalım. Amacımız her $u \geq 0$ için $h(u) \geq 0$ olduğunu göstermektir.*
> ***Adım 1: $v = 0$ hâli.*** *Bu durumda $h(u) = \dfrac{u^p}{p} \geq 0$'dır ve iddia açıktır. Bundan sonra $v > 0$ varsayalım.*
> ***Adım 2: Kritik nokta.*** *h, $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $h'(u) = u^{p-1} - v$'dir. $p > 1$ olduğundan $u \mapsto u^{p-1}$, $[0,\infty)$ üzerinde kesin artan ve örtendir; öyleyse $h'(u) = 0$ denkleminin tek çözümü $u_0 = v^{\frac{1}{p-1}} > 0$'dır.*
> ***Adım 3: Bu nokta en küçük değeri verir.*** *$u < u_0$ için $u^{p-1} < v$, yani $h'(u) < 0$; $u > u_0$ için $h'(u) > 0$'dır. Sonuç 8.3 gereği h, $[0,u_0]$ üzerinde azalan, $[u_0,\infty)$ üzerinde artandır; demek ki her $u \geq 0$ için $h(u) \geq h(u_0)$'dır.*
> ***Adım 4: En küçük değer sıfırdır.*** *Önce üs bağıntısını not edelim: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ eşitliğinden $\dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{p}$, yani*

$$q = \frac{p}{p-1} \qquad \text{ve dolayısıyla} \qquad \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

Şimdi hesaplayalım:

$$u_0^p = \left(v^{\frac{1}{p-1}}\right)^p = v^{\frac{p}{p-1}} = v^q, \qquad u_0 v = v^{\frac{1}{p-1}} \cdot v = v^{\frac{1}{p-1}+1} = v^q.$$

Böylece

$$h(u_0) = \frac{v^q}{p} + \frac{v^q}{q} - v^q = v^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = v^q \cdot 0 = 0.$$

Adım 3 ile birleştirince her $u \geq 0$ için $h(u) \geq 0$, yani

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

elde edilir. (İspattan ayrıca eşitliğin ancak $u = u_0$, yani $u^p = v^q$ olduğunda gerçekleştiği de görülür.) ■

$p = q = 2$ alındığında Young eşitsizliği $uv \leq \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{v^2}{2}$'ye, yani tanıdık $(u-v)^2 \geq 0$'a indirgenir. Şimdi bu cebirsel eşitsizliği integrale taşıyalım.

Teorem 32.3 (Hölder Eşitsizliği). *$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $p, q > 1$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. O hâlde*

$$\int_a^b \mid f(x)g(x) \mid dx \leq \left(\int_a^b \mid f(x) \mid^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b \mid g(x) \mid^q dx\right)^{1/q}$$

ve dolayısıyla

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b \mid f \mid^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b \mid g \mid^q\right)^{1/q}$$

olur. $p = q = 2$ özel hâlinde bu, Cauchy–Schwarz eşitsizliğidir.

İspat.
Adım 0: İntegraller anlamlı mı? *f sınırlıdır (Teorem 26.3), diyelim $\mid f \mid \leq K$; $t \mapsto \mid t \mid^p$ fonksiyonu $[-K, K]$ üzerinde sürekli olduğundan Teorem 27.2 gereği $\mid f \mid^p$ integrallenebilirdir. Aynı gerekçeyle $\mid g \mid^q$ da integrallenebilirdir. fg çarpımı bölümün başındaki gözlem gereği integrallenebilir olduğundan ve $t \mapsto \mid t \mid$ sürekli olduğundan, yine Teorem 27.2 ile $\mid fg \mid$ de integrallenebilirdir. Kısaltma olarak*

$$A = \left(\int_a^b \mid f \mid^p\right)^{1/p}, \qquad B = \left(\int_a^b \mid g \mid^q\right)^{1/q}$$

yazalım; ikisi de negatif değildir.
Adım 1: $A > 0$ ve $B > 0$ hâli. *Her $x \in [a,b]$ için Young eşitsizliğini (Lemma 32.1)*

$$u = \frac{\mid f(x) \mid}{A}, \qquad v = \frac{\mid g(x) \mid}{B}$$

seçimiyle uygulayalım:

$$\frac{\mid f(x) \mid}{A} \cdot \frac{\mid g(x) \mid}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\mid f(x) \mid^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\mid g(x) \mid^q}{B^q}.$$

Bu eşitsizlik her noktada geçerlidir ve iki yan da integrallenebilirdir; Teorem 28.1 ve Teorem 27.1 ile integralini alalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{AB}\int_a^b |\, fg\,| \le \frac{1}{pA^p}\int_a^b |\, f\,|^p + \frac{1}{qB^q}\int_a^b |\, g\,|^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

çünkü tanım gereği $\int_a^b |\, f\,|^p = A^p$ *ve* $\int_a^b |\, g\,|^q = B^q$*'dur. Buradan* $\int_a^b |\, fg\,| \le AB$*, yani istenen eşitsizlik çıkar.*

Adım 2: $A = 0$ ***hâli (***$B = 0$ ***hâli bakışımlıdır).*** *Sağ taraf* 0 *olduğundan* $\int_a^b |\, fg\,| = 0$ *olduğunu göstermeliyiz.* $\int_a^b |\, f\,|^p = 0$ *olsun ve keyfî bir* $\varepsilon > 0$ *alalım. Her* x *için*

$$|\, f(x)\,| \le \varepsilon + \frac{|\, f(x)\,|^p}{\varepsilon^{p-1}}$$

olur: $|\, f(x)\,| \le \varepsilon$ *ise ilk terim zaten yeter;* $|\, f(x)\,| > \varepsilon$ *ise* $|\, f(x)\,|^{p-1} > \varepsilon^{p-1}$ *olduğundan* $|\, f(x)\,| = \frac{|\, f(x)\,|^p}{|\, f(x)\,|^{p-1}} \le \frac{|\, f(x)\,|^p}{\varepsilon^{p-1}}$*'dir. İntegral alırsak (Teorem 28.1)*

$$0 \le \int_a^b |\, f\,| \le \varepsilon(b-a) + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\int_a^b |\, f\,|^p = \varepsilon(b-a).$$

$\varepsilon > 0$ *keyfî olduğundan* $\int_a^b |\, f\,| = 0$*'dır. Şimdi* g *sınırlı olduğundan, diyelim* $|\, g\,| \le M$*, her* x *için* $|\, f(x)g(x)\,| \le M\,|\, f(x)\,|$*'tir ve yine Teorem 28.1 ile*

$$0 \le \int_a^b |\, fg\,| \le M\int_a^b |\, f\,| = 0$$

bulunur. Demek ki eşitsizlik $0 \le 0$ *biçiminde sağlanır.*

Adım 3: İkinci ifade. *Üçgen eşitsizliğinin integral biçimi (Teorem 28.2) gereği* $\left|\int_a^b fg\right| \le \int_a^b |\, fg\,|$*'dir; birinci ifadeyle birleştirince ikincisi çıkar.*

Adım 4: $p = q = 2$ ***hâli.*** *Bu değerler* $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ *koşulunu sağlar;* $|\, f\,|^2 = f^2$ *ve* $|\, g\,|^2 = g^2$ *olduğundan eşitsizlik* $\left|\int_a^b fg\right| \le \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$ *hâlini alır, yani tam olarak Sonuç 32.1'tur.*

■

> **Hangi ayrıştırmayı seçmeli?**
>
> Bu üç eşitsizliği kullanırken izlenecek yol hemen her zaman aynıdır: integralin içindeki ifadeyi, **karesinin (ya da p-inci kuvvetinin) integrali kolay hesaplanan** iki çarpana ayır. En sık kullanılan ayrıştırma $h = h\cdot 1$'dir; bu, Cauchy–Schwarz'ta $\left(\int_a^b h\right)^2 \le (b-a)\int_a^b h^2$ verir. Türev içeren problemlerde önce kısmi integrasyonla $\int uv'$ biçiminde bir ifade üret, sonra eşitsizliği u ile v' çiftine uygula. Elde ettiğin sınırın keskin olup olmadığını ise Önerme 32.1 söyler.

32.5 Mutlak Değerle Kestirim

Bir integralin **değerini** bulamadığımız durumlarda bile büyüklüğünü sınırlamak çoğu zaman mümkündür. Bunun en basit aracı Teorem 28.2'dir: $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |\, f\,|$. Bu adımdan sonra yapılacak iş, $|\, f\,|$'yi integrali kolay hesaplanan daha büyük bir fonksiyonla değiştirmektir.

Örnek 32.3 (Bir Trigonometrik İntegralin Kestirimi).

$$\left|\int_0^{\pi/2} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2+\cos x}\,dx\right| \le \frac{\pi^2}{16}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Mutlak değeri içeri alalım. İntegrallenen fonksiyon $[0, \pi/2]$ üzerinde süreklidir (payda hiç sıfırlanmaz, çünkü $2 + \cos x \geq 1$'dir), dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2). Teorem 28.2 gereği

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2 + \cos x}\, dx \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}{2 + \cos x}\, dx.$$

(Payda pozitif olduğundan mutlak değeri yalnızca paya koyduk.)
Adım 2: Paydanın alt sınırını bulalım. $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\cos x \geq 0$, dolayısıyla

$$2 + \cos x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2 + \cos x} \leq \frac{1}{2}$$

olur; bir kesirde paydayı en küçük değerine indirmek kesri en büyük yapar.
Adım 3: Payı sadeleştirelim. Aynı aralıkta $x \leq \frac{\pi}{2}$ olduğundan $x - \frac{\pi}{2} \leq 0$'dır ve $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - x$ olur.
Adım 4: Kestirimi birleştirelim. Adım 2 ve Adım 3'ten, her $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için

$$\frac{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}{2 + \cos x} \leq \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}$$

olur. Teorem 28.1 gereği

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}{2 + \cos x}\, dx \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}\, dx.$$

Adım 5: Sağdaki integrali hesaplayalım. Bu, bir polinomun integralidir:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2}.$$

Uç noktalarda değerlendirelim:

$$\left[\frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \right) - 0 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8},$$

öyleyse integralin değeri $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16}$'dır. Zincirin tamamı

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2 + \cos x}\, dx \right| \leq \frac{\pi^2}{16}$$

sonucunu verir.
Adım 6: Kestirim ne kadar iyi? $\frac{\pi^2}{16} \approx 0{,}6169$'dur; gerçek değerin mutlak değeri ise yaklaşık $0{,}44$ dolayındadır. Kaybın kaynağı, $2 + \cos x \geq 2$ adımında $\cos x$'i tümüyle atmamızdır. Kestirimde hep bu denge gözetilir: kabalaştırdıkça hesap kolaylaşır, sınır gevşer.
■

32.6 Doğru mu Yanlış mı?

Şimdi Riemann integralinin özellikleri üzerine sık dile getirilen bir dizi iddiayı ele alacağız: önce iddiayı yazacağız, sonra doğru olanları ispatlayıp yanlış olanlara karşı örnek vereceğiz. Bu kısım, buraya kadar biriktirdiğimiz teoremlerin **hipotezlerinin** neden tam olarak o hâliyle yazıldığını görmenin en iyi yoludur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 32.4 (İntegralde Sıralama Üzerine İddialar). **İddia (a).** $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\int_a^b f \le \int_a^b g$ ise, her $x \in [a,b]$ için $f(x) \le g(x)$'tir.
İddia (b). $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\int_a^b f \le \int_a^b g$ ise, $f(c) \le g(c)$ olan **en az bir** $c \in [a,b]$ vardır.
İddia (c). $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için $m \le f(x) \le M$ ise, $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$'dır.

Çözüm.
(a) Yanıt: Yanlış.
Gerekçe (karşı örnek). $[0,1]$ aralığında $f(x) = 1$ ve $g(x) = 2x$ alalım. Her ikisi de sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir. İntegralleri

$$\int_0^1 f = \int_0^1 1\,dx = 1, \qquad \int_0^1 g = \int_0^1 2x\,dx = \Big[x^2\Big]_0^1 = 1$$

olduğundan $\int_0^1 f \le \int_0^1 g$ koşulu ($1 \le 1$ biçiminde) sağlanır. Buna karşın $x = 0$'da

$$f(0) = 1 > 0 = g(0)$$

olur; yani noktasal eşitsizlik bozulur. Teorem 28.1'nın oku tek yönlüdür: noktasal sıralamadan integral sıralamasına gidilir, tersi geçerli değildir.
(b) Yanıt: Doğru.
Gerekçe. Olmayana ergi yapalım: her $x \in [a,b]$ için $f(x) > g(x)$ olsun. $h = g - f$ diyelim; h integrallenebilirdir (Teorem 27.1) ve her yerde negatiftir. Hipotez $\int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f \ge 0$ dediğinden, $\int_a^b h < 0$ olduğunu göstermek çelişki için yeter.
$\psi = -h$ yazalım; $\psi > 0$ ve $\psi \in \mathcal{R}[a,b]$'dir. "Her noktada kesin pozitif olan integrallenebilir bir fonksiyonun integrali kesin pozitiftir" iddiasını göstermemiz yeter. $\int_a^b \psi = 0$ olduğunu varsayıp çelişki arayalım (Teorem 28.1 gereği $\int_a^b \psi \ge 0$ zaten biliniyor).
Uzunluğu ℓ olan bir aralıkta ψ'nin integrali sıfırsa, üst integral üst toplamların infimumu olduğundan (Tanım 25.1) $U(P,\psi) < \dfrac{\ell}{n}$ olan bir P bölünüşü vardır; bu bölünüşün alt aralıklarından en az birinde ψ'nin supremumu $\dfrac{1}{n}$'den küçüktür, çünkü aksi hâlde her i için $M_i \ge \dfrac{1}{n}$ olur ve $U(P,\psi) = \sum_i M_i \Delta x_i \ge \dfrac{1}{n}\sum_i \Delta x_i = \dfrac{\ell}{n}$ çıkardı. Bu gözlemi ardışık uygulayarak iç içe kapalı aralıklar kuralım: $I_0 = [a,b]$ olsun ve I_{n-1} kurulduysa

$$I_n \subseteq I_{n-1}, \qquad \sup_{x \in I_n} \psi(x) < \frac{1}{n}$$

olan kapalı, dejenere olmayan bir I_n alt aralığı seçelim. (Bu adımda $\psi \ge 0$ olması ve Teorem 27.4 sayesinde $\int_{I_{n-1}} \psi = 0$ olduğunu kullanıyoruz.) İç içe kapalı aralıklar teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bütün I_n'lerin ortak bir ξ noktası vardır. Her n için $\xi \in I_n$ olduğundan

$$0 < \psi(\xi) < \frac{1}{n} \qquad (\text{her } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ için})$$

olur; Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği bu olanaksızdır. Öyleyse $\int_a^b \psi > 0$, yani $\int_a^b h < 0$'dır ve aradığımız çelişkiye ulaştık.
Demek ki $f(c) \le g(c)$ olan en az bir $c \in [a,b]$ vardır. (f ve g sürekliyse aynı sonuç doğrudan Teorem 28.3 ile de elde edilir.)
(c) Yanıt: Doğru.
Gerekçe. Teorem 28.1'yı iki kez uygulayacağız. Her x için $m \le f(x)$ olduğundan sabit m fonksiyonuyla karşılaştırma $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f$, yani $m(b-a) \le \int_a^b f$ verir; benzer biçimde $f(x) \le M$ olduğundan $\int_a^b f \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$'dır. İkisini birleştirince

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir. Bu kestirim, integral için ortalama değer teoremlerinin de çıkış noktasıdır.
■

Örnek 32.5 (Çarpımın İntegrallenebilirliği Üzerine İddialar). İddia (a). Çarpımın integrali, integrallerin çarpımına eşittir: $\int_a^b fg = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$.
İddia (b). f ve g integrallenebilir değilse, çarpımları fg de integrallenebilir olamaz.
İddia (c). f integrallenebilir ve g integrallenebilir değilse, fg integrallenebilir olamaz.

Çözüm.
(a) Yanıt: Yanlış.
Gerekçe (karşı örnek). $[0,1]$ üzerinde $f(x) = g(x) = x$ alalım. O hâlde

$$\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 x\,dx\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

oysa

$$\int_0^1 (x\cdot x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$ olduğundan iddia yanlıştır. Teorem 27.1 toplama ve sabitle çarpmaya izin verir; **çarpma bu listede yoktur** ve bu tesadüf değildir. Çarpımın integrali hakkında elimizdeki en iyi genel bilgi, tam da bu bölümün konusu olan Cauchy–Schwarz eşitsizliğidir.
(b) Yanıt: Yanlış.
Gerekçe (karşı örnek). $[0,1]$ üzerinde Dirichlet tipi fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Her alt aralık hem rasyonel hem irrasyonel sayı içerdiğinden (bkz. Analiz 1, İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu), herhangi bir P bölünüşünün her alt aralığında $M_i = 1$ ve $m_i = -1$ olur; Tanım 24.3 gereği her P için $U(P,f) = 1$, $L(P,f) = -1$'dir ve fark 2'den küçültülemez. Teorem 25.1 gereği f integrallenebilir değildir. Şimdi $g = f$ alalım; g de integrallenebilir değildir, ama her x için $(fg)(x) = \big(f(x)\big)^2 = 1$ olur ve sabit fonksiyon integrallenebilirdir.
(c) Yanıt: Yanlış.
Gerekçe (karşı örnek). $[0,1]$ üzerinde $f(x) = 0$ alalım; sabit fonksiyon integrallenebilirdir. g olarak (b) şıkkındaki Dirichlet tipi fonksiyonu (ya da $\mathbb{Q}$ üzerinde 1, dışında 0 olan klasik Dirichlet fonksiyonunu) alalım; integrallenebilir değildir. Çarpımları

$$(fg)(x) = 0\cdot g(x) = 0$$

sabit sıfır fonksiyonudur ve integrallenebilirdir. Bu iki karşı örnek birlikte şunu söyler: integrallenebilirlik çarpım altında ne korunur ne de bozulur. (Buna karşılık **her ikisi de** integrallenebilir ise çarpım her zaman integrallenebilirdir; bunu bölümün başında $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$ özdeşliğiyle görmüştük.)
■

Örnek 32.6 (Mutlak Değer Üzerine İddialar). İddia (a). Her integrallenebilir f için $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$'dir.
İddia (b). $|f|$ integrallenebilir ise f de integrallenebilirdir.

Çözüm.
(a) Yanıt: Doğru.

Gerekçe. Mutlak değerin tanımı gereği (bkz. Analiz 1) her x için $-\mid f(x)\mid \le f(x) \le \mid f(x)\mid$'tir; ayrıca $t \mapsto \mid t\mid$ sürekli olduğundan $\mid f\mid$ de integrallenebilirdir (Teorem 27.2). Teorem 28.1'yı bu çifte eşitsizliğe uygulayalım:

$$-\int_a^b \mid f\mid \le \int_a^b f \le \int_a^b \mid f\mid .$$

$-c \le u \le c$ ifadesi $\mid u\mid \le c$ demek olduğundan (bkz. Analiz 1) sonuç $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b \mid f\mid$ biçimini alır; bu, tam olarak Teorem 28.2'dir.

(b) Yanıt: Yanlış.

Gerekçe (karşı örnek). $[0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

alalım. Bir önceki örnekte gördüğümüz gibi f integrallenebilir değildir: her bölünüşün her alt aralığında $M_i - m_i = 2$'dir ve $U(P,f) - L(P,f) = 2$ küçültülemez. Buna karşın her x için $\mid f(x)\mid = 1$'dir; bu sabit fonksiyon integrallenebilirdir ve $\int_0^1 \mid f\mid = 1$'dir.

Sezgisel açıklama şudur: mutlak değer almak, f'nin **işaretindeki** bütün düzensizliği siler; yukarıdaki f'de düzensizlik zaten yalnızca işarettedir, büyüklük her yerde 1'dir. Buradaki ok da tek yönlüdür: f integrallenebilirse $\mid f\mid$ de integrallenebilirdir, tersi doğru değildir.

■

Örnek 32.7 (Bileşkenin İntegrallenebilirliği Üzerine İddia). İddia. f ve g integrallenebilir ise bileşkeleri $g \circ f$ de integrallenebilirdir.

Çözüm.

Yanıt: Yanlış.

Gerekçe (karşı örnek). $[0,1]$ üzerinde **Thomae fonksiyonu**nu (Thomae's function) alalım:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x = \frac{m}{n} \text{ rasyonel, en sade biçimde, } n \ge 1 \\ 0, \ x \text{ irrasyonel.} \end{cases}$$

Bu tanımla $f(0) = f(1) = 1$'dir ve her x için $0 \le f(x) \le 1$'dir.

Adım 1: f integrallenebilirdir ve $\int_0^1 f = 0$'dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $f(x) \ge \dfrac{\varepsilon}{2}$ olan noktalar, paydası $n \le \dfrac{2}{\varepsilon}$ olan rasyonellerdir; $[0,1]$'de bunlardan sonlu sayıda, diyelim N tane vardır. Her birini uzunluğu $\dfrac{\varepsilon}{4N}$ olan bir aralıkla örtüp bu aralıkların uçlarını içeren bir P bölünüşü kuralım. Bu noktaları içeren alt aralıkların toplam uzunluğu en çok $\dfrac{\varepsilon}{2}$'dir ve orada $M_i \le 1$; geri kalanlarda $M_i < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ve toplam uzunluk en çok 1'dir. Böylece

$$U(P,f) \le 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon.$$

Öte yandan her alt aralık irrasyonel sayı içerdiğinden (bkz. Analiz 1) $m_i = 0$ ve $L(P,f) = 0$'dır. Demek ki $U(P,f) - L(P,f) \le \varepsilon$ olur; Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir ve alt integral 0 olduğundan $\int_0^1 f = 0$'dır.

Adım 2: g integrallenebilirdir. $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$g(y) = \begin{cases} 1, y > 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlayalım. g'nin tek süreksizlik noktası $y = 0$'dır. $0 < \varepsilon < 1$ olsun (ölçütü küçük ε'lar için sağlamak yeter) ve $P = \{0, \frac{\varepsilon}{2}, 1\}$ bölünüşünü alalım: birinci alt aralıkta $M_1 - m_1 = 1$ ve uzunluk $\dfrac{\varepsilon}{2}$; ikinci alt aralıkta $g \equiv 1$ olduğundan $M_2 - m_2 = 0$'dır. Böylece $U(P,g) - L(P,g) = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur ve Teorem 25.1 gereği g integrallenebilirdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: Bileşke integrallenebilir değildir. f'nin değerleri $[0,1]$ içindedir, dolayısıyla $g \circ f$ tanımlıdır. Şimdi

$$(g \circ f)(x) = g\,(\,f(x)\,) = \begin{cases} 1, f(x) > 0, \text{ yani } & x \in \mathbb{Q} \\ 0, f(x) = 0, \text{ yani } & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olur; bu, klasik **Dirichlet fonksiyonu**dur. Her alt aralıkta $M_i = 1$, $m_i = 0$ olduğundan (bkz. Analiz 1, İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu) her P için $U(P, g\circ f) = 1$ ve $L(P, g\circ f) = 0$'dır; fark hiçbir zaman 1'in altına inmez ve Teorem 25.1 gereği $g \circ f$ integrallenebilir değildir.
Not. Bu, Teorem 27.2 ile çelişmez: orada dıştaki fonksiyonun **sürekli** olması istenir. Buradaki g süreklilikten tek bir noktada ($y = 0$) sapıyor; ama bu nokta f'nin irrasyonellerde aldığı değer olduğundan sapma bütün irrasyonel küme boyunca hissediliyor ve bileşkeyi bozmaya yetiyor.
■

Örnek 32.8 (Ters Fonksiyonun İntegrallenebilirliği Üzerine İddia). İddia. f integrallenebilir ve her x için $f(x) > 0$ ise, $\dfrac{1}{f}$ de integrallenebilirdir.

Çözüm.
Yanıt: Yanlış.
Gerekçe (karşı örnek). Anahtar gözlem şudur: Riemann integrallenebilir olmanın ilk koşulu **sınırlılık**tır (Teorem 26.3). f her yerde pozitif olsa bile f'nin değerleri sıfıra yaklaşıyorsa $\dfrac{1}{f}$ sınırsız olur ve integrallenemez.
$[0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ x, 0 < x \le 1 \end{cases}$$

alalım. $f(0) = 1 > 0$ ve $0 < x \le 1$ için $f(x) = x > 0$ olduğundan f her noktada pozitiftir.
Adım 1: f integrallenebilirdir. f sınırlıdır ($0 < f \le 1$) ve yalnızca $x = 0$ noktasında $x \mapsto x$ fonksiyonundan ayrılır. $0 < \varepsilon < 1$ olsun ve $\dfrac{\varepsilon}{4}$ noktasını bölünüşe katalım. $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{4}\right]$ üzerinde $M_1 - m_1 \le 1$ olduğundan bu alt aralığın $U - L$ farkına katkısı en çok $\dfrac{\varepsilon}{4}$'tür. $\left[\dfrac{\varepsilon}{4}, 1\right]$ üzerinde ise $f(x) = x$ artandır, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.3); Teorem 25.1 gereği bu aralığın $U - L < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olan bir P' bölünüşü vardır. İki bölünüşü birleştirdiğimiz P için $U(P,f) - L(P,f) < \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur; yine Teorem 25.1 gereği f integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

olur.
Adım 2: $\dfrac{1}{f}$ sınırsızdır ve integrallenemez. $x_n = \dfrac{1}{n}$ alırsak $x_n \in (0,1]$ ve $\dfrac{1}{f(x_n)} = n$'dir; n istendiği kadar büyütülebildiğinden (bkz. Analiz 1) $\dfrac{1}{f}$, $[0,1]$ üzerinde sınırlı değildir. Sınırsız bir fonksiyon ise Riemann integrallenebilir olamaz (Teorem 26.3). Demek ki f integrallenebilir ve her yerde pozitif olduğu hâlde $\dfrac{1}{f}$ integrallenebilir değildir; iddia yanlıştır.
Doğru ifade. Eksik olan koşul, f'nin sıfırdan **düzgün biçimde** uzak durmasıdır. Eğer $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve bir $c > 0$ için her x'te $f(x) \ge c$ ise, f sınırlı olduğundan bir K ile $c \le f(x) \le K$ olur; $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ fonksiyonu $[c,K]$ üzerinde sürekli olduğundan Teorem 27.2 gereği $\dfrac{1}{f}$ integrallenebilirdir. Yukarıdaki karşı örnekte böyle bir c yoktur: f pozitiftir ama infimumu 0'dır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Bu turdan çıkan ders

Beş örneğin ortak mesajı şudur: integral, fonksiyonun **noktasal** davranışını değil "toplam" davranışını görür. Bu yüzden integrallerin sıralanması noktasal sıralamayı geri vermez; integrallenebilirlik çarpma ve bileşke altında beklendiği gibi davranmaz; mutlak değer almak bilgi **kaybettirdiği** için integrallenebilirliği kolaylaştırır; ve her adımda sınırlılık koşulu sessizce arka planda çalışır. Bir teoremin hipotezini gereksiz sanmaya başladığınızda, o hipotezi düşürüp karşı örnek aramak en verimli alıştırmadır.

32.7 Alıştırmalar

Alıştırma 32.1 (İntegral Eşitsizlikleri Üzerine).

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sürekli olsun. $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)\,dx$ olduğunu gösteriniz ve eşitliğin ne zaman gerçekleştiğini belirleyiniz.

b) $f(x)=x$ ve $g(x)=x^2$ için $[0,1]$ üzerinde Cauchy–Schwarz eşitsizliğinin iki yanını da hesaplayıp eşitsizliği doğrulayınız. Eşitlik gerçekleşiyor mu?

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \le \frac{\sqrt{5}}{2}$ olduğunu gösteriniz.

d) $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ sürekli, her x için $f(x)>0$ ve $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 3$ olsun. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{f(x)}\,dx \ge \frac{1}{3}$ olduğunu gösteriniz. Eşitlik hangi f için gerçekleşir?

e) $\left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{3}\int_0^1 f^2(x)\,dx$ eşitliğini sağlayan bütün sürekli $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

f) $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $p>1$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olsun. Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \le (b-a)^{1/q}\left(\int_a^b |\,f(x)\,|^p\,dx\right)^{1/p}$$

olduğunu gösteriniz.

g) "f^2 ve $|\,f\,|$ integrallenebilir ise f de integrallenebilirdir." Bu iddia doğru mudur? Yanıtınızı gerekçelendiriniz.

Çözüm.
a) Teorem 32.1'i f ile $g\equiv 1$ çiftine uygulayalım. $\int_0^1 g^2 = 1$ olduğundan doğrudan

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 f^2\right)\cdot 1 = \int_0^1 f^2$$

çıkar. *Eşitlik hâli.* f ve $g\equiv 1$ sürekli olduğundan Önerme 32.1 uygulanır: eşitlik ancak $\lambda f(x)+\mu = 0$ olacak biçimde ikisi birden sıfır olmayan λ,μ varsa gerçekleşir. $\lambda=0$ olsaydı $\mu=0$ çıkardı; öyleyse $\lambda\neq 0$ ve $f(x)=-\dfrac{\mu}{\lambda}$, yani f sabittir. Tersine $f\equiv c$ ise iki yan da c^2'dir. Demek ki eşitlik tam olarak sabit fonksiyonlarda gerçekleşir.
b) Önce çarpımın integrali:

$$\int_0^1 fg = \int_0^1 x\cdot x^2\,dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sol taraf $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$'dır. Sağ taraf için

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \qquad \int_0^1 g^2 = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

olduğundan çarpım $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$'tir. Gerçekten

$$\frac{1}{16} = 0{,}0625 < 0{,}0\overline{6} = \frac{1}{15}$$

olduğundan eşitsizlik sağlanır ve **kesindir**. Bu beklenen sonuçtur: Önerme 32.1 gereği eşitlik ancak x ile x^2 doğrusal bağımlı olsaydı gerçekleşirdi; oysa $\lambda x + \mu x^2 \equiv 0$ eşitliği $x = 1$ ve $x = \frac{1}{2}$'de $\lambda + \mu = 0$ ile $\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{4} = 0$ verir, bu sistemin tek çözümü de $\lambda = \mu = 0$'dır.

c) (a) şıkkının sonucunda $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ alalım; bu fonksiyon $[0,1]$ üzerinde süreklidir, çünkü $1 + x^3 \geq 1 > 0$'dır. $f^2(x) = 1 + x^3$ olduğundan

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 (1+x^3)\,dx = \left[x + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ve (a) şıkkı gereği

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx\right)^2 \leq \frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1180$$

bulunur. (İntegralin gerçek değeri yaklaşık 1,1114'tür; $\sqrt{1+x^3}$ sabit olmadığından eşitlik gerçekleşmez.)

d) $[1,2]$ aralığının uzunluğu $b - a = 1$'dir. Örnek 32.1'deki eşitsizliği bu aralığa uygulayalım:

$$1 = (2-1)^2 \leq \left(\int_1^2 f\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{f}\right) = 3\int_1^2 \frac{1}{f}.$$

Her iki yanı 3'e bölersek $\int_1^2 \frac{1}{f(x)}\,dx \geq \frac{1}{3}$ elde ederiz. *Eşitlik hâli.* Örnek 32.1'in son adımına göre eşitlik ancak f sabitse gerçekleşir; $f \equiv c$ ise $\int_1^2 c\,dx = c = 3$ olmalıdır ve gerçekten $f \equiv 3$ için $\int_1^2 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}$'tür.

e) $g(x) = x$ alalım; $\int_0^1 g^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$'tür. Verilen eşitlik tam olarak

$$\left(\int_0^1 fg\right)^2 = \left(\int_0^1 g^2\right)\left(\int_0^1 f^2\right)$$

biçimindedir, yani Cauchy–Schwarz eşitsizliğinde **eşitlik hâlidir**. f ve g sürekli olduğundan Önerme 32.1 uygulanır: eşitlik ancak $\lambda f(x) + \mu x = 0$ olacak biçimde ikisi birden sıfır olmayan λ, μ varsa gerçekleşir. $\lambda = 0$ olsaydı $\mu x \equiv 0$'dan $\mu = 0$ çıkardı; öyleyse $\lambda \neq 0$ ve

$$f(x) = c\,x, \qquad c = -\frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{R}$$

olmalıdır. Tersine $f(x) = cx$ için sol taraf $\left(c\int_0^1 x^2\right)^2 = \frac{c^2}{9}$, sağ taraf $\frac{1}{3}\cdot\frac{c^2}{3} = \frac{c^2}{9}$'dur. Demek ki aranan fonksiyonlar tam olarak $f(x) = cx$ biçimindekilerdir.

f) Teorem 32.3'i f ile $g \equiv 1$ çiftine uygulayalım. $|\,g\,|^q = 1$ olduğundan $\int_a^b |\,g\,|^q\,dx = b - a$ ve $\left(\int_a^b |\,g\,|^q\right)^{1/q} = (b-a)^{1/q}$'dur. Hölder eşitsizliği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^b |\, f(x)\,|\,dx = \int_a^b |\, f(x)\cdot 1\,|\,dx \le (b-a)^{1/q}\left(\int_a^b |\, f(x)\,|^p\,dx\right)^{1/p}$$

verir. $p=q=2$ alınırsa bu, $\int_a^b |\,f\,| \le \sqrt{b-a}\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$ biçimindeki tanıdık Cauchy–Schwarz kestirimine indirgenir.

g) İddia **yanlıştır**. $[0,1]$ üzerinde

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

alalım. Bu fonksiyon için $f^2\equiv 1$ ve $|\,f\,|\equiv 1$'dir; ikisi de sabit olduğundan integrallenebilirdir. Buna karşın f integrallenebilir değildir: her alt aralık hem rasyonel hem irrasyonel nokta içerdiğinden (bkz. Analiz 1, İrrasyonel Sayıların Yoğunluğu) $M_i=1$, $m_i=-1$ ve

$$U(P,f)-L(P,f)=\sum_i (M_i-m_i)\Delta x_i = 2\sum_i \Delta x_i = 2$$

olur; bu fark hiçbir bölünüşle küçültülemez ve Teorem 25.1 sağlanamaz. Nedeni, hem kare almanın hem de mutlak değer almanın işaret bilgisini yok etmesidir; oysa bu fonksiyondaki bütün düzensizlik işarettedir.

■

Bu bölümde integralleri **hesaplamadan** karşılaştırmayı öğrendik: Cauchy–Schwarz, Minkowski ve Hölder eşitsizlikleri, çarpımların ve toplamların integrallerini tek tek fonksiyonların integralleriyle sınırlamamızı sağlıyor. Sıradaki bölümde integrali bir kestirim aracı olmaktan çıkarıp somut geometrik ve fiziksel niceliklerin hesabına koşacağız: Belirli İntegralin Uygulamaları.

 CC BY-NC-SA 4.0

33. Belirli İntegralin Uygulamaları

Cauchy–Schwarz ve Minkowski Eşitsizlikleri bölümüyle birlikte belirli integralin kuramsal donanımını tamamlamış olduk: integralin ne zaman var olduğunu, hangi kurallara uyduğunu ve Analizin Temel Teoremleri sayesinde nasıl hesaplandığını biliyoruz. Bu bölüm baştan sona **uygulama** bölümüdür: alan, hacim, uzunluk ve yüzey gibi geometrik büyüklüklerin belirli integralle nasıl ölçüldüğünü göreceğiz.

Bütün bölüm boyunca tek bir akıl yürütme kalıbı tekrarlanacak. Ölçmek istediğimiz büyüklüğü doğrudan hesaplayamıyoruz; ama onu **ince dilimlere** ayırırsak her dilim, ölçüsünü zaten bildiğimiz basit bir şekle — bir dikdörtgene, bir silindire, bir doğru parçasına — çok yaklaşır. Katkıları toplayınca elimize bir **Riemann toplamı** (Tanım 26.1) geçer; bölünüşün normunu sıfıra götürdüğümüzde bu toplam bir belirli integrale yakınsar. Üç adımı kısaca **"dilimle, topla, limite geç"** diye anacağız.

Bu kalıbın ciddiye alınması gereken bir yanı vardır: "alan", "hacim", "yüzey alanı" kavramlarının kendileri bu noktada henüz tanımlı değildir. Alan ve hacimde, ölçünün sağlaması gereken birkaç doğal özelliği varsayacak ve bu özelliklerin bölgeye atanabilecek sayıyı **tek bir** değere — integrale — zorladığını göstereceğiz. Yay uzunluğu ile yüzey alanında ise kavramı kırık çizgiler ve kesik koniler üzerinden **tanımlayacak**, tanımın verdiği limitin integrale eşit olduğunu ispatlayacağız. Ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) bu ispatlarda başrolü oynayacak.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: eğri altındaki alan ve fonksiyon işaret değiştirdiğinde $|\,f\,|$ ile hesaplanan gerçek alan; iki eğri arasındaki alan ve gerektiğinde y değişkenine göre integrasyon; dilim yöntemiyle hacim ve onun özel hâlleri olan disk ile halka yöntemleri; silindirik kabuk yöntemi; yay uzunluğu formülü $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$; dönel yüzey alanı formülü $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$; bütün bu formüllerin parametrik biçimleri; ve son olarak kutupsal koordinatlarda alan formülü $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\,d\theta$ ile uzunluk formülü $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,d\theta$.

33.1 Eğri Altında Kalan Alan

En basit durumla başlayalım: negatif olmayan bir fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölge. Belirli integrali tanımlarken (Tanım 24.3, Tanım 25.1) izlediğimiz yol tam olarak bu bölgenin alanını kestirme yoluydu; alt toplam içeriden, üst toplam dışarıdan kuşatıyordu. Bir bölgeye "alan" adı verilen bir sayı atamanın ne demek olduğunu tanımlamış değiliz — ölçü kuramı bunu yapar — ama alanın sağlaması gereken üç özelliği yazabilir ve bu özelliklerin söz konusu bölge için tek bir yanıt bıraktığını gösterebiliriz.

Önerme 33.1 (Eğri Altında Kalan Bölgenin Alanı). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Riemann integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Düzlemdeki*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bölgesini alalım. Düzlemin bazı alt kümelerine "alan" denen bir $\mathcal{A}(\cdot) \geq 0$ sayısının atandığını ve bu atamanın şu üç özelliği sağladığını varsayalım:

- ***(A1)*** *Kenarları eksenlere paralel bir $[c,d] \times [p,q]$ dikdörtgeni için $\mathcal{A} = (d-c)(q-p)$'dir.*
- ***(A2)*** *$\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ ise $\mathcal{A}(\Omega_1) \leq \mathcal{A}(\Omega_2)$'dir.*
- ***(A3)*** *İç bölgeleri ayrık olan sonlu sayıda kümenin birleşiminin alanı, alanların toplamıdır.*

O hâlde Ω'ya atanabilecek alan değeri tektir ve

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_a^b f(x)\,dx$$

eşitliğini sağlar.

> ***İspat.***
> *f integrallenebilir olduğundan sınırlıdır (Teorem 26.3); dolayısıyla aşağıdaki infimum ve supremumlar birer reel sayıdır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ herhangi bir bölünüş (Tanım 24.1) olsun ve her i için

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

yazalım. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olsun.
Adım 1: İçeriden ve dışarıdan kuşatma. *$R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$ ve $S_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$ dikdörtgenlerini alalım. $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ve $0 \le y \le m_i$ ise $y \le m_i \le f(x)$'tir, yani $R_i \subseteq \Omega$; benzer biçimde $(x, y) \in \Omega$ ve $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ise $y \le f(x) \le M_i$ olduğundan Ω'nın bu şeride düşen parçası S_i'nin içindedir. Alt aralıklar yalnızca uç noktalarında kesiştiğinden dikdörtgenlerin iç bölgeleri ayrıktır ve*

$$\bigcup_{i=1}^{n} R_i \subseteq \Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Adım 2: Alanları hesaplama. *(A1) gereği $\mathcal{A}(R_i) = m_i \Delta x_i$ ve $\mathcal{A}(S_i) = M_i \Delta x_i$'dir; (A3) gereği birleşimlerin alanları bunların toplamı, yani tam olarak alt ve üst Darboux toplamlarıdır (Tanım 24.3):*

$$\mathcal{A}\left(\bigcup_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = L(P, f), \qquad \mathcal{A}\left(\bigcup_i S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(P, f).$$

Adım 3: Sıkıştırma. *(A2)'yi Adım 1'deki kapsamalara uygularsak **her** P bölünüşü için $L(P, f) \le \mathcal{A}(\Omega) \le U(P, f)$ olur. Solda supremum, sağda infimum alalım:*

$$\underline{I}(f) = \sup_P L(P, f) \le \mathcal{A}(\Omega) \le \inf_P U(P, f) = \overline{I}(f).$$

f integrallenebilir olduğundan iki uç da $\int_a^b f(x)\,dx$'e eşittir; öyleyse ortadaki sayı da odur. Bu, hem değeri hem tekliği verir: (A1)–(A3)'ü sağlayan her alan kavramı Ω'ya aynı sayıyı atamak zorundadır.
■

Bu önerme, bundan sonraki bütün hesapların ruhsatıdır: negatif olmayan bir fonksiyonun grafiğinin altındaki alanı bulmak, o fonksiyonun integralini hesaplamaktır. Şimdi f'nin işaret değiştirmesine izin verelim.

⚠ İntegral alan değildir, işaretli alandır

f bir aralıkta negatifse orada integrali de negatif çıkar (Teorem 28.1); oysa alan negatif olamaz. $\int_a^b f$ sayısı, grafiğin x ekseninin **üstünde** kalan parçalarının alanından **altında** kalanların alanını çıkarır; buna **işaretli alan** denir. Bölgenin gerçek alanı ise

$$\mathcal{A} = \int_a^b |\, f(x) \,|\, dx$$

sayısıdır; f integrallenebilirse $|\ f\ |$ de integrallenebilir olduğundan (Teorem 27.2) bu integral vardır. Uygulamada yapılacak iş, f'nin işaret değiştirdiği noktaları bulup $[a, b]$'yi parçalara ayırmak ve aralık toplamsallığını (Teorem 27.4) kullanmaktır.

Örnek 33.1 (Eğri Altındaki Alan Hesapları). Aşağıdaki alanları hesaplayınız.

a) $y = \sqrt{x}$ eğrisinin altında, x ekseninin üstünde, $x = 0$ ile $x = 4$ arasında kalan bölgenin alanı.

b) $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında, $[0, 2]$ üzerinde kalan bölgenin alanı. Bu alanı $\int_0^2 f$ ile karşılaştırınız.

Çözüm.
a) $x \mapsto \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, 4]$ üzerinde sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2) ve negatif değildir; Önerme 33.1 gereği aranan alan doğrudan integraldir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathcal{A} = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \Big[\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}.$$

b) Önce işaret değişimi: $x^2 - 1 = 0$ denkleminin $[0,2]$'deki tek kökü $x = 1$'dir; $0 \le x < 1$ için $f(x) < 0$, $1 < x \le 2$ için $f(x) > 0$'dır. Öyleyse $|\ f\ |$, $[0,1]$'de $1 - x^2$, $[1,2]$'de $x^2 - 1$'dir ve aralık toplamsallığıyla (Teorem 27.4)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \Big[\,x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 + \Big[\,\frac{x^3}{3} - x\Big]_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

bulunur. Oysa işaretli alan

$$\int_0^2 (x^2 - 1)\,dx = \Big[\,\frac{x^3}{3} - x\Big]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

çıkar. İki sayı arasındaki fark, eksenin altında kalan $\frac{2}{3}$ birimlik parçanın eklenmek yerine çıkarılmasından gelir. Aynı olgunun en uç örneği $\sin x$'tir: $[0, 2\pi]$ üzerinde iki bölge birbirinin aynadaki görüntüsüdür, işaretli alan $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$ çıkar, gerçek alan ise $\int_0^{2\pi} |\sin x\ |\,dx = 4$'tür.

■

33.2 İki Eğri Arasındaki Alan

Şimdi alttan ve üstten iki eğriyle sınırlanan bölgelere geçelim. Fikir şudur: dikey bir doğru bölgeyi $f(x) - g(x)$ uzunluğunda bir kesitte keser; dilim, tabanı Δx ve yüksekliği bu uzunluk olan bir dikdörtgendir.

Teorem 33.1 (İki Eğri Arasında Kalan Alan). *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \le f(x)$ olsun.*

$$\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$$

bölgesinin, Önerme 33.1'daki (A1)–(A3) özelliklerini sağlayan alanı

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_a^b \big(\ f(x) - g(x)\ \big)\,dx$$

ile verilir.

İspat.
g integrallenebilir olduğundan sınırlıdır (Teorem 26.3); öyleyse bir $c \ge 0$ sabiti için her x'te $g(x) + c \ge 0$ olur. Ω'yı c kadar yukarı ötelemek alanını değiştirmez, çünkü öteleme kuşatan dikdörtgenleri de aynı miktarda öteler ve (A1) gereği bir dikdörtgenin alanı yalnızca kenar uzunluklarına bağlıdır. Ayrıca $(f + c) - (g + c) = f - g$ olduğundan ispatlanacak formül de değişmez; bu yüzden genelliği bozmadan $0 \le g \le f$ varsayabiliriz.

$$\Omega_f = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}, \qquad \Omega_g = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le g(x)\}$$

bölgelerini alalım. $\Omega_f = \Omega_g \cup \Omega$ birleşiminde ortak nokta kümesi yalnızca $y = g(x)$ eğrisidir, yani iki parçanın iç bölgeleri ayrıktır; (A3) gereği $\mathcal{A}(\Omega_f) = \mathcal{A}(\Omega_g) + \mathcal{A}(\Omega)$ olur. Önerme 33.1 iki bölgenin de alanını verdiğinden ($\int_a^b f$ ve $\int_a^b g$), integralin lineerliğiyle (Teorem 27.1)

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b \big(\ f(x) - g(x)\ \big)\,dx$$

elde ederiz. $g \le f$ olduğundan bu sayı negatif değildir (Teorem 28.1), yani gerçekten bir alan olabilir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Formülün akılda kalan biçimi şudur: **üstteki eksi alttaki**, a'dan b'ye. Uygulamada hangi eğrinin üstte olduğunu belirlemek için $f(x) = g(x)$ denkleminin köklerini, yani **kesişim noktalarını** bulmak ve gerekiyorsa bölgeyi bu köklerde parçalara ayırıp her parçada $|\, f - g \,|$ ile çalışmak gerekir.

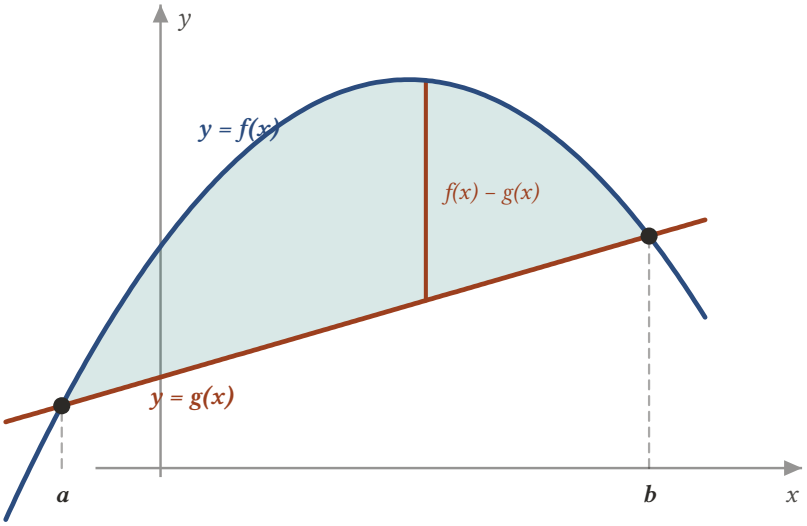
Örnek 33.2 (İki Eğri Arasındaki Alan Hesapları). Aşağıdaki bölgelerin alanlarını bulunuz.

a) $y = x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölge.

b) $y = x^3$ ile $y = x$ eğrilerinin $[-1, 1]$ üzerinde sınırladığı bölge.

Çözüm.
a) Kesişim noktaları $x(x-1) = 0$ denkleminin kökleridir: $x = 0$ ve $x = 1$. $0 < x < 1$ aralığında $x^2 - x = x(x-1) < 0$, yani üstteki eğri $y = x$'tir. Teorem 33.1 gereği

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$



Şekil 33.1: İki eğri arasındaki alan: her x için düşey kesitin uzunluğu $f(x) - g(x)$'tir; bu uzunlukların a'dan b'ye integrali aradaki bölgenin alanını verir. Sınırlar, iki eğrinin kesim noktalarıdır.

b) Kesişim noktaları $x^3 = x$, yani $x(x^2 - 1) = 0$ denkleminin kökleridir: $x = -1, 0, 1$. Roller aralık boyunca değişir:

- $-1 < x < 0$ için $x^3 - x = x(x^2 - 1) > 0$ (negatif çarpı negatif), yani üstteki eğri $y = x^3$'tür.
- $0 < x < 1$ için $x^3 - x < 0$, yani üstteki eğri $y = x$'tir.

Bölgeyi $x = 0$'da ikiye ayırmak zorundayız:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx + \int_0^1 (x - x^3)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ayırmayı unutup doğrudan $\int_{-1}^1 (x - x^3)\, dx$ yazsaydık, integrand tek bir fonksiyon olduğundan sonuç 0 çıkardı; bu, alan değil işaretli alandır.
■

33.2.1 y Değişkenine Göre İntegrasyon

Bazı bölgeler dikey dilimlerle kötü, yatay dilimlerle çok iyi betimlenir. Bölgeyi soldan $x = h(y)$, sağdan $x = k(y)$ eğrileri ve $y = c$, $y = d$ doğruları sınırlıyorsa, aynı akıl yürütme eksenlerin rolü değiştirilerek tekrarlanır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathcal{A} = \int_c^d \big(\, k(y) - h(y) \, \big) \, dy.$$

Ayrı bir ispata gerek yoktur; düzlemi $y = x$ doğrusuna göre yansıtmak alanları korur ve bölgeyi tam olarak Teorem 33.1'ın biçimine getirir. Akılda kalan hâli: **sağdaki eksi soldaki**.

Örnek 33.3 (Yatay Dilimlerle Alan). $y^2 = x$ parabolü ile $y = x - 2$ doğrusunun sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.
Kesişim noktaları. Doğrunun denklemini $x = y + 2$ biçiminde yazıp $x = y^2$ ile birleştirirsek $y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) = 0$, yani $y = -1$ ve $y = 2$ bulunur; karşılık gelen noktalar $(1, -1)$ ile $(4, 2)$'dir.
Neden y değişkeni? x değişkenine göre çalışsaydık bölgeyi $x = 1$'de ikiye bölmek zorunda kalırdık: $0 \le x \le 1$ için bölge $y = -\sqrt{x}$ ile $y = \sqrt{x}$ arasında, $1 \le x \le 4$ için ise $y = x - 2$ ile $y = \sqrt{x}$ arasındadır. Oysa yatay dilimlerde $-1 \le y \le 2$ olan **her** y için dilimin sol ucu parabolde, sağ ucu doğrudadır; tek bir integral yeter.
Hesap. $-1 < y < 2$ için $y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) < 0$, yani $y + 2 > y^2$'dir; sağdaki eğri $x = y + 2$'dir:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \big(\, (y+2) - y^2 \, \big) \, dy = \Big[\, \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \Big]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \Big(-\frac{7}{6} \Big) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Denetim. Aynı sonucu x değişkeniyle de bulalım. Birinci parçada $\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx = \big[\, \frac{4}{3}x^{3/2} \big]_0^1 = \frac{4}{3}$, ikinci parçada

$$\int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx = \Big[\, \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{13}{6} = \frac{19}{6}$$

bulunur; toplam $\frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$'dir. İki yol aynı sayıyı verdi, ama ikincisi iki ayrı integral istedi. ■

33.3 Dilim Yöntemiyle Hacim

Alandan hacme geçerken kalıp değişmez; yalnızca "dilim" artık bir dikdörtgen değil, ince bir **plaka**dır. Uzaydaki bir cismi x eksenine dik düzlemlerle keselim ve x apsisli kesitin alanı $A(x)$ olsun. $[x_{i-1}, x_i]$ aralığına karşılık gelen ince dilim, taban alanı A kadar, kalınlığı Δx_i olan bir silindire benzer; hacmi yaklaşık $A(x)\Delta x_i$'dir. Topla, limite geç.

Teorem 33.2 (Dilim Yöntemi). *$K \subset \mathbb{R}^3$ cismi, x eksenine dik $x = a$ ve $x = b$ düzlemleri arasında kalsın ($a < b$). Her $x \in [a,b]$ için x apsisli dik kesitin alanı $A(x)$ olsun ve $A : [a,b] \to [0,\infty)$ sürekli olsun. Hacim kavramının şu üç özelliği sağladığını varsayalım:*

- ***(V1)** Tabanının alanı S, yüksekliği h olan bir dik silindirin hacmi Sh'dir.*
- ***(V2)** $K_1 \subseteq K_2$ ise $\mathcal{V}(K_1) \le \mathcal{V}(K_2)$'dir.*
- ***(V3)** İçleri ayrık sonlu sayıda cismin birleşiminin hacmi, hacimlerin toplamıdır.*

Ayrıca K'nin $[x_{i-1}, x_i]$ şeridine düşen parçasının, taban alanı $\min A$ olan silindiri içerdiğini ve taban alanı $\max A$ olan silindirin içinde kaldığını varsayalım. O hâlde

$$\mathcal{V}(K) = \int_a^b A(x)\,dx.$$

İspat.
A sürekli olduğundan integrallenebilirdir (Teorem 25.2) ve her alt aralıkta en küçük ile en büyük değerlerini alır (bkz. Analiz 1). $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ bir bölünüş, $m_i = \min_{[x_{i-1},x_i]} A$, $M_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} A$, ve K_i de K'nin $x_{i-1} \le x \le x_i$ şeridine düşen parçası olsun. Varsayım gereği K_i, taban alanı m_i ve yüksekliği Δx_i olan silindiri içerir, taban alanı M_i olanın içindedir; (V1) ve (V2) ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m_i \Delta x_i \le \mathcal{V}(K_i) \le M_i \Delta x_i.$$

$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ ve parçaların içleri ayrık olduğundan (V3) ile toplarsak, her bölünüş için

$$L(P,A) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \mathcal{V}(K) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(P,A)$$

elde ederiz. P üzerinden supremum ve infimum alıp A'nın integrallenebilirliğini kullanınca iki uç da $\int_a^b A$'ya eşitlenir; öyleyse $\mathcal{V}(K) = \int_a^b A(x)\,dx$'tir.
■

Formülün gücü, cismin dönel olmasını gerektirmemesidir: kesit alanı fonksiyonunu yazabildiğimiz her cisim için çalışır.

Örnek 33.4 (Dilim Yöntemiyle Hacim).

a) Taban yarıçapı R, yüksekliği h olan dik dairesel koninin hacmini bulunuz.

b) Tabanı $x^2 + y^2 \le R^2$ dairesi olan ve x eksenine dik kesitleri kare olan cismin hacmini bulunuz. Bu cisim bir dönel cisim değildir.

Çözüm.
a) Koninin tepesini orijine, eksenini x ekseni üzerine koyalım; taban $x = h$ düzlemindedir. x apsisli kesit bir dairedir ve benzer üçgenlerden yarıçapı $r(x) = \frac{Rx}{h}$'dir, yani $A(x) = \frac{\pi R^2}{h^2} x^2$ olur ($0 \le x \le h$). A sürekli olduğundan Teorem 33.2 uygulanır:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

b) x apsisli kesit, kenarı $2\sqrt{R^2 - x^2}$ olan bir karedir; öyleyse $A(x) = 4(R^2 - x^2)$ ve

$$\mathcal{V} = \int_{-R}^{R} 4(R^2 - x^2)\,dx = 4\left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = 4\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{16R^3}{3}.$$

Dilim yöntemi burada da hiç zorlanmadan çalıştı.
■

33.3.1 Disk ve Halka Yöntemleri

En sık karşılaşılan durum, bir bölgenin bir eksen çevresinde döndürülmesiyle elde edilen **dönel cisim**dir; kesitler ya bir dairedir (disk) ya da iç içe iki daire arasındaki bölgedir (halka).

Teorem 33.3 (Disk ve Halka Yöntemleri). *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her x için $0 \le g(x) \le f(x)$ olsun.*

$$\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$$

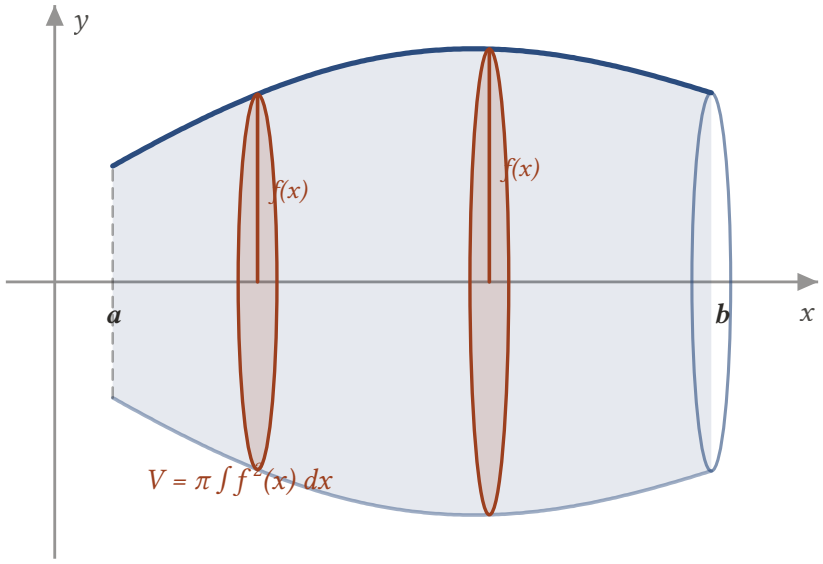
bölgesi x ekseni çevresinde döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b \Big(f(x)^2 - g(x)^2 \Big)\,dx$$

ile verilir. Özel olarak $g \equiv 0$ ise (yani bölge doğrudan eğrinin altındaki bölge ise)

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 33.2: Dönel cisim: y = f(x) *eğrisinin* [a, b] *parçası* x *ekseni çevresinde döndürülür.* x *noktasındaki dik kesit, yarıçapı* f(x) *olan bir dairedir; alanı* πf²(x)*'tir. Bu alanların integrali hacmi verir.*

İspat.
Ω'nın x apsisli dikey kesiti $\{x\} \times [g(x), f(x)]$ doğru parçasıdır; bu parça döndürülünce iç yarıçapı $g(x)$, dış yarıçapı $f(x)$ olan bir halka süpürür. Halkanın alanı, büyük dairenin alanından küçüğünkinin çıkarılmasıyla

$$A(x) = \pi f(x)^2 - \pi g(x)^2$$

*olur ve f ile g sürekli olduğundan A da süreklidir. Formülü iki adımda kuracağız: önce disk durumunu Teorem 33.2'e dayandıracak, sonra halkayı iki diskin farkı olarak yazacağız. Halka durumunu doğrudan dilim teoremine dayandırmaya çalışmak işe yaramaz; çünkü $[x_{i-1}, x_i]$ şeridine düşen parçanın içerdiği en büyük halkalı silindirin taban alanı $\pi \left(\min f\right)^2 - \pi \left(\max g\right)^2$'dir ve bu sayı, genelde A'nın o alt aralıktaki en küçük değerinden **küçüktür**. Bu yüzden dolambaçlı ama kusursuz olan aşağıdaki yolu izliyoruz.*
Adım 1: Disk durumu. *Önce $g \equiv 0$ olsun ve $\Omega_f = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ bölgesinin döndürülmesiyle elde edilen cisme K_f diyelim. K_f'nin x apsisli kesiti yarıçapı $f(x)$ olan bir dairedir; alanı $A_f(x) = \pi f(x)^2$'dir ve süreklidir. K_f'nin $[x_{i-1}, x_i]$ şeridine düşen parçası, taban yarıçapı $\min_{[x_{i-1},x_i]} f$ olan dik silindiri içerir ve taban yarıçapı $\max_{[x_{i-1},x_i]} f$ olan dik silindirin içindedir. $\rho \mapsto \pi\rho^2$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artan olduğundan bu iki silindirin taban alanları tam olarak A_f'nin o alt aralıktaki en küçük ve en büyük değerleridir; yani Teorem 33.2'in kuşatma varsayımı harfi harfine sağlanır ve*

$$\mathcal{V}(K_f) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

olur.
Adım 2: Halka durumu. *Şimdi genel $0 \le g \le f$ durumuna dönelim. g'nin altındaki bölgeyi Ω_g, onun döndürülmesiyle elde edilen cismi K_g ile gösterelim. Bir nokta K_f'de olmak için x eksenine uzaklığının $f(x)$'i aşmaması, K_g'de olmak içinse $g(x)$'i aşmaması gerekir; $g \le f$ olduğundan $K_g \subseteq K_f$'dir. Öte yandan Ω'nın döndürülmesiyle elde edilen K cismi, eksene uzaklığı $g(x)$ ile $f(x)$ arasında olan noktalardan oluşur. Demek ki $K \cup K_g = K_f$'dir ve iki parçanın ortak noktaları yalnızca eksene uzaklığı tam $g(x)$ olan yüzey üzerindedir, yani iç bölgeleri ayrıktır. Hacmin (V3) özelliğiyle $\mathcal{V}(K_f) = \mathcal{V}(K_g) + \mathcal{V}(K)$ olur. Adım 1'i hem f'ye hem g'ye uygulayıp çıkarırsak, integralin lineerliğiyle (Teorem 27.1)*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathcal{V}(K) = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx - \pi \int_a^b g(x)^2\,dx = \pi \int_a^b \Big(f(x)^2 - g(x)^2 \Big) dx$$

elde ederiz. $g \equiv 0$ alındığında halka bir diske dönüşür ve formül Adım 1'inkine indirgenir.
■

⚠ Halkada kareler çıkarılır, farkın karesi alınmaz

En sık yapılan yanlış $\pi \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2\,dx$ yazmaktır. Dönen şey bir doğru parçasıdır ve süpürdüğü halkanın alanı $\pi f^2 - \pi g^2$'dir, $\pi(f-g)^2$ değil; iki ifade ancak $g \equiv 0$ iken çakışır. Alan hesabında fark alınır, hacim hesabında karelerin farkı.

Örnek 33.5 (Disk ve Halka ile Hacim Hesapları).

a) $y = \sqrt{x}$ eğrisinin altında kalan $[0,4]$ üzerindeki bölge, x ekseni çevresinde döndürülüyor. Elde edilen cismin hacmini bulunuz.

b) $y = x$ ile $y = x^2$ eğrileri arasında kalan bölge, x ekseni çevresinde döndürülüyor. Hacmi bulunuz.

c) R yarıçaplı kürenin hacminin $\dfrac{4\pi R^3}{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
a) Kesitler yarıçapı $\sqrt{x}$ olan disklerdir. Teorem 33.3 gereği

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^4 \big(\sqrt{x}\big)^2\,dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi.$$

b) Örnek 33.2'nda gördüğümüz gibi eğriler $x = 0$ ile $x = 1$'de kesişir ve $0 \le x \le 1$ için $x^2 \le x$'tir; dış yarıçap $f(x) = x$, iç yarıçap $g(x) = x^2$'dir:

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^1 \big(x^2 - x^4 \big)\,dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

Yanlış formülle $\pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \frac{\pi}{30}$ çıkardı; yani o yanlış zararsız değildir.
c) Küre, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ yarım çemberinin altındaki bölgenin x ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilir $(-R \le x \le R)$; kesitler yarıçapı $\sqrt{R^2 - x^2}$ olan disklerdir:

$$\mathcal{V} = \pi \int_{-R}^{R} \big(R^2 - x^2 \big)\,dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

■

33.4 Silindirik Kabuk Yöntemi

y ekseni çevresinde döndürme söz konusu olduğunda disk yöntemi sıkıntı çıkarabilir: kesitleri y'nin fonksiyonu olarak yazmak için $y = f(x)$ bağıntısını x için çözmek gerekir ve bu her zaman mümkün değildir; örneğin $y = x - x^2$ eğrisi $[0,1]$ üzerinde ters çevrilemez.
Çıkış yolu, cismi diskler yerine **iç içe geçmiş ince silindirik kabuklara** ayırmaktır. Önce sabit yükseklikli bir şeride bakalım: $[x_{i-1}, x_i] \times [0,h]$ dikdörtgeni, y ekseni çevresinde döndürüldüğünde iç yarıçapı x_{i-1}, dış yarıçapı x_i ve yüksekliği h olan bir boru parçası süpürür. Bu borunun hacmi, iki dik silindirin hacimleri farkı olarak tam olarak

$$\pi x_i^2 h - \pi x_{i-1}^2 h = \pi (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})h = 2\pi \cdot \underbrace{\frac{x_{i-1} + x_i}{2}}_{\text{orta nokta } \bar{x}_i} \cdot h \cdot \Delta x_i$$

sayısıdır. Yani kabuğun hacmi, "$2\pi \times$ orta yarıçap $\times$ yükseklik $\times$ kalınlık" biçimindedir — sanki kabuğu bir yerinden kesip düzleştirmişiz gibi. Bu, tam olarak $2\pi x f(x)$ fonksiyonunun bir Riemann toplamı terimidir.

Teorem 33.4 (Silindirik Kabuk Yöntemi). *$0 \le a < b$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, $f \ge 0$ olsun.*

$$\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$$

bölgesi y ekseni çevresinde döndürüldüğünde elde edilen cismin hacmi

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

ile verilir.

İspat.
$P = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ bir bölünüş, $m_i = \min_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} f$ ve $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ olsun (en küçük ve en büyük değerler Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği vardır).
Adım 1: Kuşatma. *K_i, $[x_{i-1}, x_i]$ şeridinin döndürülmesiyle süpürülen kısım olsun. Bu parça, iç yarıçapı x_{i-1}, dış yarıçapı x_i ve yüksekliği m_i olan boruyu içerir, aynı yarıçaplı ve yüksekliği M_i olan borunun içindedir; yukarıdaki hesapla — ki orada hacmin (V1) ve (V3) özellikleri kullanılmıştı — bu boruların hacimleri $2\pi\bar{x}_i m_i \Delta x_i$ ile $2\pi\bar{x}_i M_i \Delta x_i$'dir. Hacmin (V2) ve (V3) özellikleriyle*

$$S_{\text{alt}}(P) := \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i m_i \Delta x_i \le \mathcal{V} \le \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i M_i \Delta x_i =: S_{\text{üst}}(P).$$

Adım 2: İki toplam birbirine yaklaşır. *$g(x) = 2\pi x f(x)$ diyelim; g süreklidir, dolayısıyla integrallenebilirdir. $0 \le \bar{x}_i \le b$ olduğundan*

$$S_{\text{üst}}(P) - S_{\text{alt}}(P) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i (M_i - m_i)\Delta x_i \le 2\pi b \left(U(P,f) - L(P,f) \right).$$

f integrallenebilir olduğundan $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$'tir; Darboux limit teoremi (Teorem 26.1) gereği $\| P \| \to 0$ iken $U(P,f) \to \overline{I}(f)$ ve $L(P,f) \to \underline{I}(f)$ olduğundan sağ taraf sıfıra gider.
Adım 3: Riemann toplamı. *Her i için $m_i \le f(\bar{x}_i) \le M_i$ olduğundan, $R(P) := \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$ Riemann toplamı da $S_{\text{alt}}(P)$ ile $S_{\text{üst}}(P)$ arasındadır. $\mathcal{V}$ de aynı iki sayı arasında olduğuna göre*

$$\left| \mathcal{V} - R(P) \right| \le S_{\text{üst}}(P) - S_{\text{alt}}(P) \underset{\|P\|\to 0}{\to} 0.$$

Öte yandan $\| P \| \to 0$ iken $R(P) \to \int_a^b g$ olur (Teorem 26.2). Üçgen eşitsizliğiyle (bkz. Analiz 1), her $\varepsilon > 0$ için normu yeterince küçük bir P alarak $\left| \mathcal{V} - \int_a^b g \right| < \varepsilon$ elde ederiz; ε keyfî olduğundan $\mathcal{V} = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$'tir.
■

Hangi yöntem?

Kaba bir kural: dilim dönme eksenine **dik** ise disk/halka, **paralel** ise kabuk yöntemi kullanılır. x ekseni çevresinde dönüyorsak dikey dilimler diske, yatay dilimler kabuğa götürür; y ekseninde tam tersi olur. İki yöntem de uygulanabildiğinde aynı sonucu vermeleri, hesabın doğal bir denetimidir.

Örnek 33.6 (Kabuk Yöntemiyle Hacim Hesapları).

a) $y = x - x^2$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölge, y ekseni çevresinde döndürülüyor. Hacmi bulunuz.

b) $y = \sin x$ eğrisinin altında, $[0, \pi]$ üzerinde kalan bölge y ekseni çevresinde döndürülüyor. Hacmi bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

a) $x - x^2 = x(1-x) \geq 0$ eşitsizliği tam olarak $0 \leq x \leq 1$ için sağlanır; eğri x eksenini $x = 0$ ile $x = 1$'de keser. Teorem 33.4 gereği

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_0^1 x\,(x - x^2)\,dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

Disk yöntemiyle aynı hacmi bulmak için $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}$ dallarını ayrı ayrı ele almak gerekirdi; kabuk yöntemi bunu gereksiz kıldı.
b) Yine Teorem 33.4 ile $\mathcal{V} = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\,dx$ yazarız. Kısmi integrasyon (Teorem 19.2) uygulayalım: $u = x$, $dv = \sin x\,dx$ seçimiyle $\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$ olur ve

$$\mathcal{V} = 2\pi \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\pi} = 2\pi\,\big(\,\pi + 0 - 0\,\big) = 2\pi^2.$$

■

33.5 Yay Uzunluğu

Şimdi bir eğrinin uzunluğunu ölçmeye geçiyoruz. Burada dikkatli olmamız gereken bir nokta var: "eğrinin uzunluğu" henüz tanımlı bir kavram değildir. Doğru parçasının uzunluğunu Pisagor teoreminden biliyoruz; eğri için yapılacak en doğal şey, eğri üzerinde sonlu sayıda nokta seçip bunları doğru parçalarıyla birleştirmek, elde edilen **kırık çizginin** uzunluğunu hesaplamak ve noktaları sıklaştırdıkça bu sayının nereye gittiğine bakmaktır. Kırık çizgi eğrinin içinden kestirme gittiği için uzunluğu "gerçek" uzunluktan küçüktür; bu yüzden uzunluğu bir **supremum** olarak tanımlamak doğaldır.

⚠ Basamaklı yaklaşım yanıltır

Eğriyi yatay ve dikey küçük adımlardan oluşan bir merdivenle yaklaştırmak, alan hesabında işe yarar ama uzunlukta yaramaz. $(0,0)$ ile $(1,1)$ arasındaki doğru parçasını n basamaklı bir merdivenle izleyelim: merdivenin uzunluğu, kaç basamak alırsak alalım, yatay adımların toplamı 1 ile dikey adımların toplamı 1'in toplamı, yani **her zaman** 2'dir; oysa doğru parçasının uzunluğu $\sqrt{2} \approx 1{,}41$'dir. Merdiven eğriye noktasal olarak istediğimiz kadar yaklaşsa da uzunluğu yakınsamaz. Uzunlukta doğru yaklaşım aracı basamaklar değil, **kirişlerdir**.

Teorem 33.5 (Yay Uzunluğu Formülü). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli türevlenebilir olsun (yani f' var ve sürekli). $P = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ bölünüşüne karşılık gelen kırık çizginin uzunluğu*

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \big(\,f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2}$$

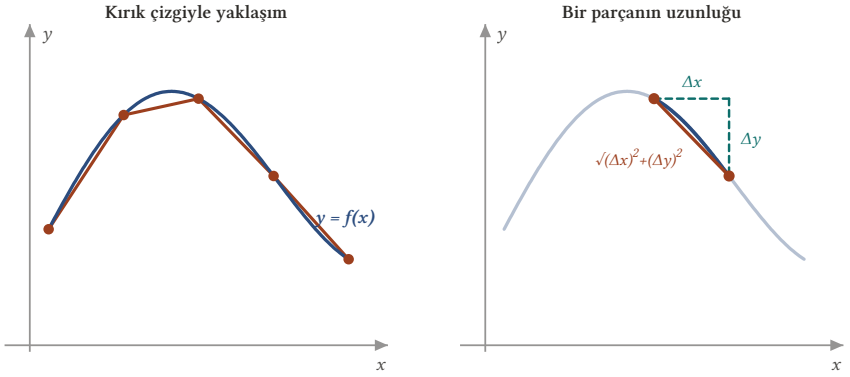
olsun. O hâlde $y = f(x)$ eğrisinin uzunluğu

$$L := \sup_P \ell(P)$$

sonludur, $\|\,P\,\| \to 0$ iken $\ell(P) \to L$ olur ve

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

eşitliği geçerlidir.



Şekil 33.3: Yay uzunluğu, eğriye içten çizilen kırık çizgilerin uzunluklarının limitidir. Bir parçanın uzunluğu Pisagor'dan $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{1+(\Delta y/\Delta x)^2}\cdot\Delta x$ olarak yazılır; ortalama değer teoremiyle $\Delta y/\Delta x = f'(c)$ alınır ve toplam bir Riemann toplamına dönüşür.

İspat.
Adım 1: Kirişin uzunluğunu türevle yazma. *Ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) gereği her i için $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\sigma_i)\,\Delta x_i$ olan bir $\sigma_i \in (x_{i-1}, x_i)$ vardır. Bunu kirişin uzunluğunda yerine koyup $\Delta x_i > 0$ olduğunu kullanırsak*

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + f'(\sigma_i)^2(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + f'(\sigma_i)^2}\,\Delta x_i, \qquad \text{yani} \qquad \ell(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\sigma_i)^2}\,\Delta x_i$$

buluruz. Bu, $\varphi(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ fonksiyonunun P bölünüşüne ve σ_i işaretlerine karşılık gelen bir ***Riemann toplamıdır*** *(Tanım 26.1).*
Adım 2: Limit. *f' sürekli olduğundan φ de süreklidir, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 25.2). Teorem 26.2 gereği, işaretler nasıl seçilirse seçilsin, $\| P \| \to 0$ iken*

$$\ell(P) \to \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx =: I.$$

Adım 3: Kırık çizgi incelmeyle uzar. *$P \subseteq P'$ olsun, yani P' bir incelme olsun. P', P'nin bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralığına c noktasını eklemişse, o aralığın tek kirişi yerine iki kiriş gelir; düzlemde iki nokta arasındaki en kısa yol doğru parçası olduğundan (üçgen eşitsizliği) tek kirişin uzunluğu, iki kirişin uzunlukları toplamını aşamaz. Nokta nokta ekleyerek $\ell(P) \le \ell(P')$ sonucuna varırız.*
Adım 4: Supremum, integrale eşittir. *$\varepsilon > 0$ verilsin; Adım 2 gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\| Q \| < \delta$ olan her Q için $|\,\ell(Q) - I\,| < \varepsilon$'dur. Keyfî bir P alalım ve nokta ekleyerek normu δ'dan küçük bir P' incelmesi kuralım; Adım 3 gereği $\ell(P) \le \ell(P') < I + \varepsilon$ olur. P ile ε keyfî olduğundan $\sup_P \ell(P) \le I$'dir; özellikle supremum sonludur. Öte yandan aynı P' için $\ell(P') > I - \varepsilon$ olduğundan $\sup_P \ell(P) \ge I$'dir. Demek ki*

$$L = \sup_P \ell(P) = I = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

ve Adım 2 zaten $\ell(P) \to L$ olduğunu söylüyordu.
■

Formülün diferansiyel biçimi akılda tutmayı kolaylaştırır: sonsuz küçük bir yay parçası, dik kenarları dx ve dy olan bir dik üçgenin hipotenüsüdür,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2}\,dx, \qquad L = \int ds.$$

Örnek 33.7 (Yay Uzunluğu Hesapları).

a) $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ eğrisinin $[0,3]$ üzerindeki parçasının uzunluğunu bulunuz.

b) $y = \cosh x$ zincir eğrisinin $[0,1]$ üzerindeki parçasının uzunluğunu bulunuz.

c) R yarıçaplı çemberin çeyrek yayının uzunluğunu hesaplayarak çevrenin $2\pi R$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.
a) $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ için $f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = \sqrt{x}$'tir; f', $[0,3]$ üzerinde süreklidir. Öyleyse $1 + f'(x)^2 = 1 + x$ ve

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \Big[\,\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{2}{3}\left(\,4^{3/2} - 1^{3/2}\,\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

b) $f'(x) = \sinh x$ ve $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ özdeşliği gereği $1 + f'(x)^2 = \cosh^2 x$'tir; $\cosh x > 0$ olduğundan $\sqrt{1+f'(x)^2} = \cosh x$ olur ve

$$L = \int_0^1 \cosh x\,dx = \Big[\sinh x\Big]_0^1 = \sinh 1 = \frac{e - e^{-1}}{2} \approx 1{,}1752.$$

Zincir eğrisinin bu özelliği dikkat çekicidir: yayın uzunluğu, aynı aralıkta eğri altındaki alana eşittir.
c) Çeyrek yay, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ fonksiyonunun $[0,R]$ üzerindeki grafiğidir. $0 < x < R$ için $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ ve

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}, \qquad \sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Bu integrand $x \to R^-$ iken sınırsızdır; yani f, $[0,R]$'nin tamamında sürekli türevlenebilir değildir ve Teorem 33.5 doğrudan uygulanamaz. Önce $0 < c < R$ alıp $[0,c]$ üzerinde çalışalım:

$$L(c) = \int_0^c \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = \Big[\,R\arcsin\frac{x}{R}\Big]_0^c = R\arcsin\frac{c}{R}.$$

arcsin sürekli olduğundan $\lim_{c\to R^-} L(c) = R\arcsin 1 = \frac{\pi R}{2}$'dir. Şimdi $L = \frac{\pi R}{2}$ olduğunu, uzunluğun supremum tanımına dönerek iki eşitsizlikle gösterelim.
Alttan. $[0,c]$ üzerindeki her kırık çizgiye son düğüm olarak $(R,0)$ noktasını eklersek $[0,R]$ üzerinde bir kırık çizgi elde ederiz ve uzunluk azalmaz; öyleyse her c için $L \geq L(c)$, dolayısıyla $L \geq \frac{\pi R}{2}$'dir.
Üstten. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $(R-c) + \sqrt{R^2-c^2} < \varepsilon$ olacak biçimde bir $c \in (0,R)$ seçelim. Bir kırık çizgiye düğüm eklemek onu uzatmaktan başka bir şey yapmadığından (Teorem 33.5'nün ispatındaki Adım 3), düğümleri arasında c bulunan kırık çizgileri incelemek yeter. Böyle bir kırık çizginin $[0,c]$'ye düşen parçasının uzunluğu $L(c) \leq \frac{\pi R}{2}$'yi aşmaz. $[c,R]$'ye düşen parçasında ise her kiriş için $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \leq \Delta x + |\,\Delta y\,|$'dir; f bu aralıkta azalan olduğundan $\sum \Delta x = R - c$ ve $\sum|\,\Delta y\,| = f(c) - f(R) = \sqrt{R^2-c^2}$ olur, yani bu parçanın katkısı ε'dan küçüktür. Demek ki her kırık çizginin uzunluğu $\frac{\pi R}{2} + \varepsilon$'u aşmaz; ε keyfî olduğundan $L \leq \frac{\pi R}{2}$'dir.
İki eşitsizlik birlikte $L = \frac{\pi R}{2}$ verir. Çember dört çeyrek yaydan oluştuğuna göre çevre $4\cdot\frac{\pi R}{2} = 2\pi R$'dir. Aynı hesabı parametrik biçimle yaparsak sınırsız integrand hiç ortaya çıkmaz; bu, parametrik gösterimin somut bir üstünlüğüdür.
■

33.6 Dönel Yüzey Alanı

Bir eğriyi x ekseni çevresinde döndürdüğümüzde ortaya çıkan yüzeyin alanını arıyoruz. Yay uzunluğunda kirişleri kullandık; burada da her kirişin süpürdüğü şekli kullanacağız: bir doğru parçası, kendisini kesmeyen bir eksen çevresinde döndürüldüğünde bir **kesik koni** (frustum) yüzeyi süpürür.
Taban yarıçapları $r_1 \leq r_2$, eğik kenarının uzunluğu ℓ olan bir kesik koninin yanal yüzey alanını hesaplayalım. Önce tam koniyle başlayalım: taban yarıçapı r, eğik kenarı s olan bir dik koninin yanal yüzeyi bir doğrultmanı boyunca kesilip düzleştirildiğinde, yarıçapı s ve yay uzunluğu $2\pi r$ olan bir dairesel sektöre dönüşür; sektörün alanı $\frac{1}{2}\cdot s \cdot 2\pi r = \pi r s$'dir. Şimdi $r_1 < r_2$ olan kesik koniyi tepesine kadar tamamlayalım: tepeden iki tabana olan eğik uzaklıklar $s_1 < s_2$ olsun, $s_2 - s_1 = \ell$'dir ve benzerlikten $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} =$

 CC BY-NC-SA 4.0

k olur. Kesik koninin yanal yüzeyi, büyük koninin yanal yüzeyinden küçüğünkinin çıkarılmasıyla elde edildiğinden alanı

$$\pi r_2 s_2 - \pi r_1 s_1 = \pi k \left(s_2^2 - s_1^2 \right) = \pi k (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = \pi (r_1 + r_2)\, \ell,$$

yani

$$\pi (r_1 + r_2)\ell = 2\pi \, \frac{r_1 + r_2}{2} \, \ell$$

olur; kısacası "$2\pi \times$ ortalama yarıçap $\times$ eğik kenar". Koni ($r_1 = 0$) için bu $\pi r_2 \ell$'ye indirgenir. $r_1 = r_2 = r$ durumunda tepe noktası yoktur, şekil bir silindirdir; ama o hâlde yanal yüzey düzleştirilince kenarları $2\pi r$ ile ℓ olan bir dikdörtgen verir ve alan yine $2\pi r \ell$ çıkar, yani formül bu uç durumda da geçerlidir.

⚠ Yüzey alanı için supremum tanımı çalışmaz

Uzunluğu "içten yaklaşan kırık çizgilerin supremumu" diye tanımlayabilmiştik; yüzey alanında bu yol **kapalıdır**. Bir silindirin yüzeyine içten çizilen üçgenlerden oluşan çokyüzlülerin alanları, üçgenler uygun seçilirse istenildiği kadar büyük yapılabilir ("Schwarz feneri"). Bu yüzden dönel yüzeyin alanını gelişigüzel çokyüzlülerle değil, **eğriye uyumlu kesik konilerle** tanımlarız. Yüzey alanını "$2\pi \int_a^b f(x)\, dx$", yani silindir kabuklarının toplamı diye tanımlamak da yanlıştır: eğimi hesaba katmayan bu ifade, örneğin bir koninin yanal alanını hatalı verir.

Teorem 33.6 (Dönel Yüzeyin Alanı). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $f \geq 0$ olsun. $y = f(x)$ eğrisinin x ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin alanı, P bölünüşüne karşılık gelen kesik koni toplamlarının*

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \, \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \, \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)^2}$$

limiti olarak tanımlanır. Bu limit $\| P \| \to 0$ iken vardır ve

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

değerine eşittir.

İspat.
Adım 1: Eğik kenarı türevle yazma. *Teorem 33.5'nün ispatındaki gibi, ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) gereği her i için*

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)^2} = \sqrt{1 + f'(\sigma_i)^2}\, \Delta x_i$$

olan bir $\sigma_i \in (x_{i-1}, x_i)$ vardır. Böylece

$$S(P) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'(\sigma_i)^2}\, \Delta x_i.$$

Adım 2: Riemann toplamıyla karşılaştırma. *$\psi(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$ süreklidir, dolayısıyla integrallenebilirdir; σ_i işaretlerine karşılık gelen Riemann toplamı $R(P) = \sum_{i=1}^{n} \psi(\sigma_i)\Delta x_i$ olsun. f' sürekli olduğundan sınırlıdır (bkz. Analiz 1); $| f' | \leq M$ diyelim, o hâlde $\sqrt{1 + f'(\sigma_i)^2} \leq \sqrt{1 + M^2}$ olur ve*

$$| S(P) - R(P) | \leq 2\pi \sqrt{1 + M^2} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - f(\sigma_i) \right| \Delta x_i.$$

Adım 3: Düzgün süreklilik. *$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$ sayısı $f(x_{i-1})$ ile $f(x_i)$ arasındadır ve $\sigma_i \in [x_{i-1}, x_i]$'dir; öyleyse bu iki sayının farkı, f'nin $[x_{i-1}, x_i]$ üzerindeki salınımı $\omega_i = \sup_{u,v \in [x_{i-1}, x_i]} | f(u) - f(v) |$ ile sınırlıdır. f kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olduğundan düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1): $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\| P \| < \delta$ iken her i için $\omega_i \leq \varepsilon$ olur. O hâlde*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mid S(P) - R(P) \mid \leq 2\pi\sqrt{1+M^2}\,\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 2\pi\sqrt{1+M^2}\,(b-a)\,\varepsilon,$$

ve ε keyfî olduğundan $\| P \| \to 0$ iken $S(P) - R(P) \to 0$'dır.
Adım 4: Sonuç. *$\| P \| \to 0$ iken $R(P) \to \int_a^b \psi$ olur (Teorem 26.2); Adım 3 ile birlikte $S(P)$ de aynı limite gider, yani $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$'tir.*
■

Diferansiyel biçimde formül çok sadedir: yay elemanı ds, eksene $f(x)$ uzaklığında bir çember süpürür, süpürülen şeridin alanı $2\pi f(x)\,ds$'tir ve $S = \int 2\pi f\,ds$ olur.

Örnek 33.8 (Dönel Yüzey Alanı Hesapları).

a) R yarıçaplı kürenin yüzey alanının $4\pi R^2$ olduğunu gösteriniz.

b) $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $[0,4]$ üzerindeki parçası x ekseni çevresinde döndürülüyor; yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm.
a) Küre yüzeyi, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ yarım çemberinin $[-R, R]$ üzerinde döndürülmesiyle elde edilir. Örnek 33.7'ndaki hesapla, $-R < x < R$ için

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Bu ifade uçlarda sınırsızdır; ama integrandda f ile çarpıldığında sadeleşir ve sabit kalır:

$$f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} = R, \qquad -R < x < R.$$

Bütün hipotezlerin sağlandığı $[-c,c]$ üzerinde $(0 < c < R)$ çalışırsak $S(c) = 2\pi\int_{-c}^{c} R\,dx = 4\pi Rc$ olur; $c \to R^-$ limitinde $S = 4\pi R^2$ bulunur. Bu, Arşimet'in ünlü sonucudur: küre yüzeyinin alanı, büyük çemberinin alanının (πR^2) tam dört katıdır.
b) $f(x) = \sqrt{x}$ için $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $x > 0$ iken $1 + f'(x)^2 = \dfrac{4x+1}{4x}$'tir. Çarpımda karekökler sadeleşir:

$$f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x+\frac{1}{4}}.$$

Türev $x = 0$'da tanımsız olsa da bu integrand $[0,4]$ üzerinde süreklidir; $[c,4]$ üzerinde çalışıp $c \to 0^+$ limitine geçerek

$$S = 2\pi\int_0^4 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = 2\pi\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{17\sqrt{17}-1}{8} = \frac{\pi\,(\,17\sqrt{17}-1\,)}{6} \approx 36{,}18$$

buluruz; burada $\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} = \frac{17\sqrt{17}}{8}$ ve $\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \frac{1}{8}$ kullanıldı.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Arşimet'in şapka kutusu teoremi

Kürede integrandın sabit R çıkması çok hoş bir sonuç doğurur: $-R \le p < q \le R$ olmak üzere kürenin $x = p$ ile $x = q$ düzlemleri arasında kalan kuşağının alanı

$$2\pi \int_p^q R \, dx = 2\pi R(q-p)$$

olur; yani **yalnızca kuşağın yüksekliğine bağlıdır**, kürenin neresinden alındığına değil. Ekvatordan alınan ince bir kuşakla kutuptan alınan aynı yükseklikteki kuşağın alanları eşittir. Eşdeğer söyleyişle: küre, kendisini çevreleyen silindirin içine tam oturur ve iki yüzey arasındaki dik izdüşüm alanları korur.

33.7 Parametrik Eğriler

Bir eğri her zaman $y = f(x)$ biçiminde verilmez: çemberin tamamı, sikloid, astroid gibi eğriler bir fonksiyonun grafiği değildir ve onları t parametresine bağlı bir nokta çiftiyle betimlemek gerekir. Şimdi yukarıdaki formüllerin parametrik biçimlerini yazalım.

Önerme 33.2 (Parametrik Eğriler için Alan Uzunluk ve Yüzey). *$x, y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olsun ve eğri $t \mapsto (x(t), y(t))$ ile verilsin.*
(i) Alan. *x fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ üzerinde kesin artan olsun, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ olsun ve her t için $y(t) \ge 0$ olsun. Eğrinin altında kalan bölgenin alanı*

$$\mathcal{A} = \int_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)\, dt.$$

(ii) Yay uzunluğu. *Eğrinin uzunluğu*

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

(iii) Dönel yüzey. *$y(t) \ge 0$ ise, eğrinin x ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin alanı*

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

İspat.
(i) *x sürekli ve kesin artan olduğundan $[\alpha, \beta]$'yı $[a, b]$'ye birebir ve örten resmeder, üstelik tersi de sürekli ve kesin artandır (Teorem 1.3). $F(u) = y(x^{-1}(u))$ diyelim; F, iki sürekli fonksiyonun bileşkesi olarak süreklidir, negatif değildir ve eğri tam olarak F'nin grafiğidir, dolayısıyla Önerme 33.1 gereği aranan alan $\int_a^b F(u)\, du$'dur. Belirli integralde değişken değiştirme teoremi (Teorem 30.1) $u = x(t)$ dönüşümüne izin verir; hipotezleri sağlanır, çünkü x sürekli türevli ve F süreklidir. $F(x(t)) = y(t)$ olduğundan*

$$\mathcal{A} = \int_a^b F(u)\, du = \int_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)\, dt.$$

(ii) *Uzunluk yine kırık çizgilerin supremumu olarak tanımlanır. $P = \{\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta\}$ için*

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_i) - x(t_{i-1})\big)^2 + \big(y(t_i) - y(t_{i-1})\big)^2}.$$

Ortalama değer teoremini (Teorem 8.2) x ve y için ayrı ayrı uygularsak, $\sigma_i, \tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ noktaları için

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\sigma_i)^2 + y'(\tau_i)^2}\, \Delta t_i$$

 CC BY-NC-SA 4.0

buluruz. Buradaki σ_i ile τ_i'nin farklı olabilmesi, ifadenin doğrudan bir Riemann toplamı olmasını engeller; bu boşluğu kapatalım. Sabit bir $c \neq 0$ için $s \mapsto \sqrt{c^2+s^2}$ fonksiyonunun türevi $\frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}$'dir ve mutlak değerce 1'i aşmaz; ortalama değer teoremi gereği bu fonksiyon 1-Lipschitz'tir, yani

$$\left|\, \sqrt{c^2+s^2} - \sqrt{c^2+r^2} \,\right| \le |\, s-r \,|$$

olur. Eşitsizlik $c=0$ için de doğrudur, çünkü o hâlde sol taraf $\big|\, |\,s\,| - |\,r\,| \,\big|$'ye indirgenir ve ters üçgen eşitsizliğinden (bkz. Analiz 1) bu sayı $|\, s-r \,|$'yi aşmaz. Şimdi $c = x'(\sigma_i)$, $s = y'(\tau_i)$, $r = y'(\sigma_i)$ alırsak

$$\left| \ell(P) - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\sigma_i)^2 + y'(\sigma_i)^2}\,\Delta t_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\, y'(\tau_i) - y'(\sigma_i) \,\right| \Delta t_i .$$

y' düzgün sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) ve σ_i ile τ_i aynı alt aralıkta bulunduğundan, $\|\,P\,\|$ yeterince küçükken sağ taraf $\varepsilon(\beta-\alpha)$'yı aşmaz; yani $\|\,P\,\| \to 0$ iken sıfıra gider. Soldaki toplam ise sürekli — dolayısıyla integrallenebilir — $\sqrt{x'^2+y'^2}$ fonksiyonunun bir Riemann toplamıdır ve Teorem 26.2 gereği integraline yakınsar. Böylece $\ell(P) \to \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2+y'^2}$ olur; kırık çizgilerin incelmeyle uzaması ve Teorem 33.5'nün ispatındaki Adım 4, supremumun da bu sayı olduğunu verir.

(iii) *Kesik koni toplamları*

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, \frac{y(t_{i-1}) + y(t_i)}{2} \sqrt{(\,\Delta x_i)^2 + (\,\Delta y_i)^2}$$

biçimindedir; burada $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$ ve $\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$'dir. Kısaltma olarak $\bar{y}_i = \frac{y(t_{i-1})+y(t_i)}{2}$, $c_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ (gerçek kiriş) ve $d_i = \sqrt{x'(\sigma_i)^2 + y'(\sigma_i)^2}\,\Delta t_i$ (düzgünleştirilmiş kiriş) yazalım; buradaki σ_i noktaları (ii)'de x için ortalama değer teoreminden gelenlerdir. Ayrıca $\eta(t) = 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ sürekli fonksiyonunun aynı örnek noktalara karşılık gelen Riemann toplamı $R(P) = \sum_{i=1}^{n} \eta(\sigma_i)\Delta t_i$ olsun. y ile $\sqrt{x'^2+y'^2}$ kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olduklarından sınırlıdır (bkz. Analiz 1); $|\,y\,| \le C$ ve $\sqrt{x'^2+y'^2} \le D$ diyelim. Bu gösterimle $S(P) = 2\pi \sum_i \bar{y}_i c_i$ ve $R(P) = 2\pi \sum_i y(\sigma_i)\, d_i$'dir. Farkı, $\bar{y}_i c_i - y(\sigma_i) d_i = \bar{y}_i\,(\,c_i - d_i\,) + (\,\bar{y}_i - y(\sigma_i)\,)\,d_i$ ayrışımıyla — yani önce kirişi, sonra yüksekliği değiştirerek — iki terime bölersek

$$\left|\, S(P) - R(P) \,\right| \le 2\pi \sum_{i=1}^{n} |\,\bar{y}_i\,|\,\left|\, c_i - d_i \,\right| + 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left|\, \bar{y}_i - y(\sigma_i) \,\right| d_i$$

elde ederiz. Birinci toplam $2\pi C \sum_i |\, c_i - d_i \,|$ ile sınırlıdır; (ii)'nin ispatındaki terim terim kestirim gereği $|\, c_i - d_i \,| \le |\, y'(\tau_i) - y'(\sigma_i) \,|\,\Delta t_i$'dir ve y' düzgün sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) bu toplam $\|\,P\,\| \to 0$ iken sıfıra gider. İkinci toplamda $d_i \le D\,\Delta t_i$'dir; $\bar{y}_i$ sayısı $y(t_{i-1})$ ile $y(t_i)$ arasında, σ_i ise $[t_{i-1}, t_i]$'de olduğundan $|\,\bar{y}_i - y(\sigma_i)\,|$, y'nin bu alt aralıktaki salınımını aşmaz; y de düzgün sürekli olduğundan, $\|\,P\,\|$ yeterince küçükken bu salınım hepsi için aynı anda ε'dan küçüktür ve ikinci toplam $2\pi D(\beta-\alpha)\varepsilon$'u aşmaz. Demek ki $\|\,P\,\| \to 0$ iken $S(P) - R(P) \to 0$'dır. Öte yandan $R(P) \to \int_\alpha^\beta \eta$ olduğundan (Teorem 26.2) $S(P) \to 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ bulunur.

■

Üç formülün de ortak yanı, $ds = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$ yay elemanıdır; $y = f(x)$ durumu $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ seçimiyle özel bir hâl olarak geri gelir.

Örnek 33.9 (Sikloid Kemeri). $a > 0$ olmak üzere

$$x(t) = a(t - \sin t), \qquad y(t) = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

ile verilen **sikloid** eğrisi, a yarıçaplı bir çemberin bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanması sırasında çember üzerindeki sabit bir noktanın çizdiği yoldur. Bir tam kemer için (a) eğrinin altında kalan alanı, (b) eğrinin uzunluğunu, (c) eğri x ekseni çevresinde döndürüldüğünde oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm.
Önce türevleri yazalım:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \qquad y'(t) = a \sin t.$$

$x'(t) = a(1-\cos t) \geq 0$'dır ve $[0, 2\pi]$ üzerinde yalnızca uç noktalarda, yani $t = 0$ ile $t = 2\pi$'de sıfırlanır. Açık aralıkta $x' > 0$ olması x'in $[0, 2\pi]$ üzerinde kesin artan olmasına yeter; Önerme 33.2'nin (i) şıkkı yalnızca kesin artanlık istediğinden şık doğrudan uygulanabilir. Ayrıca $y(t) = a(1-\cos t) \geq 0$'dır.

a) Alan.

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt.$$

Kareyi açalım: $(1-\cos t)^2 = \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}$. $[0, 2\pi]$ üzerinde $\cos t$ ile $\cos 2t$'nin integralleri sıfır olduğundan geriye yalnızca sabit terim kalır:

$$\mathcal{A} = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2.$$

Bu, yuvarlanan çemberin alanının (πa^2) tam üç katıdır; Galileo'nun tartıyla tahmin etmeye çalıştığı, Roberval ile Torricelli'nin ispatladığı ünlü sonuç budur.

b) Uzunluk. Önce yay elemanı:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2\,\big(\,1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\,\big) = 2a^2(1-\cos t) = 4a^2 \sin^2\frac{t}{2},$$

çünkü $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$'dir. $0 \leq t \leq 2\pi$ için $\sin\frac{t}{2} \geq 0$ olduğundan $\sqrt{x'^2 + y'^2} = 2a\sin\frac{t}{2}$ olur ve

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2a(2+2) = 8a.$$

Bir kemerin uzunluğu, yuvarlanan çemberin yarıçapının tam sekiz katıdır — içinde π geçmeyen, şaşırtıcı biçimde temiz bir sonuç.

c) Yüzey alanı. (iii) şıkkında $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ yazarsak

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u\,du,$$

son adımda $u = \frac{t}{2}$ dönüşümü ($dt = 2\,du$) kullanıldı. Kalan integral için $\sin^3 u = \sin u\,(1-\cos^2 u)$ yazıp $w = \cos u$ alalım:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 u\,du = \int_{-1}^{1} (1-w^2)\,dw = \left[\,w - \frac{w^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Öyleyse $S = 16\pi a^2 \cdot \frac{4}{3} = \dfrac{64\pi a^2}{3}$'tür.

■

33.8 Kutupsal Koordinatlarda Alan

Son olarak kutupsal koordinatlara geçiyoruz; önce merkezden yayılan eğrilerle sınırlanan bölgelerin alanına bakalım. Düzlemdeki bir noktayı, orijine uzaklığı r ve pozitif x ekseniyle yaptığı açı θ ile belirlemek ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) çoğu zaman daha doğaldır. Bir eğri $r = r(\theta)$ biçiminde verildiğinde alanı dikey dilimlerle değil, orijinden çıkan ince **dairesel dilimlerle** (sektörlerle) hesaplarız. Yarıçapı ρ, merkez açısı $\Delta\theta$ olan bir sektörün alanı, tam dairenin alanının $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ katı, yani $\pi\rho^2 \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta$'dır; $\frac{1}{2}r^2$ çarpanı buradan gelir.

Önerme 33.3 (Kutupsal Koordinatlarda Alan). *$r : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ sürekli ve $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ olsun. Kutupsal koordinatlarda*

$$\Omega = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq r(\theta)\}$$

ile verilen bölgenin alanı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2\, d\theta$$

ile verilir.

İspat.
Alan kavramının Önerme 33.1'daki (A2) ve (A3) özelliklerini ve dairesel sektörün alanının $\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta$ olduğunu kullanacağız.
$P = \{\alpha = \theta_0 < \ldots < \theta_n = \beta\}$ bir bölünüş ve $m_i = \min_{[\theta_{i-1},\theta_i]} r$, $M_i = \max_{[\theta_{i-1},\theta_i]} r$ olsun (bu değerler Weierstrass Ekstremum Teoremi gereği vardır). Ω_i, Ω'nın $\theta_{i-1} \le \theta \le \theta_i$ dilimine düşen parçası olsun; bu parça, merkezi orijinde olan, yarıçapı m_i ve merkez açısı $\Delta\theta_i$ olan sektörü içerir, yarıçapı M_i olan sektörün içindedir. (A2) gereği

$$\frac{1}{2}m_i^2\,\Delta\theta_i \le \mathcal{A}(\Omega_i) \le \frac{1}{2}M_i^2\,\Delta\theta_i.$$

$\beta - \alpha \le 2\pi$ olduğundan dilimler birbirinin üstüne binmez ve birleşimleri Ω'dır; (A3) ile toplayalım. $\rho \mapsto \frac{1}{2}\rho^2$ fonksiyonu $[0,\infty)$'da artan olduğundan $\frac{1}{2}r^2$'nin $[\theta_{i-1},\theta_i]$ üzerindeki en küçük ve en büyük değerleri $\frac{1}{2}m_i^2$ ile $\frac{1}{2}M_i^2$'dir; yani elde ettiğimiz iki toplam tam olarak $\frac{1}{2}r^2$'nin alt ve üst Darboux toplamlarıdır:

$$L\left(P, \frac{1}{2}r^2\right) \le \mathcal{A}(\Omega) \le U\left(P, \frac{1}{2}r^2\right).$$

$\frac{1}{2}r^2$ sürekli, dolayısıyla integrallenebilir olduğundan (Teorem 25.2), P üzerinden supremum ve infimum aldığımızda iki uç da $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2$'ye eşitlenir. Sıkıştırmayla

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2\, d\theta.$$

■

Örnek 33.10 (Kardioid ve Dört Yapraklı Gül). $a > 0$ olsun.

a) $r = a(1+\cos\theta)$ **kardioidinin** çevrelediği alanı bulunuz.

b) $r = a\sin 2\theta$ ile verilen dört yapraklı gülün bir yaprağının ve tamamının alanını bulunuz.

Çözüm.
a) θ, 0'dan 2π'ye giderken $r = a(1+\cos\theta) \ge 0$ olur ve eğri kapanır. Önerme 33.3 gereği

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(\, 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta \,\right) d\theta.$$

Terim terim: $\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$ ve $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi$'dir. Öyleyse

$$\mathcal{A} = \frac{a^2}{2}\left(\, 2\pi + 0 + \pi \,\right) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

b) Bir yaprak, r'nin sıfırdan sıfıra gittiği bir açı aralığına karşılık gelir. $\sin 2\theta = 0$ denkleminin ardışık iki kökü $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$'dir; arada $\sin 2\theta > 0$'dır. Demek ki birinci yaprak $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında çizilir. Yarım açı özdeşliğiyle $\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$ yazarsak

$$\mathcal{A}_{\text{yaprak}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{4}\left[\,\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$$

bulunur; köşeli parantezde $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $\sin 4\theta = \sin 2\pi = 0$ olduğundan yalnızca θ terimi kalmıştır. Dört yaprak eş olduğundan toplam alan $\frac{\pi a^2}{2}$'dir; bu, eğrinin içine sığdığı a yarıçaplı dairenin alanının yarısıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Uyarı. Burada tam turu $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\sin^2 2\theta\,d\theta$ ile integrallemek de aynı sonucu verir; ama bu bir rastlantıdır. r'nin işaret değiştirdiği ya da yaprakların üst üste bindiği eğrilerde tam tur integrali alanı yanlış hesaplar. Güvenli yol, bir yaprağın açı aralığını belirleyip simetriyi kullanmaktır.
■

33.9 Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu

Kutupsal gösterim yalnızca alan için değil, uzunluk için de elverişlidir. Bunun nedeni basittir: $r = r(\theta)$ eğrisi, θ'nın parametre rolünü üstlendiği bir parametrik eğridir; dolayısıyla yapılacak tek şey yay elemanını θ cinsinden yazmaktır.

Sonuç 33.1 (Kutupsal Eğrinin Yay Uzunluğu). *$r:[\alpha,\beta]\to[0,\infty)$ sürekli türevlenebilir olsun. Kutupsal koordinatlarda $r=r(\theta)$ ile verilen eğrinin uzunluğu*

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta$$

ile verilir.

İspat.
Eğriyi θ parametresiyle yazalım:

$$x(\theta)=r(\theta)\cos\theta,\qquad y(\theta)=r(\theta)\sin\theta.$$

r sürekli türevli olduğundan x ile y de sürekli türevlidir; çarpım kuralıyla

$$x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,\qquad y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta$$

olur. Karelerini toplarken çapraz terimler $-2rr'\sin\theta\cos\theta$ ile $+2rr'\sin\theta\cos\theta$ birbirini götürür ve $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ kullanılırsa

$$x'(\theta)^2+y'(\theta)^2=r'(\theta)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+r(\theta)^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=r(\theta)^2+r'(\theta)^2$$

kalır. Bunu Önerme 33.2'nin (ii) şıkkındaki formülde yerine koymak istenen eşitliği verir.
■

Örnek 33.11 (Kardioidin Uzunluğu). $a>0$ olmak üzere $r=a(1+\cos\theta)$ kardioidinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.
Eğri, θ $-\pi$'den π'ye giderken bir kez çizilir. $r'(\theta)=-a\sin\theta$ olduğundan

$$r^2+r'^2=a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta=a^2\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2a^2(1+\cos\theta)$$

olur. $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$ özdeşliğiyle bu ifade $4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$'ye dönüşür; $-\pi\le\theta\le\pi$ için $\cos\frac{\theta}{2}\ge 0$ olduğundan karekök mutlak değersiz alınır ve Sonuç 33.1 gereği

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=2a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=2a\left(2+2\right)=8a$$

bulunur. Sikloid kemerinde olduğu gibi burada da sonuçta π görünmez. $\theta=\pm\pi$ uçlarında r ile r' birlikte sıfırlanır, yani eğri orijine bir sivri uçla varır; bu, formülün geçerliliğini etkilemez, çünkü x ile y orada da sürekli türevlidir.
Uzunluğu alanla karşılaştırmak öğreticidir: Örnek 33.10'ta aynı kardioidin çevrelediği alanı $\frac{3\pi a^2}{2}$ bulmuştuk, uzunluğu ise $8a$'dır — biri π içerir, öteki içermez.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

33.10 Alıştırmalar

Alıştırma 33.1 (Belirli İntegralin Uygulamaları Üzerine).

a) $y = \sin x$ ile $y = \cos x$ eğrilerinin $[0, \frac{\pi}{2}]$ üzerinde sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

b) $x = y^2$ ile $x = 2 - y^2$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

c) $y = x^2$, $y = 0$ ve $x = 2$ ile sınırlı bölge y ekseni çevresinde döndürülüyor. Hacmi hem kabuk hem de halka yöntemiyle hesaplayıp sonuçları karşılaştırınız.

d) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$ eğrisinin $[1, e]$ üzerindeki parçasının uzunluğunu bulunuz.

e) $y = x^3$ eğrisinin $[0, 1]$ üzerindeki parçası x ekseni çevresinde döndürülüyor. Elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

f) $r = 1 + \cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz. Bu bölgenin sınırına düşen kardioid yayının uzunluğunu da hesaplayınız.

g) $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ ile verilen **astroid** eğrisinin uzunluğunun $6a$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
a) $\sin x = \cos x$ denkleminin $[0, \frac{\pi}{2}]$'deki tek kökü $x = \frac{\pi}{4}$'tür; solunda $\cos x > \sin x$, sağında $\sin x > \cos x$'tir. Bölgeyi ikiye ayıralım:

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}.$$

Birinci köşeli parantez $\sqrt{2} - 1$, ikincisi de $\sqrt{2} - 1$ verir; toplam $\mathcal{A} = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}828$'dir.
b) Yatay dilimler doğaldır. $y^2 = 2 - y^2$ denkleminden $y = \pm 1$ bulunur; $-1 < y < 1$ için sağdaki eğri $x = 2 - y^2$'dir. İntegrand çift olduğundan

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} \big((2 - y^2) - y^2 \big)\,dy = 2\int_0^1 (2 - 2y^2)\,dy = 2\left[\, 2y - \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

c) *Kabuk yöntemi.* Bölge $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x^2$ ile verilir; Teorem 33.4 gereği

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2\,dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

Halka yöntemi. y'ye göre dilimleyelim ($0 \le y \le 4$). Kesit, dış yarıçapı 2 ve iç yarıçapı $\sqrt{y}$ olan bir halkadır:

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^4 \big(2^2 - (\sqrt{y})^2 \big)\,dy = \pi\left[\, 4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi(16 - 8) = 8\pi.$$

İki yöntem aynı sonucu verdi.
d) $f'(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$ olduğundan

$$1 + f'(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2,$$

ve $[1, e]$ üzerinde $\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} > 0$ olduğundan karekök doğrudan bu ifadedir:

$$L = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \left[\, \frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{2} \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2{,}097.$$

e) $f'(x) = 3x^2$ ve $1 + f'(x)^2 = 1 + 9x^4$'tür. Teorem 33.6 ve $u = 1 + 9x^4$ ($du = 36x^3\,dx$; $x : 0 \to 1$ iken $u : 1 \to 10$) dönüşümüyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{18}\int_1^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{27}\left(\,10\sqrt{10}-1\,\right) \approx 3{,}563.$$

f) Kesişim açıları: $1+\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$; arada $\cos\theta > 0$ olduğundan kardioid çemberin dışındadır. İki kutupsal bölgenin alanlarını Önerme 33.3 ile hesaplayıp çıkarırsak

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[\,(1+\cos\theta)^2 - 1^2\,\Big]\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\,2\cos\theta + \cos^2\theta\,\right)d\theta.$$

Burada $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\theta\,d\theta = 2\,\big[\sin\theta\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4$ ve $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$'dir; öyleyse $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\big(4+\frac{\pi}{2}\big) = 2+\frac{\pi}{4} \approx 2{,}785$.
Sınırdaki kardioid yayı da $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ aralığına karşılık gelir. Örnek 33.11'daki hesapla ($a=1$ için) $\sqrt{r^2+r'^2} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ olduğundan, Sonuç 33.1 gereği

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \Big[\,4\sin\frac{\theta}{2}\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} \approx 5{,}657$$

bulunur.
g) Zincir kuralıyla (Teorem 4.1) $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$ ve $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$ olur. Karelerini toplarsak

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t\,\left(\,\cos^2 t + \sin^2 t\,\right) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t,$$

yani $\sqrt{x'^2+y'^2} = 3a\,|\sin t\cos t\,|$'dir. Astroid eksenlere göre bakışımlıdır ve dört çeyreği eştir; $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$'de $\sin t\cos t \ge 0$ olduğundan mutlak değer kalkar:

$$L_1 = \int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt = \frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = \frac{3a}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}.$$

Toplam uzunluk $L = 4L_1 = 6a$'dır. $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ noktalarında x' ile y' birlikte sıfırlanır; bunlar eğrinin **sivri uçlarıdır** (cusp). Sivri uçlar formülün uygulanmasına engel değildir: x ile y bu noktalarda da sürekli türevlidir, dolayısıyla Önerme 33.2'nin (ii) şıkkı $[0,2\pi]$ üzerinde olduğu gibi geçerlidir ve doğrudan $\int_0^{2\pi} 3a\,|\sin t\cos t\,|\,dt = 6a$ yazılabilirdi. Dört parçaya ayırmamızın tek nedeni, mutlak değeri açıp integrali elemanter kılmaktı.
■

Böylece belirli integralin geometrik uygulamalarını ve hepsinin arkasındaki tek fikri — dilimle, topla, limite geç — tamamlamış olduk; aynı fikir fizikte de çalışır, kütle ve iş hesapları da birer Riemann toplamı limitidir. Bir sonraki kısımda limite geçmenin bambaşka bir yüzüyle, sonsuz sayıda terimin toplanmasıyla tanışacağız: Serilere Giriş.

 CC BY-NC-SA 4.0

34. Serilere Giriş

Belirli İntegralin Uygulamaları bölümünde alan, yay uzunluğu ve hacim gibi büyüklükleri hesaplarken hep aynı fikri kullandık: aranan büyüklüğü küçük parçalara böl, her parçayı basit bir nesneyle yaklaşık olarak hesapla, **sonlu** bir toplam kur ve sonra parçaları inceltirken bu sonlu toplamların limitine bak. Şimdi aynı fikrin bir başka yüzüne, belki de analizin en verimli aracına geçiyoruz: **sonsuz çok sayıda sayıyı toplamak.**

"Sonsuz çok sayıyı toplamak" ifadesi, olduğu gibi alındığında anlamsızdır; toplama ikili bir işlemdir ve tümevarımla ancak sonlu çok terime genişletilebilir. Bu yüzden sonsuz toplamı doğrudan tanımlamayız. Bunun yerine Analiz 1'de kurduğumuz en güçlü aracı, **dizi limitini** (bkz. Analiz 1) çağırırız: önce sonlu toplamlardan oluşan bir dizi kurar, sonra "sonsuz toplam" dediğimiz şeyi bu dizinin limiti olarak tanımlarız. Böylece seriler kuramı, baştan sona diziler kuramının bir uygulaması hâline gelir; limit aritmetiği (bkz. Analiz 1), Cauchy ölçütü (bkz. Analiz 1), monoton dizilerin davranışı (bkz. Analiz 1, Sınırsız Monoton Diziler Sonsuza Iraksar) ve geometrik dizi (bkz. Analiz 1) bu bölümde art arda iş başında olacak.

Konunun ne kadar ince olduğunu bir örnekle sezelim: $1-1+1-1+\cdots$ toplamını terimleri $(1-1)+(1-1)+\cdots$ diye gruplayarak 0, $1-(1-1)-(1-1)-\cdots$ diye gruplayarak 1, toplama s deyip $s=1-s$ denklemini çözerek de $\frac{1}{2}$ buluruz. Üç yanıt da "makul" görünür, üçü de farklıdır. Demek ki sezgilerimize güvenemeyiz; işe sağlam bir tanımla başlamak zorundayız.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: seri ve kısmi toplamlar dizisi tanımı; yakınsaklık, toplam ve ıraksaklığın ε–N diliyle anlamı; serinin kalanı (kuyruğu) ve yakınsak serilerde kalanın sıfıra gitmesi; yakınsaklığın gerek koşulu olan "genel terim sıfıra gider" kuralı ve bunun **yeter** koşul olmadığını gösteren harmonik seri; ıraksaklık testi; seriler için Cauchy ölçütü; serilerin toplanması ve sabitle çarpılması; **geometrik** ve **teleskopik** seriler; sonlu sayıda terimi değiştirmenin yakınsaklığı bozmadığı, ama toplamı değiştirdiği gerçeği.

34.1 Seri ve Kısmi Toplamlar Dizisi

Bir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisi (bkz. Analiz 1) verildiğinde ondan yeni bir dizi üretelim: ilk terim a_1, ikinci terim a_1+a_2, üçüncü terim $a_1+a_2+a_3$ ve böyle sürsün; yani yeni dizinin k'ıncı terimi (a_n) dizisinin ilk k teriminin toplamı olsun. Bu diziyi (s_n) ile gösterirsek $k>1$ için $a_k = s_k - s_{k-1}$ eşitliği geçerlidir; yani yeni diziden eski diziye geri dönebiliyoruz. Demek ki (a_n) ile (s_n) birbirini belirler; ikisi birlikte tek bir nesne oluşturur ve bu nesneye seri diyeceğiz.

Tanım 34.1 (Seri ve Kısmi Toplamlar Dizisi). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir reel sayı dizisi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ile tanımlanan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine (a_n) dizisinin **kısmi toplamlar dizisi** (sequence of partial sums) denir. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerinden oluşan sıralı ikiliye, yani

$$\big(\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \big)$$

nesnesine bir **sonsuz seri** (infinite series) ya da kısaca **seri** denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ile gösterilir. Bu gösterimde a_k sayısına serinin ***k*'ıncı terimi** ya da **genel terimi** (general term) denir.

Serilerin indisi genellikle 1'den başlar. Seri a_m teriminden başlıyorsa $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ gösterimi kullanılır; örneğin $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ya da $\sum_{k=5}^{\infty} a_k$. Bölümün sonunda göreceğimiz gibi, başlangıç indisinin değiştirilmesi

 CC BY-NC-SA 4.0

serinin **yakınsak olup olmamasını** etkilemez; yalnızca toplamını değiştirir. Toplama sınırları bağlamdan belliyse kısaca $\sum a_k$ de yazacağız.
Şimdi asıl tanıma, yani "sonsuz toplam" ifadesine anlam veren tanıma geçelim.

Tanım 34.2 (Serinin Yakınsaklığı ve Toplamı). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Eğer (s_n) dizisi bir $s \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsıyorsa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine **yakınsak** (convergent) denir. Bu durumda s sayısına serinin **toplamı** (sum) denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \qquad \text{ya da} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

yazılır. Bu, matematiksel olarak şu demektir:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_\varepsilon : \qquad |\, s_n - s \,| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - s \right| < \varepsilon.$$

Eğer kısmi toplamlar dizisi (s_n) yakınsak değilse, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine **ıraksak** (divergent) denir.

Tanımın söylediğini vurgulayalım: bir serinin yakınsaklığı terimlerin kendisiyle değil, **kısmi toplamlar dizisinin** davranışıyla ilgilidir; "seri yakınsıyor" cümlesi "(s_n) dizisi yakınsıyor" cümlesinin kısaltmasıdır. Bölümün başındaki $1 - 1 + 1 - \cdots$ bulmacası da böylece çözülür: o serinin kısmi toplamlar dizisi $1, 0, 1, 0, \ldots$ olduğundan yakınsak değildir ve seriye herhangi bir toplam atanamaz.

> **i** Gösterimin iki anlamı
>
> $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ simgesi hem **seriyi** (yani (a_n) ve (s_n) ikilisini) hem de — seri yakınsaksa — serinin **toplamı** olan reel sayıyı gösterir. Hangi anlamın kastedildiği bağlamdan anlaşılır; ama ıraksak bir seride simgenin **hiçbir sayı belirtmediğini** unutmamak gerekir. Bu yüzden "$\sum a_k$ toplamı" demeden önce serinin yakınsak olduğunu bilmek şarttır.

Kısmi toplamlar dizisi yakınsamıyorsa da elimizde bir bilgi olabilir: dizi $+\infty$ ya da $-\infty$'a ıraksıyor olabilir. Bu durumu ayrıca adlandırmak yararlıdır.

> **i** Sonsuza ıraksama
>
> $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ise seri $+\infty$'a **ıraksar** deriz ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ yazarız; benzer biçimde $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ise seri $-\infty$'a ıraksar. Her iki durumda da seri (tanım gereği) **ıraksaktır**; $+\infty$ ve $-\infty$ birer reel sayı olmadığından bu yazımlar bir "toplam" belirtmez, yalnızca ıraksamanın **biçimini** anlatır. Bir serinin ıraksaması için sonsuza gitmesi de gerekmez: kısmi toplamlar dizisi salınarak da yakınsamayabilir.

Tanımı ilk örneklerde çalıştıralım. Her üç örnekte de yapılacak iş aynıdır: kısmi toplamı kapalı biçimde yaz, sonra dizinin limitine bak.

Örnek 34.1 (İlk Iraksak Seriler). Aşağıdaki serilerin ıraksak olduğunu gösteriniz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$

Çözüm.
a) Genel terim $a_k = k$'dır. İlk n doğal sayının toplamı için bilinen formülü kullanalım:

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Formül tümevarımla kanıtlanır: $n = 1$ için doğrudur ve $s_{n+1} = s_n + (n+1)$ olduğundan $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ olur.)
$n \to \infty$ iken $\frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{n^2}{2} \to +\infty$ olduğundan (s_n) artan ve üstten sınırsızdır; Sınırsız Monoton Diziler Sonsuza Iraksar gereği $+\infty$'a ıraksar. Demek ki seri ıraksaktır ve $\sum_{k=1}^{\infty} k = +\infty$'dur.
b) Burada her k için $a_k = 1$'dir, dolayısıyla $s_n = n$'dir. (n) dizisi sınırsız olduğundan yakınsak değildir (bkz. Analiz 1); yani seri ıraksaktır ve $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$'dur.
c) Şimdi $a_k = (-1)^{k+1}$, yani terimler sırayla $+1, -1, +1, -1, \ldots$'dir. Terimleri ikişerli gruplayınca her grup $1 + (-1) = 0$ verir; $2n$ terim tam n grup oluşturduğundan $s_{2n} = 0$'dır. Tek indisli kısmi toplamda ise bir fazla terim vardır:

$$s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n} = 0 - (-1)^{2n+1} = 1.$$

Böylece (s_{2n}) alt dizisi 0'a, (s_{2n-1}) alt dizisi 1'e yakınsar. Yakınsak bir dizinin **bütün** alt dizileri aynı limite yakınsamak zorunda olduğundan (bkz. Analiz 1), iki alt dizinin farklı limitlere gitmesi (s_n)'nin yakınsak olmadığını gösterir. Öyleyse $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ serisi ıraksaktır.
Bu üçüncü örnek, ıraksamanın "sonsuza gitmek" demek olmadığının somut kanıtıdır: burada (s_n) dizisi 0 ile 1 arasında **sınırlı** kalmış, ama yine de yakınsamamıştır.
■

34.2 Serinin Kalanı

Yakınsak bir seride toplamı ilk n terimle yaklaşık olarak hesaplarsak yaptığımız hata, "geriye kalan" terimlerin toplamıdır. Bu nesneye ayrı bir ad vermek hem sayısal hesaplarda hem de sonraki testlerde işimize yarayacak.

Tanım 34.3 (Serinin Kalanı). n bir doğal sayı olmak üzere

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

serisine $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin ***n*'inci kalanı** ya da **kuyruğu** (remainder, tail) denir. Kalan serisi yakınsak olduğunda toplamı da yine R_n ile gösterilir; bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_n + R_n$$

yazılır.

Bu eşitliğin bir tanım değil, ispatlanması gereken bir önerme olduğuna dikkat edelim: sağdaki R_n'nin bir sayı olabilmesi için kuyruk serisinin yakınsak olması gerekir. Aşağıdaki teorem hem bu yakınsaklığı hem de kalanın sıfıra gittiğini gösteriyor.

Teorem 34.1 (Yakınsak Serinin Kalanı Sıfıra Gider). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak olsun. O hâlde her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ kuyruk serisi de yakınsaktır, $R_n = s - s_n$ eşitliği geçerlidir ve*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

olur. Burada s serinin toplamı, s_n ise n'inci kısmi toplamdır.

İspat.
Adım 1: Kuyruk serisi yakınsaktır. *n sabit bir doğal sayı olsun. R_n kuyruk serisinin kısmi toplamlarını yazalım: $p \in \mathbb{N}$ için bu serinin p'inci kısmi toplamı*

$$\sigma_p = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = (a_1 + \cdots + a_{n+p}) - (a_1 + \cdots + a_n) = s_{n+p} - s_n$$

olur; burada n sabit olduğundan s_n sabit bir sayıdır. $(s_{n+p})_{p\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak (s_m) dizisinin bir alt dizisi olduğundan $\lim_{p\to\infty} s_{n+p} = s$'dir (bkz. Analiz 1); limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği

$$\lim_{p\to\infty} \sigma_p = \lim_{p\to\infty} \left(s_{n+p} - s_n \right) = s - s_n.$$

Demek ki kuyruk serisi yakınsaktır ve toplamı $R_n = s - s_n$'dir. Buradan doğrudan $s = s_n + R_n$ elde edilir; Tanım 34.3'ndeki eşitlik böylece doğrulanmış olur.
Adım 2: Limit. *s sabit bir sayı ve $s_n \to s$ olduğundan, yine limit aritmetiği gereği*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = s - s = 0$$

bulunur.
■

Bu sonucun pratik anlamı şudur: yakınsak bir seride toplamı istediğimiz doğrulukla elde etmek için yeterince çok terimi toplamak yeterlidir; ihmal ettiğimiz kuyruk istendiği kadar küçültülebilir.

34.3 Yakınsaklığın Gerek Koşulu

Bir serinin yakınsaklığını her seferinde kısmi toplamı kapalı biçimde yazarak anlamaya çalışmak umutsuz bir iştir; çoğu seride s_n için kapalı bir formül yoktur. Bu yüzden serinin **terimlerine** bakarak karar vermeyi sağlayan ölçütler ararız. Bunların en basiti aşağıdaki gerek koşuldur.

Teorem 34.2 (Yakınsaklığın Gerek Koşulu). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise genel teriminin limiti sıfırdır:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

İspat.
Serinin n'inci kısmi toplamı $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olsun. Yakınsak seri tanımı (Tanım 34.2) gereği (s_n) dizisi bir $s \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsar.
Şimdi kaydırılmış diziye bakalım: $n \geq 2$ için $u_n = s_{n-1}$ olsun. Bu dizi de s'ye yakınsar. Gerçekten $\varepsilon > 0$ verilsin; $(s_n) \to s$ olduğundan öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $m \geq N$ için $| s_m - s | < \varepsilon$'dur. $n \geq N+1$ alırsak $n-1 \geq N$ olur, dolayısıyla $| u_n - s | = | s_{n-1} - s | < \varepsilon$ elde edilir; yani $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$'dir.
Öte yandan Tanım 34.1 gereği $n > 1$ için serinin n'inci terimi ardışık iki kısmi toplamın farkıdır: $a_n = s_n - s_{n-1}$. Yakınsak iki dizinin farkının limiti, limitlerin farkıdır (bkz. Analiz 1); öyleyse

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Bu, genel terimin $n \to \infty$ iken sıfıra gitmesi demektir.
■

> ⚠ **Gerek koşul yeter koşul değildir**
>
> Teorem yalnızca **tek yönlü** bir bilgi verir: yakınsaklık, genel terimin sıfıra gitmesini **gerektirir**. Tersi doğru değildir; $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olması serinin yakınsayacağını **garanti etmez**. Yani
>
> $$\sum a_k \ \text{ yakınsak} \Rightarrow a_k \to 0, \qquad \text{ama} \qquad a_k \to 0 \not\Rightarrow \sum a_k \ \text{ yakınsak}\ .$$
>
> Bunun klasik karşı örneği harmonik seridir; hemen aşağıda inceliyoruz. Bu yüzden "terimler sıfıra gidiyor, öyleyse seri yakınsar" akıl yürütmesi **yanlıştır** ve serilerde en sık yapılan hatadır.

Örnek 34.2 (Harmonik Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

serisine **harmonik seri** (harmonic series) denir. Genel terimi sıfıra gittiği hâlde bu serinin ıraksak olduğunu, hatta $+\infty$'a ıraksadığını gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Önce genel terime bakalım: $a_k = \dfrac{1}{k}$ ve Arşimet özelliğinin bir sonucu olarak (bkz. Analiz 1)

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

olur. Yani Teorem 34.2'nin gerek koşulu sağlanıyor. Buna karşın seri yakınsak değildir.
Adım 1: Kısmi toplamlar dizisi artandır. Her n için $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} > 0$ olduğundan (s_n) kesin artandır.
Adım 2: 2^m indisli kısmi toplamların alttan kestirimi. Şimdi $n = 2^m$ seçelim ($m \in \mathbb{N}$) ve terimleri ikinin kuvvetlerine göre gruplayalım:

$$s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right).$$

Burada $j = 1, 2, \ldots, m-1$ için j'inci grup, indisleri $2^j + 1$ ile 2^{j+1} arasında olan terimlerden oluşur. Bu grupta tam $2^{j+1} - 2^j = 2^j$ terim vardır ve grubun **en küçük** terimi sonuncusu, yani $\dfrac{1}{2^{j+1}}$'dir; çünkü $k \le 2^{j+1}$ iken $\dfrac{1}{k} \ge \dfrac{1}{2^{j+1}}$ olur. Öyleyse her grup için

$$\frac{1}{2^j+1} + \cdots + \frac{1}{2^{j+1}} \ge 2^j \cdot \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Bu kestirimleri toplarsak

$$s_{2^m} \ge 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m-1 \text{ tane}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{m-1}{2} = 1 + \frac{m}{2}$$

elde ederiz.
Adım 3: Sınırsızlık ve sonuç. $M > 0$ herhangi bir sayı olsun. Arşimet özelliği gereği $m > 2M$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır (bkz. Analiz 1) ve bu m için $s_{2^m} \ge 1 + \frac{m}{2} > M$ olur; demek ki (s_n) üstten sınırlı değildir. Artan ve üstten sınırsız bir dizi $+\infty$'a ıraksadığından (bkz. Analiz 1) $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$'dur. Öyleyse harmonik seri ıraksaktır ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ yazarız.
■

Harmonik serinin ıraksaması ilk bakışta şaşırtıcıdır, çünkü ıraksama **çok yavaştır**: yukarıda bulduğumuz $s_{2^m} \ge 1 + \frac{m}{2}$ kestirimi, kısmi toplamın 100'ü aşmasını güvenceye almak için $m = 199$, yani $n = 2^{199}$ terim toplamanın yettiğini söyler. Gerçek eşik bundan küçüktür — s_n ilk kez n kabaca $1{,}5 \cdot 10^{43}$ olduğunda 100'ü aşar — ama o da astronomik bir sayıdır. Bu, serilerde "sayısal olarak deneyerek" karar vermenin ne kadar aldatıcı olabileceğini de gösterir.
Şimdi Teorem 34.2'ni ters çevirerek kullanışlı bir ıraksaklık ölçütü elde edelim. Bir gerektirmenin karşıt tersi (kontrapozitifi) her zaman ona denk olduğundan ispat tek satırlıktır.

Sonuç 34.1 (Iraksaklık Testi). *Eğer $\lim_{k\to\infty} a_k$ limiti yoksa ya da varsa bile sıfırdan farklıysa, yani*

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$$

*ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır. Bu ölçüte **ıraksaklık testi** (divergence test) ya da **n'inci terim testi** denir.*

İspat.
Olmayana ergi yapalım: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. O hâlde Teorem 34.2 gereği $\lim_{k\to\infty} a_k$ limiti vardır ve sıfıra eşittir. Bu ise hipotezle, yani limitin ya var olmadığı ya da sıfırdan farklı olduğu varsayımıyla çelişir. Demek ki seri yakınsak olamaz; ıraksaktır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Testin yönü tek taraflıdır

$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ koşulu **yalnızca ıraksaklığı** kanıtlamak için kullanılır. $a_k \to 0$ bulunduğunda test **hiçbir şey söylemez**: seri yakınsak da olabilir ($\sum \frac{1}{k(k+1)}$ gibi), ıraksak da ($\sum \frac{1}{k}$ gibi). Böyle durumlarda sonraki bölümlerin daha ince testlerine başvurmak gerekir.

Örnek 34.3 (Iraksaklık Testinin Uygulanışı). Aşağıdaki serilerin ıraksak olduğunu ıraksaklık testiyle gösteriniz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1$ ve $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

Çözüm.
a) Birinci seride $a_k = 1$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} a_k = 1 \neq 0$'dır; Sonuç 34.1 gereği seri ıraksaktır. (Bunu Örnek 34.1'de kısmi toplamları hesaplayarak da görmüştük; ıraksaklık testi aynı sonuca tek satırda ulaştırıyor.) İkinci seride pay ve paydayı k'ya bölersek $a_k = \frac{1}{1+1/k} \to 1 \neq 0$ olur (bkz. Analiz 1); seri ıraksaktır.
b) $a_n = (-1)^n$ dizisinde $(a_{2n}) \to 1$ ve $(a_{2n-1}) \to -1$ olduğundan, iki alt dizi farklı limitlere gittiği için $\lim_{n\to\infty} a_n$ **yoktur** (bkz. Analiz 1). Limit sıfıra eşit olmadığından (yok olduğundan) Sonuç 34.1 uygulanır ve seri ıraksar. İkinci seride her n için $1^n = 1$'dir; yani bu seri aslında (a) şıkkındaki $\sum 1$ serisinin kendisidir ve ıraksaktır.
c) Genel terim $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$'dır ve bu dizinin limiti e sayısıdır (bkz. Analiz 1). $e \approx 2{,}718 \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.
■

34.4 Seriler için Cauchy Ölçütü

Yakınsaklığı sorgularken çoğu zaman limitin **değerini** bilmeyiz; bilseydik zaten sorun kalmazdı. Dizilerde bu güçlüğü Cauchy ölçütüyle aşmıştık: bir reel dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, terimlerinin ileride birbirine keyfî ölçüde yaklaşmasıdır (bkz. Analiz 1). Aynı ölçütü kısmi toplamlar dizisine uygulayınca serilerin kendi diliyle yazılmış kullanışlı bir sonuç elde ederiz.

Teorem 34.3 (Seriler için Cauchy Ölçütü). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki, $m > n \geq N_\varepsilon$ olan her m, n doğal sayı ikilisi için*

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

olur.

İspat.
Her şeyden önce $m > n$ için

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k \qquad (*)$$

eşitliğini not edelim; ispatın tamamı bu gözleme dayanır.
($\Rightarrow$) Yakınsaksa koşul sağlanır. *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun. Tanım gereği kısmi toplamlar dizisi (s_n) yakınsaktır; yakınsak her dizi Cauchy dizisidir (bkz. Analiz 1), yani (s_n) bir Cauchy dizisidir (bkz. Analiz 1). Öyleyse verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki $m, n \geq N_\varepsilon$ olduğunda $\left| s_m - s_n \right| < \varepsilon$ olur. Özel olarak $m > n \geq N_\varepsilon$ alırsak, $(*)$ gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |\ s_m - s_n\ | < \varepsilon$$

elde ederiz. İstenen koşul sağlanmıştır.
(⇐) Koşul sağlanıyorsa seri yakınsar. *Teoremdeki koşulun sağlandığını varsayıp (s_n) dizisinin Cauchy olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin, koşuldaki N_ε sayısını alalım ve $m, n \geq N_\varepsilon$ olan iki doğal sayı seçelim.*

- *$m = n$ ise $|\ s_m - s_n\ | = 0 < \varepsilon$'dur.*
- *$m > n$ ise $(*)$ ve varsayım gereği $|\ s_m - s_n\ | = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$'dur.*
- *$m < n$ ise iki indisin rolünü değiştirmek yeterlidir: $|\ s_m - s_n\ | = |\ s_n - s_m\ | = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.*

Her üç durumda da $|\ s_m - s_n\ | < \varepsilon$ olduğundan (s_n) bir Cauchy dizisidir; $\mathbb{R}$ tam olduğundan (bkz. Analiz 1) (s_n) yakınsaktır. Tanım 34.2 gereği bu, serinin yakınsak olması demektir.
■

Ölçütün gücü şuradadır: serinin toplamını bilmeye gerek yoktur, yalnızca **ardışık terim bloklarının** toplamının küçüklüğü sınanır. Aynı ölçütü kuyruklar diliyle yazmak da yararlıdır.

Sonuç 34.2 (Cauchy Ölçütünün Kuyruk Biçimi). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak olsun. O hâlde her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $p \geq N$ için $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ kuyruk serisi yakınsar ve*

$$\left|\sum_{k=p}^{\infty} a_k\right| \leq \varepsilon$$

olur. Tersine, bir $p_0 \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=p_0}^{\infty} a_k$ kuyruk serisi yakınsaksa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de yakınsaktır.

İspat.
Birinci kısım. *Seri yakınsak olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Teorem 34.3 gereği öyle bir N_0 vardır ki $m > n \geq N_0$ için $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$'dur. $N = N_0 + 1$ alalım ve $p \geq N$ olsun. $n = p - 1 \geq N_0$ olduğundan, her $m \geq p$ için*

$$\left|\sum_{k=p}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$$

Öte yandan Teorem 34.1 gereği $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ kuyruk serisi yakınsaktır ve toplamı kısmi toplamlarının limitidir. Limit sıralamayı koruduğundan yukarıdaki kesin eşitsizlik limitte $\leq$ hâline gelir:

$$\left|\sum_{k=p}^{\infty} a_k\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\sum_{k=p}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon.$$

İkinci kısım. *$\sum_{k=p_0}^{\infty} a_k$ yakınsak ve toplamı T olsun. $n \geq p_0$ için $s_n = C + \sum_{k=p_0}^{n} a_k$ yazılır; burada $C = \sum_{k=1}^{p_0-1} a_k$ sabittir ve sağdaki toplam kuyruk serisinin kısmi toplamı olarak T'ye yakınsar. Öyleyse $\lim_{n\to\infty} s_n = C + T$ olur; yani $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.*
■

34.5 Serilerde Cebirsel İşlemler

Yakınsak dizilerin toplamı ve sabitle çarpımı yine yakınsaktır; kısmi toplamlar dizisi üzerinden bu, doğrudan serilere taşınır.

Teorem 34.4 (Serilerde Cebirsel İşlemler). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak seriler, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O hâlde $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ serisi de yakınsaktır ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

olur.

> ***İspat.***
> *$\sum a_k$ serisinin toplamı s, $\sum b_k$ serisinin toplamı t olsun; kısmi toplamlar dizileri $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ için varsayım gereği $s_n \to s$ ve $t_n \to t$'dir.*
> *Şimdi $\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$ serisinin kısmi toplamlarına bakalım. Sonlu toplamlarda birleşme, değişme ve dağılma özellikleri geçerli olduğundan*
>
> $$u_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha s_n + \beta t_n$$
>
> *yazabiliriz. (Bu adım yalnızca **sonlu** toplamlar için serbestçe yapılabilir; sonsuz toplamlarda terimleri yeniden düzenlemenin ne kadar tehlikeli olduğunu ileride göreceğiz.) Yakınsak dizilerde limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği*
>
> $$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha \lim_{n\to\infty} s_n + \beta \lim_{n\to\infty} t_n = \alpha s + \beta t$$
>
> *olur. Demek ki (u_n) yakınsaktır; yani $\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$ serisi yakınsaktır ve toplamı $\alpha s + \beta t$'dir.*
> ■

$\alpha = \beta = 1$ almak yakınsak iki serinin **toplamının**, $\beta = 0$ almak ise yakınsak bir serinin **sabitle çarpımının** yakınsak olduğunu söyler. Peki serilerden biri ıraksaksa ne olur?

Önerme 34.1 (Yakınsak ile Iraksağın Toplamı).

1. *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ serisi ıraksaktır.*
2. *$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksak ve $\alpha \neq 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha b_k$ serisi de ıraksaktır.*

> ***İspat.***
> ***(1)** Olmayana ergi yöntemini kullanalım: $\sum(a_k + b_k)$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. $\sum a_k$ da varsayım gereği yakınsaktır; Teorem 34.4'i bu iki seriye $\alpha = 1$, $\beta = -1$ katsayılarıyla uygularsak $\sum_{k=1}^{\infty}\big((a_k + b_k) - a_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisinin yakınsak olduğu çıkar. Bu, $\sum b_k$'nin ıraksaklığıyla çelişir.*
> ***(2)** Yine olmayana ergi. $\sum \alpha b_k$ yakınsak olsun; $\alpha \neq 0$ olduğundan $\frac{1}{\alpha}$ tanımlıdır. Şimdi Teorem 34.4'i iki yakınsak seriye uygulayalım: birincisi varsayım gereği yakınsak olan $\sum \alpha b_k$, ikincisi ise bütün terimleri sıfır olan ve kısmi toplamları sabit sıfır olduğundan yakınsak olan $\sum 0$ serisi. Katsayıları $\frac{1}{\alpha}$ ve 0 seçersek $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisinin yakınsak olduğu çıkar. Bu da varsayımla çelişir.*
> ■

İki serinin de ıraksak olduğu durumda ise **hiçbir genel şey söylenemez**; toplam seri yakınsak da olabilir, ıraksak da. Bütün durumları tek bir örnekte toplayalım.

Örnek 34.4 (Toplam Serilerin Davranışı). Aşağıdaki durumları inceleyiniz.

a) *(Biri yakınsak, biri ıraksak.)* $a_k = \dfrac{1}{2^k}$ ve $b_k = 1$ olsun.

b) *(İkisi de ıraksak, toplam yakınsak.)* $a_k = k$ ve $b_k = -k$ olsun.

c) *(İkisi de ıraksak, toplam ıraksak.)* $a_k = b_k = \dfrac{1}{k}$ olsun.

> **Çözüm.**
> **a)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ serisi yakınsaktır (birazdan Teorem 34.5 ile göreceğimiz gibi toplamı 1'dir), $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ serisi ise Örnek 34.1 gereği ıraksaktır. Toplam seri $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} + 1\right)$ biçimindedir ve genel terimi $\frac{1}{2^k} + 1 \to 1 \neq 0$ olduğundan Sonuç 34.1 gereği ıraksaktır. Aynı sonuca Önerme 34.1 (1) ile de doğrudan varılır; bu durum **her zaman** böyledir.

 CC BY-NC-SA 4.0

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k$ serisi ıraksaktır (Örnek 34.1); $\sum_{k=1}^{\infty}(-k)$ serisi de ıraksaktır, çünkü genel terimi $-k \to -\infty$ olduğundan sıfıra gitmez (Sonuç 34.1). Buna karşın her k için $a_k + b_k = k + (-k) = 0$ olduğundan toplam seri $\sum_{k=1}^{\infty} 0$ serisidir; kısmi toplamları $s_n = 0$'dır, yani seri yakınsaktır ve toplamı 0'dır.
c) Harmonik seri $\sum \frac{1}{k}$ ıraksaktır (Örnek 34.2) ve toplam seri $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$'dır. Önerme 34.1 (2) gereği ıraksak bir serinin sıfırdan farklı sabitle çarpımı da ıraksaktır ($\alpha = 2$); öyleyse toplam seri ıraksaktır.
Sonuç. (b) ve (c) şıkları birlikte şunu gösterir: iki ıraksak serinin toplamı hakkında **genel bir kural yoktur**; her durum ayrıca incelenmelidir.
■

34.6 Geometrik Seriler

Toplamı kapalı biçimde hesaplayabildiğimiz seriler azdır; bunların en önemlisi, terimleri sabit bir oranla çarpılarak elde edilen geometrik seridir. Sonraki bölümlerdeki karşılaştırma, kök ve oran testlerinde "ölçü serisi" olarak kullanılacağı için bu aileyi iyi tanımak gerekir.

Tanım 34.4 (Geometrik Seri). $a, r \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

biçiminde tanımlanan seriye **geometrik seri** (geometric series) denir. Burada a sayısına serinin **ilk terimi**, r sayısına da **ortak oranı** (ya da kısaca **oranı**) denir.

Geometrik serinin ayrıcalığı, kısmi toplamlarının kapalı bir formüle sahip olmasıdır. Bu formülü türetelim. $r \neq 1$ olsun ve

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

yazalım (dikkat: indis 0'dan başladığından bu toplamda $n+1$ terim vardır). Her iki yanı r ile çarparsak $rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1}$ olur; iki eşitliği taraf tarafa çıkarınca ortadaki bütün terimler sadeleşir:

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1}, \qquad \text{yani} \qquad (1-r)s_n = a\left(1 - r^{n+1}\right).$$

$r \neq 1$ olduğundan $1 - r \neq 0$'dır ve iki yanı $1-r$'ye bölebiliriz:

$$s_n = \frac{a\left(1 - r^{n+1}\right)}{1 - r}, \qquad r \neq 1.$$

$r = 1$ durumunda ise bütün terimler a'ya eşittir ve $s_n = a(n+1)$ olur. Artık yakınsaklığı tartışabiliriz.

Teorem 34.5 (Geometrik Serinin Yakınsaklığı). *$a, r \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olsun.*

1. *$|r| < 1$ ise $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ geometrik serisi yakınsaktır ve toplamı*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

olur.

2. *$|r| \geq 1$ ise geometrik seri ıraksaktır.*

İspat.
(1) $|r| < 1$ durumu. *$|r| < 1$ olduğundan $r \neq 1$'dir ve yukarıda türettiğimiz formül geçerlidir:*

$$s_n = \frac{a\left(1 - r^{n+1}\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\, r^{n+1}.$$

Geometrik dizinin davranışı (bkz. Analiz 1) gereği $|r| < 1$ iken $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$'dır; (r^{n+1}) dizisi (r^n) dizisinin bir kaydırılmışı olduğundan onun da limiti 0'dır. Öyleyse limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\cdot 0 = \frac{a}{1-r}.$$

Kısmi toplamlar dizisi yakınsak olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı $\frac{a}{1-r}$*'dir.*

(2) $|r| \geq 1$ ***durumu.*** *Üç alt durumu ayrı ayrı ele alalım.*

Durum $r = 1$. *Her terim* a*'ya eşittir ve* $s_n = a(n+1)$ *olur.* $a \neq 0$ *olduğundan* $|s_n| = |a|(n+1) \to +\infty$*'dur;* (s_n) *sınırsız olduğundan yakınsak değildir (bkz. Analiz 1).* ($a > 0$ *ise* $s_n \to +\infty$*,* $a < 0$ *ise* $s_n \to -\infty$*'dur.)*

Durum $r = -1$. *Terimler sırayla* $a, -a, a, -a, \ldots$*'dır.* n *tek sayı ise terimler ikişerli tam gruplanır ve her grup* $a - a = 0$ *verdiğinden* $s_n = 0$ *olur;* n *çift sayı ise bir terim artar ve* $s_n = a$ *bulunur. Yani* (s_{2n}) *alt dizisi* a*'ya,* (s_{2n+1}) *alt dizisi* 0*'a yakınsar.* $a \neq 0$ *olduğundan bu iki limit farklıdır; yakınsak bir dizinin bütün alt dizileri aynı limite gitmek zorunda olduğundan (bkz. Analiz 1)* (s_n) *yakınsak değildir.*

Durum $|r| > 1$. *Bu kez genel terime bakalım. Geometrik Dizinin Limiti gereği* $|r| > 1$ *iken* $|r|^n \to +\infty$*'dur, dolayısıyla* $|ar^k| = |a|\,|r|^k \to +\infty$ *olur. Genel terim sıfıra gitmediğinden Sonuç 34.1 gereği seri ıraksaktır.*

Üç durumda da seri ıraksaktır; ispat tamamlanmıştır.

■

Üç durumu tek hamlede görmek

$|r| \geq 1$ olan bütün durumlar tek bir gözlemle de halledilebilir: $|r| \geq 1$ iken her k için $|ar^k| = |a|\,|r|^k \geq |a| > 0$ olur, yani genel terim $|a|$'nın altına hiç inmez ve sıfıra yakınsayamaz; Sonuç 34.1 ıraksaklığı verir. Yine de yukarıdaki ayrıntılı inceleme öğreticidir: $r = 1$'de kısmi toplamlar sonsuza gider, $r = -1$'de sınırlı kalıp salınır, $|r| > 1$'de ise büyüklükleri patlar.

Başlangıç indisi ve formül

Toplam formülündeki a, serinin **ilk yazılan terimidir**; indisin 0'dan başlaması şart değildir. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty} ar^k = ar + ar^2 + \cdots$ serisi ilk terimi ar, oranı r olan bir geometrik seridir ve $|r| < 1$ için toplamı $\frac{ar}{1-r}$'dir. Kısacası: **toplam = (ilk terim) / (1 − oran)**. Formülü ezberlemek yerine hangi terimin "ilk" olduğunu her seferinde denetlemek en sık yapılan hataları önler.

Örnek 34.5 (Geometrik Serilerle Hesaplar). Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz; yakınsak olanların toplamını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ ve $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k}$ ve $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}}$ ve $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^k$

d) $0{,}999\ldots$ devirli ondalık sayısını bir geometrik seri olarak yazıp toplamını hesaplayınız.

e) $0{,}121212\ldots$ sayısını rasyonel sayı olarak yazınız.

Çözüm.

a) Birinci seride ilk terim $a = 1$ (yani $k = 0$ terimi), oran $r = \frac{1}{2}$'dir. $|r| < 1$ olduğundan Teorem 34.5 gereği seri yakınsaktır ve toplamı $\frac{1}{1-1/2} = 2$'dir. İkinci seri, birincisinden yalnızca $k = 0$ terimi olan 1 sayısı eksiktir; öyleyse $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 - 1 = 1$'dir. Aynı sonuca "ilk terim bölü 1 − oran" kuralıyla da varılır: $\frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

b) Birinci seride ilk terim $\frac{3}{4}$, oran $\frac{1}{4}$'tür; ikincisinde ilk terim 1, oran $r = -\frac{2}{3}$'tür ve $|r| = \frac{2}{3} < 1$'dir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

c) Birinci seride genel terimi $\frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ biçiminde düzenleyelim. Teorem 34.4 gereği sabiti dışarı alabiliriz; $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ serisinin ilk terimi ve oranı $\frac{2}{3}$ olduğundan toplamı $\frac{2/3}{1-2/3} = 2$'dir. Öyleyse $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{2}{3}$'tür.
İkinci seride $r = \frac{5}{4}$ ve $\mid r \mid > 1$'dir; Teorem 34.5 (2) gereği seri ıraksaktır.
d) 0,999... yazımı, tanımı gereği ondalık basamakların oluşturduğu serinin toplamıdır:

$$0{,}999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Burada ilk terim $\frac{9}{10}$, oran $r = \frac{1}{10}$'dur ve $\mid r \mid < 1$ olduğundan seri yakınsaktır. Demek ki $0{,}999... = 1$'dir; bu bir "yaklaşıklık" değil, tam bir eşitliktir. Kısmi toplamlar 0,9; 0,99; 0,999; ... hiçbir zaman 1'e **eşit** olmaz, ama limitleri 1'dir ve serinin toplamı tanım gereği bu limittir.
e) İki basamaklı devir için terimleri ikişer basamak alalım:

$$0{,}121212... = \frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + \frac{12}{100^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{100^k}.$$

İlk terim $\frac{12}{100}$, oran $\frac{1}{100}$'dür:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{100^k} = \frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{\frac{12}{100}}{99}}{100} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

Devir hemen virgülden sonra başlamıyorsa devretmeyen kısım ayrılır. Örneğin 0,1666... sayısı için hesap şöyle yürür:

$$0{,}1666... = \frac{1}{10} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{10^k} = \frac{1}{10} + \frac{6/100}{9/10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$$

Bu hesap, **her devirli ondalık açılımın bir rasyonel sayı** olduğunu gösteren genel yöntemin ta kendisidir: devreden kısım her zaman bir geometrik seri oluşturur ve oranı 10^{-p} (p devir uzunluğu) olduğundan mutlak değerce 1'den küçüktür.
■

34.7 Teleskopik Seriler

Toplamı doğrudan hesaplanabilen ikinci aile, kısmi toplamlarında terimlerin karşılıklı sadeleştiği serilerdir. "Teleskopik" adı, açılıp kapanan bir teleskobun boruları gibi ara terimlerin birbirinin içine girip yok olmasından gelir.

Tanım 34.5 (Teleskopik Seri). $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bir reel sayı dizisi olsun. Genel terimi bu dizinin ardışık iki teriminin farkı biçiminde yazılabilen, yani

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) \qquad \text{ya da} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)$$

biçimindeki serilere **teleskopik seri** (telescoping series) denir. Daha genel olarak, sabit bir $p \in \mathbb{N}$ için genel terimi $a_k - a_{k+p}$ biçiminde olan seriler de teleskopiktir.

Teleskopik serilerin kısmi toplamı her zaman **sonlu sayıda** terimle ifade edilir. Örneğin $\sum(a_k - a_{k+1})$ serisinde ortadaki $a_2, ..., a_n$ terimlerinin her biri bir kez artı, bir kez eksi işaretiyle görünüp sadeleştiğinden

$$s_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; böylece serinin yakınsaklığı (a_{n+1}) dizisinin yakınsaklığına indirgenir. Aynı fikri iki örnekte çalıştıralım.

Örnek 34.6 (Logaritmik Teleskopik Seri). $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\!\left(1+\frac{1}{k}\right)$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Logaritmanın bölme kuralı gereği genel terim teleskopik biçime girer:

$$\ln\!\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\!\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

Öyleyse n'inci kısmi toplamda ara terimlerin tümü sadeleşir ve geriye yalnızca uçlar kalır:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\,\big) \\ &= \big(\ln 2 - \ln 1\,\big) + \big(\ln 3 - \ln 2\,\big) + \cdots + \big(\ln(n+1) - \ln n\,\big) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Şimdi $(s_n) = \big(\ln(n+1)\,\big)$ dizisinin sınırsız olduğunu görelim. $M > 0$ verilsin; $n+1 > e^M$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ seçebiliriz (bkz. Analiz 1) ve logaritma kesin artan olduğundan bu n için $\ln(n+1) > M$ olur. Demek ki (s_n) artan ve üstten sınırsızdır; Sınırsız Monoton Diziler Sonsuza Iraksar gereği $s_n \to +\infty$'dur. Seri ıraksaktır ve $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\!\big(1+\frac{1}{k}\big) = +\infty$ yazarız.
Bu örnek de Teorem 34.2'nin karşıtının yanlışlığına bir tanıktır: genel terim $\ln\!\big(1+\frac{1}{k}\big) \to \ln 1 = 0$ olduğu hâlde seri ıraksamıştır.
■

Örnek 34.7 (Basit Kesirlerle Teleskoplama). $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve toplamını bulunuz.

Çözüm.
Serinin kısmi toplamı $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$'dir. Genel terimi basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(doğrulaması doğrudandır: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$). Bu ayrışımla n'inci kısmi toplam

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

olur. Şimdi limite geçelim: $\frac{1}{n+1} \to 0$ olduğundan (bkz. Analiz 1)

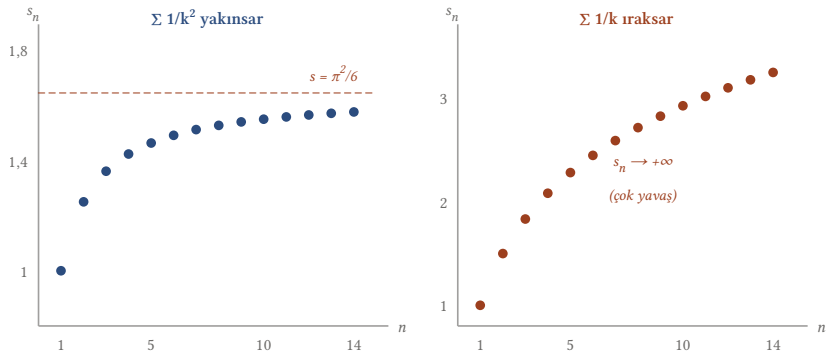
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Demek ki seri yakınsaktır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

olur.
Kısmi toplamların davranışına dikkat edelim: (s_n) artandır ve her n için $s_n < 1$'dir; yani dizi 1'e **alttan** yaklaşır ve toplamına hiçbir zaman ulaşmaz. Kalan da doğrudan okunur: $R_n = 1 - s_n = \frac{1}{n+1} \to 0$; bu, Teorem 34.1'i somut bir örnekte doğrular.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 34.1: Bir serinin yakınsaklığı, kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklığıdır. Solda $\sum 1/k^2$: kısmi toplamlar artan ve üstten sınırlı olduğundan $\pi^2/6$'ya yakınsar. Sağda harmonik seri: genel terim sıfıra gitse de kısmi toplamlar sınırsızdır. Genel terimin sıfıra gitmesi *gerek* koşuldur, *yeter* değil.

■

Bu iki örnekteki hesap, genel bir teoremin özel hâlidir. Teleskoplamayı bir kez ve son kez yapıp sonucu kayda geçirelim.

Teorem 34.6 (Teleskopik Serilerin Toplamı). *$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsak bir dizi ve $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ olsun. O hâlde:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ *serisi yakınsaktır ve toplamı $a_1 - a$'dır:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+2})$ *serisi yakınsaktır ve toplamı $a_1 + a_2 - 2a$'dır:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+2}) = a_1 + a_2 - 2a.$$

İspat.
Önce her iki kısımda kullanacağımız gözlemi kaydedelim: $(a_k) \to a$ ise kaydırılmış diziler (a_{n+1}) ve (a_{n+2}) de a'ya yakınsar. Gerçekten $\varepsilon > 0$ için $k \geq N$ olduğunda $|\, a_k - a \,| < \varepsilon$ olacak biçimde bir N vardır; $n \geq N$ alındığında $n+1 \geq N$ ve $n+2 \geq N$ olduğundan $|\, a_{n+1} - a \,| < \varepsilon$ ve $|\, a_{n+2} - a \,| < \varepsilon$ olur.
(1) *Kısmi toplamı iki parçaya ayırıp indis kaydıralım:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{j=2}^{n+1} a_j = a_1 - a_{n+1};$$

çünkü iki toplamda da ortak olan $a_2, \ldots, a_n$ terimleri çıkarmada yok olur. Limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) ve yukarıdaki gözlem gereği $\lim_{n\to\infty} s_n = a_1 - a$ olur; kısmi toplamlar dizisi yakınsak olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı $a_1 - a$'dır.
(2) *Aynı yöntemi iki adım kaydırmayla uygulayalım:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{j=3}^{n+2} a_j = a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}.$$

Burada birinci toplamda a_1, a_2, ikincisinde a_{n+1}, a_{n+2} fazladan bulunur; ortak olan $a_3, \ldots, a_n$ terimleri sadeleşir. ($n = 1$ için de formül doğrudur: $s_1 = a_1 - a_3$ ve $a_1 + a_2 - a_2 - a_3 = a_1 - a_3$.) $(a_{n+1}) \to a$ ve $(a_{n+2}) \to a$ olduğundan limit $a_1 + a_2 - 2a$ çıkar.
■

Teoremi kullanmanın püf noktası, genel terimi uygun bir (a_k) dizisinin farkı biçiminde tanımaktır.

Örnek 34.8 (İki Kesirli Teleskopik Toplam). Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Çözüm.
a) $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{A}{k} + \dfrac{B}{k+2}$ yazıp payda eşitlersek $1 = A(k+2) + Bk$ olur; $k = 0$ için $A = \frac{1}{2}$, $k = -2$ için $B = -\frac{1}{2}$ bulunur. Öyleyse

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right).$$

Şimdi $a_k = \dfrac{1}{k}$ diyelim. Bu dizi yakınsaktır ve $a = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$'dır (bkz. Analiz 1). Teorem 34.6 (2) gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = a_1 + a_2 - 2a = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

Sabiti dışarı almak için Teorem 34.4'i kullanırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

elde ederiz. Kısmi toplamı doğrudan yazarak da doğrulanabilir: $s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{3}{4}$.
b) Aynı biçimde $1 = A(2k+1) + B(2k-1)$ eşitliğinden $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ bulunur:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Bu kez $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$ diyelim; $a_{k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$ olduğundan parantez içindeki ifade tam olarak $a_k - a_{k+1}$'dir. (a_k) dizisi 0'a yakınsar, çünkü $0 < \frac{1}{2k-1} \le \frac{1}{k}$ ve sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) uygulanır. Teorem 34.6 (1) gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = a_1 - a = 1 - 0 = 1,$$

ve sabiti geri koyarsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

bulunur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

34.8 Sonlu Sayıda Terimin Değiştirilmesi

Bölümün başında serilerin başlangıç indisinin yakınsaklığı etkilemediğini söylemiştik. Şimdi bunu ve daha genelini — sonlu sayıda terimi keyfî biçimde değiştirmenin yakınsaklığı bozmadığını — kanıtlayalım. Bu, seri testlerinin neden hep "yeterince büyük k için" biçiminde hipotez koyduğunu açıklayan temel gerçektir.

Önerme 34.2 (Sonlu Sayıda Terimin Değiştirilmesi). *(a_k) ve (b_k) reel sayı dizileri olsun ve öyle bir $m \in \mathbb{N}$ bulunsun ki her $k > m$ için*

$$a_k = b_k$$

olsun. O hâlde:

1. *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır ancak ve ancak $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yakınsaktır.*
2. *İkisi de yakınsaksa toplamları arasında*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$$

   *bağıntısı vardır. Yani yakınsaklık korunur, ama toplam genel olarak **değişir**.*
3. *Özel olarak, her $m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır ancak ve ancak $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.*

İspat.
(s_n) ve (t_n) sırasıyla $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri olsun.
(1) ve (2). *$n \geq m$ olsun. Her iki kısmi toplamı ilk m terim ile geri kalanlar diye ikiye ayıralım:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k, \qquad t_n = \sum_{k=1}^{m} b_k + \sum_{k=m+1}^{n} b_k.$$

Varsayım gereği $k > m$ için $a_k = b_k$ olduğundan sağdaki ikinci toplamlar birbirine eşittir; öyleyse $n \geq m$ için

$$t_n - s_n = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) =: C$$

*olur ve C, n'den bağımsız **sabit** bir sayıdır. Şimdi (1) hemen çıkar: (s_n) yakınsaksa, sabit eklemek yakınsaklığı bozmadığından (bkz. Analiz 1) $t_n = s_n + C$ de yakınsaktır; simetrik olarak (t_n) yakınsaksa $s_n = t_n - C$ yakınsaktır. (Bir dizinin yakınsaklığı sonlu sayıda teriminden bağımsız olduğundan, eşitliğin yalnızca $n \geq m$ için geçerli olması yeterlidir.) İkisi de yakınsak olduğunda limit alırsak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$$

elde edilir; bu da (2)'dir.
(3). *$n > m$ için $s_n = D + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ yazılır; burada $D = \sum_{k=1}^{m} a_k$ sabittir ve sağdaki toplam $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamıdır. Sabit farkla ayrılan iki dizi ancak ve ancak birlikte yakınsadığından iddia elde edilir (bu gözlemi Sonuç 34.2'un ikinci kısmında da kullanmıştık).*
■

⚠ Ne korunur, ne korunmaz

Sonlu sayıda terimin değiştirilmesi (silinmesi, eklenmesi, başka sayılarla değiştirilmesi) serinin **yakınsak olup olmadığını** değiştirmez, ama **toplamını** genel olarak değiştirir. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$'dir; ilk terimi $\frac{1}{2}$ yerine 5 yaparsak seri hâlâ yakınsaktır, ama toplamı $1 - \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$ olur. Buna karşılık harmonik seriden ilk bir milyon terimi atsak bile kalan seri hâlâ ıraksaktır. Bu yüzden "yakınsaklık serinin kuyruğunun bir özelliğidir" denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

34.9 Alıştırmalar

Alıştırma 34.1 (Serilerin Temel Kavramları Üzerine).

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterip toplamını bulunuz.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}$ serisinin toplamını hesaplayınız.

c) Aşağıdaki serilerden hangilerinin ıraksak olduğu **ıraksaklık testiyle** söylenebilir? $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{1}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

d) Harmonik serinin ıraksaklığını, gruplama yapmadan, doğrudan **Cauchy ölçütünü** kullanarak yeniden kanıtlayınız.

e) $0{,}\overline{123} = 0{,}123123123\ldots$ sayısını rasyonel sayı olarak yazınız.

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{k}\right)$ serisinin ıraksak olduğunu, genel terim testine başvurmadan gösteriniz.

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterip toplamını bulunuz.

Çözüm.

a) $b_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ diyelim. O hâlde

$$b_k - b_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)},$$

yani $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}(b_k - b_{k+1})$'dir. (b_k) dizisi 0'a yakınsar; gerçekten $0 < b_k \le \frac{1}{k}$ ve sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) uygulanır. Teorem 34.6 (1) gereği $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_1 = \frac{1}{2}$'dir; Teorem 34.4 ile sabiti dışarı alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

b) Genel terimi $\dfrac{2^k+3^k}{6^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k$ biçiminde ayıralım. Her iki seri de $|\,r\,| < 1$ oranlı geometrik seridir (Teorem 34.5):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Teorem 34.4 ($\alpha = \beta = 1$) gereği toplam seri yakınsaktır ve toplamı $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$'dir.

c) Birinci seride $\dfrac{k}{2k+1} = \dfrac{1}{2+1/k} \to \dfrac{1}{2} \neq 0$ olduğundan Sonuç 34.1 seriyi **ıraksak** ilan eder. İkinci seride $\frac{1}{k} \to 0$ ve kosinüs sürekli olduğundan $\cos\frac{1}{k} \to 1 \neq 0$'dır; bu seri de ıraksaklık testiyle **ıraksaktır**. Üçüncü seride $\frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$'dır; genel terim sıfıra gittiğinden ıraksaklık testi **hiçbir sonuç vermez**. (Bu serinin gerçekte ıraksak olduğu sonraki bölümde karşılaştırma testiyle görülecektir; ama bu bilgi ıraksaklık testinden **çıkmaz**.)

d) Teorem 34.3'ne göre seri yakınsak olsaydı, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N_ε bulunurdu ki $m > n \ge N_\varepsilon$ için $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| < \varepsilon$ olurdu. Bunun **yanlış** olduğunu gösterelim: $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ alalım ve herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ verilsin. $n = N$, $m = 2N$ seçersek $m > n \ge N$ olur; bu blokta N tane terim vardır ve her biri en küçükleri olan $\frac{1}{2N}$'den küçük değildir:

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \ge N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki hiçbir N için Cauchy koşulu $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ile sağlanamaz; harmonik seri ıraksaktır.
e) Devir uzunluğu üçtür; terimleri üçer basamak alalım:

$$0{,}123123123\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{123}{1000^k} = \frac{\frac{123}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}.$$

Burada ilk terim $\frac{123}{1000}$, oran $\frac{1}{1000}$'dir ve $\mid r \mid < 1$ olduğundan Teorem 34.5 uygulanır; son adımda pay ve payda 3 ile sadeleştirilmiştir.
f) $a_k = \dfrac{1}{2^k}$ ve $b_k = \dfrac{1}{k}$ diyelim. $\sum a_k$ serisi, oranı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik seri olduğundan yakınsaktır (Teorem 34.5); $\sum b_k$ ise harmonik seridir ve ıraksaktır (Örnek 34.2). Önerme 34.1 (1) gereği toplam seri ıraksaktır.
Genel terim testinin burada işe yaramayacağını da not edelim: $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{k} \to 0$ olduğundan Sonuç 34.1 hiçbir şey söylemez.
g) Logaritmanın çarpma ve bölme kurallarıyla genel terimi düzenleyelim:

$$\ln \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \ln \frac{k}{k+1} + \ln \frac{k+2}{k+1} = \ln \frac{k}{k+1} - \ln \frac{k+1}{k+2}.$$

$a_k = \ln \dfrac{k}{k+1}$ diyelim; o hâlde $a_{k+1} = \ln \dfrac{k+1}{k+2}$ olur ve genel terim tam olarak $a_k - a_{k+1}$'dir. $\dfrac{k}{k+1} \to 1$ ve logaritma sürekli olduğundan $a = \lim_{k\to\infty} a_k = \ln 1 = 0$'dır. Teorem 34.6 (1) gereği seri yakınsaktır ve toplamı

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = a_1 - a = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

olur. Doğrulama olarak kısmi toplam da yazılabilir: $s_n = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{n+1}{n+2} \to -\ln 2$.
■

Bu bölümde serilerin dilini kurduk: kısmi toplamlar dizisi, yakınsaklık, toplam, kalan, genel terim testi, Cauchy ölçütü ve iki temel seri ailesi. Elimizdeki araçların ortak zayıflığı ortadadır: geometrik ve teleskopik seriler dışında kısmi toplamı kapalı biçimde yazamayız, genel terim testi de yalnızca ıraksaklık gösterebilir. Bundan sonraki bölümlerde toplamı hesaplamadan yakınsaklığa karar verdiren ölçütler geliştireceğiz; ilk adım, terimleri işaret değiştirmeyen serilerde kısmi toplamlar dizisinin monoton olması gerçeğinden yararlanmak olacak: Pozitif Terimli Seriler ve Karşılaştırma Testleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

35. Pozitif Terimli Seriler ve Karşılaştırma Testleri

Serilere Giriş bölümünde bir serinin yakınsaklığını, kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklığı olarak tanımladık. Bu tanım kusursuzdur ama kullanışlı değildir: kısmi toplam s_n için kapalı bir formül yazamadığımız her seride — ki bu, karşımıza çıkan serilerin neredeyse tamamıdır — tanıma doğrudan başvurmak imkânsızdır. Elimizde teleskopik seriler, geometrik seri ve birkaç yapay örnek dışında kapalı formülü hesaplanabilen seri yoktur.
Bu yüzden analizde serilerin **toplamını bulmak** ile serinin **yakınsak olup olmadığına karar vermek** birbirinden kesin biçimde ayrılır. İkincisi çok daha kolaydır ve çoğu uygulamada zaten sorulan sorudur. Bu bölümden başlayarak, toplamı hiç hesaplamadan yakınsaklığa karar vermeyi sağlayan **yakınsaklık testleri** (convergence tests) kuracağız.
Bütün bu testlerin çıkış noktası tek ve çok basit bir gözlemdir: terimlerin hepsi negatif değilse, kısmi toplamlar dizisi **artan**dır. Artan bir dizinin yakınsaklığı ise Analiz 1'den bildiğimiz tek bir koşula indirgenir — üstten sınırlı olmak (bkz. Analiz 1). Böylece bir serinin yakınsaklığı sorusu, bir sayı kümesinin sınırlılığı sorusuna dönüşür; sınırlılık ise eşitsizliklerle çalışıldığında çok daha esnektir. "Karşılaştırma" fikri tam olarak buradan doğar: terimleri daha büyük olan yakınsak bir seri bulabilirsek, kendi serimizin kısmi toplamları da sınırlı kalır.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: negatif olmayan ve pozitif terimli serilerin tanımı; böyle bir serinin yakınsaklığının kısmi toplamların üstten sınırlılığına denk olması; negatif olmayan terimli bir serinin ya yakınsadığı ya da $+\infty$'a ıraksadığı; harmonik serinin bu ölçütle ıraksaklığı; **karşılaştırma testi** (comparison test) ile kuyruk ve mutlak değerli biçimleri; sınırlı bir dizinin yakınsak bir seriyle terim terim çarpımı; ve eşitsizlik kurmayı gereksiz kılan pratik araç olan **limit karşılaştırma testi** (limit comparison test) ile asimptotik eşdeğerlik ilkesi.

35.1 Negatif Olmayan Terimli Seriler

Önce üzerinde çalışacağımız seri sınıfını adlandıralım.

Tanım 35.1 (Negatif Olmayan ve Pozitif Terimli Seriler). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bir seri olsun.
Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ ise bu seriye **negatif olmayan terimli seri** (series with non-negative terms) denir.
Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ ise bu seriye **pozitif terimli seri** (series with positive terms) denir.

Pozitif terimli her seri aynı zamanda negatif olmayan terimli bir seridir; kuracağımız bütün teoremler negatif olmayan terimli seriler için geçerli olduğundan, pozitif terimli seriler için de geçerlidir. Uygulamada iki sınıf arasındaki fark, yalnızca limit karşılaştırma testinde paydaya yazacağımız terimin sıfırdan farklı olmasını istediğimizde ortaya çıkacaktır.
Bu sınıfın bütün gücü tek bir gözlemde saklıdır. (s_n), serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$$

olduğundan $s_{n+1} \geq s_n$, yani (s_n) **artan bir dizidir** (bkz. Analiz 1). Artan diziler için yakınsaklık sorusunun yanıtı Analiz 1'de tamamen verilmişti: artan bir dizi yakınsaktır ancak ve ancak üstten sınırlıysa. Bu gözlemi bir teorem hâline getirelim.

Teorem 35.1 (Sınırlı Kısmi Toplam Ölçütü). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ negatif olmayan terimli bir seri ve (s_n) onun kısmi toplamlar dizisi olsun. O hâlde*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow (s_n) \text{ dizisi üstten sınırlıdır.}$$

Üstelik bu durumda serinin toplamı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Önce her iki yönde de kullanacağımız şu olguyu belirtelim:* $a_k \geq 0$ *olduğundan her* $n \in \mathbb{N}$ *için*
>
> $$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n + 0 = s_n,$$
>
> *yani* (s_n) *artandır.*
> ***(⇒) Yakınsaksa sınırlıdır.*** *Seri yakınsak olsun. Serinin yakınsaklığı, tanım gereği* (s_n) *kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklığı demektir. Yakınsak her dizi sınırlıdır (bkz. Analiz 1); özel olarak* (s_n) *üstten sınırlıdır. Bu yönde artanlık kullanılmadı bile: yakınsaklıktan sınırlılığa geçiş her dizi için doğrudur.*
> ***(⇐) Sınırlıysa yakınsaktır.*** (s_n) *üstten sınırlı olsun. Yukarıda* (s_n)*'nin artan olduğunu gördük. Monoton yakınsaklık teoremi (bkz. Analiz 1) gereği, üstten sınırlı ve artan bir dizi yakınsaktır ve limiti kendi terimlerinin supremumudur:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
>
> (s_n) *yakınsak olduğundan seri de yakınsaktır ve toplamı bu supremuma eşittir.*
> ■

Teoremin iki yönü bir arada okunduğunda şu pratik sonucu verir: negatif olmayan terimli bir seride yakınsaklığı göstermek için **tek bir üst sınır bulmak yeter.** Kısmi toplamların hepsini aşan bir M sayısı bulabilirsek seri yakınsaktır; bu M'nin serinin toplamına yakın olması hiç gerekmez, ne kadar kaba olursa olsun bir üst sınır işi görür. Bu, testlerimizin neden bu kadar esnek olabileceğini açıklar.
Denklik ifadesinin değillemesi de aynı ölçüde kullanışlıdır.

Sonuç 35.1 (Iraksaklık Ölçütü). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *negatif olmayan terimli bir seri olsun. O hâlde bu seri ıraksaktır ancak ve ancak kısmi toplamlar dizisi üstten sınırsızdır.*

> ***İspat.***
> *Teorem 35.1'nde kurulan denkliğin her iki yanının değillenmesiyle elde edilir: "seri yakınsak değildir" ile "*(s_n) *üstten sınırlı değildir" önermeleri denktir.*
> ■

Negatif olmayan terimli serilerin davranışı, genel serilere göre çok daha dardır. Genel bir seride kısmi toplamlar salınarak hiçbir yere gitmeyebilir; örneğin $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ serisinin kısmi toplamları -1 ile 0 arasında sonsuza dek gidip gelir. Negatif olmayan terimli bir seride bu mümkün değildir: kısmi toplamlar geri dönemez.

Sonuç 35.2 (Yakınsar ya da Sonsuza Iraksar). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *negatif olmayan terimli bir seri olsun. O hâlde bu seri ya yakınsaktır ya da* $+\infty$*'a ıraksar; yani üçüncü bir olasılık yoktur.*

> ***İspat.***
> (s_n) *kısmi toplamlar dizisi olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_{n+1} \geq 0$ *olduğundan* $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$*'dir; yani* (s_n) *artandır. Ayrıca her* $n \geq 1$ *için*
>
> $$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq a_1 \geq 0$$
>
> *olduğundan* (s_n) *alttan da sınırlıdır. Şimdi iki durum vardır.*
> ***Durum 1:*** (s_n) ***üstten sınırlıdır.*** *Bu durumda Teorem 35.1 gereği seri yakınsaktır.*
> ***Durum 2:*** (s_n) ***üstten sınırlı değildir.*** *Artan ve üstten sınırsız bir dizi* $+\infty$*'a ıraksar (bkz. Analiz 1): her* $M > 0$ *için* $s_{n_0} > M$ *olan bir* n_0 *vardır ve artanlık gereği* $n \geq n_0$ *olan her* n *için* $s_n \geq s_{n_0} > M$ *olur. Demek ki* $s_n \to +\infty$*, yani seri* $+\infty$*'a ıraksar.*
> *Bu iki durum bütün olasılıkları kapsadığından ispat tamamlanır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Bir gösterim kolaylığı

Sonuç 35.2 sayesinde negatif olmayan terimli serilerde şu kısaltmayı güvenle kullanabiliriz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \text{(seri yakınsaktır)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \quad \text{(seri } +\infty \text{ 'a ıraksar)} .$$

Bu gösterim yalnızca negatif olmayan terimli seriler için anlamlıdır; çünkü yalnız orada "yakınsamak" ile "sonlu bir değere sahip olmak" aynı şeydir. Terimleri işaret değiştiren bir seride $\sum a_k = \infty$ yazmak yanlıştır, zira seri hiçbir yere gitmiyor da olabilir.

Şimdi kurduğumuz ölçütü, serilerin en ünlü örneğine uygulayalım. **Harmonik seri** (harmonic series) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$'nin ıraksaklığı, genel terimin sıfıra gitmesinin yakınsaklık için yeterli olmadığını gösteren temel örnektir.

Örnek 35.1 (Harmonik Serinin Kısmi Toplamları Sınırsızdır). Iraksaklık ölçütünü kullanarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

harmonik serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Adım 1. Terimlerin işareti. Serinin genel terimi $a_k = \frac{1}{k}$'dir ve her $k \geq 1$ için $a_k > 0$'dır. Demek ki seri pozitif terimlidir; özel olarak negatif olmayan terimlidir ve Sonuç 35.1 uygulanabilir. Öyleyse ıraksaklığı göstermek için kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırsız olduğunu göstermek yeterlidir.

Adım 2. Kısmi toplamları ikinin kuvvetlerinde inceleyelim. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ olsun. Terimleri ikinin kuvvetleriyle belirlenen bloklara ayırıp her bloktaki terimleri bloğun **en küçük** terimiyle aşağıdan sınırlayacağız. İlk birkaç adımı açıkça yazalım:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}, \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Görülen düzen şudur: $\left(\frac{1}{2^j+1}, \ldots, \frac{1}{2^{j+1}}\right)$ bloğunda 2^j tane terim vardır ve her biri en az $\frac{1}{2^{j+1}}$'dir; dolayısıyla bloğun toplamı en az $2^j \cdot \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}$'dir. Her yeni blok, toplamı en az $\frac{1}{2}$ artırır.

Adım 3. Genel eşitsizliği tümevarımla kuralım. Her $j \geq 0$ tam sayısı için

$$s_{2^{j+1}} - s_{2^j} = \sum_{i=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{i} \geq \underbrace{2^j}_{\text{terim sayısı}} \cdot \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini elde ettik; burada $2^j + 1 \leq i \leq 2^{j+1}$ olan her i için $\frac{1}{i} \geq \frac{1}{2^{j+1}}$ olmasını kullandık. Şimdi

$$s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

eşitsizliğini k üzerinden tümevarımla gösterelim (bkz. Analiz 1). $k = 0$ için $s_1 = 1 = 1 + \frac{0}{2}$ olduğundan eşitsizlik doğrudur. Eşitsizlik k için doğru olsun. O hâlde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + (s_{2^{k+1}} - s_{2^k}) \geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}$$

olur; yani eşitsizlik $k+1$ için de doğrudur. Tümevarım ilkesi gereği eşitsizlik her $k \geq 0$ için geçerlidir.
Adım 4. Sınırsızlık. $M > 0$ herhangi bir sayı olsun. Arşimet özelliği (bkz. Analiz 1) gereği $\frac{k}{2} > M$, yani $k > 2M$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu k için

$$s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} > 1 + M > M$$

olur. Demek ki hiçbir M sayısı (s_n) dizisinin üst sınırı olamaz; (s_n) üstten sınırsızdır.
Sonuç. Sonuç 35.1 gereği harmonik seri ıraksaktır. Dahası, Sonuç 35.2 ile birlikte okunduğunda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

yazabiliriz.
■

⚠ Terimlerin sıfıra gitmesi yetmez

Harmonik seride $a_k = \frac{1}{k} \to 0$'dır, buna karşın seri ıraksaktır. Öyleyse "genel terim sıfıra gidiyorsa seri yakınsar" biçimindeki sezgi **yanlıştır**. Doğru olan tek yönlü gerektirmedir: bir seri yakınsaksa genel terimi sıfıra gider; tersi doğru değildir. Harmonik seri bu bölümde ıraksaklık karşılaştırmalarının değişmez ölçüsü olacak: bir serinin terimleri "$\frac{1}{k}$ büyüklüğünde" ise seri ıraksar.
Kısmi toplamların büyüme hızı da kayda değer. Yukarıda kurduğumuz $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ eşitsizliği, $s_n > 10$ olmasını ancak $n = 2^{18}$ alındığında garanti eder; gerçekte ise s_n ilk kez $n = 12\,367$'de 10'u aşar. Yavaşlık bundan sonra daha da artar: kısmi toplamın 20'yi aşması için n'nin yüz milyonları bulması gerekir. Kısacası ıraksaklık sayısal deneyle fark edilebilecek bir şey değildir; ancak ispatla görülür.

35.2 Karşılaştırma Testi

Elimizde artık iki "ölçü serisi" var: yakınsaklığını Serilere Giriş bölümünde hesapladığımız geometrik seri $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ($|\,q\,| < 1$ için yakınsak, $|\,q\,| \geq 1$ için ıraksak) ve az önce ıraksaklığını gösterdiğimiz harmonik seri. Karşılaştırma testi, incelediğimiz seriyi bu bilinen serilerden biriyle terim terim kıyaslayarak sonuca varmayı sağlar.
Testin ispatında serinin Cauchy ölçütünü kullanacağız; onu hatırlatalım.

ℹ Hatırlatma: seriler için Cauchy ölçütü

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki $m > n \geq N_\varepsilon$ olan her m, n için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

olur. Bu ölçüt, kısmi toplamlar dizisine dizilerin Cauchy ölçütünün (bkz. Analiz 1) uygulanmasından başka bir şey değildir; çünkü $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$'dır ve bir dizi yakınsaktır ancak ve ancak Cauchy dizisiyse (bkz. Analiz 1).

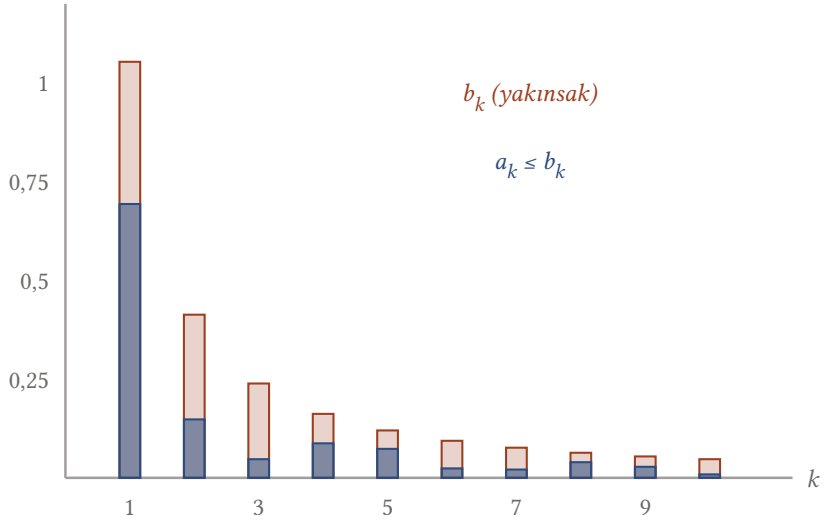
Teorem 35.2 (Karşılaştırma Testi). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serileri verilsin ve her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun. O hâlde:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *yakınsaksa* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *de yakınsaktır.*
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ıraksaksa* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *de ıraksaktır.*



Şekil 35.1: Karşılaştırma testi: terimleri $0 \le a_k \le b_k$ ile sıkıştırılmış bir seri, üstteki seri yakınsıyorsa yakınsar. Koyu sütunlar açık sütunların içinde kaldığından Σa_k'nın kısmi toplamları Σb_k'nınkileri aşamaz; artan ve üstten sınırlı dizi yakınsaktır.

İspat.
(1) *$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak olsun. Seriler için Cauchy ölçütü gereği, verilen her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki $m > n \ge N_\varepsilon$ olan her m, n için*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} b_k \right| = \sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon$$

olur; mutlak değeri düşürebildik, çünkü $b_k \ge a_k \ge 0$ olduğundan bu sonlu toplam negatif değildir.
Şimdi aynı ε ve aynı N_ε ile çalışalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 \le a_k \le b_k$ olduğundan, $m > n \ge N_\varepsilon$ olan her m, n için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = \sum_{k=n+1}^{m} a_k \le \sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon$$

elde ederiz. Burada ilk eşitlik $a_k \ge 0$ olmasından, ortadaki eşitsizlik ise toplamın her teriminde $a_k \le b_k$ olmasından gelir. Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de Cauchy ölçütünü sağlar; öyleyse yakınsaktır.
(2) *Bu, birinci maddenin karşıt tersidir. Gerçekten, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksak olsun ve tersine $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$'nın yakınsak olduğunu varsayalım. Her k için $0 \le a_k \le b_k$ olduğundan, birinci madde gereği $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olurdu. Bu, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$'nın ıraksaklığıyla çelişir. Öyleyse $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaktır.*
■

Teoremin ikinci ve daha kısa bir ispatı Teorem 35.1'ne dayanır. $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ olsun; her k için $a_k \le b_k$ olduğundan her n için $A_n \le B_n$'dir. $\sum b_k$ yakınsaksa (B_n) üstten sınırlıdır, o hâlde (A_n) de üstten sınırlıdır ve $\sum a_k$ yakınsaktır; (A_n) üstten sınırsızsa (B_n) de üstten sınırsızdır ve bu da ikinci maddeyi verir.
Testi kullanırken dikkat edilecek nokta, yakınsaklığın serinin **sonlu sayıdaki ilk terimine** duyarsız olmasıdır. Bir serinin başından sonlu sayıda terim atmak ya da başına sonlu sayıda terim eklemek toplamı

 CC BY-NC-SA 4.0

değiştirir ama yakınsaklığı değiştirmez; çünkü kısmi toplamlar dizisi sabit bir sayı kadar ötelenmiş olur. Bu yüzden karşılaştırma testi, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yerine $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ biçimindeki seriler için de aynen geçerlidir ve eşitsizliğin **her** k için değil, yalnızca yeterince büyük k için sağlanması yeter. Bu iki iyileştirmeyi ve mutlak değerli biçimi tek bir önermede toplayalım.

Önerme 35.1 (Karşılaştırma Testinin Kuyruk Biçimi). *$k_0 \in \mathbb{N}$ sabit bir sayı olsun.*

1. *Her $k \geq k_0$ için $|\, a_k \,| \leq b_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsaksa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.*
2. *Her $k \geq k_0$ için $a_k \geq b_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaksa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksaktır.*

> ***İspat.***
> ***(1)*** *Dikkat edilirse $|\, a_k \,| \leq b_k$ koşulu $b_k \geq 0$ olmasını kendiliğinden gerektirir; dolayısıyla $\sum b_k$ negatif olmayan terimli bir seridir (en azından $k \geq k_0$ için).*
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak olduğundan, Cauchy ölçütü gereği $m > n \geq N_\varepsilon$ olan her m, n için*
>
> $$\left| \sum_{k=n+1}^{m} b_k \right| < \varepsilon$$
>
> *olacak biçimde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi*
>
> $$N = \max\{N_\varepsilon, k_0\}$$
>
> *alalım. $m > n \geq N$ olsun. Bu durumda toplamda geçen bütün indisler $k \geq n+1 > N \geq k_0$ koşulunu sağlar; yani hipotezdeki eşitsizlik bu indislerin hepsinde geçerlidir. Üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) ile*
>
> $$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |\, a_k \,| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k = \left| \sum_{k=n+1}^{m} b_k \right| < \varepsilon$$
>
> *elde ederiz; ortadaki eşitlik, bu indislerin hepsinde $b_k \geq |\, a_k \,| \geq 0$ olmasından, yani toplamın negatif olmamasından gelir. Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi Cauchy ölçütünü sağlar ve yakınsaktır. Kısmi toplamların ilk k_0 terimi bu akıl yürütmeye hiç girmedi: Cauchy ölçütü yalnızca serinin kuyruğuna bakar.*
> ***(2)*** *Karşıt tersini gösterelim. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun. Her $k \geq k_0$ için $0 \leq b_k \leq a_k$, yani $|\, b_k \,| \leq a_k$ olduğundan, birinci maddeyi a_k ile b_k'nın rollerini değiştirerek uygularsak $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak olurdu. Bu, hipotezle çelişir. Öyleyse $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksaktır.*
> ■

Birinci maddedeki $|\, a_k \,| \leq b_k$ biçimi özellikle değerlidir: (a_k) dizisinin terimlerinin işareti hakkında hiçbir şey varsaymaz. Yani karşılaştırma testi, terimleri işaret değiştiren seriler için de bir **yakınsaklık** aracıdır; yeter ki terimlerin mutlak değerleri yakınsak bir serinin terimlerinin altında kalsın.

> ⚠ İşaret koşulu vazgeçilmezdir
>
> Karşılaştırma testinin **yakınsaklık** yönünde $a_k \geq 0$ koşulu atılamaz. Örneğin $a_k = -1$ ve $b_k = \dfrac{1}{k^2}$ alalım. Her k için $a_k \leq b_k$'dır ve $\sum b_k$ yakınsaktır (bunu birazdan göstereceğiz), ama $\sum a_k = \sum(-1)$ ıraksaktır. Yani "terimleri yakınsak bir serinin terimlerinden küçüktür, öyleyse yakınsar" akıl yürütmesi, alttaki seri negatif değerlere kaçabiliyorsa geçersizdir. Önerme 35.1'nin birinci maddesinde eşitsizliğin $|\, a_k \,| \leq b_k$ biçiminde, yani mutlak değerle kurulmasının nedeni tam olarak budur.
> İkinci bir karıştırma, eşitsizliğin yönünü testin yönüyle bir tutmaktır: $a_k \leq b_k$ olması ve $\sum b_k$'nın **ıraksaması** $\sum a_k$ hakkında hiçbir şey söylemez. Gerçekten, $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$ ve $b_k = \dfrac{1}{k}$ alınırsa $a_k \leq b_k$ olur, $\sum b_k$ ıraksar, ama $\sum a_k$ yakınsaktır (alterne harmonik seri; yakınsaklığını Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık bölümünde göreceğiz). Iraksaklık ancak **aşağıdan** sınırlamayla taşınır: $a_k \geq b_k \geq 0$ ve $\sum b_k$ ıraksaksa $\sum a_k$ ıraksar. Demek ki eşitsizliğin yönü ile serinin karakteri arasındaki bağ, ancak terimler negatif olmadığında ya da mutlak değerlerle çalışıldığında kurulabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Hangi seriyle karşılaştırmalı?

Karşılaştırma testi ancak elimizde karakteri **önceden bilinen** bir seri varsa işe yarar. Bu bölümde kullanacağımız ölçü serileri şunlardır:

Seri	Karakter	Koşul
$\sum q^k$ (geometrik)	yakınsak	$\mid q \mid < 1$
$\sum q^k$ (geometrik)	ıraksak	$\mid q \mid \geq 1$
$\sum \frac{1}{k}$ (harmonik)	ıraksak	—
$\sum \frac{1}{k(k+1)}$ (teleskopik)	yakınsak, toplamı 1	—
$\sum \frac{1}{k^2}$	yakınsak	—

Pratik yol şudur: genel terimin **baskın davranışını** bulun. Payın ve paydanın en hızlı büyüyen terimlerini bırakıp gerisini atın; ortaya çıkan sadeleşmiş ifade, karşılaştırma serinizin genel terimidir. Sonra da bu tahmini bir eşitsizlikle doğrulayın.

Karşılaştırma testinin doğrudan bir sonucu olarak, yakınsak bir seriyi sınırlı bir diziyle terim terim çarpmanın yakınsaklığı bozmadığını görelim.

Sonuç 35.3 (Sınırlı Dizi ile Çarpım). *$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ negatif olmayan terimli yakınsak bir seri ve (a_k) sınırlı bir reel sayı dizisi olsun. O hâlde*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

serisi yakınsaktır.

İspat.
(a_k) sınırlı olduğundan (bkz. Analiz 1), her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\mid a_k \mid \leq M$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. Her k için $b_k \geq 0$ olduğundan

$$\mid a_k b_k \mid = \mid a_k \mid \cdot \mid b_k \mid = \mid a_k \mid b_k \leq M b_k$$

olur.
Öte yandan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak olduğundan, serilerde sabitle çarpım kuralı gereği $\sum_{k=1}^{\infty} M b_k$ serisi de yakınsaktır ve toplamı $M \sum_{k=1}^{\infty} b_k$'dır.
Şimdi Önerme 35.1'nin birinci maddesini $k_0 = 1$ ve karşılaştırma serisi $\sum M b_k$ ile uygulayalım: her k için $\mid a_k b_k \mid \leq M b_k$ ve $\sum M b_k$ yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ yakınsaktır.
■

Bu sonuç, terimleri işaret değiştiren bir dizi için de geçerlidir; örneğin $\sum \dfrac{\cos k}{2^k}$ serisi yakınsaktır, çünkü $(\cos k)$ sınırlıdır ve $\sum \dfrac{1}{2^k}$ yakınsak bir geometrik seridir.

35.2.1 Karşılaştırma Testinin Uygulanışı

Şimdi testi somut serilerde çalıştıralım. İzleyeceğimiz yol her seferinde aynıdır: önce baskın davranışa bakarak bir aday karşılaştırma serisi seçmek, sonra istenen eşitsizliği yeterince büyük k'lar için kurmak.

Örnek 35.2 (Karesel Paydalı Bir Iraksak Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 4}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

serisinin yakınsak mı ıraksak mı olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.
Genel terim $a_k = \dfrac{k}{k^2+4}$ olsun. Her $k \geq 1$ için $a_k > 0$'dır.
Adım 1. Karşılaştırma serisini bulalım. Büyük k değerlerinde payın baskın terimi k, paydanınki k^2'dir; yalnızca bunları bırakırsak

$$\frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

kalır. Bu, serimizi harmonik seriyle karşılaştırmamız gerektiğini söyler. Harmonik seri ıraksak olduğundan, ıraksaklığı göstermek için terimlerimizi harmonik serinin (bir sabit katının) terimleriyle **aşağıdan** sınırlamamız gerekir.
Adım 2. Eşitsizliği kuralım. $k \geq 2$ için $k^2 \geq 4$ olduğuna dikkat edelim. O hâlde

$$k^2 + 4 \leq k^2 + k^2 = 2k^2 \qquad (k \geq 2)$$

olur. Paydayı büyütmek kesri küçültür: k^2+4 yerine ondan büyük olan $2k^2$'yi yazarsak elde ettiğimiz kesir aslından küçük kalır, yani bir **alt sınır** buluruz. Buradan

$$\frac{k}{k^2+4} \geq \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k} \qquad (k \geq 2)$$

elde ederiz. Demek ki her $k \geq 2$ için

$$a_k \geq \frac{1}{2k} > 0$$

sağlanır.
Adım 3. Testi uygulayalım. Harmonik seri $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ ıraksaktır (Örnek 35.1). Sabitle çarpım kuralı gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ serisi de ıraksaktır; gerçekten, bu seri yakınsak olsaydı 2 ile çarparak harmonik serinin yakınsaklığını elde ederdik.
Şimdi $b_k = \dfrac{1}{2k}$ alalım. Her $k \geq 2$ için $a_k \geq b_k \geq 0$ ve $\sum b_k$ ıraksaktır; Önerme 35.1'nin ikinci maddesi ($k_0 = 2$ ile) gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+4}$$

serisi ıraksaktır. İlk terimi ($k=1$) dışarıda bırakmış olmamız sonucu etkilemez: sonlu sayıda terim serinin karakterini değiştirmez.
■

Örnek 35.3 (Geometrik Seriyle Yukarıdan Sınırlama).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k+1}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Genel terim $a_k = \dfrac{1}{7^k+1}$ pozitiftir.
Her $k \in \mathbb{N}$ için paydada $7^k + 1 > 7^k$ olduğundan, paydayı küçültmek kesri büyütür:

$$\frac{1}{7^k+1} \leq \frac{1}{7^k} = \left(\frac{1}{7}\right)^k.$$

Sağ taraf, oranı $q = \dfrac{1}{7}$ olan bir geometrik serinin genel terimidir. $|\,q\,| = \dfrac{1}{7} < 1$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^k = \frac{1/7}{1-1/7} = \frac{1}{6}$$

serisi yakınsaktır. Her k için $0 \le a_k \le \left(\frac{1}{7}\right)^k$ olduğundan Teorem 35.2 gereği $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k+1}$ serisi yakınsaktır.
Karşılaştırma testi toplamın değerini vermez, ama bir üst sınır verir: kısmi toplamlar $\frac{1}{6}$'yı aşamayacağından

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k+1} \le \frac{1}{6}$$

olur.
■

Önceki örnekte payda "kendiliğinden" büyüktü. Paydadan bir sayı **çıkarıldığında** işler dikkat ister: bu kez kesir büyür ve doğrudan geometrik seriyle sınırlayamayız. Çözüm, çıkarılan terimi paydanın kendisinin bir kesriyle yutmaktır.

Örnek 35.4 (Paydası Eksiltilmiş Üstel Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{3^k-2}$$

serisinin yakınsak mı ıraksak mı olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.
Genel terim $a_k = \frac{8}{3^k-2}$ olsun. Her $k \ge 1$ için $3^k \ge 3 > 2$ olduğundan payda pozitiftir ve $a_k > 0$'dır.
Adım 1. Karşılaştırma serisini bulalım. Büyük k değerlerinde paydadaki -2 sabiti, üstel terim 3^k yanında ihmal edilebilir. Terimler asimptotik olarak $\frac{8}{3^k}$ gibi davranır; öyleyse oranı $\frac{1}{3}$ olan geometrik seriyle karşılaştırmalıyız.
Adım 2. Eşitsizliği kuralım. Amacımız $a_k \le b_k$ biçiminde bir üst sınır bulmak; bunun için paydayı **aşağıdan** sınırlamamız gerekir. $k \ge 2$ için

$$3^k \ge 9 > 4, \qquad \text{yani} \qquad \frac{3^k}{2} \ge 2$$

olur. Öyleyse $k \ge 2$ için paydadan 2 çıkarmak, $\frac{3^k}{2}$ çıkarmaktan daha az zarar verir:

$$3^k - 2 \ge 3^k - \frac{3^k}{2} = \frac{3^k}{2}.$$

Paydayı daha küçük bir sayıyla değiştirmek kesri büyüttüğünden

$$\frac{8}{3^k-2} \le \frac{\frac{8}{3^k}}{2} = \frac{16}{3^k} \qquad (k \ge 2)$$

elde ederiz. Demek ki her $k \ge 2$ için $0 < a_k \le \frac{16}{3^k}$'dır.
Adım 3. Testi uygulayalım. Karşılaştırma serisi

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{16}{3^k} = 16\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olup oranı $q = \dfrac{1}{3}$ olan bir geometrik serinin sabit katıdır. $\mid q \mid < 1$ olduğundan bu seri yakınsaktır. Her $k \geq 2$ için terimlerimiz pozitif ve bu yakınsak serinin terimlerinden küçük ya da eşit olduğundan, Önerme 35.1 ($k_0 = 2$ ile) gereği $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{8}{3^k - 2}$ serisi yakınsaktır.
Başa $k = 1$ terimini eklemek yakınsaklığı değiştirmez; öyleyse

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3^k - 2}$$

serisi yakınsaktır.
■

Bir sonraki testte ihtiyacımız olacağı için, $\sum \dfrac{1}{k^2}$ serisinin karakterini şimdi belirleyelim. Bu seri, "karesel hızda küçülen" terimlerin ölçüsü olarak harmonik seri kadar sık kullanılır.

Örnek 35.5 (Kareler Serisinin Yakınsaklığı).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

serisinin yakınsak olduğunu ve toplamının 2'yi aşmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Seri pozitif terimlidir, dolayısıyla Teorem 35.1 uygulanabilir: kısmi toplamların üstten sınırlı olduğunu göstermek yeter.
Adım 1. Terimleri teleskopik bir ifadeyle sınırlayalım. $k \geq 2$ için $k^2 > k(k-1) > 0$ olduğundan

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \qquad (k \geq 2)$$

olur; son eşitlik $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)}$ hesabından gelir.
Adım 2. Kısmi toplamları sınırlayalım. $n \geq 2$ için

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Sağdaki toplam teleskopiktir: ardışık terimler birbirini götürür ve geriye ilk ile son parça kalır,

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Öyleyse her $n \geq 2$ için

$$s_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

olur. $n = 1$ için de $s_1 = 1 < 2$'dir.
Adım 3. Sonuç. (s_n) üstten 2 ile sınırlıdır. Teorem 35.1 gereği seri yakınsaktır ve toplamı $\sup_n s_n \leq 2$ olur:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Toplamın kendisi

Yukarıdaki hesap toplam için yalnızca bir üst sınır verdi. Toplamın tam değeri $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$'dır; bu, Euler'in çözdüğü ünlü Basel problemidir ve elimizdeki araçlarla ulaşılamaz. Yakınsaklığı göstermek ile toplamı bulmak arasındaki uçurumun iyi bir örneğidir.

Karşılaştırma testinin ilginç bir kullanımı da, verilen bir serinin yakınsaklığından **ondan türetilen** başka serilerin yakınsaklığını çıkarmaktır. Burada karşılaştırma serisi, hazır bir ölçü serisi değil, serinin kendisidir.

Örnek 35.6 (Yakınsak Bir Seriden Türetilen Seriler). Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ olsun ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak olsun. Buna göre

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Birinci seri. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olduğundan, yakınsak bir serinin genel terimi sıfıra gider:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Limit tanımını $\varepsilon = 1$ için yazalım: öyle bir $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $k \geq k_1$ için

$$|\, a_k - 0 \,| = a_k < 1$$

olur. Bu eşitsizliğin iki yanını pozitif olan a_k ile çarparsak, her $k \geq k_1$ için

$$a_k^2 = a_k \cdot a_k < a_k \cdot 1 = a_k$$

elde ederiz. Demek ki her $k \geq k_1$ için

$$0 < a_k^2 < a_k$$

sağlanır. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olduğundan, Önerme 35.1'nin birinci maddesi ($k_0 = k_1$ ile) gereği $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ serisi yakınsaktır.
Buradaki tek incelik, eşitsizliğin **bütün** k'lar için değil, yalnızca $k \geq k_1$ olan k'lar için geçerli olmasıdır; kuyruk biçimi tam da bu durum için hazırlanmıştı.
İkinci seri. Bu kez eşitsizlik hiçbir eşik gerektirmez. Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ olduğundan $1 + a_k > 1$'dir ve

$$0 < \frac{a_k}{1+a_k} < \frac{a_k}{1} = a_k$$

olur. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olduğundan Teorem 35.2 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$$

serisi yakınsaktır.
Üçüncü seri. Aynı biçimde, her $k \in \mathbb{N}$ için $1 + a_k^2 > 1$ olduğundan

$$0 < \frac{a_k^2}{1+a_k^2} < a_k^2$$

olur. Birinci kısımda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ serisinin yakınsak olduğunu gösterdik; Teorem 35.2 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

serisi de yakınsaktır.
■

⚠ Karesi alınan seri için karşıtı doğru değildir

Yukarıdaki ilk sonucun tersi geçerli değildir: $\sum a_k^2$ yakınsak olduğu hâlde $\sum a_k$ ıraksak olabilir. $a_k = \frac{1}{k}$ alınırsa $\sum a_k^2 = \sum \frac{1}{k^2}$ yakınsak (Örnek 35.5) ama $\sum a_k$ harmonik seri olduğundan ıraksaktır (Örnek 35.1). Kareyi almak terimleri küçültür; küçültülmüş serinin yakınsaması, aslını hiçbir şeye zorlamaz.

35.3 Limit Karşılaştırma Testi

Karşılaştırma testinin pratikteki tek zorluğu, istenen eşitsizliği elle kurmaktır. Yukarıdaki örneklerde $k^2 + 4 \le 2k^2$ ya da $3^k - 2 \ge \frac{3^k}{2}$ gibi küçük numaralar bulmamız gerekti; genel terim biraz karmaşıklaştığında bu numaralar zahmetli hâle gelir. Oysa aslında yaptığımız şey her seferinde aynıydı: iki terimin **oranının** sonlu ve sıfırdan farklı bir sayıya yaklaştığını fark etmek. Bu gözlemi doğrudan bir teoreme çevirirsek eşitsizlik kurma yükünden kurtuluruz.

Teorem 35.3 (Limit Karşılaştırma Testi). *Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \ge 0$ ve $b_k > 0$ olsun ve*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$

olsun; burada L ya negatif olmayan bir reel sayıdır ya da $L = \infty$ yazımıyla $\frac{a_k}{b_k}$ oranının $+\infty$'a ıraksadığı kastedilir. O hâlde:

1. *$0 < L < \infty$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ile $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serileri ya birlikte yakınsaktır ya da birlikte ıraksaktır.*
2. *$L = 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsaksa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ da yakınsaktır.*
3. *$L = \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaksa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ da ıraksaktır.*

İspat.
(1) *$L \in (0, \infty)$ olsun. Limit tanımını $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ değeri için yazalım: öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $k \ge k_0$ için*

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - L \right| < \frac{L}{2},$$

yani

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < L + \frac{L}{2}, \qquad \text{yani} \qquad \frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3L}{2}$$

olur. Her k için $b_k > 0$ olduğundan bu eşitsizliği b_k ile çarpabiliriz ve yön değişmez:

$$\frac{L}{2} b_k < a_k < \frac{3L}{2} b_k \qquad (k \ge k_0). \qquad (\star)$$

Şimdi dört gerektirmeyi ayrı ayrı gösterelim.
$\sum b_k$ yakınsaksa $\sum a_k$ yakınsaktır. $\sum b_k$ yakınsak olsun. Sabitle çarpım kuralı gereği $\sum \frac{3L}{2} b_k$ serisi de yakınsaktır. $(\star)$'ın sağ yarısından her $k \ge k_0$ için $0 \le a_k < \frac{3L}{2} b_k$ olduğundan, Önerme 35.1'nin birinci maddesi gereği $\sum a_k$ yakınsaktır.
$\sum a_k$ yakınsaksa $\sum b_k$ yakınsaktır. $\sum a_k$ yakınsak olsun. $(\star)$'ın sol yarısından her $k \ge k_0$ için $0 \le \frac{L}{2} b_k < a_k$ olduğundan, aynı önerme gereği $\sum \frac{L}{2} b_k$ serisi yakınsaktır. $L > 0$ olduğundan bu seriyi $\frac{2}{L}$ ile çarpabiliriz; öyleyse $\sum b_k$ yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\sum b_k$ ıraksaksa $\sum a_k$ ıraksaktır. *Bu, ikinci gerektirmenin karşıt tersidir:* $\sum a_k$ *yakınsak olsaydı* $\sum b_k$ *de yakınsak olurdu.*
$\sum a_k$ ıraksaksa $\sum b_k$ ıraksaktır. *Bu da birinci gerektirmenin karşıt tersidir:* $\sum b_k$ *yakınsak olsaydı* $\sum a_k$ *de yakınsak olurdu.*
Dört gerektirme bir arada, iki serinin aynı karakterde olduğunu söyler.
(2) $L = 0$ *olsun ve* $\sum b_k$ *yakınsak olsun.* $\dfrac{a_k}{b_k} \to 0$ *olduğundan, limit tanımını* $\varepsilon = 1$ *için yazalım: öyle bir* $k_0 \in \mathbb{N}$ *vardır ki her* $k \geq k_0$ *için*

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| = \frac{a_k}{b_k} < 1$$

olur ($a_k \geq 0$ *ve* $b_k > 0$ *olduğundan oran negatif değildir, mutlak değer düşer). Buradan* $b_k > 0$ *ile çarparak, her* $k \geq k_0$ *için*

$$0 \leq a_k < b_k$$

elde ederiz. $\sum b_k$ *yakınsak olduğundan Önerme 35.1'nin birinci maddesi (*k_0 *ile) gereği* $\sum a_k$ *yakınsaktır.*
(3) $L = \infty$ *olsun ve* $\sum b_k$ *ıraksak olsun.* $\dfrac{a_k}{b_k} \to \infty$ *olduğundan, sonsuza ıraksama tanımını* $M = 1$ *için yazalım: öyle bir* $k_0 \in \mathbb{N}$ *vardır ki her* $k \geq k_0$ *için*

$$\frac{a_k}{b_k} > 1$$

olur. $b_k > 0$ *ile çarparsak, her* $k \geq k_0$ *için*

$$a_k > b_k > 0$$

elde ederiz. $\sum b_k$ *ıraksak olduğundan Önerme 35.1'nin ikinci maddesi gereği* $\sum a_k$ *ıraksaktır.*
■

Testin çekiciliği açıktır: artık eşitsizlik kurmuyor, yalnızca bir dizi limiti hesaplıyoruz. Ve bu limit, çoğu zaman rasyonel ifadelerde pay ile paydanın en yüksek dereceli terimlerini karşılaştırmaktan ibarettir.

⚠ Uç durumlarda karşıt yönler geçerli değildir

Teoremin ikinci ve üçüncü maddeleri **tek yönlüdür**; birinci maddenin aksine bir denklik vermezler. **$L = 0$ olduğunda $\sum b_k$ ıraksaksa hiçbir şey söylenemez.** Gerçekten:

- $a_k = \dfrac{1}{k^2}$, $b_k = \dfrac{1}{k}$ alalım. $\dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{1}{k} \to 0$'dır ve $\sum b_k$ ıraksaktır; ama $\sum a_k$ **yakınsaktır** (Örnek 35.5).
- $a_k = \dfrac{1}{k}$, $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ alalım. $\dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \to 0$'dır. Her $k \geq 1$ için $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{k}$ olduğundan Teorem 35.2 gereği $\sum b_k$ ıraksaktır; ve $\sum a_k$ harmonik seri olduğundan yine **ıraksaktır**.

İki durum da gerçekleştiğine göre, $L = 0$ ile ıraksak bir $\sum b_k$'nın birleşimi hiçbir sonuç vermez.
$L = \infty$ olduğunda $\sum b_k$ yakınsaksa yine hiçbir şey söylenemez.

- $a_k = \dfrac{1}{k^2}$, $b_k = \dfrac{1}{2^k}$ alalım. $\dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{2^k}{k^2} \to \infty$'dur (üstel büyüme kuvvet büyümesini yener, Büyüme Hızları) ve $\sum b_k$ yakınsaktır; ama $\sum a_k$ da **yakınsaktır**.
- $a_k = \dfrac{1}{k}$, $b_k = \dfrac{1}{2^k}$ alalım. $\dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{2^k}{k} \to \infty$'dur ve $\sum b_k$ yakınsaktır; ama $\sum a_k$ **ıraksaktır**.

Kısacası: $L = 0$ yalnızca yakınsaklık taşır, $L = \infty$ yalnızca ıraksaklık taşır. Ters yönde kullanılmak istenirse test sessiz kalır.

35.3.1 Limit Karşılaştırma Testinin Uygulanışı

Testi kullanırken izlenecek yol üç adımlıdır: genel terimin baskın davranışını okuyup b_k'yı seçmek, $\dfrac{a_k}{b_k}$ limitini hesaplamak, sonucu $\sum b_k$'nın bilinen karakteriyle birleştirmek.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 35.7 (Karesel Paydalı Bir Yakınsak Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+3k-1}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Genel terim $a_k = \dfrac{1}{2k^2+3k-1}$ olsun. $k \geq 1$ için $2k^2+3k-1 \geq 2+3-1 = 4 > 0$ olduğundan $a_k > 0$'dır.
Adım 1. Karşılaştırma serisini seçelim. Büyük k değerlerinde paydaya k^2 terimi hâkimdir. Öyleyse

$$b_k = \frac{1}{k^2}$$

alalım; her k için $b_k > 0$'dır ve $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz (Örnek 35.5).
Adım 2. Limiti hesaplayalım.

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2k^2+3k-1} \cdot \frac{k^2}{1} \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2k^2+3k-1}.$$

Pay ve paydayı k^2'ye bölelim:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{k}-\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2+0-0} = \frac{1}{2};$$

burada limit aritmetiğini (bkz. Analiz 1) ve $\dfrac{1}{k} \to 0$ olmasını (bkz. Analiz 1) kullandık.
Adım 3. Sonuç. $0 < L = \dfrac{1}{2} < \infty$ olduğundan Teorem 35.3'nin birinci maddesi gereği $\sum a_k$ ile $\sum b_k$ aynı karakterdedir. $\sum \dfrac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+3k-1}$$

serisi de yakınsaktır.
■

Örnek 35.8 (Harmonik Davranışlı Bir Rasyonel Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^2-k+1}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Genel terim $a_k = \dfrac{k+2}{k^2-k+1}$ olsun. Payda $k^2-k+1 = \left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ olduğundan her $k \geq 1$ için $a_k > 0$'dır.
Adım 1. Karşılaştırma serisini seçelim. Payın baskın terimi k, paydanınki k^2'dir; oranları $\dfrac{k}{k^2} = \dfrac{1}{k}$'dir. Öyleyse

$$b_k = \frac{1}{k}$$

alalım. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ harmonik seridir ve ıraksaktır (Örnek 35.1).
Adım 2. Limiti hesaplayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+2}{k^2-k+1} \cdot \frac{k}{1} \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k}{k^2-k+1}.$$

Pay ve paydayı k^2'ye bölerek

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{2}{k}}{1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1+0}{1-0+0} = 1$$

buluruz.
Adım 3. Sonuç. $0 < L = 1 < \infty$ olduğundan Teorem 35.3 gereği iki seri aynı karakterdedir. Harmonik seri ıraksak olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^2-k+1}$$

serisi de ıraksaktır.
■

Limit karşılaştırma testi yalnızca rasyonel ifadelerde işe yaramaz. Genel terimde trigonometrik ya da köklü ifadeler geçtiğinde, doğrudan eşitsizlik kurmak çoğu zaman çok zahmetliyken limit hesabı kolaydır. Şimdi böyle üç örnek yapalım.

Örnek 35.9 (Sinüslü Bir Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \sin \frac{1}{k}$ olsun. Her $k \geq 1$ için $0 < \frac{1}{k} \leq 1 < \pi$ olduğundan $\sin \frac{1}{k} > 0$'dır; seri pozitif terimlidir.
Adım 1. Karşılaştırma serisini seçelim. Küçük x değerlerinde $\sin x \approx x$ olduğunu biliyoruz; k büyüdükçe $\frac{1}{k}$ küçüldüğüne göre $\sin \frac{1}{k}$ terimleri $\frac{1}{k}$ gibi davranmalıdır. Öyleyse

$$b_k = \frac{1}{k} > 0$$

alalım.
Adım 2. Limiti hesaplayalım.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}.$$

$x_k = \frac{1}{k}$ dizisi sıfırdan farklı terimlere sahiptir ve $x_k \to 0$'dır. Fonksiyon limiti için dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) ile

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

temel limitinden (bkz. Analiz 1)

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin x_k}{x_k} = 1$$

elde ederiz.
Adım 3. Sonuç. $0 < L = 1 < \infty$ olduğundan Teorem 35.3 gereği seri harmonik seriyle aynı karakterdedir. Harmonik seri ıraksak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}$ serisi ıraksaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Genel terimin sıfıra gitmesinin ($\sin\frac{1}{k}\to 0$) burada da hiçbir şeyi kurtarmadığına dikkat ediniz.
■

Örnek 35.10 (Kosinüslü Bir Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k}\right)$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = 1-\cos\frac{1}{k}$ olsun. Her $k\geq 1$ için $0<\frac{1}{k}\leq 1<2\pi$ olduğundan $\cos\frac{1}{k}<1$'dir; yani $a_k>0$'dır.
Adım 1. Genel terimi tanınır hâle getirelim. Yarım açı özdeşliği

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

kullanılırsa

$$a_k = 2\sin^2\frac{1}{2k}$$

olur. Küçük x için $\sin x\approx x$ olduğundan $a_k\approx 2\left(\frac{1}{2k}\right)^2=\frac{1}{2k^2}$ beklenir. Öyleyse

$$b_k=\frac{1}{k^2}>0$$

seçelim.
Adım 2. Limiti hesaplayalım.

$$\frac{a_k}{b_k}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2k}}{\frac{1}{k^2}}=2k^2\sin^2\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2k}}{\frac{1}{2k}}\right)^2;$$

son eşitlikte $2k^2=\frac{1}{2}\cdot(2k)^2$ olmasını kullandık. $y_k=\frac{1}{2k}$ dizisi sıfırdan farklıdır ve $y_k\to 0$'dır; dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) ve Sinüs x Bölü x Limiti gereği $\frac{\sin y_k}{y_k}\to 1$'dir. Limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) ile

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Adım 3. Sonuç. $0<L=\frac{1}{2}<\infty$ ve $\sum\frac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan (Örnek 35.5), Teorem 35.3 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k}\right)$$

serisi yakınsaktır.
■

Örnek 35.11 (Küp Köklerin Farkından Oluşan Bir Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{k^3+1}-k\right)$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$a_k = \sqrt[3]{k^3+1} - k$ olsun. Küp kök fonksiyonu artandır ve $k^3+1 > k^3$ olduğundan $\sqrt[3]{k^3+1} > \sqrt[3]{k^3} = k$, yani $a_k > 0$'dır.

Adım 1. Genel terimi sadeleştirelim. İfade $\infty - \infty$ belirsizliğindedir; küplerin farkı özdeşliğiyle paydaya taşıyalım. $A = \sqrt[3]{k^3+1}$ ve $B = k$ olsun. O hâlde

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2} = \frac{(k^3+1) - k^3}{A^2 + AB + B^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(k^3+1)^2} + k\sqrt[3]{k^3+1} + k^2}.$$

Paydadaki üç terimin her biri k^2 mertebesindedir; öyleyse

$$b_k = \frac{1}{k^2} > 0$$

seçelim.

Adım 2. Limiti hesaplayalım.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2}{\sqrt[3]{(k^3+1)^2} + k\sqrt[3]{k^3+1} + k^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{(k^3+1)^2}}{k^2} + \frac{\sqrt[3]{k^3+1}}{k} + 1}.$$

Şimdi paydadaki iki kesri ayrı ayrı inceleyelim:

$$\frac{\sqrt[3]{k^3+1}}{k} = \sqrt[3]{\frac{k^3+1}{k^3}} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{k^3}} \to 1, \qquad \frac{\sqrt[3]{(k^3+1)^2}}{k^2} = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{k^3}}\right)^2 \to 1.$$

Burada $\dfrac{1}{k^3} \to 0$ olmasını ve küp kök fonksiyonunun sürekliliğini kullandık. Limit aritmetiği gereği

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

Adım 3. Sonuç. $0 < L = \dfrac{1}{3} < \infty$ ve $\sum \dfrac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan Teorem 35.3 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k^3+1} - k\right)$$

serisi yakınsaktır.

■

35.3.2 Asimptotik Eşdeğerlik

Son üç örnekte ortak bir kalıp göze çarpar: genel terimin karmaşık görünüşünü bir kenara bırakıp onun "gerçekte ne kadar büyük olduğunu" belirledik ve seriyi bu büyüklüğün serisiyle karşılaştırdık. Bu kalıbı bir kavram olarak adlandırmak, hem dili hem hesabı kısaltır.

Tanım 35.2 (Asimptotik Eşdeğerlik). (a_k) ve (b_k) dizileri verilsin ve yeterince büyük k için $b_k \neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$$

ise, (a_k) ile (b_k) dizileri **asimptotik olarak eşdeğerdir** (asymptotically equivalent) denir ve

$$a_k \sim b_k$$

yazılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sezgisel olarak bu, "k büyüdükçe a_k ile b_k arasındaki göreli fark sıfıra gider" demektir. Örneğin $\sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}$, $1-\cos\frac{1}{k} \sim \frac{1}{2k^2}$ ve $\frac{k+2}{k^2-k+1} \sim \frac{1}{k}$'dir; bu üç eşdeğerlik, yukarıdaki örneklerde hesapladığımız limitlerin bir başka söylenişidir (limit L çıktığında sabiti karşılaştırma terimine katmak yeter).

Önerme 35.2 (Asimptotik Eşdeğer Serilerin Karakteri). *Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ ve $b_k > 0$ olsun. Eğer $a_k \sim b_k$ ise (Tanım 35.2), yani*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$$

ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ile $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serileri aynı karakterdedir: ya ikisi de yakınsaktır ya da ikisi de ıraksaktır.

> ***İspat.***
> *Hipotez, Teorem 35.3'nin birinci maddesindeki limitin $L = 1$ değerini aldığını söyler. $0 < 1 < \infty$ olduğundan teoremin birinci maddesi doğrudan uygulanır ve iki serinin aynı karakterde olduğu elde edilir. Ayrıntıya inersek: $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için öyle bir k_0 vardır ki her $k \geq k_0$ için*
>
> $$\frac{1}{2}\,b_k < a_k < \frac{3}{2}\,b_k$$
>
> *olur. Sağdaki eşitsizlik, $\sum b_k$ yakınsaksa $\sum a_k$'nın da yakınsak olmasını; soldaki eşitsizlik, $\sum a_k$ yakınsaksa $\sum b_k$'nın da yakınsak olmasını verir. Iraksaklık ifadeleri bu iki gerektirmenin karşıt tersleridir.* ■

> ⚠ **Aynı karakter, aynı toplam demek değildir**
>
> $a_k \sim b_k$ olması iki serinin **toplamlarının** eşit olmasını gerektirmez, yalnızca yakınsak/ıraksak olma durumlarının aynı olmasını gerektirir. Örneğin $a_k = \frac{1}{k^2}$ ve $b_k = \frac{1}{k(k+1)}$ için $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k+1}{k} \to 1$'dir; iki seri de yakınsaktır ama toplamları $\frac{\pi^2}{6}$ ve 1 olup birbirinden farklıdır.
> Ayrıca $a_k \sim b_k$ ilişkisi, terimlerin **negatif olmama** koşuluyla birlikte kullanılmalıdır. İşaret değiştiren serilerde asimptotik eşdeğerlik aynı karakteri garanti etmez; buna Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık bölümünde döneceğiz.

Yöntemi özetleyelim: genel terimin baskın davranışını okuyup bir aday b_k seçeriz, $\frac{a_k}{b_k}$ limitini hesaplarız ve limit sıfırdan farklı ve sonluysa seri $\sum b_k$ ile aynı karakterdedir. Limit 0 ya da ∞ çıkarsa yalnızca tek bir yön elde ederiz; gerekirse başka bir b_k denenir.

35.4 Alıştırmalar

Alıştırma 35.1 (Pozitif Terimli Seriler Üzerine).

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^3+k}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}$ serisinin yakınsak olduğunu karşılaştırma testiyle gösteriniz ve toplamı için bir üst sınır veriniz.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \tan\frac{1}{k}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

f) Her k için $a_k \geq 0$ olsun ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ serisinin de yakınsak olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

g) Her k için $a_k \geq 0$ olsun ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ serisi de yakınsak olmak zorunda mıdır?

Çözüm.
a) $a_k = \dfrac{2k+1}{k^3+k}$ olsun; her $k \geq 1$ için $a_k > 0$'dır. Payın baskın terimi $2k$, paydanınki k^3 olduğundan oranları $\dfrac{2k}{k^3} = \dfrac{2}{k^2}$'dir. Karşılaştırma serisi olarak $b_k = \dfrac{1}{k^2}$ alalım. O hâlde

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{2k+1}{k^3+k} \cdot k^2 = \frac{2k^3+k^2}{k^3+k} = \frac{2+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}} \to \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

$0 < L = 2 < \infty$ ve $\sum \dfrac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan (Örnek 35.5), Teorem 35.3 gereği verilen seri **yakınsaktır**.
b) $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ olsun; $a_k > 0$'dır. Paydanın baskın terimi $\sqrt{k^2} = k$ olduğundan $b_k = \dfrac{1}{k}$ alalım:

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} \to 1.$$

$0 < L = 1 < \infty$ ve harmonik seri ıraksak olduğundan (Örnek 35.1) verilen seri **ıraksaktır**.
Bu sonuç doğrudan karşılaştırmayla da görülebilir: $k \geq 1$ için $\sqrt{k^2+1} \leq \sqrt{k^2+k^2} = k\sqrt{2}$ olduğundan $a_k \geq \dfrac{1}{k\sqrt{2}}$'dir ve $\sum \dfrac{1}{k\sqrt{2}}$ ıraksaktır.
c) Her $k \geq 1$ için $k \geq 1$ olduğundan

$$0 < \frac{1}{k\,2^k} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

olur. Sağ taraf, oranı $q = \dfrac{1}{2}$ olan geometrik serinin genel terimidir ve $\mid q \mid < 1$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

serisi yakınsaktır. Teorem 35.2 gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\,2^k}$ **yakınsaktır** ve kısmi toplamları 1'i aşamayacağından

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} \leq 1$$

olur.
d) $a_k = \tan\dfrac{1}{k}$ olsun. Her $k \geq 1$ için $0 < \dfrac{1}{k} \leq 1 < \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan $\tan\dfrac{1}{k} > 0$'dır ve tanımlıdır. $b_k = \dfrac{1}{k}$ alalım. $x_k = \dfrac{1}{k} \to 0$ ve $x_k \neq 0$ olduğundan, dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) ile

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\tan x_k}{x_k} = \frac{\sin x_k}{x_k} \cdot \frac{1}{\cos x_k} \to 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

buluruz; burada Sinüs x Bölü x Limiti ve kosinüsün sürekliliğinden $\cos x_k \to \cos 0 = 1$ olması kullanıldı. $0 < L = 1 < \infty$ ve harmonik seri ıraksak olduğundan verilen seri **ıraksaktır**.
e) $a_k = \dfrac{k!}{k^k}$ olsun; $a_k > 0$'dır. Genel terimi çarpanlarına ayıralım:

$$a_k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{k \cdot k \cdot k \cdots k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{3}{k} \cdots \frac{k}{k}.$$

Bu çarpımda $k \geq 2$ için ilk iki çarpan $\dfrac{1}{k}$ ve $\dfrac{2}{k}$, kalan çarpanların her biri ise 1'den küçük ya da eşittir. Öyleyse kalan çarpanları 1 ile değiştirerek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0 < a_k \le \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} = \frac{2}{k^2} \qquad (k \ge 2)$$

elde ederiz. $\sum \dfrac{2}{k^2} = 2\sum \dfrac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan (Örnek 35.5), Önerme 35.1 ($k_0 = 2$ ile) gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k!}{k^k}$ serisi **yakınsaktır**.

f) $\sqrt{a_k} \ge 0$ ve $\dfrac{1}{k} > 0$ olduğundan terimler negatif değildir. İki negatif olmayan sayı için aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliği

$$\sqrt{uv} \le \frac{u+v}{2}$$

biçimindedir; bu, $\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \ge 0$ eşitsizliğinin açılmasından çıkar. Şimdi $u = a_k$ ve $v = \dfrac{1}{k^2}$ alalım:

$$\frac{\sqrt{a_k}}{k} = \sqrt{a_k \cdot \frac{1}{k^2}} \le \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{k^2}\right).$$

$\sum a_k$ yakınsaktır (hipotez) ve $\sum \dfrac{1}{k^2}$ yakınsaktır (Örnek 35.5); yakınsak iki serinin toplamı ve sabit katı yine yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{k^2}\right)$$

serisi yakınsaktır. Her k için $0 \le \dfrac{\sqrt{a_k}}{k} \le \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{1}{k^2}\right)$ olduğundan Teorem 35.2 gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_k}}{k}$ serisi **yakınsaktır**.

g) Hayır, zorunlu değildir. $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ alalım. $a_k \ge 0$'dır ve $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ yakınsaktır (Örnek 35.5). Buna karşın

$$\sqrt{a_k} = \frac{1}{k}$$

olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ harmonik seridir ve ıraksaktır (Örnek 35.1).

Bu örnek, (f) şıkkındaki $\dfrac{1}{k}$ çarpanının süs olmadığını gösterir: karekök almak terimleri büyüttüğünden yakınsaklık kaybolabilir, ancak $\dfrac{1}{k}$ ile çarpmak bu büyümeyi tam olarak dengeler.

■

Bu bölümde kurduğumuz bütün testler, elimizde karakteri bilinen bir ölçü serisi bulunmasına dayanıyordu; şimdiye dek listemizde yalnızca geometrik seri, harmonik seri ve $\sum \frac{1}{k^2}$ var. Bir sonraki bölümde, azalan terimli serilerde çok az terime bakarak karar vermeyi sağlayan güçlü bir araç kuracak ve onunla bütün bir seri ailesinin karakterini bir çırpıda belirleyeceğiz: Cauchy Yoğunlaştırma Testi ve p-Serileri.

 CC BY-NC-SA 4.0

36. Cauchy Yoğunlaştırma Testi ve p-Serileri

Pozitif Terimli Seriler ve Karşılaştırma Testleri bölümünde pozitif terimli bir serinin yakınsaklığının, kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasına denk düştüğünü gördük; ardından bu gözlemi karşılaştırma testlerine dönüştürdük. Karşılaştırma testleri güçlüdür ama tek başlarına eksiktir: bir seriyi karşılaştırabilmek için, karakterini önceden bildiğimiz bir **ölçü serisine** ihtiyaç duyarız. Şimdiye kadar elimizdeki tek ölçü, geometrik seriydi. Oysa geometrik seri, yakınsaklık sınırının çok uzağında durur: $\sum r^k$ ya çok hızlı yakınsar ya da terimleri sıfıra bile gitmeden ıraksar. Aradaki geniş bölgeyi — terimleri sıfıra giden, ama yeterince hızlı gidip gitmediği belirsiz olan serileri — ölçmek için daha ince bir aileye gerek vardır. O aile, bu bölümde kuracağımız ***p*-serileri** ailesidir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Bu ailenin içinde $p = 1$ değerinde bir eşik bulunur: $p > 1$ için seri yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır. Yani harmonik seri $\sum 1/n$, yakınsaklık ile ıraksaklık arasındaki sınırın tam üstünde durur. Bu eşiği kurmanın en kısa yolu, terimleri 2^k uzunluğunda bloklara ayırmaktır — Nicole Oresme'in 14. yüzyılda harmonik serinin ıraksaklığını göstermek için kullandığı fikrin ta kendisi. Cauchy, bu fikri genel bir teste dönüştürmüştür: **azalan** ve negatif olmayan bir dizinin serisi, yalnızca 2^k indislerindeki terimlerine bakılarak incelenebilir. Bütün seriyi bir "yoğunlaştırılmış" seriye sıkıştırdığımız için teste **yoğunlaştırma testi** (condensation test) denir.

Aynı eşiği bulmanın ikinci bir yolu daha vardır ve bu yol, serilerle integralleri birbirine bağlar. Azalan pozitif bir f fonksiyonu için $\sum f(n)$ toplamı, $\int_1^{\infty} f$ integralinin dikdörtgenlerle yapılmış bir yaklaşımıdır; dolayısıyla ikisinin karakteri aynıdır. Bu gözlem **integral testini** verir. İntegral testinin yoğunlaştırma testine göre bir üstünlüğü vardır: yalnızca yakınsaklığı söylemekle kalmaz, seriden geriye kalan kuyruğun **ne kadar** olduğunu da sayısal olarak kestirir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: blok gruplama fikri ve Cauchy yoğunlaştırma testinin tam ispatı; testteki azalanlık koşulunun neden kaldırılamayacağı; harmonik serinin yoğunlaştırma ile bir satırda ıraksaması; p-serilerinin yakınsaklık ölçütü ve ispatı; $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ ve $\sum \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^p}$ gibi giderek incelen sınır serileri; genelleştirilmiş integral kavramı, integral testi ve tam ispatı; son olarak serinin kalanının $\int_{n+1}^{\infty} f \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f$ biçiminde kestirimi ve bu kestirimin sayısal bir hesapta işletilmesi.

36.1 Yoğunlaştırma Fikri

Fikri, önce harmonik seri üzerinde çıplak hâliyle görelim. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinin terimlerini, uzunlukları $1, 2, 4, 8, \ldots$ olan ardışık bloklara ayıralım:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1\ \text{terim}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2\ \text{terim}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4\ \text{terim}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{8\ \text{terim}} + \cdots$$

Her bloktaki terimler azalan olduğundan, bir bloğun toplamı, blok uzunluğu ile bloğun **en küçük** terimi çarpılarak alttan kestirilebilir:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

Her blok en az $\frac{1}{2}$ getirdiğine ve blok sayısı sınırsız olduğuna göre kısmi toplamlar üstten sınırlı olamaz; harmonik seri ıraksaktır. Aynı bloğu bu kez blok uzunluğu ile bloğun **en büyük** terimini çarparak üstten de kestirebiliriz:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\le 2\cdot\frac{1}{3}\le 2\cdot\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\le 4\cdot\frac{1}{5}\le 4\cdot\frac{1}{4}.$$

İki kestirimde de karşımıza çıkan büyüklük aynıdır: 2^k çarpı a_{2^k}. Genel bir azalan dizide de durum böyledir. $(a_{2^j}+a_{2^j+1}+\cdots+a_{2^{j+1}-1})$ bloğunda tam 2^j terim vardır; dizi azalan olduğu için bu terimlerin hepsi $a_{2^{j+1}}$ ile a_{2^j} arasındadır. Öyleyse

$$2^j a_{2^{j+1}}\le \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n\le 2^j a_{2^j}.$$

Bu iki eşitsizlik, serinin bütün bilgisini yalnızca $a_1, a_2, a_4, a_8, \ldots$ terimlerinde topluyor: seriyi $2^k a_{2^k}$ sayılarından oluşan çok daha seyrek bir seriye "yoğunlaştırıyoruz". Bir sonraki adım, bu sezgiyi kesin bir teoreme çevirmektir.

> **i** Neden ikinin kuvvetleri?
>
> Blok uzunluklarını 2^j seçmemizin nedeni, bu uzunlukların **hem geometrik olarak büyümesi hem de bütün doğal sayıları tüketmesidir**: geometrik büyüme, blok başına düşen terim sayısının a_{2^j}'nin küçülmesini dengelemesini sağlar; tüketicilik ise hiçbir terimin kaybolmamasını. Aynı akıl yürütme 3'ün kuvvetleriyle de yapılabilir; ikinin kuvvetleri yalnızca en kullanışlı seçimdir.

36.2 Cauchy Yoğunlaştırma Testi

Şimdi teoremi kuralım. Dikkat edilecek tek şey, dizinin **negatif olmaması** ve **azalan** olmasıdır; bu iki koşul olmadan teorem çöker.

Teorem 36.1 (Cauchy Yoğunlaştırma Testi). *$(a_n)_{n\ge 1}$ negatif olmayan ve azalan bir dizi olsun; yani her n için*

$$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge 0.$$

O hâlde

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{yakınsaktır} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots \quad \text{yakınsaktır.}$$

*İkinci seriye birincinin **yoğunlaştırılmış serisi** denir.*

İspat.
Serilerin kısmi toplamlarını adlandıralım:

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{j=1}^{n} a_j,\qquad t_k=\sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}=a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^k a_{2^k}.$$

*Bütün terimler negatif olmadığından (s_n) ve (t_k) dizilerinin ikisi de **artandır**. Monoton yakınsaklık teoremi (bkz. Analiz 1) gereği artan bir dizi ancak ve ancak üstten sınırlıysa yakınsaktır. Dolayısıyla ispatı iki taraflı bir **sınırlılık** karşılaştırmasına indirgemiş oluyoruz: (s_n)'nin sınırlılığı ile (t_k)'nin sınırlılığının denk olduğunu göstereceğiz. Bunun için iki eşitsizliği ayrı ayrı kuralım.*
Adım 1: $n\le 2^{k+1}-1$ ise $s_n\le t_k$.
(s_n) artan olduğundan $n\le 2^{k+1}-1$ için $s_n\le s_{2^{k+1}-1}$'dir; öyleyse $s_{2^{k+1}-1}$'i kestirmek yeterlidir. Terimleri, ilk indisleri 2'nin kuvvetleri olan bloklara ayıralım:

$$s_{2^{k+1}-1}=\underbrace{a_1}_{j=0}+\underbrace{(a_2+a_3)}_{j=1}+\underbrace{(a_4+a_5+a_6+a_7)}_{j=2}+\cdots+\underbrace{(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})}_{j=k}.$$

Burada j'inci blok, indisleri 2^j ile $2^{j+1}-1$ arasında olan terimlerden oluşur ve bu blokta tam

$$(2^{j+1}-1)-2^j+1=2^j$$

 CC BY-NC-SA 4.0

terim vardır. Blok içindeki her n indisi $n \geq 2^j$ sağladığından ve (a_n) azalan olduğundan bloğun her terimi a_{2^j}'yi aşmaz:

$$\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq 2^j a_{2^j}.$$

Bu kestirimleri $j = 0, 1, \ldots, k$ için toplarsak

$$s_{2^{k+1}-1} \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = t_k$$

elde ederiz. Böylece $n \leq 2^{k+1} - 1$ olan her n için $s_n \leq t_k$ olur.

Adım 2: $n \geq 2^k$ ise $s_n \geq \frac{1}{2} t_k$.

*Yine (s_n) artan olduğundan $n \geq 2^k$ için $s_n \geq s_{2^k}$'dır; s_{2^k}'yı alttan kestirelim. Bu kez terimleri, **son** indisleri 2'nin kuvvetleri olacak biçimde gruplayalım:*

$$s_{2^k} = a_1 + \underbrace{a_2}_{j=1} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{j=2} + \underbrace{(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}_{j=3} + \cdots + \underbrace{(a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})}_{j=k}.$$

Burada $j \geq 1$ için j'inci blok, indisleri $2^{j-1} + 1$ ile 2^j arasında olan terimlerden oluşur ve bu blokta

$$2^j - (2^{j-1} + 1) + 1 = 2^j - 2^{j-1} = 2^{j-1}$$

terim vardır. Blok içindeki her n indisi $n \leq 2^j$ sağladığından ve (a_n) azalan olduğundan bloğun her terimi en az a_{2^j} kadardır:

$$\sum_{n=2^{j-1}+1}^{2^j} a_n \geq 2^{j-1} a_{2^j} = \frac{1}{2} \cdot 2^j a_{2^j}.$$

Bu kestirimleri $j = 1, 2, \ldots, k$ için toplayıp başa a_1 terimini eklersek

$$s_{2^k} \geq a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2}(t_k - a_1) = \frac{1}{2} t_k + \frac{1}{2} a_1 \geq \frac{1}{2} t_k$$

olur (son adımda $a_1 \geq 0$ kullanıldı). Böylece $n \geq 2^k$ olan her n için $s_n \geq \frac{1}{2} t_k$ elde edilir.

Adım 3: Yoğunlaştırılmış seri yakınsaksa asıl seri de yakınsaktır.

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ yakınsak olsun ve toplamı T ile gösterelim. (t_k) artan olduğundan her k için $t_k \leq T$'dir. Şimdi herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ alalım. Bernoulli eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği her $k \geq 0$ için

$$2^{k+1} = (1+1)^{k+1} \geq 1 + (k+1) = k + 2$$

olduğundan, $k = n$ seçilirse $2^{n+1} \geq n + 2$, yani $n \leq 2^{n+1} - 2 \leq 2^{n+1} - 1$ olur. Böylece Adım 1'i $k = n$ ile uygulayabiliriz:

$$s_n \leq t_n \leq T.$$

Demek ki (s_n) artan ve üstten T ile sınırlıdır; Monoton Yakınsaklık Teoremi gereği yakınsaktır. Yani $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır ve toplamı T'yi aşmaz.

Adım 4: Asıl seri yakınsaksa yoğunlaştırılmış seri de yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun ve toplamı S ile gösterelim. (s_n) artan olduğundan her n için $s_n \leq S$'dir. Adım 2'yi $n = 2^k$ ile uygularsak, her $k \geq 0$ için

$$\frac{1}{2} t_k \leq s_{2^k} \leq S, \qquad \text{yani} \qquad t_k \leq 2S.$$

Demek ki (t_k) artan ve üstten $2S$ ile sınırlıdır; Monoton Yakınsaklık Teoremi gereği yakınsaktır.

Adım 3 ile Adım 4 birlikte istenen denkliği verir. Terimler negatif olmadığından, iki seriden biri ıraksadığında kısmi toplamları $+\infty$'a gider; dolayısıyla seriler ya birlikte yakınsar ya birlikte $+\infty$'a ıraksar.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

İspattaki eşitsizlikler yalnızca yakınsaklığı değil, toplamlar arasındaki büyüklük ilişkisini de veriyor. Adım 3'te her n için $s_n \le T$ bulmuştuk. Adım 2'nin sonunda attığımız $\frac{1}{2}a_1$ terimini tutsaydık, Adım 4 bize $\frac{1}{2}t_k + \frac{1}{2}a_1 \le S$, yani $t_k \le 2S - a_1$ verirdi. Limite geçerek şunu yazabiliriz.

i Toplamlar arasındaki bağ

(a_n) negatif olmayan ve azalan, seriler yakınsak olsun. $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $T = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ ise

$$S \le T \le 2S - a_1.$$

Yani yoğunlaştırılmış toplam, asıl toplamı iki katından fazla aşamaz: seriyi seyrelttiğimizde toplam yalnızca sınırlı bir çarpanla bozulur, karakteri hiç bozulmaz.

Testi kullanırken sık karşılaşılan bir ayrıntı, serinin $n = 1$'den değil, örneğin $n = 2$ ya da $n = 3$'ten başlamasıdır. Bu bir sorun çıkarmaz.

i Serinin başlangıç indisi

Bir seriden sonlu sayıda terim atmak ya da başına sonlu sayıda terim eklemek yakınsaklığı değiştirmez. Dolayısıyla Teorem 36.1, $N \ge 1$ olmak üzere $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ biçimindeki bir seriye de uygulanabilir; bu durumda dizinin **yalnızca $n \ge N$ için** negatif olmayan ve azalan olması yeterlidir ve yoğunlaştırılmış seri, $2^k \ge N$ koşulunu sağlayan k'ler üzerinden alınır:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \sum_{2^k \ge N} 2^k a_{2^k} \text{ yakınsak}\ .$$

Aynı gerekçeyle, dizinin **bir yerden sonra** azalan olması da yeterlidir: azalanlığın bozulduğu ilk sonlu blok atılır, kalan kuyruğa teorem uygulanır.

Şimdi teoremin hipotezlerine dönelim. Negatif olmama koşulu, kısmi toplamların artan olması için gereklidir. Azalanlık koşulu ise çok daha kritiktir: onsuz denkliğin **iki yönü de** bozulur.

⚠ Azalanlık koşulu kaldırılamaz

Aşağıdaki iki dizi de negatif değildir ama azalan değildir; her ikisinde de yoğunlaştırma testinin sonucu geçersizdir.

Yakınsak seri, ıraksak yoğunlaştırılmış seri. Bir $k \ge 0$ tam sayısı için $n = 2^k$ biçimindeyse $a_n = 2^{-k}$, aksi hâlde $a_n = 0$ olsun. Bu durumda sıfırdan farklı terimler yalnızca $n = 1, 2, 4, 8, \ldots$ indislerindedir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2 < \infty$$

olduğundan seri yakınsaktır. Oysa yoğunlaştırılmış seri

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

olup ıraksaktır.

Iraksak seri, yakınsak yoğunlaştırılmış seri. Bu kez n ikinin bir kuvvetiyse $a_n = 0$, aksi hâlde $a_n = \frac{1}{n}$ olsun. Yoğunlaştırılmış seri $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot 0 = 0$ olup yakınsaktır. Asıl serinin kısmi toplamları ise

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{2^k \le N} \frac{1}{2^k} \ge \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2$$

sağlar; harmonik serinin kısmi toplamları sınırsız olduğundan bu seri ıraksaktır.

Görüldüğü gibi azalanlık, "2^k indisindeki terim, kendisinden sonraki bloğu temsil eder" sezgisinin tek dayanağıdır; bu dayanak kalkınca yoğunlaştırma hiçbir şey söylemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Testi ilk kez, ıraksaklığını başka yollardan bildiğimiz bir seride çalıştıralım.

Örnek 36.1 (Harmonik Serinin Yoğunlaştırma ile Iraksaklığı). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisinin ıraksak olduğunu yoğunlaştırma testiyle gösteriniz.

Çözüm.
$a_n = \frac{1}{n}$ olsun. Her n için $a_n > 0$'dır ve $n < n+1$ olduğundan $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, yani (a_n) azalandır. Teorem 36.1'nin hipotezleri sağlanıyor.
Yoğunlaştırılmış serinin genel terimini hesaplayalım:

$$2^k a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Öyleyse yoğunlaştırılmış seri

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

serisidir. Bu serinin kısmi toplamları $t_k = k + 1$ olup sınırsızdır; seri ıraksaktır. Teorem 36.1 gereği asıl seri, yani harmonik seri de ıraksaktır.
Bu hesap, bölümün başındaki Oresme gruplamasının tam olarak ne olduğunu da açıklıyor: her blok en az $\frac{1}{2}$ getiriyordu; yoğunlaştırılmış serinin her teriminin 1 olması, blokların toplamının $\frac{1}{2}$ ile 1 arasında kalmasının bir başka ifadesidir.
■

36.3 p-Serileri: Riemann Serileri

Artık asıl hedefe gelebiliriz. Aşağıdaki seri ailesine **Riemann serisi** ya da kısaca **p-serisi** (p-series) denir. Bu aile, pozitif terimli serilerin karşılaştırma ölçüsü olarak geometrik seriden çok daha esnektir, çünkü p parametresi yakınsaklık eşiğine istendiği kadar yaklaşabilir.

Teorem 36.2 (Riemann Serisi Teoremi). *$p \in \mathbb{R}$ olsun.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

serisi $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır.

İspat.
İki durum ayrı ayrı incelenir.
Durum 1: $p \leq 0$. *Bu durumda $-p \geq 0$ olduğundan genel terim*

$$a_n = \frac{1}{n^p} = n^{-p}$$

biçimindedir. $p = 0$ ise $a_n = 1$; $p < 0$ ise $-p > 0$ olduğundan $n \geq 1$ için $n^{-p} \geq 1^{-p} = 1$'dir. Her iki alt durumda da her n için $a_n \geq 1$ olur, dolayısıyla $a_n \not\to 0$. Iraksaklık testi (Sonuç 34.1) gereği seri ıraksaktır. Demek ki $p \leq 0$ durumu, yoğunlaştırma testine hiç başvurulmadan, yalnızca genel terime bakılarak kapanıyor.
Durum 2: $p > 0$. *Şimdi $a_n = \frac{1}{n^p}$ dizisi pozitiftir. Ayrıca $p > 0$ için $n \mapsto n^p$ artan olduğundan $n < n+1 \Rightarrow n^p < (n+1)^p \Rightarrow a_n > a_{n+1}$, yani (a_n) azalandır. Teorem 36.1 uygulanabilir.*
Yoğunlaştırılmış serinin genel terimini hesaplayalım. $\left(2^k\right)^p = 2^{kp}$ olduğundan

$$2^k a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p} = \frac{2^k}{2^{kp}} = 2^{k-kp} = 2^{k(1-p)} = \left(2^{1-p}\right)^k.$$

Demek ki yoğunlaştırılmış seri, oranı

$$r = 2^{1-p} > 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

*olan bir **geometrik seridir**:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k.$$

Geometrik serinin karakterini hatırlayalım. $r \neq 1$ için kısmi toplamlar

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

biçimindedir. $0 < r < 1$ ise $r^{m+1} \to 0$ olduğundan (bkz. Analiz 1) kısmi toplamlar $\dfrac{1}{1-r}$ sayısına yakınsar, yani seri yakınsaktır. $r \geq 1$ ise her k için $r^k \geq 1$ olur, genel terim sıfıra gitmez ve seri ıraksar. Geriye r ile p arasındaki ilişkiyi çözmek kalıyor. 2^x fonksiyonu artan olduğundan

$$r < 1 \Leftrightarrow 2^{1-p} < 2^0 \Leftrightarrow 1-p < 0 \Leftrightarrow p > 1,$$

$$r \geq 1 \Leftrightarrow 1-p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 1.$$

Böylece: $p > 1$ ise yoğunlaştırılmış seri yakınsak, $0 < p \leq 1$ ise ıraksaktır. Teorem 36.1 gereği asıl seri de sırasıyla yakınsak ve ıraksaktır.
Durum 1 ile Durum 2 birleştirildiğinde, seri $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır.
■

Teoremi tek bir denklik cümlesine çevirmek, ileride sürekli başvuracağımız biçimidir.

Sonuç 36.1 (p-Serisi Ölçütü). *Her $p \in \mathbb{R}$ için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow p > 1.$$

Aynı ölçüt, serinin herhangi bir $N \geq 1$ indisinden başlaması durumunda da geçerlidir; çünkü sonlu sayıda terim yakınsaklığı etkilemez.

Bu ölçütün pratikteki değeri, artık karşılaştırma testlerinde kullanacağımız ölçü serilerinin bir **ailesine** sahip olmamızdır. Birkaç somut değeri gözden geçirelim.

Örnek 36.2 (Bazı p-Serilerinin Karakteri). Aşağıdaki serilerin yakınsak mı ıraksak mı olduğunu belirleyiniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1{,}001}}$

Çözüm.
Hepsinde tek yapılacak iş, üssü okuyup Sonuç 36.1'nü uygulamaktır.

a) Burada $p = 2$'dir. $2 > 1$ olduğundan seri **yakınsaktır**. Bu serinin toplamının $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$ olduğu bilinir; ancak bu değeri bulmak, yakınsaklığı göstermekten çok daha derin araçlar gerektirir. Yakınsaklık, üssün 1'i aşmasından ibarettir.

 CC BY-NC-SA 4.0

b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{1/2}}$ olduğundan $p = \dfrac{1}{2}$'dir. $\dfrac{1}{2} \le 1$ olduğundan seri **ıraksaktır**. Terimler sıfıra gider ama yeterince hızlı gitmez: hatta harmonik serinin terimlerinden daha yavaş azalırlar, çünkü $n \ge 1$ için $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ge \dfrac{1}{n}$'dir.
c) $p = \dfrac{3}{2} > 1$ olduğundan seri **yakınsaktır**. Bu seri ile (b) şıkkındaki seri arasındaki tek fark, üssün $\dfrac{1}{2}$'den $\dfrac{3}{2}$'ye çıkmasıdır; ama bu fark karakteri tümüyle değiştirir.
d) $p = 1{,}001 > 1$ olduğundan seri **yakınsaktır**. Bu örnek, eşiğin ne kadar keskin olduğunu gösterir: $p = 1$ için seri ıraksaktır, ama p birden ne kadar az fazla olursa olsun seri yakınsar. Öte yandan yakınsama son derece yavaştır: bölümün sonunda kuracağımız kalan kestirimi (Önerme 36.1), $p > 1$ için kuyruğun en az $\dfrac{(n+1)^{1-p}}{p-1}$ kadar olduğunu söyler. $p = 1{,}001$ için $\dfrac{1}{p-1} = 1000$ olduğundan, kuyruğu 10^{-3}'ün altına indirmek $n > 10^{6000}$ gerektirir. Seri yakınsaktır, ama toplamına yaklaşmak hesap yoluyla akla gelebilecek her ölçeğin dışındadır.
Buna karşılık $p = 0{,}999$ alsaydık seri **ıraksak** olurdu. Demek ki $p = 1$ eşiği, iki tarafında da davranışın neredeyse ayırt edilemez göründüğü, buna karşın karakterin kesin biçimde ayrıldığı bir sınırdır.
■

Eşik nerede?

p-serileri, yakınsaklık sınırını **ikiye böler** ama sınırın kendisine değmezler: $p > 1$ tarafı yakınsak, $p \le 1$ tarafı ıraksaktır ve harmonik seri tam sınırın üzerindedir. Bu yüzden bir seriyi p-serileriyle karşılaştırmak çoğu zaman işe yarar; ancak karşılaştırma "sınıra çok yakın" serilerde başarısız olabilir. Örneğin $\sum \frac{1}{n \ln n}$ serisi her $p > 1$ için $\sum \frac{1}{n^p}$'den yavaş, $p = 1$ için harmonik seriden hızlı azalır; hiçbir p-serisiyle doğrudan karşılaştırılamaz. Sonraki kısımda göreceğimiz logaritmalı seriler, sınırı bir kat daha inceltmek içindir.

36.4 Logaritmalı Seriler

Yoğunlaştırma testinin asıl gücü, p-serilerinin ötesine geçtiğimizde ortaya çıkar. Terimlerinde logaritma bulunan serilerde, $\ln\left(2^k\right) = k \ln 2$ eşitliği sayesinde logaritma bir doğrusal ifadeye dönüşür; böylece karmaşık görünen bir seri, bir p-serisine indirgenir. Bunun tipik örneğini görelim.

Örnek 36.3 (Logaritmalı Serinin Karakteri). $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

serisinin karakterini p'ye göre belirleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: Hipotezlerin denetimi. Genel terim

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}, \qquad n \ge 2$$

olsun. $n \ge 2$ için $\ln n \ge \ln 2 > 0$ olduğundan $(\ln n)^p > 0$'dır; dolayısıyla her $n \ge 2$ için $a_n > 0$.
Azalanlığı inceleyelim. $p \ge 0$ ise $n \mapsto n$ ve $n \mapsto (\ln n)^p$ fonksiyonlarının ikisi de $[2, \infty)$ üzerinde pozitif ve azalmayandır; çarpımları $n(\ln n)^p$ artandır, dolayısıyla (a_n) azalandır.
$p < 0$ ise $q = -p > 0$ yazalım; bu durumda $a_n = \dfrac{(\ln n)^q}{n}$ olur. $f(x) = \dfrac{(\ln x)^q}{x}$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = \frac{q(\ln x)^{q-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^q}{x^2} = \frac{(\ln x)^{q-1}(q - \ln x)}{x^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olup $\ln x > q$, yani $x > e^q$ olduğunda negatiftir. Monotonluk testi (Sonuç 8.3) gereği f, (e^q, ∞) üzerinde azalandır; dolayısıyla (a_n) **bir yerden sonra** azalandır. Yoğunlaştırma testi için bu yeterlidir: azalanlığın bozulduğu sonlu baş kısım atılır, kalan kuyruğa test uygulanır ve yakınsaklık sonlu sayıda terimden etkilenmez.

Adım 2: Yoğunlaştırılmış serinin kurulması. Seri $n = 2$'den başladığından yoğunlaştırılmış seri, $2^k \geq 2$, yani $k \geq 1$ üzerinden alınır. a_{2^k}'yı hesaplayalım:

$$a_{2^k} = \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^p}.$$

Burada logaritmanın temel özelliği devreye girer:

$$\ln 2^k = k \ln 2.$$

Bu ifadenin p'inci kuvvetini alırken çarpanları ayırabiliriz:

$$\left(\ln 2^k\right)^p = (k \ln 2)^p = k^p (\ln 2)^p.$$

Dikkat: $(\ln 2)^p$ çarpanı k'den bağımsız, **sabit** ve pozitif bir sayıdır ($\ln 2 \approx 0{,}6931 > 0$). Yerine koyalım:

$$a_{2^k} = \frac{1}{2^k \cdot k^p (\ln 2)^p}.$$

Şimdi yoğunlaştırılmış serinin genel terimi:

$$2^k a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k \cdot k^p (\ln 2)^p} = \frac{1}{k^p (\ln 2)^p}.$$

Burada 2^k çarpanları sadeleşti; geriye kalan ifadede k'ye bağlı tek şey k^p'dir. Sabiti toplamın önüne alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p (\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Adım 3: Sonuç. $\dfrac{1}{(\ln 2)^p}$ pozitif bir sabittir; bir seriyi sıfırdan farklı bir sabitle çarpmak karakterini değiştirmez. Öyleyse yoğunlaştırılmış seri, $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$ p-serisiyle aynı karakterdedir ve Sonuç 36.1 gereği ancak ve ancak $p > 1$ için yakınsaktır. Teorem 36.1 gereği asıl seri de aynı karakterdedir:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow p > 1.$$

Özel olarak $p = 1$ için $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ ıraksak, $p = 2$ için $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ yakınsaktır.

■

> **i** Logaritmanın tabanı önemsizdir
>
> Yukarıdaki hesapta doğal logaritma kullandık. Herhangi bir $b > 1$ tabanında da $\log_b 2^k = k \log_b 2$ geçerli olur; tek değişen, sabit çarpanın $(\log_b 2)^p$ olmasıdır. Sabit çarpan karakteri etkilemediğinden eşik yine $p = 1$'dir; örneğin $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ ile $\sum \frac{1}{n(\log_{10} n)^p}$ aynı karakterdedir.

Peki $p = 1$'de ıraksayan $\sum \frac{1}{n \ln n}$ serisini de bir eşik olarak alıp bir kat daha inceltebilir miyiz? Evet; yoğunlaştırma testini **ikinci kez** uygulamak yeterlidir.

Örnek 36.4 (Çift Logaritmalı Seri). $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: Tanımlılık ve hipotezler. $\ln\ln n$ ifadesinin tanımlı ve pozitif olması için $\ln n > 1$, yani $n > e \approx 2{,}718$ gerekir; bu yüzden seri $n = 3$'ten başlatılmıştır. Gerçekten $\ln\ln 3 = \ln(1{,}0986) \approx 0{,}094 > 0$'dır.
$p \geq 0$ ise n, $\ln n$ ve $(\ln\ln n)^p$ çarpanlarının üçü de $n \geq 3$ üzerinde pozitif ve azalmayandır; çarpımları artan, dolayısıyla genel terim azalandır. $p < 0$ ise, bir önceki örnekteki gibi genel terim ancak bir yerden sonra azalandır; sonlu baş kısım atılarak yine yoğunlaştırma testi uygulanabilir.
Adım 2: Birinci yoğunlaştırma. $2^k \geq 3$, yani $k \geq 2$ için

$$a_{2^k} = \frac{1}{2^k \cdot \ln 2^k \cdot (\ln\ln 2^k)^p} = \frac{1}{2^k \cdot k\ln 2 \cdot (\ln(k\ln 2))^p}$$

olur; burada yine $\ln 2^k = k\ln 2$ kullanıldı. Buradan

$$b_k := 2^k a_{2^k} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{k(\ln(k\ln 2))^p}.$$

$\ln(k\ln 2) = \ln k + \ln\ln 2$ olduğuna dikkat edelim. $\ln 2 \approx 0{,}6931 < 1$ olduğundan $c := \ln\ln 2 \approx -0{,}3665$ **negatif** bir sabittir. Yine de $k \geq 2$ için $\ln k + c \geq \ln 2 - 0{,}3665 \approx 0{,}327 > 0$ olduğundan ifade tanımlı ve pozitiftir.
Adım 3: İkinci yoğunlaştırmaya indirgeme. b_k dizisini, karakterini Örnek 36.3'de yoğunlaştırma testiyle belirlediğimiz

$$c_k = \frac{1}{k(\ln k)^p}, \qquad k \geq 2$$

dizisiyle karşılaştıralım. Oranı hesaplayalım:

$$\frac{b_k}{c_k} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{k(\ln k)^p}{k(\ln k + c)^p} = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{\ln k}{\ln k + c}\right)^p.$$

$k \to \infty$ iken $\ln k \to \infty$ olduğundan

$$\frac{\ln k}{\ln k + c} = \frac{1}{1 + \frac{c}{\ln k}} \to 1$$

olur (bkz. Analiz 1). Dolayısıyla

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{c_k} = \frac{1}{\ln 2} \in (0, \infty).$$

Limit sıfırdan farklı ve sonlu olduğundan, limit karşılaştırma testi (Teorem 35.3) gereği $\sum b_k$ ile $\sum c_k$ aynı karakterdedir. Örnek 36.3'de $\sum_{k\geq 2} c_k$ serisinin ancak ve ancak $p > 1$ için yakınsadığını göstermiştik.
Adım 4: Sonuç. $\sum_k b_k = \sum_k 2^k a_{2^k}$ yoğunlaştırılmış serisi ancak ve ancak $p > 1$ için yakınsaktır; Teorem 36.1 gereği asıl seri de öyledir:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p} \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow p > 1.$$

Bu sonuca varırken yoğunlaştırma testini toplam **iki kez** kullandık: bir kez asıl seriye, bir kez de Örnek 36.3'nin içinde $\sum c_k$ serisine.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonsuz bir incelme merdiveni

Elde ettiğimiz üç sonuç bir örüntü oluşturuyor. $L_0(n) = n$, $L_1(n) = \ln n$, $L_2(n) = \ln\ln n$, $L_3(n) = \ln\ln\ln n$, ... yazarsak (yani $L_{j+1} = \ln \circ L_j$), her $m \geq 0$ için

$$\sum_{n \geq N_m} \frac{1}{L_0(n)\, L_1(n) \cdots L_{m-1}(n)\, (L_m(n))^p}$$

serisi ancak ve ancak $p > 1$ için yakınsaktır (N_m, bütün logaritmaların tanımlı ve pozitif olmasını sağlayan bir başlangıç indisidir; $m = 0$ için paydadaki çarpım boştur). $m = 0$ durumu $\sum \frac{1}{n^p}$ p-serisini, $m = 1$ durumu $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ serisini (Örnek 36.3), $m = 2$ durumu $\sum \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^p}$ serisini (Örnek 36.4) verir. Her adımda ıraksaklık ile yakınsaklık arasındaki sınır biraz daha inceltilir, ama sınır hiçbir zaman kapanmaz: **yakınsak seriler ile ıraksak seriler arasında "en yavaş yakınsayan seri" diye bir şey yoktur.** Bu yüzden hiçbir tek ölçü serisi, bütün pozitif terimli serileri sınıflandırmaya yetmez.

36.5 İntegral Testi

Yoğunlaştırma testi, azalan bir dizinin serisini seyrek bir alt dizi üzerinden okuyordu. Şimdi aynı işi bambaşka bir araçla, integralle yapacağız. Fikir çok basittir: azalan pozitif bir f fonksiyonu için $f(n)$ sayısı, $[n, n+1]$ aralığı üzerinde yüksekliği $f(n)$ olan bir dikdörtgenin alanıdır ve bu dikdörtgen, f'nin grafiğinin altındaki alanı üstten kestirir. Serinin toplamı, bu dikdörtgenlerin toplam alanı; integral ise eğrinin altındaki alandır. İkisinin bir arada sonlu ya da bir arada sonsuz olması beklenir.
Bunu yapabilmek için önce sonsuz bir aralık üzerindeki integralin ne demek olduğunu söylememiz gerekiyor; çünkü Riemann İntegrallenebilirlik Ölçütü bölümünde Riemann integralini yalnızca **kapalı ve sınırlı** aralıklar üzerinde tanımlamıştık (Tanım 25.1).

Tanım 36.1 (Sonsuz Aralıkta Genelleştirilmiş İntegral). $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $b > a$ için $[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilir olsun. Eğer

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

limiti var ve sonlu ise, bu limite f'nin $[a, \infty)$ üzerindeki **genelleştirilmiş integrali** (improper integral) denir ve

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

yazılır. Bu durumda integralin **yakınsak** olduğu söylenir; limit yoksa ya da sonsuz ise integral **ıraksaktır**.

Pozitif fonksiyonlarda bu limitin varlığı, tıpkı pozitif terimli serilerde olduğu gibi, bir sınırlılık sorusuna indirgenir.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Pozitif fonksiyonlarda genelleştirilmiş integral

$f \geq 0$ ise $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ fonksiyonu artandır: $b_1 < b_2$ için

$$F(b_2) - F(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \geq 0$$

olur (Teorem 28.1). Bu F, tam olarak Tanım 29.1'ndaki integral fonksiyonudur. Artan bir F üstten sınırlı ise, $M = \sup_{b>a} F(b)$ diyelim. Supremumun karakterizasyonu (bkz. Analiz 1) gereği her $\varepsilon > 0$ için $F(b_0) > M - \varepsilon$ olan bir b_0 vardır; F artan olduğundan $b \geq b_0$ olan her b için $M - \varepsilon < F(b) \leq M$ olur. Demek ki $\lim_{b\to\infty} F(b) = M$'dir. F üstten sınırlı değilse $F(b) \to +\infty$ olur. Kısacası:

$$\int_a^\infty f \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow \left\{ \int_a^b f : b > a \right\} \text{ kümesi üstten sınırlıdır.}$$

Artık integral testini kurabiliriz.

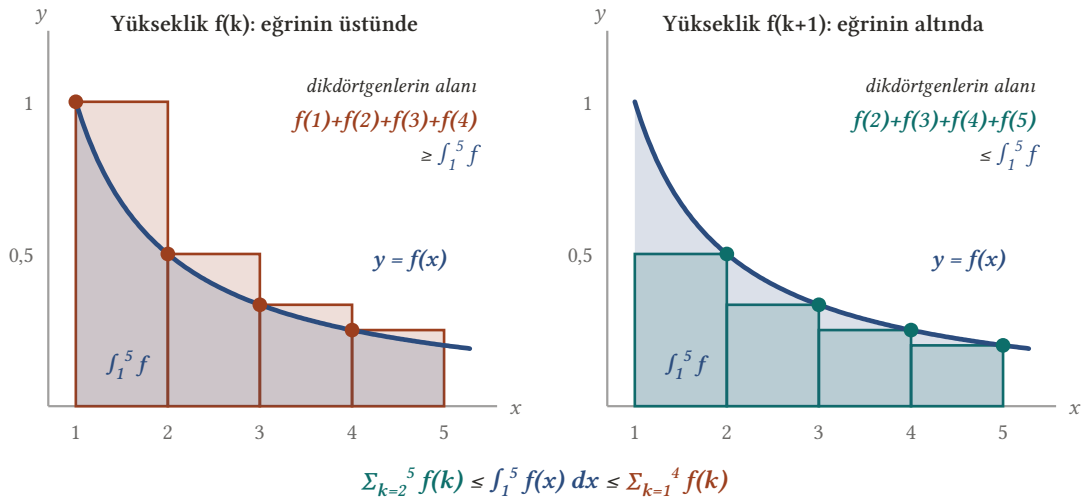
Teorem 36.3 (İntegral Testi). *$f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif, azalan ve sürekli olsun. O hâlde*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ yakınsaktır.}$$

Ayrıca her $n \geq 2$ için

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.



Şekil 36.1: Azalan pozitif bir f *için her* [k, k+1] *aralığında* f(k+1) ≤ f(x) ≤ f(k) *olur: yüksekliği sol uç değeri* f(k) *olan dikdörtgenler eğrinin üstünde (solda), yüksekliği sağ uç değeri* f(k+1) *olanlar ise eğrinin altında (sağda) kalır. Tabanlar 1 birim olduğundan her dikdörtgenin alanı doğrudan serinin bir terimidir; alanları eğrinin altındaki alanla karşılaştırmak* f(2)+f(3)+f(4)+f(5) ≤ ∫₁⁵ f ≤ f(1)+f(2)+f(3)+f(4) *eşitsizliğini verir. Aynı kestirim her* n *için geçerli olduğundan kısmi toplamlarla integraller birbirini sınırlar; bu yüzden seri ile genelleştirilmiş integral bir arada sonlu ya da bir arada sonsuzdur.*

İspat.
Adım 1: Tek bir aralık üzerinde temel kestirim.

 CC BY-NC-SA 4.0

$k \geq 1$ bir doğal sayı olsun. f sürekli olduğundan $[k, k+1]$ kapalı ve sınırlı aralığında Riemann integrallenebilirdir (Teorem 25.2); dolayısıyla $\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ tanımlıdır.
f azalan olduğundan, her $x \in [k, k+1]$ için

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

olur. Bu üç fonksiyonu $[k, k+1]$ üzerinde integralleyelim. Sabit fonksiyonların integralleri, aralığın uzunluğu 1 olduğu için sabitin kendisine eşittir:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1), \qquad \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k).$$

İntegralde sıralama (Teorem 28.1) gereği

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k). \tag{$*$}$$

Bu, ispatın bütün yükünü taşıyan eşitsizliktir: bir terim ile bir birim aralıktaki integral arasında geçiş kurar.
Adım 2: Kestirimin toplanması.
$(*)$'ı $k = 1, 2, \ldots, n-1$ için yazıp toplayalım. İntegralin aralıklara toplanabilirliği gereği

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^n f(x)\,dx$$

olduğundan,

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)}_{=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)} \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k)}_{=f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)}$$

elde ederiz. Kısmi toplamları $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ ve integralleri $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$ ile gösterirsek bu, teoremde belirtilen eşitsizliktir ve şu iki yararlı biçimde yazılabilir:

$$s_n - f(1) \leq I_n \leq s_{n-1}. \tag{$\ddagger$}$$

Adım 3: İntegral yakınsaksa seri de yakınsaktır.
$\int_1^\infty f$ yakınsak olsun ve değeri I olsun. $f > 0$ olduğundan $b \mapsto \int_1^b f$ artandır; dolayısıyla her n için $I_n \leq I$'dir. $(\ddagger)$'ın sol yarısından

$$s_n \leq f(1) + I_n \leq f(1) + I$$

çıkar. $f > 0$ olduğundan (s_n) artandır; üstten sınırlı olduğunu da gösterdik. Monoton Yakınsaklık Teoremi gereği (s_n) yakınsaktır, yani $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ yakınsaktır.
Adım 4: Seri yakınsaksa integral de yakınsaktır.
$\sum_{n=1}^\infty f(n)$ yakınsak olsun ve toplamı S olsun. (s_n) artan olduğundan her n için $s_n \leq S$'dir. $(\ddagger)$'ın sağ yarısından, her $n \geq 2$ için

$$I_n \leq s_{n-1} \leq S.$$

Şimdi herhangi bir $b > 1$ alalım. $b \leq n$ olacak biçimde bir n doğal sayısı seçelim (Arşimet özelliği, Arşimet Özelliği). $f > 0$ olduğundan $\int_1^b f \leq \int_1^n f = I_n \leq S$ olur. Demek ki $\left\{\int_1^b f : b > 1\right\}$ kümesi üstten S ile sınırlıdır; yukarıdaki gözlem gereği $\int_1^\infty f$ yakınsaktır ve değeri S'yi aşmaz.
Adım 3 ile Adım 4 birlikte istenen denkliği verir. Her iki nicelik de negatif olmadığından, biri sonsuza gittiğinde öteki de gider; yani seri ile integral ya birlikte yakınsar ya birlikte $+\infty$'a ıraksar.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Hipotezler üzerine iki not

Süreklilik gevşetilebilir. İspatta süreklilik yalnızca f'nin her $[k, k+1]$ aralığında integrallenebilir olmasını sağlamak için kullanıldı. Azalan her fonksiyon kapalı ve sınırlı aralıklarda integrallenebilir olduğundan, "sürekli" koşulu yerine "her $[1, b]$ üzerinde integrallenebilir" demek yeterlidir.
Başlangıç noktası değiştirilebilir. Aynı ispat, f yalnızca $[N, \infty)$ üzerinde pozitif ve azalansa da çalışır; bu durumda

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n) \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx \text{ yakınsak}$$

olur. Bu esneklik, birazdan $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ gibi 1'de tanımsız olan fonksiyonlarda işimize yarayacak.
Adım 1'in bir başka okunuşu. $(*)$ eşitsizliğini, integral için ortalama değer teoreminden (Teorem 31.1) de okuyabiliriz: $\int_k^{k+1} f = f(\xi_k)$ olacak biçimde bir $\xi_k \in [k, k+1]$ vardır ve f azalan olduğundan $f(k+1) \le f(\xi_k) \le f(k)$'dır.

Şimdi testi çalıştıralım. İlk uygulama, p-serisi teoreminin bağımsız bir ikinci ispatını verecek.

Örnek 36.5 (İntegral Testinin Uygulamaları). İntegral testini kullanarak

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisinin $p > 1$ için yakınsak, $p \le 1$ için ıraksak olduğunu,

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ serisinin ıraksak olduğunu

gösteriniz.

Çözüm.
a) $p \le 0$ durumu Teorem 36.2'nin ispatındaki gibi genel terim üzerinden hallolur: $a_n \ge 1$ olduğundan $a_n \not\to 0$ ve Sonuç 34.1 gereği seri ıraksar. Bu durumda ayrıca bir teste gerek yoktur; nitekim $p < 0$ için $f(x) = x^{-p}$ artan olduğundan integral testi doğrudan uygulanamaz da.
$p > 0$ olsun ve $f(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$ alalım. $[1, \infty)$ üzerinde f süreklidir, pozitiftir ve

$$f'(x) = -p\,x^{-p-1} < 0$$

olduğundan Sonuç 8.3 gereği azalandır. Ayrıca $f(n) = \dfrac{1}{n^p}$'dir. Teorem 36.3 uygulanabilir; genelleştirilmiş integrali hesaplayalım. İlkel fonksiyonu bulup analizin temel teoremini (Teorem 29.1) kullanacağız.
$p \ne 1$ ise x^{-p}'nin bir ilkel fonksiyonu $\dfrac{x^{1-p}}{1-p}$'dir; dolayısıyla $b > 1$ için

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}.$$

$p = 1$ ise ilkel fonksiyon $\ln x$'tir:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^b = \ln b.$$

Şimdi $b \to \infty$ limitini alalım.
Durum $p > 1$: $1 - p < 0$ olduğundan $b^{1-p} = \dfrac{1}{b^{p-1}} \to 0$'dır. Öyleyse

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{0 - 1}{1-p} = \frac{1}{p-1} < \infty.$$

İntegral yakınsaktır, dolayısıyla seri de yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Durum $0 < p < 1$*:* $1 - p > 0$ olduğundan $b^{1-p} \to +\infty$'dur ve $\dfrac{b^{1-p} - 1}{1-p} \to +\infty$ olur. İntegral ıraksaktır, dolayısıyla seri de ıraksaktır.
Durum $p = 1$*:* $\ln b \to +\infty$ olduğundan integral ıraksaktır; harmonik seri ıraksaktır.
Böylece p-serisi teoremini yoğunlaştırmadan tümüyle bağımsız bir yolla yeniden ispatlamış olduk. Üstelik integral testi bir de sayısal bilgi veriyor: $p > 1$ için Teorem 36.3'nin eşitsizliğinden

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} \le 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

çıkar; limite geçerek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \le \frac{p}{p-1}$$

elde ederiz. Örneğin $p = 2$ için bu, toplamın 2'yi aşmadığını söyler; gerçek değer $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$'tir.
b) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ alalım. Bu fonksiyon $[2, \infty)$ üzerinde tanımlı ve süreklidir ($x \ge 2$ için $\ln x \ge \ln 2 > 0$), pozitiftir ve $x \mapsto x \ln x$ artan olduğundan azalandır. (Türevle de görülür: $(x \ln x)' = \ln x + 1 > 0$ olduğundan payda artar, Sonuç 8.3 gereği f azalandır.)
Genelleştirilmiş integrali hesaplayalım. $\dfrac{d}{dx}(\ln \ln x) = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln x}$ olduğundan $\ln \ln x$, f'nin bir ilkel fonksiyonudur. Öyleyse $b > 2$ için

$$\int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \Big[\ln \ln x\Big]_2^b = \ln \ln b - \ln \ln 2.$$

$b \to \infty$ iken $\ln b \to \infty$ ve dolayısıyla $\ln \ln b \to \infty$ olur. İntegral ıraksaktır; Teorem 36.3 gereği

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

serisi ıraksaktır. Bu, Örnek 36.3'nin $p = 1$ durumuyla uyumludur.
Buradaki ıraksama ne kadar yavaştır? $(\ddagger)$ eşitsizliğinden $s_n \le f(2) + \ln \ln n - \ln \ln 2$ olduğundan kısmi toplamlar yaklaşık $\ln \ln n$ hızında büyür. Toplamın 10'u aşması için $\ln \ln n \approx 10$, yani $n \approx e^{e^{10}} \approx e^{22026}$ gerekir. Seri ıraksaktır, ama bunu hiçbir hesap makinesi göremez.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ İntegral testinin hipotezleri gereklidir

İntegral testinde f'nin **azalan** olması vazgeçilmezdir; pozitif ve sürekli olması yetmez. Şu fonksiyonu düşünelim: g, her $n \in \mathbb{N}$ noktasında tepesi n'de olan, yüksekliği 1 ve taban uzunluğu 2^{-n} olan üçgen çıkıntılardan oluşsun ve bu çıkıntıların dışında 0 değerini alsın; çıkıntılar giderek daraldığından ayrık kalır ve g süreklidir. Şimdi

$$f(x) = 2^{-x} + g(x)$$

alalım. f, $[1,\infty)$ üzerinde pozitif ve süreklidir. Her n için $f(n) = 2^{-n} + 1 > 1$ olduğundan $\sum f(n)$ ıraksar. Oysa üçgenlerin alanları toplamı $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\cdot 2^{-n}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ ve $\int_1^\infty 2^{-x}\,dx = \frac{1}{2\ln 2}$ sonlu olduğundan

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leq \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2} < \infty,$$

yani integral yakınsaktır. Azalanlık, tam sayı noktalarındaki değerlerin aradaki davranışı temsil etmesini sağlayan koşuldur; o olmadan tek tek noktalardaki değerler alanla ilgili hiçbir şey söylemez. Ayrıca test yalnızca **karakteri** verir, toplamı vermez: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ile $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$ değerleri birbirinden farklıdır.

36.6 Kalanın Kestirimi

İntegral testinin yoğunlaştırma testinde bulunmayan bir üstünlüğü vardır: yakınsak bir serinin toplamı ile kısmi toplamı arasındaki farkı — yani **kalanı** — iki integral arasına sıkıştırır. Bu, yakınsak bir seriyi sayısal olarak hesaplarken kaç terim almak gerektiğini söyleyen pratik bir araçtır.
$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ yakınsak olsun, toplamı S ve n'inci kısmi toplamı s_n olsun. **Kalan**

$$R_n = S - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

sayısıdır; s_n'yi S yerine kullandığımızda yaptığımız hatanın tam değeridir.

Önerme 36.1 (Kalanın İntegralle Kestirimi). *$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ pozitif, azalan ve sürekli olsun ve $\int_1^\infty f$ yakınsasın. O hâlde her $n \geq 1$ için*

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^\infty f(x)\,dx$$

olur. Buna denk olarak, toplam S için

$$s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leq S \leq s_n + \int_n^\infty f(x)\,dx.$$

İspat.
İspatın temeli, Teorem 36.3'nin ispatındaki

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \qquad (*)$$

eşitsizliğidir. Önce yardımcı bir gözlem yapalım: $m \geq 1$ için, integralin aralıklara toplanabilirliği gereği

$$\sum_{k=m}^{M-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_m^M f(x)\,dx$$

olur ve $M\to\infty$ iken sağ taraf $\int_m^\infty f$'ye yakınsar (genelleştirilmiş integral yakınsak olduğundan bu limit vardır ve sonludur). Öyleyse

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=m}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{m}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{$\dagger$}$$

Alt kestirim. *$(*)$'ın sağ yarısını $k \geq n+1$ için kullanalım: $\int_k^{k+1} f \leq f(k)$. Bu eşitsizlikleri $k = n+1, n+2, \ldots$ için toplarsak — her iki taraf da negatif olmayan terimlerden oluştuğu ve sağ taraftaki seri yakınsak olduğu için toplama geçilebilir —*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \overset{(\dagger)}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n$$

elde ederiz.
Üst kestirim. *Bu kez $(*)$'ı bir indis kaydırarak kullanalım: $k \geq n+1$ için $(*)$'ı $k-1$ ile yazarsak $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$ olur. Toplarsak*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \sum_{j=n}^{\infty} \int_{j}^{j+1} f(x)\,dx \overset{(\dagger)}{=} \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

elde ederiz (ortada $j = k-1$ değişken değiştirmesi yapıldı).
İki kestirim birlikte istenen eşitsizliği verir. $S = s_n + R_n$ olduğundan, her iki tarafa s_n eklenerek ikinci biçim elde edilir.
■

Bu önerme, sayısal bir hesap için doğrudan bir reçetedir: alt ve üst sınırların **ortasını** alırsak, hatanın büyüklüğü sınırlar arasındaki farkın yarısını aşamaz. Bunu somut bir seride çalıştıralım.

Örnek 36.6 (On Terimle Basel Toplamının Kestirimi). $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ olsun.

a) s_{10} kısmi toplamını hesaplayınız ve R_{10} kalanını Önerme 36.1 ile alttan ve üstten kestiriniz.

b) Bu kestirimden S için bir aralık elde edip elde edilen değeri gerçek değerle karşılaştırınız.

c) Hatanın 10^{-3}'ten küçük olması için doğrudan s_n kullanılsaydı kaç terim gerekirdi?

Çözüm.
a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ alalım; $[1, \infty)$ üzerinde pozitif, sürekli ve azalandır ve $f(k) = \dfrac{1}{k^2}$'dir. Genelleştirilmiş integralleri hesaplayalım: $b > n$ için

$$\int_{n}^{b} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{n}^{b} = \frac{1}{n} - \frac{1}{b} \underset{b\to\infty}{\to} \frac{1}{n},$$

yani her $n \geq 1$ için

$$\int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}.$$

Önerme 36.1 gereği

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

$n = 10$ için

$$\frac{1}{11} \leq R_{10} \leq \frac{1}{10}, \qquad \text{yani} \qquad 0{,}090909 \leq R_{10} \leq 0{,}100000.$$

Kısmi toplamı hesaplayalım:

$$s_{10} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Terimleri ondalık olarak toplarsak

$$s_{10} \approx 1 + 0{,}250000 + 0{,}111111 + 0{,}062500 + 0{,}040000 + 0{,}027778 + 0{,}020408 + 0{,}015625 + 0{,}012346 + 0{,}010000 = 1{,}549768.$$

b) Önerme 36.1'nin ikinci biçimini kullanalım:

$$s_{10} + \frac{1}{11} \le S \le s_{10} + \frac{1}{10},$$

$$1{,}549768 + 0{,}090909 \le S \le 1{,}549768 + 0{,}100000,$$

$$1{,}640677 \le S \le 1{,}649768.$$

Aralığın uzunluğu $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110} \approx 0{,}009091$'dir. Aralığın orta noktasını S için kestirim olarak alırsak

$$S \approx \frac{1{,}640677 + 1{,}649768}{2} = 1{,}645223$$

buluruz ve yapılan hata en fazla aralığın yarısı, yani $\frac{1}{220} \approx 0{,}004545$ olur.
Gerçek değer $S = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}644934\ldots$'tür. Elde ettiğimiz aralık bu değeri gerçekten içeriyor ve orta nokta kestiriminin hatası

$$|1{,}645223 - 1{,}644934| \approx 0{,}000289$$

olup güvence altına aldığımız $0{,}004545$ sınırının çok altındadır. Yalnızca on terim ve iki integral hesabıyla toplamın üç ondalık basamağını doğru bulmuş olduk.
c) Doğrudan s_n kullanılsaydı hata tam olarak R_n olurdu ve elimizdeki güvenceli üst sınır $R_n \le \frac{1}{n}$'dir. $\frac{1}{n} < 10^{-3}$ olması için $n > 1000$, yani $n \ge 1001$ gerekir. Öte yandan alt kestirim $R_n \ge \frac{1}{n+1}$ olduğundan, $n \le 999$ için $R_n \ge \frac{1}{1000} = 10^{-3}$ olur; demek ki 1000 civarında terim almak gerçekten zorunludur, kestirim savurgan değildir.
Karşılaştırma çarpıcıdır: kalan kestirimini kullanan orta nokta yöntemi 10 terimle $3 \cdot 10^{-4}$ hata verirken, ham kısmi toplam aynı doğruluk için binden fazla terim ister. Kalan kestiriminin değeri buradadır. ■

36.7 Alıştırmalar

Alıştırma 36.1 (Yoğunlaştırma ve İntegral Testi Üzerine).

a) $p > 0$ olmak üzere $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

c) İntegral testini kullanarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

d) İntegral testini kullanarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ serisinin toplamını s_n ile kestirdiğimizde hatanın 10^{-4}'ten küçük olması için n en az kaç olmalıdır?

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/\ln n}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

a) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^p}$ olsun. $n \geq 2$ için $\ln n > 0$ ve $p > 0$ olduğundan $a_n > 0$'dır; $\ln n$ artan olduğundan $(\ln n)^p$ artan, dolayısıyla (a_n) azalandır. Teorem 36.1 uygulanabilir. $2^k \geq 2$, yani $k \geq 1$ için

$$2^k a_{2^k} = \frac{2^k}{(\ln 2^k)^p} = \frac{2^k}{(k \ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \frac{2^k}{k^p}.$$

Üstel büyümenin kuvvet büyümesini yendiğini biliyoruz (Sonuç 11.1): $\dfrac{k^p}{2^k} \to 0$, yani $\dfrac{2^k}{k^p} \to +\infty$. Öyleyse yoğunlaştırılmış serinin genel terimi sıfıra gitmez, hatta sonsuza gider; Sonuç 34.1 gereği yoğunlaştırılmış seri ıraksaktır. Teorem 36.1 gereği asıl seri de **ıraksaktır**.

Aynı sonuç doğrudan karşılaştırmayla da görülebilir: Sonuç 11.1 gereği $\dfrac{(\ln n)^p}{n} \to 0$ olduğundan, yeterince büyük n için $(\ln n)^p < n$, yani $\dfrac{1}{(\ln n)^p} > \dfrac{1}{n}$ olur; harmonik seri ıraksadığından karşılaştırma testinin kuyruk biçimi (Önerme 35.1) ıraksaklığı verir.

b) $a_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}} = \dfrac{1}{n \cdot n^{1/n}}$ yazalım. Buradaki $n^{1/n}$ çarpanı için kaba bir üst sınır yeter: her $n \geq 1$ için tümevarımla $n \leq 2^n$ olduğundan, iki tarafın n'inci kökünü alarak $n^{1/n} \leq 2$ buluruz. Öyleyse

$$a_n = \frac{1}{n \cdot n^{1/n}} \geq \frac{1}{2n} > 0.$$

$\sum \dfrac{1}{2n}$ serisi harmonik serinin yarısı olup ıraksaktır; Teorem 35.2 gereği $\sum a_n$ da **ıraksaktır**.

Bu örnek, üsteki 1'e eklenen ve sıfıra giden bir düzeltmenin karakteri değiştiremeyeceğini gösterir: Sonuç 36.1'ndeki eşik **sabit** bir $p > 1$ ister.

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ alalım. $[1, \infty)$ üzerinde pozitif ve süreklidir. Türevi

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

olup $x > 1$ için negatiftir; Sonuç 8.3 gereği f, $[1, \infty)$ üzerinde azalandır. $f(n) = \dfrac{n}{n^2+1}$ olduğundan Teorem 36.3 uygulanabilir. $\dfrac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = \dfrac{x}{x^2+1}$ olduğundan

$$\int_1^b \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^b = \frac{1}{2}\ln(b^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2.$$

$b \to \infty$ iken $\ln(b^2+1) \to \infty$ olduğundan integral ıraksaktır; seri de **ıraksaktır**.

d) $f(x) = xe^{-x^2}$ alalım. $[1, \infty)$ üzerinde pozitif ve süreklidir. Türevi

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

olup $x \geq 1$ için $1 - 2x^2 \leq -1 < 0$ olduğundan negatiftir; Sonuç 8.3 gereği f azalandır. $\dfrac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) = xe^{-x^2}$ olduğundan

$$\int_1^b xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^b = \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-b^2}.$$

$b \to \infty$ iken $e^{-b^2} \to 0$ olduğundan

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2e} < \infty.$$

İntegral yakınsaktır; Teorem 36.3 gereği seri de **yakınsaktır**. Üstelik Önerme 36.1 kalanı da verir: $R_n \leq \int_n^\infty xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{-n^2}$. Örneğin $n = 3$ için hata $\frac{1}{2}e^{-9} \approx 6 \cdot 10^{-5}$'ten küçüktür.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ alalım; $[1, \infty)$ üzerinde pozitif, sürekli ve azalandır. Genelleştirilmiş integral

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^b = \frac{1}{2n^2}$$

olur. Önerme 36.1 gereği

$$R_n \le \frac{1}{2n^2}.$$

Hatanın 10^{-4}'ten küçük olması için

$$\frac{1}{2n^2} < 10^{-4} \Leftrightarrow n^2 > 5000 \Leftrightarrow n > \sqrt{5000} \approx 70{,}71$$

yeterlidir; yani $n \ge 71$ almak yeterlidir. ($70^2 = 4900 < 5000$ olduğundan $n = 70$ bu güvenceyi vermez.)

f) Üsteki ifadeyi sadeleştirelim. $n \ge 2$ için $\ln n > 0$'dır ve

$$n^{1/\ln n} = e^{\frac{1}{\ln n}\cdot \ln n} = e^1 = e$$

olur. Demek ki genel terim, n'ye bağlı görünen üstel kısmına rağmen çok basittir:

$$a_n = \frac{1}{n^{1+1/\ln n}} = \frac{1}{n\cdot n^{1/\ln n}} = \frac{1}{en}.$$

Öyleyse

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/\ln n}} = \frac{1}{e}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

olur; harmonik seri ıraksadığından ve sıfırdan farklı sabitle çarpmak karakteri değiştirmediğinden seri **ıraksaktır**.

Bu şık, (b) şıkkındaki uyarıyı pekiştirir: üstün 1'den büyük olması yetmez, 1'den **sabit bir miktar** büyük olması gerekir.

■

Yoğunlaştırma testi ile integral testi, azalan pozitif terimli serilerde çok keskin sonuçlar verir; ancak ikisi de terimlerin azalan olmasını ister ve bu, uygulamada sık sık karşılaşılan $\frac{2^n}{n!}$ ya da $\frac{n^n}{3^n n!}$ gibi terimlerde doğrudan işletilmesi zor bir koşuldur. Bu tür serilerde, terimin kendisi yerine ardışık iki terimin **oranına** ya da terimin n'inci **köküne** bakmak çok daha verimlidir; üstelik bu yaklaşım azalanlık istemez. Sıradaki bölümde bu iki aracı kuruyoruz: Kök ve Oran Testleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

37. Kök ve Oran Testleri

Cauchy Yoğunlaştırma Testi ve p-Serileri bölümünde pozitif terimli serilerin yakınsaklığını, terimleri seyrekleştirip 2^k indislerinde toplayarak sınadık ve bu yolla p-serilerinin tam sınıflandırmasını elde ettik. Karşılaştırma testlerinin de yoğunlaştırma testinin de ortak bir zayıflığı vardır: bunları uygulayabilmek için elimizde **karşılaştırılacak bir seri** bulunmalıdır. Yani "bu seri hangi bilinen seriye benziyor?" sorusunu her seferinde biz yanıtlamak zorundayız.

Bu bölümde tanıyacağımız iki test, o soruyu bizim yerimize yanıtlar. İkisi de karşılaştırma serisi olarak **geometrik seriyi** seçer ve serinin terimlerinin geometrik bir dizi gibi davranıp davranmadığını, terimlerin kendisinden okunabilen tek bir sayıyla ölçer. Fikir çok basittir. Eğer a_n kabaca r^n gibiyse, bu benzerliği iki ayrı biçimde yakalayabiliriz: ya n'inci kökünü alarak, $\sqrt[n]{a_n} \approx r$; ya da ardışık terimlerin oranına bakarak, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \approx r$. Birinci ölçüt **Cauchy kök testini** (root test), ikincisi **d'Alembert oran testini** (ratio test) doğurur. Her iki testte de $r < 1$ ise seri yakınsak, $r > 1$ ise ıraksaktır; çünkü geometrik seri tam olarak bu eşikte davranış değiştirir.

Bu iki test yalnızca birbirinin farklı kılıkları değildir. Aralarında kesin bir güç sıralaması vardır ve bu sıralamayı, üst ve alt limitleri birbirine bağlayan dörtlü bir eşitsizlik zinciri belirler. Zincirin sonucu şudur: **oran testinin karar verebildiği her durumda kök testi de karar verir ve aynı kararı verir; tersi doğru değildir.** Buna karşın oran testi pratikte çoğu zaman daha kolay uygulanır; faktöriyeller ve çarpımsal ifadeler içeren serilerde ardışık terimlerin oranı büyük ölçüde sadeleşir. Yani "güçlü olan" ile "kullanışlı olan" burada aynı test değildir; ikisini de bilmek gerekir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: üst limit yardımıyla ifade edilen kök testinin üç durumunun tam ispatı; testin $L = 1$ durumunda neden hiçbir bilgi vermediği; oran testinin üst limitle kurulan yakınsaklık koşulu ile **alt limitle** kurulan ıraksaklık koşulu arasındaki kritik ayrım; pozitif her dizi için geçerli olan

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

eşitsizlik zinciri ve tam ispatı; bunun bir sonucu olarak oranın limiti varken kökün limitinin de var olup aynı sayıya eşit olması; ve son olarak, oran testinin tümüyle çuvalladığı hâlde kök testinin sorunsuz karar verdiği somut bir seri.

37.1 Üst ve Alt Limit: Kullanacağımız İki Özellik

Bu bölümdeki bütün ispatlar üst limit (limit superior) ve alt limit (limit inferior) üzerine kuruludur; çünkü kök ve oran testleri, $\sqrt[n]{a_n}$ ya da $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dizisinin **yakınsak olmasını istemez**. Bu, testleri gereksiz varsayımlardan kurtarır ve uygulama alanlarını epeyce genişletir. Kullanacağımız özellikleri bir kez toplu hâlde yazalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Hatırlatma: Üst ve alt limitin iki temel özelliği

(x_n) bir reel dizi, $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ ve $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ olsun (bkz. Analiz 1). Dizi sınırsız olduğunda bu iki nicelik genişletilmiş anlamda, yani $+\infty$ ve $-\infty$ değerlerine de izin verilerek tanımlanır; bu anlamda **her** dizinin bir üst ve bir alt limiti vardır. Aşağıdaki maddelerdeki $L < +\infty$, $\ell > -\infty$ gibi koşullar da bu yüzden yazılmıştır.
Üst limit için.

- $L < +\infty$ ise: $L < r$ olan her r için, öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N$ için $x_n < r$ olur. (Yani dizi, L'nin üstündeki her düzeyi **sonlu sayıda** terim dışında aşamaz.)
- $L > -\infty$ ise: $s < L$ olan her s için, $x_n > s$ eşitsizliği **sonsuz çoklukta** n için sağlanır. Daha kuvvetlisi, $x_{n_k} \to L$ olan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır (bkz. Analiz 1).

Alt limit için (aynı ifadelerin aynadaki görüntüsü).

- $\ell > -\infty$ ise: $s < \ell$ olan her s için, öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N$ için $x_n > s$ olur.
- $\ell < +\infty$ ise: $r > \ell$ olan her r için, $x_n < r$ eşitsizliği sonsuz çoklukta n için sağlanır.

Ayrıca her zaman $\ell \leq L$'dir ve (x_n) yakınsaktır ancak ve ancak $\ell = L \in \mathbb{R}$'dir; bu durumda ortak değer $\lim x_n$'dir.

Bu özelliklerin ilk maddesi "yeterince ileride bütün terimler", ikinci maddesi ise "sonsuz çoklukta terim" der. Aradaki fark testlerin yapısını belirler: yakınsaklık koşulları **bütün** terimleri geometrik bir diziyle üstten bastırmayı gerektirdiği için birinci tip özellikle kurulur; ıraksaklık koşulları ise genel terimin sıfıra gitmediğini göstermeye yeteceğinden ikinci tip özellikle, yani bir alt diziyle kurulur.
Son olarak, seri testlerinin ikisinde de arka planda duran iki olguyu anımsayalım. Birincisi: $0 \leq r < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ geometrik serisi yakınsaktır ve $r \geq 1$ için ıraksaktır (Serilere Giriş). İkincisi: bir serinin yakınsak olması için genel teriminin sıfıra gitmesi gerekir; bu yüzden $a_n \not\to 0$ ise seri ıraksaktır. Bu ikinci ölçüte kısaca **genel terim testi** diyeceğiz. Ayrıca bir serinin ilk sonlu sayıda terimini değiştirmek ya da atmak yakınsaklığı bozmaz; testlerin "yeterince büyük n için" biçimindeki koşulları bu yüzden yeterlidir.

37.2 Cauchy Kök Testi

Pozitif terimli bir seride $a_n \leq r^n$ eşitsizliğini kurabilirsek, karşılaştırma testiyle iş biter. Bu eşitsizlik $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ ile aynı şeydir. Öyleyse doğal fikir şudur: $\sqrt[n]{a_n}$ dizisinin ileride nereye yığıldığına bakalım. Bu dizinin yakınsak olmasını istemek gereksiz bir kısıtlama olur; bizi ilgilendiren, dizinin **en büyük yığılma düzeyi**, yani üst limitidir. Çünkü $a_n \leq r^n$ eşitsizliğinin yeterince büyük her n için geçerli olması, tam olarak $\limsup \sqrt[n]{a_n}$ sayısının r'nin altında kalmasıyla ilgilidir.

Teorem 37.1 (Cauchy Kök Testi). *Her n için $a_n \geq 0$ olsun ve*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

yazalım (burada $L \in [0, +\infty]$'dur). O hâlde:

- *$L < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi **yakınsaktır**.*
- *$L > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi **ıraksaktır**.*
- *$L = 1$ ise test **sonuçsuzdur**; seri yakınsak da olabilir ıraksak da.*

İspat.
Durum 1: $L < 1$.
$L < 1$ olduğundan L ile 1 arasında bir sayı seçebiliriz: öyle bir $r \in \mathbb{R}$ alalım ki

$$L < r < 1$$

olsun. ($L < 1$ olduğundan L sonludur; kökler negatif olmadığından da $L \geq 0$'dır, yani $L \in [0, 1)$. Böyle bir r gerçekten vardır; örneğin $r = \dfrac{L+1}{2}$ alınabilir.)
Üst limitin birinci özelliği gereği, $r > L$ olduğundan öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N$ için

$$\sqrt[n]{a_n} < r$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Her iki tarafın da negatif olmadığına dikkat ederek n'inci kuvvetini alalım; $t \mapsto t^n$ fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde artan olduğundan eşitsizliğin yönü korunur:

$$a_n < r^n, \qquad n \geq N.$$

Şimdi $0 \leq r < 1$ olduğundan $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ geometrik serisi yakınsaktır. Terimleri negatif olmayan seriler için karşılaştırma testi (Pozitif Terimli Seriler ve Karşılaştırma Testleri) gereği $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır. Bir serinin başına sonlu sayıda terim eklemek yakınsaklığı değiştirmediğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

serisi de yakınsaktır.

Durum 2: $L > 1$.

Burada amacımız genel terimin sıfıra gitmediğini göstermektir; bunun için bütün terimleri değil, sonsuz çoklukta terimi kontrol etmek yeter.

Üst limitin ikinci özelliği gereği, $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ dizisinin L'ye yakınsayan bir alt dizisi vardır (bkz. Analiz 1): öyle bir $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ indis dizisi vardır ki

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to L \qquad (k \to \infty)$$

olur. ($L = +\infty$ durumunda genişletilmiş tanım gereği bu alt dizi $+\infty$'a ıraksar; aşağıdaki akıl yürütme aynen geçerlidir.)

$L > 1$ olduğundan, yakınsamanın tanımını $\varepsilon = L - 1 > 0$ ile uygulayarak öyle bir $K \in \mathbb{N}$ buluruz ki her $k \geq K$ için

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > L - \varepsilon = 1$$

olur. ($L = +\infty$ ise $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to +\infty$ olduğundan yeterince büyük k için yine $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$'dir.) Her iki tarafın n_k'inci kuvvetini alırsak, her $k \geq K$ için

$$a_{n_k} > 1$$

elde ederiz.

Demek ki (a_n) dizisinin, $k \geq K$ indislerinden itibaren bütün terimleri 1'den büyük olan bir alt dizisi vardır. Eğer $a_n \to 0$ olsaydı, her alt dizisi de 0'a yakınsardı (bkz. Analiz 1); özel olarak $a_{n_k} \to 0$ olurdu. Oysa her $k \geq K$ için $a_{n_k} > 1$ olduğundan bu alt dizinin limiti en az 1'dir ve 0 olamaz. Öyleyse $a_n \not\to 0$'dır ve genel terim testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

Durum 3: $L = 1$.

Bu durumda testin hiçbir bilgi vermediğini göstermek için, $L = 1$ değerini veren biri ıraksak biri yakınsak iki seri bulmak yeterlidir. Bunu Örnek 37.1'da yapıyoruz; orada harmonik seri $\sum \frac{1}{n}$ (ıraksak) ile $\sum \frac{1}{n^2}$ serisinin (yakınsak) ikisinin de $L = 1$ verdiğini hesaplayacağız. Aynı L değeri hem yakınsak hem ıraksak seriden çıkabildiğine göre, $L = 1$ bilgisi tek başına serinin davranışını belirleyemez.

■

İspatın iki durumunun **bakışımlı olmadığına** dikkat edin. Yakınsaklık durumunda bütün terimleri (yeterince ileriden itibaren) bir geometrik diziyle üstten bastırdık; ıraksaklık durumunda ise yalnızca bir alt diziyi kullandık ve serinin toplamına değil, genel terimin sıfıra gitmemesine baktık. Bu yüzden kök testinin verdiği ıraksaklık her zaman "kaba" türdendir: seri ıraksarken terimleri bile sıfıra gitmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ L = 1 gerçekten sonuçsuzdur

"$L = 1$ ise test sonuçsuzdur" cümlesi, "$L = 1$ ise seri şöyle davranır" biçiminde okunamaz. $L = 1$, testin başarısızlık ilanıdır: seri hakkında **hiçbir** şey söylemez, başka bir yöntemle incelenmelidir. Bunun yapısal bir nedeni vardır. Kök testi, seriyi geometrik serilerle karşılaştırır; oysa p-serileri $\sum \frac{1}{n^p}$ ailesinin tamamı, p ne olursa olsun $L = 1$ verir:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^p} \to \frac{1}{1^p} = 1$$

(burada $\sqrt[n]{n} \to 1$ özel limitini kullandık). Yani p-serilerinin hepsi geometrik ölçekte "sınırda" durur; oysa aralarından bir kısmı yakınsak, bir kısmı ıraksaktır. Geometrik seri gözlüğü bu ayrımı görecek çözünürlükte değildir. p-serilerini ayırt etmek için yoğunlaştırma testi gibi daha ince araçlar gerekir.

Şimdi bu sonuçsuzluk örneğini ayrıntılı yazalım.

Örnek 37.1 (Kök Testinin Sonuçsuz Kaldığı İki Seri). $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ değerinin hem ıraksak hem yakınsak bir seriden çıkabileceğini gösteriniz.

Çözüm.
Birinci seri: harmonik seri. $a_n = \dfrac{1}{n}$ alalım. Bu serinin ıraksak olduğunu biliyoruz. n'inci kökü hesaplayalım:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$\sqrt[n]{n} \to 1$ olduğundan, limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dizi yakınsak olduğundan üst limiti de aynıdır: $L = 1$.
İkinci seri: $p = 2$ serisi. Şimdi $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ alalım. Bu seri $p = 2 > 1$ olduğundan yakınsaktır. Kökü hesaplayalım:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to \frac{1}{1^2} = 1,$$

yani yine $L = 1$.
Sonuç. Birinci seri ıraksak, ikincisi yakınsaktır; ikisi de $L = 1$ vermektedir. Öyleyse $L = 1$ bilgisi serinin davranışını belirlemez, kök testi bu durumda sonuçsuzdur.
■

Testin gerçekten işe yaradığı durumlara geçelim. Kök testinin en rahat çalıştığı yer, genel terimin doğrudan bir n'inci kuvvet biçiminde verildiği serilerdir; orada n'inci kök almak ifadeyi tümüyle sadeleştirir.

Örnek 37.2 (Kuvvet Biçiminde Bir Seri).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Genel terim

$$a_n = \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun. Her $n \geq 1$ için $\dfrac{2n}{3n+1} > 0$ olduğundan $a_n > 0$'dır ve kök testi uygulanabilir.
Genel terim tam olarak bir n'inci kuvvet olduğundan n'inci kök alma işlemi üsteli tümüyle silecektir:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n} = \frac{2n}{3n+1}.$$

Bu son ifadenin limitini almak için pay ve paydayı n'e bölelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

Burada $\dfrac{1}{n} \to 0$ olduğunu (bkz. Analiz 1) ve limit aritmetiğini (bkz. Analiz 1) kullandık.
$\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ dizisi yakınsak olduğundan üst limiti de bu ortak değere eşittir:

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1.$$

Teorem 37.1 gereği seri **yakınsaktır**.
Not olarak şunu ekleyelim: ispatın verdiği bilgi biraz daha fazladır. $r = \dfrac{7}{10}$ seçersek $\dfrac{2}{3} < \dfrac{7}{10} < 1$ olduğundan, yeterince büyük n için $a_n < \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$ olur; yani serinin kuyruğu açıkça bir geometrik seriyle bastırılmıştır.
■

Bir sonraki örnekte, genel terimin üsteli n değil n^2'dir. n'inci kök alındığında üstel $n^2 \cdot \dfrac{1}{n} = n$ olur ve karşımıza e sayısını tanımlayan meşhur dizi çıkar.

Örnek 37.3 (Üsteli Kare Olan Bir Seri).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Genel terim

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

olsun; her $n \geq 1$ için $a_n > 0$ olduğundan kök testi uygulanabilir.
Kökü alalım. Kuvvetin kuvveti kuralı gereği

$$\sqrt[n]{a_n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Sağdaki dizi tam olarak e sayısını tanımlayan dizidir (bkz. Analiz 1, e Sayısı (Euler Sayısı)):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Öyleyse

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e \approx 2{,}71828 > 1$$

olur ve Teorem 37.1 gereği seri **ıraksaktır**.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonucu doğrudan da görebiliriz. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisi artandır ve $n \geq 1$ için değeri en az 2'dir (bkz. Analiz 1 ile e'ye artarak yakınsar). Buna göre

$$a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq 2^n \to +\infty$$

olur; yani serinin terimleri sıfıra gitmek şöyle dursun, sonsuza ıraksar. Kök testinin ıraksaklık durumunun ispatındaki mantık tam da budur: $L > 1$ olduğunda seri, terimleri sıfıra gitmediği için ıraksar. ■

Bu son örnek, kök testinin ıraksaklık kısmının aslında biraz daha keskin bir biçimde de ifade edilebileceğini düşündürür. Gerçekten de ispatta $L > 1$ varsayımını tam gücüyle kullanmadık; yalnızca sonsuz çoklukta n için $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ olmasını kullandık.

i Iraksaklık için daha keskin bir ölçüt

Teorem 37.1'nin ikinci maddesinin ispatı şunu göstermiştir:

> Eğer $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ eşitsizliği **sonsuz çoklukta** n için sağlanıyorsa, $\sum a_n$ ıraksaktır.

Çünkü bu durumda sonsuz çoklukta n için $a_n \geq 1$ olur ve genel terim sıfıra gidemez. Bu ölçüt $L > 1$ koşulundan daha geniştir: $L = 1$ olduğu hâlde ölçütün işlediği seriler vardır. Örneğin

$$a_n = \left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n$$

için $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{2+(-1)^n}{3}$ olur; n tek iken bu sayı $\frac{1}{3}$, n çift iken 1'dir. Dolayısıyla $L = 1$'dir ve kök testi standart biçimiyle sonuçsuz kalır. Oysa çift indislerde $a_n = 1$ olduğundan genel terim sıfıra gitmez ve seri ıraksar.
Ters yön ise doğru **değildir**: $\sqrt[n]{a_n} < 1$ eşitsizliğinin her n için sağlanması yakınsaklık getirmez. Harmonik seride her $n \geq 2$ için $\sqrt[n]{1/n} < 1$'dir, buna karşın seri ıraksaktır.

37.3 d'Alembert Oran Testi

Kök testinin uygulanması, $\sqrt[n]{a_n}$ ifadesinin kolayca sadeleşmesine bağlıdır. Genel terimde faktöriyeller, çarpımlar ya da uzun ürünler varsa n'inci kök almak işe yaramaz; oysa **ardışık iki terimin oranı** böyle ifadelerde muazzam sadeleşir. Örneğin $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$ için $\sqrt[n]{a_n}$ ifadesi $\sqrt[n]{n!}$ içerir ve doğrudan hesaplanamaz; buna karşılık

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}$$

olur ve her şey görünür hâle gelir. Oran testinin varlık nedeni budur.
Testin ifadesinde bir incelik vardır: yakınsaklık koşulu **üst limit**le, ıraksaklık koşulu ise **alt limit**le kurulur. Bunun nedeni ispatların yapısında saklıdır. Yakınsaklık için bütün oranların (yeterince ileride) 1'in altında kalması gerekir; ıraksaklık içinse bütün oranların 1'in üstünde kalması gerekir. Birincisi üst limitin, ikincisi alt limitin bilgisidir.

Teorem 37.2 (d'Alembert Oran Testi). *Her n için $a_n > 0$ olsun ve*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \ell = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

yazalım. O hâlde:

- *$L < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi **yakınsaktır**.*

 CC BY-NC-SA 4.0

- $\ell > 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi* ***ıraksaktır****.*
- $\ell \leq 1 \leq L$ *ise test* ***sonuçsuzdur****.*

İspat.
Durum 1: $\boldsymbol{L < 1}$**.**
$L < r < 1$ *olacak biçimde bir* r *seçelim (oranlar pozitif olduğundan* $L \geq 0$*'dır;* $r = \dfrac{L+1}{2}$ *işi görür).*
Üst limitin birinci özelliği gereği öyle bir $N \in \mathbb{N}$ *vardır ki her* $n \geq N$ *için*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r,$$

yani $a_n > 0$ *olduğundan*

$$a_{n+1} < r\, a_n, \qquad n \geq N$$

olur. Bu eşitsizliği ardışık olarak kullanalım:

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< r\, a_N, \\ a_{N+2} &< r\, a_{N+1} < r^2 a_N, \\ a_{N+3} &< r\, a_{N+2} < r^3 a_N, \end{aligned}$$

ve tümevarımla her $k \geq 0$ *için*

$$a_{N+k} \leq r^k a_N$$

elde ederiz ($k = 0$ *için eşitlik geçerlidir;* $k \geq 1$ *için kesin eşitsizlik). Gerçekten, iddia* k *için doğruysa* $a_{N+k+1} < r\, a_{N+k} \leq r \cdot r^k a_N = r^{k+1} a_N$ *olur.*
Şimdi $n \geq N$ *için* $k = n - N$ *yazalım:*

$$a_n \leq r^{\,n-N} a_N = \left(\, a_N r^{-N} \,\right) r^n.$$

$C = a_N r^{-N} > 0$ *sabitini tanımlarsak*

$$a_n \leq C r^n, \qquad n \geq N$$

olur.
$0 < r < 1$ *olduğundan* $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ *yakınsaktır, dolayısıyla* $\sum_{n=N}^{\infty} C r^n$ *de yakınsaktır. Karşılaştırma testi gereği* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *yakınsar; başa sonlu sayıda terim eklemek durumu değiştirmediğinden* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *yakınsaktır.*
Durum 2: $\boldsymbol{\ell > 1}$**.**
$1 < \ell' < \ell$ *olacak biçimde bir* ℓ' *seçelim. (*$\ell = +\infty$ *ise* 1*'den büyük herhangi bir* ℓ' *alınabilir.)*
Alt limitin birinci özelliği gereği öyle bir $N \in \mathbb{N}$ *vardır ki her* $n \geq N$ *için*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell' > 1,$$

yani

$$a_{n+1} > \ell'\, a_n, \qquad n \geq N$$

olur. Birinci durumdaki tümevarımın aynısını ters yönde uygulayarak her $k \geq 0$ *için*

$$a_{N+k} \geq (\ell')^k a_N,$$

yani $n \geq N$ *için*

$$a_n \geq (\ell')^{\,n-N} a_N$$

buluruz.
$\ell' > 1$ *olduğundan* $(\ell')^{\,n-N} \to +\infty$*'dur (tabanı* 1*'den büyük olan geometrik dizi sonsuza ıraksar) ve* $a_N > 0$ *sabit olduğundan* $a_n \to +\infty$ *olur. Özellikle* $a_n \not\to 0$*'dır; genel terim testi gereği seri ıraksaktır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Daha zayıf ama yeterli bir gözlem de aynı sonucu verir: $n \geq N$ için $a_{n+1} > a_n > 0$ olduğundan $(a_n)_{n\geq N}$ kesin artandır, dolayısıyla her $n \geq N$ için $a_n \geq a_N > 0$'dır ve genel terim sıfıra gidemez.
***Durum 3:* $\ell \leq 1 \leq L$.**
Testin bu aralıkta hiçbir bilgi vermediğini görmek için en basit alt duruma, oranın limitinin var olup 1'e eşit olduğu ($\ell = L = 1$) duruma bakmak yeterlidir. Örnek 37.4'da bu değeri veren biri ıraksak biri yakınsak iki seri veriyoruz. Aynı ℓ ve L değerleri iki karşıt davranıştan da çıkabildiğine göre, bu bilgi serinin davranışını belirleyemez.
■

Testin üçüncü maddesinin nasıl okunması gerektiğine dikkat edelim. Karar verilebilen tek iki durum $L < 1$ ve $\ell > 1$'dir. Geriye kalan her şey — $\ell \leq 1 \leq L$ — sonuçsuzluk bölgesidir. Bu bölge $\ell = L = 1$ durumundan çok daha geniştir; örneğin $\ell = 0$, $L = +\infty$ olan seriler de buraya düşer ve o serilerde oran testi tümüyle sessiz kalır.

⚠ Iraksaklık koşulu üst limitle kurulamaz

Oran testinin en sık yapılan yanlış kullanımı, "$L = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise seri ıraksar" biçimindeki uydurma kuraldır. Bu **yanlıştır**.
$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ olması, yalnızca sonsuz çoklukta n için $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, yani $a_{n+1} > a_n$ olduğunu söyler. Terimlerin sonsuz çoklukta indiste büyümesi ise ıraksaklık için hiçbir şey ifade etmez; bu terimler aradaki adımlarda çok daha hızlı küçülüyor olabilir. Örnek 37.7'da göreceğimiz seride

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$

olduğu hâlde seri **yakınsaktır**.
Kısacası: yakınsaklık için $\limsup < 1$, ıraksaklık için $\liminf > 1$. İkisi de "bütün oranlar yeterince ileride eşiğin bir tarafında" demektir; biri üstten, öteki alttan.

Örnek 37.4 (Oran Testinin Sonuçsuz Kaldığı İki Seri). Oranın limitinin var olup 1'e eşit olması durumunda hem yakınsak hem ıraksak seri bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm.
Birinci seri: harmonik seri. $a_n = \dfrac{1}{n}$ olsun. Ardışık terimlerin oranı

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{1+0} = 1$$

olur. Dizi yakınsak olduğundan $\ell = L = 1$'dir. Buna karşın harmonik seri ıraksaktır.
İkinci seri: $p = 2$ serisi. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ olsun. Bu kez

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

olur, yani yine $\ell = L = 1$'dir. Oysa bu seri yakınsaktır.
Sonuç. $\ell = L = 1$ değeri iki karşıt davranıştan da çıkabildiğine göre, $\ell \leq 1 \leq L$ durumunda oran testi sonuçsuzdur.
Aslında bu hesap, kök testindeki gözlemin bir başka yüzüdür: bütün p-serileri için oranın limiti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 1$$

olduğundan, oran testi de p-serileri ailesinin tamamına karşı kördür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi testin gücünü gösteren iki örneğe geçelim. Her ikisinde de genel terimde faktöriyel bulunur; kök testiyle uğraşmak zahmetli olurdu, oran testiyle ise hesap birkaç satırda biter.

Örnek 37.5 (Faktöriyelli Yakınsak Bir Seri).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Genel terim $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$ olsun. Her $n \geq 1$ için $a_n > 0$ olduğundan oran testi uygulanabilir.
Ardışık terimlerin oranını hesaplayalım. $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ ve $3^{n+1} = 3\cdot 3^n$ olduğundan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{3^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = 3\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{3}{n+1}.$$

Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0$$

bulunur. Limit var olduğundan $\ell = L = 0$'dır ve

$$L = 0 < 1$$

olur. Teorem 37.2 gereği seri **yakınsaktır**.
Bu serinin toplamının $e^3 - 1$ olduğunu, üstel fonksiyonun kuvvet serisi açılımını ele aldığımızda göreceğiz; şimdilik bizi ilgilendiren yalnızca yakınsaklıktır.
Aynı sonuca kök testiyle ulaşmak isteseydik $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{3}{\sqrt[n]{n!}}$ ifadesiyle uğraşmak, yani $\sqrt[n]{n!}$ dizisinin davranışını bilmek zorunda kalırdık. Oran testi bu bilgiyi hiç gerektirmeden sonucu verdi. Birazdan (Sonuç 37.1) tam tersi yönde ilerleyip bu hesaptan $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ olduğunu **çıkaracağız**.
■

Örnek 37.6 (Faktöriyelli Iraksak Bir Seri).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Genel terim $a_n = \dfrac{n!}{5^n}$ olsun; her $n \geq 1$ için $a_n > 0$'dır.
Oranı hesaplayalım:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{5^n}{5^{n+1}} = (n+1)\cdot\frac{1}{5} = \frac{n+1}{5}.$$

$n \to \infty$ iken $\dfrac{n+1}{5} \to +\infty$ olduğundan

$$\ell = \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty > 1$$

olur (limit var olduğundan alt ve üst limit de bu değere eşittir). Teorem 37.2 gereği seri **ıraksaktır**.
Iraksaklık burada çok belirgindir: $n \geq 5$ için oran $\dfrac{n+1}{5} \geq \dfrac{6}{5} > 1$ olduğundan terimler artmaya başlar ve $a_n \to +\infty$ olur. Bu, faktöriyelin her üstel diziden hızlı büyümesinin bir başka görünümüdür (bkz. Analiz 1); 5 sayısının yerine hangi sabit konursa konsun sonuç değişmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

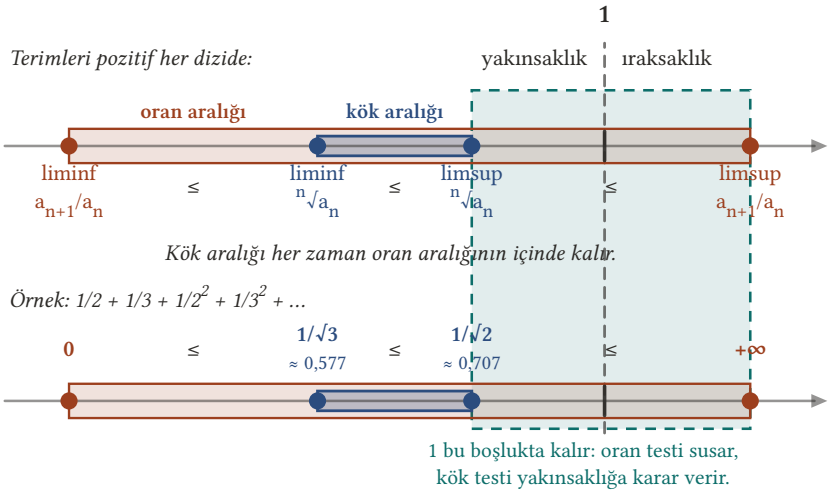
37.4 Kök Testi Oran Testinden Güçlüdür

Şimdiye kadar iki test gördük ve ikisinin de aynı eşiği, 1 sayısını kullandığını fark ettik. Aralarındaki ilişkiyi belirsiz bırakmak yerine, tam olarak ölçelim. Aşağıdaki teorem, **her** pozitif dizi için oranların ve köklerin alt-üst limitlerini tek bir zincire dizer. Teoremin serilerle doğrudan bir ilgisi yoktur; saf bir dizi teoremidir. Ama sonuçları seriler için belirleyicidir.

Teorem 37.3 (Oran ile Kök Arasındaki Eşitsizlik Zinciri). *(a_n) terimleri pozitif olan bir dizi olsun. O hâlde*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.



Şekil 37.1: Dört büyüklük bir sayı doğrusunda her zaman bu sırayla dizilir: köklerin alt ve üst limitleri, oranların alt ve üst limitlerinin arasına sıkışır. Kök aralığı oran aralığından geniş olamaz; bu yüzden oran testinin karar verdiği her seride kök testi de aynı kararı verir. Alttaki örnekte 1 sayısı oran aralığının (0 ile $+\infty$ arası) içine düştüğünden oran testi susar, ama kök aralığının sağında kaldığından – yani limsup $\sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707 < 1$ olduğundan – kök testi yakınsaklığa karar verir.

İspat.
Ortadaki eşitsizlik, her dizi için alt limitin üst limiti aşamamasının doğrudan sonucudur (bkz. Analiz 1); ispatlanacak bir şey yoktur. Geriye iki uçtaki eşitsizlikler kalıyor. Önce sağdakini ayrıntısıyla yapalım, ardından soldakini aynı yöntemin aynadaki görüntüsüyle kuralım.
Sağdaki eşitsizlik: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
$L = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *yazalım. Eğer* $L = +\infty$ *ise eşitsizlik aşikârdır, çünkü hiçbir şey* $+\infty$*'u aşamaz. Öyleyse* $L < +\infty$ *olduğunu varsayalım. Terimler pozitif olduğundan oranlar da pozitiftir, dolayısıyla* $L \ge 0$*'dır.*
Şimdi $r > L$ *olan* ***herhangi*** *bir reel sayı alalım. Amacımız*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le r$$

olduğunu göstermek; bunu başarırsak, $r > L$ *keyfî olduğundan* $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le L$ *sonucu çıkar.*
Adım 1: Oranların üstten bastırılması. $r > L$ *olduğundan, üst limitin birinci özelliği gereği öyle bir* $N \in \mathbb{N}$ *vardır ki her* $n \ge N$ *için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

olur.
Adım 2: Terimlerin geometrik olarak bastırılması. *$n > N$ olsun. Terimi, ardışık oranların çarpımı olarak teleskopik biçimde yazabiliriz (bütün terimler pozitif olduğu için bu bölmeler yapılabilir):*

$$a_n = a_N \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Sağdaki çarpımda $n - N$ tane oran vardır ve Adım 1 gereği her biri r'den küçüktür. Pozitif sayıların çarpımında her çarpanı büyütmek çarpımı büyüteceğinden

$$a_n < a_N\, r^{\,n-N} = \left(\, a_N r^{-N} \,\right) r^n.$$

$C = a_N r^{-N}$ yazalım; $a_N > 0$ ve $r > 0$ olduğundan $C > 0$'dır ve C sabit bir sayıdır (n'ye bağlı değildir). Böylece

$$a_n < C r^n, \qquad n > N$$

elde ettik.
Adım 3: Kök alma. *$n > N$ için her iki tarafın n'inci kökünü alalım; $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artan olduğundan eşitsizlik korunur:*

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{C}\, r.$$

Adım 4: Limite geçiş. *$C > 0$ sabit olduğundan $\sqrt[n]{C} \to 1$'dir (pozitif bir sabitin n'inci kökü 1'e yakınsar). Dolayısıyla $\left(\, \sqrt[n]{C}\, r \,\right)$ dizisi r'ye yakınsar. Üst limit, terim terim büyük olan dizinin üst limitini aşamayacağından ve yakınsak bir dizinin üst limiti kendi limitine eşit olduğundan*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \left(\, \sqrt[n]{C}\, r \,\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\, \sqrt[n]{C}\, r \,\right) = r$$

bulunur.
Adım 5: r'yi L'ye yaklaştırma. *Yukarıdaki eşitsizlik L'den büyük **her** r için geçerlidir. Öyleyse $\limsup \sqrt[n]{a_n}$ sayısı, (L, ∞) aralığının bir alt sınırıdır; bu aralığın infimumu L olduğundan*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

sonucuna varırız. (Somut olarak: $r = L + \varepsilon$ alıp $\varepsilon \to 0^+$ yapmak da aynı sonucu verir.)
Soldaki eşitsizlik: $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
$\ell = \liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *yazalım. Oranlar pozitif olduğundan $\ell \ge 0$'dır. Eğer $\ell = 0$ ise, kökler de negatif olmadığından* $\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge 0 = \ell$ *olur ve iddia doğrudur. Öyleyse $\ell > 0$ varsayalım.*
$0 < s < \ell$ *olan **herhangi** bir s alalım ve* $\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge s$ *olduğunu gösterelim.*
Adım 1′. *$s < \ell$ olduğundan, alt limitin birinci özelliği gereği öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \ge N$ için*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s$$

olur.
Adım 2′. *$n > N$ için aynı teleskopik çarpımı yazalım:*

$$a_n = a_N \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} > a_N\, s^{\,n-N} = \left(\, a_N s^{-N} \,\right) s^n = D\, s^n,$$

burada $D = a_N s^{-N} > 0$ sabittir.
Adım 3′. *n'inci kökü alırsak*

$$\sqrt[n]{a_n} > \sqrt[n]{D}\, s, \qquad n > N.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 4′. *$D > 0$ sabit olduğundan yine $\sqrt[n]{D} \to 1$'dir ve sağdaki dizi s'ye yakınsar. Terim terim küçük olan dizinin alt limiti aşılamayacağından*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{D}\, s \right) = s.$$

Adım 5′. *Bu eşitsizlik $0 < s < \ell$ olan her s için geçerlidir; $s \to \ell^-$ limitine geçerek ($\ell = +\infty$ ise s'yi istediğimiz kadar büyük seçerek)*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \ell = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

elde ederiz.
Üç eşitsizliği yan yana koyunca zincir tamamlanır.
■

Zincirin söylediğini bir cümlede toparlayalım: **kökler, oranlardan daha dar bir aralığa sıkışır.** Oranların alt ve üst limitleri arasındaki $[\ell, L]$ aralığı, köklerin alt ve üst limitleri arasındaki aralığı içerir. Bu içerme, iki testin gücünü karşılaştırmak için gereken her şeyi verir; ama önce en temiz sonucunu yazalım.

Sonuç 37.1 (Oranın Limiti Varsa Kökün Limiti de Vardır). *(a_n) terimleri pozitif olan bir dizi olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

limiti (genişletilmiş anlamda, $L \in [0, +\infty]$ olarak) varsa, o hâlde

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

limiti de vardır ve L'ye eşittir.

İspat.
Oranların limiti var ve L'ye eşit olduğuna göre

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

olur. Bu iki değeri Teorem 37.3′nin zincirine yerleştirelim:

$$L \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L.$$

Zincirin iki ucu da L olduğundan aradaki bütün eşitsizlikler eşitliğe dönüşür:

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Bir dizinin alt ve üst limiti eşit olduğunda dizi (genişletilmiş anlamda) yakınsaktır ve limiti bu ortak değerdir. Öyleyse $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$'dir.
■

Bu sonucun tersi doğru değildir: kökün limiti var olduğu hâlde oranın limiti olmayan diziler vardır. Örneğin

$$a_n = \frac{2^{\,n+(-1)^n}}{3^n}$$

dizisinde $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{2}{3}$'tür, oysa ardışık terimlerin oranı $\dfrac{1}{6}$ ile $\dfrac{8}{3}$ değerleri arasında sonsuza dek gidip gelir ve limiti yoktur; bu hesabı alıştırmaların (d) şıkkında ayrıntısıyla yapacağız. Yani Sonuç 37.1 tek yönlü bir köprüdür: oranın limitinden kökünkine geçilir, ters yönde geçilmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Köprünün pratik bir yan ürünü vardır: zor bir $\sqrt[n]{a_n}$ limitini, kolay bir $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ limitine çevirebiliriz. Bu, kök limitlerini hesaplamanın en kullanışlı tekniklerinden biridir.

Bir yan ürün: kök limitlerini oranla hesaplamak

$\sqrt[n]{n!}$ dizisinin davranışını doğrudan görmek kolay değildir. Sonuç 37.1 ile birkaç satırda hallolur.

Birinci hesap. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$ alalım. Örnek 37.5'de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3}{n+1} \to 0$ olduğunu bulmuştuk. Öyleyse

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

ki bu ancak $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ ise olabilir. Demek ki $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$'dur.

İkinci hesap (daha hassası). Bu kez $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ alalım. Oran

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = (n+1)\cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

olur ve e Dizisi Artan ve Sınırlıdır gereği bu ifade $\dfrac{1}{e}$'ye yakınsar. Sonuç 37.1 gereği

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Yani $\sqrt[n]{n!}$ dizisi kabaca $\dfrac{n}{e}$ gibi büyür. Bu, Stirling formülünün en kolay elde edilen parçasıdır.

Şimdi asıl karşılaştırmayı yapabiliriz.

Önerme 37.1 (Kök Testi Oran Testinden Daha Güçlüdür). *(a_n) terimleri pozitif olan bir dizi olsun.*

- *Eğer oran testi yakınsaklık veriyorsa, yani* $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *ise, kök testi de yakınsaklık verir:* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.
- *Eğer oran testi ıraksaklık veriyorsa, yani* $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *ise, kök testi de ıraksaklık verir:* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

Yani oran testinin karar verdiği her seride kök testi de karar verir ve kararları çakışır. Bunun tersi doğru değildir: kök testinin karar verip oran testinin sessiz kaldığı seriler vardır.

İspat.

Birinci madde. $L = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *olsun. Teorem 37.3'nin sağdaki eşitsizliği gereği*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L < 1$$

olur. Bu, Teorem 37.1'nin birinci maddesinin koşuludur; kök testi de yakınsaklık verir.

İkinci madde. $\ell = \liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *olsun. Teorem 37.3'nin soldaki eşitsizliği gereği*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \ell > 1$$

olur. Alt limit üst limiti aşamayacağından

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

elde edilir; bu da Teorem 37.1'nin ikinci maddesinin koşuludur ve kök testi ıraksaklık verir.

Tersinin yanlışlığı. *Örnek 37.7'da verilen seride*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan $\ell \le 1 \le L$ sağlanır ve oran testi sonuçsuz kalır; buna karşın aynı seride $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ olduğundan kök testi yakınsaklığı verir. Öyleyse iki test denk değildir; kök testi kesin olarak daha güçlüdür.
■

Bu önermenin ispatındaki karşı örneği artık ayrıntısıyla kurmamız gerekiyor. Seri, iki farklı geometrik dizinin terimlerini sırayla iç içe geçirerek elde edilir; bu iç içe geçme, ardışık terimlerin oranını çılgınca salındırır ama n'inci kökleri terbiyeli tutar.

Örnek 37.7 (Oran Testinin Çuvalladığı Kök Testinin Karar Verdiği Bir Seri).

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: Genel terimi açıkça yazmak. Seride tek indisli yerlerde 2'nin kuvvetlerinin tersleri, çift indisli yerlerde 3'ün kuvvetlerinin tersleri bulunuyor. Bunu formülleştirelim: her $m \in \mathbb{N}$ için

$$a_{2m-1} = \frac{1}{2^m}, \qquad a_{2m} = \frac{1}{3^m}.$$

Doğruluğunu ilk terimlerde sınayalım: $m = 1$ için $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{1}{3}$; $m = 2$ için $a_3 = \dfrac{1}{2^2}, a_4 = \dfrac{1}{3^2}$; $m = 3$ için $a_5 = \dfrac{1}{2^3}, a_6 = \dfrac{1}{3^3}$. Verilen sıralamayla tam olarak uyuşuyor. Bütün terimler pozitiftir.
Adım 2: Ardışık terimlerin oranı. İki ayrı geçiş türü vardır; ikisini de ayrı ayrı hesaplamalıyız.
Tek indisten çift indise geçiş ($n = 2m - 1$, yani n tek):

$$\frac{a_{2m}}{a_{2m-1}} = \frac{\frac{1}{3^m}}{\frac{1}{2^m}} = \frac{2^m}{3^m} = \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

Çift indisten tek indise geçiş ($n = 2m$, yani n çift; bir sonraki terim $a_{2m+1} = a_{2(m+1)-1} = \dfrac{1}{2^{m+1}}$'dir):

$$\frac{a_{2m+1}}{a_{2m}} = \frac{\frac{1}{2^{m+1}}}{\frac{1}{3^m}} = \frac{3^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m.$$

Toparlarsak, $m \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^m, & n = 2m-1 \ \ (n \ \text{ tek}), \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m, & n = 2m \ \ (n \ \text{ çift}). \end{cases}$$

Adım 3: Oranın alt ve üst limiti. İki alt diziyi ayrı ayrı inceleyelim.
Tek indisli oranlar: $\dfrac{2}{3} < 1$ olduğundan $\left(\dfrac{2}{3}\right)^m \to 0$'dır (bkz. Analiz 1). Bu alt dizi, oran dizisinin alabildiği en küçük değerlere iner.
Çift indisli oranlar: $\dfrac{3}{2} > 1$ olduğundan $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^m \to +\infty$'dur (tabanı 1'den büyük olan geometrik dizi sonsuza ıraksar).
Oran dizisinin her terimi bu iki alt diziden birine aittir; dolayısıyla dizinin her yığılma değeri bu iki alt diziden birinin yığılma değeridir, yani yalnızca 0 ya da $+\infty$ olabilir. İkisi de gerçekleştiğine göre genişletilmiş yığılma değerleri kümesi tam olarak $\{0, +\infty\}$'dur ve

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$

olur (bkz. Analiz 1).

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi Teorem 37.2'ne bakalım: $\ell = 0 \le 1 \le +\infty = L$ olduğundan üçüncü maddedeyiz. **Oran testi bu seri hakkında hiçbir sonuç vermez.** Üstelik burada $L > 1$ olması ıraksaklığa da tanıklık etmez; nitekim birazdan serinin yakınsak olduğunu göreceğiz.

Adım 4: n'inci kökler. Aynı iki durumu kökler için tekrarlayalım.

$n = 2m-1$ (tek) ise $a_n = \dfrac{1}{2^m}$ ve

$$\sqrt[n]{a_n} = (2^{-m})^{\frac{1}{2m-1}} = 2^{-\frac{m}{2m-1}}.$$

$m \to \infty$ iken

$$\frac{m}{2m-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{m}} \to \frac{1}{2}$$

olduğundan, $t \mapsto 2^{-t}$ fonksiyonunun sürekliliği gereği

$$\sqrt[n]{a_n} \to 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071.$$

$n = 2m$ (çift) ise $a_n = \dfrac{1}{3^m}$ ve

$$\sqrt[n]{a_n} = (3^{-m})^{\frac{1}{2m}} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774.$$

Dikkat: bu alt dizi yalnızca yakınsak değil, doğrudan **sabittir**; her çift indiste değeri $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$'tür.

Adım 5: Kökün alt ve üst limiti. Kök dizisinin terimleri yine iki alt diziye ayrılıyor; biri $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$'ye, öteki sabit olarak $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$'e eşit. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olduğundan

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Adım 6: Karar. Kök testinin baktığı sayı üst limittir:

$$L_{\text{kök}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Teorem 37.1 gereği seri **yakınsaktır**.

Adım 7: Zincirin sınanması. Elde ettiğimiz dört sayıyı Teorem 37.3'nin verdiği sıraya yerleştirelim:

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \le +\infty.$$

Zincir gerçekten sağlanıyor ve dıştaki iki eşitsizlik **kesindir**; yani teoremin eşitsizlikleri genel olarak eşitliğe indirgenemez. Bu seride ne oranın ne de kökün limiti vardır: her iki dizinin de iki ayrı yığılma değeri bulunur. Sonuç 37.1 bu yüzden buraya uygulanamaz; köprünün girişinde oranın limitinin var olması istenir, oysa burada oran 0 ile $+\infty$ arasında salınmaktadır. Yine de kök testinin baktığı tek sayı olan üst limit sonlu ve 1'in altında kaldığından, kök testi karar verebilmiştir.

Adım 8: Bir kontrol. Serinin yakınsaklığını doğrudan da doğrulayabiliriz. Seriyi ikişer ikişer gruplayarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

buluruz (terimler pozitif olduğundan gruplama ve iki yakınsak seriyi ayırma serbesttir). Gerçekten yakınsak ve toplamı $\dfrac{3}{2}$'dir. Kök testinin verdiği yanıt doğrudur.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu örnek, iki testin neden farklı davrandığını da açıklıyor. Oran testi **yerel** bir bilgiye, komşu iki terimin karşılaştırmasına bakar; terimler iki ayrı kalıba göre sıralanmışsa bu yerel bilgi sürekli zıplar ve hiçbir şey söylemez. Kök testi ise a_n'nin kendisini bir bütün olarak geometrik ölçekte ölçer; ara sıçramalar n'inci kök alınırken yumuşar. Zincir eşitsizliği tam olarak bu "yumuşama"nın niceliksel ifadesidir.

Hangi testi ne zaman kullanmalı

- **Genel terimde faktöriyel, çarpım ya da $c^n \cdot n!$ türü ifadeler varsa oran testiyle başlayın.** Ardışık terimlerin oranında faktöriyeller sadeleşir ve hesap birkaç satıra iner (Örnek 37.5, Örnek 37.6).
- **Genel terim baştan bir n'inci kuvvet biçimindeyse ($(c_n)^n$, n^n, c^{n^2} gibi) kök testiyle başlayın.** n'inci kök almak üsteli doğrudan siler (Örnek 37.2, Örnek 37.3).
- **Terimler indise göre iki (ya da daha çok) farklı kalıba ayrılıyorsa oran testine hiç girmeyin.** Oran, kalıplar arası geçişlerde salınır ve test çöker; kök testi bu durumda genellikle sağ kalır (Örnek 37.7).
- **Oran testi karar verdiyse kök testini denemek gereksizdir**; Önerme 37.1 gereği aynı kararı verecektir. Tersi geçerli değildir: kök testinin denenmesi her zaman anlamlıdır.
- **İki test de 1 verirse geometrik karşılaştırma tükenmiştir.** p-serileri, $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ gibi seriler hep bu durumdadır. O zaman karşılaştırma ya da yoğunlaştırma testine, ya da bir sonraki bölümde göreceğimiz Kummer ve Raabe testlerine geçmek gerekir.
- **Bir son not:** her iki test de $a_n \geq 0$ varsayımına dayanır. İşaretleri değişen serilerde bu testler doğrudan uygulanamaz; ancak $\sum |a_n|$ terimlerine uygulanarak mutlak yakınsaklık sınanabilir. Bunu mutlak yakınsaklık konusunda ele alacağız.

37.5 Alıştırmalar

Alıştırma 37.1 (Kök ve Oran Testleri Üzerine). Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını inceleyiniz; her şıkta hangi testi neden seçtiğinizi belirtiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+(-1)^n}}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n\, n!}{n^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2+(-1)^n}{3}\right)^n$

Çözüm.

a) Genel terim $a_n = \dfrac{n^2}{2^n} > 0$'dır. Terimde faktöriyel yok ama üstel bir çarpan var; iki test de rahat çalışır. Oran testiyle:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Limit var olduğundan $L = \dfrac{1}{2} < 1$'dir ve Teorem 37.2 gereği seri yakınsaktır.

Kök testi de aynı sonucu verir: $\sqrt[n]{n} \to 1$ olduğundan $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \dfrac{1}{2}$'dir. Sonuç 37.1'in söylediği tam olarak budur; iki limit zorunlu olarak eşit çıkar.

b) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$'dır. Faktöriyeller var; oran testi doğal seçimdir. $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ olduğunu kullanalım:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\big((n+1)!\big)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}.$$

$2n+2 = 2(n+1)$ olduğundan bu ifade

$$\frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} \to \frac{1}{4}$$

olur. $L = \dfrac{1}{4} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

c) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} > 0$'dır. Terim bir n^2'inci kuvvet olduğundan kök testi biçilmiş kaftandır:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

(bkz. Analiz 1). $L = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}368 < 1$ olduğundan Teorem 37.1 gereği seri yakınsaktır.

d) $a_n = \dfrac{2^{n+(-1)^n}}{3^n} > 0$'dır. Önce oran testini deneyelim:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{2^{1+(-1)^{n+1}-(-1)^n}}{3} = \frac{2^{1-2(-1)^n}}{3},$$

çünkü $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$ olduğundan üstel $1-2(-1)^n$'dir. Buna göre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2^{-1}}{3} = \frac{1}{6}, & n \ \text{çift}, \\ \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}, & n \ \text{tek}\ . \end{cases}$$

Öyleyse $\ell = \dfrac{1}{6}$ ve $L = \dfrac{8}{3}$'tür; $\ell \le 1 \le L$ olduğundan **oran testi sonuçsuzdur.**

Kök testine geçelim:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{\frac{n+(-1)^n}{n}}}{3} = \frac{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}}{3}.$$

$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan üstel 1'e yakınsar ve $t \mapsto 2^t$ sürekli olduğundan

$$\sqrt[n]{a_n} \to \frac{2^1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$L_{\text{kök}} = \dfrac{2}{3} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır. Bu şık, Önerme 37.1'nın "tersi doğru değildir" kısmının bir başka örneğidir. Dahası, burada $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ dizisinin limiti var $\left(\frac{2}{3}\right)$ ama $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ dizisinin limiti yoktur; yani Sonuç 37.1'in tersinin geçersiz olduğunu gösteren dizi tam olarak budur.

e) $a_n = \dfrac{3^n n!}{n^n} > 0$'dır. Faktöriyel var; oran testi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!} = 3(n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

e Dizisi Artan ve Sınırlıdır gereği payda e'ye yakınsar, dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} \approx 1{,}104 > 1.$$

Limit var olduğundan $\ell = L = \dfrac{3}{e} > 1$'dir ve Teorem 37.2 gereği seri **ıraksaktır**. Terimler aslında sonsuza gider.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı sonucu Sonuç 37.1 ile kök testinden de okuyabiliriz: $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{3}{e} > 1$. Buradan ayrıca $\dfrac{3\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{3}{e}$, yani yukarıda anılan $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{1}{e}$ sonucu bir kez daha çıkar.

f) $a_n = \left(\dfrac{2+(-1)^n}{3}\right)^n > 0$'dır. Kök testini deneyelim:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2+(-1)^n}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n \text{ tek}, \\ 1, & n \text{ çift}. \end{cases}$$

Öyleyse $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$'dir ve kök testi standart biçimiyle **sonuçsuz** kalır.

Yine de seriyi karara bağlayabiliriz. n çift iken $a_n = 1^n = 1$'dir; yani (a_n) dizisinin sonsuz çoklukta terimi 1'e eşittir. Bu durumda $a_n \to 0$ olamaz ve genel terim testi gereği seri **ıraksaktır**. Bu, kök testinin ıraksaklık ölçütünün keskinleştirilmiş biçimidir: $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ eşitsizliği sonsuz çoklukta n için sağlanıyorsa seri ıraksar.

Oran testi burada da işe yaramaz. Tek n için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{(1/3)^n} = 3^n \to +\infty$, çift n için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(1/3)^{n+1}}{1} \to 0$ olduğundan $\ell = 0$, $L = +\infty$'dur.

■

Kök ve oran testleri, pozitif terimli serilerin büyük bir bölümünü hızla karara bağlar; ama ikisi de aynı ölçeği, geometrik seriyi kullandığından $L = 1$ sınırında birlikte susarlar. Oysa bu sınırda duran seriler arasında hem yakınsak hem ıraksak olanlar vardır ve aralarındaki farkı görecek daha ince testler kurulabilir. Bir sonraki bölümde bu testlerin genel çatısını ve iki önemli örneğini inceleyeceğiz: Kummer ve Raabe Testleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

38. Kummer ve Raabe Testleri

Kök ve Oran Testleri bölümünde pozitif terimli serileri geometrik serilerle karşılaştırmayı öğrendik. Cauchy kök testi (Teorem 37.1) $\sqrt[k]{a_k}$ niceliğine, d'Alembert oran testi (Teorem 37.2) ise a_{k+1}/a_k oranına bakar; her ikisi de bu nicelikler 1'den kesin küçük ya da kesin büyük bir sayıya yaklaştığında kesin bir yanıt verir. Ayrıca kök testinin oran testinden gerçekten daha güçlü olduğunu, yani oran testinin karar verdiği her durumda kök testinin de karar verdiğini görmüştük (Teorem 37.3).

Ne var ki her iki testin de aynı yerde, **sınır durumda** sustuğunu fark ettik. $a_{k+1}/a_k \to 1$ ya da $\sqrt[k]{a_k} \to 1$ olduğunda seri yakınsak da olabilir, ıraksak da. En basit örnekler bunu hemen gösterir: $\sum 1/k$ ıraksaktır, $\sum 1/k^2$ yakınsaktır, ama her ikisinde de oran ve kök limitleri 1'e eşittir. Üstelik bu sınır durum istisnai değildir; rasyonel ifadelerden, faktöriyel çarpanlardan ve kuvvet fonksiyonlarından kurulmuş serilerin çok büyük bir bölümü tam olarak burada yer alır. Dolayısıyla elimizde daha ince bir alete ihtiyaç vardır.

Bu bölümde bu aletleri kuracağız. Ana fikir, geometrik serilerle karşılaştırmayı bırakıp **karşılaştırma ölçeğini serbest bırakmaktır**: seriyi, bizim seçtiğimiz herhangi bir ıraksak $\sum 1/c_k$ serisiyle karşılaştıracağız. Bu düşünceyi bir teoreme dönüştüren Alman matematikçi **Ernst Eduard Kummer** (1810–1893) olmuştur; ondan üretilen ve $c_k = k$ seçimine karşılık gelen özel hâli ise İsviçreli matematikçi **Joseph Ludwig Raabe**'nin (1801–1859) adını taşır.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Kummer testinin ifadesi, her iki şıkkının tam ispatı ve limit biçimi; $c_k = 1$ seçiminin oran testini, $c_k = k$ seçiminin Raabe testini, $c_k = k \ln k$ seçiminin ise Bertrand testini verdiği; bu testlerin p-serileri, faktöriyel oranlı seriler ve logaritmik ölçekli seriler üzerinde nasıl çalıştığı; ve son olarak testler arasındaki kesin güç sıralaması. Bölümün sonunda elinizde, "oran testi sonuç vermedi" cümlesiyle biten bir hesabı sürdürmenin sistemli bir yolu olacak.

38.1 Oran Testi Neden ve Nerede Susar

Oran testinin arkasındaki karşılaştırma çok kabadır: $a_{k+1}/a_k \le q < 1$ ise seri, q oranlı bir geometrik seriyle üstten sınırlanır. Sınır durumda ise oran 1'e yaklaşır ve hiçbir sabit $q < 1$ işe yaramaz. Ancak "oran 1'e yaklaşıyor" cümlesi her şeyi söylemez; **oranın 1'e ne kadar hızlı yaklaştığı** hâlâ ölçülebilir bir bilgidir.

Bunu p-serilerinde görelim. $a_k = 1/k^p$ için

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)^p}{k^p} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p$$

olur. k büyüdükçe bu ifade 1'e gider; ama binom açılımının ilk iki terimi bize daha fazlasını söyler:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p = 1 + \frac{p}{k} + (\text{daha küçük terimler}).$$

Yani oranın 1'den sapması yaklaşık p/k kadardır ve **serinin kaderini belirleyen sayı tam olarak bu p'dir** (Teorem 36.2): $p > 1$ ise yakınsak, $p \le 1$ ise ıraksak. Sapma $1/k$ mertebesinde olduğuna göre, onu k ile çarparsak sapmanın katsayısını okuyabiliriz. Bu gözlem doğrudan şu tanıma götürür: pozitif terimli bir seri için

$$R_k = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right), \qquad \text{yani} \qquad \frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{R_k}{k}.$$

R_k dizisi, oranın 1'den sapmasının $1/k$ ölçeğindeki katsayısıdır. p-serilerinde $R_k \to p$ olacağını göreceğiz; dolayısıyla "R_k'nın limiti 1'i geçiyor mu?" sorusu, oran testinin cevaplayamadığı soruyu cevaplar. Bu, **Raabe testi**dir.

Kummer'in katkısı, aynı fikri tek bir ölçeğe bağlı kalmadan yapmaktır. k yerine herhangi bir pozitif (c_k) dizisi koyar ve tek bir şey ister: $\sum 1/c_k$ **ıraksak** olsun. Bu koşul, $(1/c_k)$ dizisinin "yakınsaklığın tam sınırında ya da onun ıraksak tarafında" bir ölçek olmasını güvence altına alır; testin gücü de zaten bu ölçeği seçme özgürlüğünden gelir.

 CC BY-NC-SA 4.0

38.2 Kummer Testi

Şimdi testi tam biçimiyle ifade edip ispatlayalım. Testin niceliği, (c_k) ölçeğiyle ağırlıklandırılmış bir "oran farkı"dır.

Teorem 38.1 (Kummer Testi). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ pozitif terimli seriler olsun ve*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k}$$

serisi ıraksak olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$K_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1}$$

tanımlansın. O hâlde:
***(i)** Öyle bir $r > 0$ reel sayısı ve $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa ki her $k \geq N$ için $K_k \geq r$ olsun, o hâlde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi **yakınsaktır**.*
***(ii)** Bir $N \in \mathbb{N}$ için her $k \geq N$ olduğunda $K_k \leq 0$ ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi **ıraksaktır**.*

İspat.
***(i) şıkkının ispatı.** Her $k \geq N$ için $K_k \geq r > 0$ olduğunu varsayalım. Tanım gereği bu,*

$$c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} \geq r$$

demektir. Seri pozitif terimli olduğundan $a_{k+1} > 0$'dır; eşitsizliğin iki yanını a_{k+1} ile çarpmak yönü değiştirmez ve

$$c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1} \geq r\, a_{k+1} > 0, \qquad k \geq N \qquad (1)$$

elde ederiz.
***Adım 1: $(c_k a_k)$ dizisi N'den sonra azalandır ve yakınsar.** (1) eşitsizliğinin sağ yanı kesin pozitif olduğundan her $k \geq N$ için*

$$c_k a_k > c_{k+1} a_{k+1}$$

olur; yani $(c_k a_k)_{k \geq N}$ dizisi kesin azalandır. Ayrıca $c_k > 0$ ve $a_k > 0$ olduğundan bu dizinin bütün terimleri pozitiftir, dolayısıyla dizi 0 ile alttan sınırlıdır. Monoton yakınsaklık teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $(c_k a_k)_{k \geq N}$ dizisi yakınsaktır; sonlu sayıda terimin durumu yakınsaklığı etkilemediğinden $(c_k a_k)$ dizisi de yakınsaktır. Limitine L diyelim; terimler pozitif olduğundan $L \geq 0$'dır.
***Adım 2: Teleskopik seri yakınsaktır.** $b_k = c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}$ diyelim. (1) gereği $k \geq N$ için $b_k > 0$'dır. $\sum_{k \geq N} b_k$ serisinin kısmi toplamları teleskopiktir (Tanım 34.5): her $n \geq N$ için*

$$\sum_{k=N}^{n} b_k = \sum_{k=N}^{n} \left(c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1} \right) = c_N a_N - c_{n+1} a_{n+1}.$$

Adım 1'e göre $c_{n+1} a_{n+1} \to L$ olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=N}^{n} b_k = c_N a_N - L$$

olur; yani $\sum_{k \geq N} b_k$ serisi yakınsaktır ve toplamı $c_N a_N - L$'dir.
***Adım 3: Karşılaştırma.** (1) eşitsizliği, her $k \geq N$ için*

$$0 < r\, a_{k+1} \leq b_k$$

diyor. Adım 2'de $\sum_{k \geq N} b_k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterdik; sonlu sayıda terim eklemek yakınsaklığı değiştirmediğinden $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi de yakınsaktır. Eşitsizlik yalnızca $k \geq N$ için geçerli olduğundan karşılaştırma testinin kuyruk biçimini (Önerme 35.1) kullanırız: $\sum_{k=1}^{\infty} r\, a_{k+1}$ serisi yakınsaktır. $r > 0$ sabit olduğundan bu seriyi $\frac{1}{r}$ ile çarpmak (Teorem 34.4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$ serisinin yakınsaklığını verir. Bu

 CC BY-NC-SA 4.0

seri, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinden ilk terimin atılmasıyla elde edilir; sonlu sayıda terimin atılması ya da eklenmesi yakınsaklığı değiştirmediğinden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.
(ii) şıkkının ispatı. *Her $k \geq N$ için $K_k \leq 0$ olsun. Bu,*

$$c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq c_{k+1}$$

demektir. $c_{k+1} > 0$ ve $a_k > 0$ olduğundan iki yanı $c_{k+1}a_k$ ile bölerek

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{c_k}{c_{k+1}}, \qquad k \geq N \qquad (2)$$

elde ederiz.
Şimdi $m > N$ olsun ve (2) eşitsizliğini $k = N, N+1, \ldots, m-1$ değerleri için yazıp taraf tarafa çarpalım. Bütün taraflar pozitif olduğundan çarpma yönü korur:

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_m}{a_{m-1}} \geq \frac{c_N}{c_{N+1}} \cdot \frac{c_{N+1}}{c_{N+2}} \cdots \frac{c_{m-1}}{c_m}.$$

Her iki tarafta da ara çarpanlar sadeleşir ve

$$\frac{a_m}{a_N} \geq \frac{c_N}{c_m}$$

kalır. Buradan, her $m \geq N$ için (eşitlik $m = N$'de de sağlandığından)

$$a_m \geq c_N a_N \cdot \frac{1}{c_m} \qquad (3)$$

bulunur. Burada $c_N a_N$ sayısı m'den bağımsız, kesin pozitif bir sabittir.
Varsayım gereği $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c_m}$ serisi ıraksaktır. Öyleyse $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_N a_N}{c_m}$ serisi de ıraksaktır: yakınsak olsaydı, onu pozitif $c_N a_N$ sayısının tersiyle çarparak (Teorem 34.4) $\sum 1/c_m$'in yakınsaklığı çıkardı ve bu varsayımla çelişirdi. (3) eşitsizliği her $m \geq N$ için $a_m \geq \frac{c_N a_N}{c_m} \geq 0$ dediğinden, karşılaştırma testinin kuyruk biçimi (Önerme 35.1) gereği $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ serisi ıraksaktır.
■

İspatın (i) şıkkını okurken şunu fark etmiş olabilirsiniz: $\sum 1/c_k$'nın ıraksaklığı hiçbir yerde kullanılmadı. Bu bir gözden kaçırma değildir; hipotez yalnızca (ii) şıkkı için gereklidir ve orada vazgeçilmezdir.

⚠ Iraksaklık hipotezi ikinci şık için zorunludur

$\sum 1/c_k$'nın ıraksaklığı (ii) şıkkında kaldırılamaz. Örneğin $a_k = 2^{-k}$ ve $c_k = 4^k$ alalım. Bu seçimde

$$K_k = 4^k \cdot \frac{2^{-k}}{2^{-(k+1)}} - 4^{k+1} = 2 \cdot 4^k - 4 \cdot 4^k = -2 \cdot 4^k \leq 0$$

olur, yani (ii) şıkkının eşitsizlik koşulu her k için sağlanır. Buna karşın $\sum 2^{-k}$ serisi yakınsak bir geometrik seridir (Teorem 34.5). Çelişki yoktur: burada $\sum 1/c_k = \sum 4^{-k}$ **yakınsaktır**, dolayısıyla testin hipotezi sağlanmamaktadır.
Sezgisel açıklama şudur: (ii) şıkkı, a_k'yı alttan sabit $\cdot\, 1/c_k$ ile sınırlar. Bu bilgi ancak $\sum 1/c_k$ ıraksaksa işe yarar; yakınsak bir seriyle alttan sınırlamak hiçbir şey söylemez.

38.2.1 Limit Biçimi

Uygulamada K_k için sabit bir r aramak yerine doğrudan $\lim K_k$ hesaplanır. Aşağıdaki sonuç, teoremi bu kullanışlı biçime sokar. Limitin $+\infty$ ya da $-\infty$ olmasına da izin veriyoruz; bu, ileride testleri karşılaştırırken işimize yarayacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 38.1 (Kummer Testinin Limit Biçimi). *Teorem 38.1'nin hipotezleri altında (K_k) dizisinin genişletilmiş anlamda bir limiti olsun:*

$$\lim_{k\to\infty} K_k = K \in [-\infty, +\infty].$$

O hâlde:

- *$K > 0$ ise ($K = +\infty$ dâhil) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.*
- *$K < 0$ ise ($K = -\infty$ dâhil) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.*
- *$K = 0$ ise test sonuçsuzdur: bu durumda hem yakınsak hem ıraksak seriler vardır.*

İspat.
Durum 1: $0 < K < +\infty$. *$\varepsilon = \dfrac{K}{2} > 0$ alalım. Limit tanımı gereği öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $k \geq N$ için $|\, K_k - K \,| < \dfrac{K}{2}$ olur. Özellikle*

$$K_k > K - \frac{K}{2} = \frac{K}{2}, \qquad k \geq N.$$

$r = \dfrac{K}{2} > 0$ alırsak her $k \geq N$ için $K_k \geq r$ (hatta $K_k > r$) sağlanır. Teorem 38.1 (i) gereği seri yakınsaktır.
Durum 2: $K = +\infty$. *Tanım gereği öyle bir N vardır ki her $k \geq N$ için $K_k > 1$ olur. $r = 1 > 0$ alıp Teorem 38.1 (i) uygulanır; seri yakınsaktır.*
Durum 3: $-\infty < K < 0$. *Bu kez $\varepsilon = -\dfrac{K}{2} > 0$ alalım ($K < 0$ olduğundan bu sayı pozitiftir). Öyle bir N vardır ki her $k \geq N$ için $|\, K_k - K \,| < -\dfrac{K}{2}$, dolayısıyla*

$$K_k < K + \left(-\frac{K}{2}\right) = \frac{K}{2} < 0$$

olur. Özellikle her $k \geq N$ için $K_k \leq 0$'dır ve Teorem 38.1 (ii) gereği seri ıraksaktır.
Durum 4: $K = -\infty$. *Öyle bir N vardır ki her $k \geq N$ için $K_k < 0$, dolayısıyla $K_k \leq 0$ olur; Teorem 38.1 (ii) uygulanır ve seri ıraksaktır.*
Durum 5: $K = 0$. *Testin bu durumda hiçbir bilgi vermediğini, aynı K değerini veren biri yakınsak biri ıraksak iki seri kurarak gösterelim. $c_k = 1$ alalım; $\sum 1/c_k = \sum 1$ serisinin genel terimi 0'a gitmediğinden bu seri ıraksaktır (Teorem 34.2), yani hipotez sağlanır. Bu seçimde*

$$K_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1$$

olur.

- *$a_k = \dfrac{1}{k}$ alırsak $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{k+1}{k}$ ve $K_k = \dfrac{1}{k} \to 0$'dır. Oysa harmonik seri $\sum 1/k$ **ıraksaktır** (Teorem 36.2).*
- *$a_k = \dfrac{1}{k^2}$ alırsak $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^2$ ve $K_k = \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k^2} \to 0$'dır. Oysa $\sum 1/k^2$ **yakınsaktır** (Teorem 36.2).*

Her iki seride de $K = 0$ çıkmasına karşın sonuçlar zıttır; demek ki $K = 0$ hâlinde test karar veremez.
■

38.2.2 Ölçeğin Seçimi: Kummer Testi Neyi Kapsar

Kummer testinin bir test değil, bir **test ailesi** olduğunu vurgulamak gerekir: her (c_k) seçimi ayrı bir test verir. En basit iki seçim, zaten bildiğimiz testleri geri verir.
Birinci seçim: $c_k = 1$. Bu durumda $\sum 1/c_k = \sum 1$ ıraksaktır, yani hipotez sağlanır. Test niceliği

$$K_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1$$

olur. Şimdi şıkları çevirelim. $K_k \geq r > 0$ koşulu

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} \geq 1 + r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{1}{1+r} =: q < 1$$

demektir; bu tam olarak oran testinin yakınsaklık koşuludur. Öte yandan $K_k \leq 0$ koşulu

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{k+1} \geq a_k$$

demektir; yani terimler bir yerden sonra azalmayan bir dizidir, dolayısıyla $a_k \not\to 0$ olur ve seri genel terim testiyle (Teorem 34.2) ıraksar. Limit biçiminde de $L = \lim a_{k+1}/a_k$ varsa ve $L > 0$ ise $K = \dfrac{1}{L} - 1$'dir; buradan

$$K > 0 \Leftrightarrow L < 1, \qquad K < 0 \Leftrightarrow L > 1, \qquad K = 0 \Leftrightarrow L = 1$$

çıkar. Kısacası $\boldsymbol{c_k = 1}$ **seçimi d'Alembert oran testidir** (Teorem 37.2).
İkinci seçim: $\boldsymbol{c_k = k}$**.** Bu durumda $\sum 1/c_k = \sum 1/k$ harmonik seridir ve ıraksaktır (Teorem 36.2), yani hipotez yine sağlanır. Test niceliği

$$K_k = k\,\frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1) = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) - 1 = R_k - 1$$

olur; burada R_k, bölümün başında tanımladığımız niceliktir. Demek ki $c_k = k$ seçimi, R_k dizisinin 1 ile karşılaştırılmasına karşılık gelir. Bu, **Raabe testi**dir ve bir sonraki başlıkta ayrıntısıyla ele alacağız.

> Ölçek seçmek bir sanattır
>
> Kummer testinde tek serbestlik (c_k) dizisidir ve testin gücü tümüyle bu seçime bağlıdır. Kabaca kural şudur: $(1/c_k)$ dizisi, incelediğiniz seriden "biraz daha yavaş azalan" ve toplamı hâlâ ıraksak olan bir ölçek olmalıdır. $1,\ k,\ k\ln k,\ k\ln k\ln(\ln k),\ \ldots$ dizileri bu bakımdan giderek incelen bir ölçek merdiveni oluşturur; bunlara sırasıyla oran, Raabe ve Bertrand testleri karşılık gelir.

38.2.3 Kummer Testinin Uygulanışı

Şimdi testi somut serilerde çalıştıralım. Her iki örnekte de oran testi sessiz kalıyor; Kummer testi ise $c_k = k$ seçimiyle kesin yanıt veriyor.

Örnek 38.1 (Kareler Serisi için Kummer Testi). $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ serisinin yakınsaklığını Kummer testiyle inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \dfrac{1}{k^2}$ olsun. Önce oran testinin neden yetmediğini görelim:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} = 1.$$

Limit 1 olduğundan Teorem 37.2 sonuç vermez.
Ölçek seçimi. $c_k = k$ alalım. Testin hipotezi gereği $\sum 1/c_k$ ıraksak olmalıdır; burada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonik seridir ve ıraksaktır (Teorem 36.2). Hipotez sağlanıyor.
$\boldsymbol{K_k}$**'nın hesabı.** Tanımdan

$$K_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} = k \cdot \frac{1/k^2}{1/(k+1)^2} - (k+1) = k \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} - (k+1) = \frac{(k+1)^2}{k} - (k+1).$$

Sağ taraftaki iki terimde de $(k+1)$ ortak çarpandır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$K_k = (k+1)\left(\frac{k+1}{k} - 1\right) = (k+1)\cdot\frac{1}{k} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}.$$

Sonuç. Her $k \in \mathbb{N}$ için $K_k = 1 + \dfrac{1}{k} > 1$ olduğundan, $r = 1$ ve $N = 1$ alarak doğrudan Teorem 38.1 (i) uygulanabilir: seri yakınsaktır. Limit biçimini kullanmak isterseniz

$$K = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 > 0$$

olduğundan Sonuç 38.1 de aynı sonucu verir.
Bu sonuç elbette p-serileri teoremiyle ($p = 2 > 1$) uyumludur; buradaki kazanç, sonucun bambaşka bir yoldan, yalnızca ardışık terimlerin oranına bakarak elde edilmiş olmasıdır.
■

İkinci örnekte aynı ölçekle ıraksak bir seriye bakıyoruz. Bu kez limitin işareti negatif çıkacak. Hesabı yaklaşık açılımlara başvurmadan, tümüyle cebirsel olarak yapacağız.

Örnek 38.2 (Karekök Serisi için Kummer Testi). $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ serisinin yakınsaklığını Kummer testiyle inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ olsun. Yine oran testi sessizdir:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{k+1}} = 1.$$

Ölçek seçimi. Yine $c_k = k$ alıyoruz; $\sum 1/k$ ıraksak olduğundan hipotez sağlanır.
K_k'nın hesabı. Önce oranı sadeleştirelim:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{1/\sqrt{k}}{1/\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{k+1}{k}}.$$

Buradan

$$K_k = k\sqrt{\frac{k+1}{k}} - (k+1) = \sqrt{k^2\cdot\frac{k+1}{k}} - (k+1) = \sqrt{k(k+1)} - (k+1) = \sqrt{k^2+k} - (k+1).$$

İşaretin doğrudan belirlenmesi. $k \geq 1$ için $k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ olduğundan, karekök fonksiyonu artan olduğu için $\sqrt{k^2+k} < k+1$'dir. Demek ki her k için

$$K_k < 0,$$

yani $K_k \leq 0$ koşulu $N = 1$'den itibaren sağlanır. Teorem 38.1 (ii) gereği seri **ıraksaktır.**
Limitin tam hesabı. Limit biçimini de kullanmak istersek K_k'nın limitini bulmamız gerekir. $\infty - \infty$ belirsizliğini eşlenikle çarparak kaldıralım:

$$K_k = \sqrt{k^2+k} - (k+1) = \frac{\left(\sqrt{k^2+k} - (k+1)\right)\left(\sqrt{k^2+k} + (k+1)\right)}{\sqrt{k^2+k} + (k+1)} = \frac{(k^2+k) - (k+1)^2}{\sqrt{k^2+k} + k + 1}.$$

Payı açalım:

$$(k^2+k) - (k^2+2k+1) = -k - 1 = -(k+1).$$

Öyleyse

$$K_k = \frac{-(k+1)}{\sqrt{k^2+k} + k + 1}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi pay ve paydayı $k > 0$ ile bölelim. Paydadaki karekök için $\sqrt{k^2+k} = k\sqrt{1+\frac{1}{k}}$ olduğunu kullanırız:

$$K_k = \frac{-(1+\frac{1}{k})}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1+\frac{1}{k}}.$$

$\frac{1}{k} \to 0$ olduğundan (bkz. Analiz 1) ve karekök fonksiyonu sürekli olduğundan, limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği

$$K = \lim_{k\to\infty} K_k = \frac{-(1+0)}{\sqrt{1+0}+1+0} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$K = -\frac{1}{2} < 0$ olduğundan Sonuç 38.1 de serinin ıraksak olduğunu söyler. Bu, $p = \frac{1}{2} \leq 1$ olan bir p-serisi olarak zaten bildiğimiz sonuçtur (Teorem 36.2).
■

i İki örneği yan yana koyalım

$c_k = k$ ölçeğiyle $\sum 1/k^2$ için $K = 1$, $\sum 1/\sqrt{k}$ için $K = -\frac{1}{2}$ bulduk. Genel olarak $a_k = 1/k^p$ için bu ölçeğin $K = p - 1$ verdiğini göreceğiz (bölüm sonundaki alıştırmalara bakınız): $p = 2$ için 1, $p = \frac{1}{2}$ için $-\frac{1}{2}$. K'nın işareti tam da p'nin 1'i geçip geçmediğini okur; $p = 1$'de ise $K = 0$ çıkar ve test — doğru biçimde— susar, çünkü harmonik seri yakınsaklığın tam sınırındadır.

38.3 Raabe Testi

$c_k = k$ seçiminin ne kadar verimli olduğunu gördük. Bu seçimi bir kez ve herkes için yapıp elde edilen ifadeyi bağımsız bir test olarak kaydetmek doğaldır. Sonuç, **Raabe testi**dir.

Teorem 38.2 (Raabe Testi). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri olsun ve her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$R_k = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$$

tanımlansın. O hâlde:
***(i)** Öyle bir $r > 1$ reel sayısı ve $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa ki her $k \geq N$ için $R_k \geq r$ olsun, o hâlde seri **yakınsaktır**.*
***(ii)** Bir $N \in \mathbb{N}$ için her $k \geq N$ olduğunda $R_k \leq 1$ ise, seri **ıraksaktır**.*

İspat.
Kummer testini $c_k = k$ seçimiyle uygulayacağız. Önce hipotezi doğrulayalım: $(c_k) = (k)$ dizisi pozitif terimlidir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonik serisi ıraksaktır (Teorem 36.2). Öyleyse Teorem 38.1 uygulanabilir.
Bu seçimde test niceliği

$$K_k = c_k\frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} = k\,\frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1) = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) + k - (k+1) = R_k - 1$$

olur. Demek ki her k için

$$K_k = R_k - 1 \qquad (4)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bağıntısı geçerlidir. Artık iki şık da doğrudan çevrilir.
(i) *Her $k \geq N$ için $R_k \geq r > 1$ olsun. (4) gereği her $k \geq N$ için*

$$K_k = R_k - 1 \geq r - 1 > 0$$

olur. $r' = r - 1 > 0$ alırsak Teorem 38.1 (i) hipotezi sağlanır ve seri yakınsaktır.
(ii) *Her $k \geq N$ için $R_k \leq 1$ olsun. (4) gereği her $k \geq N$ için*

$$K_k = R_k - 1 \leq 0$$

olur; Teorem 38.1 (ii) gereği seri ıraksaktır.
■

Kummer testinde olduğu gibi burada da uygulamada kullanılan biçim limit biçimidir.

Sonuç 38.2 (Raabe Testinin Limit Biçimi). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri, $R_k = k\left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$ ve*

$$\lim_{k\to\infty} R_k = R \in [-\infty, +\infty]$$

olsun. O hâlde:

- *$R > 1$ ise ($R = +\infty$ dâhil) seri yakınsaktır.*
- *$R < 1$ ise ($R = -\infty$ dâhil) seri ıraksaktır.*
- *$R = 1$ ise test sonuçsuzdur.*

İspat.
Teorem 38.2'nin ispatındaki (4) bağıntısına göre $K_k = R_k - 1$'dir; burada K_k, $c_k = k$ seçimine karşılık gelen Kummer niceliğidir. Limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği R sonluysa

$$K = \lim_{k\to\infty} K_k = R - 1$$

olur; $R = +\infty$ ise $K = +\infty$, $R = -\infty$ ise $K = -\infty$'dur. Öyleyse

$$R > 1 \Leftrightarrow K > 0, \qquad R < 1 \Leftrightarrow K < 0, \qquad R = 1 \Leftrightarrow K = 0$$

denklikleri geçerlidir ve iddianın ilk iki maddesi doğrudan Sonuç 38.1'nden çıkar.
Üçüncü madde için $R = 1$ olan biri yakınsak biri ıraksak iki seri göstermek yeterlidir. $a_k = \dfrac{1}{k}$ alalım: $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{k+1}{k}$ olduğundan

$$R_k = k\left(\frac{k+1}{k} - 1\right) = k \cdot \frac{1}{k} = 1$$

ve dolayısıyla $R = 1$'dir; oysa harmonik seri ıraksaktır. Öte yandan, aşağıda Örnek 38.5'da tam hesabıyla göstereceğimiz gibi, $k \geq 2$ için $a_k = \dfrac{1}{k \ln^2 k}$ alındığında da $R = 1$ çıkar; oysa bu seri yakınsaktır (Örnek 36.3). Aynı R değeri iki zıt sonuç verdiğinden $R = 1$ hâlinde test karar veremez.
■

⚠ Raabe testinde eşik 1'dir, 0 değil

Oran testinde karşılaştırma sayısı 1, Kummer testinde 0, Raabe testinde ise yine 1'dir. $R_k = K_k + 1$ kaymasını unutmak en sık yapılan hatadır: $R = \dfrac{1}{2}$ bulan biri "pozitif, öyleyse yakınsak" derse yanılır; $\dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan seri **ıraksaktır**. Ayrıca (ii) şıkkındaki koşulun $R_k \leq 1$ olduğuna, yani eşitlik hâlinin de ıraksaklık tarafında bulunduğuna dikkat ediniz — harmonik seride tam olarak $R_k = 1$ çıkması bunun tipik örneğidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

38.3.1 Raabe Testinin Uygulanışı

Örnek 38.3 (Raabe Testiyle Bir Rasyonel Seri). $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(2k-1)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \dfrac{1}{k(2k-1)}$ olsun. $k \geq 1$ için $2k-1 \geq 1 > 0$ olduğundan seri pozitif terimlidir.
Önce oran testi. Genel terimin bir sonrakine oranı

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k(2k-1)}{(k+1)(2k+1)} = \frac{2k^2-k}{2k^2+3k+1}$$

olur. Pay ve paydayı k^2'ye bölersek

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2-\frac{1}{k}}{2+\frac{3}{k}+\frac{1}{k^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

bulunur. Limit 1 olduğundan Teorem 37.2 sonuç vermez. (Aynı biçimde kök testi de sessizdir; rasyonel bir ifadenin k-inci kökü daima 1'e gider.)
Şimdi Raabe testi. Terimlerin ters oranı

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)(2k+1)}{k(2k-1)}$$

olduğundan

$$R_k = k\left(\frac{(k+1)(2k+1)}{k(2k-1)} - 1\right) = k \cdot \frac{(k+1)(2k+1)-k(2k-1)}{k(2k-1)} = \frac{(k+1)(2k+1)-k(2k-1)}{2k-1}$$

olur. Payı açalım:

$$(k+1)(2k+1) = 2k^2+3k+1, \qquad k(2k-1) = 2k^2-k,$$

$$(2k^2+3k+1)-(2k^2-k) = 4k+1.$$

Öyleyse

$$R_k = \frac{4k+1}{2k-1}.$$

Pay ve paydayı k'ye bölerek

$$R = \lim_{k\to\infty} R_k = \lim_{k\to\infty} \frac{4+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}} = \frac{4}{2} = 2$$

buluruz. $R = 2 > 1$ olduğundan Sonuç 38.2 gereği seri **yakınsaktır.**
Bir ek gözlem. Aslında $k \geq 1$ için $R_k = \dfrac{4k+1}{2k-1} > 2$ olduğu doğrudan görülebilir: bu eşitsizlik $4k+1 > 4k-2$, yani $1 > -2$ ile denktir. Öyleyse $r = 2 > 1$ ve $N = 1$ alarak limit hesabına hiç girmeden Teorem 38.2 (i)'yi uygulamak da mümkündür.
Yakınsaklık ayrıca doğrudan karşılaştırmayla da görülebilirdi: $k \geq 1$ için $2k-1 \geq k$ olduğundan $a_k \leq \dfrac{1}{k^2}$'dir ve Teorem 35.2 ile Teorem 36.2 sonucu verir. Raabe testinin üstünlüğü, uygun bir karşılaştırma serisi aramaya gerek bırakmamasıdır.
■

Sıradaki örnek, Raabe testinin asıl doğal ortamını gösterir: faktöriyellerden ve çift/tek çarpanlardan kurulmuş, oranı 1'e $1/k$ hızıyla yaklaşan seriler.

Örnek 38.4 (Merkezî Binom Katsayılarının Serisi).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$ olsun. Bütün çarpanlar pozitif olduğundan seri pozitif terimlidir. Genel terimi tanımak için şunu gözleyelim:

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \binom{2k}{k}, \qquad \text{yani} \qquad a_k = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}.$$

Ayrıca $(2k)!$'i tek ve çift çarpanlara ayırırsak $(2k)! = \big(\,1\cdot 3\cdots(2k-1)\,\big)\cdot\big(\,2\cdot 4\cdots(2k)\,\big)$ ve $2\cdot 4\cdots(2k) = 2^k k!$ olduğundan

$$a_k = \frac{\big(\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\,\big)\cdot 2^k k!}{4^k (k!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}$$

yazılabilir. Yani incelediğimiz seri, "tek sayıların çarpımı bölü çift sayıların çarpımı" serisidir.
Ardışık terimlerin oranı. $(2k+2)! = (2k+2)(2k+1)(2k)!$ ve $\big(\,(k+1)!\big)^2 = (k+1)^2 (k!)^2$ olduğundan

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)^2} = \frac{2(k+1)(2k+1)}{4(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2(k+1)} = \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Oran testi susar. Gerçekten,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2+\frac{1}{k}}{2+\frac{2}{k}} = 1$$

olduğundan Teorem 37.2 sonuç vermez. (Oranın her k için 1'den küçük olması, yani (a_k) dizisinin kesin azalan olması bir şey söylemez: harmonik serinin terimleri de kesin azalandır ama seri ıraksaktır.)
Raabe testi. Ters oran

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{2k+2}{2k+1}$$

olduğundan

$$R_k = k\left(\frac{2k+2}{2k+1} - 1\right) = k\cdot\frac{(2k+2)-(2k+1)}{2k+1} = \frac{k}{2k+1}.$$

Limiti alalım:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

$R = \dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan Sonuç 38.2 gereği seri **ıraksaktır.**
Limitsiz yol. Her $k \geq 1$ için $\dfrac{k}{2k+1} < \dfrac{k}{2k} = \dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan $R_k \leq 1$ koşulu $N = 1$'den itibaren sağlanır; Teorem 38.2 (ii) doğrudan ıraksaklığı verir.
Yorum. Bulunan $R = \dfrac{1}{2}$ değeri, terimlerin kabaca $1/\sqrt{k}$ mertebesinde davrandığını haber verir: R, p-serilerinde tam olarak p üssünü ölçtüğünden (Örnek 38.2 ile karşılaştırınız), $R = \dfrac{1}{2}$ değeri seriyi $\sum 1/\sqrt{k}$ ile aynı sınıfa yerleştirir. Gerçekten de k büyüdükçe $a_k \,/\, \dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$ oranı 1'e gider, yani a_k ile $\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$ asimptotik olarak denktir; ama Raabe testi bu asimptotik bilgiyi hiç kullanmadan, yalnızca ardışık terimlerin oranından sonuca varır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

38.4 Bertrand Testi

Raabe testinin sessiz kaldığı yer $R = 1$'dir ve tıpkı oran testinin $L = 1$ hâlinde olduğu gibi, bu sınır da tek bir seri değil koca bir seri ailesi barındırır. Bu ailenin doğal temsilcileri **logaritmik ölçekli** serilerdir:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^p k}.$$

Bu serilerin $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksak olduğunu yoğunlaştırma testiyle (Teorem 36.1) daha önce belirlemiştik (Örnek 36.3). Birazdan göreceğimiz gibi bu serilerin **hepsinde** $R = 1$ çıkar; yani Raabe testi bu ailenin hiçbir üyesi hakkında konuşamaz.
Çare, Kummer ölçeğini bir basamak daha inceltmektir: $c_k = k$ yerine $c_k = k \ln k$ almak. Bu seçimden doğan test, Fransız matematikçi **Joseph Bertrand**'ın (1822–1900) adını taşır. Testin niceliği, Raabe niceliğinin 1'den sapmasını $\ln k$ ile büyüterek okur:

$$B_k = \ln k \cdot (R_k - 1).$$

Testi ifade etmeden önce, ispatta iki kez kullanacağımız temel bir eşitsizliği ayrı bir adım olarak hazırlayalım.

i Bir logaritma eşitsizliği

Her $k \geq 1$ için

$$1 < (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1 + \frac{1}{k}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Gerçekten, $\ln$ fonksiyonuna $[k, k+1]$ aralığında ortalama değer teoremini (Teorem 8.2) uygularsak, öyle bir $\xi \in (k, k+1)$ vardır ki

$$\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{\xi} \cdot \big(\, (k+1) - k \, \big) = \frac{1}{\xi}.$$

Sol taraf $\ln \dfrac{k+1}{k} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ olduğundan

$$\lambda_k := (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{k+1}{\xi}$$

yazılır. $k < \xi < k+1$ olduğundan $\dfrac{k+1}{k+1} < \dfrac{k+1}{\xi} < \dfrac{k+1}{k}$, yani $1 < \lambda_k < 1 + \dfrac{1}{k}$ olur. Sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği ayrıca

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 1$$

sonucu çıkar.

Teorem 38.3 (Bertrand Testi). *$\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri, $R_k = k\left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$ ve $k \geq 2$ için*

$$B_k = \ln k \cdot (R_k - 1)$$

olsun. O hâlde:
(i) *Öyle bir $r > 1$ ve $N \geq 2$ varsa ki her $k \geq N$ için $B_k \geq r$ olsun, o hâlde seri **yakınsaktır**.*
(ii) *Bir $N \geq 2$ için her $k \geq N$ olduğunda $B_k \leq 1$ ise, seri **ıraksaktır**.*
Ayrıca $\lim_{k\to\infty} B_k = B \in [-\infty, +\infty]$ varsa: $B > 1$ ise seri yakınsak, $B < 1$ ise ıraksaktır; $B = 1$ hâlinde test sonuçsuzdur.

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Ölçek ve hipotezin doğrulanması. *$k \geq 2$ için $c_k = k \ln k$ alalım. $k \geq 2$ olduğundan $\ln k \geq \ln 2 > 0$'dır, yani $c_k > 0$'dır. Hipotez gereği $\sum 1/c_k$ ıraksak olmalıdır; bunu yoğunlaştırma testiyle (Teorem 36.1) görelim. $f(k) = \dfrac{1}{k \ln k}$ dizisi $k \geq 2$ için pozitif ve azalandır. Yoğunlaştırılmış seri*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

olur ve harmonik seri ıraksak olduğundan (Teorem 36.2) bu seri de ıraksaktır. Öyleyse $\sum_{k \geq 2} \dfrac{1}{k \ln k}$ ıraksaktır ve Teorem 38.1 uygulanabilir.

Adım 2: K_k ile B_k arasındaki bağıntı. *Bu ölçekte Kummer niceliği*

$$K_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} = k \ln k \cdot \frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1) \ln(k+1)$$

olur. Öte yandan B_k'nın tanımında R_k'yı açarsak

$$B_k = \ln k \cdot (R_k - 1) = \ln k \cdot \left(k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) - 1 \right) = k \ln k \cdot \frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1) \ln k.$$

İki ifadeyi çıkaralım:

$$K_k - B_k = -(k+1) \ln(k+1) + (k+1) \ln k = -(k+1) \ln \frac{k+1}{k} = -(k+1) \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = -\lambda_k.$$

Demek ki her $k \geq 2$ için

$$K_k = B_k - \lambda_k, \qquad 1 < \lambda_k < 1 + \frac{1}{k} \qquad (5)$$

bağıntısı geçerlidir; λ_k için kullanılan sınırlar yukarıdaki logaritma eşitsizliğinden gelir.

Adım 3: (i) şıkkı. *Her $k \geq N$ için $B_k \geq r > 1$ olsun. (5) gereği*

$$K_k = B_k - \lambda_k > r - \left(1 + \frac{1}{k} \right) = (r-1) - \frac{1}{k}.$$

$r - 1 > 0$ olduğundan Arşimet özelliği gereği (bkz. Analiz 1) öyle bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $k \geq N_1$ için $\dfrac{1}{k} < \dfrac{r-1}{2}$ olur. $N_2 = \max\{N, N_1\}$ alalım; her $k \geq N_2$ için

$$K_k > (r-1) - \frac{r-1}{2} = \frac{r-1}{2} > 0$$

olur. $r' = \dfrac{r-1}{2} > 0$ alıp Teorem 38.1 (i) uygulanır: seri yakınsaktır.

Adım 4: (ii) şıkkı. *Her $k \geq N$ için $B_k \leq 1$ olsun. (5) ve $\lambda_k > 1$ eşitsizliği gereği*

$$K_k = B_k - \lambda_k < B_k - 1 \leq 0$$

olur; Teorem 38.1 (ii) gereği seri ıraksaktır.

Adım 5: Limit biçimi. *$B_k \to B$ olsun. $\lambda_k \to 1$ olduğundan (5) ve limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği, B sonluysa*

$$K = \lim_{k \to \infty} K_k = B - 1;$$

$B = +\infty$ ise, $\lambda_k < 2$ sınırlı olduğundan $K_k > B_k - 2 \to +\infty$, yani $K = +\infty$; benzer biçimde $B = -\infty$ ise $K_k < B_k - 1 \to -\infty$, yani $K = -\infty$'dur. Her üç durumda da

$$B > 1 \Leftrightarrow K > 0, \qquad B < 1 \Leftrightarrow K < 0, \qquad B = 1 \Leftrightarrow K = 0$$

olur ve iddia Sonuç 38.1'nden çıkar. $B = 1$ hâlinin sonuçsuz olduğu, hemen aşağıdaki örnekte $p = 1$ alınarak görülür: $\sum \dfrac{1}{k \ln k}$ serisi ıraksaktır ve $B = 1$'dir; buna karşın $B = 1$ veren yakınsak seriler de

 CC BY-NC-SA 4.0

vardır; örneğin $k \geq 3$ için $a_k = \dfrac{1}{k \ln k \ln^2(\ln k)}$ böyledir. Bu serinin yakınsaklığı Örnek 36.4'nin $p = 2$ hâlidir; $B = 1$ olduğu ise aşağıdaki notta hesaplanmıştır.
■

Örnek 38.5 (Logaritmik Ölçekli Seriler). $p > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^p k}$$

serisi için Raabe ve Bertrand niceliklerinin limitlerini hesaplayınız ve serinin yakınsaklığı hakkında ne söylediklerini belirleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \dfrac{1}{k \ln^p k}$ olsun ($k \geq 2$; bu aralıkta $\ln k > 0$ olduğundan terimler pozitiftir).
Adım 1: Ters oranın düzenlenmesi. $\ln(k+1) = \ln k + \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ olduğunu kullanarak

$$t_k := \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k} > 0, \qquad \ln(k+1) = \ln k\,(1 + t_k)$$

yazalım. O hâlde $\ln^p(k+1) = \ln^p k\,(1+t_k)^p$ olur ve

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)\ln^p(k+1)}{k \ln^p k} = \frac{k+1}{k}\,(1+t_k)^p$$

elde edilir.
Adım 2: R_k ve $R_k - 1$. Tanımdan

$$R_k = k\left(\frac{k+1}{k}(1+t_k)^p - 1\right) = (k+1)(1+t_k)^p - k,$$

dolayısıyla

$$R_k - 1 = (k+1)(1+t_k)^p - (k+1) = (k+1)\left[\,(1+t_k)^p - 1\,\right]. \qquad (6)$$

Adım 3: B_k'nın kapalı biçimi. (6) ifadesini $\ln k$ ile çarpalım. Buradaki püf nokta $\ln k \cdot t_k = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ olmasıdır:

$$B_k = \ln k\,(R_k - 1) = (k+1)\cdot \ln k \cdot \left[\,(1+t_k)^p - 1\,\right] = (k+1)\ln k\, t_k \cdot \frac{(1+t_k)^p - 1}{t_k},$$

yani

$$B_k = \underbrace{(k+1)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{=\lambda_k} \cdot g(t_k), \qquad \text{burada} \quad g(t) = \frac{(1+t)^p - 1}{t} (t > 0). \qquad (7)$$

Adım 4: Limitler. İki çarpanı ayrı ayrı inceleyelim.

- Yukarıdaki logaritma eşitsizliğinde gördüğümüz gibi $\lambda_k \to 1$'dir.
- $t_k \to 0$'dır: pay $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \to 0$, payda $\ln k \to +\infty$'dur. Öte yandan $h(t) = (1+t)^p$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasındaki türevi $h'(0) = p$ olduğundan, türev tanımı gereği

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = h'(0) = p$$

olur. $t_k \to 0$ ve $t_k \neq 0$ olduğundan, fonksiyon limiti için dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği $g(t_k) \to p$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

(7) ve limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği

$$B = \lim_{k\to\infty} B_k = 1 \cdot p = p.$$

Adım 5: Raabe testi ne diyor? (6) ve (7) birlikte $R_k - 1 = \dfrac{B_k}{\ln k}$ verir. $B_k \to p$ sonlu ve $\ln k \to +\infty$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} (R_k - 1) = 0, \qquad \text{yani} \qquad R = 1.$$

Bu, **her** $p > 0$ için geçerlidir. Demek ki Raabe testi bu ailenin hiçbir üyesi hakkında karar veremez (Sonuç 38.2, üçüncü madde). Özellikle $p = 2$ alırsak, Sonuç 38.2'nin ispatında sözü edilen "yakınsak ama $R = 1$" örneği elde edilmiş olur.
Adım 6: Bertrand testi ne diyor? $B = p$ olduğundan Teorem 38.3:

- $p > 1$ ise $B > 1$: seri **yakınsaktır**.
- $p < 1$ ise $B < 1$: seri **ıraksaktır**.
- $p = 1$ ise $B = 1$: test sonuçsuzdur. Bu tek durumda başka bir araca başvurmak gerekir; yoğunlaştırma testi (Teorem 36.1) $\sum \dfrac{1}{k \ln k}$ serisinin ıraksak olduğunu söyler (bu hesabı Teorem 38.3'nin ispatının 1. adımında zaten yapmıştık).

Sonuçlar, bu serilerin yakınsaklığı için bilinen ölçütle tam olarak uyuşur: seri ancak ve ancak $p > 1$ iken yakınsaktır.
■

i Bertrand testinin kendi sınır durumu

$B = 1$ hâlinde testin susmasının nedeni, bu değeri hem yakınsak hem ıraksak serilerin vermesidir. $p \in \mathbb{R}$ ve $k \geq 3$ için

$$a_k = \frac{1}{k \ln k \ln^p(\ln k)}$$

alalım; Örnek 36.4 gereği bu seri $p > 1$ iken yakınsak, $p \leq 1$ iken ıraksaktır. Buna karşın **her** p değerinde $B = 1$ çıkar.
Hesap, yukarıdaki örneğin adımlarını bir basamak yukarıda tekrarlar. t_k yine yukarıdaki gibi olmak üzere $\ln(k+1) = \ln k\,(1 + t_k)$'dir; her iki yanın logaritmasını alırsak

$$\ln(\ln(k+1)) = \ln(\ln k)\,(1 + s_k), \qquad s_k := \frac{\ln(1+t_k)}{\ln(\ln k)} > 0$$

olur. Buradan

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k+1}{k}(1+t_k)(1+s_k)^p, \qquad R_k - 1 = (k+1)\left[\,(1+t_k)(1+s_k)^p - 1\,\right]$$

bulunur. Köşeli parantezi $t_k + (1+t_k)\left[\,(1+s_k)^p - 1\,\right]$ biçiminde ayırıp $\ln k$ ile çarparsak

$$B_k = \lambda_k + (1+t_k)\cdot \underbrace{\lambda_k \cdot \frac{\ln(1+t_k)}{t_k} \cdot \frac{1}{\ln(\ln k)}}_{=(k+1)\ln k\, s_k} \cdot \frac{(1+s_k)^p - 1}{s_k}$$

elde ederiz; burada $(k+1)\ln k\, t_k = \lambda_k$ olduğu kullanıldı. Şimdi $\lambda_k \to 1$, $t_k \to 0$, $\dfrac{\ln(1+t_k)}{t_k} \to 1$ ve $\ln(\ln k) \to +\infty$'dur; dolayısıyla ortadaki çarpan 0'a gider. Ayrıca $s_k \to 0$ olduğundan son çarpan, örnekteki g hesabının aynısıyla p'ye yakınsar. Öyleyse

$$B = 1 + 1 \cdot 0 \cdot p = 1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

38.5 Testler Arasındaki Güç Sıralaması

Şu ana kadar dört test gördük: oran, Raabe, Bertrand ve —hepsini üreten— Kummer. Bunların gücünün kesin bir sıra oluşturduğunu, yani her testin bir öncekinin karar verdiği her durumda **aynı** kararı verdiğini gösterelim. Bu, uygulamada izlenecek yolu da belirler: önce en ucuz testi dene, susarsa bir üst basamağa çık.

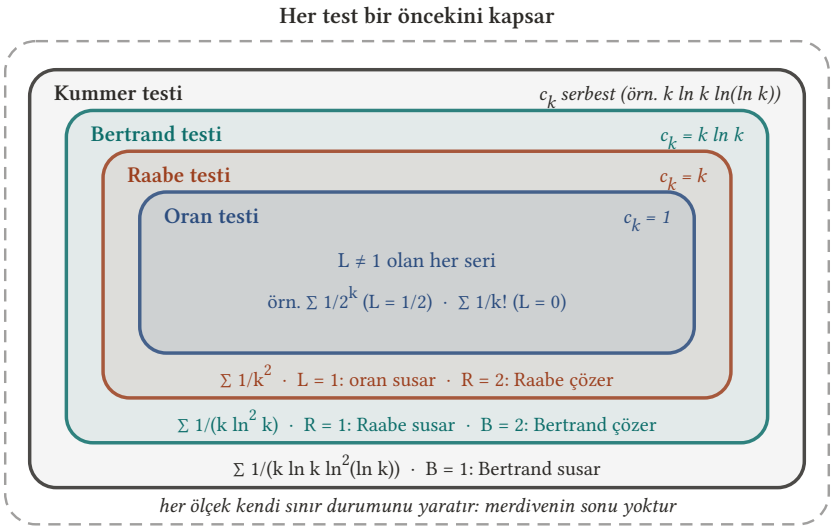
Önerme 38.1 (Oran, Raabe ve Bertrand Testlerinin Sıralanışı). *$\sum a_k$ pozitif terimli bir seri olsun; $L = \lim_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $R = \lim_{k\to\infty} R_k$ ve $B = \lim_{k\to\infty} B_k$ limitleri (var olduklarında, genişletilmiş anlamda) yukarıdaki gibi tanımlansın. O hâlde:*
(a) *L varsa ve $L \neq 1$ ise, R de genişletilmiş anlamda vardır ve*

$$L < 1 \Longrightarrow R = +\infty, \qquad L > 1 \Longrightarrow R = -\infty.$$

Özellikle oran testinin karar verdiği her durumda Raabe testi de aynı kararı verir.
(b) *R varsa ve $R \neq 1$ ise, B de genişletilmiş anlamda vardır ve*

$$R > 1 \Longrightarrow B = +\infty, \qquad R < 1 \Longrightarrow B = -\infty.$$

Özellikle Raabe testinin karar verdiği her durumda Bertrand testi de aynı kararı verir.
(c) *Oran, Raabe ve Bertrand testleri, Kummer testinin sırasıyla $c_k = 1$, $c_k = k$ ve $c_k = k\ln k$ seçimlerinden ibarettir.*
*Üstelik bu kapsamaların hepsi **kesindir**: bir üst basamağın karar verip alt basamağın sustuğu seriler vardır.*



*Şekil 38.1: Dört test iç içe geçmiş bir güç sıralaması oluşturur: her biri Kummer testinin bir c_k seçimidir ve bir alt basamağın karar verdiği her durumda aynı kararı verir. Halkalara yazılan seriler kapsamaların **kesin** olduğunu gösterir: $\Sigma 1/k^2$ serisinde oran testi susar ($L = 1$) ama Raabe karar verir ($R = 2$); $\Sigma 1/(k\ln^2 k)$ serisinde Raabe susar ($R = 1$) ama Bertrand karar verir ($B = 2$); $\Sigma 1/(k\ln k\ln^2(\ln k))$ serisinde Bertrand da susar ($B = 1$) ve daha ince bir ölçek gerekir. En dıştaki kesikli çerçeve, her yeni basamağın kendi sınır durumunu yarattığını hatırlatır.*

İspat.
(a) *Önce $0 < L < 1$ olsun. $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \to L > 0$ olduğundan, limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^{-1} \to \frac{1}{L} > 1,$$

dolayısıyla $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \to \dfrac{1}{L} - 1 =: \alpha > 0$'dır. $k \to \infty$ ve $\alpha > 0$ olduğundan

$$R_k = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \to +\infty$$

olur (yeterince büyük k için $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1 > \dfrac{\alpha}{2}$, dolayısıyla $R_k > \dfrac{\alpha k}{2} \to +\infty$).
$L = 0$ hâlinde $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \to 0$ olduğundan $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} \to +\infty$'dur; yeterince büyük k için $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1 > 1$ olur ve $R_k > k \to +\infty$ bulunur. Her iki hâlde de $R = +\infty > 1$'dir ve Raabe testi yakınsaklığı verir — oran testinin $L < 1$ için verdiği kararın aynısı.
Şimdi $L > 1$ olsun. Aynı biçimde $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} \to \dfrac{1}{L} < 1$ olur (bu $L = +\infty$ hâlinde 0'dır). Öyleyse $\beta := 1 - \dfrac{1}{L} > 0$ almak üzere yeterince büyük k için $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1 < -\dfrac{\beta}{2}$ ve

$$R_k < -\frac{\beta k}{2} \to -\infty$$

olur. Demek ki $R = -\infty < 1$'dir ve Raabe testi ıraksaklığı verir — yine oran testiyle aynı karar.
(b) *$R > 1$ olsun ($R = +\infty$ dâhil). O hâlde yeterince büyük k için $R_k - 1 > \gamma$ olacak biçimde bir $\gamma > 0$ vardır: R sonluysa $\gamma = \dfrac{R-1}{2}$, $R = +\infty$ ise $\gamma = 1$ alınabilir. $\ln k \to +\infty$ olduğundan*

$$B_k = \ln k\,(R_k - 1) > \gamma \ln k \to +\infty,$$

yani $B = +\infty > 1$'dir ve Bertrand testi yakınsaklığı verir. $R < 1$ hâlinde ise benzer biçimde bir $\gamma > 0$ için yeterince büyük k'lerde $R_k - 1 < -\gamma$ olur ve $B_k < -\gamma \ln k \to -\infty$, yani $B = -\infty < 1$ çıkar; Bertrand testi ıraksaklığı verir.
(c) *Bu, "Ölçeğin Seçimi" başlığında $c_k = 1$ için yapılan çevirinin, Teorem 38.2'nin ispatındaki $K_k = R_k - 1$ bağıntısının ve Teorem 38.3'nin ispatındaki $K_k = B_k - \lambda_k$ bağıntısının bir özetidir. Üç ölçek için de $\sum 1/c_k$ serilerinin ($\sum 1$, $\sum 1/k$, $\sum 1/(k \ln k)$) ıraksak olduğu ilgili yerlerde gösterilmişti.*
Kapsamaların kesinliği.

- *$\sum \dfrac{1}{k^2}$ serisinde $L = 1$'dir (oran testi susar) ama Örnek 38.1'nde $K = 1$, yani $R = K + 1 = 2 > 1$ bulunmuştu; Raabe testi karar verir.*
- *$\sum \dfrac{1}{k \ln^2 k}$ serisinde Örnek 38.5 gereği $R = 1$'dir (Raabe susar) ama $B = 2 > 1$'dir; Bertrand testi karar verir.*
- *Bertrand testinin sustuğu $\sum \dfrac{1}{k \ln k}$ serisini ise Kummer testi bir başka ölçekle çözer: $k \geq 3$ için $c_k = k \ln k \ln(\ln k)$ alalım. Bu ölçekte $\sum 1/c_k$ ıraksaktır (Örnek 36.4'nin $p = 1$ hâli) ve $a_k = \dfrac{1}{k \ln k}$ için $c_k \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = (k+1)\ln(k+1)\ln(\ln k)$ olduğundan $K_k = (k+1)\ln(k+1)\left[\ln(\ln k) - \ln(\ln(k+1))\right] < 0$ çıkar; köşeli parantez negatiftir, çünkü $\ln$ artandır. Teorem 38.1 (ii) gereği seri ıraksaktır. Merdivenin bir sonraki basamağı budur.*

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Uygulamada izlenecek yol

Pozitif terimli bir seriyle karşılaştığınızda sıralama şudur:

- Genel terim 0'a gitmiyorsa iş biter (Teorem 34.2).
- Terimlerde k-inci kuvvet varsa kök testi (Teorem 37.1), faktöriyel ya da ardışık çarpanlar varsa oran testi (Teorem 37.2) doğal seçimdir.
- Oran limiti 1 çıkıyorsa hemen Raabe testine geçin: $R_k = k\left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$ hesabı, oran hesabının küçük bir eklentisidir.
- Raabe limiti de 1 çıkıyorsa, terimlerde logaritma bulunması kuvvetle muhtemeldir; Bertrand testini deneyin.
- Bunların hiçbiri işe yaramıyorsa Kummer testine dönüp probleme uygun bir (c_k) ölçeği tasarlayın ya da bütünüyle başka bir araca (yoğunlaştırma testi, integral testi, doğrudan karşılaştırma) başvurun.

Merdivenin sonu yoktur

Her basamak bir öncekinin sınır durumunu çözer, ama kendi sınır durumunu yaratır: oran testi $L = 1$'de, Raabe testi $R = 1$'de, Bertrand testi $B = 1$'de susar. Bu zincirin sonu yoktur; her testi susturan bir seri her zaman bulunabilir. Bu yüzden "bütün pozitif terimli serileri çözen tek bir test" aramak boşunadır. Kummer testinin değeri, her seride sonuç vermesinde değil, uygun ölçek seçildiğinde sonucu verebilmesinde ve bütün klasik testleri tek bir çatı altında toplamasındadır.

38.6 Alıştırmalar

Alıştırma 38.1 (Kummer ve Raabe Testleri Üzerine).

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ serisini Raabe testiyle inceleyiniz. Sonucu, seriyi teleskopik toplamla değerlendirerek doğrulayınız.

b) $p > 0$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$ serisi için R_k'nın limitini hesaplayınız ve Raabe testinin p-serileri hakkında ne söylediğini belirleyiniz.

c) $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

serisinin hangi α değerleri için yakınsak olduğunu Raabe testiyle belirleyiniz. Testin sustuğu durumu ayrıca inceleyiniz.

d) $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \cdot \frac{1}{k^p}$$

serisi için R_k'nın limitini hesaplayınız ve serinin hangi p değerlerinde yakınsak olduğunu belirleyiniz.

e) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\ln k}{k^2}$ serisini Raabe testiyle inceleyiniz.

f) Bir öğrenci $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}$ serisine Kummer testini $c_k = k^2$ seçimiyle uygulamak istiyor. Bu seçimin neden geçersiz olduğunu açıklayınız ve geçerli bir seçimle seriyi inceleyiniz.

Çözüm.
a) $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ olsun. Ters oran

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{k+2}{k}$$

olduğundan

$$R_k = k\left(\frac{k+2}{k} - 1\right) = k \cdot \frac{2}{k} = 2.$$

Yani R_k dizisi sabit olarak 2'ye eşittir; $R = 2 > 1$ olduğundan Sonuç 38.2 gereği seri yakınsaktır. (Aynı sonuç, $r = 2$ ve $N = 1$ ile doğrudan Teorem 38.2 (i)'den de çıkar.) Oran testi bu seride sonuç vermezdi, çünkü $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{k}{k+2} \to 1$'dir.

Doğrulama. $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ olduğundan kısmi toplamlar teleskopiktir (Tanım 34.5):

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

Demek ki seri yakınsaktır ve toplamı 1'dir; Raabe testinin yanıtı doğrulanmış olur.

b) $a_k = \dfrac{1}{k^p}$ olsun. Ters oran

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)^p}{k^p} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p$$

olduğundan

$$R_k = k\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p - 1\right] = \left.\frac{(1+t)^p - 1}{t}\right|_{t = 1/k}.$$

$h(t) = (1+t)^p$ fonksiyonunun $t = 0$'daki türevi $h'(0) = p$ olduğundan

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^p - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = h'(0) = p$$

olur. $t_k = \dfrac{1}{k} \to 0$ ve $t_k \neq 0$ olduğundan, dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği

$$R = \lim_{k \to \infty} R_k = p.$$

Demek ki Raabe testi p-serilerinde doğrudan p üssünü okur: Sonuç 38.2 gereği $p > 1$ ise seri yakınsak, $p < 1$ ise ıraksaktır. $p = 1$ hâlinde $R = 1$ olduğundan test susar; nitekim harmonik seri yakınsaklığın tam sınırındadır ve ıraksaktır (Teorem 36.2). Kummer diliyle söylersek, $c_k = k$ ölçeğinde $K = R - 1 = p - 1$'dir; bu, bölümün ortasındaki gözlemi doğrular.

c) $a_k = \dfrac{k!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$ olsun. $\alpha > 0$ olduğundan bütün çarpanlar pozitiftir. Ardışık terimlerin oranını yazalım: paydaya bir çarpan, paya bir çarpan eklenir:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)(\alpha+k+1)}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)} = \frac{\alpha+k+1}{k+1}.$$

Oran testi için

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{\alpha+k+1} \to 1$$

olduğundan Teorem 37.2 hiçbir α için sonuç vermez. Raabe niceliği ise

$$R_k = k\left(\frac{\alpha+k+1}{k+1} - 1\right) = k \cdot \frac{(\alpha+k+1) - (k+1)}{k+1} = \frac{\alpha k}{k+1}$$

olur ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha}{1+\frac{1}{k}} = \alpha$$

bulunur. Sonuç 38.2 gereği:

- $\alpha > 1$ ise seri yakınsaktır.
- $\alpha < 1$ ise seri ıraksaktır.
- $\alpha = 1$ ise test susar.

Son durumu elle çözelim. $\alpha = 1$ için payda $2 \cdot 3 \cdots (k+1) = (k+1)!$ olur ve

$$a_k = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$$

çıkar. Bu ise harmonik serinin (ilk terimi atılmış hâlinin) ta kendisidir ve ıraksaktır (Teorem 36.2). Demek ki seri ancak ve ancak $\alpha > 1$ iken yakınsaktır.

d) $b_k = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}$ ve $a_k = \dfrac{b_k}{k^p}$ olsun. Örnek 38.4'da $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{2k+1}{2k+2}$, yani

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{2k+2}{2k+1}$$

olduğunu hesaplamıştık. Buradan

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{b_k}{b_{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^p}{k^p} = \underbrace{\frac{2k+2}{2k+1}}_{=:A_k} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^p}_{=:C_k}$$

olur. Şimdi $R_k = k(A_k C_k - 1)$ ifadesini, limiti ayrı ayrı alınabilen iki parçaya bölelim:

$$k(A_k C_k - 1) = k(A_k - 1)C_k + k(C_k - 1).$$

(Eşitliği doğrulamak için sağ tarafı açmak yeterlidir: $kA_kC_k - kC_k + kC_k - k = k(A_kC_k - 1)$.)

Birinci parça: $A_k - 1 = \dfrac{(2k+2)-(2k+1)}{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$ olduğundan

$$k(A_k - 1) = \frac{k}{2k+1} \to \frac{1}{2}, \qquad C_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^p \to 1,$$

dolayısıyla $k(A_k-1)C_k \to \dfrac{1}{2}$'dir.

İkinci parça (b) şıkkında hesaplandı: $k(C_k - 1) = k\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^p - 1\right] \to p$.

Limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği

$$R = \frac{1}{2} + p.$$

Sonuç 38.2 gereği seri $\dfrac{1}{2} + p > 1$, yani $p > \dfrac{1}{2}$ iken yakınsak, $p < \dfrac{1}{2}$ iken ıraksaktır. ($p = 0$ alındığında $R = \dfrac{1}{2} < 1$ çıkar; bu, Örnek 38.4'da bulduğumuz sonucun özel hâlidir.)

Sınır durumu $p = \dfrac{1}{2}$. Bu değerde $R = 1$ olduğundan limit biçimi susar; ama R_k'nın 1'i hiç aşmadığını göstererek Teorem 38.2'nin ikinci şıkkını yine de uygulayabiliriz. Gerçekten $p = \dfrac{1}{2}$ için $C_k = \sqrt{1+\dfrac{1}{k}}$'dir ve

$$R_k \le 1 \Leftrightarrow k\,\left(\,A_kC_k - 1\,\right) \le 1 \Leftrightarrow A_kC_k \le 1 + \frac{1}{k}$$

olur. Bu eşitsizlikte $A_k = \dfrac{2k+2}{2k+1}$ yazıp sadeleştirelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{2k+2}{2k+1}\sqrt{1+\frac{1}{k}} \le \frac{k+1}{k} \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{k}} \le \frac{(k+1)(2k+1)}{k(2k+2)} = \frac{2k+1}{2k} = 1+\frac{1}{2k}.$$

Son eşitsizliğin iki yanı da pozitif olduğundan kareleri karşılaştırmak yeterlidir:

$$\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{4k^2} > 0.$$

Demek ki her $k \ge 1$ için $R_k < 1$'dir; Teorem 38.2 (ii) gereği $p = \dfrac{1}{2}$ hâlinde seri **ıraksaktır**. Toparlarsak: seri ancak ve ancak $p > \dfrac{1}{2}$ iken yakınsaktır.

e) $a_k = \dfrac{\ln k}{k^2}$ olsun ($k \ge 2$). Ters oran

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\ln k}{k^2}\cdot\frac{(k+1)^2}{\ln(k+1)} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2}_{=:E_k}\cdot\underbrace{\frac{\ln k}{\ln(k+1)}}_{=:D_k}$$

olur. (d) şıkkındaki ayrıştırmayı kullanalım:

$$R_k = k(E_kD_k - 1) = k(E_k-1)D_k + k(D_k-1).$$

Birinci parça: $E_k - 1 = \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k^2}$ olduğundan $k(E_k-1) = 2 + \dfrac{1}{k} \to 2$'dir. Ayrıca $\ln(k+1) - \ln k = \ln\!\left(1+\frac{1}{k}\right) \to 0$ ve $\ln k \to \infty$ olduğundan $D_k = \dfrac{\ln k}{\ln(k+1)} \to 1$'dir. Demek ki birinci parça 2'ye gider.

İkinci parça:

$$k(D_k-1) = k\cdot\frac{\ln k - \ln(k+1)}{\ln(k+1)} = -\frac{k\ln\!\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k+1)}.$$

Buradaki $k\ln\!\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ifadesi 1'e yakınsar: onu $\dfrac{k}{k+1}\cdot\lambda_k$ biçiminde yazmak yeterlidir; $\dfrac{k}{k+1} \to 1$'dir ve bölümdeki logaritma eşitsizliğine göre $\lambda_k = (k+1)\ln\!\left(1+\frac{1}{k}\right) \to 1$'dir. Paydadaki $\ln(k+1)$ ise $+\infty$'a gider. Sınırlı bir dizinin sonsuza giden bir diziye bölümü 0'a gittiğinden $k(D_k-1) \to 0$'dır. Öyleyse $R = 2 + 0 = 2 > 1$'dir ve Sonuç 38.2 gereği seri yakınsaktır. (Oran testi burada da susardı: $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$'dir.)

f) Kummer testinin hipotezi, seçilen (c_k) dizisi için $\sum \dfrac{1}{c_k}$ serisinin **ıraksak** olmasıdır. $c_k = k^2$ seçiminde

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

serisi yakınsaktır (Teorem 36.2); dolayısıyla hipotez sağlanmaz ve testin hiçbir şıkkı uygulanamaz. (Hesap yapılırsa

$$K_k = k^2\cdot\frac{(k+1)^3}{k^3} - (k+1)^2 = \frac{(k+1)^3}{k} - (k+1)^2 = (k+1)^2\left(\frac{k+1}{k} - 1\right) = \frac{(k+1)^2}{k} \to +\infty$$

bulunur ve bu, doğru cevaba —yakınsaklığa— işaret eder; ama teoremin hipotezi sağlanmadığı için bu hesap bir ispat değildir. Bölüm içindeki uyarı kutusunda görüldüğü gibi, hipotez atlandığında yanlış sonuçlar da üretilebilir.)

Geçerli bir seçim. $c_k = k$ alalım; $\sum 1/k$ ıraksak olduğundan hipotez sağlanır. $a_k = \dfrac{1}{k^3}$ için

$$K_k = k\cdot\frac{(k+1)^3}{k^3} - (k+1) = \frac{(k+1)^3}{k^2} - (k+1) = (k+1)\left(\frac{(k+1)^2}{k^2} - 1\right) = (k+1)\cdot\frac{2k+1}{k^2}$$

olur. Pay $2k^2+3k+1$, payda k^2 olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$K = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2 + 3k + 1}{k^2} = 2 > 0$$

ve Sonuç 38.1 gereği seri yakınsaktır. Bu, (b) şıkkının $p = 3$ hâliyle uyumludur: $K = R - 1 = 3 - 1 = 2$.
■

Bu bölümde pozitif terimli seriler için elimizdeki test dağarcığını, oran testinin sustuğu sınır bölgeyi de kapsayacak biçimde genişlettik ve bütün bu testlerin tek bir çatı —Kummer testi— altında toplandığını gördük. Sıradaki bölümde artık pozitiflik varsayımını bırakıyor, terimleri işaret değiştiren serilere geçiyoruz; bu geçişi mümkün kılan kavram mutlak yakınsaklık olacak: Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık.

 CC BY-NC-SA 4.0

39. Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Kummer ve Raabe Testleri bölümüyle birlikte, negatif olmayan terimli seriler için elimizde epey zengin bir araç takımı birikti: karşılaştırma testleri, yoğunlaştırma testi, integral testi, kök testi, oran testi, Kummer ve Raabe testleri. Bütün bu testlerin ortak bir varsayımı vardı — terimler negatif değildi. Bu varsayım göründüğünden çok daha derin bir rol oynuyordu: terimler negatif olmayınca kısmi toplamlar dizisi **artan** oluyor, artan bir dizinin yakınsaklığı da yalnızca sınırlılığa indirgeniyordu (Teorem 35.1). Bütün testler, aslında bu tek gözlemin farklı kılıklardaki yansımalarıydı.

Şimdi bu güvenli bölgenin dışına çıkıyoruz. Terimleri hiçbir kurala bağlı olmaksızın pozitif ve negatif değerler alabilen serilere **keyfi terimli seriler** diyeceğiz. Böyle bir seride kısmi toplamlar dizisi bir ileri bir geri gidebilir; monotonluk kaybolur, dolayısıyla "sınırlıysa yakınsar" kestirmesi de elimizden gider. Üstelik, birazdan somut bir örnekte göreceğimiz gibi, negatif olmayan seriler için kusursuz işleyen karşılaştırma testi keyfi terimli serilere olduğu gibi taşınamaz.

Bu çıkmazdan kurtaran fikir şaşırtıcı ölçüde basittir: bir seriyi incelemek yerine, **terimlerinin mutlak değerlerinden kurulan seriyi** inceleriz. Bu ikinci seri negatif olmayan terimlidir; ona bütün eski testleri uygulayabiliriz. Sonra da "mutlak değerler serisi yakınsaksa, asıl seri de yakınsaktır" biçiminde bir köprü kurarız. Bu köprüyü kuran teorem, elimizdeki bütün pozitif terimli seri testlerini bir çırpıda keyfi terimli serilere taşır.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: **mutlak yakınsaklık** (absolute convergence) ve **şartlı yakınsaklık** (conditional convergence) kavramlarının tanımı; mutlak yakınsak her serinin yakınsak olduğu ve karşıtının **yanlış** olduğu; bir serinin **pozitif kısmı** ile **negatif kısmı**nın ayrıştırılması ve bu ayrıştırmanın şartlı yakınsaklığı nasıl "iki sonsuzluğun ince dengesi" olarak açığa çıkardığı; keyfi terimli seriler için karşılaştırma testi; ve son olarak kök ile oran testlerinin keyfi terimli serilerde nasıl okunacağı — özellikle üst limitin (limsup) neden vazgeçilmez olduğu.

39.1 Keyfi Terimli Seriler: Karşılaştırma Neden Yetmez

Önce sorunun ne olduğunu açıkça görelim. Negatif olmayan terimli seriler için karşılaştırma testi (Teorem 35.2) şunu söylüyordu: $0 \le a_k \le b_k$ ve $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ da yakınsaktır. Alt sınırdaki $0 \le a_k$ koşulunu kaldırırsak ne olur?

Bir bakalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$a_k = -1, \qquad b_k = \frac{1}{k^2}$$

alalım. Kuşkusuz $a_k \le b_k$'dır ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsaktır ($p = 2 > 1$; Teorem 36.2). Buna karşın $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)$ serisinin kısmi toplamları $s_n = -n$'dir ve bu dizi $-\infty$'a ıraksar. Demek ki "üstten yakınsak bir seriyle sınırlı olmak" keyfi terimli bir seri için hiçbir şey söylemiyor: terimler aşağı doğru serbestçe kaçabildiği sürece seri istediği gibi ıraksayabilir.

Ters yönde de durum aynı ölçüde kötüdür. $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ ve $b_k = \frac{1}{k}$ alalım. Her k için $a_k \le b_k$'dır ve $\sum b_k$ harmonik seri olarak ıraksaktır; ama bu, $\sum a_k$ hakkında hiçbir bilgi vermez. Nitekim bu bölümün sonunda göreceğimiz üzere $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ serisi **yakınsaktır**.

Öyleyse keyfi terimli serilerde "büyüklük karşılaştırması" tek başına çalışmaz; çalışan şey **mutlak büyüklük** karşılaştırmasıdır. Bunun nedenini bir sonraki başlıkta göreceğiz. Şimdilik şu stratejiyi aklımızda tutalım:

> Keyfi terimli bir $\sum a_k$ serisini incelerken önce negatif olmayan terimli $\sum |a_k|$ serisine bakarız; ona elimizdeki bütün testleri uygulayabiliriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

39.2 Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Bu strateji iki yeni kavramı doğurur.

Tanım 39.1 (Mutlak Yakınsaklık). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ keyfi terimli bir seri olsun (Tanım 34.1). Terimlerin mutlak değerlerinden kurulan

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, |$$

serisi yakınsak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine **mutlak yakınsak** (absolutely convergent) seri denir.

Tanım 39.2 (Şartlı Yakınsaklık). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak, buna karşın $\sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, |$ serisi ıraksak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine **şartlı yakınsak** (conditionally convergent) seri denir.

İki tanım arasındaki ilişkiye dikkat edelim. Mutlak yakınsaklık, $\sum | \, a_k \, |$ hakkında bir hükümdür; şartlı yakınsaklık ise hem $\sum a_k$ hem $\sum | \, a_k \, |$ hakkında iki ayrı hüküm içerir. Birazdan ispatlayacağımız teorem sayesinde bu iki kavram, yakınsak serileri **birbirini dışlayan iki sınıfa** ayıracaktır: yakınsak bir seri ya mutlak yakınsaktır ya da şartlı yakınsaktır, üçüncü bir olasılık yoktur.
Negatif olmayan terimli bir seri için $| \, a_k \, | = a_k$ olduğundan mutlak yakınsaklıkla yakınsaklık aynı şeydir; şartlı yakınsak bir negatif olmayan seri yoktur (Tanım 35.1). Yani bu bölümdeki ayrım yalnızca terimleri işaret değiştiren seriler için anlamlıdır.
Şimdi iki temel örneği görelim. Bu iki örnek, iki kavramın da prototipidir; bölüm boyunca onlara geri döneceğiz.

Örnek 39.1 (Mutlak Yakınsak Bir Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^3}$$

serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Serinin genel terimi $a_k = (-1)^k \frac{1}{k^3}$'tür; k tek iken $a_k < 0$, k çift iken $a_k > 0$ olduğundan bu gerçekten keyfi terimli bir seridir.
> Her $k \in \mathbb{N}$ için
>
> $$| \, a_k \, | = \left| (-1)^k \frac{1}{k^3} \right| = | \, (-1)^k \, | \cdot \frac{1}{k^3} = \frac{1}{k^3}$$
>
> olur. Böylece mutlak değerler serisi
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, | = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$
>
> serisidir. Bu bir p-serisidir ve $p = 3 > 1$ olduğundan Teorem 36.2 gereği yakınsaktır.
> Tanım 39.1 gereği $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^3}$ serisi mutlak yakınsaktır.
> ■

Örnek 39.2 (Şartlı Yakınsak Bir Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

serisinin mutlak yakınsak **olmadığını** gösteriniz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Genel terim $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$'dır ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$| \, a_k \, | = \frac{1}{k}$$

olur. Öyleyse mutlak değerler serisi

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, | = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonik serisidir. Harmonik seri $p = 1$ olan bir p-serisidir ve Teorem 36.2 gereği **ıraksaktır**. Demek ki $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ mutlak yakınsak değildir.
Öte yandan serinin kendisi yakınsaktır. Bunu burada ispatlamıyoruz; Abel, Dirichlet ve Leibniz Testleri bölümünde Leibniz testiyle göstereceğiz. Bu yakınsaklığı kabul edersek, Tanım 39.2 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

serisi **şartlı yakınsaktır.**
Kısmi toplamların davranışı bu iki olguyu yan yana koyduğumuzda çarpıcıdır: $\sum \frac{1}{k}$ serisinin kısmi toplamları sınırsızca büyürken, aynı terimlere dönüşümlü olarak işaret verildiğinde kısmi toplamlar giderek daralan salınımlarla tek bir sayıya oturur. Yakınsaklığı sağlayan şey terimlerin küçüklüğü değil, işaretlerin yarattığı **karşılıklı yok etme**dir; "şartlı" sıfatı da tam olarak bunu anlatır.
■

39.3 Mutlak Yakınsaklık Yakınsaklığı Gerektirir

Şimdi bölümün eksen teoremine geliyoruz. Bu teorem, mutlak değerler serisine bakma stratejisini meşru kılan sonuçtur: $\sum | \, a_k \, |$ yakınsaksa, $\sum a_k$ hakkında da bir şey söyleyebiliriz — üstelik en çok istediğimiz şeyi, yakınsaklığını.
İspatın anahtarı, yakınsaklığı limit hesabıyla değil, **Cauchy ölçütüyle** kontrol etmektir. Nedeni şudur: Cauchy ölçütü serinin toplamından hiç söz etmez, yalnızca ardışık terim öbeklerinin küçüklüğüne bakar; üçgen eşitsizliği de tam olarak böyle öbekler üzerinde çalışır. Yani ölçüt ile eşitsizlik birbirine tam oturur.

Teorem 39.1 (Mutlak Yakınsak Her Seri Yakınsaktır). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mutlak yakınsak bir seri ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır. Ayrıca*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, |$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.
Adım 1: Cauchy ölçütünü $\sum | \, a_k \, |$ serisine uygulayalım. *Varsayım gereği $\sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, |$ serisi yakınsaktır. Seriler için Cauchy yakınsaklık ölçütü (Teorem 34.3) gereği, verilen her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki $m > n \geq N_\varepsilon$ olan her m, n için*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} | \, a_k \, | \right| = \sum_{k=n+1}^{m} | \, a_k \, | < \varepsilon$$

olur. (Ortadaki mutlak değeri kaldırabildik, çünkü $| \, a_k \, | \geq 0$ olduğundan toplam da negatif değildir.)
Adım 2: Üçgen eşitsizliğiyle $\sum a_k$ serisine geçelim. *Sonlu sayıda terim için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1), tümevarımla herhangi bir sonlu toplama genişler: her $m > n$ için*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} | \, a_k \, | \, .$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bunu 1. Adım'daki eşitsizlikle birleştirirsek, $m > n \geq N_\varepsilon$ olan her m, n için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |\, a_k \,| < \varepsilon$$

elde ederiz.
Adım 3: Ölçütü ters yönde okuyalım. *Son eşitsizlik tam olarak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin Cauchy ölçütünü sağladığını söyler. Teorem 34.3 gereği $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.*
Adım 4: Eşitsizliğin ispatı. *$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $t_n = \sum_{k=1}^{n} |\, a_k \,|$ kısmi toplamlarını alalım. Üçgen eşitsizliği gereği her n için*

$$|\, s_n \,| \leq t_n$$

olur. Yukarıda $s_n \to s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ olduğunu gösterdik; varsayım gereği $t_n \to t = \sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,|$'dır. Ters üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği

$$\big|\, |\, s_n \,| - |\, s \,|\, \big| \leq |\, s_n - s \,| \to 0$$

olduğundan $|\, s_n \,| \to |\, s \,|$'dir. $|\, s_n \,| \leq t_n$ eşitsizliğinde limite geçersek — yakınsak dizilerde sıralamanın korunması gereği — $|\, s \,| \leq t$, yani

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,|$$

bulunur.
■

Bu teorem, "seri toplamının mutlak değeri, mutlak değerlerin toplamını aşamaz" biçiminde okunabilir; yani üçgen eşitsizliği sonsuz toplamlara da taşınır. Ama asıl kazancımız ilk kısımdır: **artık negatif olmayan seriler için kurduğumuz bütün testler, $\sum |\, a_k \,|$ üzerinden keyfi terimli serilere uygulanabilir.**

> ⚠ Karşıtı doğru değildir
>
> Teorem 39.1'in karşıtı **yanlıştır**: yakınsak her seri mutlak yakınsak değildir.
> Karşı örnek elimizde hazır: Örnek 39.2'te gördüğümüz
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$
>
> serisi yakınsaktır, ama mutlak değerler serisi harmonik seri olduğundan ıraksaktır. Yani "yakınsak" ile "mutlak yakınsak" kesinlikle aynı şey değildir; mutlak yakınsaklık, yakınsaklıktan **kesin olarak daha güçlü** bir koşuldur.
> Bunun pratikteki karşılığı şudur: $\sum |\, a_k \,|$ ıraksak çıktığında **hiçbir sonuca varamayız.** $\sum a_k$ yakınsak da olabilir, ıraksak da. Böyle durumlarda bir sonraki bölümün araçlarına (Leibniz, Dirichlet, Abel testleri) başvurmak gerekir.

Teorem 39.1 sayesinde şu sınıflandırmayı yapabiliriz. Herhangi bir $\sum a_k$ serisi tam olarak şu üç kutudan birine düşer:

- **mutlak yakınsak** ($\sum |\, a_k \,|$ yakınsak; bu durumda $\sum a_k$ de yakınsak),
- **şartlı yakınsak** ($\sum a_k$ yakınsak, $\sum |\, a_k \,|$ ıraksak),
- **ıraksak** ($\sum a_k$ ıraksak; bu durumda $\sum |\, a_k \,|$ de zorunlu olarak ıraksaktır, çünkü aksi hâlde teorem gereği $\sum a_k$ yakınsak olurdu).

Şimdi teoremin tipik bir kullanımını görelim.

Örnek 39.3 (Sinüslü Bir Serinin Yakınsaklığı).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Genel terim $a_k = \dfrac{\sin k}{k^2}$'dir. Burada k doğal sayısı **radyan** olarak alınmaktadır ve $\sin k$ değerleri hiçbir düzenli kurala uymadan pozitif ya da negatif olabilir: örneğin $\sin 1 > 0$, $\sin 4 < 0$, $\sin 7 > 0$'dır. Yani bu, tam anlamıyla keyfi terimli bir seridir ve terimlerin işaretlerini izleyerek ilerlemek umutsuzdur. Bunun yerine mutlak değerlere geçelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \leq 1$ olduğundan, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|a_k| = \left|\frac{\sin k}{k^2}\right| = \frac{|\sin k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

olur. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ serisi $p = 2 > 1$ olan bir p-serisidir ve Teorem 36.2 gereği yakınsaktır. Hem $(|a_k|)$ hem $\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ negatif olmayan terimli olduğundan karşılaştırma testi (Teorem 35.2) uygulanabilir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin k}{k^2}\right|$$

serisi yakınsaktır.
Demek ki Tanım 39.1 gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k}{k^2}$ serisi **mutlak yakınsaktır**; Teorem 39.1 gereği de **yakınsaktır.**
■

Bu örneğin yöntemi son derece tipiktir ve şu üç adıma indirgenir: (i) terimleri mutlak değere al, (ii) elde ettiğin negatif olmayan seriyi bilinen bir testle incele, (iii) yakınsaklık çıktıysa Teorem 39.1 ile asıl seriye dön.

39.4 Bir Serinin Pozitif ve Negatif Kısımları

Mutlak ve şartlı yakınsaklık arasındaki farkı gerçekten anlamak için, keyfi terimli bir seriyi negatif olmayan **iki** seriye ayrıştırmak çok işe yarar. Fikir basittir: her terimin ya pozitif kısmını ya da negatif kısmını alırız, ötekini sıfıra çeviririz.

Tanım 39.3 (Bir Terimin Pozitif ve Negatif Kısmı). $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \qquad a^- = \max\{-a, 0\}$$

sayılarına sırasıyla a'nın **pozitif kısmı** (positive part) ve **negatif kısmı** (negative part) denir. Bir (a_k) dizisi için a_k^+ ve a_k^- terim terim tanımlanır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

serilerine $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin **pozitif kısmı** ve **negatif kısmı** denir.

Adlandırmada bir tuzağa dikkat edelim: a^- **negatif değildir**, tersine $a^- \geq 0$'dır. "Negatif kısım" adı, a'nın negatif olduğu durumda devreye girmesinden gelir. Örneğin $a = -5$ için $a^+ = 0$, $a^- = 5$'tir; $a = 3$ için $a^+ = 3$, $a^- = 0$'dır.
Bu iki büyüklüğün bize gereken bütün özellikleri şu dört eşitlikte toplanır. Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$a^+ \geq 0, \qquad a^- \geq 0, \qquad a = a^+ - a^-, \qquad |a| = a^+ + a^-.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrulaması iki duruma ayrılır. $a \geq 0$ ise $a^+ = a$ ve $-a \leq 0$ olduğundan $a^- = 0$'dır; böylece $a^+ - a^- = a$ ve $a^+ + a^- = a = \mid a \mid$ olur. $a < 0$ ise $a^+ = 0$ ve $a^- = -a > 0$'dır; böylece $a^+ - a^- = -(-a) = a$ ve $a^+ + a^- = -a = \mid a \mid$ olur. Her iki durumda da eşitlikler sağlanır.
Bu iki eşitliği birlikte çözersek çok kullanışlı iki formül daha çıkar:

$$a^+ = \frac{\mid a \mid + a}{2}, \qquad a^- = \frac{\mid a \mid - a}{2}.$$

Ayrıca $a^+ \leq a^+ + a^- = \mid a \mid$ ve benzer biçimde $a^- \leq \mid a \mid$ olduğundan

$$0 \leq a^+ \leq \mid a \mid, \qquad 0 \leq a^- \leq \mid a \mid$$

sınırlarına sahibiz. Bunlar karşılaştırma testine doğrudan yem olacaktır.
Somut bir örnek üzerinde çalışalım: $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ olsun. k tek iken $a_k = \dfrac{1}{k} > 0$, k çift iken $a_k = -\dfrac{1}{k} < 0$'dır. Öyleyse

$$a_k^+ = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \text{ tek} \\ 0, & k \text{ çift}, \end{cases} \qquad a_k^- = \begin{cases} 0, & k \text{ tek} \\ \frac{1}{k}, & k \text{ çift}. \end{cases}$$

Yani pozitif kısım seri "tek indisli terimleri", negatif kısım seri "çift indisli terimleri" toplar. Birazdan ikisinin de $+\infty$'a ıraksadığını göreceğiz.
Şimdi bu ayrıştırmanın mutlak yakınsaklıkla ilişkisini kuralım.

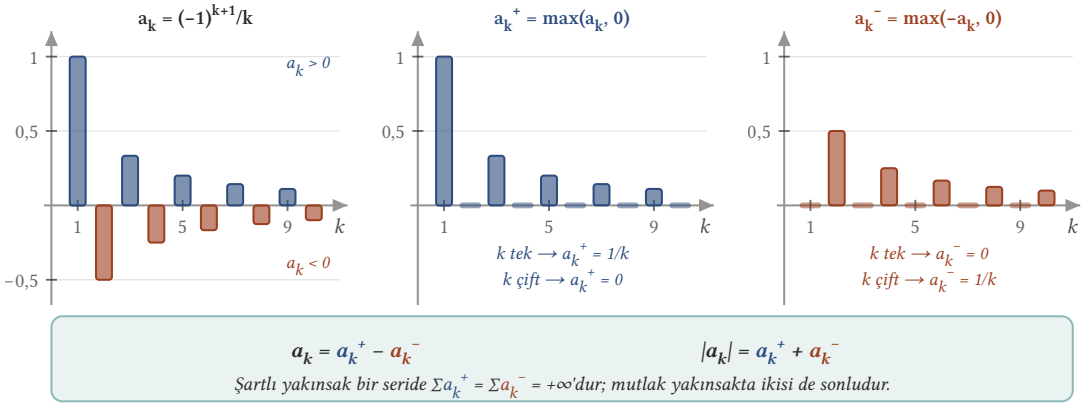
Teorem 39.2 (Mutlak Yakınsaklığın Pozitif ve Negatif Kısımlarla Ölçütü). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ keyfi terimli bir seri olsun. O hâlde*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mutlak yakınsaktır} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \text{ serilerinin ikisi de yakınsaktır.}$$

Bu durumda ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

eşitlikleri geçerlidir.



Şekil 39.1: Örnek dizi $a_k = (-1)^{k+1}/k$. Her terim iki negatif olmayan parçaya ayrılır: a_k^+ yalnızca yukarı yönlü çubukları, a_k^- ise aşağı yönlü çubukların boyunu tutar; kalan yerlerde ikisi de sıfırdır. Soldaki grafik ortadakinden sağdaki çıkarılarak, mutlak değerlerin grafiği ise ikisi toplanarak elde edilir. Mutlak yakınsaklık iki parça serisinin de yakınsaması demektir; şartlı yakınsaklıkta ise ikisi birden $+\infty$'a ıraksar ve sonlu toplam yalnızca bu iki sonsuzluğun birbirini yeme biçiminden doğar.

İspat.

(⇒) Mutlak yakınsaklıktan iki kısmın yakınsaklığına. *$\sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, |$ yakınsak olsun. Yukarıda kurduğumuz sınırlar gereği her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$0 \leq a_k^+ \leq | \, a_k \, |, \qquad 0 \leq a_k^- \leq | \, a_k \, |$$

olur. (a_k^+), (a_k^-) ve $(| \, a_k \, |)$ dizilerinin hepsi negatif olmayan terimlidir; karşılaştırma testi (Teorem 35.2) her iki eşitsizliğe de uygulanır ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ ile $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ serilerinin ikisinin de yakınsak olduğu çıkar.
(⇐) İki kısmın yakınsaklığından mutlak yakınsaklığa. *$\sum a_k^+$ ve $\sum a_k^-$ serilerinin ikisi de yakınsak olsun. Her k için*

$$| \, a_k \, | = a_k^+ + a_k^-$$

olduğundan, $\sum | \, a_k \, |$ serisi yakınsak iki serinin terim terim toplamıdır. Serilerin cebirsel işlemleri (Teorem 34.4) gereği bu toplam seri de yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \, a_k \, | = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

olur. Böylece $\sum a_k$ mutlak yakınsaktır.
Toplam formülü. *Yukarıdaki durumda, her k için $a_k = a_k^+ - a_k^-$ olduğundan yine Teorem 34.4 gereği $\sum a_k$ serisi yakınsak iki serinin farkıdır ve*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

elde edilir. (Bu, Teorem 39.1'in bu özel durumdaki ikinci bir ispatını da vermiş olur.)
■

Teoremi şöyle özetleyebiliriz: **mutlak yakınsaklık, serinin pozitif katkısının ve negatif katkısının ayrı ayrı sonlu olması demektir.** Toplam, bu iki sonlu büyüklüğün farkıdır ve terimlerin hangi sırayla toplandığı hiç fark etmez — bu son gözlem, Serilerin Yeniden Düzenlenmesi ve Gruplanması bölümünün başlangıç noktası olacaktır.
Peki şartlı yakınsaklıkta durum nedir? Sonuç çarpıcıdır: her iki kısım da **sonsuza gider**, ama birbirlerini öyle ince bir dengede yok ederler ki fark sonlu kalır.

Sonuç 39.1 (Yakınsak Seriler İçin Mutlak Yakınsaklığın Denk Biçimleri). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **yakınsak** bir seri olsun. O hâlde aşağıdaki üç önerme denktir:*

- *(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mutlak yakınsaktır;*
- *(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ yakınsaktır;*
- *(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ yakınsaktır.*

Dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ şartlı yakınsak ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = +\infty \qquad \text{ve} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$$

*olur; yani pozitif ve negatif kısımların **ikisi de** $+\infty$'a ıraksar.*

İspat.
(i) ⇒ (ii) ve (i) ⇒ (iii). *Bu, Teorem 39.2'in (⇒) yönüdür.*
(ii) ⇒ (iii). *$\sum a_k^+$ yakınsak olsun. $a_k = a_k^+ - a_k^-$ eşitliğinden*

$$a_k^- = a_k^+ - a_k$$

yazılır. Sağ taraf, yakınsak olduğu varsayılan $\sum a_k^+$ serisi ile hipotez gereği yakınsak olan $\sum a_k$ serisinin terim terim farkıdır; Teorem 34.4 gereği $\sum a_k^-$ yakınsaktır. (Serinin yakınsaklığı hipotezinin tam olarak burada kullanıldığına dikkat edelim.)
(iii) ⇒ (ii). *Bakışımlı olarak $a_k^+ = a_k + a_k^-$ eşitliğinden, $\sum a_k$ ve $\sum a_k^-$ yakınsak olduğundan $\sum a_k^+$ de yakınsaktır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(ii) ve (iii) ⇒ (i). *Yukarıdaki iki adım (ii) ile (iii)'ün denk olduğunu gösterdi; öyleyse ikisinden biri doğruysa ikisi birden doğrudur ve Teorem 39.2'in (⇐) yönü (i)'i verir.*
Böylece üç önermenin denkliği kurulmuş oldu.
Şartlı yakınsak durum. *$\sum a_k$ şartlı yakınsak olsun. Tanım gereği $\sum a_k$ yakınsaktır ama $\sum \mid a_k \mid$ ıraksaktır; yani (i) yanlıştır. Denklik gereği (ii) ve (iii) de yanlıştır: $\sum a_k^+$ ve $\sum a_k^-$ serilerinin ikisi de ıraksaktır.*
Bu iki seri negatif olmayan terimlidir; negatif olmayan terimli bir serinin kısmi toplamlar dizisi artandır ve Teorem 35.1 gereği böyle bir seri ancak kısmi toplamları sınırsız olduğunda ıraksar. Artan ve sınırsız bir dizi ise $+\infty$'a ıraksar. Öyleyse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$$

olur.
■

i Şartlı yakınsaklığın anlamı

Sonuç 39.1, şartlı yakınsaklığın neden bu kadar kırılgan bir olgu olduğunu açıklar. Şartlı yakınsak bir seride pozitif terimlerin toplamı da negatif terimlerin toplamı da sonsuzdur; seri yalnızca bu iki sonsuzluğun **belirli bir sırayla** birbirini yeme biçimi sayesinde sonlu bir değere oturur.
Sıra değişirse denge de bozulur. Nitekim şartlı yakınsak bir serinin terimleri uygun biçimde yeniden sıralanarak **önceden verilmiş herhangi bir gerçek sayıya** yakınsatılabilir; hatta $+\infty$'a ya da $-\infty$'a ıraksatılabilir. Riemann'ın yeniden düzenleme teoremi adıyla bilinen bu sonucu Serilerin Yeniden Düzenlenmesi ve Gruplanması bölümünde ispatlayacağız; ispatın motoru tam olarak burada kurduğumuz "iki kısım da $+\infty$" olgusudur.
Buna karşılık mutlak yakınsak bir seride pozitif ve negatif katkıların her biri ayrı ayrı sonludur; toplam, sıralamadan hiç etkilenmez.

39.5 Keyfi Terimli Seriler İçin Karşılaştırma Testi

Bölümün başında, karşılaştırma testinin keyfi terimli serilere olduğu gibi taşınamadığını görmüştük. Şimdi doğru biçimini yazabiliriz: karşılaştırma, terimlerin kendileriyle değil **mutlak değerleriyle** yapılmalıdır.

Teorem 39.3 (Keyfi Terimli Seriler İçin Karşılaştırma Testi). *$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ negatif olmayan terimli bir seri, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ise keyfi terimli bir seri olsun.*
1. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak ve öyle bir $K \in \mathbb{N}$ varsa ki $k \geq K$ olan her k için

$$\mid a_k \mid \leq b_k$$

sağlanıyorsa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi mutlak yakınsaktır (dolayısıyla yakınsaktır).
2. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksak ve öyle bir $K \in \mathbb{N}$ varsa ki $k \geq K$ olan her k için

$$b_k \leq \mid a_k \mid$$

sağlanıyorsa, $\sum_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid$ serisi ıraksaktır.

İspat.
(1) *$c_k = \mid a_k \mid$ yazalım. (c_k) ve (b_k) dizilerinin ikisi de negatif olmayan terimlidir ve $k \geq K$ olan her k için $\mid c_k \mid = \mid a_k \mid \leq b_k$'dır. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak olduğundan, karşılaştırma testinin kuyruk biçimi (Önerme 35.1, birinci madde) $k_0 = K$ ile uygulanır ve*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid$$

 CC BY-NC-SA 4.0

serisinin yakınsak olduğunu verir. Eşitsizliğin ilk $K-1$ terimde sağlanmaması sonucu etkilemez: bir serinin yakınsaklığı yalnızca kuyruğuna bağlıdır.
Tanım 39.1 gereği $\sum a_k$ mutlak yakınsaktır ve Teorem 39.1 gereği yakınsaktır.
***(2)** Bu kez $k \geq K$ olan her k için $|\,a_k\,| \geq b_k \geq 0$'dır ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaktır. Karşılaştırma testinin kuyruk biçiminin ikinci maddesi (Önerme 35.1) $k_0 = K$ ile, terimleri $|\,a_k\,|$ olan seriye doğrudan uygulanır ve $\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k\,|$ serisinin ıraksak olduğunu verir.*
İsteyen bu maddeyi (1)'e dayanarak da görebilir: $\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k\,|$ yakınsak olsaydı, (1)'deki akıl yürütme — bu kez üstten $|\,a_k\,|$ ile bastırılan $\sum b_k$ için — $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisinin yakınsak olduğunu verirdi; bu ise $\sum b_k$'nın ıraksak olduğu varsayımıyla çelişir.
■

Teoremin ikinci maddesinin ne söyleyip ne söylemediğine çok dikkat etmek gerekir.

⚠ İkinci madde serinin ıraksaklığını vermez

Teorem 39.3 (2), yalnızca **mutlak değerler serisinin** ıraksadığını söyler; $\sum a_k$ serisinin kendisi hakkında hiçbir hüküm içermez.
Örnek olarak $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$ ve $b_k = \dfrac{1}{k}$ alalım. $\sum b_k$ harmonik seri olarak ıraksaktır ve her k için $b_k \leq |\,a_k\,|$ — hatta eşitlik — sağlanır. Teorem gereği $\sum |\,a_k\,|$ ıraksaktır; nitekim öyledir. Ama $\sum a_k$ serisinin kendisi yakınsaktır. Yani bu maddeden çıkan tek sonuç "seri mutlak yakınsak değildir"; seri şartlı yakınsak olabilir.
Aynı şekilde Teorem 39.3 (1)'de $|\,a_k\,| \leq b_k$ yerine $a_k \leq b_k$ yazmak testi geçersiz kılar: bölümün başındaki $a_k = -1$, $b_k = \frac{1}{k^2}$ örneği bunu gösteriyordu.

Testin tipik bir uygulaması, sınırlı bir "salınım çarpanı" içeren serilerdir.

Örnek 39.4 (Sınırlı Çarpanlı Bir Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^{3/2}}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \dfrac{\sin k}{k^{3/2}}$ ve $b_k = \dfrac{1}{k^{3/2}}$ alalım. (b_k) negatif olmayan terimlidir ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $p = \dfrac{3}{2} > 1$ olan bir p-serisi olduğundan Teorem 36.2 gereği yakınsaktır.
Öte yandan her $k \in \mathbb{N}$ için $|\sin k\,| \leq 1$ olduğundan

$$|\,a_k\,| = \frac{|\sin k\,|}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}} = b_k$$

sağlanır; burada $K = 1$ alınabilir. Teorem 39.3 (1) gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k}{k^{3/2}}$ serisi mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.
Bu örnekte $p = \dfrac{3}{2}$ üssünün 1'den büyük olması belirleyicidir. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k}{k}$ serisinde aynı karşılaştırma $|\,a_k\,| \leq \dfrac{1}{k}$ verir; ama $\sum \dfrac{1}{k}$ ıraksak olduğundan bu eşitsizlik hiçbir sonuç doğurmaz. O seri gerçekten de mutlak yakınsak değildir ve yakınsaklığı ancak bir sonraki bölümün Dirichlet testiyle kurulabilir.
■

39.6 Kök ve Oran Testleri Mutlak Yakınsaklık Testleridir

Kök testi (Teorem 37.1) negatif olmayan terimli, d'Alembert oran testi (Teorem 37.2) ise pozitif terimli seriler için kurulmuştu. Bu testler keyfi terimli serilere doğal biçimde taşınır; taşınırken iki ayarlama gerekir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci ayarlama: mutlak değer. Testleri $\sum |\, a_k \,|$ serisine uygularız; yani kök testinde $\sqrt[n]{|\, a_n \,|}$, oran testinde $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ nicelikleri kullanılır. Terimler negatif olabildiğinden mutlak değer olmadan $\sqrt[n]{a_n}$ ifadesi tanımsız bile olabilir (örneğin n çift ve $a_n < 0$ iken).
İkinci ayarlama: üst limit. $\left(\sqrt[n]{|\, a_n \,|}\right)$ dizisinin limiti var olmayabilir. Örneğin

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ tek} \\ 3^{-n}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

için $\sqrt[n]{|\, a_n \,|}$ dizisi $\dfrac{1}{2}$ ile $\dfrac{1}{3}$ değerleri arasında salınır ve yakınsamaz. Oysa üst limit (bkz. Analiz 1) her sınırlı dizi için vardır. Bu yüzden testin genel biçiminde limit değil **üst limit** kullanılır.

> **i** Üst ve alt limitli biçim
>
> Keyfi terimli bir $\sum a_n$ serisi için:
>
> - Kök testinde $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|}$ alınır.
> - Oran testinde $\limsup_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ve $\liminf_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ nicelikleri birlikte göz önüne alınır: yakınsaklık için üst limite, ıraksaklık için alt limite bakılır.
>
> Terimlerin hepsi pozitifse mutlak değerler zaten gereksizdir; limit varsa üst ve alt limit ona eşit olduğundan bilinen biçimler geri gelir.

Şimdi bu iki testi keyfi terimli seriler için tam olarak ifade edip ispatlayalım.

Önerme 39.1 (Keyfi Terimli Seriler İçin Kök ve Oran Testleri). *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ keyfi terimli bir seri olsun.*
(A) Kök testi. *$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|}$ olsun.*

- *$L < 1$ ise $\sum a_n$ mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır.*
- *$L > 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.*
- *$L = 1$ ise test sonuç vermez.*

(B) Oran testi. *Her n için $a_n \neq 0$ olsun.*

- *$\limsup_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ise $\sum a_n$ mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır.*
- *Öyle bir $N \in \mathbb{N}$ varsa ki $n \geq N$ olan her n için $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ oluyorsa, $\sum a_n$ ıraksaktır. Özel olarak $\liminf_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ise seri ıraksaktır.*

*Kök testinin tersine, oran testinde $\limsup_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ olması **tek başına ıraksaklık vermez**; ıraksaklık için oranların bir yerden sonra 1'in altına hiç inmemesi gerekir.*

> ***İspat.***
> ***(A) Yakınsaklık durumu.*** *$L < 1$ olsun. $(|\, a_n \,|)$ negatif olmayan terimli bir dizidir ve $\limsup \sqrt[n]{|\, a_n \,|} = L < 1$'dir. Kök testi (Teorem 37.1) doğrudan $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|$ serisine uygulanır ve bu seri yakınsaktır. Tanım 39.1 gereği $\sum a_n$ mutlak yakınsak, Teorem 39.1 gereği yakınsaktır.*
> ***(A) Iraksaklık durumu.*** *$L > 1$ olsun. $1 < q < L$ olacak biçimde bir q seçelim. Üst limitin alt dizi karakterizasyonu (bkz. Analiz 1) gereği $\left(\sqrt[n]{|\, a_n \,|}\right)$ dizisinin L'ye yakınsayan bir alt dizisi vardır ($L = +\infty$ ise $+\infty$'a ıraksayan bir alt dizi). Her iki durumda da bu alt dizinin terimleri bir yerden sonra q'yu aşar; yani **sonsuz çoklukta** n için*
>
> $$\sqrt[n]{|\, a_n \,|} > q > 1$$
>
> *olur. Bu n'ler için her iki tarafın n'inci kuvvetini alırsak*
>
> $$|\, a_n \,| > q^n > 1$$
>
> *bulunur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki (a_n) dizisinin sonsuz çoklukta terimi mutlak değerce 1'den büyüktür. Eğer $a_n \to 0$ olsaydı, $\varepsilon = 1$ için bir yerden sonra $|\,a_n\,| < 1$ olması gerekirdi; oysa $|\,a_n\,| > 1$ eşitsizliği sonsuz çoklukta n için sağlanıyor. Öyleyse $a_n \not\to 0$'dır. Genel terim testi (Teorem 34.2) gereği yakınsak bir serinin genel terimi sıfıra gitmek zorunda olduğundan — eşdeğer olarak Sonuç 34.1 gereği — $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ***ıraksaktır.***
Burada dikkat edilecek nokta şudur: ıraksaklık sonucu doğrudan $\sum a_n$ serisinin kendisi için elde edilmiştir, yalnızca $\sum|\,a_n\,|$ için değil. Bunu sağlayan da genel terimin sıfıra gitmemesidir.
(A) Belirsiz durum. *$L = 1$ için test sonuç vermez: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ alırsak $\sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ olur ve seri (şartlı) yakınsaktır; $a_n = (-1)^n$ alırsak $\sqrt[n]{|\,a_n\,|} = 1$ olur ve seri ıraksaktır. İki durumda da $L = 1$'dir.*
(B) Yakınsaklık durumu. *$\limsup\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1$ olsun. $(|\,a_n\,|)$ pozitif terimli bir dizidir ve ardışık terimlerinin oranı $\dfrac{|\,a_{n+1}\,|}{|\,a_n\,|} = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$'dir. Oran testi (Teorem 37.2) $\sum|\,a_n\,|$ serisine uygulanır ve bu seri yakınsaktır; dolayısıyla $\sum a_n$ mutlak yakınsak ve yakınsaktır.*
(B) Iraksaklık durumu. *$n \geq N$ için $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, yani $|\,a_{n+1}\,| \geq |\,a_n\,|$ olsun. O hâlde $(|\,a_n\,|)_{n\geq N}$ dizisi artandır ve her $n \geq N$ için*

$$|\,a_n\,| \geq |\,a_N\,| > 0$$

olur ($a_N \neq 0$ varsayımı gereği $|\,a_N\,| > 0$'dır). Öyleyse $a_n \to 0$ olamaz; Teorem 34.2 gereği $\sum a_n$ ıraksaktır.
Son olarak $\liminf\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda > 1$ olsun. $1 < q < \lambda$ seçelim. Alt limitin tanımı gereği öyle bir N vardır ki $n \geq N$ için $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q > 1$ olur; bu da bir önceki durumun koşulunu sağlar ve seri ıraksaktır. (Dahası bu durumda $|\,a_n\,| \geq |\,a_N\,|\,q^{n-N} \to \infty$ olduğundan genel terim mutlak değerce sonsuza gider.)
■

Elde ettiğimiz mesajı bir kez daha vurgulayalım: **kök ve oran testleri, keyfi terimli seriler için birer mutlak yakınsaklık testidir.** Yakınsaklık koşulu sağlandığında öğrendiğimiz şey serinin yalnızca yakınsak değil, mutlak yakınsak olduğudur; bu, salt yakınsaklıktan daha güçlü bir bilgidir. Iraksaklık koşulu sağlandığında ise sonuç yine serinin kendisi için geçerlidir, çünkü ıraksaklık genel terimin sıfıra gitmemesinden gelir. Testlerin sonuç vermediği tek yer $L = 1$ sınır durumudur; orada Raabe ya da Kummer testleri, ya da bir sonraki bölümün Leibniz–Dirichlet–Abel araçları devreye girer.
Şimdi üç örnekle çalıştıralım.

Örnek 39.5 (Kosinüslü Faktöriyel Serisi).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k!}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Önce genel terimi sadeleştirelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\cos k\pi = (-1)^k$$

olduğundan (nitekim $\cos \pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\cos 3\pi = -1$, ... biçiminde ilerler), seri aslında

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

serisidir. Terimler dönüşümlü olarak işaret değiştirdiğinden bu keyfi terimli bir seridir.
Şimdi d'Alembert oran testini mutlak değerlerle uygulayalım. $a_k = \dfrac{\cos k\pi}{k!}$ olduğundan, $|\cos k\pi\,| = 1$ olduğunu kullanarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!\,|\cos(k+1)\pi\,|}{(k+1)!\,|\cos k\pi\,|} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$$

buluruz. Öyleyse

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

olur (limit var olduğundan üst limit ona eşittir). Önerme 39.1 (B) gereği seri **mutlak yakınsaktır**, dolayısıyla **yakınsaktır.**
Bu örnekte serinin toplamını da söyleyebiliriz: üstel fonksiyonun kuvvet serisi açılımından $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$ olduğu bilinir; $k=0$ terimi 1 olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{k!} = e^{-1} - 1$$

bulunur. Bu açılımın kanıtını kuvvet serileri kısmında vereceğiz; buradaki yakınsaklık incelemesi ondan bağımsızdır.
■

Örnek 39.6 (Oran Testiyle Bir İnceleme).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
$a_k = \frac{(-2)^k}{k!}$ olsun. k tek iken $a_k < 0$, k çift iken $a_k > 0$'dır; ayrıca hiçbir k için $a_k = 0$ değildir. Mutlak değerlerin oranını hesaplayalım:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|\,(-2)^{k+1}\,|}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{|\,(-2)^k\,|} = \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{k!}{(k+1)!} = \frac{2}{k+1}.$$

Bu dizinin limiti vardır ve

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1} = 0 < 1$$

olur. Önerme 39.1 (B) gereği seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.
İlk birkaç terime bakmak öğreticidir: $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_3 = -\frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{2}{3}$, $a_5 = -\frac{4}{15}$. Terimler önce büyüyüp sonra hızla küçülmektedir; oran $\frac{2}{k+1}$ ancak $k \geq 2$'den itibaren 1'in altına iner. Oran testinin yalnızca **limitle** ilgilenmesi, baştaki bu düzensiz davranışın sonucu etkilemediğini gösterir.
Serinin toplamı, bir önceki örnekteki gibi, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2}$ açılımından $e^{-2} - 1$ olarak bulunur.
■

Örnek 39.7 (Kök Testiyle Bir İnceleme).

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{2^k}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$a_k = (-1)^k \dfrac{k}{2^k}$ olsun; $\mid a_k \mid = \dfrac{k}{2^k}$'dır. Kök testini uygulayalım:

$$\sqrt[k]{\mid a_k \mid} = \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \frac{\sqrt[k]{k}}{2}.$$

$\sqrt[k]{k} \to 1$ olduğundan (bkz. Analiz 1) limit vardır ve

$$L = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\mid a_k \mid} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

olur. Önerme 39.1 (A) gereği seri **mutlak yakınsaktır**, dolayısıyla yakınsaktır.
Aynı sonuca oran testiyle de varılabilirdi:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} \to \frac{1}{2} < 1.$$

İki test de aynı $\dfrac{1}{2}$ değerini verdi; bu bir rastlantı değildir. Oran testinin limitinin var olduğu durumlarda kök testinin limiti de aynı sayıya eşittir (Teorem 37.3).
Serinin toplamının $-\dfrac{2}{9}$ olduğu, kuvvet serileri kısmında öğreneceğimiz terim terim türev alma tekniğiyle hesaplanabilir; burada bizi ilgilendiren yalnızca yakınsaklıktı.
■

Bölümü bir özetle kapatalım. Keyfi terimli bir seriyle karşılaştığımızda izleyeceğimiz yol şudur:

- Önce $\sum \mid a_k \mid$ serisine bak. Negatif olmayan terimli olduğundan bütün eski testler kullanılabilir.
- $\sum \mid a_k \mid$ yakınsaksa iş bitmiştir: seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır (Teorem 39.1).
- $\sum \mid a_k \mid$ ıraksaksa acele karar verme. Iraksaklık kök testinden $L > 1$ biçiminde ya da oran testinden — bir yerden sonra $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ olması biçiminde — geldiyse serinin kendisi de ıraksaktır (Önerme 39.1); ama ıraksaklık örneğin karşılaştırma testinden geldiyse seri şartlı yakınsak olabilir ve bir sonraki bölümün testlerine geçmek gerekir.

39.7 Alıştırmalar

Alıştırma 39.1 (Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık Üzerine).

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k \cdot 4^k}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k^k}$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

d) $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ olsun. a_k^+ ve a_k^- dizilerini açıkça yazınız ve $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$ olduğunu doğrudan gösteriniz.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mutlak yakınsak ise $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ serisinin de yakınsak olduğunu gösteriniz. Karşıtının yanlış olduğunu bir örnekle belirtiniz.

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mutlak yakınsak ve (b_k) sınırlı bir dizi ise $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz. (b_k) sınırlı olmazsa sonucun bozulabileceğini bir örnekle gösteriniz.

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mutlak yakınsak ise $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ serisinin de mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz. Aynı önerme "şartlı yakınsak" için doğru mudur?

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
a) $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}$ için

$$\mid a_k \mid = \frac{1}{k^2+1}$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $k^2+1 > k^2 > 0$ olduğundan

$$0 \leq \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$$

sağlanır. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ serisi $p = 2 > 1$ olduğundan Teorem 36.2 gereği yakınsaktır. Teorem 39.3 (1) gereği ($b_k = \dfrac{1}{k^2}$, $K = 1$ ile) seri mutlak yakınsaktır; Teorem 39.1 gereği yakınsaktır da.
b) $a_k = \dfrac{(-3)^k}{k \cdot 4^k}$ olsun. Mutlak değeri

$$\mid a_k \mid = \frac{3^k}{k \cdot 4^k} = \frac{1}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

biçiminde yazalım. Oran testini uygulayalım ($a_k \neq 0$'dır):

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{\left(\frac{3}{4}\right)^k} = \frac{3}{4} \cdot \frac{k}{k+1}.$$

$\dfrac{k}{k+1} \to 1$ olduğundan

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3}{4} < 1$$

olur ve Önerme 39.1 (B) gereği seri mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır.
Aynı sonuca karşılaştırmayla da varılabilirdi: $\mid a_k \mid \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^k$ ve $\sum \left(\dfrac{3}{4}\right)^k$ geometrik serisi $\left|\dfrac{3}{4}\right| < 1$ olduğundan yakınsaktır (Teorem 34.5).
c) $a_k = (-1)^k \dfrac{k!}{k^k}$ için $\mid a_k \mid = \dfrac{k!}{k^k} > 0$'dır. Oranı hesaplayalım:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \frac{(k+1)\,k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}.$$

$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k \to e$ olduğundan (bkz. Analiz 1)

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{e} \approx 0{,}368 < 1$$

olur. Önerme 39.1 (B) gereği seri mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.
d) $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$'dır; k tek iken $a_k = \dfrac{1}{k} > 0$, k çift iken $a_k = -\dfrac{1}{k} < 0$'dır. Tanım 39.3 gereği

$$a_k^+ = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \text{ tek} \\ 0, & k \text{ çift}, \end{cases} \qquad a_k^- = \begin{cases} 0, & k \text{ tek} \\ \frac{1}{k}, & k \text{ çift}. \end{cases}$$

Pozitif kısım. Sıfır olan terimler toplamı değiştirmediğinden

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1}$$

yazabiliriz. Her $j \in \mathbb{N}$ için $2j-1 < 2j$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{2j-1} > \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j}$$

olur. $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j}$ de ıraksaktır (Teorem 34.4 gereği sıfırdan farklı bir sabitle çarpmak yakınsaklık durumunu değiştirmez). Karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j-1}$ ıraksaktır. Bu seri negatif olmayan terimli olduğundan kısmi toplamları artandır; ıraksaklık ancak sınırsızlıkla mümkündür (Teorem 35.1) ve artan sınırsız dizi $+\infty$'a gider:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{+} = +\infty.$$

Negatif kısım. Benzer biçimde

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j} = +\infty$$

olur.

Bu sonuç Sonuç 39.1 ile tam uyumludur: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ serisi şartlı yakınsaktır ve pozitif ile negatif kısımlarının ikisi de $+\infty$'a ıraksar.

e) $\sum|\,a_k\,|$ yakınsak olsun. Genel terim testi (Teorem 34.2) gereği $|\,a_k\,| \to 0$'dır. Öyleyse $\varepsilon = 1$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $k \geq N$ için $|\,a_k\,| < 1$ olur. Bu k'ler için

$$a_k^2 = |\,a_k\,|^2 = |\,a_k\,|\cdot|\,a_k\,| \leq |\,a_k\,|\cdot 1 = |\,a_k\,|$$

olur. Eşitsizlik bütün k'lar için değil ancak $k \geq N$ için geçerli olduğundan karşılaştırma testinin kuyruk biçimini (Önerme 35.1, birinci madde) $k_0 = N$ ile uygularız: $\left|a_k^2\right| = a_k^2 \leq |\,a_k\,|$ ve $\sum|\,a_k\,|$ yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ serisi yakınsaktır.

Karşıtı yanlıştır. $a_k = \frac{1}{k}$ alalım. $\sum a_k^2 = \sum\frac{1}{k^2}$ yakınsaktır ($p = 2 > 1$), ama $\sum|\,a_k\,| = \sum\frac{1}{k}$ ıraksaktır. Demek ki $\sum a_k^2$'nin yakınsaklığı $\sum a_k$'nın mutlak yakınsaklığını gerektirmez.

f) (b_k) sınırlı olsun; yani öyle bir $M > 0$ vardır ki her k için $|\,b_k\,| \leq M$'dir. O hâlde her k için

$$|\,a_k b_k\,| = |\,a_k\,|\,|\,b_k\,| \leq M\,|\,a_k\,|$$

olur. $\sum|\,a_k\,|$ yakınsak olduğundan $\sum M\,|\,a_k\,| = M\sum|\,a_k\,|$ de yakınsaktır (Teorem 34.4). Karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $\sum|\,a_k b_k\,|$ yakınsaktır; yani $\sum a_k b_k$ mutlak yakınsaktır ve Teorem 39.1 gereği yakınsaktır.

Sınırlılık gereklidir. $a_k = \frac{1}{k^2}$ ve $b_k = k^2$ alalım. $\sum a_k$ mutlak yakınsaktır, ama (b_k) sınırlı değildir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

serisi ıraksaktır (genel terim $1 \not\to 0$; Sonuç 34.1).

g) $\sum|\,a_k\,|$ ve $\sum|\,b_k\,|$ yakınsak olsun. Üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği her k için

$$0 \leq |\,a_k + b_k\,| \leq |\,a_k\,| + |\,b_k\,|$$

olur. Sağ taraftaki $\sum(|\,a_k\,| + |\,b_k\,|)$ serisi, yakınsak iki serinin toplamı olarak yakınsaktır (Teorem 34.4). Karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $\sum|\,a_k + b_k\,|$ yakınsaktır; yani $\sum(a_k + b_k)$ mutlak yakınsaktır.

Şartlı yakınsaklık için doğru değildir. İki şartlı yakınsak serinin toplamı mutlak yakınsak olabilir. Örneğin

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad b_k = \frac{(-1)^{k}}{k}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

alalım. Her ikisi de şartlı yakınsaktır (Örnek 39.2), ama $a_k + b_k = 0$ olduğundan $\sum(a_k + b_k)$ serisi sıfıra yakınsar ve mutlak yakınsaktır. Toplamın yakınsaklığı ise her zaman korunur: yakınsak iki serinin toplamı Teorem 34.4 gereği yakınsaktır; korunmayan şey yalnızca "şartlılık" niteliğidir.
■

Bu bölümde, negatif olmayan seriler için kurduğumuz bütün testleri mutlak değerler üzerinden keyfi terimli serilere taşıdık; ama şartlı yakınsak seriler bu köprünün ulaşamadığı bir bölgede kaldı. Sıradaki bölümde tam olarak o bölgeye giren araçları kuracağız — işaret değişimlerinin yarattığı yok etmeyi doğrudan kullanan testleri: Abel, Dirichlet ve Leibniz Testleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

40. Abel, Dirichlet ve Leibniz Testleri

Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık bölümünde işareti değişen serilerle ilk kez ciddi biçimde yüzleştik ve elimizde tek bir güçlü araç olduğunu gördük: mutlak yakınsaklık. Bir $\sum a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerlerinden kurulan $\sum |a_k|$ serisi yakınsaksa, $\sum a_k$ de yakınsaktır; böylece pozitif terimli seriler için geliştirdiğimiz bütün cephanelik — karşılaştırma testi (Teorem 35.2), kök testi (Teorem 37.1), oran testi (Teorem 37.2), Raabe testi (Teorem 38.2) — dolaylı yoldan keyfî terimli serilere de uygulanabilir hâle gelir. Ne var ki bu yol yalnızca mutlak yakınsak serileri yakalar. Şartlı yakınsak seriler, tam da mutlak değerler alındığında yakınsaklığı kaybettikleri için, bu araçların hiçbiriyle çözülemez. En bilinen örnek

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

alterne harmonik serisidir: mutlak değerlerin serisi harmonik seridir ve ıraksar, dolayısıyla mutlak yakınsaklık üzerinden hiçbir şey söylenemez. Yine de bu serinin yakınsak olduğunu sezmemiz zor değildir: terimler işaret değiştirerek küçüldüğü için kısmi toplamlar ileri geri salınır ve salınımın genliği gitgide daralır. Bu sezgiyi teoremleştirmek bu bölümün işidir.

Bölümün anahtarı tek bir cebirsel özdeşliktir: **kısmi toplamlarla toplama** ya da yaygın adıyla **Abel toplamı** (Abel summation). Bu özdeşlik, integral hesabındaki kısmi integrasyonun seriler dünyasındaki tam karşılığıdır ve $\sum a_k b_k$ biçimindeki bir çarpım serisini, b_k'lerin kısmi toplamları ile a_k'lerin ardışık farkları cinsinden yeniden yazar. Bu yeniden yazımdan üç büyük test doğar: **Dirichlet testi**, **Abel testi** ve bunların basit ama en çok kullanılan sonucu olan **Leibniz testi**.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Abel toplamı özdeşliği ve ispatı; kısmi toplamları sınırlı bir seriyle sıfıra monoton yakınsayan bir dizinin çarpımının niçin yakınsadığı (Dirichlet testi); yakınsak bir seriyi monoton ve sınırlı bir diziyle çarpmanın yakınsaklığı bozmadığı (Abel testi); alterne serilerin yakınsaklığı için Leibniz ölçütü ve onun iç içe aralıklarla verilen bağımsız ispatı; alterne bir seriyi kısmi toplamıyla değiştirdiğimizde yaptığımız hatanın ilk atılan terimi aşamayacağı; ve sonunda, bütün bu testlerde geçen **monotonluk** koşulunun süs olmadığı — atıldığında sonucun çöktüğü.

40.1 Kısmi Toplamlarla Toplama: Abel Toplamı

Kısmi integrasyon formülünü hatırlayalım: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Buradaki fikir, integrali alınması zor olan bir çarpımın bir çarpanını "integre edip" ötekini "türevleyerek" işi kolaylaştırmaktır. Serilerde de tam olarak aynı numarayı yapabiliriz. $\sum a_k b_k$ toplamında b_k'leri "integre etmek", onların kısmi toplamlarını almak demektir; a_k'leri "türevlemek" ise ardışık farkları $a_{k+1} - a_k$'yi almak demektir.

Bu benzetmeyi kesin bir özdeşliğe çevirelim. Bölüm boyunca aşağıdaki gösterimi kullanacağız.

Tanım 40.1 (Kısmi Toplam Gösterimi). $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bir reel sayı dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

yazalım ve ayrıca

$$B_0 = 0$$

tanımını yapalım. $(B_n)_{n\geq 0}$ dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisinin **kısmi toplamlar dizisi** denir (Tanım 34.1). $B_0 = 0$ anlaşması sayesinde her $k \geq 1$ için

$$b_k = B_k - B_{k-1}$$

eşitliği istisnasız geçerlidir.

$B_0 = 0$ anlaşması küçük bir ayrıntı gibi görünür ama aşağıdaki hesabın hiçbir özel duruma ayrılmadan yürümesini sağlar. Şimdi ana özdeşliği kuralım.

Lemma 40.1 (Abel Toplamı: Kısmi Toplamlarla Toplama). *(a_k) ve (b_k) reel sayı dizileri, B_n ise Tanım 40.1'ndeki gibi olsun. O hâlde $1 \le m \le n$ olan her m, n doğal sayısı için*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_m B_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} \left(a_{k+1} - a_k \right) B_k$$

eşitliği geçerlidir. ($m = n$ olduğunda sağdaki toplam boştur ve 0 kabul edilir.)

İspat.
Adım 1: b_k'leri kısmi toplam farkı olarak yazalım. *Tanım 40.1 gereği her $k \ge 1$ için $b_k = B_k - B_{k-1}$'dir. Bunu yerine koyup toplamı ikiye ayıralım:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1} \right) = \sum_{k=m}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n} a_k B_{k-1}.$$

Adım 2: İkinci toplamda indis kaydıralım. *İkinci toplamda $j = k - 1$ diyelim. k, m'den n'ye giderken j, $m-1$'den $n-1$'e gider ve $a_k = a_{j+1}$ olur:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k B_{k-1} = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} B_j.$$

Toplama değişkenini yeniden k adlandırırsak

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k$$

elde ederiz.
Adım 3: Uç terimleri ayıralım. *İki toplamın ortak indis aralığı $m \le k \le n-1$'dir. Birinci toplamdan $k = n$ terimini, ikinci toplamdan $k = m - 1$ terimini ayıralım:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k B_k = a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k B_k, \qquad \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_m B_{m-1} + \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} B_k.$$

Bunları yerine koyalım:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k B_k - a_m B_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} B_k.$$

Adım 4: Kalan iki toplamı birleştirelim. *Aynı indis aralığında oldukları için tek bir toplam altında toplanabilirler:*

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} B_k = -\sum_{k=m}^{n-1} \left(a_{k+1} - a_k \right) B_k.$$

Böylece

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_m B_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} \left(a_{k+1} - a_k \right) B_k$$

bulunur; bu tam olarak iddia edilen eşitliktir. $m = n$ durumunda sağdaki toplam boştur ve özdeşlik $a_n b_n = a_n B_n - a_n B_{n-1}$ hâline gelir; bu da $b_n = B_n - B_{n-1}$ olduğundan doğrudur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Kısmi integrasyonla benzerlik

Özdeşliği kısmi integrasyon formülünün yanına koyalım:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx, \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

ile

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \Big[\, a_k B_{k-1} \Big]_{k=m}^{k=n+1} - \sum_{k=m}^{n} \left(\, a_{k+1} - a_k \,\right) B_k.$$

(İkinci biçim birincisinden şöyle çıkar: $a_n B_n = a_{n+1}B_n - \left(\, a_{n+1} - a_n \,\right) B_n$ yazılır; ilk parça uç terimi $a_m B_{m-1}$ ile birlikte köşeli parantezi tamamlar, ikinci parça ise toplamın üst sınırını $n-1$'den n'ye çıkarır.) Karşılıklar açıktır: G integral fonksiyonuna (Tanım 29.1) B_k kısmi toplamı, f' türevine $a_{k+1}-a_k$ ardışık farkı, uçtaki fG terimine ise $a_k B_{k-1}$ karşılık gelir. Bu yüzden Abel toplamına "kısmi toplama" (summation by parts) da denir.

Özdeşliğin bize sağladığı şey şudur: sol taraftaki $\sum a_k b_k$ toplamının küçük olduğunu göstermek için, sağ taraftaki üç terimin de küçük olduğunu göstermek yeter. Sağ tarafta ise b_k'ler yalnızca **kısmi toplamları** B_k üzerinden, a_k'ler ise yalnızca **ardışık farkları** üzerinden görünür. İşte iki temel testin çıkış noktası budur:

- B_k'ler sınırlı, a_k'ler sıfıra monoton gidiyorsa $\to$ **Dirichlet testi**;
- B_k'ler yakınsak, a_k'ler monoton ve sınırlıysa $\to$ **Abel testi**.

40.2 Dirichlet Testi

Dirichlet testinin dikkat çekici yanı, $\sum b_k$ serisinden **yakınsaklık istememesidir**. Kısmi toplamların yalnızca sınırlı kalması yeter; seri pekâlâ ıraksak olabilir. Örneğin $b_k = (-1)^{k+1}$ için $\sum b_k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ serisi ıraksaktır (Teorem 34.2), ama kısmi toplamları yalnızca 0 ile 1 değerlerini alır, yani sınırlıdır. Bu sınırlılık, a_k'lerin sıfıra monoton inişiyle birleşince çarpım serisini yakınsak yapmaya yeter.
Test, Alman matematikçi Peter Gustav Lejeune Dirichlet'nin (1805–1859) ölümünden dört yıl sonra yayımlanmıştır.

Teorem 40.1 (Dirichlet Testi). *$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (B_n) sınırlı olsun; yani her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\mid B_n \mid \leq M$$

olacak biçimde bir $M > 0$ bulunsun. (a_n) dizisi monoton (bkz. Analiz 1) ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olsun. O hâlde

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

serisi yakınsaktır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1:* $(\mid a_n \mid)$ *dizisi azalarak sıfıra gider.*** *(a_n) monoton ve limiti 0'dır. İki durumu ayrı ayrı görelim.*
> *(a_n) azalan olsun. Bir N için $a_N < 0$ olsaydı, azalanlık gereği her $n \geq N$ için $a_n \leq a_N < 0$ olurdu; limitte sıralama korunduğundan $\lim a_n \leq a_N < 0$ çıkardı ve bu $\lim a_n = 0$ ile çelişirdi. Demek ki her n için $a_n \geq 0$'dır ve $\mid a_n \mid = a_n$ azalandır.*
> *(a_n) artan olsun. Simetrik biçimde, bir N için $a_N > 0$ olsaydı her $n \geq N$ için $a_n \geq a_N > 0$ olur ve $\lim a_n \geq a_N > 0$ çıkardı; çelişki. Demek ki her n için $a_n \leq 0$'dır ve $\mid a_n \mid = -a_n$ azalandır.*
> *Her iki durumda da $(\mid a_n \mid)$ azalandır ve $\mid a_n \mid \to 0$'dır. Özellikle $n \geq p$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$|\, a_n \,| \le |\, a_p \,|$$

yazabiliriz.

Adım 2: Monoton dizide ardışık farkların mutlak değerleri teleskopik toplanır. (a_k) *monoton olduğundan bütün* $a_{k+1} - a_k$ *farkları aynı işaretlidir. Bu yüzden* $p+1 \le q$ *için*

$$\sum_{k=p+1}^{q-1} |\, a_{k+1} - a_k \,| = \left| \sum_{k=p+1}^{q-1} \left(a_{k+1} - a_k \right) \right| = |\, a_q - a_{p+1} \,|$$

olur; ortadaki toplam teleskopiktir (Tanım 34.5). Üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) ve Adım 1 gereği

$$|\, a_q - a_{p+1} \,| \le |\, a_q \,| + |\, a_{p+1} \,| \le 2\,|\, a_{p+1} \,|\,.$$

Adım 3: Abel toplamıyla kuyruk toplamını kestirelim. $q > p \ge 1$ *olsun. Lemma 40.1'nı alt indis* $p+1$*, üst indis* q *ile uygulayalım:*

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = a_q B_q - a_{p+1} B_p - \sum_{k=p+1}^{q-1} \left(a_{k+1} - a_k \right) B_k.$$

Üçgen eşitsizliği ve $|\, B_k \,| \le M$ *ile*

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k \right| \le |\, a_q \,|\,|\, B_q \,| + |\, a_{p+1} \,|\,|\, B_p \,| + \sum_{k=p+1}^{q-1} |\, a_{k+1} - a_k \,|\,|\, B_k \,| \le M \left(|\, a_q \,| + |\, a_{p+1} \,| + \sum_{k=p+1}^{q-1} |\, a_{k+1} - a_k \,| \right).$$

Adım 1 ve Adım 2'deki kestirimleri yerleştirelim:

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k \right| \le M \left(|\, a_{p+1} \,| + |\, a_{p+1} \,| + 2\,|\, a_{p+1} \,| \right) = 4M\,|\, a_{p+1} \,|\,.$$

Kısaca: ***kuyruk toplamının büyüklüğü, kuyruğun başındaki*** $|\, a_{p+1} \,|$ ***ile denetlenir.***

Adım 4: Cauchy ölçütü. $\varepsilon > 0$ *verilsin.* $|\, a_n \,| \to 0$ *olduğundan, öyle bir* $N \in \mathbb{N}$ *vardır ki her* $n > N$ *için*

$$|\, a_n \,| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

olur. Şimdi $q > p \ge N$ *olsun. O hâlde* $p+1 > N$ *olduğundan* $|\, a_{p+1} \,| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$*'dir ve Adım 3 gereği*

$$\left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k \right| \le 4M\,|\, a_{p+1} \,| < 4M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Bu tam olarak seriler için Cauchy ölçütünün (Teorem 34.3) istediği koşuldur. Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *serisi yakınsaktır.*

■

> **i** İki hipotez de neyi yapıyor?
>
> İspatın iskeletini bir cümlede özetleyelim: B_k'lerin sınırlılığı, Abel toplamındaki üç terimin her birinde M çarpanını dışarı çıkarmamızı sağlar; (a_k)'nin monotonluğu, ardışık farkların mutlak değer toplamını teleskopik yaparak $2\,|\, a_{p+1} \,|$'e indirger; $a_k \to 0$ ise bu ortak çarpanı istediğimiz kadar küçültür. Üç hipotezden biri kalkarsa zincir kopar — bunun somut bir örneğini Önerme 40.1'nde göreceğiz.

Testi hemen iki örnekte çalıştıralım. İlkinde b_k dizisi periyodik olarak $+1$ ve -1 değerlerini alır; ikincisinde ise kısmi toplamların sınırlılığı bir trigonometrik özdeşlikle elde edilir.

Örnek 40.1 (Kosinüslü Bir Dirichlet Uygulaması).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\ln(k+1)}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz; yakınsaksa mutlak mı yoksa şartlı mı yakınsak olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: Çarpanları ayıralım. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\cos k\pi = (-1)^k$$

olduğundan, seriyi

$$b_k = \cos k\pi = (-1)^k, \qquad a_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$$

çarpanlarına ayırabiliriz. $k \geq 1$ için $\ln(k+1) \geq \ln 2 > 0$ olduğundan a_k tanımlıdır ve pozitiftir.
Adım 2: (B_n) sınırlıdır. Kısmi toplamları yazalım:

$$B_1 = \cos\pi = -1, \qquad B_2 = \cos\pi + \cos 2\pi = -1 + 1 = 0,$$

$$B_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \qquad B_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0,\ldots$$

Genel olarak

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1, & n \text{ tek}, \\ 0, & n \text{ çift}. \end{cases}$$

Demek ki her n için $\mid B_n \mid \leq 1$'dir; kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır ve $M = 1$ alınabilir. (Buna karşın $\sum (-1)^k$ serisi ıraksaktır; Dirichlet testi zaten yakınsaklık istemiyordu.)
Adım 3: (a_k) azalarak sıfıra gider. $\ln$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde kesin artandır; öyleyse $k < k+1$ için $\ln(k+1) < \ln(k+2)$ ve dolayısıyla

$$a_{k+1} = \frac{1}{\ln(k+2)} < \frac{1}{\ln(k+1)} = a_k$$

olur. Yani (a_k) kesin azalandır. Ayrıca $\ln(k+1) \to \infty$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0$$

bulunur.
Adım 4: Sonuç. Teorem 40.1'nin bütün hipotezleri sağlandığından

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\ln(k+1)}$$

serisi yakınsaktır.
Adım 5: Mutlak yakınsak değildir. Terimlerin mutlak değerlerinden kurulan seri

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$$

serisidir. Her $x > 0$ için $\ln(1+x) \leq x$ eşitsizliği geçerlidir (bu, $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$ fonksiyonunun $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ olmasından, yani φ'nin $[0, \infty)$ üzerinde artan olmasından çıkar). $x = k$ alırsak her $k \geq 1$ için

$$\ln(k+1) \leq k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln(k+1)} \geq \frac{1}{k}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Harmonik seri $\sum \frac{1}{k}$ ıraksak olduğundan (Teorem 36.2, $p = 1$), karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $\sum \frac{1}{\ln(k+1)}$ de ıraksaktır.
Demek ki verilen seri **şartlı yakınsaktır**.
■

Şimdi Dirichlet testinin gerçek gücünü gösteren bir örneğe geçelim. Burada $b_k = \sin kx$ alacağız ve kısmi toplamların sınırlılığını bir çarpanlara ayırma özdeşliğiyle kuracağız.

Örnek 40.2 (Sinüs Serisinin Her Noktada Yakınsaklığı). $x \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

serisinin **her** $x \in \mathbb{R}$ için yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: Ayrık durum. Eğer $x = 2m\pi$ biçimindeyse ($m \in \mathbb{Z}$), her k için $\sin kx = \sin(2km\pi) = 0$ olur; seri özdeş olarak sıfırdır ve toplamı 0'dır. Bu durumda yakınsaklık aşikârdır. Bundan sonra $x \neq 2m\pi$, yani $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ varsayalım.
Adım 2: Kısmi toplamlar için kapalı formül. $b_k = \sin kx$ diyelim ve

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

toplamını hesaplayalım. Çarpımı toplama çeviren

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

özdeşliğinde $A = kx$, $B = \frac{x}{2}$ alırsak

$$2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

olur. Bu eşitliği $k = 1, 2, \ldots, n$ için toplayalım; sağ taraf teleskopik olarak sadeleşir:

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \cos \frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

$\sin \frac{x}{2} \neq 0$ olduğundan iki tarafı $2 \sin \frac{x}{2}$'ye bölebiliriz:

$$B_n = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Paydaki farkı çarpanlara ayırmak istersek, $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$ özdeşliğinde $A = \frac{x}{2}$, $B = \left(n + \frac{1}{2}\right)x$ alarak

$$B_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

biçimini elde ederiz.
Adım 3: (B_n) sınırlıdır. İkinci biçimde payda iki sinüs çarpımı vardır ve her ikisinin de mutlak değeri 1'i aşmaz. Öyleyse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$| B_n | \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} =: M.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Burada M, n'den bağımsız bir sayıdır (yalnızca sabitlenmiş x'e bağlıdır); kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır.
Adım 4: Dirichlet testi. $a_k = \dfrac{1}{k}$ dizisi kesin azalandır ve $\dfrac{1}{k} \to 0$'dır. Teorem 40.1 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

serisi yakınsaktır. Adım 1'deki ayrık durumla birleştirince: seri **her** $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.
Adım 5: Yakınsaklık her zaman mutlak değildir. $x = \dfrac{\pi}{2}$ alalım. Bu durumda $\sin \dfrac{k\pi}{2}$ değerleri $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ için sırasıyla $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$'dir. Terimlerin mutlak değerleri toplamı

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k} \right| = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1}$$

olur. Her $j \geq 1$ için $\dfrac{1}{2j-1} \geq \dfrac{1}{2j}$ ve $\sum \dfrac{1}{2j_\pi} = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{j}$ ıraksak olduğundan (Teorem 36.2), karşılaştırma testi gereği bu seri ıraksar. Demek ki $x = \dfrac{\pi}{2}$ için seri şartlı yakınsaktır.
■

Kosinüs serisi için de aynı yöntem

Aynı hesap $b_k = \cos kx$ için de yapılabilir. $2\cos kx \sin \dfrac{x}{2} = \sin\left(\left(k + \dfrac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \dfrac{1}{2}\right)x\right)$ özdeşliğini $k = 1, \ldots, n$ için toplarsak

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

bulunur ve $x \neq 2m\pi$ için $\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}$ olur. Böylece $\sum \dfrac{\cos kx}{k}$ serisi de $x \neq 2m\pi$ olan her x için yakınsaktır. $x = 2m\pi$ noktalarında ise seri harmonik seriye dönüşür ve ıraksar — bu, kısmi toplamların sınırlılığının niçin vazgeçilmez olduğunu gösteren güzel bir örnektir.

40.3 Leibniz Testi: Alterne Seriler

Dirichlet testinin en sık kullanılan özel hâli, b_k'nin sırayla $+1$ ve -1 olduğu durumdur. Bu durumda seri

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

biçimini alır; böyle serilere **alterne seri** (alternating series) denir. Elde edeceğimiz ölçüt, seriler kuramının en kolay uygulanan ve en çok kullanılan testidir.

Tanım 40.2 (Alterne Seri). $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ negatif olmayan terimli bir dizi olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

biçimindeki serilere **alterne seri** denir. ($\sum (-1)^k a_k$ biçimindeki seriler de alternedir; yalnızca işaretçe bunun tersidir.)

Sonuç 40.1 (Leibniz Testi). *$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ negatif olmayan terimli bir dizi olsun. Eğer*

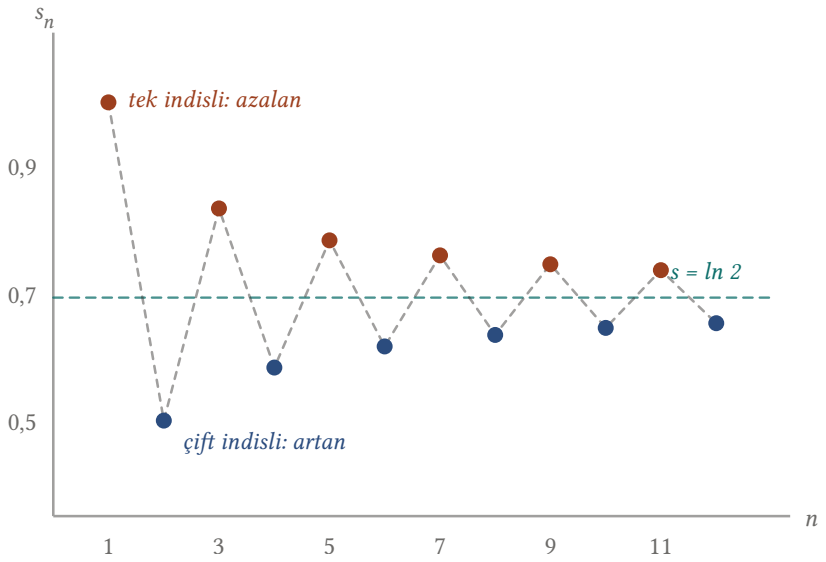
1. *(a_k) azalandır, yani her k için $a_{k+1} \leq a_k$,*
2. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

koşulları sağlanıyorsa

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

alterne serisi yakınsaktır.



Şekil 40.1: Alterne harmonik seri $\Sigma(-1)^{k+1}/k$. Tek indisli kısmi toplamlar azalarak, çift indisliler artarak ilerler; her adımda aradaki uzaklık a_n'e eşittir. İç içe aralıklar limiti sıkıştırır: seri ln 2'ye yakınsar ve n. adımdaki hata a_{n+1}'i geçmez.

İspat.
Birinci ispat (Dirichlet testinden). *Her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$b_k = (-1)^{k+1}$$

diyelim ve $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ yazalım. Toplam, ardışık $+1$ ve -1'lerden oluştuğundan

$$B_n = \begin{cases} 1, & n \text{ tek}, \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$$

olur. Demek ki her n için $|\, B_n \,| \leq 1$'dir; (B_n) sınırlıdır. Öte yandan hipotez gereği (a_k) monotondur (azalandır) ve $a_k \to 0$'dır. Teorem 40.1'nin bütün koşulları sağlanır, dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

serisi yakınsaktır.
İkinci ispat (iç içe aralıklarla, doğrudan). *Bu ispat Dirichlet testini hiç kullanmaz ve bize fazladan bir bilgi verir: serinin toplamının nerede olduğunu.*
$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ kısmi toplamlarını yazalım.
Çift indisli kısmi toplamlar artandır. *Her $n \geq 1$ için*

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+2}a_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$$

olur; son eşitsizlik (a_k)'nin azalan olmasından gelir. Demek ki

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots$$

Tek indisli kısmi toplamlar azalandır. *Her $n \geq 1$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1}a_{2n} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$$

olur; yine azalanlıktan. Demek ki

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots$$

Her çift indisli toplam, her tek indisli toplamın solundadır. *Önce*

$$s_{2n+1} - s_{2n} = (-1)^{2n+2}a_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0,$$

yani $s_{2n} \leq s_{2n+1}$. *Şimdi* $I_n = [s_{2n}, s_{2n+1}]$ *kapalı aralıklarını tanımlayalım. Yukarıdaki üç gözlemden*

$$s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n+3} \leq s_{2n+1}$$

çıkar; yani $I_{n+1} \subseteq I_n$*'dir. Öyleyse* $(I_n)_{n\geq 1}$ *iç içe geçmiş kapalı aralıklardan oluşan bir ailedir ve uzunlukları*

$$|\, I_n \,| = s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$$

koşulunu sağlar.
Sonuç. *İç içe aralıklar teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bütün* I_n*'lerin arakesiti tam olarak bir* s *noktasından oluşur. Her* n *için* $s_{2n}, s_{2n+1} \in I_n$ *ve* $s \in I_n$ *olduğundan*

$$|\, s_{2n} - s \,| \leq |\, I_n \,| = a_{2n+1}, \qquad |\, s_{2n+1} - s \,| \leq |\, I_n \,| = a_{2n+1}$$

olur. $a_{2n+1} \to 0$ *olduğundan sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği*

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$$

bulunur.
Son adım: bu iki alt dizinin ortak limiti, tüm dizinin limitidir. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ *verilsin.* $\lim s_{2n} = s$ *olduğundan bir* N_1 *vardır ki* $2n \geq N_1$ *için* $|\, s_{2n} - s \,| < \varepsilon$*;* $\lim s_{2n+1} = s$ *olduğundan bir* N_2 *vardır ki* $2n+1 \geq N_2$ *için* $|\, s_{2n+1} - s \,| < \varepsilon$*.* $N = \max\{N_1, N_2\}$ *alalım.* $m \geq N$ *olan her* m *ya çifttir ya tektir; her iki hâlde de* $|\, s_m - s \,| < \varepsilon$ *olur. Demek ki* $s_m \to s$*, yani seri yakınsaktır ve toplamı* s*'dir.*
■

İkinci ispat, birinciden daha uzun olmasına karşın çok daha fazlasını söyler: serinin toplamı s, **her** n için $[s_{2n}, s_{2n+1}]$ aralığındadır. Kısmi toplamlar, hedefi bir soldan bir sağdan kuşatarak yaklaşır. Bu geometrik resim, birazdan kuracağımız hata kestiriminin de kaynağıdır.

⚠ Üç koşul da gereklidir

Leibniz testinin hipotezleri şunlardır: terimler negatif olmayan, dizi azalan, limit sıfır. Bunlardan biri düşerse sonuç düşer.

- $a_k \to 0$ olmazsa: $\sum(-1)^{k+1}\dfrac{k}{k+1}$ serisinde $a_k = \dfrac{k}{k+1} \to 1 \neq 0$'dır ve genel terim testi (Teorem 34.2) gereği seri ıraksaktır.
- (a_k) azalan olmazsa: sonuç yine bozulabilir; bunun tam bir örneğini Önerme 40.1'nde kuracağız.
- Testin bir "ıraksaklık testi" olmadığına da dikkat edin: koşullar sağlanmadığında seri hakkında **hiçbir şey** söylenemez; ıraksadığını ancak başka bir gerekçeyle (örneğin genel terim testiyle) gösterebilirsiniz.

Şimdi bölümün açılışında andığımız seriyi tam olarak çözelim.

Örnek 40.3 (Alterne Harmonik Seri).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Verilen seri alterne bir seridir ve özel olarak **alterne harmonik seri** adını taşır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$a_k = \frac{1}{k}$$

alalım.
Koşul 1: negatif olmama. Her $k \geq 1$ için $a_k = \dfrac{1}{k} > 0$'dır.
Koşul 2: azalanlık. $k < k+1$ olduğundan $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k}$, yani $a_{k+1} < a_k$'dır; dizi kesin azalandır.
Koşul 3: sıfıra yakınsama. Arşimet özelliğinin bir sonucu olarak $\dfrac{1}{k} \to 0$'dır (bkz. Analiz 1).
Sonuç 40.1 gereği seri yakınsaktır.
Mutlak yakınsak mıdır? Terimlerin mutlak değerlerinden kurulan seri

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonik seridir ve ıraksaktır (Teorem 36.2, $p = 1$). Demek ki alterne harmonik seri **şartlı yakınsaktır**.
Toplamı. Serinin toplamı $\ln 2 = 0{,}693147\ldots$ sayısıdır; bunu Örnek 40.5'ta ispatlayacağız. Kısmi toplamların ilk birkaçına bakalım:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 0{,}5, \quad s_3 \approx 0{,}8333, \quad s_4 \approx 0{,}5833, \quad s_5 \approx 0{,}7833, \quad s_6 \approx 0{,}6167.$$

Görüldüğü gibi tek indisliler yukarıdan azalarak, çift indisliler aşağıdan artarak $\ln 2$'ye yaklaşıyor; tam da Sonuç 40.1'nin ikinci ispatındaki resim.
■

Örnek 40.4 (Alterne p-Serileri). $p > 0$ bir reel sayı olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^p}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz ve hangi p değerleri için mutlak, hangileri için şartlı yakınsak olduğunu belirleyiniz. $p \leq 0$ durumunda ne olur?

Çözüm.
Adım 1: $p > 0$ için yakınsaklık. $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$ olduğundan seri alternedir. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$a_k = \frac{1}{k^p}$$

alalım. $a_k > 0$'dır. $p > 0$ ve $k < k+1$ olduğundan $k^p < (k+1)^p$, dolayısıyla

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^p} < \frac{1}{k^p} = a_k;$$

dizi kesin azalandır. Ayrıca $p > 0$ için $k^p \to \infty$ olduğundan

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^p} = 0$$

olur. Sonuç 40.1 gereği seri her $p > 0$ için yakınsaktır.
Adım 2: Mutlak yakınsaklık. Terimlerin mutlak değerlerinden kurulan seri

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

yani p-serisidir. Teorem 36.2 gereği bu seri $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır. Öyleyse:

 CC BY-NC-SA 4.0

- $p > 1$ ise seri **mutlak yakınsaktır**;
- $0 < p \leq 1$ ise seri yakınsak ama mutlak yakınsak değildir, yani **şartlı yakınsaktır**.

$p = 1$ özel hâli alterne harmonik seridir (Örnek 40.3).
Adım 3: $p \leq 0$ durumu. Bu durumda genel terimin mutlak değeri

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^p}\right| = k^{-p} = k^{|\,p\,|}$$

olur. $p = 0$ ise bu değer her k için 1'dir; $p < 0$ ise $k^{|\,p\,|} \to \infty$'dur. Her iki hâlde de genel terim sıfıra gitmez, dolayısıyla genel terim testi (Teorem 34.2) gereği seri **ıraksaktır**. Leibniz testinin "$a_k \to 0$" koşulunun niçin gerekli olduğu burada açıkça görülür.
Özet tablosu:

p aralığı	Serinin durumu
$p > 1$	mutlak yakınsak
$0 < p \leq 1$	şartlı yakınsak
$p \leq 0$	ıraksak

■

40.4 Alterne Serilerde Hata Kestirimi

Yakınsaklığı bilmek çoğu zaman yetmez; toplamı **sayısal olarak** hesaplamak isteriz. Bir seriyi bilgisayarla toplarken yapabileceğimiz tek şey ilk n terimi toplamaktır; geri kalanı atarız. Atılan kısım serinin kalanıdır (Tanım 34.3) ve yaptığımız hata tam olarak bu kalanın büyüklüğüdür. Genel serilerde bu hatayı kestirmek zordur; ama alterne serilerde şaşırtıcı derecede kolaydır: **hata, atılan ilk terimi asla aşmaz.**

Teorem 40.2 (Alterne Seriler için Hata Kestirimi). *(a_k) dizisi Sonuç 40.1'nin koşullarını sağlasın: negatif olmayan terimli, azalan ve $a_k \to 0$. Serinin toplamı*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

n-inci kısmi toplamı ise $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ olsun. O hâlde her $n \in \mathbb{N}$ için:

1. $\left|\, s - s_n \,\right| \leq a_{n+1}$;
2. *s sayısı s_n ile s_{n+1} arasındadır (uçlar dâhil);*
3. *$s - s_n$ farkının işareti $(-1)^n$'dir; yani n çiftse $s \geq s_n$, n tekse $s \leq s_n$'dir.*

İspat.
Adım 1: Kalanı yeni bir alterne seri olarak yazalım. *Seri yakınsak olduğundan kalanı*

$$s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

biçiminde yazabiliriz (Tanım 34.3). Toplama indisini $k = n + j$ ile değiştirelim; k, $n+1$'den sonsuza giderken j, 1'den sonsuza gider ve

$$(-1)^{k+1} = (-1)^{n+j+1} = (-1)^n \cdot (-1)^{j+1}$$

olur. Demek ki

$$s - s_n = (-1)^n \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_{n+j} = (-1)^n R_n, \qquad R_n := \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_{n+j}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: R_n yine bir Leibniz serisidir. *$c_j = a_{n+j}$ diyelim. $(c_j)_{j\geq 1}$ dizisi (a_k)'nin bir kuyruğudur: negatif olmayan terimlidir, azalandır ve $j \to \infty$ iken $c_j = a_{n+j} \to 0$'dır. Öyleyse $\sum_j (-1)^{j+1} c_j$ serisi Sonuç 40.1 gereği yakınsaktır ve toplamı R_n'dir.*

Adım 3: $0 \leq R_n \leq a_{n+1}$. *Sonuç 40.1'nin ikinci ispatındaki kuşatma bilgisini (c_j) dizisine uygulayalım. O ispatta, serinin toplamının her m için $[\sigma_{2m}, \sigma_{2m+1}]$ aralığında kaldığını göstermiştik; burada σ_i, $\sum (-1)^{j+1} c_j$ serisinin kısmi toplamlarıdır. $m = 0$ almak için $\sigma_0 = 0$ ve $\sigma_1 = c_1$ olduğunu gözlemleyelim; gerçekten ispattaki eşitsizlik zinciri*

$$\sigma_0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_4 \leq \cdots \leq R_n \leq \cdots \leq \sigma_5 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1$$

biçimindedir ve $\sigma_0 = 0 \leq \sigma_2 = c_1 - c_2$ eşitsizliği (c_j) azalan olduğundan doğrudur. Böylece

$$0 = \sigma_0 \leq R_n \leq \sigma_1 = c_1 = a_{n+1},$$

yani

$$0 \leq R_n \leq a_{n+1}.$$

Adım 4: Üç iddianın çıkarılması.
(1) Adım 1 ve Adım 3'ten

$$\left| \, s - s_n \, \right| = \left| \, (-1)^n R_n \, \right| = R_n \leq a_{n+1}.$$

(3) $s - s_n = (-1)^n R_n$ ve $R_n \geq 0$ olduğundan $s - s_n$ farkının işareti $(-1)^n$'dir: n çiftse $s - s_n \geq 0$, n tekse $s - s_n \leq 0$.
(2) Ardışık kısmi toplamların farkı

$$s_{n+1} - s_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} = (-1)^n a_{n+1}$$

olur. Demek ki $s - s_n = (-1)^n R_n$ ile $s_{n+1} - s_n = (-1)^n a_{n+1}$ aynı işaretlidir ve $0 \leq R_n \leq a_{n+1}$ olduğundan

$$\left| \, s - s_n \, \right| \leq \left| \, s_{n+1} - s_n \, \right|.$$

Aynı yönde ve daha kısa bir adım attığımıza göre s, s_n ile s_{n+1} arasındadır. Açıkça: n çiftse $s_n \leq s \leq s_{n+1}$; n tekse $s_{n+1} \leq s \leq s_n$'dir.
■

Ortalama alarak hatayı yarıya indirmek

Teorem 40.2'nin ikinci maddesi, s'nin s_n ile s_{n+1} arasında, yani uzunluğu a_{n+1} olan bir aralıkta olduğunu söyler. Bir aralıktaki bilinmeyen bir noktaya en iyi tahmin, aralığın **orta noktası**dır. Öyleyse

$$\tilde{s}_n = \frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{(-1)^n a_{n+1}}{2}$$

alırsak

$$\left| \, s - \tilde{s}_n \, \right| \leq \frac{a_{n+1}}{2}$$

olur: aynı sayıda terimle hata yarıya iner. Bedava gibi görünen bu iyileştirme, alterne serilerin sayısal hesabında kullanılan hızlandırma yöntemlerinin en basitidir.

Örnek 40.5 (ln 2 Sayısının Yaklaşık Hesabı). **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ olduğunu gösteriniz.

b) $\ln 2$ sayısını bu seriyle $0{,}001$'den küçük bir hatayla hesaplamak için kaç terim toplamak gerekir?
c) Aynı doğruluğa ortalama alma hilesiyle kaç terimde ulaşılır?

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
a) Sonlu geometrik toplamdan başlayalım. $t \neq -1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-t)^{j} = \frac{1-(-t)^{n}}{1-(-t)} = \frac{1-(-t)^{n}}{1+t}$$

olur (Teorem 34.5'nin ispatında kullanılan sonlu toplam formülü). Bu eşitliği $t \in [0,1]$ üzerinde integre edelim. Sol taraf terim terim integre edilebilir (sonlu toplamdır):

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^{k-1}\, dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{k-1}\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = s_n.$$

Sağ tarafı ikiye ayıralım:

$$\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n}}{1+t}\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n}}{1+t}\, dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^{n}}{1+t}\, dt,$$

çünkü $\dfrac{1}{1+t}$ fonksiyonunun bir ilkeli $\ln(1+t)$'dir ve Newton–Leibniz formülü gereği $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$'dir. Demek ki

$$s_n = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^{n}}{1+t}\, dt.$$

Kalan integrali kestirelim: $t \in [0,1]$ için $1+t \geq 1$ ve $|\,(-t)^{n}\,| = t^{n}$ olduğundan

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n}}{1+t}\, dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{n}}{1+t}\, dt \leq \int_0^1 t^{n}\, dt = \frac{1}{n+1}.$$

$\dfrac{1}{n+1} \to 0$ olduğundan $s_n \to \ln 2$ elde ederiz; yani serinin toplamı $\ln 2$'dir.
Bu hesap, yolda bize Teorem 40.2'ni bağımsız olarak da doğrular: $|\, s_n - \ln 2 \,| \leq \dfrac{1}{n+1} = a_{n+1}$.
b) Teorem 40.2 gereği

$$|\ln 2 - s_n\,| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Hatanın $0{,}001$'den küçük olmasını garanti etmek için

$$\frac{1}{n+1} \leq 0{,}001 = \frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \geq 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 999$$

koşulunu sağlamak yeter. Demek ki **999 terim** toplamak gerekir; yani

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{999}$$

ve bu yaklaşımın hatası $0{,}001$'i geçmez.
c) Ortalama alma hilesiyle hata $\dfrac{a_{n+1}}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}$ ile sınırlıdır. O hâlde

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \geq 500 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 499$$

yeter: **499 terim.** Örnek olarak $n = 8$ için $s_8 \approx 0{,}634524$ ve $s_9 \approx 0{,}745635$ iken ortalamaları $\tilde{s}_8 \approx 0{,}690079$'dur; gerçek değer $\ln 2 \approx 0{,}693147$ olduğuna göre ham kısmi toplamın hatası yaklaşık $0{,}059$, ortalamanınki ise yaklaşık $0{,}003$'tür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Alterne seriler yavaş yakınsar

Üç ondalık basamak için 999 terim gerekmesi, bu yakınsaklığın ne kadar yavaş olduğunu gösterir: bir basamak daha kazanmak için terim sayısını **on katına** çıkarmak gerekir. Şartlı yakınsak seriler tipik olarak böyledir; yakınsaklık, terimlerin küçülmesinden değil, işaretlerin birbirini götürmesinden gelir. Buna karşılık mutlak yakınsak seriler — örneğin $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ — çok daha hızlı yakınsar: orada 0,001 doğruluk için $\dfrac{1}{(n+1)^2} \le 0{,}001$, yani yalnızca $n \ge 31$ yeter.

40.5 Abel Testi

Dirichlet testi $\sum b_k$'den yakınsaklık istemiyor, buna karşılık (a_n)'den sıfıra gitmeyi istiyordu. Abel testi tam tersini yapar: $\sum b_k$'nin yakınsak olmasını ister, karşılığında (a_n)'nin sıfıra gitmesini istemez — monoton ve sınırlı olması yeter. Sezgisel olarak söylediği şudur: **yakınsak bir seriyi, monoton biçimde bir limite oturan sınırlı bir diziyle çarpmak yakınsaklığı bozmaz.**

Teorem 40.3 (Abel Testi). *$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yakınsak, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ise monoton (bkz. Analiz 1) ve sınırlı (bkz. Analiz 1) olsun. O hâlde*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

serisi yakınsaktır.

İspat.
Adım 1: (a_n) yakınsaktır. *(a_n) monoton ve sınırlı olduğundan monoton yakınsaklık teoremi (bkz. Analiz 1) gereği yakınsaktır. Limitine a diyelim:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Adım 2: Ayrıştırma. *Her n için*

$$\alpha_n = a_n - a$$

diyelim. Böylece

$$a_n = \alpha_n + a, \qquad \text{dolayısıyla} \qquad a_n b_n = \alpha_n b_n + a\, b_n$$

olur. Amacımız sağdaki iki serinin de yakınsak olduğunu göstermek.
Adım 3: $\sum \alpha_k b_k$ yakınsaktır (Dirichlet). *(α_n) dizisini inceleyelim.*

- Monotonluk. *(a_n) monotondur; sabit bir sayı çıkarmak monotonluğu değiştirmez, çünkü $\alpha_{n+1} - \alpha_n = a_{n+1} - a_n$'dir. Demek ki (α_n) de (a_n) ile aynı yönde monotondur.*
- Sıfıra yakınsama. *Limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = a - a = 0.$$

Öte yandan $\sum b_k$ yakınsak olduğundan kısmi toplamlar dizisi (B_n) yakınsaktır; yakınsak her dizi sınırlıdır (bkz. Analiz 1), yani $|\, B_n \,| \le M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır.
Böylece (B_n) sınırlı, (α_n) monoton ve sıfıra yakınsak olur; Teorem 40.1 gereği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k$$

serisi yakınsaktır.
Adım 4: $\sum a\, b_k$ yakınsaktır. *$\sum b_k$ yakınsak olduğundan, serilerin cebirsel işlemleri (Teorem 34.4) gereği sabitle çarpılmışı $\sum a\, b_k = a \sum b_k$ de yakınsaktır.*
Adım 5: Toplama. *İki yakınsak serinin terim terim toplamı yakınsaktır (Teorem 34.4). Adım 2'deki ayrıştırmadan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k + a \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

olur ve sağdaki her iki terim de vardır. Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *yakınsaktır.*
■

⚠ Yalnızca sınırlılık yetmez

Abel testinde (a_n)'nin **monoton** olması koşulu atılamaz. Karşı örnek çok kısadır:

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad a_k = (-1)^{k+1}.$$

$\sum b_k$ alterne harmonik seridir ve yakınsaktır (Örnek 40.3). (a_k) dizisi $1, -1, 1, -1, \ldots$ olduğundan sınırlıdır ($|\ a_k\ | = 1$). Ama monoton değildir. Çarpım serisine bakalım:

$$a_k b_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2k+2}}{k} = \frac{1}{k}.$$

Yani $\sum a_k b_k$ harmonik seridir ve ıraksar. Demek ki sınırlı bir diziyle çarpmak, monotonluk olmadan yakınsaklığı koruyamaz.

Örnek 40.6 (Abel Testinin Bir Uygulaması).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{n}{n+1}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: Çarpanları belirleyelim. Serinin genel terimini iki çarpana ayıralım:

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Adım 2: $\sum b_n$ yakınsaktır. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisi alterne harmonik seridir; Örnek 40.3'te Leibniz testiyle yakınsak olduğunu gösterdik.
Adım 3: (a_n) monotondur. a_n'yi yeniden yazalım:

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

n büyüdükçe $\dfrac{1}{n+1}$ küçülür, dolayısıyla a_n büyür. Doğrudan da görülebilir:

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Demek ki (a_n) kesin artandır.
Adım 4: (a_n) sınırlıdır. Her $n \geq 1$ için $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$ olduğundan

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq a_n < 1$$

olur; dizi $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$ aralığında kalır, yani sınırlıdır.
Adım 5: Sonuç. $\sum b_n$ yakınsak, (a_n) monoton ve sınırlı olduğundan Teorem 40.3 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

serisi yakınsaktır.

Bir kontrol. Bu örnekte çarpım sadeleşerek $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ olur; bu da alterne harmonik serinin bir terim kaydırılmışıdır ve doğrudan Leibniz testiyle de yakınsak olduğu görülür (toplamı $1 - \ln 2$'dir). Ama Abel testinin değeri, sadeleşmenin olmadığı durumlarda ortaya çıkar: örneğin $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \arctan n$ serisinde sadeleşme yoktur, buna karşılık $(\arctan n)$ dizisi artan ve $\frac{\pi}{2}$ ile sınırlı olduğundan Abel testi doğrudan yakınsaklığı verir.

■

40.5.1 Üç Testin Karşılaştırması

Elimizdeki üç aracın hipotezlerini yan yana koymakta yarar var. Üçünde de seri $\sum a_k b_k$ biçimindedir.

Test	(b_k) üzerindeki koşul	(a_k) üzerindeki koşul
Dirichlet (Teorem 40.1)	kısmi toplamlar (B_n) sınırlı	monoton ve $a_k \to 0$
Abel (Teorem 40.3)	$\sum b_k$ yakınsak	monoton ve sınırlı
Leibniz (Sonuç 40.1)	$b_k = (-1)^{k+1}$	azalan, negatif olmayan, $a_k \to 0$

Tablodan okunacak üç gözlem:
1. Abel testinin hipotezi b tarafında **daha güçlü**, a tarafında **daha zayıftır**; Dirichlet testinde tam tersi olur. İkisi birbirinin kapsayanı değildir ve bunu elimizdeki iki örnek doğrudan belgeler. Örnek 40.2'nde $x = \frac{\pi}{2}$ alırsak $\sin kx$ değerleri $1, 0, -1, 0, \ldots$ döngüsünü izler ve $\sum_k \sin kx$ serisinin kısmi toplamları $1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots$ olur: sınırlı ama yakınsak değil. Demek ki orada Abel testi işlemez, Dirichlet testi işler. Buna karşılık Örnek 40.6'da $a_n = \frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$ olduğundan Dirichlet testinin "$a_n \to 0$" koşulu sağlanmaz; orada da Abel testi işler, Dirichlet testi işlemez.
2. Leibniz testi, Dirichlet testinin en özel hâlidir: $b_k = (-1)^{k+1}$ seçimiyle $\mid B_n \mid \leq 1$ garanti edilir.
3. Her üç testte de (a_k)'nin **monotonluğu** ortaktır ve bu koşul hiçbirinde atılamaz. Bunu şimdi kesin biçimde belgeleyelim.

40.6 Monotonluk Koşulundan Vazgeçilemez

Leibniz testi bazen yanlış hatırlanır: "terimleri sıfıra giden alterne bir seri yakınsar." Bu **yanlıştır.** Azalanlık koşulu atıldığında sonuç çöker ve bunu somut bir seriyle göstermek zor değildir. Fikir şudur: pozitif terimleri kalın, negatif terimleri ince seçeriz; işaretlerin birbirini götürme etkisi zayıflar ve pozitif terimlerin ıraksaklığı baskın gelir.

Önerme 40.1 (Monotonluk Olmadan Leibniz Testi Çöker). *Negatif olmayan terimli, $a_k \to 0$ koşulunu sağlayan ama **azalan olmayan** öyle bir (a_k) dizisi vardır ki*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

alterne serisi ıraksaktır.

İspat.
Adım 1: Diziyi kuralım. *Her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & k \text{ tek}, \\ \frac{1}{k^2}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

tanımını yapalım. Serinin ilk terimleri şöyledir:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{6^2} + \cdots$$

Adım 2: Terimler negatif değildir ve sıfıra gider. *Açıkça her k için $a_k > 0$'dır. Sıfıra gitmeyi görmek için $\varepsilon > 0$ verilsin. $\frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ ve $\frac{1}{k^2} \to 0$ olduğundan, öyle bir N vardır ki $k \geq N$ için hem $\frac{1}{\sqrt{k}} < \varepsilon$ hem $\frac{1}{k^2} < \varepsilon$ olur. k tek de olsa çift de olsa a_k bu iki sayıdan biridir; öyleyse $k \geq N$ için $a_k < \varepsilon$'dur. Demek ki $a_k \to 0$'dır.*

Adım 3: Dizi azalan değildir. *$a_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ ve $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$ olduğundan*

$$a_3 > a_2$$

olur; azalanlık daha üçüncü adımda bozulur. Aslında her $j \geq 1$ için $a_{2j+1} > a_{2j}$'dir: gerçekten $\frac{1}{\sqrt{2j+1}}$ ile $\frac{1}{(2j)^2}$'yi karşılaştırmak $(2j)^2$ ile $\sqrt{2j+1}$'i karşılaştırmaktır ve $j \geq 1$ için $(2j)^2 = 4j^2 > \sqrt{2j+1}$'dir (çünkü $4j^2 \geq 4j \geq 2j+2 > 2j+1 \geq \sqrt{2j+1}$; son eşitsizlik $2j+1 \geq 1$ olmasından çıkar).

Adım 4: Çift indisli kısmi toplamlar sonsuza gider. *Serinin kısmi toplamlarını s_n ile gösterelim. Çift indisli olanları terimleri ikişerli gruplayarak yazalım:*

$$s_{2n} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{2j-1} - a_{2j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2j-1}} - \frac{1}{(2j)^2} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2j-1}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j)^2}.$$

Sağdaki iki toplamı ayrı ayrı inceleyelim.

İkinci toplam yakınsaktır. *Her j için $\frac{1}{(2j)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{j^2}$ olduğundan*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

serisi yakınsaktır (Teorem 36.2, $p = 2 > 1$). Kısmi toplamları bir C sayısına yakınsar; özellikle her n için $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j)^2} \leq C$'dir.

Birinci toplam sonsuza gider. *Her $j \geq 1$ için $2j - 1 \leq 2j$, dolayısıyla*

$$\frac{1}{\sqrt{2j-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2j}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{j}}$$

olur. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1/2}}$ serisi $p = \frac{1}{2} \leq 1$ olduğundan ıraksaktır (Teorem 36.2). Buradan $\sum_j \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{j}}$ serisinin de ıraksadığı çıkar; yakınsak olsaydı $\sqrt{2}$ ile çarpılmışı olan $\sum_j \frac{1}{\sqrt{j}}$ de yakınsak olurdu (Teorem 34.4). Küçük olan seri ıraksadığından, karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2j-1}}$ serisi de ıraksaktır. Bu seri negatif olmayan terimlidir; negatif olmayan terimli bir serinin ıraksaması, kısmi toplamlarının üstten sınırsız olması demektir (Teorem 35.1) ve artan sınırsız bir dizi $+\infty$'a gider (bkz. Analiz 1). Öyleyse

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2j-1}} \to +\infty.$$

Birleştirme. *Öyleyse*

$$s_{2n} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2j-1}} - C \to +\infty,$$

yani $s_{2n} \to +\infty$'dur.

Adım 5: Sonuç. *(s_n) dizisinin bir alt dizisi olan (s_{2n}) sınırsız olduğundan (s_n) de sınırsızdır; sınırsız bir dizi yakınsak olamaz (bkz. Analiz 1). Demek ki $\sum (-1)^{k+1} a_k$ serisi ıraksaktır.*

■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Yanlış hatırlanan Leibniz testi

Önerme 40.1, "alterne + genel terim sıfıra gidiyor ⇒ yakınsak" biçimindeki yaygın yanlışı kesin olarak çürütür. Aynı örnek, Teorem 40.1'ndeki monotonluk koşulunun da atılamayacağını gösterir: orada $b_k = (-1)^{k+1}$ alındığında kısmi toplamlar sınırlıdır ve $a_k \to 0$'dır; eksik olan tek şey monotonluktur ve seri ıraksar.
Bir alterne seriyle karşılaştığınızda izlenecek yol şudur:
1. Genel terim sıfıra gidiyor mu? Gitmiyorsa seri ıraksar (Teorem 34.2); iş biter.
2. (a_k) **azalan mı?** Bunu kanıtlamadan Leibniz testini kullanmayın. Azalanlığı göstermenin pratik yolu ya $a_{k+1} - a_k \le 0$ hesabı ya da $a_k = f(k)$ yazıp $f' \le 0$ olduğunu göstermektir (Teorem 8.2'in bir sonucu olarak türevi negatif olan fonksiyon azalandır).
3. Azalanlık sağlanmıyorsa seri hâlâ yakınsak olabilir; o zaman terimleri ayrıştırıp her parçayı ayrı incelemek gerekir.

40.7 Alıştırmalar

Alıştırma 40.1 (Abel, Dirichlet ve Leibniz Testleri Üzerine).

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \arctan k}{k}$ serisinin yakınsak olduğunu Abel testiyle gösteriniz.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{k\pi}{3}}{k}$ serisinin yakınsak olduğunu Dirichlet testiyle gösteriniz.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz; mutlak mı şartlı mı yakınsaktır?

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ serisinin toplamını 10^{-2}'den küçük bir hatayla hesaplamak için kaç terim yeter?

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{\sqrt{k}}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$ serisinin **ıraksak** olduğunu gösteriniz. (Genel terimin mutlak değeri sıfıra gider, ama Leibniz testi doğrudan uygulanamaz; nedenini de açıklayınız.)

Çözüm.
a) $b_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ ve $a_k = \arctan k$ alalım.
$\sum b_k$ alterne harmonik seridir ve yakınsaktır (Örnek 40.3).
(a_k) monotondur: arctan fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artandır (türevi $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$'dır), dolayısıyla $k < k+1$ için $\arctan k < \arctan(k+1)$ olur.
(a_k) sınırlıdır: her $x \in \mathbb{R}$ için $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan, özellikle $k \ge 1$ için

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \le \arctan k < \frac{\pi}{2}$$

yazılır.
Teorem 40.3 gereği $\sum a_k b_k = \sum \dfrac{(-1)^{k+1} \arctan k}{k}$ serisi yakınsaktır.
Ek olarak bu yakınsaklık şartlıdır: $\left|\dfrac{(-1)^{k+1} \arctan k}{k}\right| = \dfrac{\arctan k}{k} \ge \dfrac{\pi/4}{k}$ ve $\sum \dfrac{1}{k}$ ıraksak olduğundan (Teorem 36.2), karşılaştırma testiyle (Teorem 35.2) mutlak değerler serisi ıraksar.
b) $b_k = \cos \dfrac{k\pi}{3}$ ve $a_k = \dfrac{1}{k}$ alalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

(b_k) dizisi 6 periyotludur: $b_{k+6} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{3} + 2\pi\right) = b_k$. Bir periyot boyunca toplamı hesaplayalım:

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\pi + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} + \cos 2\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

Öyleyse $B_6 = 0$'dır ve periyodiklik nedeniyle her n için $B_{n+6} = B_n + B_6 = B_n$ olur; yani (B_n) dizisi de 6 periyotludur. Bir dizinin yalnızca sonlu sayıda farklı değer alması onun sınırlı olması demektir:

$$|\, B_n \,| \le \max\left\{\, |\, B_1 \,|, |\, B_2 \,|, |\, B_3 \,|, |\, B_4 \,|, |\, B_5 \,|, |\, B_6 \,|\, \right\}.$$

Bu değerleri hesaplarsak $B_1 = \dfrac{1}{2}$, $B_2 = 0$, $B_3 = -1$, $B_4 = -\dfrac{3}{2}$, $B_5 = -1$, $B_6 = 0$ bulunur; demek ki her n için $|\, B_n \,| \le \dfrac{3}{2}$'dir.

$a_k = \dfrac{1}{k}$ kesin azalandır ve sıfıra yakınsar. Teorem 40.1 gereği seri yakınsaktır.

(Aynı sonuca Örnek 40.2'nin ardındaki kosinüs formülüyle de varılır: $x = \dfrac{\pi}{3}$ için $\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \le \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|} = 2$.)

c) $a_k = \dfrac{k}{k^2+1}$ alalım; seri $\sum(-1)^{k+1}a_k$ biçiminde alternedir.

Negatif değildir: $k \ge 1$ için $a_k > 0$.

Azalandır: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ fonksiyonunu düşünelim. Bölüm kuralıyla

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$x \ge 1$ için $1 - x^2 \le 0$ olduğundan $f'(x) \le 0$'dır; öyleyse f, $[1,\infty)$ üzerinde azalandır (Teorem 8.2'in bir sonucu) ve her $k \ge 1$ için $a_{k+1} = f(k+1) \le f(k) = a_k$ olur.

Sıfıra gider: $a_k = \dfrac{k}{k^2+1} = \dfrac{1/k}{1+1/k^2} \to \dfrac{0}{1} = 0$ (bkz. Analiz 1).

Sonuç 40.1 gereği seri yakınsaktır.

Mutlak yakınsak değildir: $k \ge 1$ için $k^2 + 1 \le 2k^2$ olduğundan

$$a_k = \frac{k}{k^2+1} \ge \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k}$$

olur. $\sum \dfrac{1}{2k}$ ıraksaktır (Teorem 36.2), dolayısıyla Teorem 35.2 gereği $\sum a_k$ ıraksar. Seri **şartlı yakınsaktır**.

d) $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ dizisi pozitif, azalan ve sıfıra yakınsaktır; Teorem 40.2 uygulanabilir:

$$\left|\, s - s_n \,\right| \le a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Hatanın 10^{-2}'den küçük olması için

$$\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{100} \quad\Leftrightarrow\quad (n+1)^2 \ge 100 \quad\Leftrightarrow\quad n+1 \ge 10 \quad\Leftrightarrow\quad n \ge 9$$

yeter. Demek ki **9 terim** yeterlidir:

$$s_9 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} \approx 0{,}8280.$$

(Serinin gerçek toplamı $\dfrac{\pi^2}{12} \approx 0{,}8225$'tir; hata yaklaşık $0{,}0055 < 0{,}01$'dir.) Bu seri, alterne harmonik seriyle karşılaştırıldığında çok daha hızlı yakınsar: orada aynı doğruluk için 99 terim gerekirdi.

e) Genel terime bakalım: $a_k = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$. Bu dizinin limiti e sayısıdır (bkz. Analiz 1):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \approx 2{,}718.$$

Öyleyse serinin genel terimi $(-1)^{k+1}a_k$ sıfıra yakınsamaz: çift indislerde $-e$'ye, tek indislerde $+e$'ye yaklaşır. Genel terim testi (Teorem 34.2) gereği seri **ıraksaktır**.
Bu örnek Leibniz testinin "$a_k \to 0$" koşulunun vazgeçilmezliğini gösterir: (a_k) burada monotondur (artandır) ve sınırlıdır, ama sıfıra gitmediği için test uygulanamaz — ve gerçekten seri ıraksar.
f) $b_k = \sin k$, $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ alalım. Bu, Örnek 40.2'ndeki durumun $x = 1$ hâlidir.
$1 \neq 2m\pi$ olduğundan $\sin\dfrac{1}{2} \neq 0$'dır ve orada kurduğumuz formül gereği

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}}{\sin\dfrac{1}{2}}, \qquad |\,B_n\,| \le \frac{1}{\left|\sin\dfrac{1}{2}\right|} \approx 2{,}086.$$

Demek ki (B_n) sınırlıdır.
$a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ dizisi kesin azalandır ($\sqrt{\cdot}$ artan olduğundan) ve $\sqrt{k} \to \infty$ olduğundan $a_k \to 0$'dır.
Teorem 40.1 gereği $\sum \dfrac{\sin k}{\sqrt{k}}$ serisi yakınsaktır.
g) Genel terimi rasyonelleştirerek ayrıştıralım. $k \ge 2$ için paydayı eşleniğiyle çarpalım:

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k} = \frac{(-1)^k\left(\sqrt{k}-(-1)^k\right)}{\left(\sqrt{k}+(-1)^k\right)\left(\sqrt{k}-(-1)^k\right)} = \frac{(-1)^k\sqrt{k}-(-1)^{2k}}{k-1} = \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k-1} - \frac{1}{k-1}.$$

(Payda $k-1 \neq 0$'dır, çünkü $k \ge 2$.) Demek ki genel terim, iki dizinin farkıdır. Bu iki seriyi ayrı ayrı inceleyelim.
Birinci seri yakınsaktır. $c_k = \dfrac{\sqrt{k}}{k-1}$ diyelim ve $\sum_{k\ge2}(-1)^k c_k$ serisine bakalım. $c_k > 0$'dır. Azalanlığı görmek için $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ fonksiyonunun $x > 1$ üzerindeki türevini hesaplayalım:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-2x}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2} = \frac{-(x+1)}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2} < 0.$$

Öyleyse g azalandır ve $(c_k)_{k\ge2}$ azalan bir dizidir. Ayrıca

$$c_k = \frac{\sqrt{k}}{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{k}{k-1} \to 0\cdot 1 = 0$$

olur (bkz. Analiz 1). Sonuç 40.1 gereği $\sum_{k\ge2}(-1)^k c_k$ yakınsaktır.
İkinci seri ıraksaktır. $\sum_{k\ge2}\dfrac{1}{k-1} = \sum_{j\ge1}\dfrac{1}{j}$ harmonik seridir ve ıraksar (Teorem 36.2).
Sonuç. Verilen seri yakınsak olsaydı, yakınsak olan $\sum(-1)^k c_k$ serisinden onu çıkararak (Teorem 34.4)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k c_k - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$$

serisinin de yakınsak olması gerekirdi; oysa ıraksaktır. Çelişki. Demek ki verilen seri **ıraksaktır**.
Niçin Leibniz testi işe yaramadı? Genel terimin mutlak değeri $\dfrac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k}$'dir ve sıfıra gider; ama azalan değildir. Gerçekten

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \approx 0{,}414, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}-1} \approx 1{,}366$$

olduğundan $k = 2$'den $k = 3$'e geçerken terim büyür. Önerme 40.1'nde kurduğumuz tuzağın bir başka yüzüdür bu.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümde tek bir cebirsel özdeşlikten — Abel toplamından — yola çıkarak şartlı yakınsak serileri de yakalayabilen üç test elde ettik ve alterne serilerin toplamını istediğimiz doğrulukta hesaplamayı öğrendik. Şimdi rahatsız edici bir soruyla yüzleşme zamanı: şartlı yakınsak bir serinin terimlerinin sırasını değiştirirsek toplamı değişir mi? Yanıt, sonlu toplamlarla kurduğumuz bütün sezgileri sarsacak türden: Serilerin Yeniden Düzenlenmesi ve Gruplanması.

 CC BY-NC-SA 4.0

41. Serilerin Yeniden Düzenlenmesi ve Gruplanması

Abel, Dirichlet ve Leibniz Testleri bölümünde işareti değişen serileri incelemeyi öğrendik ve alterne harmonik seri $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$'nın yakınsak, buna karşın mutlak yakınsak olmadığını gördük. Yani bu seri **şartlı yakınsaktır**. O bölümde bu ayrımı yalnızca bir sınıflandırma olarak kaydetmiştik; şimdi ayrımın, sonlu toplamlardan alışkın olduğumuz en temel cebirsel yasalardan birini — **toplamada yer değiştirme yasasını** — doğrudan tehdit ettiğini göreceğiz.

Sonlu bir toplamda terimlerin sırasını değiştirmek toplamı değiştirmez. Sonsuz bir seri ise bir toplam değil, bir **limittir**: kısmi toplamlar dizisinin limiti (Tanım 34.2). Terimlerin sırasını değiştirdiğimizde kısmi toplamlar dizisinin kendisi kökten değişir; limitinin aynı kalması için hiçbir apaçık neden yoktur. Nitekim kalmaz da. Bu bölümün en çarpıcı sonucu, şartlı yakınsak bir serinin terimlerini uygun biçimde sıralayarak **önceden seçilmiş herhangi bir gerçel sayıya**, hatta $+\infty$ ya da $-\infty$'a yakınsatabileceğimizi söyleyen Riemann teoremidir.

Terimlerin sırasıyla oynamanın iki farklı biçimini özenle ayırmamız gerekir. Birincisi **yeniden düzenleme** (rearrangement): sırayı bir bijeksiyonla karıştırırız, ama hiçbir terimi ne atarız ne de tekrarlarız. İkincisi **gruplama** (regrouping): sırayı hiç bozmadan ardışık terimleri parantezlere alırız. İkinci işlem birincisinden çok daha zararsızdır; çünkü göreceğimiz gibi gruplama, kısmi toplamlar dizisinin bir **alt dizisini** almaktan başka bir şey değildir.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: yeniden düzenlemenin tam tanımı; mutlak yakınsaklığın her yeniden düzenlemeyi güvenceye aldığını söyleyen **Dirichlet teoremi**; şartlı yakınsak bir seride toplamın nasıl değişebildiğini gösteren somut alterne harmonik hesabı; şartlı yakınsaklığın tam anlamıyla ne kadar kırılgan olduğunu ortaya koyan **Riemann yeniden düzenleme teoremi** ve onun tam ispatı; gruplamanın tanımı ile yakınsak serilerde gruplamanın toplamı korduğunu söyleyen teorem; bunun tersinin neden yanlış olduğu; ve son olarak iki serinin **Cauchy çarpımı** — yeniden düzenleme ile gruplamanın birlikte kullanıldığı en güzel uygulama.

41.1 Yeniden Düzenleme Kavramı

Bir serinin terimlerini "karıştırmak" ne demektir? Sezgi açıktır: aynı sayıları farklı bir sırayla toplarız. Bunu kesinleştirmenin yolu, indisler kümesi $\mathbb{N}$ üzerinde bir bijeksiyon (bkz. Analiz 1) kullanmaktır. Bijeksiyon, hiçbir terimin atlanmamasını (örtenlik) ve hiçbir terimin iki kez kullanılmamasını (birebirlik) aynı anda garanti eder.

Tanım 41.1 (Yeniden Düzenleme). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bir seri (Tanım 34.1) ve $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektif bir fonksiyon olsun. Genel terimi $a_{f(k)}$ olan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$$

serisine, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin **bir yeniden düzenlemesi** (rearrangement) denir.

Buradaki fikir basittir: verilen serinin terimlerinin toplanma sırasını değiştiriyoruz. f bijektif olduğundan, $\sum a_k$ serisinin her terimi yeni seride bir ve yalnız bir kez görünür; yeni serinin her terimi de eski serinin bir terimidir. Değişen tek şey **sıradır**. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye sonsuz çoklukta bijeksiyon bulunduğundan, herhangi bir serinin sonsuz çoklukta yeniden düzenlemesi vardır.

Örneğin $f(2k-1) = 2k$, $f(2k) = 2k-1$ alırsak (bu f kendi kendisinin tersidir, dolayısıyla bijektiftir) ardışık terim çiftleri yer değiştirir:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \quad \text{serisinin bir düzenlemesi} \quad a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \cdots$$

 CC BY-NC-SA 4.0

serisidir. Somut olarak $a_k = \frac{1}{k}$ için $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ serisinin düzenlemesi $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \cdots$ olur; terimler tıpatıp aynıdır, yalnızca toplanma sırası değişmiştir.

> **i** Yeniden düzenleme ile alt seri karıştırılmamalı
>
> f'nin **bijektif** olması şarttır. Örneğin $f(k) = 2k$ alırsak elde edilen $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$ ifadesi $\sum a_k$'nın bir yeniden düzenlemesi **değildir**; tek indisli bütün terimler atılmıştır. Böyle bir seriye alt seri denir ve toplamının özgün seriyle bir ilgisi olmak zorunda değildir. Aynı biçimde f birebir olmasaydı bazı terimler birden çok kez toplanırdı.

Şimdi asıl soruyu sorabiliriz: $\sum a_k$ yakınsak ve toplamı A ise, $\sum a_{f(k)}$ de yakınsak mıdır? Yakınsaksa toplamı yine A mıdır? İlk yanıt olumludur, ama yalnızca **mutlak yakınsaklık** varsayımı altında.

41.2 Dirichlet Teoremi

Mutlak yakınsak bir seride terimlerin mutlak değerlerinin toplamı sonludur; bu, "serinin kuyruğunda kalan bütün terimlerin toplam ağırlığının küçük olduğu" anlamına gelir. Sıra karıştırıldığında bir terim yerinden çok uzağa gidebilir; ama gittiği yerde yapabileceği hasar, kendi mutlak değeriyle sınırlıdır. Kuyruğun toplam mutlak ağırlığı $\varepsilon/2$'den küçükse, karıştırma sonucunda oluşan bütün sapmaların toplamı da $\varepsilon/2$'yi geçemez. İspatın tamamı bu tek fikrin dikkatli bir muhasebesidir.

Teorem 41.1 (Dirichlet Teoremi). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi mutlak yakınsak ve toplamı A olsun. O hâlde bu serinin **her** $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ yeniden düzenlemesi de yakınsaktır ve toplamı yine A'dır:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

İspat.
$\sum a_k$ serisinin n'inci kısmi toplamını $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, yeniden düzenlenmiş serinin n'inci kısmi toplamını ise

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}$$

ile gösterelim. Varsayımdan $\lim_{n\to\infty} s_n = A$'dır. Göstermemiz gereken, $\lim_{n\to\infty} t_n = A$ olduğudur.
***Adım 1: Mutlak değerler serisinin kuyruğunu küçültelim.** $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |$ serisi yakınsak olduğundan, kalanları (Tanım 34.3) sıfıra gider. Öyleyse öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} | a_k | < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Bunu bir kez kullanarak s_N'nin A'ya ne kadar yakın olduğunu ölçelim. $A - s_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ olduğundan, üçgen eşitsizliğinin seriler için hâli (üçgen eşitsizliğinin kısmi toplamlara uygulanıp limite geçilmiş biçimi) gereği

$$| s_N - A | = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \right| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} | a_k | < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

***Adım 2: İlk N terimi yakalayan bir indis seçelim.** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektif olduğundan tersi f^{-1} vardır (bkz. Analiz 1) ve*

$$K = \max\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(N)\}$$

sayısı iyi tanımlıdır (sonlu bir kümenin maksimumudur). Bu seçimin anlamı şudur: her $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ için $f^{-1}(j) \le K$, yani $j = f\left(\, f^{-1}(j) \,\right)$ sayısı $\{f(1), f(2), \ldots, f(K)\}$ kümesinde bulunur. Kısacası

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{f(1), f(2), \ldots, f(K)\}$$

olur. Ayrıca $f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(N)$ sayıları f^{-1} birebir olduğundan birbirinden farklı N tane doğal sayıdır; N tane farklı doğal sayının en büyüğü en az N olacağından $K \geq N$'dir.
Adım 3: $t_n - s_N$ farkının hangi terimlerden oluştuğunu görelim. *Artık $n \geq K$ olsun ve*

$$t_n - s_N = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} - \sum_{j=1}^{N} a_j$$

*farkına bakalım. Adım 2'ye göre $\{1, \ldots, N\} \subseteq \{f(1), \ldots, f(K)\} \subseteq \{f(1), \ldots, f(n)\}$'dir; üstelik f birebir olduğundan $j = 1, \ldots, N$ indislerinin her biri $f(1), \ldots, f(n)$ listesinde **tam olarak bir kez** görünür. Dolayısıyla $\sum_{j=1}^{N} a_j$ toplamındaki her terim $\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}$ içinde birebir karşılığını bulup sadeleşir; geriye yalnızca indisi N'den büyük olan terimler kalır:*

$$t_n - s_N = \sum_{k \in E_n} a_{f(k)}, \qquad E_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n \ \text{ ve } \ f(k) > N\}.$$

Adım 4: Kalan terimleri kestirelim. *f birebir olduğundan, k değişkeni E_n üzerinde dolaşırken $f(k)$ değerleri birbirinden farklı ve hepsi N'den büyük doğal sayılardır. Öyleyse*

$$| \, t_n - s_N \, | = \left| \sum_{k \in E_n} a_{f(k)} \right| \leq \sum_{k \in E_n} | \, a_{f(k)} \, | \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} | \, a_j \, | < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur; ortadaki eşitsizlik, solda toplanan sonlu sayıdaki $| \, a_j \, |$ teriminin hepsinin sağdaki serinin (negatif olmayan terimli, dolayısıyla kısmi toplamları artan) terimleri arasında bulunmasından gelir.
Adım 5: Birleştirelim. *Her $n \geq K$ için, üçgen eşitsizliği ile (1)'i birleştirdiğimizde*

$$| \, t_n - A \, | \leq | \, t_n - s_N \, | + | \, s_N - A \, | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ keyfî olduğundan $\lim_{n \to \infty} t_n = A$'dır. Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ serisi yakınsaktır ve toplamı A'dır.
■

İspatta f'nin bijektifliği iki ayrı iş için kullanıldı: **örtenlik** Adım 2'de ($f^{-1}(j)$'lerin var olması, yani hiçbir terimin atlanmamış olması), **birebirlik** ise Adım 3 ve 4'te (terimlerin tam olarak bir kez sadeleşmesi ve $| \, a_{f(k)} \, |$ toplamının kuyruğu aşmaması). Teoremin karşıt tersini (contrapositive) almak, bir serinin mutlak yakınsak **olmadığını** göstermenin pratik bir yolunu verir.

Sonuç 41.1 (Düzenlemeyle Mutlak Yakınsaklığın Reddi). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bir seri olsun.*
a) $\sum a_k$'nın yakınsak olmayan bir yeniden düzenlemesi varsa, $\sum a_k$ mutlak yakınsak değildir.
b) $\sum a_k$'nın iki farklı sayıya yakınsayan en az iki yeniden düzenlemesi varsa, $\sum a_k$ mutlak yakınsak değildir.

İspat.
*Her iki şıkta da karşıt tersini alıyoruz. $\sum a_k$ mutlak yakınsak olsaydı, Teorem 41.1 gereği **bütün** yeniden düzenlemeleri yakınsak olur ve hepsinin toplamı aynı A sayısına eşit olurdu.*
(a) *Bu, yakınsak olmayan bir düzenlemenin varlığıyla çelişir.*
(b) *Bu, iki düzenlemenin iki **farklı** sayıya yakınsamasıyla çelişir.*
Her iki durumda da $\sum a_k$ mutlak yakınsak değildir.
■

⚠ Mutlak yakınsaklık koşulu atılamaz

Teorem 41.1'deki mutlak yakınsaklık varsayımı bir süs değildir; bütün yeniden düzenlemelerin **aynı** sayıya yakınsamasını sağlayan tam olarak odur. Seri yalnızca **şartlı yakınsak** ise yeniden düzenlemenin limiti pekâlâ değişebilir. Bir sonraki örnek bunu somut bir hesapla gösterecek, ondan sonraki teorem ise durumun düşünülebilecek en uç noktada olduğunu ortaya koyacaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

41.3 Şartlı Yakınsak Bir Seride Toplam Nasıl Değişir?

Şimdi alterne harmonik seriyi ele alalım. Bu serinin yakınsak olduğunu Leibniz testinden (Sonuç 40.1) biliyoruz; mutlak değerlerinden oluşan harmonik seri $\sum \frac{1}{k}$ ise ıraksaktır (Teorem 36.2, $p=1$). Öyleyse alterne harmonik seri şartlı yakınsaktır ve Teorem 41.1'nin koruması altında **değildir**. Terimlerini yeniden dizerek toplamını tam yarısına düşürebileceğimizi göreceğiz.

Örnek 41.1 (Alterne Harmonik Serinin Toplamı Yarıya İnen Bir Düzenlemesi).

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots$$

olsun. Bu serinin terimleri, her tek indisli terimden sonra iki çift indisli terim gelecek biçimde

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

sırasıyla dizilsin. Bu yeni serinin yakınsak olduğunu ve toplamının $\frac{s}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: Kurulan sıra gerçekten bir yeniden düzenlemedir. Yeni seride terimler üçerli bloklar hâlindedir; k'inci blok

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}$$

terimlerinden oluşur ($k=1$ için $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $k=2$ için $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$, $k=3$ için $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$). Kullanılan indislere bakalım: $k\in\mathbb{N}$ dolaştıkça $2k-1$ bütün tek sayıları, $4k-2$ dörde bölündüğünde 2 kalanını veren bütün sayıları ($2,6,10,\ldots$), $4k$ ise 4'ün bütün katlarını ($4,8,12,\ldots$) birer kez verir. Her doğal sayı bu üç sınıftan tam olarak birine girdiğinden, özgün serinin her terimi yeni sırada **tam olarak bir kez** görünür; yani yeni seri Tanım 41.1 anlamında bir yeniden düzenlemedir.
Adım 2: Üçerli blokların toplamını hesaplayalım. k'inci bloğun ilk iki terimini birleştirelim. $4k-2=2(2k-1)$ olduğundan

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}=\frac{2-1}{2(2k-1)}=\frac{1}{4k-2}.$$

Buna üçüncü terimi de eklersek k'inci bloğun toplamı

$$\beta_k=\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

olur; son eşitlikte her iki paydadan 2 çarpanı ayrılmıştır. Böylece bloklar toplandığında

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

serisi ortaya çıkar.
Adım 3: Blokların kısmi toplamları. s_n ile özgün alterne harmonik serinin kısmi toplamlarını, t_n ile yeni serinin kısmi toplamlarını gösterelim. m blok toplandığında $3m$ terim kullanılmış olacağından

$$t_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\beta_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\,s_{2m}$$

elde ederiz; çünkü $\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ toplamı, alterne harmonik serinin ilk $2m$ teriminin toplamından başka bir şey değildir. $s_{2m}\to s$ olduğundan, alt dizilerin limiti (bkz. Analiz 1) gereği

$$\lim_{m\to\infty}t_{3m}=\frac{s}{2}$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 4: Ara kısmi toplamlar da aynı limite gider. Burada dikkatli olmak gerekir: (t_{3m}) dizisinin $\frac{s}{2}$'ye yakınsaması, tek başına (t_n) dizisinin yakınsak olduğu anlamına gelmez; bir alt dizinin yakınsaması dizinin yakınsamasını gerektirmez. Eksik kalan iki durumu tamamlayalım:

$$t_{3m+1} = t_{3m} + \frac{1}{2m+1}, \qquad t_{3m+2} = t_{3m+1} - \frac{1}{4m+2}.$$

Eklenen terimler sıfıra gittiğinden (bkz. Analiz 1) limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği $t_{3m+1} \to \frac{s}{2}$ ve $t_{3m+2} \to \frac{s}{2}$ olur. (t_n) dizisinin indisleri $3m$, $3m+1$, $3m+2$ biçimindeki üç alt diziye tam olarak ayrıldığından ve üçü de aynı limite yakınsadığından, (t_n) dizisinin kendisi $\frac{s}{2}$'ye yakınsar (verilen $\varepsilon > 0$ için üç eşiğin en büyüğünü almak yeter).
Adım 5: Sonuç. Yeni seri yakınsaktır ve

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{s}{2}$$

olur. Alterne harmonik serinin toplamı $s > 0$ olduğundan $\frac{s}{2} \neq s$'dir. Demek ki yeniden düzenlenmiş seri yakınsak olduğu hâlde toplamı özgün seriyle **aynı değildir**. Sonuç 41.1 (b) gereği bu, alterne harmonik serinin mutlak yakınsak olmadığının bağımsız bir kanıtıdır.
■

Bu hesap tek başına bile ürkütücüdür: aynı sayı topluluğunu farklı sırayla toplayarak farklı bir sonuç bulduk. Ama asıl sonuç henüz gelmedi.

41.4 Riemann Yeniden Düzenleme Teoremi

Şartlı yakınsak bir seride toplamın s'den $\frac{s}{2}$'ye kayabildiğini gördük. Peki başka hangi değerlere kayabilir? Şaşırtıcı yanıt: **hepsine.** Bu sonucun arkasındaki mekanizmayı görmek için serinin pozitif ve negatif terimlerini ayrı ayrı toplayınca ne olduğuna bakmalıyız. Bunun için pozitif ve negatif kısım gösterimini (Tanım 39.3) anımsayalım: her n için

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} = \frac{|\,a_n\,| + a_n}{2}, \qquad a_n^- = \max\{-a_n, 0\} = \frac{|\,a_n\,| - a_n}{2}$$

olmak üzere

$$a_n^+ \geq 0, \qquad a_n^- \geq 0, \qquad a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |\,a_n\,| = a_n^+ + a_n^-$$

bağıntıları geçerlidir: $a_n > 0$ ise $a_n^+ = a_n$, $a_n^- = 0$; $a_n < 0$ ise $a_n^+ = 0$, $a_n^- = -a_n$; $a_n = 0$ ise ikisi de sıfırdır.

Lemma 41.1 (Şartlı Yakınsak Serinin Pozitif ve Negatif Kısımları). *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi şartlı yakınsak olsun. O hâlde negatif olmayan terimli (Tanım 35.1) $\sum a_n^+$ ve $\sum a_n^-$ serilerinin **ikisi de** $+\infty$'a ıraksar:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

Ayrıca (a_n) dizisinde sonsuz çoklukta pozitif ve sonsuz çoklukta negatif terim bulunur.

İspat.
$\sum a_n^+$ ve $\sum a_n^-$ negatif olmayan terimli seriler olduğundan kısmi toplamları artandır; dolayısıyla her biri ya yakınsaktır ya da $+\infty$'a ıraksar (bkz. Analiz 1). $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^+$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^-$ ve $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olsun. $a_k = a_k^+ - a_k^-$ ve $|\,a_k\,| = a_k^+ + a_k^-$ olduğundan her n için

$$s_n = P_n - Q_n, \qquad \sum_{k=1}^{n} |\,a_k\,| = P_n + Q_n \tag{2}$$

yazılır. Varsayıma göre (s_n) yakınsaktır (limiti A diyelim), ama $\sum |\,a_k\,|$ ıraksaktır, yani $P_n + Q_n \to +\infty$'dur.

Durum 1: İkisi de yakınsak olamaz. *İkisi de yakınsak olsaydı, (2)'nin sağındaki eşitlikte limite geçerek $\sum|\ a_k\ |$'nın da yakınsak olduğu sonucuna varırdık (Teorem 39.2); bu, serinin mutlak yakınsak olmamasıyla çelişir.*
Durum 2: Yalnız biri yakınsak olamaz. *$\sum a_n^+$ yakınsak, $\sum a_n^-$ ıraksak olsaydı (P_n) bir sayıya yakınsar, $Q_n \to +\infty$ olurdu; (2)'nin solundaki eşitlikten $s_n = P_n - Q_n \to -\infty$ çıkardı ve bu, (s_n)'nin yakınsaklığıyla çelişirdi. Bakışımlı olarak $\sum a_n^-$ yakınsak, $\sum a_n^+$ ıraksak olsaydı $s_n \to +\infty$ olurdu; yine çelişki.*
Geriye tek olasılık kalır: $P_n \to +\infty$ ve $Q_n \to +\infty$'dur.
Son iddia. *(a_n) dizisinde yalnızca sonlu sayıda pozitif terim bulunsaydı a_n^+ bir yerden sonra özdeş olarak sıfır olur ve $\sum a_n^+$ yakınsardı; benzer biçimde sonlu sayıda negatif terim olsaydı $\sum a_n^-$ yakınsardı. İkisi de az önce gösterdiğimizle çelişir.*
■

Bu lemma, şartlı yakınsaklığın gerçek anlamını açığa çıkarır: **serinin pozitif terimleri tek başına sonsuza, negatif terimleri tek başına eksi sonsuza gider; yakınsaklık, bu iki sonsuzluğun birbirini tam ölçüsünde götürmesinden doğar.** Denge kırılgandır, çünkü hangi pozitif terimin hangi negatif terime karşılık geleceğine biz karar veririz. Elimizde tükenmez bir "yukarı itme" ve tükenmez bir "aşağı çekme" kaynağı olduğuna göre kısmi toplamları istediğimiz hedefin çevresinde dolaştırabiliriz. Riemann'ın ispatı tam olarak budur.

Teorem 41.2 (Riemann Yeniden Düzenleme Teoremi). *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi şartlı yakınsak olsun. O hâlde:*
a) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\sum a_n$ serisinin α'ya yakınsayan bir yeniden düzenlemesi vardır.
b) $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamları $+\infty$'a ıraksayan bir yeniden düzenlemesi ve kısmi toplamları $-\infty$'a ıraksayan bir başka yeniden düzenlemesi vardır.

İspat.
Hazırlık: iki alt dizi. *Lemma 41.1 gereği (a_n) dizisinde sonsuz çoklukta pozitif ve sonsuz çoklukta negatif terim vardır. $(x_k)_{k\geq 1}$ ile (a_n) dizisinin **negatif olmayan** terimlerini özgün sıralarıyla, $(y_k)_{k\geq 1}$ ile **negatif** terimlerini yine özgün sıralarıyla listeleyelim. (Sıfır terimler varsa x listesine konur; bu, aşağıdaki hesapların hiçbirini etkilemez.) Bu iki liste birlikte (a_n)'nin bütün terimlerini tam olarak bir kez kapsar. (a_n^+) dizisinin sıfırdan farklı terimleri tam olarak (x_k) listesinin pozitif terimleri, (a_n^-) dizisinin sıfırdan farklı terimleri de $(-y_k)$ listesinin terimleri olduğundan (sıfırlar toplamı değiştirmez) Lemma 41.1 şunu verir:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-y_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty. \tag{3}$$

Ayrıca $\sum a_n$ yakınsak olduğundan genel terim testi (Teorem 34.2) gereği $a_n \to 0$'dır; (x_k) ve (y_k), (a_n)'nin alt dizileri olduğundan (bkz. Analiz 1)

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = 0 \tag{4}$$

olur. Kurgumuzun kalıntı terimlerini sıfıra bastıracak olan şey bu iki limittir.
(a) Verilen bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için kurgu. *Terimleri şu kurala göre sıralayacağız: kısmi toplam α'nın altındaysa x listesinden sıradaki terimleri ekleyerek α'yı **ilk kez** aşana kadar yukarı çıkarız; α'nın üstüne çıktığımızda y listesinden sıradaki terimleri ekleyerek α'nın **ilk kez** altına düşene kadar aşağı ineriz; sonra yine yukarı, yine aşağı. "İlk kez" vurgusu ispatın belkemiğidir: her dönüşte hedefi olabildiğince az aşarız, aşma miktarı da son eklenen terimin büyüklüğüyle sınırlı kalır.*
*Kurguyu kesinleştirelim. (3) gereği $\sum x_k$'nın kısmi toplamları sınırsız arttığından, $x_1 + \cdots + x_{m_1} > \alpha$ olacak biçimde **en küçük** m_1 vardır; bu toplama S_1^+ diyelim. Sonra (3)'ün ikinci eşitliği gereği y terimlerinin toplamı $-\infty$'a gittiğinden $S_1^+ + y_1 + \cdots + y_{n_1} < \alpha$ olacak biçimde **en küçük** n_1 vardır; bu toplama S_1^- diyelim. Ardından x listesinden kaldığımız yerden devam edip $S_1^- + x_{m_1+1} + \cdots + x_{m_2} > \alpha$ olacak biçimde en küçük m_2'yi seçeriz ($S_1^- < \alpha$ olduğundan en az bir yeni terim gerekir, yani $m_2 > m_1$'dir), toplama S_2^+ deriz; sonra y listesinden devam ederek $S_2^- < \alpha$ olacak biçimde en küçük $n_2 > n_1$'i seçeriz. Bu işlemi sonsuza kadar sürdürürüz.*
Bu kurgu (a_n)'nin bütün terimlerini tam olarak bir kez kullanır: m_j ve n_j dizileri kesin artan olduğundan sınırsız büyürler, yani her iki listedeki her terime er ya da geç sıra gelir. Öyleyse elde ettiğimiz seri, Tanım 41.1 anlamında $\sum a_n$'nin bir yeniden düzenlemesidir; kısmi toplamlarına t_n diyelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dönüş noktalarındaki sapmayı ölçelim. *m_j'nin **en küçük** seçilmiş olması, x_{m_j} terimi eklenmeden önceki toplamın α'yı aşmadığını söyler:*

$$S_j^+ - x_{m_j} \le \alpha < S_j^+ \quad \Rightarrow \quad 0 < S_j^+ - \alpha \le x_{m_j}.$$

Aynı biçimde n_j'nin en küçük seçilmiş olması, y_{n_j} terimi eklenmeden önceki toplamın α'nın altına düşmediğini söyler:

$$S_j^- < \alpha \le S_j^- - y_{n_j} \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha - S_j^- \le -y_{n_j} = \mid y_{n_j} \mid .$$

(İkinci zincir her j için geçerlidir: n_j bloğun ilk terimiyse "bir önceki toplam" $S_j^+ > \alpha$'dır. Birinci zincirin sol yanı ise x_{m_j}'den önce eklenmiş bir terimin bulunmasını gerektirir; böyle bir terimin bulunmadığı tek durum $j = 1$ ve $m_1 = 1$ hâlidir ve sonlu sayıdaki bu başlangıç adımı aşağıdaki limit iddiasını etkilemez.)
Ara kısmi toplamlar da kontrol altındadır. *j'inci x-bloğu boyunca eklenen terimler negatif olmadığından, bu blok içindeki kısmi toplamlar azalmayan biçimde S_{j-1}^- değerinden S_j^+ değerine tırmanır. Dolayısıyla bu blok boyunca her kısmi toplam t_n için*

$$S_{j-1}^- \le t_n \le S_j^+, \qquad \text{yani} \qquad \alpha - \mid y_{n_{j-1}} \mid \le t_n \le \alpha + x_{m_j}$$

olur. Benzer biçimde j'inci y-bloğu boyunca eklenen terimler negatif olduğundan kısmi toplamlar S_j^+'dan S_j^-'ye azalarak iner ve bu blok boyunca

$$\alpha - \mid y_{n_j} \mid \le t_n \le \alpha + x_{m_j}$$

*sağlanır. Burada j'inci **tur** derken j'inci x-bloğu ile onu izleyen j'inci y-bloğunu birlikte kastediyoruz. İki kestirim birlikte şunu söyler: j'inci turun başından itibaren gelen her kısmi toplamın α'ya uzaklığı, indisi $j-1$'den küçük olmayan dönüş terimleriyle sınırlıdır:*

$$\mid t_n - \alpha \mid \le \sup\left\{ x_{m_i}, \mid y_{n_i} \mid : i \ge j-1 \right\} \tag{5}$$

(Burada $j \ge 2$'dir; sağ yandaki küme (4) gereği sınırlı olduğundan supremum vardır. İlk tur sonlu sayıda terim içerdiğinden aşağıdaki limit iddiasının dışında bırakılabilir.)
Kalıntı sıfıra gider. *$\varepsilon > 0$ verilsin. (4) gereği öyle bir $M \in \mathbb{N}$ vardır ki $k \ge M$ için $x_k < \varepsilon$ ve $\mid y_k \mid < \varepsilon$ olur. (m_j) ve (n_j) kesin artan doğal sayı dizileri olduğundan $m_j \to \infty$ ve $n_j \to \infty$'dur; öyleyse öyle bir J seçebiliriz ki $j \ge J$ için hem $m_j \ge M$ hem $n_j \ge M$ olsun. O hâlde $(J+1)$'inci tur için (5)'in sağ yanındaki bütün terimlerin indisi J'den küçük değildir ve her biri ε'dan küçüktür; supremumları da ε'ı aşamaz. $(J+1)$'inci turun başladığı indise n_J^* dersek, her $n \ge n_J^*$ için*

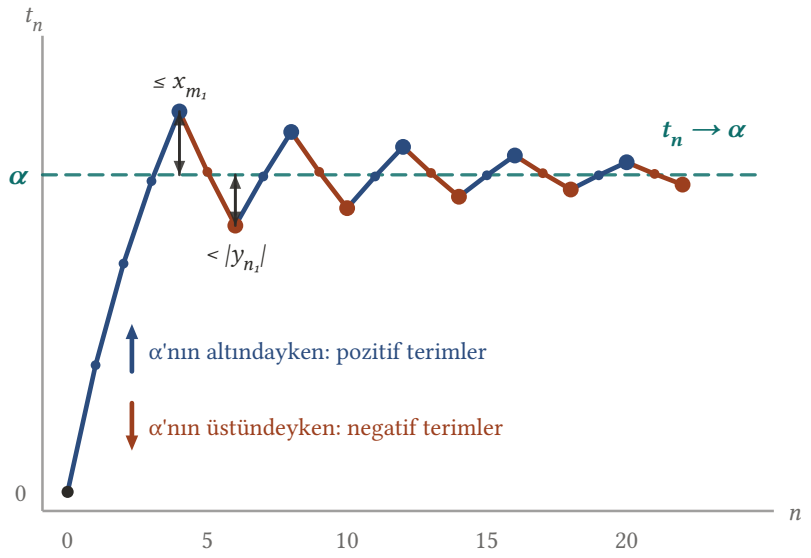
$$\mid t_n - \alpha \mid \le \varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfî olduğundan $\lim_{n\to\infty} t_n = \alpha$'dır. Böylece α'ya yakınsayan bir yeniden düzenleme kurmuş olduk.
(b) $+\infty$ durumu. *Bu kez hedefi sabit tutmak yerine büyütürüz. j'inci turda önce x listesinden kaldığımız yerden, **en az bir terim almak koşuluyla**, toplam ilk kez j'yi aşana kadar terim ekleriz ((3) bunu güvenceye alır; toplam turun başında zaten j'yi aşıyorsa tek bir terim almak yeter, çünkü x terimleri negatif değildir). Sonra y listesinden **yalnızca bir** terimi, y_j'yi ekleriz. Turun sonundaki toplama σ_j dersek*

$$\sigma_j > j + y_j = j - \mid y_j \mid$$

olur ve (4) gereği $\mid y_j \mid \to 0$ olduğundan $\sigma_j \to +\infty$'dur. Bu kurgu da bütün terimleri tam olarak bir kez kullanır: her turda y listesinden bir, x listesinden en az bir terim tüketilir ve kullanılan indisler sınırsız büyür.
j'inci tur boyunca kısmi toplamlar önce σ_{j-1}'den azalmayan biçimde j'yi aşan bir değere tırmanır, sonra tek bir negatif terimle σ_j'ye iner; dolayısıyla bu tur boyunca hiçbir kısmi toplam $\min\{\sigma_{j-1}, \sigma_j\}$'den küçük olamaz. $\sigma_j \to +\infty$ olduğundan verilen her $R > 0$ için, yeterince büyük bir turdan sonraki bütün kısmi toplamlar R'den büyük olur; yani $t_n \to +\infty$'dur.
$-\infty$ durumu bakışımlıdır: j'inci turda önce y listesinden, yine en az bir terim almak koşuluyla, toplam ilk kez $-j$'nin altına inene kadar terim ekler, sonra yalnızca x_j'yi ekleriz. Bu kez $\sigma_j < -j + x_j$ ve $x_j \to 0$ olduğundan $\sigma_j \to -\infty$; aynı akıl yürütmeyle $t_n \to -\infty$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 41.1: Riemann kurgusunun kısmi toplamları. Pozitif terimlerin toplamı $+\infty$ olduğundan toplam her seferinde α'nın üstüne çıkarılabilir, negatif terimlerinki $-\infty$ olduğundan da her seferinde altına indirilebilir. Her dönüşte hedef ilk kez *aşıldığı için aşma miktarı son eklenen terimin büyüklüğünü geçmez: tepe noktasındaki fazlalık x_{m_1}'i, dip noktasındaki eksiklik $|y_{n_1}|$'i aşmaz. Terimler sıfıra gittiğinden bu sapmalar da sıfıra iner; zikzağın genliği daralır ve kısmi toplamlar α'ya yakınsar.*

■

! Şartlı yakınsaklık ne kadar kırılgandır?

Teorem 41.2'nin söylediği şudur: şartlı yakınsak bir serinin "toplamı", terim kümesine değil, terimlerin yazılış sırasına bağlı bir sayıdır. π'ye, -10^6'ya, 0'a yakınsayan düzenlemeleri vardır; kısmi toplamları iki değer arasında sonsuza kadar salınan düzenlemeleri bile kurulabilir (kurguda tek bir hedef yerine iki hedef arasında dönüşümlü gidip gelmek yeterlidir).
Bunun karşısında Teorem 41.1 mutlak yakınsaklığın bu belirsizliği tümüyle ortadan kaldırdığını söyler. İkisi birlikte şu keskin ölçütü verir: **bir serinin bütün yeniden düzenlemeleri aynı sayıya yakınsıyorsa ve yalnızca o zaman, seri mutlak yakınsaktır.**

41.5 Serilerin Gruplanması

Bir seri mutlak yakınsaksa terimlerinin sırasını değiştirmenin yakınsaklığı etkilemediğini Teorem 41.1'den biliyoruz. Bir başka ilginç soru şudur: terimlerin sırası hiç değiştirilmeden, yalnızca ardışık terimler **parantez içine alınarak** gruplanırsa seri ne olur? Bu soru, yeniden düzenleme sorusundan çok daha kolaydır; çünkü göreceğimiz gibi gruplama, kısmi toplamlar dizisinin bir alt dizisini almaktan başka bir şey değildir.
Somut bir örnekle başlayalım: bir serinin ıraksak olduğu hâlde gruplandığında yakınsak hâle gelebildiğini gösteren bir örnek.

Örnek 41.2 (Iraksak Bir Serinin Yakınsak Gruplaması). Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$a_k = \begin{cases} 1, & k \text{ tek}, \\ -\frac{2^{k/2}-1}{2^{k/2}}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ile tanımlanan diziyi ele alalım. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin ıraksak olduğunu, buna karşın terimleri ikişerli gruplandığında elde edilen serinin yakınsak olduğunu ve toplamının 1 olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: İlk birkaç terim. Tek indisler için $a_k = 1$'dir; çift indisler için $a_2 = -\frac{2^1-1}{2^1} = -\frac{1}{2}$, $a_4 = -\frac{2^2-1}{2^2} = -\frac{3}{4}$, $a_6 = -\frac{2^3-1}{2^3} = -\frac{7}{8}$ olur. Yani seri

$$1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{8} + 1 - \frac{15}{16} + \cdots$$

biçimindedir.
Adım 2: Seri ıraksaktır. Tek indisli alt dizi sabit olduğundan $a_{2k-1} \to 1$; çift indisli alt dizi ise

$$a_{2k} = -\frac{2^k - 1}{2^k} = -\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \to -1$$

değerine gider. İki alt dizi farklı limitlere gittiğinden (a_k) yakınsak değildir (alt dizi teoreminin karşıt tersi); özellikle $a_k \to 0$ **değildir** ve genel terim testi (Teorem 34.2, ya da doğrudan Sonuç 34.1) gereği $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksaktır.
Adım 3: İkişerli gruplama. Şimdi sırayı bozmadan $2k-1$ ve $2k$ indisli terimleri birleştirelim:

$$a_{2k-1} + a_{2k} = 1 - \frac{2^k - 1}{2^k} = \frac{2^k - (2^k - 1)}{2^k} = \frac{1}{2^k}.$$

Yani gruplanmış seri

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

hâlini alır. Bu, ilk terimi $\frac{1}{2}$ ve oranı $r = \frac{1}{2}$ olan bir geometrik seridir (Tanım 34.4); $|\, r \,| < 1$ olduğundan yakınsaktır (Teorem 34.5) ve toplamı

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

olur. Demek ki $\sum a_k$ ıraksak olduğu hâlde ikişerli gruplaması yakınsaktır ve toplamı 1'dir: parantez koymak, ıraksak bir seriyi yakınsak bir seriye çevirebilir.
■

Bu örnek, gruplamayı da tıpkı yeniden düzenleme gibi kesin bir tanıma bağlamamız gerektiğini gösteriyor. Fark şudur: gruplamada indis eşlemesi bijektif değil, **kesin artandır**; bu, sıranın korunduğu ama terimlerin bloklara ayrıldığı anlamına gelir.

Tanım 41.2 (Bir Serinin Gruplaması). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bir seri ve $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $m < n$ olduğunda $f(m) < f(n)$ koşulunu sağlayan (yani **kesin artan**) bir fonksiyon olsun. Terimleri

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{f(1)}, \qquad b_2 = a_{f(1)+1} + a_{f(1)+2} + \cdots + a_{f(2)},$$

ve genel olarak

$$b_{k+1} = a_{f(k)+1} + a_{f(k)+2} + \cdots + a_{f(k+1)}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisine, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin **bir gruplaması** (regrouping) ya da **parantezlenmesi** denir. Açık yazılışıyla

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \big(a_1 + a_2 + \cdots + a_{f(1)} \big) + \big(a_{f(1)+1} + \cdots + a_{f(2)} \big) + \cdots$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanımın hemen ardından gelen gözlem, bu bölümün en kullanışlı tek cümlesidir. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ olsun. $b_1, \ldots, b_n$ terimleri toplandığında a_1'den $a_{f(n)}$'ye kadar olan bütün terimler, hiçbiri atlanmadan ve hiçbiri tekrarlanmadan bir kez toplanmış olur. Yani

$$t_n = s_{f(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

f kesin artan olduğundan bu, **(t_n) dizisinin (s_n) dizisinin bir alt dizisi olduğu** anlamına gelir. Gruplamanın bütün kuramı bu tek eşitlikten çıkar.
Bir örnekle tanımı çalıştıralım.

Örnek 41.3 (Alterne Harmonik Serinin İkişerli Parantezlenmesi).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

serisini ele alalım ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

serisini kuralım. $\sum b_k$'nın $\sum a_k$'nın bir gruplaması olduğunu gösterip toplamı s hakkında $\frac{1}{2} < s < 1$ olduğunu çıkarınız.

Çözüm.
Adım 1: Gruplama olduğunun doğrulanması. $f(k) = 2k$ alalım; f kesin artandır ve Tanım 41.2 gereği $b_1 = a_1 + a_2$, $b_{k+1} = a_{2k+1} + a_{2k+2}$ olur, yani genel olarak

$$b_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{2k - (2k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Dikkat çekici olan $b_k > 0$ olmasıdır: işareti değişen bir seriyi parantezleyerek pozitif terimli bir seri elde ettik.
Adım 2: Toplamın korunması. $t_n = s_{2n}$ ve $s_{2n} \to s$ olduğundan (aynı şey az sonra ispatlayacağımız Teorem 41.3'ten de çıkar)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = s$$

olur.
Adım 3: İki kestirim. Elde ettiğimiz seri pozitif terimlidir, dolayısıyla kısmi toplamları artandır; ilk iki terimi $b_1 = \frac{1}{2}$ ve $b_2 = \frac{1}{12}$ olduğundan $s \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{12} > \frac{1}{2}$'dir.
Üstten sınır için bu kez ilk terimi yalnız bırakıp kalanları ikişerli parantezleyelim: $g(1) = 1$ ve $k \geq 2$ için $g(k) = 2k - 1$ alalım; g de kesin artandır. Bu gruplama

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \cdots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)}$$

serisini verir; burada $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} = -\frac{1}{2k(2k+1)}$ kullanıldı. Bu da $\sum a_k$'nın bir gruplaması olduğundan toplamı yine s'dir (Teorem 41.3). Sağdaki seri pozitif terimli ve ilk terimi $\frac{1}{6}$ olduğundan $s \leq 1 - \frac{1}{6} < 1$'dir. İki kestirim birlikte

$$\frac{1}{2} < s < 1$$

verir. (Toplamın tam değeri $\ln 2 \approx 0{,}693$'tür; bunu kuvvet serilerini incelerken elde edeceğiz.)
■

Şimdi gruplamanın temel teoremini ispatlayabiliriz. İfadesi kısadır, ispatı ise yukarıdaki $t_n = s_{f(n)}$ gözleminin bir satırlık sonucudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 41.3 (Yakınsak Serinin Gruplaması). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsıyorsa, bu serinin **her** $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ gruplaması da yakınsaktır ve*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha$$

olur.

> ***İspat.***
> *$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ kısmi toplamlar dizileri, f ise gruplamayı belirleyen kesin artan fonksiyon olsun. Tanım 41.2 gereği*
>
> $$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_{f(1)})}_{b_1} + \underbrace{(a_{f(1)+1} + \cdots + a_{f(2)})}_{b_2} + \cdots + \underbrace{(a_{f(n-1)+1} + \cdots + a_{f(n)})}_{b_n}$$
>
> *olur. Parantezlerin içindeki indisler 1'den $f(n)$'ye kadar kesintisiz ve tekrarsız ilerlediğinden sağ yan tam olarak $a_1 + a_2 + \cdots + a_{f(n)}$ toplamıdır; yani her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = s_{f(n)}$'dir. f kesin artan olduğundan $(f(n))$ kesin artan bir doğal sayı dizisidir, dolayısıyla (t_n), (s_n)'nin bir alt dizisidir.*
> *Varsayıma göre $s_n \to \alpha$'dır. Yakınsak bir dizinin her alt dizisi aynı limite yakınsadığından (bkz. Analiz 1) $t_n = s_{f(n)} \to \alpha$ olur. Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsaktır ve toplamı α'dır.*
> ■

Bu teoremin pratikteki anlamı rahatlatıcıdır: **yakınsak bir seride istediğimiz gibi parantez koyabiliriz.** Sonlu toplamlardaki birleşme yasası, yakınsaklık varsayımı altında sonsuz toplamlara sorunsuzca taşınır. Zorluk, tersine gitmeye kalkıştığımızda başlar.

41.6 Gruplamanın Tersi Doğru Değildir

Teorem 41.3 yakınsak bir seriden yola çıkar. Iraksak bir seriden yola çıkarsak hiçbir şey söyleyemeyiz: gruplaması yakınsak da olabilir, ıraksak da. Örnek 41.2 bunun ilk yarısını göstermişti; şimdi her iki durumun aynı seride yan yana bulunabildiğini görelim.

Önerme 41.1 (Gruplama Teoreminin Tersi Yanlıştır). *Öyle bir ıraksak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi vardır ki:*
a) bu serinin 0'a yakınsayan bir gruplaması vardır;
b) bu serinin 1'e yakınsayan bir başka gruplaması vardır;
c) bu serinin ıraksak bir gruplaması da vardır.
Özellikle, bir serinin bir gruplamasının yakınsak olması serinin yakınsak olduğunu gerektirmez; üstelik farklı gruplamalar farklı toplamlar verebilir.

> ***İspat.***
> *$a_k = (-1)^{k+1}$ alalım, yani*
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$
>
> *serisini ele alalım.*
> ***Seri ıraksaktır.*** *$|\, a_k \,| = 1$ olduğundan $a_k \to 0$ değildir; genel terim testi (Teorem 34.2) gereği seri ıraksaktır. (Kısmi toplamlar s_n dizisi $1, 0, 1, 0, \ldots$ biçiminde salınır; bu da doğrudan ıraksaklığı gösterir.)*
> ***(a)*** *$f(k) = 2k$ gruplamasında $b_k = a_{2k-1} + a_{2k} = 1 - 1 = 0$'dır, yani gruplanmış seri $(1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots$ serisidir; bütün kısmi toplamları 0 olduğundan yakınsaktır ve toplamı 0'dır.*
> ***(b)*** *Bu kez ilk terimi tek başına bırakalım: $g(1) = 1$ ve $k \geq 2$ için $g(k) = 2k - 1$ alalım (g kesin artandır). Bu gruplama $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots$ serisini verir; kısmi toplamlarının hepsi 1 olduğundan yakınsaktır ve toplamı 1'dir.*
> ***(c)*** *Şimdi yalnızca ilk iki terimi parantezleyip kalanları tek tek bırakalım: $h(1) = 2$ ve $k \geq 2$ için $h(k) = k + 1$ alalım (h kesin artandır). Bu gruplama $(1-1) + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ serisini verir; kısmi toplamları $0, 1, 0, 1, \ldots$ biçiminde salındığından ıraksaktır.*
> *Üç gruplama da aynı ıraksak seriden elde edilmiştir; ikisi farklı sayılara yakınsar, biri ıraksar.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Parantez açmak serbest değildir

Teorem 41.3 ile Önerme 41.1 birlikte şu asimetriyi kurar:

- Seri **yakınsak** ise, parantez **koymak** güvenlidir: toplam değişmez.
- Seri hakkında bir şey bilmiyorsak, parantez **kaldırmak** tehlikelidir: $0 = (1-1)+(1-1)+\cdots$ eşitliğinden parantezleri kaldırıp $1-1+1-1+\cdots = 0$ sonucuna geçemeyiz, çünkü sağdaki seri ıraksaktır. Parantezleri dağıtmak yeni bir seri üretir ve bu yeni serinin yakınsaklığı ayrıca kanıtlanmalıdır.

Bir kurtarma yolu vardır: **genel terim sıfıra gidiyorsa ve blok uzunlukları sınırlıysa**, gruplamanın yakınsaklığından serinin yakınsaklığına geri dönülebilir. Bunu Alıştırma 41.1'nin bir şıkkında ispatlayacağız; Örnek 41.1'nin dördüncü adımında da tam olarak bu yolu kullanmıştık.

41.7 Cauchy Çarpımı

Yeniden düzenleme ve gruplama araçlarının birlikte kullanıldığı en güzel uygulama, iki serinin çarpımıdır. İki sonlu toplamı çarpmak kolaydır: her terimi her terimle çarpıp hepsini toplarız. İki seriyi çarptığımızda ise ortaya $a_i b_j$ biçiminde **çift indisli** sonsuz bir çarpım ailesi çıkar. Bu aileyi tek indisli bir seri hâline getirmek için bir sıralama seçmemiz gerekir ve seçtiğimiz sıra, terimleri yeniden düzenlemekten başka bir şey değildir; mutlak yakınsaklık, Teorem 41.1 sayesinde bu seçimin sonucu etkilemediğini garanti eder. Sıralamanın iki doğal yolu vardır. Birincisi **kareler** boyunca ilerlemektir ($i, j \le N$ olan çarpımlar); avantajı, N'inci karenin toplamının $\left(\sum_{i=0}^{N} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} b_j\right)$ biçiminde çarpanlara ayrılmasıdır. İkincisi **köşegenler** boyunca ilerlemektir ($i+j=n$ olan çarpımlar); avantajı ise her köşegenin toplamının tek bir formülle, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ biçiminde yazılabilmesidir. Cauchy çarpımı, ikinci sıralamanın köşegen bloklarına göre gruplanmış hâlidir; teorem, iki yolun aynı sonucu verdiğini söyler.

Teorem 41.4 (Mutlak Yakınsak Serilerin Cauchy Çarpımı). *$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ serileri mutlak yakınsak, toplamları sırasıyla A ve B olsun. Her $n \ge 0$ için*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

*ile tanımlanan seriye $\sum a_k$ ile $\sum b_k$ serilerinin **Cauchy çarpımı** denir. O hâlde $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisi mutlak yakınsaktır ve*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = AB$$

olur.

> ***İspat.***
> *$A^* = \sum_{k=0}^{\infty} \mid a_k \mid$ ve $B^* = \sum_{k=0}^{\infty} \mid b_k \mid$ diyelim; varsayım gereği bu iki sayı sonludur.*
> ***Adım 1: Bütün çarpımların bir sıralaması.*** *$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ olmak üzere $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ herhangi bir bijeksiyon olsun; böyle bir bijeksiyonun varlığı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin sayılabilir olmasından gelir (rasyonel sayıların sayılabilirliğinin ispatındaki köşegen sayma yöntemi). $\sigma(m) = (i_m, j_m)$ yazıp $u_m = a_{i_m} b_{j_m}$ terimli seriyi kuralım; bu seri, $a_i b_j$ biçimindeki bütün çarpımları tam olarak bir kez içerir.*
> ***Adım 2: $\sum u_m$ mutlak yakınsaktır.*** *$M \in \mathbb{N}$ verilsin ve $I = \max\{i_1, \ldots, i_M\}$, $J = \max\{j_1, \ldots, j_M\}$ olsun. $\sigma(1), \ldots, \sigma(M)$ ikililerinin hepsi $\{0,\ldots,I\} \times \{0,\ldots,J\}$ dikdörtgeninde bulunduğundan ve $\mid u_m \mid \ge 0$ olduğundan*
>
> $$\sum_{m=1}^{M} \mid u_m \mid \le \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} \mid a_i \mid \mid b_j \mid = \left(\sum_{i=0}^{I} \mid a_i \mid\right)\left(\sum_{j=0}^{J} \mid b_j \mid\right) \le A^* B^*$$
>
> *olur. Demek ki negatif olmayan terimli $\sum \mid u_m \mid$ serisinin kısmi toplamları $A^* B^*$ ile üstten sınırlıdır; sınırlı kısmi toplam ölçütü (Teorem 35.1) gereği $\sum \mid u_m \mid$ yakınsaktır. Yani $\sum u_m$ mutlak yakınsaktır; toplamına U diyelim.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: $U = AB$. *Teorem 41.1 gereği $\sum u_m$'nin her yeniden düzenlemesi de U'ya yakınsar; başka bir deyişle U sayısı, seçtiğimiz σ bijeksiyonundan bağımsızdır. Öyleyse U'yu bize en uygun sıralamayla hesaplayabiliriz.*
Kare sıralamasını seçelim: önce $(0,0)$; sonra $\max\{i,j\}=1$ olan ikililer $(0,1),(1,1),(1,0)$; sonra $\max\{i,j\}=2$ olan beş ikili; ve böyle devam. N'inci kabuk tamamlandığında toplanan çarpımların kümesi tam olarak $\{0,\ldots,N\}^2$ olduğundan, o andaki kısmi toplam

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{N} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} b_j\right) = A_N B_N$$

değerine eşittir; burada A_N ve B_N iki serinin N'inci kısmi toplamlarıdır. Bu değerler, $\sum u_m$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin bir alt dizisini oluşturur; kısmi toplamlar dizisi U'ya yakınsadığından bu alt dizi de U'ya yakınsar (bkz. Analiz 1). Öte yandan $A_N \to A$, $B_N \to B$ olduğundan çarpımın limiti (bkz. Analiz 1) gereği $A_N B_N \to AB$'dir. Bir dizinin limiti tek olduğundan (bkz. Analiz 1)

$$U = AB$$

bulunur.
Adım 4: Köşegen sıralaması ve gruplama. *Şimdi σ yerine köşegen sıralamasını seçelim: ikilileri önce $i+j$ toplamına, eşitlik hâlinde i'ye göre artan biçimde sıralayalım. Elde edilen*

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + \cdots$$

serisi Adım 2 ve 3 gereği mutlak yakınsaktır ve toplamı $U = AB$'dir. Bu seriyi köşegenlere göre gruplayalım: blokları 1'den başlayarak numaralandıralım ve n'inci bloğa $i+j = n-1$ köşegenindeki n tane çarpımı koyalım. Blok sınırlarını veren

$$f(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

fonksiyonu kesin artandır, yani Tanım 41.2'nın koşulu sağlanır. n'inci bloğun toplamı

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{(n-1)-k} = c_{n-1}$$

olduğundan, elde edilen gruplamanın terimleri sırasıyla $c_0, c_1, c_2, \ldots$'dir; yani bu gruplama, indislerin bir kaydırılmasıyla tam olarak $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisidir. Teorem 41.3 gereği yakınsaktır ve toplamı $U = AB$'ye eşittir.
Adım 5: $\sum c_n$ mutlak yakınsaktır. *Üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) ile*

$$\mid c_n \mid = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{n} \mid a_k \mid \mid b_{n-k} \mid =: c_n^*$$

yazalım. c_n^* sayıları, mutlak yakınsak (hatta negatif olmayan terimli) $\sum \mid a_k \mid$ ve $\sum \mid b_k \mid$ serilerinin Cauchy çarpımının terimleridir. Adım 1–4'ü bu iki seriye uygularsak $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* = A^*B^*$ buluruz; özellikle $\sum c_n^*$ yakınsaktır. Karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $0 \le \mid c_n \mid \le c_n^*$ eşitsizliğinden $\sum \mid c_n \mid$ serisinin yakınsaklığı çıkar. Demek ki $\sum c_n$ mutlak yakınsaktır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Mertens teoremi

Teorem 41.4'ndeki varsayım biraz zayıflatılabilir. **Mertens teoremi** şunu söyler: $\sum a_k$ **mutlak** yakınsak (toplamı A) ve $\sum b_k$ yalnızca yakınsak (toplamı B) ise, Cauchy çarpımı $\sum c_n$ yakınsaktır ve toplamı AB'dir; ancak bu durumda $\sum c_n$'nin mutlak yakınsak olduğu iddia edilemez.
İki serinin de yalnızca şartlı yakınsak olması hâlinde sonuç tümüyle bozulabilir: Cauchy çarpımı ıraksak bile olabilir. Klasik örneğini Alıştırma 41.1'de göreceğiz. Ders, bu bölümün genel dersiyle aynıdır: **mutlak yakınsaklık, sonsuz toplamları sonlu toplamlar gibi kullanmamıza izin veren güvenlik kemeridir.**

Teoremi iki somut hesapla çalıştıralım.

Örnek 41.4 (Cauchy Çarpımıyla İki Hesap). a) $|x|<1$ olsun. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ serisinin kendisiyle Cauchy çarpımını hesaplayarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

eşitliğini elde ediniz.

b) $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ serilerinin Cauchy çarpımını hesaplayarak

$$E(x)\,E(y) = E(x+y)$$

eşitliğini gösteriniz.

Çözüm.
a) $a_k = b_k = x^k$ alalım. $|x|<1$ olduğundan $\sum|x|^k$ geometrik serisi yakınsaktır (Teorem 34.5); yani $\sum x^k$ mutlak yakınsaktır ve $A = B = \frac{1}{1-x}$'dir. Cauchy çarpımının terimleri, toplamdaki $n+1$ terimin her biri x^n'ye eşit olduğundan

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k\, x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^n = (n+1)x^n$$

biçimindedir. Teorem 41.4 gereği $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ mutlak yakınsaktır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = AB = \frac{1}{(1-x)^2}$$

olur. Örneğin $x=\frac{1}{2}$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=4$ bulunur.
b) Önce $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ serisinin her x için mutlak yakınsak olduğunu görelim: $x=0$ durumu açıktır, $x\neq 0$ için ise d'Alembert oran testinde (Teorem 37.2) oran $\frac{|x|}{k+1}\to 0<1$ olur.
Şimdi $a_k=\frac{x^k}{k!}$, $b_k=\frac{y^k}{k!}$ alalım. Her terimi $\frac{1}{n!}$ ile çarpıp bölerek Cauchy çarpımının terimlerini

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

biçiminde yazarız. Binom teoremi (bkz. Analiz 1) gereği içteki toplam $(x+y)^n$'ye eşit olduğundan $c_n=\frac{(x+y)^n}{n!}$'dir ve Teorem 41.4 gereği

$$E(x)\,E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$$

bulunur. $E(x)=e^x$ olduğunu kuvvet serilerini incelerken göreceğiz; o zaman bu hesap $e^x e^y = e^{x+y}$ eşitliğinin bir ispatı hâline gelecektir. Ayrıca $E(0)=1$ ve $E(x)E(-x)=E(0)=1$ olduğundan $E(x)$ hiçbir x için sıfır değildir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

41.8 Alıştırmalar

Alıştırma 41.1 (Yeniden Düzenleme, Gruplama ve Cauchy Çarpımı Üzerine). a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak bir seri ve toplamı A olsun (mutlak yakınsak olması gerekmiyor). $f(2k-1) = 2k$, $f(2k) = 2k-1$ ile tanımlanan bijeksiyonun verdiği yeniden düzenlemenin de A'ya yakınsadığını gösteriniz.
b) $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ olsun. Alterne harmonik serinin her negatif terimden önce iki pozitif terim gelecek biçimde

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

sırasıyla düzenlenmesinin $\frac{3}{2}s$'ye yakınsadığını gösteriniz.
c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ serisinin şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz ve toplamı 5 olan bir yeniden düzenlemesinin var olduğunu gerekçelendiriniz.
d) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinde $a_k \to 0$ olsun ve $\sum b_k$, blok uzunlukları L ile sınırlı bir gruplaması olsun (yani her n için $f(n) - f(n-1) \leq L$; $f(0) = 0$ alınıyor). $\sum b_k$ yakınsak ve toplamı α ise, $\sum a_k$ serisinin de yakınsak olduğunu ve toplamının α olduğunu gösteriniz.
e) $\mid x \mid < 1$ için $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ile $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ serilerinin Cauchy çarpımını hesaplayınız ve sonucu doğrudan çarpma ile karşılaştırınız.
f) $a_k = b_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ $(k \geq 0)$ alınsın. $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serilerinin yakınsak olduğunu, buna karşın Cauchy çarpımlarının ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
a) Düzenlenmiş seri $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$ biçimindedir. Çift indisli kısmi toplamlarda her ikili tamamlandığından

$$t_{2n} = (a_2 + a_1) + (a_4 + a_3) + \cdots + (a_{2n} + a_{2n-1}) = s_{2n},$$

tek indisli kısmi toplamlarda ise son ikilinin yalnızca ilk yarısı eklendiğinden $t_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+2}$ olur. $\sum a_k$ yakınsak olduğundan $s_{2n} \to A$ (bkz. Analiz 1) ve genel terim testi (Teorem 34.2) gereği $a_{2n+2} \to 0$'dır; öyleyse iki alt dizi de A'ya yakınsar ve (t_n) dizisi A'ya yakınsar.
Demek ki bu özel düzenleme, mutlak yakınsaklık olmadan da toplamı korur. Bu, Teorem 41.2 ile çelişmez: Riemann teoremi toplamı **değiştiren** düzenlemelerin varlığını söyler, her düzenlemenin toplamı değiştirdiğini değil.
b) Düzenlemenin kısmi toplamlarını T_n ile gösterelim. k'inci blok $\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$ terimlerinden oluşur ($k=1$ için $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$, $k=2$ için $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}$). m blok toplandığında pozitif terimlerin paydaları $4m$'ye kadar olan bütün tek sayılar, negatif terimlerin paydaları ise $2, 4, \ldots, 2m$'dir; öyleyse

$$T_{3m} = \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{2j-1} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2j}.$$

$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ harmonik kısmi toplamları cinsinden, tek sayıların terslerini bütün terslerden çift olanları çıkararak yazarsak $\sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{2j-1} = H_{4m} - \frac{1}{2}H_{2m}$ ve $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}H_m$ olur, yani

$$T_{3m} = H_{4m} - \frac{1}{2}H_{2m} - \frac{1}{2}H_m.$$

Öte yandan alterne harmonik serinin çift indisli kısmi toplamları için

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = H_{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n$$

geçerlidir (bütün terimleri toplayıp çift indisli terimleri iki kez çıkardık). Buradan

$$T_{3m} = \left(H_{4m} - H_{2m} \right) + \frac{1}{2}\left(H_{2m} - H_m \right) = s_{4m} + \frac{1}{2}s_{2m} \to s + \frac{1}{2}s = \frac{3}{2}s$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Ara kısmi toplamlar da aynı limite gider: $T_{3m+1} = T_{3m} + \frac{1}{4m+1}$ ve $T_{3m+2} = T_{3m+1} + \frac{1}{4m+3}$ olup eklenen terimler sıfıra yakınsar. Üç alt dizi (T_n) dizisini tükettiğinden $T_n \to \frac{3}{2}s$'dir. Aynı terimler, yalnızca sırası değiştirilerek s yerine $\frac{3}{2}s$ toplamını verdi.

c) $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ dizisi pozitif, azalan ($\sqrt{k} < \sqrt{k+1}$) ve sıfıra yakınsaktır; Leibniz testi (Sonuç 40.1) gereği $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ yakınsaktır. Terimlerin mutlak değerlerinden oluşan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ serisi ise $p = \frac{1}{2} \le 1$ olan bir p-serisi olduğundan ıraksaktır (Teorem 36.2). Demek ki seri yakınsak ama mutlak yakınsak değildir, yani şartlı yakınsaktır.

Bu durumda Teorem 41.2 (a) doğrudan uygulanır: $\alpha = 5$ alarak, serinin 5'e yakınsayan bir yeniden düzenlemesi bulunduğu sonucuna varırız. Teoremin ispatındaki kurgu bu düzenlemeyi açıkça verir: pozitif terimler $1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$ listesinden toplam ilk kez 5'i aşana kadar terim alınır, sonra negatif terimler $-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots$ listesinden toplam ilk kez 5'in altına düşene kadar terim alınır ve bu iki adım sonsuza kadar yinelenir.

d) $t_n = s_{f(n)}$ olduğunu biliyoruz ve varsayıma göre $t_n \to \alpha$'dır; $s_n \to \alpha$ olduğunu göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $t_n \to \alpha$ olduğundan öyle bir N_1 vardır ki $n \ge N_1$ için $\mid t_n - \alpha \mid < \frac{\varepsilon}{2}$; $a_k \to 0$ olduğundan öyle bir N_2 vardır ki $k \ge N_2$ için $\mid a_k \mid < \frac{\varepsilon}{2L}$ olur.

Şimdi $n > \max\{f(N_1), N_2 + L\}$ alalım. f kesin artan ve $f(m) \to \infty$ olduğundan $f(m-1) < n \le f(m)$ olacak biçimde tek bir m vardır. $f(m) \ge n > f(N_1)$ olduğundan $m > N_1$, yani $m - 1 \ge N_1$'dir; öyleyse $\mid t_{m-1} - \alpha \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Öte yandan

$$s_n - t_{m-1} = s_n - s_{f(m-1)} = \sum_{k=f(m-1)+1}^{n} a_k$$

toplamındaki terim sayısı $n - f(m-1) \le f(m) - f(m-1) \le L$'dir; dolayısıyla toplamdaki her indis $k \ge n - L + 1 > N_2$ koşulunu sağlar ve her terim için $\mid a_k \mid < \frac{\varepsilon}{2L}$ olur. Üçgen eşitsizliğiyle

$$\mid s_n - t_{m-1} \mid \le \sum_{k=f(m-1)+1}^{n} \mid a_k \mid < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

İki kestirimi birleştirirsek $\mid s_n - \alpha \mid \le \mid s_n - t_{m-1} \mid + \mid t_{m-1} - \alpha \mid < \varepsilon$ elde ederiz. ε keyfî olduğundan $s_n \to \alpha$, yani $\sum a_k$ yakınsaktır ve toplamı α'dır.

Bu sonuç, Önerme 41.1'teki örneğin neden ters düşmediğini açıklar: orada $a_k = (-1)^{k+1}$ idi ve $a_k \to 0$ **değildi**.

e) $a_k = x^k$, $b_k = (-1)^k x^k$ alalım. $\mid x \mid < 1$ olduğundan her iki seri de mutlak yakınsaktır ve $A = \frac{1}{1-x}$, $B = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$'dir. Cauchy çarpımının terimleri

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot (-1)^{n-k} x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$$

biçimindedir; içteki toplam $+1$ ile -1'in dönüşümlü toplamı olduğundan n çift iken 1, n tek iken 0'dır. Öyleyse $c_n = x^n$ (n çift) ve $c_n = 0$ (n tek) olur, yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} = \frac{1}{1-x^2}$$

bulunur (oranı x^2 olan geometrik seri). Teorem 41.4 bu değerin AB'ye eşit olmasını gerektirir; gerçekten $AB = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$'dir. İki hesap uyuşmaktadır.

f) Her iki seri de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ serisidir; $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ dizisi pozitif, azalan ve sıfıra gittiğinden Leibniz testi (Sonuç 40.1) gereği yakınsaktır. Cauchy çarpımının terimleri, $(-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n$ ortak çarpanı dışarı alınarak

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

biçiminde yazılır. İçteki toplamı alttan kestirelim: $0 \le k \le n$ için $(k+1) + (n-k+1) = n+2$ sabittir ve toplamı sabit olan iki pozitif sayının çarpımı, aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliği gereği en çok ortalamalarının karesi kadar olur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(k+1)(n-k+1) \le \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(k+1)(n-k+1)} \le \frac{n+2}{2}.$$

Öyleyse toplamdaki her terim en az $\frac{2}{n+2}$'dir ve toplamda $n+1$ terim bulunduğundan

$$\mid c_n \mid \ge (n+1)\cdot\frac{2}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} \ge 1$$

olur; son eşitsizlik $2n+2 \ge n+2$, yani $n \ge 0$ olmasından gelir. Demek ki $c_n \to 0$ değildir ve genel terim testi (Teorem 34.2) gereği $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ıraksaktır.
Bu örnek, Teorem 41.4'ndeki mutlak yakınsaklık varsayımının ve Mertens teoremindeki "en az birinin mutlak yakınsak olması" koşulunun vazgeçilmez olduğunu gösterir.
■

Bu bölümde sonsuz toplamların sonlu toplamlardan ne kadar farklı davrandığını gördük: yer değiştirme yasası ancak mutlak yakınsaklık altında geçerlidir, birleşme yasası ise yalnızca tek yönde — parantez koyma yönünde — çalışır. Elde ettiğimiz araçların, özellikle Teorem 41.1, Teorem 41.3 ve Teorem 41.4′nin, bundan sonra terimleri sabit sayılar değil de değişkenin kuvvetleri olan serileri incelerken sürekli işimize yarayacağını göreceğiz. Sıradaki durağımız bu seriler: Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık Yarıçapı.

 CC BY-NC-SA 4.0

42. Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık Yarıçapı

Serilerin Yeniden Düzenlenmesi ve Gruplanması bölümüyle birlikte sayı serilerinin kuramını tamamlamış olduk. Şimdiye kadar incelediğimiz bütün serilerde terimler sabit reel sayılardı: $\sum a_n$ ya yakınsıyordu ya ıraksıyordu, verilecek tek bir yanıt vardı. Bu bölümde terimleri bir **değişkene** bağlı olan serileri incelemeye başlıyoruz. Böyle bir seride yakınsaklık artık "evet" ya da "hayır" biçiminde tek bir yanıt değildir; değişkenin bazı değerlerinde seri yakınsayabilir, bazılarında ıraksayabilir. Dolayısıyla asıl soru şuna dönüşür: **değişkenin hangi değerleri için seri yakınsaktır?**

Bu tür serilerin en önemlisi, terimleri $a_n(x-x_0)^n$ biçiminde olan **kuvvet serileri**dir (power series). Kuvvet serileri, polinomların sonsuz terimli genelleştirmesi olarak düşünülebilir; nitekim kısmi toplamları birer polinomdur. Bu yüzden bir kuvvet serisi yakınsadığında, ortaya "sonsuz dereceli polinom" gibi davranan bir fonksiyon çıkar. Bu fonksiyonların türevlenebilirlik, integrallenebilirlik ve süreklilik açısından şaşırtıcı derecede uysal olduklarını bir sonraki bölümde göreceğiz.

Kuvvet serilerinin niçin bu kadar merkezî olduğunu aslında sezmiş durumdayız. Taylor Formülü bölümünde bir fonksiyonu bir nokta civarında polinomlarla yaklaştırmayı öğrendik: n'inci Taylor polinomu (Tanım 12.1) ve kalan terimi (Teorem 12.1) bize $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ yaklaşımını verdi. Bu ifadede $n \to \infty$ limitine geçmek, tam olarak bir kuvvet serisi yazmak demektir. O limitin ne zaman anlamlı olduğunu, yani serinin hangi x'lerde yakınsadığını bilmeden bu adımı atamayız. İşte bu bölüm, o adımın zeminini hazırlar.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: bir kuvvet serisinin tanımı ve merkezinde her zaman yakınsadığı; bir noktada yakınsayan serinin, merkeze **daha yakın** her noktada mutlak yakınsadığı; buna karşılık bir noktada ıraksayan serinin merkezden **daha uzak** her noktada ıraksadığı; bu iki olgunun yakınsaklık kümesini bir aralığa hapsettiği; bu aralığın yarıçapını veren **Cauchy–Hadamard** formülü ve pratikte çok kullanılan katsayı oranı formülü; ve son olarak, hiçbir testin bilgi vermediği tek yer olan **uç noktaların** elle incelenmesi gerektiği.

42.1 Kuvvet Serisi Kavramı

Tanımla başlayalım. Bir kuvvet serisi, iki veriyle belirlenir: katsayı dizisi ve merkez.

Tanım 42.1 (Kuvvet Serisi). $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlanan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

serisine $\boldsymbol{x_0}$ **merkezli kuvvet serisi** (power series centered at x_0) ya da $\boldsymbol{x = x_0}$ **noktasındaki kuvvet serisi** denir.

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sayılarına serinin **katsayıları** (coefficients) denir; bunlar x değişkeninden bağımsızdır. Özel olarak $x_0 = 0$ alınırsa seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

biçimini alır ve **sıfır merkezli kuvvet serisi** adını alır.

Tanımın üç ayrıntısı üzerinde ayrıca durmak gerekir; bunlar ileride sessizce kullanılacaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Üç anlaşma

Sıfırıncı terim. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ifadesinin ilk terimi $a_0(x-x_0)^0$'dır. Kolaylık olsun diye, $\boldsymbol{x = x_0}$ **olduğunda bile** $(x-x_0)^0 = 1$ kabul edilir. Yani sıfırıncı terim her zaman a_0'dır; 0^0 ifadesinin genel olarak tanımsız olması bu yazımı bozmaz, çünkü söz konusu olan bir gösterim anlaşmasıdır.
Yakınsaklık sorusu. Seri x'e bağlı olduğundan, asıl amaç hangi $x \in \mathbb{R}$ sayılarının seriyi yakınsak, hangilerinin ıraksak yaptığını belirlemektir. Hemen görülen bir şey vardır: yukarıdaki anlaşma gereği $x = x_0$ için seri

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots = a_0$$

olur; yani **kuvvet serisi merkezinde her zaman yakınsar** ve toplamı a_0'dır. Öyleyse yakınsaklık kümesi hiçbir zaman boş değildir; en kötü ihtimalle tek noktalı $\{x_0\}$ kümesidir.
İndis anlaşması. Kuvvet serilerinde toplama indisi kural olarak $n = 0$'dan başlar. Bazı serilerde $a_0 = 0$ olduğu için toplam $n = 1$'den başlatılır; bu, katsayı dizisinin başına bir sıfır eklemekten başka bir şey olmadığından hiçbir sonucu değiştirmez.

Bildiğimiz en eski seri, aynı zamanda en basit kuvvet serisidir.

Örnek 42.1 (Geometrik Seri Bir Kuvvet Serisidir). $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisinin bir kuvvet serisi olduğunu belirtiniz, katsayılarını ve merkezini yazınız; hangi x değerlerinde yakınsadığını ve toplamının ne olduğunu söyleyiniz.

Çözüm.
Seri, Tanım 42.1'nde $x_0 = 0$ ve her n için $a_n = 1$ alınarak elde edilir; yani sıfır merkezli, bütün katsayıları 1 olan kuvvet serisidir.
Öte yandan bu seri, ortak çarpanı x olan geometrik seridir (Tanım 34.4). Geometrik serinin yakınsaklığı hakkındaki temel sonuç (Teorem 34.5) şunu söyler: seri ancak ve ancak $|x| < 1$ iken yakınsar ve bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

olur. $|x| \geq 1$ iken $|x^n| = |x|^n \geq 1$ olduğundan genel terim sıfıra gitmez ve Sonuç 34.1 gereği seri ıraksar.
Demek ki bu kuvvet serisinin yakınsaklık kümesi tam olarak $(-1, 1)$ açık aralığıdır. Merkez 0, aralığın ortasıdır; aralığın "yarıçapı" 1'dir ve her iki uç noktada da seri ıraksamaktadır. Bu örnek, bu bölümde kuracağımız bütün kuramın minyatür bir modelidir.
■

Geometrik serinin yakınsaklık kümesinin merkez etrafında **simetrik bir aralık** çıkması bir rastlantı değildir. Şimdi göstereceğimiz gibi, her kuvvet serisinin yakınsaklık kümesi, ortası merkez x_0 olan bir aralıktır; iki uç nokta bir yana bırakılırsa bu aralık merkez etrafında simetriktir. Kümenin biçimi hakkında yalnızca üç seçenek vardır:

- Seri yalnızca merkezde yakınsar; yakınsaklık kümesi $\{x_0\}$'dır.
- Seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsar.
- Bir $R > 0$ sayısı vardır; seri $|x - x_0| < R$ olan her x'te yakınsar, $|x - x_0| > R$ olan her x'te ıraksar. Uç noktalarda ($x = x_0 \pm R$) her iki şey de olabilir.

Başka bir seçenek yoktur. Örneğin bir kuvvet serisinin yakınsaklık kümesi $[0, 1] \cup [3, 4]$ ya da $\mathbb{Q}$ olamaz. Bu iddiaların kanıtı, bölümün temel teoremine dayanır.

42.2 Yakınsaklık Kümesinin Yapısı

Temel teoremin fikri şudur: bir kuvvet serisinin uzak bir noktada yakınsaması, merkeze yakın noktalarda çok daha güçlü bir yakınsaklık üretir. Uzak noktada yakınsaklık, oradaki terimlerin sıfıra gitmesini, dolayısıyla sınırlı kalmasını sağlar; bu sınırlılık, daha yakın noktalarda terimlerin bir geometrik dizi hızıyla

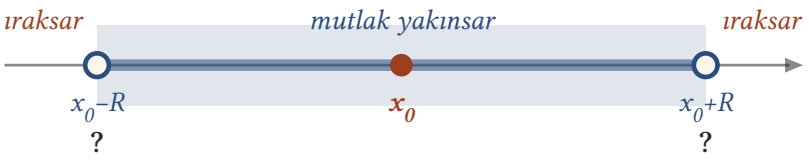
 CC BY-NC-SA 4.0

küçülmesini garanti eder. Böylece elimize karşılaştırma testiyle kullanılacak hazır bir geometrik üst sınır geçer.

Teorem 42.1 (Kuvvet Serilerinde Yakınsaklığın Taşınması). *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisi belirli bir $x = x_1$ sayısı için yakınsak olsun, yani $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ serisi yakınsasın. O hâlde seri,*

$$| x - x_0 | < | x_1 - x_0 |$$

*kesin eşitsizliğini sağlayan **her** $x \in \mathbb{R}$ için **mutlak yakınsaktır**.*



uç noktalar tek tek incelenir

Şekil 42.1: Bir kuvvet serisinin yakınsaklık kümesi her zaman bu resme benzer: merkezden R *uzaklığa kadar mutlak yakınsaklık, dışında ıraksaklık. Yarıçapı Cauchy–Hadamard formülü verir; iki uç noktada ne olduğu ise formülden okunamaz, her biri ayrı ayrı incelenmelidir.*

İspat.
Adım 1: Terimlerin sınırlılığı. *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ serisinin yakınsak olduğunu varsayıyoruz. Önce $x_1 = x_0$ durumunu ayıralım. Bu durumda $| x_1 - x_0 | = 0$ olduğundan $| x - x_0 | < 0$ eşitsizliğini sağlayan hiçbir x yoktur; iddia boş yere doğrudur, yani ispatlanacak bir şey kalmaz. Öyleyse bundan sonra $x_1 \neq x_0$ kabul edelim.*
Yakınsak bir serinin genel terimi sıfıra gider (Teorem 34.2):

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x_1-x_0)^n = 0.$$

Yakınsak her dizi sınırlıdır (bkz. Analiz 1). Dolayısıyla $\big(\, a_n(x_1-x_0)^n\big)_{n\geq 0}$ dizisi sınırlıdır: öyle bir $M > 0$ sayısı vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$| \, a_n(x_1-x_0)^n \, | \leq M$$

olur.
Adım 2: Karşılaştırma testinin uygulanması. *Şimdi $| x - x_0 | < | x_1 - x_0 |$ koşulunu sağlayan bir x alalım ve*

$$q = \left| \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right|$$

diyelim. $x_1 \neq x_0$ olduğundan bu bölme anlamlıdır ve varsayım gereği $0 \leq q < 1$'dir.
Serimizin genel teriminin mutlak değerini, $(x_1-x_0)^n$ çarpanıyla yapay olarak çarpıp bölerek yeniden yazalım. Her $n \geq 0$ için

$$| \, a_n(x-x_0)^n \, | = | \, a_n(x_1-x_0)^n \, | \cdot \left| \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right|^n \leq Mq^n$$

elde ederiz; son adımda Adım 1'deki sınırı kullandık.
$0 \leq q < 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ geometrik serisi yakınsaktır (Teorem 34.5); toplamı $\dfrac{M}{1-q}$'dur. Negatif olmayan terimli seriler için karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n(x-x_0)^n \mid$$

serisi yakınsar. Bu ise tam olarak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *serisinin mutlak yakınsak olması demektir. Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan, seri bu noktalarda ayrıca yakınsaktır.*
■

Teoremin verdiği sonucun sıradan yakınsaklıktan **daha güçlü** olduğuna dikkat edelim: x_1'de yalnızca yakınsaklık varsayıldı, ama daha içeride mutlak yakınsaklık elde edildi. Bu, kuvvet serilerinin en kullanışlı özelliklerinden biridir; örneğin serinin terimlerini yeniden düzenlemek ya da gruplamak, açık aralığın içindeki noktalarda hiçbir tehlike taşımaz.
Aynı teoremi ters çevirerek okuduğumuzda ıraksaklık hakkında bilgi elde ederiz. "Yakınsaklık içeri doğru taşınıyorsa, ıraksaklık dışarı doğru taşınmalıdır."

Sonuç 42.1 (Iraksaklığın Dışarı Taşınması). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *kuvvet serisi bir* $x = x_2$ *sayısı için ıraksak olsun. O hâlde seri,*

$$\mid x-x_0 \mid > \mid x_2-x_0 \mid$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ *için ıraksaktır.*

İspat.
Olmayana ergi yöntemini kullanalım. $\mid x-x_0 \mid > \mid x_2-x_0 \mid$ *koşulunu sağlayan bir* x *noktasında serinin* ***yakınsak*** *olduğunu varsayalım.*
Bu durumda Teorem 42.1'i $x_1 = x$ *alarak uygulayabiliriz: seri* x*'te yakınsadığından,* $\mid y-x_0 \mid < \mid x-x_0 \mid$ *olan her* y *noktasında mutlak yakınsaktır. Varsayımımız gereği* $\mid x_2-x_0 \mid < \mid x-x_0 \mid$ *olduğundan,* $y = x_2$ *seçimi bu koşulu sağlar. Öyleyse seri* x_2*'de mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.*
Bu ise serinin x_2*'de ıraksak olduğu hipoteziyle çelişir. Demek ki varsayımımız yanlıştır ve seri,* $\mid x-x_0 \mid > \mid x_2-x_0 \mid$ *olan her* x*'te ıraksar.*
■

Bu iki sonuç bir arada şu resmi çizer: yakınsaklık noktaları merkeze yakın, ıraksaklık noktaları merkezden uzaktır ve ikisi birbirine karışamaz. Öyleyse ikisini ayıran bir "eşik uzaklık" olmalıdır. Bu eşik uzaklığa yarıçap diyeceğiz.

Tanım 42.2 (Yakınsaklık Aralığı ve Yakınsaklık Yarıçapı). Bir kuvvet serisinin yakınsak olduğu bütün $x \in \mathbb{R}$ değerlerinin kümesine serinin **yakınsaklık kümesi** denir ve I ile gösterilir. Aşağıda göreceğimiz gibi bu küme her zaman bir aralıktır; bu yüzden ona **yakınsaklık aralığı** (interval of convergence) da denir.
$R \geq 0$ bir reel sayı ya da $R = +\infty$ olmak üzere

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$$

kapsamalarını sağlayan **tek** bir R vardır. Bu sayıya serinin **yakınsaklık yarıçapı** (radius of convergence) denir. Burada $R = +\infty$ için her iki aralık da $\mathbb{R}$ olarak, $R = 0$ için ise sol taraf boş küme, sağ taraf $\{x_0\}$ olarak okunur. Buna göre:

- $R = 0$ ise seri yalnızca merkezde, $x = x_0$ noktasında yakınsar.
- $R = +\infty$ ise seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsar.
- $0 < R < +\infty$ ise seri $\mid x-x_0 \mid < R$ olan her noktada (mutlak) yakınsar, $\mid x-x_0 \mid > R$ olan her noktada ıraksar; $x = x_0 - R$ ve $x = x_0 + R$ uç noktalarında yakınsaklık ayrıca incelenmelidir.

Tanımda iki iddia var: böyle bir R'nin **var** olduğu ve **tek** olduğu. İkisini de ispatlayalım; varlık ispatı, R'nin nasıl hesaplanabileceğine dair ilk formülü de verecek.

Önerme 42.1 (Yarıçapın Varlığı ve Tekliği). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *bir kuvvet serisi ve*

$$S = \left\{ \mid x-x_0 \mid : x \in \mathbb{R} \text{ ve seri } x \text{ noktasında yakınsak} \right\}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun. S boş değildir. Ayrıca

$$R = \begin{cases} \sup S, & S \text{ üstten sınırlı ise} \\ +\infty, & S \text{ üstten sınırlı değilse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan sayı, Tanım 42.2'ndaki kapsamaları sağlayan tek sayıdır. Dahası seri, $|\, x - x_0 \,| < R$ olan her noktada mutlak yakınsaktır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: S boş değildir.*** *Seri merkezinde her zaman yakınsadığından ($x = x_0$ için toplam a_0'dır) $0 \in S$'dir. Ayrıca $S \subseteq [0, \infty)$ olduğundan S alttan sınırlıdır. Öyleyse S üstten sınırlıysa, supremumun varlık aksiyomu gereği $\sup S$ vardır (bkz. Analiz 1) ve $R = \sup S \geq 0$'dır.*
> ***Adım 2: $|\, x - x_0 \,| < R$ ise seri x'te mutlak yakınsar.*** *x, $|\, x - x_0 \,| < R$ koşulunu sağlasın.*
> Durum (a): *R sonlu. $|\, x - x_0 \,| < R = \sup S$ olduğundan, $|\, x - x_0 \,|$ sayısı S için bir üst sınır olamaz; supremumun karakterizasyonu (bkz. Analiz 1) gereği öyle bir $s \in S$ vardır ki*
>
> $$|\, x - x_0 \,| < s \leq R$$
>
> *olur. $s \in S$ demek, $|\, x_1 - x_0 \,| = s$ ve seri x_1'de yakınsak olacak biçimde bir x_1 var demektir. O hâlde $|\, x - x_0 \,| < s = |\, x_1 - x_0 \,|$ olduğundan Teorem 42.1 gereği seri x'te mutlak yakınsaktır.*
> Durum (b): *$R = +\infty$. Bu durumda S üstten sınırlı olmadığından, verilen x için $s > |\, x - x_0 \,|$ olacak biçimde bir $s \in S$ bulunur ve yukarıdaki akıl yürütme aynen tekrarlanır.*
> *Her iki durumda da $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I$ elde ederiz ve bu aralıkta yakınsaklık mutlaktır.*
> ***Adım 3: $|\, x - x_0 \,| > R$ ise seri x'te ıraksar.*** *Bu durumda R sonludur (aksi hâlde böyle bir x yoktur). Seri x'te yakınsasaydı, S kümesinin tanımı gereği $|\, x - x_0 \,| \in S$ olurdu; oysa $R = \sup S$ bir üst sınırdır ve $|\, x - x_0 \,| > R$'dir; çelişki. Öyleyse seri x'te ıraksar. Bu da $I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$ demektir.*
> ***Adım 4: Teklik.*** *$R_1 < R_2$ olmak üzere iki sayının da kapsamaları sağladığını varsayalım. R_1 sonludur. $R_1 < t < R_2$ olacak biçimde bir t reel sayısı seçelim (bu her zaman mümkündür; $R_2 = +\infty$ ise $t = R_1 + 1$ alınabilir) ve $x = x_0 + t$ noktasına bakalım.*
> *$|\, x - x_0 \,| = t < R_2$ olduğundan R_2'nin sağladığı soldaki kapsama gereği $x \in I$'dir. Öte yandan $|\, x - x_0 \,| = t > R_1$ olduğundan R_1'in sağladığı sağdaki kapsama gereği $x \notin I$'dir. Bu bir çelişkidir. Demek ki kapsamaları sağlayan sayı tektir.*
> ■

Bu önerme, girişte söylediğimiz "yalnızca üç seçenek vardır" iddiasını da ispatlamış olur: $R = 0$ ise $I = \{x_0\}$, $R = +\infty$ ise $I = \mathbb{R}$, $0 < R < \infty$ ise I, uçları $x_0 \pm R$ olan bir aralıktır. Her üç durumda da I bir aralıktır (bkz. Analiz 1).

> **i** Yarıçap bir uzaklıktır
>
> R sayısının anlamı şudur: merkezden ölçüldüğünde, serinin yakınsadığı noktaların ulaşabildiği **en uzak mesafe**. "Yarıçap" adı buradan gelir; I kümesi, merkezi x_0 ve yarıçapı R olan bir "top"tur — reel eksende bu top bir aralıktır.
> Yarıçap kavramı yakınsaklık kümesini tam olarak belirlemez; yalnızca iki uç noktaya kadar belirler. R'yi bulmak işin kolay kısmıdır, uç noktaları incelemek ayrı bir iştir. Aşağıda önce yarıçapı hesaplamanın iki formülünü vereceğiz, sonra uç noktalara döneceğiz.

42.3 Cauchy–Hadamard Teoremi

Yarıçapı katsayılardan doğrudan okuyan formül, kök testinin kuvvet serisine uygulanmasından çıkar. Kök testinin (Teorem 37.1) en güçlü biçimi limit yerine üst limit kullanır; bu yüzden aşağıdaki formülde de lim sup görünür. Üst limit her dizi için (genişletilmiş anlamda) var olduğundan, formül **istisnasız her** kuvvet serisi için geçerlidir.

Teorem 42.2 (Cauchy–Hadamard Teoremi). *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ bir kuvvet serisi ve*

$$r = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun (bkz. Analiz 1). Burada $r \in [0, +\infty]$'dur. Serinin yakınsaklık yarıçapı

$$R = \begin{cases} \frac{1}{r}, & 0 < r < +\infty \\ +\infty, & r = 0 \\ 0, & r = +\infty \end{cases}$$

sayısıdır. Ayrıntılı olarak:
(i) *$0 < R < +\infty$ ise seri $|\, x - x_0 \,| < R$ olan her x için mutlak yakınsar, $|\, x - x_0 \,| > R$ olan her x için ıraksar.*
(ii) *$R = 0$ ise seri yalnızca $x = x_0$ noktasında yakınsar.*
(iii) *$R = +\infty$ ise seri her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsar.*

> ***İspat.***
> *Serinin genel terimini $b_n = a_n(x - x_0)^n$ ile gösterelim ve buna kök testini uygulayalım. Test için gereken büyüklük*
>
> $$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, b_n \,|}$$
>
> *sayısıdır.*
> ***Adım 1: α'nın hesabı.*** *$x = x_0$ noktasında seri zaten yakınsak olduğundan bu noktayı bir kenara koyup $x \neq x_0$ alalım. Bu durumda $c = |\, x - x_0 \,|$ sayısı **pozitif bir sabittir** ve*
>
> $$\sqrt[n]{|\, b_n \,|} = \sqrt[n]{|\, a_n \,| \cdot |\, x - x_0 \,|^n} = \sqrt[n]{|\, a_n \,|} \cdot |\, x - x_0 \,| = c \cdot \sqrt[n]{|\, a_n \,|}$$
>
> *olur. Bir diziyi pozitif bir sabitle çarpmak üst limiti aynı sabitle çarpar; yani $c > 0$ için $\limsup(c\, t_n) = c \limsup t_n$'dir (bu, $\limsup t_n = +\infty$ hâlinde $c \cdot (+\infty) = +\infty$ anlaşmasıyla birlikte geçerlidir). Öyleyse*
>
> $$\alpha = r\,|\, x - x_0 \,| \,.$$
>
> ***Adım 2: Durum $0 < r < +\infty$, yani $R = \dfrac{1}{r}$.***
> *Eğer $|\, x - x_0 \,| < R$ ise $\alpha = r\,|\, x - x_0 \,| < rR = 1$ olur. Kök testi (Teorem 37.1) gereği $\sum |\, b_n \,|$ yakınsar, yani seri mutlak yakınsaktır.*
> *Eğer $|\, x - x_0 \,| > R$ ise $\alpha = r\,|\, x - x_0 \,| > rR = 1$ olur. Kök testinin ıraksaklık kısmı gereği seri ıraksar. Bu adımın nedenini hatırlatalım: $\limsup \sqrt[n]{|\, b_n \,|} > 1$ olması, sonsuz çoklukta n için $\sqrt[n]{|\, b_n \,|} > 1$, yani $|\, b_n \,| > 1$ olması demektir; bu durumda $b_n \to 0$ olamaz ve Sonuç 34.1 gereği seri ıraksar.*
> *Böylece (i) ispatlanmış olur; bulunan R sayısı Tanım 42.2'ndaki kapsamaları sağladığından ve Önerme 42.1 gereği böyle bir sayı tek olduğundan, $R = \dfrac{1}{r}$ gerçekten yakınsaklık yarıçapıdır.*
> ***Adım 3: Durum $r = +\infty$, yani $R = 0$.*** *$x \neq x_0$ olan her nokta için $|\, x - x_0 \,| > 0$ olduğundan $\alpha = +\infty > 1$'dir ve Adım 2'deki gerekçeyle seri ıraksar. Merkezde ise seri yakınsaktır. Demek ki $I = \{x_0\}$'dır ve yarıçap 0'dır; bu da (ii)'dir.*
> ***Adım 4: Durum $r = 0$, yani $R = +\infty$.*** *Her $x \neq x_0$ için $\alpha = 0 \cdot |\, x - x_0 \,| = 0 < 1$ olur; kök testi gereği seri mutlak yakınsaktır. Merkezdeki yakınsaklıkla birlikte $I = \mathbb{R}$ elde edilir; bu da (iii)'tür.*
> ■

Cauchy–Hadamard teoremi kuramsal olarak son sözü söyler: yarıçap, yalnızca katsayı dizisinin büyüme hızına bağlıdır ve r ile R arasındaki ilişki her zaman "ters orantı" biçimindedir. Formülü hemen bir örnekte çalıştıralım.

Örnek 42.2 (Yarıçapı Sıfır Olan Bir Seri). $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

> **Çözüm.**
> Seri sıfır merkezlidir ve katsayıları $a_n = n^n$'dir. Cauchy–Hadamard teoremi için gereken üst limiti hesaplayalım:
>
> $$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

(Burada dizi $n \to \infty$ iken sonsuza ıraksadığından üst limit de $+\infty$'dur.)
Teorem 42.2 gereği yakınsaklık yarıçapı $R = 0$'dır: seri yalnızca merkezinde, $x = 0$ noktasında yakınsar. Yakınsaklık kümesi tek noktalı $I = \{0\}$ kümesidir.
Bu sonucu doğrudan da görebiliriz: $x \neq 0$ sabitlense bile, $n > \dfrac{1}{|\,x\,|}$ olan her n için $|\,n^n x^n\,| = (n\,|\,x\,|)^n > 1$ olur; genel terim sıfıra gitmediğinden seri ıraksar (Sonuç 34.1). Katsayıların büyüme hızı öyle yüksektir ki hiçbir $x \neq 0$ değeri bunu dengeleyemez.
■

42.4 Katsayı Oranıyla Yarıçap

Uygulamada karşılaşılan katsayılar çoğu zaman faktöriyel, üstel ifade ya da polinom içerir; böyle dizilerde $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ hesabı yerine $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ oranını hesaplamak çok daha kolaydır. Aşağıdaki teorem, limit var olduğunda bu oranın doğrudan yarıçapı verdiğini söyler.
Teoremin ispatı, kök ve oran testleri arasındaki temel eşitsizliğe (Teorem 37.3) dayanır. Hatırlayalım: pozitif terimli bir (c_n) dizisi için

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu zincir, oranın limiti var olduğunda kökün limitinin de var olup aynı değere eşit olmasını hemen verir.

Teorem 42.3 (Katsayı Oranıyla Yarıçap Formülü). *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ kuvvet serisinde, yeterince büyük her n için $a_n \neq 0$ olsun ve*

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

limiti (genişletilmiş anlamda, $L \in [0, +\infty]$ olmak üzere) var olsun. O hâlde serinin yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{L}$$

sayısıdır; burada $\dfrac{1}{0} = +\infty$ ve $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ anlaşmaları kullanılır.

İspat.
$c_n = |\,a_n\,|$ diyelim; hipotez gereği yeterince büyük n'ler için $c_n > 0$'dır ve sonlu sayıda terimi değiştirmek ne serinin yakınsaklığını ne de $\limsup \sqrt[n]{c_n}$ değerini etkilediğinden, genelliği bozmadan her n için $c_n > 0$ kabul edebiliriz. Amacımız

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = L$$

olduğunu göstermektir; bunu gösterirsek Teorem 42.2 doğrudan $R = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{L}$ verir.
Durum 1: $0 < L < +\infty$. *Oranın limiti L olduğundan alt ve üst limiti de L'dir:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = L.$$

Bunları Teorem 37.3'ndeki zincire yerleştirirsek

$$L \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le L$$

olur. Sıkışan bütün terimler L'ye eşitlenir; özellikle $\sqrt[n]{c_n}$ dizisinin limiti vardır ve $r = L$'dir. Teorem 42.2 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$R = \frac{1}{r} = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

bulunur (son eşitlik, $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *dizisinin* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *dizisinin çarpmaya göre tersi olmasından ve* $L \neq 0$ *olmasından çıkar).*

Durum 2: $\boldsymbol{L = 0}$**.** *Zincirin sağ ucu*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0$$

verir. $\sqrt[n]{c_n} \geq 0$ *olduğundan* $r = 0$*'dır ve Teorem 42.2 gereği* $R = +\infty$*'dur. Öte yandan* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0$ *olması* $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to +\infty$ *demektir; yani* $R = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = +\infty$ *eşitliği,* $\frac{1}{0} = +\infty$ *anlaşmasıyla korunur.*

Durum 3: $\boldsymbol{L = +\infty}$**.** *Bu kez zincirin sol ucunu kullanırız:*

$$+\infty = \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n},$$

yani $r = +\infty$*'dur ve Teorem 42.2 gereği* $R = 0$*'dır. Bu durumda* $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to 0$ *olduğundan yine* $R = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *eşitliği sağlanır.*

Üç durum bütün olasılıkları kapsadığından ispat tamamlanmıştır.

■

⚠ Oran formülünün iki koşulu

Formül iki koşula bağlıdır ve ikisi de gerçekten gereklidir.

Katsayılar sıfırdan farklı olmalıdır. Katsayı dizisinde sonsuz çoklukta sıfır varsa $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ oranı sonsuz çoklukta n için tanımsızdır ve formül anlamını yitirir. Bu, aşağıda göreceğimiz **eksik terimli** serilerin tam olarak durumudur.

Limit var olmalıdır. Örneğin katsayıları $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = 2$ olan seride oran $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ dizisi 2 ile $\frac{1}{2}$ arasında salınır ve limiti yoktur; oysa $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ dizisi 1'e yakınsadığından Cauchy–Hadamard formülü sorunsuz çalışır ve $R = 1$ verir.

Buna karşılık Cauchy–Hadamard formülü **hiçbir koşul** gerektirmez; üst limit her zaman vardır. Oran formülü yalnızca bir hesaplama kolaylığıdır; kuramsal son söz her zaman Teorem 42.2'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Formülü ezberlemeyen yol

Yarıçapı bulmak için formülü hiç kullanmadan, oran testini (Teorem 37.2) doğrudan serinin **terimlerine** uygulamak da mümkündür; hatta çoğu zaman daha güvenlidir. x'i sabit tutup $b_n = a_n(x - x_0)^n$ diyelim ve

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |\, x - x_0 \,| = L\,|\, x - x_0 \,|$$

limitini hesaplayalım. Oran testi, bu limit 1'den küçükken mutlak yakınsaklık, büyükken ıraksaklık verir; yani

$$L\,|\, x - x_0 \,| < 1 \Leftrightarrow |\, x - x_0 \,| < \frac{1}{L}$$

koşulu doğrudan yarıçapı okutur (buradaki denklik $L > 0$ içindir; $L = 0$ ise limit her x için $0 < 1$ olur ve seri her noktada mutlak yakınsar, yani $R = +\infty$'dur; $L = +\infty$ ise $x \neq x_0$ olan her noktada limit $+\infty$ olur ve $R = 0$ çıkar). Bu yöntemin üstünlüğü, katsayılar arasında sıfırlar olduğunda ya da seri x'in kuvvetlerini atlayarak ilerlediğinde de çalışmasıdır: böyle bir seride b_n olarak serinin **yazılan** terimleri alınır, oran da ardışık iki yazılı terim arasında hesaplanır; sıfır katsayılar hesaba hiç girmediğinden $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oranının tanımsız kalması bir sorun çıkarmaz.

Şimdi formülleri örneklerde çalıştıralım. Her örnekte iki adım vardır: önce yarıçap, sonra uç noktalar.

Örnek 42.3 (Merkezi Sıfırdan Farklı Bir Seri). $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{2^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Merkez ve katsayılar. Seriyi Tanım 42.1'ndeki biçime oturtalım: $(x+1)^n = \big(\, x - (-1)\big)^n$ olduğundan merkez $x_0 = -1$'dir ve katsayılar $a_n = \dfrac{1}{2^n}$'dir.
Adım 2: Yarıçap. Katsayılar sıfırdan farklıdır ve

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/2^n}{1/2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

olur (Teorem 42.3). Aynı sonuç Cauchy–Hadamard formülüyle de çıkar: $\sqrt[n]{|\, a_n \,|} = \dfrac{1}{2}$ sabit dizisidir, dolayısıyla $r = \dfrac{1}{2}$ ve $R = 2$'dir.
Demek ki seri $|\, x + 1 \,| < 2$, yani $-3 < x < 1$ olan her noktada mutlak yakınsar; $|\, x + 1 \,| > 2$ olan her noktada ıraksar.
Adım 3: Uç noktalar. İki uç nokta $x = -3$ ve $x = 1$'dir; her birini seride yerine koyarak elde edilen **sayı** serisini inceleyeceğiz.

- $x = -3$ için: $(x+1)^n = (-2)^n$ olduğundan seri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

  serisine dönüşür. $(-1)^n$ dizisinin limiti olmadığından genel terim sıfıra gitmez ve Sonuç 34.1 gereği seri ıraksar.

- $x = 1$ için: $(x+1)^n = 2^n$ olduğundan seri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

  serisine dönüşür. Genel terim 1'dir, sıfıra gitmez; seri yine ıraksar (kısmi toplamlar $s_n = n + 1 \to +\infty$).

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. Yakınsaklık aralığı açık aralıktır:

$$I = (-3, 1), \qquad R = 2.$$

Serinin toplamını da yazabiliriz: $\mid x+1 \mid < 2$ için ortak çarpanı $\dfrac{x+1}{2}$ olan geometrik seri söz konusudur, dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = \frac{2}{1-x}.$$

■

Örnek 42.4 (Yarı Açık Aralık Veren Seri). $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Yarıçap. Merkez $x_0 = 0$, katsayılar $a_n = \dfrac{1}{n}$'dir ($n \geq 1$). Hepsi sıfırdan farklıdır ve

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

bulunur. Öyleyse seri $\mid x \mid < 1$ için mutlak yakınsar, $\mid x \mid > 1$ için ıraksar.
Adım 2: Uç noktalar. Uç noktalar $x = -1$ ve $x = 1$'dir.

- $x = -1$ için seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

alterne harmonik seri olur. $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisi azalarak sıfıra gittiğinden Leibniz alterne seri testi (Sonuç 40.1) gereği bu seri **yakınsaktır**. (Yakınsaklık şartlıdır: terimlerin mutlak değerlerinden oluşan $\sum \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksar.)

- $x = 1$ için seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

harmonik seri olur; $p = 1$ için p-serisi ıraksaktır (Teorem 36.2).

Sonuç. Bir uçta yakınsaklık, ötekinde ıraksaklık vardır:

$$I = [-1, 1), \qquad R = 1.$$

Bu örnek, yakınsaklık kümesinin merkez etrafında **simetrik olmak zorunda olmadığını** gösterir: simetri yalnızca açık aralık için geçerlidir, uç noktalar birbirinden bağımsız davranabilir.
■

Örnek 42.5 (Yarıçapı Sonsuz Olan Seri). $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ kuvvet serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Merkez $x_0 = 0$, katsayılar $a_n = \dfrac{1}{n!}$'dir. Katsayılar sıfırdan farklıdır ve

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Teorem 42.3 gereği yarıçap sonsuzdur: seri **her** reel sayı için mutlak yakınsar ve yakınsaklık aralığı

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

olur. Uç nokta yoktur; incelenecek bir şey kalmaz.
Aynı sonuca oran testini doğrudan terimlere uygulayarak da varırız: sabit bir $x \neq 0$ için

$$\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \frac{|\,x\,|}{n+1} \to 0 < 1$$

olduğundan Teorem 37.2 seri için mutlak yakınsaklık verir.
Bu seri, Taylor Formülü bölümünden tanıdıktır: kısmi toplamları e^x fonksiyonunun Maclaurin polinomlarıdır ve toplamının gerçekten e^x olduğu, Lagrange kalan teriminin (Teorem 12.1) sıfıra gittiği gösterilerek elde edilmişti (Örnek 12.1). Şimdilik bizi ilgilendiren yalnızca yakınsaklığın her yerde olduğudur.
■

42.5 Uç Noktalarda Ne Olur?

Yarıçap hesabı bittiğinde iş bitmez. $|\,x - x_0\,| = R$ olan iki nokta, bütün testlerin sessiz kaldığı yerdir.

⚠ Uç noktalarda hiçbir test bilgi vermez

$|\,x - x_0\,| = R$ alındığında kök testinde $\alpha = r \cdot R = 1$, oran testinde $L\,|\,x - x_0\,| = 1$ olur. Hem Teorem 37.1 hem de Teorem 37.2, ilgili limitin tam olarak 1 olduğu durumda **sonuçsuzdur**. Bu bir eksiklik değil, kaçınılmaz bir durumdur: aşağıda göreceğimiz gibi uç noktalarda dört farklı davranışın hepsi gerçekleşebilir.
Öyleyse yakınsaklık kümesini tam olarak belirlemek için tek yol vardır: $x = x_0 - R$ ve $x = x_0 + R$ değerlerini seride **yerine koymak** ve ortaya çıkan iki sayı serisini, sayı serileri için geliştirdiğimiz testlerle (karşılaştırma, p-serisi, Leibniz, Dirichlet, Raabe gibi) ayrı ayrı incelemek.

Dört olasılığın hepsinin gerçekten ortaya çıktığını, hepsi $R = 1$ yarıçaplı ve sıfır merkezli dört seriyle gösterelim.

Önerme 42.2 (Uç Noktalarda Dört Olasılık). *Aşağıdaki dört kuvvet serisinin de merkezi $x_0 = 0$ ve yakınsaklık yarıçapı $R = 1$'dir; buna karşın yakınsaklık kümeleri birbirinden farklıdır:*

Seri	*Yakınsaklık kümesi*
$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$	$[-1, 1]$ *(kapalı)*
$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$	$[-1, 1)$ *(soldan kapalı)*
$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$	$(-1, 1]$ *(sağdan kapalı)*
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$ *(açık)*

Dolayısıyla yarıçap, yakınsaklık kümesini belirlemeye tek başına yetmez.

İspat.
Yarıçapların hepsi 1'dir. *Dört serinin katsayıları sırasıyla $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{n}$ ve 1'dir. Katsayı oranları*

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1, \qquad \frac{n+1}{n} \to 1, \qquad \left|\frac{(-1)^n/n}{(-1)^{n+1}/(n+1)}\right| = \frac{n+1}{n} \to 1, \qquad \frac{1}{1} = 1$$

olduğundan Teorem 42.3 gereği dördünde de $R = 1$'dir. Öyleyse hepsi $(-1, 1)$ üzerinde mutlak yakınsar, $|\,x\,| > 1$ için ıraksar; geriye yalnızca $x = \pm 1$ noktaları kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci seri: $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$. *$x=1$ için seri $\sum \dfrac{1}{n^2}$ olur; $p=2>1$ olduğundan Teorem 36.2 gereği yakınsar. $x=-1$ için seri $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ olur; terimlerinin mutlak değerleri yine $\dfrac{1}{n^2}$ olduğundan seri mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır. Her iki uç da yakınsak: $I=[-1,1]$.*

İkinci seri: $\sum \dfrac{x^n}{n}$. *Örnek 42.4'de tamamen incelendi: $x=1$'de harmonik seri ıraksar, $x=-1$'de alterne harmonik seri Leibniz testiyle (Sonuç 40.1) yakınsar. Öyleyse $I=[-1,1)$.*

Üçüncü seri: $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. *Bu seri, ikinci serideki x yerine $-x$ konularak elde edilir; nitekim $\dfrac{(-1)^n x^n}{n} = \dfrac{(-x)^n}{n}$'dir. Bu yüzden yakınsaklık kümesi ikinci serininkinin sıfıra göre yansımasıdır. Doğrudan da görelim: $x=1$ için seri $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$, yani yakınsak alterne harmonik seridir; $x=-1$ için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ıraksak harmonik seridir. Öyleyse $I=(-1,1]$.

Dördüncü seri: $\sum x^n$. *Örnek 42.1'nde görüldüğü gibi $x=1$ için $\sum 1$, $x=-1$ için $\sum(-1)^n$ elde edilir; her ikisinde de genel terim sıfıra gitmediğinden seri ıraksar (Sonuç 34.1). Öyleyse $I=(-1,1)$.*

Dört olasılığın dördü de gerçekleşti; demek ki uç noktalardaki davranış yarıçaptan okunamaz.

■

Bu dört serinin ortak yönü, katsayılarının "birbirine çok yakın" olmasıdır: $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n}$ ve 1 dizilerinin hepsinin n'inci kökü 1'e gider. Yakınsaklık yarıçapı, katsayıların yalnızca **üstel mertebesini** görür; n'in kuvvetleri gibi "yavaş" çarpanları görmez. Uç noktalardaki fark tam da bu görülmeyen çarpanlardan doğar.

Şimdi merkezi sıfırdan farklı, uç noktaları farklı davranan tam bir örnek çözelim.

Örnek 42.6 (Uç Noktaların Ayrı Ayrı İncelenmesi). $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}$ kuvvet serisinin merkezini, yarıçapını ve yakınsaklık kümesini bulunuz; kümenin hangi noktalarında yakınsaklığın mutlak olduğunu belirtiniz.

Çözüm.

Adım 1: Merkez ve yarıçap. Merkez $x_0=2$, katsayılar $a_n=\dfrac{1}{n\cdot 3^n}$'dir. Bütün katsayılar pozitiftir ve

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(n3^n)}{1/\left((n+1)3^{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{n+1}{n} = 3$$

olur. Öyleyse seri $|x-2|<3$, yani $-1<x<5$ olan her noktada mutlak yakınsar; $|x-2|>3$ olan her noktada ıraksar.

Adım 2: Sağ uç, $x=5$. Serimizde $x=5$ koyarsak $(x-2)^n=3^n$ olur ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

harmonik serisi elde edilir; bu seri ıraksaktır (Teorem 36.2, $p=1$). Demek ki $5\notin I$.

Adım 3: Sol uç, $x=-1$. Bu kez $(x-2)^n=(-3)^n$ olur ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

alterne harmonik serisi elde edilir. $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisi azalarak sıfıra gittiğinden Leibniz testi (Sonuç 40.1) gereği seri yakınsaktır. Demek ki $-1\in I$.

Sonuç.

$$I=[-1,5), \qquad R=3, \qquad x_0=2.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yakınsaklık, açık aralık $(-1,5)$ üzerinde mutlaktır. Sol uç noktada, yani $x=-1$'de, yakınsaklık yalnızca şartlıdır: terimlerin mutlak değerlerinden oluşan seri harmonik seridir ve ıraksar. Bu, mutlak yakınsaklık bölgesinin $(-1,5)$, yakınsaklık bölgesinin ise $[-1,5)$ olması demektir; ikisi yalnızca uç noktalarda ayrılabilir.
■

42.6 Eksik Terimli Seriler

Bazı serilerde x'in bütün kuvvetleri görünmez; yalnızca çift kuvvetler, yalnızca tek kuvvetler ya da daha seyrek bir alt küme görünür. Böyle serilere **eksik terimli** kuvvet serileri diyeceğiz. Bunlar da Tanım 42.1 anlamında kuvvet serileridir; eksik kuvvetlerin katsayısı sıfırdır. Ama katsayı dizisinde sonsuz çoklukta sıfır bulunduğundan Teorem 42.3 **doğrudan uygulanamaz**: $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ oranı sonsuz çoklukta n için tanımsızdır.
İki çıkış yolu vardır ve her ikisi de kullanışlıdır:

- **Cauchy–Hadamard formülü** her zaman çalışır: sıfır katsayılar $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ dizisine 0 değerini koyar, 0 ise üst limiti hiçbir zaman yukarı çekmez. Dolayısıyla lim sup'ı sıfırdan farklı katsayılar belirler; tek yapılması gereken, kökün derecesi olarak katsayının serideki **gerçek indisini** almaktır: x^{2n} teriminin katsayısı için $2n$'inci kök alınır, n'inci kök değil.
- **Oran testini doğrudan serinin terimlerine uygulamak** (Teorem 37.2) çoğu zaman en kısa yoldur: x sabit tutulur, ardışık iki **terimin** oranı hesaplanır ve bu oranın mutlak değerinin limitinin 1'den küçük olması istenir. Bu yöntem sıfır katsayılardan hiç etkilenmez, çünkü seride görünmeyen terimler zaten yazılmaz.

Örnek 42.7 (Eksik Terimli İki Seri). Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{n}$

Çözüm.
a) Seriyi $\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ biçiminde yazarsak katsayılar

$$a_m=\begin{cases}\frac{1}{2^m}, & m \text{ çift}\\ 0, & m \text{ tek}\end{cases}$$

olur; nitekim $m=2n$ için $\dfrac{1}{4^n}=\dfrac{1}{2^{2n}}=\dfrac{1}{2^m}$'dir. Tek indisli katsayılar sıfır olduğundan katsayı oranı formülü kullanılamaz.
Birinci yol: Cauchy–Hadamard. m tek iken $\sqrt[m]{|\,a_m\,|}=0$, m çift iken $\sqrt[m]{|\,a_m\,|}=\dfrac{1}{2}$'dir. Dizinin aldığı değerler yalnızca 0 ve $\dfrac{1}{2}$ olduğundan üst limit, sonsuz çoklukta tekrarlanan en büyük değerdir:

$$r=\limsup_{m\to\infty}\sqrt[m]{|\,a_m\,|}=\frac{1}{2}.$$

Teorem 42.2 gereği $R=\dfrac{1}{r}=2$'dir.
İkinci yol: oran testi doğrudan terimlere. $x\neq 0$ sabit olsun, $b_n=\dfrac{x^{2n}}{4^n}$ diyelim. O hâlde

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\left|\frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{x^{2n}}\right|=\frac{x^2}{4}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu oran n'den bağımsızdır; limiti yine $\frac{x^2}{4}$'tür. Teorem 37.2 gereği $\frac{x^2}{4} < 1$, yani $|\,x\,| < 2$ iken seri mutlak yakınsar; $\frac{x^2}{4} > 1$, yani $|\,x\,| > 2$ iken ıraksar. Yarıçap yine $R = 2$ çıkar.

Üçüncü yol: doğrudan geometrik seri. Aslında $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n$ serisi, ortak çarpanı $\frac{x^2}{4}$ olan bir geometrik seridir; Teorem 34.5 gereği ancak ve ancak $\frac{x^2}{4} < 1$ iken yakınsar ve toplamı $\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{4-x^2}$'dir.

Uç noktalar. $x = 2$ ve $x = -2$ için $\frac{x^{2n}}{4^n} = \frac{4^n}{4^n} = 1$ olur; seri $\sum 1$'e dönüşür ve genel terim sıfıra gitmediğinden ıraksar (Sonuç 34.1). Öyleyse

$$I = (-2, 2), \qquad R = 2.$$

b) Merkez $x_0 = 1$'dir ve seride yalnızca 3'ün katı olan kuvvetler görünür; katsayıların üçte ikisi sıfırdır. Oran testini doğrudan terimlere uygulayalım. $x \neq 1$ sabit olsun ve $b_n = \frac{(x-1)^{3n}}{n}$ diyelim:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{(x-1)^{3n+3}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-1)^{3n}}\right| = |\,x-1\,|^3 \cdot \frac{n}{n+1} \to |\,x-1\,|^3 \,.$$

Teorem 37.2 gereği seri $|\,x-1\,|^3 < 1$, yani $|\,x-1\,| < 1$ iken mutlak yakınsar; $|\,x-1\,|^3 > 1$, yani $|\,x-1\,| > 1$ iken ıraksar. Demek ki $R = 1$ ve açık yakınsaklık aralığı $(0, 2)$'dir.

Uç noktalar. $x = 2$ için $(x-1)^{3n} = 1$ olur ve seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisine dönüşür; ıraksar. $x = 0$ için $(x-1)^{3n} = (-1)^{3n} = (-1)^n$ olur (çünkü $3n$ ile n aynı pariteye sahiptir) ve seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

alterne harmonik serisine dönüşür; Leibniz testi (Sonuç 40.1) gereği yakınsar. Öyleyse

$$I = [0, 2), \qquad R = 1.$$

■

i Eksik terimli seride yarıçap ne demektir?

Eksik terimli serilerde bile yakınsaklık kümesinin merkez etrafında bir aralık olduğu değişmez; çünkü Teorem 42.1 ile Sonuç 42.1 hiçbir ek koşul istemez, katsayıların sıfır olup olmamasına bakmaz. Değişen tek şey, yarıçapı **hesaplama** yöntemidir.

Buna karşılık, (a) şıkkındaki gibi bir seride oran testini "katsayılara" uygulayıp $\frac{1/4^n}{1/4^{n+1}} = 4$ bulmak ve $R = 4$ demek **yanlıştır**: o hesap, $\sum \frac{y^n}{4^n}$ serisinin y değişkenine göre yarıçapını verir. Doğru yorum şudur: $y = x^2$ dönüşümüyle seri $|\,y\,| < 4$ için yakınsar, bu da $x^2 < 4$, yani $|\,x\,| < 2$ demektir. Dönüşümü unutmak, yarıçapı ikiye katlar.

42.7 Alıştırmalar

Alıştırma 42.1 (Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık Yarıçapı Üzerine).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n}{n \cdot 2^n}$ serisinin yakınsaklık kümesini bulunuz.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2 \cdot 5^n}$ serisini önce standart biçime getirip yakınsaklık kümesini belirleyiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapının $\frac{1}{e}$ olduğunu gösteriniz ve serinin $x = \frac{1}{e}$ noktasında ıraksadığını ispatlayınız.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ serisinin yakınsaklık kümesini bulunuz.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ serisinin yarıçapının $\sqrt{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$ serisinin yarıçapının ise R^2 olduğunu gösteriniz ($R = 0$ ve $R = +\infty$ durumlarını da yorumlayınız).

g) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ serisi ile terim terim türetilerek elde edilen $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçaplarının aynı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Merkez $x_0 = 3$, katsayılar $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$'dir; hepsi sıfırdan farklıdır. Yarıçap:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n2^n)}{1/\left((n+1)2^{n+1} \right)} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n} = 2.$$

Öyleyse seri $\mid x - 3 \mid < 2$, yani $1 < x < 5$ için mutlak yakınsar.
Uç noktalar: $x = 5$ için $(x-3)^n = 2^n$ olur ve seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

alterne harmonik serisidir; Leibniz testi (Sonuç 40.1) gereği yakınsar. $x = 1$ için $(x-3)^n = (-2)^n$ olur ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

elde edilir; harmonik serinin negatifi ıraksar. Sonuç: $I = (1, 5]$.

b) Katsayılar $a_n = \frac{1}{n^n}$'dir. Cauchy–Hadamard formülü çok kolay uygulanır:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Teorem 42.2 gereği $R = +\infty$'dur; seri her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsar ve $I = \mathbb{R}$'dir. (Oran formülü de aynı sonucu verir ama hesap daha zahmetlidir: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \to +\infty$.)

c) Önce standart biçime getirelim: $2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 5^n} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n.$$

Demek ki merkez $x_0 = -\frac{1}{2}$ ve $a_n = \frac{2^n}{n^2 5^n}$'dir. Yarıçap:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2 5^n} \cdot \frac{(n+1)^2 5^{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{5}{2}.$$

Açık yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = (-3, 2)$'dir.
Uç noktalar: $x = 2$ için $2x + 1 = 5$ olur ve seri $\sum \frac{5^n}{n^2 5^n} = \sum \frac{1}{n^2}$ olur; $p = 2 > 1$ olduğundan yakınsar (Teorem 36.2). $x = -3$ için $2x + 1 = -5$ olur ve seri $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ olur; mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsar. Sonuç: $I = [-3, 2]$.

d) Katsayılar $a_n = \frac{n^n}{n!}$'dir ve hepsi pozitiftir. Katsayı oranını hesaplayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bu dizinin limiti e sayısıdır (bkz. Analiz 1). Teorem 42.3 gereği

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{e}.$$

Şimdi $x = \dfrac{1}{e}$ noktasında ıraksaklığı gösterelim. Bu noktada seri, terimleri

$$b_n = \frac{n^n}{n!\,e^n} > 0$$

olan pozitif terimli seridir. Amacımız $\sum b_n$'in ıraksadığını göstermek. Bunun için b_n için alttan bir tahmin üreteceğiz.
Yardımcı eşitsizlik: her $t > 0$ için

$$\ln(1+t) > \frac{2t}{2+t}.$$

Gerçekten, $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{2t}{2+t}$ diyelim. $h(0) = 0$'dır ve $t > 0$ için

$$h'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{2(2+t)-2t}{(2+t)^2} = \frac{1}{1+t} - \frac{4}{(2+t)^2} = \frac{(2+t)^2 - 4(1+t)}{(1+t)(2+t)^2} = \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} > 0$$

olur. Öyleyse h, $[0,\infty)$ üzerinde kesin artandır ve $t > 0$ için $h(t) > h(0) = 0$'dır.
Eşitsizlikte $t = \dfrac{1}{n}$ alalım:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{2/n}{2+1/n} = \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

Her iki tarafı $n+\dfrac{1}{2} > 0$ ile çarparsak $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > 1$, yani

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+1/n)^n}{e} > \frac{(1+1/n)^n}{(1+1/n)^{n+1/2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

çıkar. Şimdi $c_n = b_n\sqrt{n}$ diyelim. Yukarıdaki eşitsizlik

$$b_{n+1}\sqrt{n+1} > b_n\sqrt{n}, \qquad \text{yani} \qquad c_{n+1} > c_n$$

demektir; (c_n) kesin artandır. Öyleyse her $n \geq 1$ için $c_n \geq c_1 = b_1 = \dfrac{1}{e}$, yani

$$b_n \geq \frac{1}{e\sqrt{n}}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ serisi $p = \dfrac{1}{2} \leq 1$ olan bir p-serisi olduğundan ıraksar (Teorem 36.2). Karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $\sum b_n$ de ıraksar. Demek ki seri $x = \dfrac{1}{e}$ noktasında ıraksaktır ve bu uç nokta yakınsaklık kümesine girmez.
e) Bu bir eksik terimli seridir; tek kuvvetlerin katsayıları sıfırdır. Oran testini doğrudan terimlere uygulayalım: $x \neq 0$ için $b_n = \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$ olmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{3^{n+1} \mid x \mid^{2n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n \mid x \mid^{2n}} = 3x^2 \cdot \frac{n}{n+1} \to 3x^2.$$

Teorem 37.2 gereği $3x^2 < 1$, yani $\mid x \mid < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ iken seri mutlak yakınsar; $3x^2 > 1$ iken ıraksar. Öyleyse $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$'tür.
Uç noktalar: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ için $x^2 = \dfrac{1}{3}$ olduğundan $3^n x^{2n} = 3^n \cdot 3^{-n} = 1$ olur ve seri her iki uçta da $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ harmonik serisine dönüşür; ıraksar. Sonuç:

$$I = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

f) Cauchy–Hadamard formülünü kullanacağız; $r = \limsup \sqrt[n]{\mid a_n \mid}$ olsun, böylece $R = \dfrac{1}{r}$'dir.
Birinci seri. $\sum a_n x^{2n}$ serisinin katsayı dizisi (A_m) ile gösterilirse $A_{2n} = a_n$ ve tek indislerde $A_m = 0$'dır. Yarıçapı doğrudan bulmak yerine, yakınsaklık kümesini karşılaştırmak daha kolaydır: $y = x^2$ dönüşümüyle $\sum a_n x^{2n} = \sum a_n y^n$ olur ve bu seri $\mid y \mid < R$ iken (mutlak) yakınsar, $\mid y \mid > R$ iken ıraksar. $\mid y \mid = x^2$ olduğundan koşul

$$x^2 < R \Leftrightarrow \mid x \mid < \sqrt{R}$$

biçimine gelir; benzer biçimde $x^2 > R$ iken seri ıraksar. Öyleyse $\sum a_n x^{2n}$ serisi $\mid x \mid < \sqrt{R}$ için yakınsar, $\mid x \mid > \sqrt{R}$ için ıraksar; Önerme 42.1'teki teklik gereği yarıçap $\sqrt{R}$'dir. $R = 0$ ise $\sqrt{R} = 0$: her iki seri de yalnızca 0'da yakınsar. $R = +\infty$ ise $x^2 < +\infty$ koşulu her x için sağlandığından yeni serinin yarıçapı da $+\infty$'dur; $\sqrt{+\infty} = +\infty$ anlaşması bu durumu doğru yansıtır.
İkinci seri. $\sum a_n^2 x^n$ serisinin katsayıları a_n^2'dir ve

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_n^2 \mid} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\mid a_n \mid}\right)^2 = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid}\right)^2 = r^2$$

olur. Ortadaki eşitlik şundan çıkar: $t \mapsto t^2$ fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ve kesin artandır, dolayısıyla negatif olmayan bir dizinin karesinin üst limiti, üst limitin karesidir. ($r = +\infty$ hâlinde $r^2 = +\infty$ okunur.) Teorem 42.2 gereği yeni yarıçap

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r}\right)^2 = R^2$$

olur. $R = 0$ ($r = +\infty$) ise yeni yarıçap da 0'dır; $R = +\infty$ ($r = 0$) ise yeni yarıçap da $+\infty$'dur.
g) Genelliği bozmadan $x_0 = 0$ alabiliriz; $u = x - x_0$ dönüşümü yakınsaklık kümesini yalnızca öteler, yarıçapı değiştirmez.
Türev serisinin katsayıları $b_n = (n+1)a_{n+1}$'dir (indis kaydırıldığında $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ olur). Ama üst limit hesabını kolaylaştırmak için önce şu gözlemi yapalım: $x \neq 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

olduğundan, $\sum n a_n x^{n-1}$ ile $\sum n a_n x^n$ serileri aynı $x \neq 0$ değerlerinde yakınsar (sıfırdan farklı bir sabitle çarpmak yakınsaklığı değiştirmez, Teorem 34.4); $x = 0$'da ise ikisi de yakınsaktır. Öyleyse iki serinin yakınsaklık kümeleri, dolayısıyla yarıçapları aynıdır ve $\sum n a_n x^n$ serisinin yarıçapını hesaplamak yeterlidir.
Bu serinin katsayıları $n a_n$'dir. Cauchy–Hadamard için

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \mid a_n \mid} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\mid a_n \mid}\right)$$

hesaplanmalıdır. $\sqrt[n]{n} \to 1$ olduğu bilinmektedir. Bir diziyi, limiti 1 olan pozitif bir diziyle çarpmak üst limiti değiştirmez; nitekim $\varepsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük n'ler için $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(1-\varepsilon)\sqrt[n]{|\,a_n\,|} \le \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|\,a_n\,|} \le (1+\varepsilon)\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$$

olur; üst limit alınıp $\varepsilon \to 0^+$ yapılırsa

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|\,a_n\,|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = r$$

bulunur. Demek ki türev serisinin yarıçapı da $\dfrac{1}{r} = R$'dir.

Bu sonuç, bir sonraki bölümün temel taşıdır: bir kuvvet serisini terim terim türetmek yakınsaklık yarıçapını bozmaz, dolayısıyla türev serisi de aynı açık aralıkta bir fonksiyon tanımlar. (Uç noktalarda durum değişebilir: örneğin $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ serisinin yakınsaklık kümesi $[-1,1]$ iken türev serisi $\sum \dfrac{x^{n-1}}{n}$'nin yakınsaklık kümesi $[-1,1)$'dir.)

■

Bu bölümde bir kuvvet serisinin nerede yakınsadığını tam olarak belirlemeyi öğrendik: merkez etrafında bir yarıçap hesaplanır, uç noktalar ayrıca incelenir. Sıradaki adım, bu yakınsaklık aralığında serinin tanımladığı **fonksiyonu** incelemektir: bu fonksiyon sürekli midir, türevlenebilir midir, terim terim türetip integrallenebilir mi? Yanıtları bir sonraki bölümde bulacağız: Kuvvet Serilerinin Özellikleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

43. Kuvvet Serilerinin Özellikleri

Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık Yarıçapı bölümünde bir kuvvet serisinin yakınsaklık kümesinin şaşırtıcı derecede düzenli olduğunu gördük: her $\sum a_n(x-x_0)^n$ serisi için öyle bir $R \in [0,+\infty]$ sayısı vardır ki seri $|\,x-x_0\,| < R$ olan her noktada mutlak yakınsar, $|\,x-x_0\,| > R$ olan hiçbir noktada yakınsamaz. Böylece açık (x_0-R, x_0+R) aralığı üzerinde bir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

fonksiyonu tanımlanır. Bu bölümün sorusu şudur: **bu f nasıl bir fonksiyondur?**
Yanıt, alınabilecek en iyi yanıttır. f yalnızca sürekli değildir; yakınsaklık aralığında **sonsuz kez türevlenebilirdir**, türevi ve integrali seriyi **terim terim** türeterek ve integralleyerek bulunur, üstelik bu işlemler yakınsaklık yarıçapını hiç değiştirmez. Kısacası bir kuvvet serisi, sonsuz dereceli bir polinom gibi davranır. Bu, sonsuz toplamlarda hiç de olağan bir durum değildir; sonsuz bir toplamın terim terim türetilebilmesi için ciddi bir gerekçe gerekir.
O gerekçeyi **düzgün yakınsaklık** (uniform convergence) kavramı sağlar. Düzgün yakınsaklık kuramının tamamı Analiz 3'ün konusudur; burada yalnızca ihtiyacımız olan kadarını — tanımı, **Weierstrass M-testini** ve düzgün limitin sürekliliği sonucunu — ifade edip ispatlayacağız. İkisi de birkaç satırdır ve kuvvet serilerine uygulandığında bütün bölümün kapısını açar.
Bu bölümde şunları öğreneceğiz: bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaması ne demektir; Weierstrass M-testi ve bir kuvvet serisinin her kapalı alt aralıkta düzgün yakınsaması; toplam fonksiyonunun sürekliliği; terim terim türev ve integral teoremleri ve türev serisinin yarıçapının $\sqrt[n]{n} \to 1$ sayesinde değişmediğinin ispatı; toplam fonksiyonunun C^∞ olması; katsayıların tekliği ve $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ formülü; bilinen serilerden türev ve integralle yeni toplam fonksiyonları üretme; son olarak uç noktalarda ne olduğunu söyleyen **Abel limit teoremi** ve onun iki ünlü meyvesi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

> **i** Önceki bölümden hatırlatma
>
> $\sum_{n\ge 0} a_n(x-x_0)^n$ bir kuvvet serisi ve R onun yakınsaklık yarıçapı olsun.
>
> - **Yakınsaklık aralığı.** Seri $|\,x-x_0\,| < R$ için mutlak yakınsar, $|\,x-x_0\,| > R$ için ıraksar; $|\,x-x_0\,| = R$ olan iki uç noktada her şey olabilir.
> - **Cauchy–Hadamard formülü.** $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ (burada $1/0 = +\infty$ ve $1/(+\infty) = 0$ okunur).
> - **İçeride mutlak yakınsaklık.** $0 < \rho < R$ ise $\sum_{n\ge 0} |\,a_n\,| \rho^n$ yakınsaktır. Aşağıda tekrar tekrar kullanacağımız temel gözlem budur.
>
> Gösterimi hafifletmek için ispatlarda çoğu zaman $x_0 = 0$ alacağız; $t = x - x_0$ ötelemesi genel durumu buna indirger.

43.1 Düzgün Yakınsaklık: Gerektiği Kadarı

Bir fonksiyon serisinin her noktada yakınsaması ile "topluca" yakınsaması arasındaki fark, bu bölümün bütün teoremlerinin dayandığı ayrımdır. Farkı görmek için önce iki kavramı yan yana tanımlayalım.

Tanım 43.1 (Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık). $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme, $g_N : A \to \mathbb{R}$ $(N \in \mathbb{N})$ fonksiyonlar ve $g : A \to \mathbb{R}$ olsun.

 CC BY-NC-SA 4.0

- (g_N) dizisi g'ye A üzerinde **noktasal yakınsar** (pointwise convergence) denir, eğer her $x \in A$ için $\lim_{N\to\infty} g_N(x) = g(x)$ ise; açık yazımıyla: her $x \in A$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_0 = N_0(\varepsilon, x)$ vardır ki $N \geq N_0$ olduğunda $\mid g_N(x) - g(x) \mid < \varepsilon$ olur.
- (g_N) dizisi g'ye A üzerinde **düzgün yakınsar** (uniform convergence) denir, eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_0 = N_0(\varepsilon)$ **varsa ki** $N \geq N_0$ olan her N ve **her** $x \in A$ için $\mid g_N(x) - g(x) \mid < \varepsilon$ sağlanır. Bu, denk olarak

$$\sup_{x\in A} \mid g_N(x) - g(x) \mid \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

  demektir.

Bir $\sum_{n\geq 0} f_n$ fonksiyon serisinin A üzerinde **düzgün yakınsak** olması, kısmi toplamlar dizisi $s_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$'nin A üzerinde düzgün yakınsaması demektir.

İki tanım arasındaki tek fark, N_0'ın x'e bağlı olup olmamasıdır; ama bütün mesele budur. Noktasal yakınsaklıkta hızlar noktadan noktaya sınırsızca yavaşlayabilir; düzgün yakınsaklıkta ise **tek bir** N_0 bütün noktalara birden yeter: $N \geq N_0$ olduğunda g_N'nin grafiği, g'nin grafiği etrafına çizilmiş ε genişliğindeki şeridin tamamen içindedir.
Düzgün yakınsaklığı elde etmenin en pratik yolu, terimleri x'ten bağımsız sayılarla baskılamaktır. Bu fikri söyleyen ölçüt Weierstrass'a aittir.

Teorem 43.1 (Weierstrass M-Testi). *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \geq 0)$ olsun. Öyle $M_n \geq 0$ sayıları bulunsun ki*

$$\mid f_n(x) \mid \leq M_n \quad (\text{her } x \in A \text{ ve her } n \text{ için}) \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

*olsun. O hâlde $\sum_{n\geq 0} f_n$ serisi A üzerinde hem mutlak hem de **düzgün** yakınsar.*

> ***İspat.***
> ***Adım 1: Yakınsaklık.*** *$x \in A$ sabit olsun. Her n için $\mid f_n(x) \mid \leq M_n$ ve $\sum M_n$ yakınsak olduğundan, karşılaştırma testi (Teorem 35.2) gereği $\sum_{n\geq 0} \mid f_n(x) \mid$ yakınsaktır. Mutlak yakınsak bir seri yakınsak olduğundan (Teorem 39.1) $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ de yakınsar; toplamına $f(x)$ diyelim. Böylece $f : A \to \mathbb{R}$ tanımlanmış olur ve seri A üzerinde mutlak yakınsaktır.*
> ***Adım 2: Kalanın tekdüze tahmini.*** *$s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$ kısmi toplamı olsun. $x \in A$ ve $N \in \mathbb{N}$ için*
>
> $$f(x) - s_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$$
>
> *serinin kalanıdır (Tanım 34.3). Sonlu toplamlar için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) her $m > N$ için*
>
> $$\left| \sum_{n=N+1}^{m} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{m} \mid f_n(x) \mid \leq \sum_{n=N+1}^{m} M_n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n =: r_N$$
>
> *verir. Sol taraf $m \to \infty$ iken $\mid f(x) - s_N(x) \mid$'e yakınsar; limitte eşitsizlik korunduğundan her $x \in A$ için $\mid f(x) - s_N(x) \mid \leq r_N$'dir. Dikkat edilecek tek şey, r_N sayısının x'ten **bağımsız** olmasıdır; bütün iş buradadır.*
> ***Adım 3: Kalan sıfıra gider.*** *$\sum M_n$ yakınsak olduğundan kalanı sıfıra gider: $r_N \to 0$. (Aynı sonuç Cauchy ölçütünden de okunur: Teorem 34.3 gereği verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir N_0 vardır ki $m > N \geq N_0$ olduğunda $\sum_{n=N+1}^{m} M_n < \varepsilon$ olur; $m \to \infty$ ile $r_N \leq \varepsilon$ çıkar.) Öyleyse $\varepsilon > 0$ verildiğinde $N \geq N_0$ için $r_N < \varepsilon$ olacak bir N_0 seçilir ve bu N'ler için*
>
> $$\sup_{x\in A} \mid f(x) - s_N(x) \mid \leq r_N < \varepsilon$$
>
> *olur. Bu tam olarak $s_N \to f$ düzgün yakınsaklığıdır (Tanım 43.1).*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi M-testini kuvvet serilerine uygulayalım. Uygulama neredeyse kendiliğindendir: yakınsaklık yarıçapının içinde kalan bir kapalı aralıkta $|x-x_0|^n \le \rho^n$ olur ve $\sum |a_n|\rho^n$ zaten yakınsaktır.

Teorem 43.2 (Kapalı Alt Aralıkta Düzgün Yakınsaklık). *$\sum_{n\ge 0} a_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R>0$ olsun. $0<\rho<R$ olan her ρ için seri*

$$[x_0-\rho,\,x_0+\rho]$$

*kapalı aralığı üzerinde mutlak ve **düzgün** yakınsar.*

> ***İspat.***
> *$A=[x_0-\rho,x_0+\rho]$ ve $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ diyelim. $x\in A$ ise $|x-x_0|\le\rho$ olduğundan*
>
> $$|f_n(x)| = |a_n|\,|x-x_0|^n \le |a_n|\rho^n =: M_n$$
>
> *olur ve M_n sayıları x'ten bağımsızdır. $\rho<R$ olduğundan seri $x=x_0+\rho$ noktasında mutlak yakınsaktır, yani*
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n < \infty.$$
>
> *Weierstrass M-testinin (Teorem 43.1) iki koşulu da sağlandı; öyleyse $\sum a_n(x-x_0)^n$ serisi A üzerinde mutlak ve düzgün yakınsar.*
> ■

> ⚠ Bütün yakınsaklık aralığında düzgünlük beklenmez
>
> Teorem, $[x_0-\rho,x_0+\rho]$ kapalı aralıkları için düzgün yakınsaklık verir; **açık** (x_0-R,x_0+R) aralığının tamamı için değil. Bu bir ihmal değil, gerçek bir sınırdır.
> Geometrik seriyi alalım: $\sum_{n\ge0} x^n$, $R=1$ ve $|x|<1$ için $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ (Teorem 34.5). $s_N(x)=\dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$ olduğundan
>
> $$f(x)-s_N(x)=\frac{x^{N+1}}{1-x}$$
>
> olur. Sabit bir N için $x\to 1^-$ iken pay 1'e, payda 0^+'a gider; dolayısıyla her N için $\sup_{|x|<1}|f(x)-s_N(x)|=+\infty$'dur. Bu supremum sıfıra gitmek şöyle dursun sonlu bile değildir: yakınsaklık $(-1,1)$ üzerinde düzgün değildir. Buna karşın $\rho<1$ için $[-\rho,\rho]$ üzerinde
>
> $$\sup_{|x|\le\rho}\left|\frac{x^{N+1}}{1-x}\right| \le \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}\to 0$$
>
> olur; Teorem 43.2'in söylediği tam olarak budur. Aşağıdaki sonuçlar için bu **yerel** düzgünlük yeter, çünkü süreklilik, türev ve integral yerel kavramlardır: bir noktadaki davranışı belirlemek için o noktayı içeren küçük bir kapalı aralık her zaman yeter.

Düzgün yakınsaklığın neden bu kadar değerli olduğunu şu teorem gösterir: düzgün limit, sürekliliği korur. Noktasal limit korumaz — $g_N(x)=x^N$ dizisi $[0,1]$ üzerinde noktasal olarak $x<1$ için 0, $x=1$ için 1 olan süreksiz fonksiyona yakınsar; her g_N sürekli olduğu hâlde.

Teorem 43.3 (Düzgün Limit Sürekliliği Korur). *$A\subseteq\mathbb{R}$, $g_N:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $g:A\to\mathbb{R}$'ye A üzerinde düzgün yakınsasın. Her g_N bir $c\in A$ noktasında sürekliyse, g de c'de süreklidir. Özel olarak her g_N, A üzerinde sürekliyse g de A üzerinde süreklidir.*
Aynı ifade seriler için de geçerlidir: $\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsak ve her f_n sürekliyse, toplam fonksiyonu A üzerinde süreklidir (kısmi toplamlar sonlu toplam olarak süreklidir).

> ***İspat.***
> *$\varepsilon>0$ verilsin. Düzgün yakınsaklık gereği öyle bir N vardır ki **her** $x\in A$ için*

$$| g_N(x) - g(x) | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Bu N'yi sabitleyelim. g_N, c'de sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in A$ ve $| x - c | < \delta$ olduğunda

$$| g_N(x) - g_N(c) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Şimdi $x \in A$, $| x - c | < \delta$ olsun. Araya $g_N(x)$ ve $g_N(c)$ terimlerini sokup üçgen eşitsizliğini (bkz. Analiz 1) iki kez uygulayalım:

$$| g(x) - g(c) | \le \underbrace{| g(x) - g_N(x) |}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{| g_N(x) - g_N(c) |}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{| g_N(c) - g(c) |}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon.$$

Birinci ve üçüncü terimlerde düzgünlüğü kullandık: aynı N hem x hem c için iş görüyor. Demek ki g, c'de süreklidir.
■

> **i** Bu üç satırın anlamı
>
> İspatın can alıcı noktası, $\varepsilon/3$'lük üç parçadan **ikisinin** aynı N ile kontrol edilmesidir; noktasal yakınsaklıkta x için iyi olan N ile c için iyi olan N farklı olabilir ve $x \to c$ iken gereken N sınırsızca büyüyebilirdi. Düzgün yakınsaklığın türev ve integralle ilişkisi daha incedir ve Analiz 3'te incelenir; biz aşağıda türev ve integral sonuçlarını, düzgün yakınsaklığı doğrudan kullanmak yerine kuvvet serisinin kendine özgü yapısından çıkaracağız.

Artık ilk büyük sonucu toplayabiliriz.

Teorem 43.4 (Toplam Fonksiyonunun Sürekliliği). *$\sum_{n\ge 0} a_n(x - x_0)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ olsun ve*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad | x - x_0 | < R$$

ile tanımlansın. O hâlde f, $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığı üzerinde süreklidir.

İspat.
$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$ keyfî bir nokta olsun; f'nin x_1'de sürekli olduğunu göstereceğiz.
Adım 1: x_1'i bir kapalı aralığın içine hapsedelim. *$| x_1 - x_0 | < R$ olduğundan $| x_1 - x_0 | < \rho < R$ olacak bir ρ seçebiliriz (örneğin $\rho = \frac{1}{2}(| x_1 - x_0 | + R)$; $R = +\infty$ ise $\rho = | x_1 - x_0 | + 1$). $A = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ diyelim; x_1, A'nın bir **iç** noktasıdır.*
Adım 2: A üzerinde düzgün yakınsaklık. *Teorem 43.2 gereği seri A üzerinde düzgün yakınsar.*
Adım 3: Kısmi toplamlar süreklidir. *$s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x - x_0)^n$ bir polinomdur, dolayısıyla süreklidir (bkz. Analiz 1).*
Adım 4: Düzgün limitin sürekliliği. *Teorem 43.3 gereği f, A üzerinde, özel olarak x_1'de süreklidir. x_1, A'nın iç noktası olduğundan x_1'in bir komşuluğu tümüyle A'da kalır; süreklilik yerel bir özellik olduğundan f, $(x_0 - R, x_0 + R)$ üzerindeki fonksiyon olarak da x_1'de süreklidir. x_1 keyfî olduğundan f bütün aralıkta süreklidir.*
■

43.2 Terim Terim Türev

Şimdi asıl soruya geliyoruz: $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ türevlenebilir midir ve türevi, her terimin türevlerinin toplamı mıdır? Yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f'(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n (x-x_0)^{n-1}$$

midir? Bu eşitliğin bir anlamının olması için önce sağdaki serinin yakınsaması gerekir. İyi haber şudur: **türev serisinin yakınsaklık yarıçapı, orijinal serinin yarıçapıyla aynıdır.** Türev almak, $|\,a_n\,|$ katsayılarını n ile çarparak büyütür; ama n'nin büyümesi geometrik büyüme yanında ihmal edilebilir olduğundan yarıçap değişmez. Bunun cebirsel karşılığı $\sqrt[n]{n} \to 1$ limitidir.

Lemma 43.1 (Türev Serisinin Yarıçapı Değişmez). *$\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R, terim terim türetilmiş*

$$\sum_{n\geq 1} n\,a_n (x-x_0)^{n-1}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı R' olsun. O hâlde $R' = R$'dir.

İspat.
Adım 1: Bir kuvvet çarpanı yarıçapı değiştirmez. *$x \neq x_0$ için*

$$(x-x_0)\sum_{n\geq 1} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n a_n (x-x_0)^n$$

olduğundan, sıfırdan farklı bir sabitle çarpmak yakınsaklığı değiştirmediği için (Teorem 34.4) bu iki seri $x \neq x_0$ olan aynı noktalarda yakınsar; $x = x_0$'da ikisi de yakınsaktır. Öyleyse $\sum_{n\geq 1} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ ile $\sum_{n\geq 1} n a_n (x-x_0)^n$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları eşittir. Böylece R', katsayıları $b_n = n a_n$ olan kuvvet serisinin yarıçapıdır ve Cauchy–Hadamard formülüyle (Teorem 42.2)

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,n a_n\,|} = \limsup_{n\to\infty} \Big(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|\,a_n\,|} \Big)$$

yazılır.
Adım 2: $\sqrt[n]{n} \to 1$ çarpanı üst limiti değiştirmez. *$c_n = \sqrt[n]{n}$ ve $b_n = \sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ diyelim. Analiz 1'de $\sqrt[n]{n} \to 1$ olduğunu görmüştük, yani $c_n \to 1$. Önce (b_n)'nin sınırlı, dolayısıyla $L = \limsup b_n$ değerinin sonlu olduğu durumu ele alalım ve $M = \limsup(c_n b_n)$ diyelim. Bu M de sonludur: her $n \geq 1$ için $n \leq 2^n$ olduğundan $c_n = \sqrt[n]{n} \leq 2$'dir ve (b_n) sınırlıysa $(c_n b_n)$ de sınırlıdır.*
$M \geq L$: Üst limit bir yığılma noktası olduğundan (bkz. Analiz 1) $b_{n_k} \to L$ olan bir alt dizi vardır. $c_{n_k} \to 1$ olduğundan çarpım kuralıyla (bkz. Analiz 1) $c_{n_k} b_{n_k} \to 1 \cdot L = L$. Demek ki L, $(c_n b_n)$ dizisinin bir yığılma noktasıdır; üst limit yığılma noktalarının en büyüğü olduğundan $L \leq M$.
$M \leq L$: Yine Üst ve Alt Limit Birer Yığılma Noktasıdır gereği $c_{n_k} b_{n_k} \to M$ olan bir alt dizi vardır. $c_{n_k} \to 1 \neq 0$ olduğundan bölme kuralıyla

$$b_{n_k} = \frac{c_{n_k} b_{n_k}}{c_{n_k}} \to \frac{M}{1} = M$$

olur; yani M, (b_n)'nin bir yığılma noktasıdır ve $M \leq L$ çıkar.
İki eşitsizlik birlikte $M = L$ verir, yani

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,n a_n\,|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \frac{1}{R},$$

dolayısıyla $R' = R$'dir.
Adım 3: Uç durumlar. *Geriye (b_n)'nin sınırsız olduğu durum kalır; o zaman $\limsup b_n = +\infty$, yani $R = 0$'dır. $c_n \geq 1$ olduğundan $c_n b_n \geq b_n$ olur, $(c_n b_n)$ de sınırsızdır ve $R' = 0 = R$ çıkar. Adım 2'nin kapsadığı $L = 0$ hâli ise $1/R' = 0$, yani $R' = +\infty = R$ demektir; bu doğrudan da görülür: $0 \leq c_n b_n \leq 2b_n$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle (bkz. Analiz 1) $c_n b_n \to 0$'dır.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Aynı sonucun üst limitsiz ispatı

Aynı sonuç Cauchy–Hadamard formülüne başvurmadan da görülür. Bir yandan $|a_n|r^n \le r\cdot n|a_n|r^{n-1}$ olduğundan, karşılaştırma testiyle (Teorem 35.2) türev serisinin yakınsadığı her r'de orijinal seri de yakınsar; yani $R' \le R$. Öte yandan $0<r<R$ için $r<\rho<R$ ve $q=r/\rho\in(0,1)$ seçelim; $nq^n\to 0$ olduğundan (nq^n) sınırlıdır ($nq^n\le C$) ve

$$n\,|a_n|\,r^{n-1} = \frac{1}{r}\cdot nq^n\cdot|a_n|\,\rho^n \le \frac{C}{r}\,|a_n|\,\rho^n$$

olur; $\sum|a_n|\rho^n$ yakınsak olduğundan $\sum n|a_n|r^{n-1}$ de yakınsar, yani $R'\ge R$. Bu ispatın kalbi şudur: **n çarpanı, q^n geometrik baskısının yanında hiçbir şeydir.**

Yarıçap sorusu çözüldüğüne göre asıl teoremi ispatlayabiliriz. İspat, fark oranı ile türev serisinin farkını doğrudan tahmin eder; hesabın tamamı u^n-v^n çarpanlarına ayrılışına dayanır.

Teorem 43.5 (Terim Terim Türev). *$\sum_{n\ge0}a_n(x-x_0)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $R>0$ ve*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\qquad |x-x_0|<R$$

olsun. O hâlde f, (x_0-R,x_0+R) üzerinde türevlenebilirdir ve her $|x-x_0|<R$ için

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$

olur. Sağdaki serinin yakınsaklık yarıçapı da R'dir.

İspat.
Gösterimi hafifletmek için $x_0=0$ alalım; genel durum $t=x-x_0$ ötelemesiyle buna indirgenir.
Adım 1: Yardımcı serilerin yakınsaklığı. *Lemma 43.1 gereği*

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

serisinin yarıçapı R'dir. Aynı lemmayı bir kez daha, bu kez g'nin serisine uygularsak

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

serisinin yarıçapının da R olduğu çıkar. Amacımız her $|c|<R$ için $f'(c)=g(c)$ olduğunu göstermek.
Adım 2: Tahmin için çerçeve. *$|c|<R$ sabitlensin ve $|c|<\rho<R$ olacak bir ρ seçelim. Yarıçapın içinde mutlak yakınsaklık olduğundan*

$$K:=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,|a_n|\,\rho^{n-2}<\infty$$

sonlu bir sayıdır. Şimdi $|x|<\rho$, $x\neq c$ olsun ve

$$Q(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-g(c)$$

farkına bakalım. $\sum a_nx^n$, $\sum a_nc^n$ ve $\sum na_nc^{n-1}$ serilerinin üçü de yakınsak olduğundan, yakınsak serilerin terim terim toplanıp çıkarılabilmesi (Teorem 34.4) sayesinde

$$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[\frac{x^n-c^n}{x-c}-nc^{n-1}\right]$$

yazabiliriz. $n=0$ terimi sıfırdır ($x^0-c^0=0$ ve $0\cdot c^{-1}$ terimi yoktur), $n=1$ terimi de sıfırdır: $\dfrac{x-c}{x-c}-1=0$. Öyleyse toplam $n\ge2$'den başlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: Köşeli parantezin tahmini. *$n \geq 2$ için $\dfrac{x^n - c^n}{x-c} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k c^{n-1-k}$ çarpanlara ayırma özdeşliğini kullanalım. Buradan*

$$D_n := \frac{x^n - c^n}{x-c} - nc^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(x^k c^{n-1-k} - c^{n-1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(x^k - c^k\right) c^{n-1-k}$$

olur ($k=0$ terimi sıfırdır). Aynı özdeşliği bir kez daha, bu kez $x^k - c^k = (x-c)\sum_{j=0}^{k-1} x^j c^{k-1-j}$ biçiminde kullanalım. $|\,x\,| \leq \rho$, $|\,c\,| \leq \rho$ olduğundan bu toplamdaki k terimin her birinin mutlak değeri ρ^{k-1}'i geçmez, yani $|\,x^k - c^k\,| \leq |\,x-c\,| k\rho^{k-1}$'dir. Bunu D_n'de yerine koyup üçgen eşitsizliğini uygularsak

$$|\,D_n\,| \leq |\,x-c\,| \sum_{k=1}^{n-1} k\rho^{k-1} \cdot \rho^{n-1-k} = |\,x-c\,| \rho^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = |\,x-c\,| \rho^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

elde ederiz.
Adım 4: Sonuç. *Bulduğumuz tahmini $Q(x)$'te kullanalım:*

$$|\,Q(x)\,| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |\,a_n\,|\,|\,D_n\,| \leq |\,x-c\,| \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,|\,a_n\,|\,\rho^{n-2} = \frac{K}{2}\,|\,x-c\,|\,.$$

K sabittir ve x'ten bağımsızdır. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \min\left\{\rho - |\,c\,|, \dfrac{2\varepsilon}{K+1}\right\} > 0$ alalım. $0 < |\,x-c\,| < \delta$ olduğunda hem $|\,x\,| \leq |\,c\,| + |\,x-c\,| < \rho$ olur (böylece tahminimiz geçerlidir) hem de

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| = |\,Q(x)\,| \leq \frac{K}{2}\,|\,x-c\,| < \frac{K}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{K+1} < \varepsilon$$

sağlanır. Limit tanımı gereği f, c'de türevlenebilirdir ve $f'(c) = g(c)$'dir; c keyfî olduğundan iddia bütün $(-R, R)$ üzerinde doğrudur.
■

Teoremin uygulanabilirliği kendi kendini besler: f' yine aynı yarıçapa sahip bir kuvvet serisidir, öyleyse teorem ona da uygulanabilir. Tümevarımla şu güçlü sonuç çıkar.

Sonuç 43.1 (Toplam Fonksiyonu Sonsuz Kez Türevlenebilirdir). *$R > 0$ yarıçaplı $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ serisinin toplam fonksiyonu f olsun. O hâlde f, $(x_0 - R, x_0 + R)$ üzerinde **sonsuz kez türevlenebilirdir** (yani C^∞ sınıfındandır) ve her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n (x-x_0)^{n-k}$$

olur; bu serinin de yakınsaklık yarıçapı R'dir. Özel olarak

$$f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k.$$

İspat.
k üzerinden tümevarım yapalım.
Temel adım. *$k = 0$ için ifade f'nin kendi tanımıdır ($0! = 1$ ve boş çarpım 1'dir).*
Tümevarım adımı. *İddianın k için doğru olduğunu varsayalım: $f^{(k)}$, katsayıları $\dfrac{n!}{(n-k)!}a_n$ olan ve yarıçapı R olan bir kuvvet serisinin toplamıdır. Teorem 43.5 bu seriye uygulanabilir; buna göre $f^{(k)}$ türevlenebilirdir (yani $f^{(k+1)}$ vardır) ve terim terim türetilerek*

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k) \cdot \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n (x-x_0)^{n-k-1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k-1)!}\, a_n (x-x_0)^{n-(k+1)}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir (burada $\dfrac{(n-k)\,n!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k-1)!}$ *kullanıldı;* $n = k$ *terimi sabit olduğundan türevi sıfırdır ve toplam* $n = k+1$*'den başlar). Lemma 43.1 gereği yeni serinin yarıçapı da* R*'dir. Böylece iddia* $k+1$ *için de doğrudur.*
Tümevarım ilkesi (bkz. Analiz 1) gereği ifade her k *için doğrudur; özel olarak her mertebeden türev var olduğundan* $f \in C^\infty\big((x_0-R, x_0+R)\big)$*'dır.*
Son olarak $x = x_0$ *koyalım.* $n > k$ *olan terimlerde* $(x_0-x_0)^{n-k} = 0$ *olur; yalnızca* $n = k$ *terimi hayatta kalır ve o da* $\dfrac{k!}{0!}a_k = k!\,a_k$*'dır. Demek ki* $f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$*'dır.*
■

Bu sonuç, "sonsuz dereceli polinom" benzetmesini tam anlamıyla haklı çıkarır. Şimdi onu somut toplamlar üretmek için kullanalım. Bütün hesapların çıkış noktası geometrik seridir (Tanım 34.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |\,x\,| < 1.$$

Örnek 43.1 (Geometrik Seriden Türevle Üretilen Toplamlar). $|\,x\,| < 1$ için aşağıdaki toplamları hesaplayınız.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$

d) Bulduğunuz formüllerle $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sayısal toplamlarını bulunuz.

Çözüm.
Geometrik serinin yakınsaklık yarıçapı $R = 1$'dir ve $|\,x\,| < 1$ için toplamı $\dfrac{1}{1-x}$'tir (Teorem 34.5). Teorem 43.5 bu seriye $(-1,1)$ üzerinde uygulanabilir.
a) Terim terim türev alalım. Sol tarafta $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, sağ tarafta $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{buradan da} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

çıkar ($|\,x\,| < 1$; ikinci eşitlik için her iki taraf x ile çarpıldı, bu da Teorem 34.4 gereği meşrudur).
b) Aynı işlemi bir kez daha yapalım. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{(1-x)^2}\right) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ ve $\dfrac{d}{dx}(nx^{n-1}) = n(n-1)x^{n-2}$ olduğundan $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ ve x^2 ile çarparak

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}, \qquad |\,x\,| < 1.$$

c) $n^2 = n(n-1) + n$ ayrıştırmasını kullanalım. İki yakınsak serinin toplamı terim terim alınabildiğinden (Teorem 34.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x^2+x-x^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \qquad |\,x\,| < 1.$$

d) $x = \dfrac{1}{2}$ koyalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{1/4} = 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6.$$

İlk toplamın kısmi toplamları 0,5; 1; 1,375; 1,625; 1,78; ... biçiminde 2'ye tırmanır.
■

43.3 Terim Terim İntegral

Türev için doğru olan, integral için de doğrudur ve ispatı artık çok daha kısadır: elimizde bir terim terim türev teoremi olduğuna göre, integral serisini yazıp türevinin f olduğunu görmek yeter.

Teorem 43.6 (Terim Terim İntegral). *$\sum_{n\ge 0} a_n (x-x_0)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $R>0$ ve toplam fonksiyonu f olsun. O hâlde*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı da R'dir, F bir ilkel fonksiyondur ($F' = f$) ve her $|\, x-x_0 \,| < R$ için

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

olur.

İspat.
Adım 1: İntegral serisinin yarıçapı R'dir. *F'nin serisi, katsayıları*

$$b_0 = 0, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \quad (n \ge 0)$$

olan $\sum_{n\ge 0} b_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisidir. Bu serinin terim terim türevi

$$\sum_{n\ge 1} n b_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n\ge 1} n \cdot \frac{a_{n-1}}{n}(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n\ge 1} a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} = \sum_{m\ge 0} a_m (x-x_0)^m,$$

yani tam olarak başladığımız seridir. Lemma 43.1 bir serinin ve türev serisinin yarıçaplarının eşit olduğunu söylediğinden, F'nin serisinin yarıçapı R_F ile f'nin serisinin yarıçapı R eşittir: $R_F = R$.
Adım 2: $F' = f$. *F artık R yarıçaplı bir kuvvet serisinin toplamıdır; Teorem 43.5'e göre $(x_0 - R, x_0 + R)$ üzerinde türevlenebilirdir ve türevi, Adım 1'de hesapladığımız terim terim türevdir:*

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x), \qquad |\, x-x_0 \,| < R.$$

Ayrıca serinin sabit terimi $b_0 = 0$ olduğundan $F(x_0) = 0$'dır.
Adım 3: İntegralle özdeşleştirme. *$|\, x-x_0 \,| < R$ olsun ve x ile x_0 arasındaki kapalı aralığı J ile gösterelim; $J \subset (x_0 - R, x_0 + R)$'dir. f, Teorem 43.4 gereği süreklidir; kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyon Riemann integrallenebilir olduğundan*

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

integral fonksiyonu (Tanım 29.1) tanımlıdır. f sürekli olduğundan analizin birinci temel teoremi (Teorem 29.1) gereği G türevlenebilirdir ve $G'(x) = f(x)$'tir.
Şimdi $H = F - G$ diyelim. $(x_0 - R, x_0 + R)$ üzerinde $H' = F' - G' = f - f = 0$'dır. Türevi özdeş olarak sıfır olan bir fonksiyon aralıkta sabittir: gerçekten, aralıktaki herhangi iki $u < v$ noktası için ortalama değer teoremi (Teorem 8.2) $H(v) - H(u) = H'(\xi)(v-u) = 0$ verir. Ayrıca $H(x_0) = F(x_0) - G(x_0) = 0 - 0 = 0$'dır; öyleyse $H \equiv 0$, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = G(x) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

■

Türev ve integral sonuçlarını tek bir cümlede toplayalım.

Sonuç 43.2 (Türev ve İntegral Serileri Aynı Yarıçapa Sahiptir). *$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. O hâlde*

$$\sum_{n\geq 1} n a_n (x-x_0)^{n-1} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

*serilerinin yakınsaklık yarıçapı da R'dir. Dolayısıyla terim terim türev ve integral alma işlemleri, yakınsaklık **aralığını** değiştirmeden istenildiği kadar tekrarlanabilir.*

İspat.
Türev serisi için iddia Lemma 43.1'tır; integral serisi için Teorem 43.6'in birinci adımıdır. Tekrarlanabilirlik, her iki işlemin sonucunun yine R yarıçaplı bir kuvvet serisi olmasından ve tümevarımdan çıkar.
■

⚠ Yarıçap değişmez, ama uç noktalardaki davranış değişir

Sonuç 43.2 yalnızca R sayısı hakkındadır. Uç noktalar $x_0 \pm R$'de yakınsaklık, türev alındığında bozulabilir, integral alındığında kazanılabilir. Üç serinin hepsinin yarıçapı 1 olan şu üçlüye bakalım:

$$\sum_{n\geq 1} x^{n-1}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Her biri bir öncekinin terim terim integralidir.

- Birincisi $x=1$'de $\sum 1$ olur, ıraksar; $x=-1$'de $\sum(-1)^{n-1}$ olur, genel terimi sıfıra gitmediğinden yine ıraksar (Sonuç 34.1).
- İkincisi $x=1$'de harmonik seri $\sum \frac{1}{n}$'dir, ıraksar (Teorem 36.2, $p=1$); $x=-1$'de ise alternan harmonik seridir ve yakınsar. **Bir uçta kazanç var, öbüründe yok.**
- Üçüncüsü her iki uçta da yakınsar, çünkü $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ yakınsaktır (Teorem 35.2, Teorem 36.2).

Kural olarak: integral almak uç noktalarda yakınsaklığı **iyileştirebilir**, türev almak **bozabilir**. Uç noktalar her zaman ayrıca incelenir.

Şimdi integral yönünü çalıştıralım. Bu iki hesap, analizin en çok kullanılan iki seri açılımını verir.

Örnek 43.2 (Logaritma ve Arktanjant Serileri). $|x|<1$ için aşağıdaki açılımları elde ediniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

Çözüm.
a) Geometrik seriyi t değişkeninde yazıp ($\frac{1}{1-t} = \sum_{n\geq 0} t^n$, $|t|<1$) Teorem 43.6'i $x_0=0$ ile uygulayalım; $|x|<1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x = -\ln(1-x)$$

olur ($\frac{d}{dt}(-\ln(1-t)) = \frac{1}{1-t}$ olduğundan). Toplamda $m = n+1$ dizin değişimiyle sol taraf $\sum_{m\geq 1} \frac{x^m}{m}$ biçimine girer.

b) (a) şıkkındaki eşitlikte x yerine $-x$ yazalım ($|\,x\,| < 1$ iken $|\,-x\,| < 1$ olduğundan bu meşrudur): $\sum_{n\geq 1} \frac{(-x)^n}{n} = -\ln(1+x)$. Her iki tarafı -1 ile çarpar ve $(-x)^n = (-1)^n x^n$ olduğunu kullanırsak

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

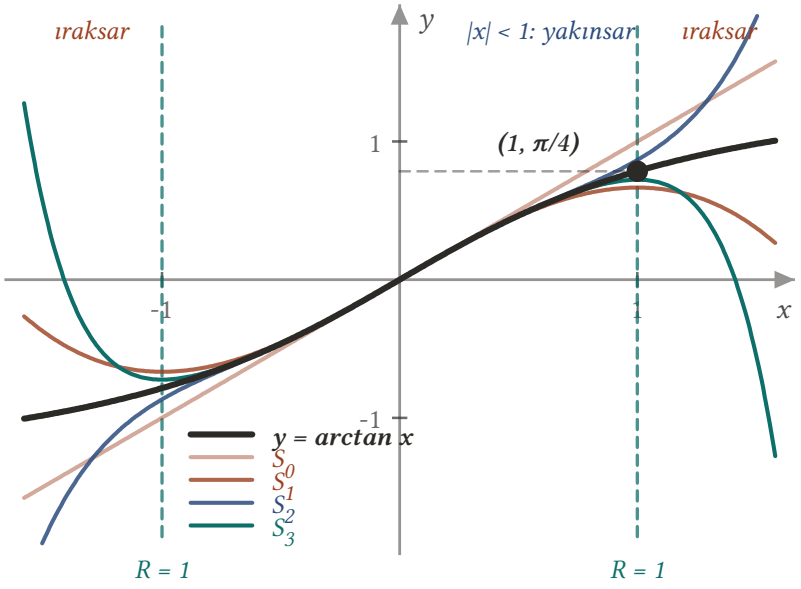
bulunur.

c) Geometrik seride t yerine $-t^2$ yazalım; $|\,t\,| < 1$ iken $|\,-t^2\,| < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \qquad |\,t\,| < 1$$

olur; bu, yalnızca çift kuvvetleri içeren, yarıçapı 1 olan bir kuvvet serisidir. Teorem 43.6 ile 0'dan x'e integralleyelim; sol taraf $\Big[\arctan t\Big]_0^x = \arctan x$ olduğundan

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |\,x\,| < 1.$$



Şekil 43.1: $\arctan x$ ile kuvvet serisi $\Sigma(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$ açılımının ilk dört kısmi toplamı. Derece büyüdükçe yaklaşım yakınsaklık aralığının içinde eğriye yapışır; $|x| > 1$ olduğunda ise kısmi toplamlar eğriyi hızla terk eder. Uç nokta $x = 1$'de seri hâlâ yakınsar ve Abel limit teoremi toplamının $\arctan 1 = \pi/4$ olduğunu söyler — Leibniz formülü buradan gelir.

Bu üç açılım, bir sonraki bölümde kuracağımız Taylor serisi çerçevesinin en sık kullanılan örnekleridir. Dikkat edilecek nokta, üçünün de türev hesabıyla değil, tek bir geometrik seriden **integral alınarak** elde edilmiş olmasıdır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

43.4 Katsayıların Tekliği

Bir kuvvet serisi toplam fonksiyonunu belirler. Peki tersi doğru mudur: toplam fonksiyonu katsayıları belirler mi? Yani aynı fonksiyona eşit iki farklı kuvvet serisi olabilir mi? Sonuç 43.1'in son satırı bu soruyu çoktan yanıtladı; şimdi yanıtı görünür kılalım.

Sonuç 43.3 (Katsayılar Taylor Katsayılarıdır). *$R > 0$ yarıçaplı $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ serisinin toplamı f olsun. O hâlde her $n \geq 0$ için*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

*olur. Yani serinin katsayıları, toplam fonksiyonunun x_0 noktasındaki **Taylor katsayılarıdır**; serinin N'inci kısmi toplamı da f'nin x_0'daki N'inci Taylor polinomudur (Tanım 12.1):*

$$s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = T_N(x).$$

İspat.
Sonuç 43.1 gereği f sonsuz kez türevlenebilirdir ve her k için $f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$'dır. $k! \neq 0$ olduğundan her iki tarafı $k!$'e bölerek $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ elde ederiz. Kısmi toplam ifadesi, bu değerlerin Tanım 12.1'ndaki Taylor polinomu tanımına yerleştirilmesinden ibarettir.
■

Teorem 43.7 (Katsayıların Tekliği). *$r > 0$ olsun ve $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ ile $\sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ kuvvet serilerinin ikisi de (x_0-r, x_0+r) aralığında yakınsasın. Eğer bu aralıktaki her x için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

ise, o hâlde her $n \geq 0$ için $a_n = b_n$'dir.

İspat.
Her iki seri de (x_0-r, x_0+r) aralığının her noktasında yakınsadığından, ikisinin de yakınsaklık yarıçapı en az $r > 0$'dır. Ortak toplam fonksiyonuna f diyelim; f, (x_0-r, x_0+r) üzerinde tanımlıdır. Birinci seri için Sonuç 43.3 uygulanır:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

Aynı sonucu ikinci seriye uygularsak, toplam fonksiyonu yine f olduğundan

$$b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (n \geq 0)$$

çıkar. Sağ taraflar aynı olduğundan her n için $a_n = b_n$'dir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

i Tekliğin iki kullanışlı yüzü

1. Sıfır serisi. $\sum a_n(x-x_0)^n$ toplamı x_0'ın bir komşuluğunda özdeş olarak 0 ise, bütün a_n'ler sıfırdır (Teorem 43.7'nde $b_n=0$ alın). Bu, polinomlar için bildiğimiz "özdeş sıfır polinomun bütün katsayıları sıfırdır" olgusunun sonsuz karşılığıdır.
2. Simetriden katsayı okumak. f, 0 merkezli bir kuvvet serisinin toplamı ve **tek** fonksiyon olsun ($f(-x)=-f(x)$). $-f(-x)=\sum(-1)^{n+1}a_nx^n$ olduğundan teklikten $a_n=(-1)^{n+1}a_n$ çıkar; n çift iken bu $a_n=-a_n$, yani $a_n=0$ demektir: tek fonksiyonun serisinde yalnızca tek kuvvetler bulunur. Bakışımlı olarak çift fonksiyonun serisinde yalnızca çift kuvvetler vardır; $\arctan$ tek, $\frac{1}{1+x^2}$ çift olduğundan Örnek 43.2'taki açılımlar bunu doğruluyor.

Teklik teoremi pratikte şu işe yarar: bir toplamı **nasıl** elde ettiğimiz önemli değildir; bilinen bir seriden türev, integral, dizin kaydırma ya da değişken değiştirmeyle vardığımız her ifade, doğru cevabın kendisidir. Şimdi bu serbestliği kullanarak birkaç toplam fonksiyonu bulalım.

Örnek 43.3 (Toplam Fonksiyonu Bulma). Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını belirleyip toplam fonksiyonlarını kapalı biçimde yazınız.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Çözüm.
a) Katsayı $c_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ için $\sqrt[n]{c_n}\to 1$ olduğundan (paydadaki $n(n+1)$ polinomunun n'inci kökü 1'e gider) Cauchy–Hadamard formülü $R=1$ verir. Toplam için basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$0<|\,x\,|<1$ olsun. İki seri de ayrı ayrı yakınsak olduğundan terim terim ayrıştırabiliriz (Teorem 34.4):

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}.$$

Birinci toplam Örnek 43.2 (a) gereği $-\ln(1-x)$'tir. İkinci toplamda pay ile paydayı uyumlu hâle getirmek için x ile çarpıp bölelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}-x\right)=\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right),$$

çünkü $m=n+1$ dizin değişiminde $m=1$ terimi $(=x)$ eksik kalmaktadır. Böylece

$$S(x)=-\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)+x}{x}=-\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+1=1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$$

olur (son adımda $-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$ ortak çarpanı alındı). $x=0$'da serinin toplamı 0'dır; nitekim $x\to 0$ iken $\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x}\to -1$ olduğundan $S(x)\to 0$'dır.
Sağlama: $S\!\left(\frac{1}{2}\right)=1+\ln\frac{1}{2}=0{,}30685\ldots$; serinin ilk beş terimi 0,30625, ilk sekiz terimi 0,30682 verir.
b) $c_n=n^2+1$ için $\sqrt[n]{n^2+1}\to 1$ olduğundan $R=1$'dir. $|\,x\,|<1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}+\frac{1}{1-x}=\frac{x+x^2+1-2x+x^2}{(1-x)^3}=\frac{2x^2-x+1}{(1-x)^3}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur (Örnek 43.1 (c) ve geometrik seri; $n=0$ terimi birinci toplamda sıfır olduğundan dizin farkı önemsizdir). Sağlama: $x=0$'da sağ taraf 1'dir ve seride $a_0=1$'dir; $x=\frac{1}{2}$'de sağ taraf 8 olur.

c) Bu seride yalnızca tek kuvvetler vardır; $|\,x\,|<1$ için $\left|\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| \le |\,x\,|^{2n+1}$ ve $\sum |\,x\,|^{2n+1}$ geometrik olarak yakınsadığından seri yakınsar, $|\,x\,|>1$ için genel terim sıfıra gitmez; öyleyse $R=1$'dir.

Toplam için $\dfrac{1}{1-t^2}=\sum_{n\ge 0} t^{2n}$ ($|\,t\,|<1$) serisini Teorem 43.6 ile integralleyelim:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}=\int_0^x \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\Big)dt=\frac{1}{2}\Big[\ln(1+t)-\ln(1-t)\Big]_0^x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Aynı sonuca teklikle de varılır: Örnek 43.2'taki $-\ln(1-x)$ ve $\ln(1+x)$ açılımları taraf tarafa çıkarılırsa çift kuvvetler yok olur, tek kuvvetler ikiye katlanır.

■

43.5 Abel Limit Teoremi

Şimdiye kadarki bütün sonuçlar **açık** (x_0-R,x_0+R) aralığında geçerliydi. Uç noktalarda seri yakınsayabilir de, ıraksayabilir de. Peki seri bir uç noktada yakınsıyorsa, oradaki toplamı ile içerideki $f(x)$ değerleri arasında bir bağ var mıdır? Örneğin

$$-\ln(1-x)=\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}$$

eşitliğini $|\,x\,|<1$ için biliyoruz; $x=-1$'de sağdaki seri (alternan harmonik seri) yakınsıyor ve soldaki fonksiyon $-\ln 2$ değerini alıyor. Bu iki sayı aynı mı? Abel'in 1826 tarihli teoremi "evet" der: **toplam fonksiyonu, serinin yakınsadığı uç noktada tek yönlü olarak süreklidir.**

İspatın anahtarı, kısmi toplamları seriye geri sokan bir cebirsel dönüşümdür. Bu dönüşüme **Abel toplamı** (Abel summation) ya da kısmi toplamlarla toplama denir; sonlu toplamlarda kısmi integrasyonun karşılığıdır.

Lemma 43.2 (Abel Toplam Dönüşümü). *$(a_n)_{n\ge 0}$ bir reel sayı dizisi, $s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$ onun kısmi toplamları ve $s_{-1}=0$ olsun. O hâlde her $N\ge 1$ ve her $x\in\mathbb{R}$ için*

$$\sum_{n=0}^{N}a_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}s_n x^n+s_N x^N.$$

Ayrıca (s_n) sınırlıysa, $|\,x\,|<1$ olan her x için hem $\sum a_n x^n$ hem de $\sum s_n x^n$ yakınsar ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n$$

olur.

İspat.

Adım 1: Sonlu özdeşlik. *$a_n=s_n-s_{n-1}$ ($n\ge 0$; $s_{-1}=0$ olduğundan $n=0$ için de doğru) yazıp toplayalım:*

$$\sum_{n=0}^{N}a_n x^n=\sum_{n=0}^{N}s_n x^n-\sum_{n=0}^{N}s_{n-1}x^n.$$

İkinci toplamda $m=n-1$ diyelim; $n=0$ terimi $s_{-1}x^0=0$ olduğundan onu atabiliriz:

$$\sum_{n=0}^{N}s_{n-1}x^n=\sum_{m=0}^{N-1}s_m x^{m+1}=x\sum_{m=0}^{N-1}s_m x^m.$$

Birinci toplamı da $n=N$ terimini ayırarak yazarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n + s_N x^N\right) - x\sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n + s_N x^N$$

elde edilir.
Adım 2: Limit geçişi. *(s_n) sınırlı olsun: her n için $\mid s_n \mid \le C$. $\mid x \mid < 1$ ise $\mid s_n x^n \mid \le C \mid x \mid^n$ olur ve $\sum C \mid x \mid^n$ geometrik seri olarak yakınsadığından karşılaştırma testiyle (Teorem 35.2) $\sum s_n x^n$ mutlak yakınsaktır. Ayrıca $\mid s_N x^N \mid \le C \mid x \mid^N \to 0$'dır (bkz. Analiz 1). Adım 1'deki özdeşlikte $N \to \infty$ limitine geçersek sol taraf $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$'e (bu limitin var olduğu da böylece görülür), sağ taraf $(1-x)\sum_{n\ge 0} s_n x^n + 0$'a yakınsar.*
■

Teorem 43.8 (Abel Limit Teoremi). *$\sum_{n\ge 0} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R \in (0,\infty)$ olsun ve*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = A$$

*serisi (yani serinin sağ uç nokta $x_0 + R$'deki hâli) **yakınsak** olsun. O hâlde toplam fonksiyonu f için*

$$\lim_{x \to (x_0+R)^-} f(x) = A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

olur. Bakışımlı olarak, $\sum_{n\ge 0} a_n (-R)^n$ yakınsaksa $\lim_{x\to(x_0-R)^+} f(x)$ bu toplama eşittir. Kısacası f, serinin yakınsadığı uç noktada tek yönlü süreklidir.

İspat.
Adım 1: Normalleştirme. *$t = \dfrac{x-x_0}{R}$ ve $b_n = a_n R^n$ diyelim. $\mid x - x_0 \mid < R$ ile $\mid t \mid < 1$ denktir ve*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n =: \varphi(t)$$

olur. $x \to (x_0+R)^-$ ile $t \to 1^-$ denktir ve varsayım $\sum b_n = A$'nın yakınsaklığıdır. Öyleyse şunu göstermek yeter: $\sum b_n = A$ yakınsaksa $\lim_{t\to 1^-} \varphi(t) = A$'dır.
Adım 2: Abel dönüşümü. *$s_n = b_0 + \cdots + b_n$ olsun; $s_n \to A$ olduğundan (s_n) yakınsak, dolayısıyla sınırlıdır (bkz. Analiz 1). Lemma 43.2 gereği $\mid t \mid < 1$ için*

$$\varphi(t) = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n.$$

Öte yandan $\mid t \mid < 1$ için $(1-t)\sum_{n\ge 0} t^n = (1-t)\cdot\dfrac{1}{1-t} = 1$ olduğundan

$$A = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} A\, t^n.$$

İki eşitliği çıkaralım (her iki seri de mutlak yakınsak olduğundan terim terim çıkarma serbesttir, Teorem 34.4):

$$\varphi(t) - A = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} (s_n - A) t^n.$$

Adım 3: Toplamı ikiye bölme. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $s_n \to A$ olduğundan $n > N$ için $\mid s_n - A \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak bir N vardır. $C = \sum_{n=0}^{N} \mid s_n - A \mid$ diyelim; N sabitlendikten sonra bu sabit bir sayıdır. $0 < t < 1$ olsun; üçgen eşitsizliğiyle*

$$\mid \varphi(t) - A \mid \le (1-t)\sum_{n=0}^{N} \mid s_n - A \mid t^n + (1-t)\sum_{n=N+1}^{\infty} \mid s_n - A \mid t^n.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci toplamda $0 < t^n \le 1$ olduğundan bu kısım $(1-t)\,C$'yi geçmez. İkinci toplamda $\mid s_n - A \mid < \varepsilon/2$ kullanılır:

$$(1-t)\sum_{n=N+1}^{\infty} \mid s_n - A \mid t^n \le (1-t)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n = (1-t)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{1-t} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Böylece her $t \in (0,1)$ için

$$\mid \varphi(t) - A \mid \le (1-t)\,C + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adım 4: t'yi 1'e yaklaştırma. *$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(C+1)} > 0$ alalım. $1-\delta < t < 1$ olduğunda $(1-t)C \le \delta C = \dfrac{\varepsilon C}{2(C+1)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur ve*

$$\mid \varphi(t) - A \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sağlanır. Tek yönlü limit tanımı gereği $\lim_{t\to 1^-}\varphi(t) = A$'dır; Adım 1'deki dönüşümle bu, $\lim_{x\to (x_0+R)^-} f(x) = A$ demektir.

Adım 5: Sol uç. *Şimdi $\sum_{n\ge 0} a_n(-R)^n$ serisinin yakınsak ve toplamının B olduğunu varsayalım. Adım 1'in gösterimiyle $a_n(-R)^n = (-1)^n b_n$'dir. Katsayıları $\tilde{b}_n := (-1)^n b_n$ olan*

$$\psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n u^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n u^n = \varphi(-u), \qquad \mid u \mid < 1$$

kuvvet serisini alalım. $\sum_{n\ge 0}\tilde{b}_n = B$ yakınsak olduğundan Adım 2–4'te yapılanlar kelimesi kelimesine bu seriye uygulanır (orada (b_n) hakkında yalnızca $\sum b_n$'nin yakınsaklığı kullanılmıştı) ve $\lim_{u\to 1^-}\psi(u) = B$ çıkar. $u \to 1^-$ ile $t = -u \to (-1)^+$ denk olduğundan $\lim_{t\to(-1)^+}\varphi(t) = B$, yani $x = x_0 + Rt$ dönüşümüyle

$$\lim_{x\to (x_0-R)^+} f(x) = B = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$$

elde edilir.

■

> ⚠ **Teoremin tersi doğru değildir**
>
> Abel teoremi "seri uçta yakınsıyorsa, fonksiyonun uçtaki limiti serinin toplamıdır" der. Tersi, yani "fonksiyonun uçta limiti varsa seri uçta yakınsar" **yanlıştır**.
> $\sum_{n\ge 0}(-1)^n x^n$ serisini alalım. $\mid x \mid < 1$ için toplamı $\dfrac{1}{1+x}$'tir ve $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$ limiti gayet güzel vardır. Ama $x = 1$'de seri $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ olur; kısmi toplamları $1, 0, 1, 0, \ldots$ diye salınır ve genel terim sıfıra gitmediğinden ıraksar (Teorem 34.2). Demek ki uçta limitin var olması seriyi yakınsak yapmaz.
> Bu limite bazen serinin "Abel toplamı" denir ve ıraksak serilere anlam yükleyen toplama yöntemlerinin çıkış noktasıdır. Bir serinin Abel toplamının varlığından yakınsaklığa geçebilmek için ek bir koşul gerekir (örneğin $na_n \to 0$); böyle sonuçlara **Tauber tipi teoremler** denir ve ileri analizin konusudur.

Abel teoreminin asıl gücü, iç bölgede kolayca elde ettiğimiz kapalı formülleri uç noktaya taşımasıdır. Şimdi bunu üç ünlü toplam üzerinde çalıştıralım.

Örnek 43.4 (Alternan Harmonik Serinin Toplamı).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: İç bölgedeki formül. Örnek 43.2 (b) gereği $\mid x \mid < 1$ için $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$'dir; serinin yarıçapı $R = 1$'dir. (İşaret gösteriminde $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$'dir.)
Adım 2: Uç noktada yakınsaklık. $x = 1$'de seri $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ olur. $\left(\frac{1}{n}\right)$ kesin azalarak sıfıra gittiğinden Leibniz ölçütü (Sonuç 40.1) gereği bu seri **yakınsaktır**. (Mutlak yakınsak değildir: mutlak değerleri harmonik seriyi verir; yani seri şartlı yakınsaktır.)
Adım 3: Abel teoremi. Teorem 43.8'nin hipotezleri sağlandı. Buna göre serinin $x = 1$'deki toplamı, toplam fonksiyonunun soldan limitidir; ln fonksiyonu 2'de sürekli olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2 \approx 0{,}6931.$$

Adım 4: Yakınsaklık ne kadar hızlı? Leibniz hata kestirimine (Teorem 40.2) göre $\mid s_N - \ln 2 \mid \leq \dfrac{1}{N+1}$'dir; üç ondalık basamak için $N \approx 1000$ terim gerekir, yani seri hesap için çok yavaştır. Çok daha hızlı yol, Örnek 43.3 (c) formülünde $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ veren $x = \dfrac{1}{3}$ değerini kullanmaktır:

$$\ln 2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,3^{2n+1}} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 243} + \cdots\right).$$

İlk beş terim 0,693146 verir; $\ln 2 = 0{,}6931472\ldots$ olduğundan beş terim beş doğru ondalık basamak vermektedir.
■

Örnek 43.5 (Leibniz Formülü).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: İç bölgedeki formül. Örnek 43.2 (c) gereği $\mid x \mid < 1$ için $\arctan x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$'dir. Bu, çift dizinli katsayıları 0 olan bir kuvvet serisidir ve yarıçapı $R = 1$'dir ($\mid x \mid > 1$ için genel terimi sınırsızdır).
Adım 2: Uç noktada yakınsaklık. $x = 1$'de seri $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ olur; $\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ kesin azalarak sıfıra gittiğinden Leibniz ölçütü (Sonuç 40.1) gereği yakınsar. (Yine şartlı yakınsaktır: mutlak değerlerin serisi harmonik seriyle karşılaştırıldığında ıraksar.)
Adım 3: Abel teoremi. Teorem 43.8 gereği, arctan fonksiyonu sürekli olduğundan

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Adım 4: Hesap için uygun mu? Hayır. Leibniz hata kestirimine (Teorem 40.2) göre N terimden sonraki hata $\dfrac{1}{2N+1}$ mertebesindedir; π'nin beş ondalık basamağı için yüz binlerce terim gerekir. Uygulamada bunun yerine arctan serisinin küçük argümanlarda hızlı yakınsamasından yararlanan Machin formülü kullanılır:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Burada $x = \frac{1}{5}$ ve $x = \frac{1}{239}$ için seriler geometrik hızda yakınsar. Öğrenilecek ders şudur: **bir seri bir sayıyı doğru biçimde tanımlayabilir ama onu hesaplamak için elverişsiz olabilir.**
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 43.6 (Abel Teoremiyle Kapalı Bir Toplam).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \cdots$$

serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: İç bölgedeki kapalı biçim. Örnek 43.3 (a) gereği $0 < \mid y \mid < 1$ için

$$T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{(1-y)\ln(1-y)}{y}.$$

$(-x)^n = (-1)^n x^n$ olduğundan $T(-x) = -\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n+1)}$'dir. Öyleyse $0 < x < 1$ için

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n+1)} = -T(-x) = -1 + \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}.$$

Adım 2: Uç noktada yakınsaklık. Serinin yarıçapı 1'dir. $x = 1$'de $\dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan (Teorem 36.2, Teorem 35.2) seri yakınsar.
Adım 3: Abel teoremi. Teorem 43.8 gereği serinin $x = 1$'deki toplamı S'nin soldan limitidir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to 1^-} \left(-1 + \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}\right) = -1 + 2\ln 2 \approx 0{,}3863.$$

Sağlama: ilk sekiz terimin kısmi toplamı 0,3802, dokuzuncusununki 0,3913'tür; alternan serinin toplamı bu ikisi arasındadır.
Bu örnekte uç noktadaki seri mutlak yakınsak olduğundan Abel teoremi bir kolaylıktır. Önceki iki örnekte ise uçtaki seriler yalnızca **şartlı** yakınsaktı; orada teorem vazgeçilmezdir, çünkü şartlı yakınsak bir seriyi başka hiçbir araçla kapalı biçimdeki fonksiyonun uç değerine bağlayamayız.
■

43.6 Alıştırmalar

Alıştırma 43.1 (Kuvvet Serilerinin Özellikleri Üzerine).

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz, toplam fonksiyonunu kapalı biçimde yazınız ve serinin $x = -1$ ve $x = 1$ uç noktalarındaki davranışını inceleyiniz.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ toplamını $\mid x \mid < 1$ için bulunuz ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ sayısını hesaplayınız.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ ve $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}$ toplamlarını hesaplayınız.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ serisinin yarıçapını bulunuz; bu serinin her iki uç noktada yakınsadığını, buna karşın terim terim türevinin bir uç noktada ıraksadığını gösteriniz. Bu, Sonuç 43.2 ile çelişir mi?

e) $y(0) = 1$ ve her x için $y'(x) = y(x)$ koşullarını sağlayan, 0 merkezli pozitif yarıçaplı bir kuvvet serisiyle verilen y fonksiyonunun katsayılarını belirleyiniz.

f) $\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ yakınsak seriler, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ onların Cauchy çarpımının terimleri olsun. $\sum c_n$ serisinin de yakınsak olduğu **biliniyorsa**, toplamının AB olduğunu Abel limit teoremiyle gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

a) Katsayı $c_n = \dfrac{1}{n+1}$'dir. $\sqrt[n]{n+1} \to 1$ olduğundan lim sup $\sqrt[n]{c_n} = 1$ ve Cauchy–Hadamard formülü $R = 1$ verir.
Toplam için $x \neq 0$ olsun. Payları x ile tamamlayalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\cdot\big(-\ln(1-x)\big) = -\frac{\ln(1-x)}{x},$$

burada Örnek 43.2 (a) kullanıldı. $x = 0$'da toplam 1'dir (yalnızca $n = 0$ terimi kalır); $x \to 0$ iken $-\dfrac{\ln(1-x)}{x} \to 1$ olduğundan formül $x = 0$'a sürekli olarak genişler.
Uç noktalar: $x = 1$'de seri $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n+1}$, yani harmonik seridir ve ıraksar (Teorem 36.2). $x = -1$'de seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

alternan harmonik seridir; Leibniz ölçütüyle yakınsar. Teorem 43.8'nin sol uç için ifadesi gereği toplamı

$$\lim_{x\to(-1)^+}\left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right) = -\frac{\ln 2}{-1} = \ln 2$$

olur; bu, Örnek 43.4 ile aynı sonuçtur.
b) $n(n+1) = n(n-1) + 2n$ ayrıştırmasını kullanalım. Örnek 43.1 (a) ve (b) gereği $|\,x\,| < 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{2x}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

$x = \frac{1}{2}$ koyarsak $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(n+1)}{2^n} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8$ bulunur.
c) Örnek 43.1'taki formüllerde uygun x değerlerini yerine koyacağız.
$\displaystyle\sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ formülünde $x = \frac{1}{2}$ almak $\dfrac{1/2}{1/4} = 2$, yani $\sum \dfrac{n}{2^n} = 2$ verir.
$\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ formülünde $x = \frac{1}{3}$ alırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{27}} = \frac{4}{9}\cdot\frac{27}{8} = \frac{3}{2}.$$

Son olarak $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$ formülünde $x = \frac{1}{3}$ alırsak $\dfrac{2/9}{8/27} = \dfrac{3}{4}$ çıkar; bu, $\sum \frac{n^2}{3^n} - \sum \frac{n}{3^n} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ hesabıyla uyumludur.
d) $c_n = \dfrac{1}{n^2}$ için $\sqrt[n]{n^2} \to 1$ olduğundan $R = 1$'dir.
Uç noktalar: $x = 1$'de seri $\sum \frac{1}{n^2}$'dir ve $p = 2 > 1$ olduğundan yakınsar (Teorem 36.2). $x = -1$'de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ olur; mutlak değerlerin serisi yine $\sum \frac{1}{n^2}$ olduğundan mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsar. Demek ki seri $[-1, 1]$'in tamamında yakınsıyor.
Terim terim türev:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Yarıçapı yine 1'dir (Sonuç 43.2). Ama $x = 1$'de bu seri $\sum \frac{1}{n}$, yani harmonik seridir ve **ıraksar**. ($x = -1$'de ise alternan olduğundan yakınsar.)
Bu bir çelişki değildir. Sonuç 43.2 yalnızca yakınsaklık **yarıçapının** korunduğunu söyler; uç noktalardaki yakınsaklık hakkında hiçbir iddiada bulunmaz. Nitekim Teorem 43.5'in sonucu da açık $(-1, 1)$ aralığında ifade edilmiştir: $|\,x\,| < 1$ için $f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ doğrudur, $x = 1$'de ise eşitliğin sağ tarafı tanımsızdır. Türev almak uç noktalardaki yakınsaklığı bozabilir; bunun sebebi katsayıların n ile çarpılarak büyümesidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

e) $y(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ pozitif yarıçaplı bir kuvvet serisi olsun. Teorem 43.5 gereği aynı aralıkta

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

olur (son eşitlikte $n\to n+1$ dizin kaydırması yapıldı). $y'=y$ koşulu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

demektir. İki kuvvet serisi bir aralıkta aynı fonksiyona eşit olduğundan Teorem 43.7 gereği katsayıları eşittir:

$$(n+1)a_{n+1}=a_n \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1} \qquad (n\geq 0).$$

$y(0)=a_0=1$ başlangıç koşuluyla tümevarım yaparsak

$$a_1=\frac{a_0}{1}=1,\quad a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{1}{6},\quad \ldots,\quad a_n=\frac{1}{n!}$$

bulunur. Gerçekten $a_n=\frac{1}{n!}$ ise $a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$'dir; tümevarım kapanır (bkz. Analiz 1). Öyleyse

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $+\infty$'dur: sabit bir x için oran testi $\dfrac{\mid x\mid^{n+1}/(n+1)!}{\mid x\mid^{n}/n!}=\dfrac{\mid x\mid}{n+1}\to 0<1$ verir (Teorem 37.2). Demek ki varsayımımız tutarlıdır ve y bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır. Bu fonksiyonun e^x olduğu bir sonraki bölümde gösterilecektir.

f) Üç seri de yakınsak olduğundan genel terimleri sıfıra gider (Teorem 34.2); özellikle (a_n), (b_n), (c_n) sınırlıdır. Katsayıları sınırlı olan bir kuvvet serisinin yarıçapı en az 1'dir: $\mid a_n\mid\leq M$ ise $\mid x\mid<1$ için $\mid a_nx^n\mid\leq M\mid x\mid^n$ olur ve geometrik seriyle karşılaştırma (Teorem 35.2) yakınsaklık verir. Öyleyse

$$\alpha(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n,\qquad \beta(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx^n,\qquad \gamma(x)=\sum_{n\geq 0}c_nx^n$$

fonksiyonlarının üçü de $(-1,1)$ üzerinde tanımlıdır ve orada üç seri de **mutlak** yakınsaktır.
Mutlak yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı, toplamlarının çarpımına yakınsar (Teorem 41.4). $\sum a_nx^n$ ile $\sum b_nx^n$ serilerinin Cauchy çarpımının n'inci terimi $\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n=c_nx^n$ olduğundan her $x\in(-1,1)$ için $\gamma(x)=\alpha(x)\beta(x)$'tir.
Üç seri de $x=1$'de yakınsaktır ($\sum c_n$ için bu varsayımdır). Yarıçapı tam 1 olan bir seride Teorem 43.8 doğrudan uygulanır; yarıçap 1'den büyükse toplam fonksiyonu $x=1$'de zaten süreklidir (Teorem 43.4) ve soldan limit yine serinin $x=1$'deki toplamıdır. Her iki hâlde de $x\to 1^-$ iken $\alpha(x)\to A$, $\beta(x)\to B$ ve $\gamma(x)\to\sum c_n$ olur. $\gamma=\alpha\beta$ eşitliğinde limit alıp çarpım kuralını kullanırsak (bkz. Analiz 1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\lim_{x\to 1^-}\gamma(x)=\left(\lim_{x\to 1^-}\alpha(x)\right)\left(\lim_{x\to 1^-}\beta(x)\right)=AB.$$

"$\sum c_n$ yakınsaktır" varsayımı vazgeçilmezdir: iki yakınsak serinin Cauchy çarpımı ıraksayabilir. Klasik örnek $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$'dir; her iki seri Leibniz ölçütüyle (Sonuç 40.1) yakınsar. Buna karşın

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

olur. Toplamları $(k+1)+(n-k+1)=n+2$ sabit olan iki pozitif sayının çarpımı en büyük değerini ikisi eşitken aldığından $(k+1)(n-k+1)\leq\left(\dfrac{n+2}{2}\right)^2$'dir; dolayısıyla toplamdaki $n+1$ terimin her biri $\dfrac{2}{n+2}$'den küçük değildir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| c_n | \geq \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1$$

çıkar. Genel terim sıfıra gitmediğinden $\sum c_n$ ıraksar (Sonuç 34.1).
■

Bu bölümde bir kuvvet serisinin toplam fonksiyonunun, yakınsaklık aralığında sonsuz kez türevlenebilir olduğunu ve terim terim türev, terim terim integral işlemlerinin serbestçe yapılabildiğini gördük; Sonuç 43.3 ile de katsayıların $f^{(n)}(x_0)/n!$ Taylor katsayıları olmaktan başka seçeneğinin bulunmadığını öğrendik. Bu son gözlem soruyu tersine çevirmeye davet ediyor: verilen sonsuz kez türevlenebilir bir f fonksiyonundan Taylor katsayılarını hesaplayıp seriyi kurarsak, bu seri gerçekten f'ye yakınsar mı? Yanıtı bir sonraki bölümde arıyoruz: Taylor ve Maclaurin Serileri.

 CC BY-NC-SA 4.0

44. Taylor ve Maclaurin Serileri

Kuvvet Serilerinin Özellikleri bölümünde bir kuvvet serisinden yola çıkıp topladığı fonksiyonu inceledik: yakınsaklık yarıçapının içinde toplam fonksiyonunun sürekli olduğunu, terim terim türetilebildiğini ve terim terim integrallenebildiğini, uçlarda ise Abel teoreminin devreye girdiğini gördük. Bütün bu bölümde okun yönü **seriden fonksiyona** doğruydu.

Şimdi oku ters çeviriyoruz. Elimizde bir fonksiyon var — diyelim e^x, $\sin x$ ya da $\ln(1+x)$ — ve soruyoruz: bu fonksiyon bir kuvvet serisinin toplamı olarak yazılabilir mi? Eğer yazılabiliyorsa, serinin katsayıları ne olmak zorundadır? İkinci sorunun yanıtını aslında biliyoruz. Bir kuvvet serisi, yakınsaklık yarıçapının içinde istenildiği kadar çok kez terim terim türetilebildiğinden, toplam fonksiyonunun merkezdeki türevleri katsayıları tümüyle belirler: $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$ ise zorunlu olarak $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$'dir. Yani aday seri **tektir** ve katsayıları Taylor Formülü bölümünde tanıdığımız sayılardır. Bu adaya f'nin **Taylor serisi** denir.

Ama bir adayın var olması, işin bittiği anlamına gelmez. Taylor formülü bölümünde bir uyarı kutusu koymuştuk: sonsuz kez türevlenebilen bir fonksiyonun Taylor serisi yakınsayabilir ve buna rağmen toplamı $f(x)$ olmayabilir. Bu bölümün ana meselesi tam olarak budur. Ölçüt basittir ve Taylor formülünün ta kendisinden çıkar: seri $f(x)$'e yakınsar ancak ve ancak kalan terim $R_n(x)$ sıfıra gider. Bu ölçütü kurduktan sonra elimizdeki bütün temel fonksiyonları tek tek geçireceğiz ve her birinde kalanı **gerçekten** denetleyeceğiz — "açılım şudur" deyip geçmeyeceğiz.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: Taylor ve Maclaurin serilerinin tanımını ve analitik fonksiyon kavramını; $R_n(x) \to 0$ ölçütünü ve türevlerin düzgün sınırlı olması hâlinde bunun kendiliğinden sağlandığını; e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$, $\arcsin x$ açılımlarının tam türetimini; her $\alpha \in \mathbb{R}$ için geçerli olan **binom serisini** ve onun bir diferansiyel denklem aracılığıyla verilen zarif ispatını; sonsuz kez türevlenebilir olduğu hâlde analitik **olmayan** bir fonksiyonu; serilerde toplama, çarpma, bölme ve bileşke işlemlerini; son olarak da bütün bunların limit hesabında, integral hesabında ve diferansiyel denklem çözümünde nasıl kullanıldığını.

44.1 Taylor Serisi ve Maclaurin Serisi

Tanımla başlayalım. Dikkat edilecek tek şey şudur: aşağıdaki tanım hiçbir yakınsaklık iddiası içermez; yalnızca bir seriyi **yazar**.

Tanım 44.1 (Taylor Serisi ve Maclaurin Serisi). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık, $x_0 \in I$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında her mertebeden türevlenebilir olsun. O hâlde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

kuvvet serisine f'nin x_0 **merkezli Taylor serisi** (Taylor series) denir. Özel olarak $x_0 = 0$ alındığında elde edilen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

serisine f'nin **Maclaurin serisi** (Maclaurin series) denir. Burada $f^{(0)} = f$ ve $0! = 1$ anlaşmaları geçerlidir.

Taylor serisi ile Taylor polinomu (Tanım 12.1) arasındaki ilişki tam olarak "kısmi toplam" ilişkisidir: Taylor serisinin n. kısmi toplamı

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T_n(x)$$

yani f'nin n. mertebeden Taylor polinomudur. Bu gözlem küçük görünür ama bölümün bütün mantığı ona dayanır: bir seriyi incelemek, Tanım 34.1 gereği kısmi toplamlar dizisini incelemektir; burada kısmi toplamlar dizisi Taylor polinomları dizisidir; ve Taylor polinomu ile f arasındaki farkı biz zaten adlandırmıştık — kalan terim $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

> ⚠ Üç ayrı soru birbirine karıştırılmamalı
>
> Bir f fonksiyonunun Taylor serisi söz konusu olduğunda birbirinden bağımsız üç soru vardır:
>
> 1. Seri, verilen bir x noktasında **yakınsıyor mu?**
> 2. Yakınsıyorsa **toplamı $f(x)$ mi?**
> 3. Bu, x_0'ın hangi komşuluğunda oluyor?
>
> İkinci soru birinciden gelmez. Bir kuvvet serisi olarak Taylor serisinin bir yakınsaklık yarıçapı vardır ve bu yarıçapın içinde seri elbette bir fonksiyona yakınsar; ama o fonksiyonun f olduğu **ayrıca** ispatlanmalıdır. Bu bölümde göreceğimiz e^{-1/x^2} örneğinde seri her x için yakınsar, buna karşın toplamı yalnızca $x = 0$'da $f(x)$'e eşittir.

İkinci sorunun yanıtı "evet" olan fonksiyonlara özel bir ad veriyoruz.

Tanım 44.2 (Analitik Fonksiyon). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x_0 \in I$ için öyle bir $r > 0$ ve öyle bir (a_n) katsayı dizisi varsa ki $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ olsun ve bu aralıktaki her x için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eşitliği (seri yakınsak olmak üzere) sağlansın, o zaman f'ye I üzerinde **analitik** (analytic) fonksiyon denir. Tek bir x_0 noktası için bu koşul sağlanıyorsa f'ye x_0 **noktasında analitik** denir.

Tanımda katsayıların Taylor katsayıları olması istenmemiştir; ama başka bir seçenek de yoktur. Gerçekten, $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$ bir kuvvet serisi olarak yazılabiliyorsa, önceki bölümde ispatladığımız terim terim türev alma teoremi gereği f o komşulukta her mertebeden türevlenebilirdir ve n kez türev alıp $x = x_0$ koyunca $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$ bulunur. Öyleyse:

- Analitik bir fonksiyon zorunlu olarak **sonsuz kez türevlenebilirdir**.
- Analitik bir fonksiyonu temsil eden kuvvet serisi **tektir** ve o, fonksiyonun Taylor serisidir.

Geriye tek bir soru kalır: sonsuz kez türevlenebilir olmak analitik olmak için yeter mi? Bu bölümün en öğretici sonucu, yanıtın **hayır** olmasıdır. Ama önce, "evet" olduğu durumları tanımanın yolunu kuralım.

44.2 Yakınsaklık Ölçütü: Kalan Sıfıra Gitmelidir

Ölçüt, kısmi toplamların Taylor polinomları olduğu gözleminin doğrudan sonucudur. İfadesi kısa, ispatı bir satırlıktır; ama pratikteki bütün yükü o taşır.

Teorem 44.1 (Taylor Serisinin Fonksiyona Yakınsaması İçin Ölçüt). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık, $x_0 \in I$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde her mertebeden türevlenebilir olsun. Bir $x \in I$ noktası verilsin ve*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

*olsun. O hâlde f'nin x_0 merkezli Taylor serisinin x noktasında yakınsak olması **ve** toplamının $f(x)$'e eşit olması için gerek ve yeter koşul*

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

olmasıdır.

> ***İspat.***
> *Taylor serisinin n. kısmi toplamı, tanımı gereği $s_n(x) = T_n(x)$'tir. Tanım 34.2 gereği serinin x noktasında yakınsak olup toplamının $f(x)$ olması, tam olarak*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \qquad \text{yani} \qquad \lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$$

demektir. Öte yandan $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ olduğundan, sabit bir sayı olan $f(x)$'i çıkarmak dizinin yakınsaklığını bozmaz: $T_n(x) \to f(x)$ olması ile $f(x) - T_n(x) \to 0$ olması aynı şeydir. Demek ki

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

İki iddia da böylece birbirine denk çıkmış oldu.
■

i İki ayrı kalan terimi

"Kalan" sözcüğü bu bölümde iki farklı anlamda geçebilir; ikisini ayırmak gerekir. Bir yanda Taylor formülünün kalan terimi $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ vardır ve f ile polinom arasındaki farktır. Öte yanda yakınsak bir serinin kalanı (Tanım 34.3), toplam eksi kısmi toplam olarak tanımlanır. Taylor serisi $f(x)$'e yakınsadığında bu iki kavram **çakışır**: serinin toplamı $f(x)$, n. kısmi toplamı $T_n(x)$ olduğundan serinin kalanı da $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$ olur. Seri $f(x)$'e yakınsamıyorsa böyle bir çakışma yoktur; işte Teorem 44.1 tam bu ayrımı ölçer.

$R_n(x) \to 0$ olduğunu her seferinde sıfırdan göstermek zahmetlidir. Neyse ki çok sık karşılaşılan bir durumda iş kendiliğinden biter: türevler mertebeden bağımsız olarak sınırlıysa, ya da en fazla geometrik hızla büyüyorsa, kalan otomatik olarak sönür. Bunun nedeni Lagrange kalanındaki $(n+1)!$ paydasıdır; faktöriyel, üstel büyümeyi her zaman yener.

Sonuç 44.1 (Düzgün Sınırlı Türevler Ölçütü). *$J \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $x_0 \in J$ ve $f : J \to \mathbb{R}$ her mertebeden türevlenebilir olsun. Öyle $M \geq 0$ ve $C \geq 0$ sabitleri varsa ki her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve her $t \in J$ için*

$$\mid f^{(n)}(t) \mid \leq M\, C^n$$

olsun, o hâlde her $x \in J$ için f'nin x_0 merkezli Taylor serisi yakınsar ve toplamı $f(x)$'tir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad x \in J.$$

İspat.
$x \in J$ sabitlensin. Lagrange kalanlı Taylor teoremi (Teorem 12.1), x_0 ile x arasında bir ξ_n noktası için

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

olduğunu söyler. $\xi_n \in J$ olduğundan varsayım gereği $\mid f^{(n+1)}(\xi_n) \mid \leq MC^{n+1}$'dir. Buradan

$$\mid R_n(x) \mid \leq \frac{M\, C^{n+1} \mid x - x_0 \mid^{n+1}}{(n+1)!} = M \cdot \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad a := C \mid x - x_0 \mid \geq 0.$$

Şimdi $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ olduğunu gösterelim. $a = 0$ ise dizi zaten özdeş sıfırdır (ilk terim dışında). $a > 0$ olsun; $u_n = \dfrac{a^n}{n!} > 0$ dizisinin ardışık terimlerinin oranı

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

olur. Oranın limiti $0 < 1$ olduğundan, diziler için oran testi (bkz. Analiz 1) gereği $u_n \to 0$'dır. Öyleyse

$$0 \leq \mid R_n(x) \mid \leq M\, u_{n+1} \to 0$$

ve sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $R_n(x) \to 0$ olur. Teorem 44.1 gereği Taylor serisi x noktasında $f(x)$'e yakınsar. $x \in J$ keyfî olduğundan iddia ispatlanmıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

⚠ Ölçüt yeter koşuldur, gerek koşul değildir

Sonuç 44.1'in koşulu sağlanmadığı hâlde Taylor serisinin fonksiyona yakınsadığı bolca örnek vardır. En basiti $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonudur. $J = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ alalım. Bu aralıkta $f^{(n)}(t) = \dfrac{n!}{(1-t)^{n+1}}$ olduğundan $t = \frac{1}{2}$ noktasında $f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = n!\,2^{n+1}$'dir. Faktöriyel çarpanı yüzünden hiçbir MC^n sınırı bu büyümeyi yakalayamaz: $\dfrac{n!\,2^{n+1}}{MC^n} \to \infty$ olur. Buna karşın f'nin Maclaurin serisi olan geometrik seri $\sum x^n$, $|\,x\,| < 1$ için $f(x)$'e yakınsar (Teorem 34.5). Yani ölçüt bir **kolaylık**tır; başarısız olması olumsuz bir sonuç vermez.

44.3 Üstel ve Trigonometrik Açılımlar

Şimdi ölçütü çalıştıralım. Her örnekte izleyeceğimiz yol aynıdır: türevlerin genel biçimini bul, katsayıları oku, kalanı denetle, yakınsaklık yarıçapını belirle.

Örnek 44.1 (Üstel Fonksiyonun Maclaurin Serisi). Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

olduğunu gösterin ve serinin yakınsaklık yarıçapını bulun. Buradan e sayısını dört ondalık basamak duyarlıkla hesaplayın.

Çözüm.
Katsayılar. $f(x) = e^x$ için her n mertebesinde $f^{(n)}(x) = e^x$, dolayısıyla $f^{(n)}(0) = 1$'dir. Maclaurin serisinin katsayıları $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$ olur ve aday seri $\sum \dfrac{x^n}{n!}$'dir.
Kalanın denetimi. Keyfî bir $R > 0$ alalım ve $J = [-R, R]$ üzerinde çalışalım. Üstel fonksiyon artan olduğundan her $t \in J$ ve her n için

$$|\,f^{(n)}(t)\,| = e^t \le e^R$$

olur. Bu, Sonuç 44.1'in koşulunun $M = e^R$ ve $C = 1$ ile sağlanması demektir. Öyleyse her $x \in [-R, R]$ için seri e^x'e yakınsar. $R > 0$ keyfî seçildiğinden ve her reel sayı yeterince büyük bir R için $[-R, R]$ içinde bulunduğundan (bkz. Analiz 1), eşitlik **bütün** $\mathbb{R}$ üzerinde geçerlidir.
Kalanı doğrudan da kestirebiliriz. Teorem 12.1 gereği 0 ile x arasında bir ξ için $R_n(x) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$ olur; $e^{\xi} \le e^{|\,x\,|}$ olduğundan

$$|\,R_n(x)\,| \le e^{|\,x\,|}\,\frac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Yakınsaklık yarıçapı. $a_n = \dfrac{1}{n!}$ için $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|\,x\,|}{n+1} \to 0 < 1$ olduğundan d'Alembert oran testi (Teorem 37.2) her x için mutlak yakınsaklık verir. Yakınsaklık yarıçapı $R = +\infty$'dur.
***e* sayısının hesabı.** $x = 1$ koyalım:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Hatayı kestirelim. $0 < \xi < 1$ için $e^{\xi} < e < 3$ olduğundan

$$0 < R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört ondalık basamak için $\dfrac{3}{(n+1)!} < \dfrac{1}{2}\cdot 10^{-4}$ istiyoruz; $(n+1)! > 60\,000$ olmalı. $8! = 40\,320$ yetmez, $9! = 362\,880$ yeter; öyleyse $n = 8$ alalım:

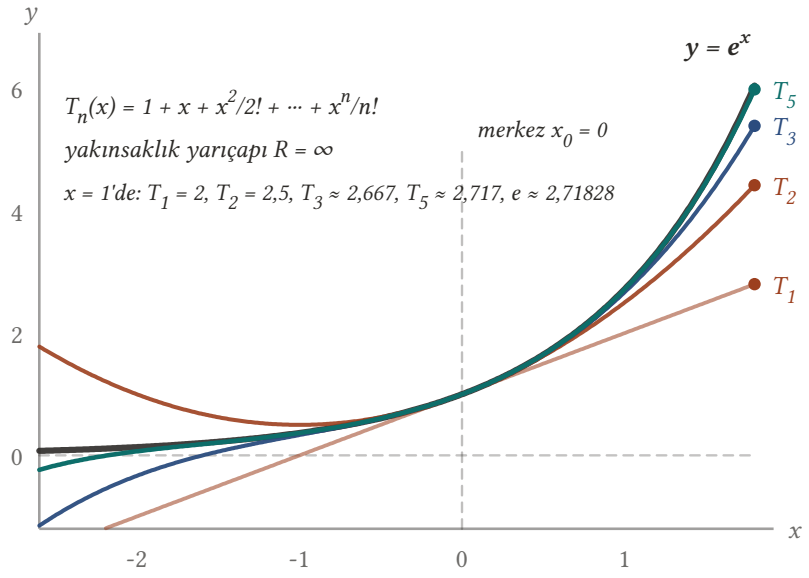
$$T_8(1) = 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}1\overline{6} + 0{,}041\overline{6} + 0{,}00\overline{83} + 0{,}001388\ldots + 0{,}000198\ldots + 0{,}0000248\ldots = 2{,}718278\ldots$$

Hata $\dfrac{3}{9!} < 0{,}0000083$ olduğundan $e = 2{,}7183$ (dört ondalık basamakla) elde edilir. Gerçek değer $e = 2{,}718281828\ldots$'dir. Bu, e'nin tanımındaki $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisinden (bkz. Analiz 1) çok daha hızlı bir hesap yoludur: o dizi dört basamak için on binlerce terim isterken, seri dokuz terimle sonuç verir.

Bir yan sonuç. x yerine $-x$ koyarsak

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

elde edilir; bu, terimlerin işaretini değiştirmekten ibarettir ve aynı yarıçapla geçerlidir.



Şekil 44.1: e^x'in Maclaurin serisinin kısmi toplamları: $T_1(x) = 1 + x$, T_2, T_3 ve T_5. Her kısmi toplam merkezde eğriye yapışır; derece büyüdükçe yapışma bölgesi hem sağa hem sola genişler. Yakınsaklık yarıçapı ∞ olduğundan önceden seçilen herhangi bir $[-R, R]$ aralığında yeterince büyük n için hata gözle ayırt edilemez hâle gelir: T_5 şeklin büyük bölümünde eğrinin altında kaybolmuştur. Yine de her T_n bir polinomdur; üstel büyümeye yetişemediğinden yeterince uzakta eğriyi terk eder.

■

Örnek 44.2 (Sinüs, Kosinüs ve Hiperbolik Fonksiyonların Serileri). Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

ve

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

olduğunu gösterin. Buradan $\sin 0{,}5$ değerini beş ondalık basamak duyarlıkla hesaplayın.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Sinüs. $f(x) = \sin x$ için türevler dört adımda devreder:

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^{(4)} = \sin x = f.$$

Genel olarak $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$'dir; bu, tümevarımla (bkz. Analiz 1) hemen görülür, çünkü $\dfrac{d}{dx}\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$'dir. Buradan

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ çift} \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$$

olur ve aday seri $\sum_k \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$'dir.
Kalanın denetimi. Her n ve her $t \in \mathbb{R}$ için $\left|\, f^{(n)}(t) \,\right| = \left|\sin\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1$'dir. Yani Sonuç 44.1'in koşulu $J = \mathbb{R}$, $M = 1$, $C = 1$ ile sağlanır. Öyleyse seri her $x \in \mathbb{R}$ için $\sin x$'e yakınsar. Burada aralığı sonlu almak bile gerekmedi: sinüsün bütün türevleri $\mathbb{R}$ üzerinde 1 ile sınırlıdır.
Kosinüs. Aynı akıl yürütme $f(x) = \cos x$ için de geçerlidir: $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ ve $\left|\, f^{(n)} \,\right| \le 1$. Bu kez

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k \\ 0, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olur ve istenen açılım çıkar. Sinüs serisinin yalnızca tek kuvvetleri, kosinüs serisinin yalnızca çift kuvvetleri içermesi, bu fonksiyonların tek ve çift olmasının serilerdeki yansımasıdır.
Hiperbolik fonksiyonlar. Tanımları gereği $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ve $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$'tir. Örnek 44.1'deki iki seriyi Teorem 34.4 ile birleştirelim:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n - (-1)^n x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\,1 - (-1)^n\,\right)x^n}{n!}.$$

n çift iken $1 - (-1)^n = 0$, n tek iken $1 - (-1)^n = 2$ olduğundan yalnızca tek kuvvetler kalır ve katsayıları $\dfrac{1}{n!}$ olur:

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Toplam alınırsa aynı hesap çift kuvvetleri bırakır ve $\cosh x = \sum_k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ elde edilir. Her iki seri de $\mathbb{R}$'nin tamamında yakınsaktır, çünkü e^x ve e^{-x} serileri öyledir.
Aynı sonuç doğrudan da görülebilir: $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$ olduğundan $[-R, R]$ üzerinde bütün türevler $\cosh R$ ile sınırlıdır ve Sonuç 44.1 uygulanır. İki fonksiyonun serilerinin, sinüs ve kosinüs serilerinden yalnızca $(-1)^k$ işaretinin düşmesiyle elde edildiğine dikkat edin.
Yakınsaklık yarıçapları. Dördü için de yarıçap $+\infty$'dur; örneğin sinüs serisinde ardışık sıfırdan farklı terimlerin oranı $\dfrac{|\,x\,|^2}{(2k+2)(2k+3)} \to 0$'dır (Teorem 37.2).
$\sin 0{,}5$ hesabı. $x = 0{,}5$ için

$$\sin 0{,}5 = 0{,}5 - \frac{0{,}5^3}{6} + \frac{0{,}5^5}{120} - \frac{0{,}5^7}{5040} + \cdots$$

Terimler mutlak değerce azalıp sıfıra gittiğinden bu bir alternatif seridir; Abel, Dirichlet ve Leibniz Testleri bölümündeki Leibniz ölçütünün hata kestirimi gereği hata, atılan ilk terimin mutlak değerini aşmaz. Dördüncü terim $\dfrac{0{,}0078125}{5040} = 0{,}00000155$ olduğundan üç terim beş basamak için yeterlidir:

$$0{,}5 - 0{,}02083333 + 0{,}00026042 = 0{,}47942709.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Dördüncü terimi de katarsak 0,47942554 buluruz; gerçek değer 0,479425538…'dir. Demek ki $\sin 0{,}5 \approx 0{,}47943$'tür.
■

44.4 Geometrik Seri ve Logaritma

Bir sonraki grup açılım, ölçütün doğrudan işlemediği ilk örnekleri içerir. Burada yol, kalanı Lagrange biçiminde kestirmeye çalışmak yerine, **bilinen bir seriden integral alarak** yenisini üretmektir. Başlangıç noktası geometrik seridir. Teorem 34.5 gereği $|x|<1$ için

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

olur; $|x|\geq 1$ için terimler sıfıra gitmediğinden seri ıraksaktır (Sonuç 34.1). Burada Taylor formülüne hiç başvurmadık: eşitlik doğrudan geometrik toplam formülünden geliyor. Yine de bu seri $\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonunun Maclaurin serisidir, çünkü katsayılarının $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=1$ olduğunu Taylor Formülü bölümünde hesaplamıştık.

> **i** Yarıçap neden tam olarak 1?
>
> $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonu $(-\infty,1)$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilirdir; örneğin $x=-5$ noktasında hiçbir sorun yoktur. Buna karşın 0 merkezli Maclaurin serisi $x=-5$'te ıraksar. Yakınsaklık yarıçapı, merkezin **en yakın** sorunlu noktasına olan uzaklıkla belirlenir; burada o nokta $x=1$'dir ve uzaklık 1'dir. Sağdaki tekillik, seriyi solda da 1 uzaklığında durdurur. Kuvvet serilerinin bu "simetrik körlüğü", bölümün ilerleyen kısmında $\dfrac{1}{1+x^2}$ örneğinde daha da çarpıcı biçimde karşımıza çıkacaktır.

Şimdi logaritmaya geçelim. $\ln(1+x)$'in türevi $\dfrac{1}{1+x}$'tir ve bu, geometrik serinin $x\mapsto -x$ ile dönüştürülmüş hâlidir. Öyleyse logaritmanın serisini integral alarak elde etmeyi bekleriz. Aşağıdaki çözümde bunu iki ayrı yoldan yapacağız: biri terim terim integral alma teoremine dayanır ve kısadır; öteki tam bir cebirsel özdeşlikten yürür, biraz daha uzundur ama uç nokta $x=1$'i de hediye eder.

Örnek 44.3 (Logaritmanın Maclaurin Serisi). $-1<x\leq 1$ için

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

olduğunu gösterin. Serinin $x\leq -1$ için kullanılamayacağını belirtin ve $\ln 2$ ile $\ln 3$ değerlerini hesaplamanın verimli bir yolunu verin.

Çözüm.
Birinci yol: terim terim integral. $|t|<1$ için geometrik seride x yerine $-t$ koyalım:

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,\qquad |t|<1.$$

Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Kuvvet Serilerinin Özellikleri bölümünde ispatladığımız terim terim integral alma teoremi gereği, $|x|<1$ için 0'dan x'e integral alabiliriz:

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Sol taraf, $\ln(1+t)$'nin türevi $\dfrac{1}{1+t}$ olduğundan Newton–Leibniz formülüyle $\ln(1+x)-\ln 1=\ln(1+x)$'tir. Sağ tarafta $n+1=m$ değişimi yapılırsa istenen seri çıkar. Böylece $|x|<1$ için eşitlik kuruldu.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci yol: tam kalan. Uç nokta $x = 1$'i de kapsayacak bir hesap yapalım. Geometrik toplamın sonlu biçimi, her $t \neq -1$ için **tam** bir özdeşliktir:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

(Sağdaki ilk n terim $\dfrac{1-(-t)^n}{1+t}$'ye eşittir; son terim eklenince $\dfrac{1}{1+t}$ olur.) Bu özdeşliğin iki yanının da 0 ile x arasında sürekli olduğuna dikkat ederek integral alalım:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \rho_n(x), \qquad \rho_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Şimdi $\rho_n(x) \to 0$ olduğunu iki durumda gösterelim.
Durum 1: $0 \le x \le 1$. İntegral aralığında $t \ge 0$, dolayısıyla $1 + t \ge 1$ ve $\dfrac{t^n}{1+t} \le t^n$'dir. İntegralde sıralama gereği

$$\left|\, \rho_n(x) \,\right| \le \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Bu kestirim $x = 1$'i de içerir. Demek ki seri $x = 1$'de de $\ln 2$'ye yakınsar.
Durum 2: $-1 < x < 0$. Bu kez t, x ile 0 arasındadır ve $1 + t \ge 1 + x > 0$'dır. Değişkeni ters çevirerek

$$\left|\, \rho_n(x) \,\right| = \int_x^0 \frac{|\,t\,|^n}{1+t}\,dt \le \frac{1}{1+x}\int_x^0 |\,t\,|^n\,dt = \frac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \to 0$$

buluruz, çünkü $|\,x\,| < 1$ olduğundan $|\,x\,|^{n+1} \to 0$'dır (bkz. Analiz 1). Böylece $-1 < x \le 1$ için eşitlik kurulmuş oldu.
Uç noktalar. $x = 1$'de seri $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots$ alternatif harmonik serisidir ve yukarıdaki hesaba göre toplamı $\ln 2$'dir. $x = -1$'de ise seri $-\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots\right)$, yani harmonik serinin negatifidir ve Teorem 36.2 gereği ıraksar; zaten $x \to -1^+$ iken $\ln(1+x) \to -\infty$ olduğundan başka türlüsü beklenemezdi. $x < -1$ hâlinde ise $1 + x < 0$ olduğundan $\ln(1+x)$ zaten tanımsızdır; kısacası seri $x \le -1$ için kullanılamaz. $x > 1$ için de seri ıraksar, çünkü $\dfrac{|\,x\,|^n}{n} \to \infty$ olduğundan terimleri sıfıra gitmez (Sonuç 34.1).

> **i** Abel teoremiyle kısayol
>
> $x = 1$ noktasını, integral kestirimi yapmadan da elde edebilirdik. Seri $|\,x\,| < 1$ için $\ln(1+x)$'e eşittir; öte yandan alternatif harmonik seri $x = 1$'de yakınsaktır (Leibniz ölçütü). Önceki bölümdeki Abel teoremi, bir kuvvet serisi yakınsaklık aralığının bir ucunda yakınsıyorsa toplam fonksiyonunun o uçta tek yönlü sürekli olduğunu söyler. Buradan
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$
>
> çıkar. Yukarıdaki ikinci yol ise Abel teoremine hiç başvurmadan aynı sonucu verir; iki yaklaşımı da bilmekte yarar vardır.

Neden Lagrange kalanı yetmez? Bu açılımı Lagrange kalanıyla denetlemeye kalkarsak x'in -1'e yakın değerlerinde tıkanırız. Gerçekten $f(x) = \ln(1+x)$ için $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ olduğundan bir $\theta \in (0,1)$ için

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $x > 0$ iken $\left|\dfrac{x}{1+\theta x}\right| < x \le 1$ olduğundan sorun yoktur. Ama $x < 0$ iken $1+\theta x < 1$'dir ve $\dfrac{|\,x\,|}{1+\theta x}$ oranının 1'den küçük olduğunu garanti edemeyiz — θ hakkında hiçbir bilgimiz yok. İşte kalanın **tam** biçimini veren integral yöntemi tam da bu noktada devreye girer ve θ belirsizliğinden bizi kurtarır.
ln 2 hesabı. $x = 1$'deki alternatif harmonik seri çok yavaş yakınsar: hata, atılan ilk terim mertebesindedir, yani üç ondalık basamak için binlerce terim gerekir. Bunun yerine iki seriyi çıkararak çok daha hızlı bir formül kuralım. $|\,x\,| < 1$ için x yerine $-x$ koyup çıkarırsak

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

elde ederiz (çıkarma Teorem 34.4 gereği serbesttir; çift kuvvetler yok olur, tek kuvvetler ikiye katlanır). $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ olması için $x = \dfrac{1}{3}$ almak yeter:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 243} + \frac{1}{7\cdot 2187} + \cdots\right).$$

Terimleri hesaplayalım: 0,333333, 0,012346, 0,000823, 0,000065, 0,000006. Toplam 0,346573; ikiyle çarpınca $\ln 2 \approx 0{,}693146$ bulunur. Gerçek değer 0,6931472'dir; beş terimle altı basamağa yaklaştık. Aynı formülde $\dfrac{1+x}{1-x} = 3$ olması için $x = \dfrac{1}{2}$ almak gerekir ve bu da $\ln 3$'ü verir:

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 32} + \frac{1}{7\cdot 128} + \frac{1}{9\cdot 512} + \cdots\right).$$

Burada $x = \dfrac{1}{2}$ olduğundan terimler yalnızca dörder kat küçülür; bu yüzden $\ln 2$ hesabındaki kadar hızlı yakınsamaz. Terimler sırasıyla 0,500000, 0,041667, 0,006250, 0,001116, 0,000217, 0,000044, 0,000009, 0,000002'dir; toplam 0,549306 ve ikiyle çarpınca $\ln 3 \approx 1{,}098611$ çıkar. Gerçek değer 1,0986123'tür.
■

Şimdiye kadarki bütün açılımlar $x_0 = 0$ merkezliydi, yani Maclaurin serisiydi. Oysa Tanım 44.1 keyfî bir x_0 merkezine izin verir ve pratikte merkez, çoğu zaman fonksiyonun tanımlı olduğu bölgeye göre seçilir: $\ln x$ için 0 merkezi hiç kullanılamaz, çünkü fonksiyon orada tanımsızdır. Merkezi kaydırmanın da sıfırdan türev hesaplamayı gerektirmediğini görelim; yapılacak tek şey uygun bir değişken değiştirmedir.

Örnek 44.4 (Sıfırdan Farklı Merkezli Taylor Serileri). Aşağıdaki açılımları bulun ve geçerli oldukları aralıkları belirtin.

a) $\ln x$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ merkezli Taylor serisi.

b) e^x fonksiyonunun keyfî bir $x_0 = a$ merkezli Taylor serisi.

c) $\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ merkezli Taylor serisi.

Çözüm.
a) $u = x - 1$ yazalım; $x > 0$ olması $u > -1$ demektir ve $\ln x = \ln(1+u)$ olur. Örnek 44.3 gereği $-1 < u \le 1$ için

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

olur; geçerlilik aralığı $0 < x \le 2$'dir. Elde ettiğimiz serinin gerçekten $\ln x$'in 1 merkezli Taylor serisi olduğunu görmek için katsayıları denetleyelim: $f(x) = \ln x$ için $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ olduğundan $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$'dir; katsayılar tutuyor. Yarıçap 1'dir ve bunun nedeni açıktır: merkezin en yakın sorunlu noktası olan $x = 0$, merkeze tam 1 uzaklıktadır.
b) $e^x = e^a\, e^{x-a}$ çarpanlamasında ikinci çarpana Örnek 44.1'yi $x - a$ değişkeniyle uygulayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Katsayılar denetlensin: $f^{(n)}(x) = e^x$ olduğundan $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = \dfrac{e^a}{n!}$'dir; bulduğumuz katsayılarla birebir uyuşuyor. Yakınsaklık yarıçapı yine $+\infty$'dur; üstel fonksiyon her merkez etrafında bütün $\mathbb{R}$'yi görür.
c) Paydayı merkez etrafında toplayalım:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}}.$$

Geometrik seride x yerine $-\dfrac{x-2}{2}$ koymak, $\left|\dfrac{x-2}{2}\right| < 1$, yani $|\,x-2\,| < 2$ koşuluyla serbesttir:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n, \qquad 0 < x < 4.$$

Katsayı denetimi: $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ olduğundan $\dfrac{f^{(n)}(2)}{n!} = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}$'dir; yine tutuyor. Yarıçap 2'dir; merkezin tekil noktaya, yani $x = 0$'a olan uzaklığı budur. Üç örnekte de görülen kural şudur: sıfırdan farklı merkezli bir seri istendiğinde, $x - x_0$ değişkenini yeni bilinmeyen sayıp bilinen bir Maclaurin açılımına başvurmak, n. türevi hesaplamaktan çok daha kısadır.
■

44.5 Binom Serisi

Sıra, bu bölümün en güçlü tek sonucuna geldi. Taylor Formülü bölümünde $(1+x)^\alpha$ fonksiyonunun sonlu Maclaurin formülünü yazmış ve **genelleştirilmiş binom katsayısını**

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

biçiminde tanımlamıştık; burada α herhangi bir reel sayıdır ve pay tam olarak n çarpandan oluşur. Şimdi $n \to \infty$ limitini alıp sonsuz toplamın gerçekten $(1+x)^\alpha$'ya eşit olduğunu göstereceğiz.
İspat için Lagrange kalanını kullanmak, logaritmada karşılaştığımız güçlüğün daha da beteriyle karşılaşmak demektir; Cauchy kalanıyla iş görülebilir ama hesap ağırdır. Bunun yerine çok daha zarif bir yol izleyeceğiz. Fikir şudur: serinin topladığı fonksiyona $y(x)$ diyelim. Katsayıların sağladığı basit bir özyineleme sayesinde y'nin

$$(1+x)\,y'(x) = \alpha\, y(x)$$

diferansiyel denklemini sağladığını göstereceğiz. Öte yandan $(1+x)^\alpha$ de aynı denklemi sağlar. İki çözümün oranına bakıp türevinin sıfır olduğunu görünce, oranın sabit olduğu ve $x = 0$'daki değerinden ötürü bu sabitin 1 olduğu çıkar. Kalan terimle hiç uğraşmayız.

Teorem 44.2 (Binom Serisi). *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in (-1,1)$ için*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

eşitliği geçerlidir. α bir doğal sayı olduğunda seri sonlu bir toplama indirgenir ve eşitlik her $x \in \mathbb{R}$ için doğrudur.

İspat.
Adım 1: Katsayı özyinelemesi. *Tanım gereği*

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} = \frac{\alpha-n}{n+1}\binom{\alpha}{n},$$

yani

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = (\alpha - n)\binom{\alpha}{n}, \qquad n \geq 0$$

elde ederiz. Bu bağıntıya kısaca $(*)$ diyelim; tek satırlık bu eşitlik ispatın bütün cebirsel yükünü taşıyacak. ***Adım 2: Yakınsaklık yarıçapı 1'dir.*** *$\alpha \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ise, pay çarpanları arasında $\alpha - \alpha = 0$ belirdiğinden $n > \alpha$ için $\binom{\alpha}{n} = 0$'dır ve seri bir polinomdur; bu durumu Adım 5'te ayrıca ele alacağız. Şimdi α'nın doğal sayı* ***olmadığını*** *varsayalım. O hâlde hiçbir çarpan sıfırlanmaz ve her n için $\binom{\alpha}{n} \neq 0$'dır. Sabit bir $x \neq 0$ için terimlerin oranı*

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^{n}} \right| = \frac{\mid \alpha - n \mid}{n+1} \mid x \mid \to \mid x \mid$$

olur, çünkü $\dfrac{\mid \alpha - n \mid}{n+1} = \dfrac{n - \alpha}{n+1} \to 1$'dir ($n$ yeterince büyük olduğunda $n > \alpha$). D'Alembert oran testi (Teorem 37.2) gereği $\mid x \mid < 1$ için seri mutlak yakınsak, $\mid x \mid > 1$ için ise terimler sıfıra gitmediğinden (Sonuç 34.1) ıraksaktır. Demek ki yakınsaklık yarıçapı $R = 1$'dir.
Adım 3: Toplam fonksiyonu diferansiyel denklemi sağlar. *$x \in (-1, 1)$ için*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

tanımlayalım. Yarıçapın içinde terim terim türev alabiliriz (önceki bölümün terim terim türev teoremi):

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{\alpha}{n+1} x^n$$

(ikinci eşitlikte $n - 1$ yerine n yazıldı). Bu seriyi x ile çarparsak

$$x\,y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^n$$

olur (ilk terim $n = 0$ için zaten sıfırdır). İkisini toplayalım; her iki seri de $(-1, 1)$'de mutlak yakınsak olduğundan toplama serbesttir (Teorem 34.4):

$$(1+x)y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} \right] x^n.$$

Köşeli parantezin içine $(*)$'ı uygulayalım:

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = (\alpha - n)\binom{\alpha}{n} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

Demek ki

$$(1+x)\,y'(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha\, y(x), \qquad x \in (-1, 1).$$

Adım 4: Oranın sabitliği. *$(-1, 1)$ üzerinde $1 + x > 0$ olduğundan $(1+x)^{-\alpha}$ iyi tanımlı ve türevlenebilirdir. Yardımcı fonksiyonu*

$$h(x) = y(x)\,(1+x)^{-\alpha}, \qquad x \in (-1, 1)$$

ile tanımlayalım. Çarpım kuralı ve genel kuvvet kuralıyla

$$h'(x) = y'(x)(1+x)^{-\alpha} + y(x)\cdot(-\alpha)(1+x)^{-\alpha-1} = (1+x)^{-\alpha-1}\left[\,(1+x)y'(x) - \alpha\, y(x)\,\right].$$

Adım 3 gereği köşeli parantez özdeş olarak sıfırdır; öyleyse her $x \in (-1, 1)$ için $h'(x) = 0$'dır. Ortalama değer teoreminin (Teorem 8.2) klasik sonucu gereği, bir aralıkta türevi özdeş sıfır olan fonksiyon sabittir. Demek ki h sabittir. Değerini $x = 0$'da okuyalım: $y(0) = \binom{\alpha}{0} = 1$ ve $(1+0)^{-\alpha} = 1$ olduğundan $h(0) = 1$'dir. Öyleyse her $x \in (-1, 1)$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y(x)(1+x)^{-\alpha} = 1, \qquad \text{yani} \qquad y(x) = (1+x)^{\alpha}.$$

Bu, ispatlanmak istenen eşitliktir.
Adım 5: $\alpha = m$ doğal sayı hâli. *Bu durumda $n > m$ için $\binom{m}{n} = 0$ olduğundan seri*

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$$

sonlu toplamına indirgenir. Sonlu bir toplam her x için tanımlıdır ve yukarıdaki Adım 3–4 akıl yürütmesi bu kez $(-1,1)$ ile sınırlı kalmaz: y bir polinomdur, $(1+x)^m$ de öyledir ve $x > -1$ üzerinde $h' \equiv 0$, $h(0) = 1$ olduğundan $y(x) = (1+x)^m$ olur. İki polinom sonsuz çoklukta noktada çakıştığından $\mathbb{R}$'nin tamamında eşittirler. Elde edilen

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$$

eşitliği binom teoreminin ta kendisidir. Yani binom teoremi, binom serisinin özel bir hâlidir.
■

i Uç noktalarda ne oluyor?

$|\,x\,| = 1$'de yakınsaklık α'ya bağlıdır ve yanıtı Raabe testi verir. α doğal sayı olmasın ve $n > \alpha$ olacak kadar büyük n'ler için $c_n = \left|\binom{\alpha}{n}\right|$ yazalım. $(*)$ gereği $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n-\alpha}$ ve

$$n\left(\frac{c_n}{c_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{(n+1)-(n-\alpha)}{n-\alpha} = \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} \to 1+\alpha.$$

Teorem 38.2 gereği $1+\alpha > 1$, yani $\alpha > 0$ iken $\sum c_n$ yakınsar; $1+\alpha < 1$, yani $\alpha < 0$ iken ıraksar. Sonuçlar şöyle özetlenir:

- $\alpha > 0$ ise seri hem $x = 1$ hem $x = -1$'de **mutlak** yakınsar ve eşitlik $[-1,1]$'in tamamında geçerlidir (uçlardaki eşitlik Abel teoremiyle gelir).
- $-1 < \alpha < 0$ ise α negatif olduğundan bütün $\alpha - k$ çarpanları negatiftir ve $\binom{\alpha}{n}$'in işareti $(-1)^n$'dir. $x = -1$'de bütün terimler pozitif olur ve seri ıraksar. $x = 1$'de ise seri alternatiftir; $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n-\alpha}{n+1} < 1$ olduğundan (c_n) azalandır ve $1 - t \le e^{-t}$ eşitsizliğiyle $c_{n+1} \le c_1 \exp\!\left(-(1+\alpha)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \to 0$ bulunur (harmonik seri ıraksadığından üstel çarpan sıfıra gider). Leibniz ölçütü gereği seri $x = 1$'de yakınsar.
- $\alpha \le -1$ ise $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n-\alpha}{n+1} \ge 1$ olduğundan (c_n) azalmaz ve terimler sıfıra gitmez; seri her iki uçta da ıraksar.

44.5.1 Binom serisinin kullanışlı özel hâlleri

Binom serisi tek başına bir açılım deposudur: α'ya değer verip x yerine uygun bir ifade koyarak pek çok fonksiyonun serisini üretebiliriz. En çok kullanılan iki değer $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\alpha = -\frac{1}{2}$'dir.

Örnek 44.5 (Karekök ve Ters Karekök Açılımları). $\sqrt{1+x}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonlarının Maclaurin serilerini yazın. $\sqrt{2}$ sayısını bu açılımla altı ondalık basamak duyarlıkla hesaplayın.

Çözüm.
Karekök. $\alpha = \dfrac{1}{2}$ alalım. İlk katsayılar:

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{1}{16},$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{24} = -\frac{5}{128}.$$

Öyleyse $\mid x \mid < 1$ için

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$$

Genel terimi kapalı biçimde de yazabiliriz. $n \geq 1$ için paydaki çarpanları düzenlersek

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}\,n!\,(n-1)!}$$

bulunur; gerçekten $n=1$ için $\dfrac{0!}{2\cdot 1\cdot 1} = \dfrac{1}{2}$, $n=2$ için $-\dfrac{2!}{8\cdot 2\cdot 1} = -\dfrac{1}{8}$, $n=3$ için $\dfrac{4!}{32\cdot 6\cdot 2} = \dfrac{1}{16}$ çıkar. $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ olduğundan uç noktalar da yakınsaklık aralığına dâhildir ve eşitlik $[-1,1]$ üzerinde geçerlidir; özel olarak $x = 1$ koyarsak

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \cdots$$

olur — doğru ama umutsuzca yavaş bir seri.

Ters karekök. $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ için

$$\binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \binom{-1/2}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{3}{8}, \quad \binom{-1/2}{3} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6} = -\frac{5}{16},$$

ve genel olarak

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

olur. (Son eşitlik, payı ve paydayı $2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$ ile çarpıp $\dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ elde etmekten çıkar.) Böylece $\mid x \mid < 1$ için

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \cdots$$

Ters karekökte $x \mapsto -x^2$. Şimdi x yerine $-x^2$ koyalım. $\mid -x^2 \mid < 1$ koşulu $\mid x \mid < 1$ demektir ve bu bölgede

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \cdots$$

olur; iki $(-1)^n$ çarpanı birbirini götürdüğünden bütün katsayılar pozitiftir. Bu seri, birazdan ark sinüsün açılımını üretecek olan anahtardır.

$\sqrt{2}$ hesabı. $x = 1$ koymak yavaş olduğuna göre, kökü küçük bir x değerine taşıyalım. $\dfrac{49}{25}$ sayısının karekökü $\dfrac{7}{5}$ olduğundan

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49}{25}\cdot\frac{50}{49}} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$$

yazabiliriz. Artık $x = \dfrac{1}{49} = 0{,}020408163$ küçüktür. Terimleri hesaplayalım:

$$\frac{x}{2} = 0{,}010204082, \quad \frac{x^2}{8} = 0{,}000052062, \quad \frac{x^3}{16} = 0{,}000000531, \quad \frac{5x^4}{128} = 0{,}0000000068.$$

İlk dört terimin toplamı şu değeri verir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$1 + 0{,}010204082 - 0{,}000052062 + 0{,}000000531 = 1{,}010152551$$

$\frac{7}{5} = 1{,}4$ ile çarparsak

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4 \times 1{,}010152551 = 1{,}414213571.$$

Gerçek değer 1,414213562…; dört terimle yedi ondalık basamak duyarlığa ulaştık. Beşinci terimi de katarsak toplam 1,010152544 olur ve 1,4 ile çarpınca 1,414213562 çıkar; dokuz basamak doğrudur. Aynı hile her karekökte işe yarar: sayıyı, karekökü kolay bir kareye bölüp kalanı 1'e yakın tutmak yeter.

■

44.6 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Serileri

Ark tanjant ve ark sinüs, doğrudan türev alarak açılımı bulunması güç olan fonksiyonlardır: n. türevleri hızla karmaşıklaşır. Ama **türevleri** basittir ve ikisi de bildiğimiz serilere aittir. Öyleyse yol açıktır: türevin serisini yaz, terim terim integralle.

Örnek 44.6 (Ark Tanjant ve Ark Sinüs Serileri). $-1 \le x \le 1$ için

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

ve $-1 < x < 1$ için

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

olduğunu gösterin. Buradan π için iki formül elde edin.

Çözüm.

Ark tanjant. Geometrik toplamın sonlu ve **tam** biçiminde t yerine $-t^2$ koyalım: her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}.$$

Bu bir özdeşliktir ve payda hiçbir zaman sıfır olmadığından her t için geçerlidir. 0'dan x'e integral alalım; arctan'ın türevi $\frac{1}{1+t^2}$ olduğundan sol taraf $\arctan x$'tir:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \rho_n(x), \qquad \rho_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Kalanı kestirmek çok kolaydır, çünkü $1 + t^2 \ge 1$'dir:

$$|\,\rho_n(x)\,| \le \left|\int_0^x t^{2n}\,dt\right| = \frac{|\,x\,|^{2n+1}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1} \to 0, \qquad |\,x\,| \le 1.$$

Demek ki eşitlik $[-1, 1]$'in tamamında, uç noktalar dâhil geçerlidir. $|\,x\,| > 1$ için ise terimler sıfıra gitmediğinden seri ıraksar; yakınsaklık yarıçapı 1'dir.

Ark sinüs. arcsin'in türevi $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$'dir ve bu fonksiyonun serisini Örnek 44.5'nda bulmuştuk:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} t^{2n}, \qquad |\,t\,| < 1.$$

Bu bir kuvvet serisidir ve yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Terim terim integral alma teoremi gereği $|\,x\,| < 1$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

İlk birkaç katsayıyı yazalım: $n=0$ için 1; $n=1$ için $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; $n=2$ için $\frac{1}{16}\cdot 6\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$; $n=3$ için $\frac{1}{64}\cdot 20\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{112}$. Bütün katsayılar pozitiftir, çünkü $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}>0$ ve $2n+1>0$'dır; ark tanjant serisindeki gibi bir işaret değişimi burada yoktur.

π için birinci formül. Ark tanjant serisinde $x=1$ koyalım. $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ olduğundan

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

elde edilir. Bu, Gregory–Leibniz serisidir. Güzelliğine karşın hesap için işe yaramaz: kalan kestirimi $\frac{1}{2n+1}$ olduğundan üç ondalık basamak için binlerce terim gerekir.

π için ikinci formül. Serinin hızı $|\,x\,|$ küçüldükçe artar; öyleyse $\frac{\pi}{4}$'ü küçük argümanlı ark tanjantlarla yazmalıyız. Tanjantın toplam formülünden çıkan

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

eşitliği bunu yapar. Burada $x=\frac{1}{5}$ için terimler $5^{-(2n+1)}$ hızıyla, $x=\frac{1}{239}$ için ise çok daha hızlı söner; birkaç terim beş-altı basamak verir. İlk açılımdan

$$\arctan\frac{1}{5} = 0{,}2 - \frac{0{,}008}{3} + \frac{0{,}00032}{5} - \frac{0{,}0000128}{7} + \cdots = 0{,}19739555985\ldots$$

ve $\arctan\frac{1}{239} = 0{,}00418407600\ldots$ bulunur. Buradan

$$\pi \approx 4(4\times 0{,}19739555985 - 0{,}00418407600) = 4\times 0{,}78539816340 = 3{,}14159265360$$

çıkar; gerçek değer $\pi = 3{,}14159265359\ldots$'dur.

Ark sinüsle π. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ olduğundan

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{40}\cdot\frac{1}{32} + \frac{5}{112}\cdot\frac{1}{128} + \cdots$$

Terimler sırasıyla $0{,}5$, $0{,}0208333$, $0{,}0023438$, $0{,}0003488$, $0{,}0000593$, $0{,}0000109$, $0{,}0000021$'dir; toplam $0{,}5235982$ ve bunun altı katı $3{,}1415892$'dir. Gerçek değer $\pi=3{,}1415927$; yedi terim beş basamak verdi. Bu seri de Gregory–Leibniz'den kat kat hızlıdır, çünkü $x=\frac{1}{2}$'nin kuvvetleri hızla küçülür.

■

44.7 Sonsuz Türevlenebilir Olmak Analitik Olmaya Yetmez

Şimdiye kadar incelediğimiz bütün fonksiyonlarda Taylor serisi fonksiyona yakınsadı. Bu, yanıltıcı bir alışkanlık doğurabilir. Analitik olmanın sonsuz kez türevlenebilir olmayı gerektirdiğini biliyoruz; ters yönün **doğru olmadığını** gösteren örneği artık verebiliriz. Örnek, Taylor Formülü bölümünde uyarı olarak anılmıştı; burada bütün ayrıntısıyla kuruyoruz.

Fikir şudur: 0 noktasında öyle bir fonksiyon kuracağız ki sıfıra "sonsuz derecede düz" yaklaşsın — yani her polinomdan daha hızlı sönsün. O zaman bütün türevleri 0'da sıfırlanır, Taylor serisi özdeş sıfır olur ve fonksiyonun kendisi sıfır olmadığı için seri onu temsil edemez. Böyle bir sönme hızını üstel fonksiyon sağlar.

Önce ispatın belkemiği olan limit hesabını ayrı bir adım olarak yapalım; çünkü aynı hesap ispat boyunca defalarca kullanılacaktır.

Örnek 44.7 (Sonsuz Türevlenebilir Ama Analitik Olmayan Fonksiyon). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. f'nin $\mathbb{R}$ üzerinde her mertebeden türevlenebilir olduğunu ve her $n \geq 0$ için $f^{(n)}(0) = 0$ olduğunu gösterin. Buradan f'nin 0 noktasında analitik olmadığı sonucunu çıkarın.

Çözüm.
Adım 1: Bir limit hesabı. İddia şudur: her p polinomu için

$$\lim_{t\to+\infty} p(t)\, e^{-t^2} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{t\to-\infty} p(t)\, e^{-t^2} = 0.$$

Önce tek terimlik hâli görelim. $u > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ için üstel serinin bütün terimleri pozitif olduğundan

$$e^u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} > \frac{u^m}{m!}$$

olur (Örnek 44.1). $u = t^2$ koyalım: $e^{t^2} > \dfrac{t^{2m}}{m!}$, yani $e^{-t^2} < \dfrac{m!}{t^{2m}}$ (burada $t \neq 0$). O hâlde her $k \geq 0$ için

$$\left| \, t^k e^{-t^2} \, \right| < \frac{m! \, |\, t \,|^k}{t^{2m}} = \frac{m!}{|\, t \,|^{2m-k}}.$$

m'yi $2m > k$ olacak kadar büyük seçersek (bkz. Analiz 1) sağ taraf $|\, t \,| \to \infty$ iken sıfıra gider; sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $t^k e^{-t^2} \to 0$'dır. Bir polinom, sonlu sayıda böyle terimin sabit katlarının toplamı olduğundan, limit kurallarıyla iddia her polinom için doğrudur.
Bu limitin x diliyle söylenişi de işimize yarayacak: $x \to 0$ iken $\left|\dfrac{1}{x}\right| \to \infty$ olduğundan, bileşke limiti gereği her p polinomu için

$$\lim_{x\to 0} p\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0.$$

Adım 2: Türevlerin biçimi. İddia: her $n \geq 0$ için, öyle bir p_n polinomu vardır ki her $x \neq 0$ için

$$f^{(n)}(x) = p_n\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

Tümevarımla gösterelim (bkz. Analiz 1). $n = 0$ için $p_0(u) = 1$ almak yeter. İddia n için doğru olsun. $x \neq 0$ noktasında zincir kuralı ve çarpım kuralıyla türev alalım; $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$ ve $\dfrac{d}{dx} e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{2}{x^3}$ olduğundan

$$f^{(n+1)}(x) = p_n'\!\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x^2} + p_n\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

Ortak çarpanı ayırıp $u = \dfrac{1}{x}$ yazarsak

$$f^{(n+1)}(x) = \Big[-u^2 p_n'(u) + 2u^3 p_n(u) \Big]_{u=1/x} e^{-1/x^2} = p_{n+1}\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

olur; burada $p_{n+1}(u) = -u^2 p_n'(u) + 2u^3 p_n(u)$ yine bir polinomdur. Tümevarım tamamlandı. İlk birkaçını yazmak örüntüyü somutlaştırır: $p_1(u) = 2u^3$, $p_2(u) = 4u^6 - 6u^4$.
Adım 3: 0 noktasındaki türevler. İddia: her $n \geq 0$ için f, 0'da n kez türevlenebilirdir ve $f^{(n)}(0) = 0$'dır.
Tümevarım yapalım. $n = 0$ için $f(0) = 0$ tanım gereğidir. Şimdi $f^{(n)}(0) = 0$ olduğunu varsayalım ve $f^{(n+1)}(0)$'ı fark oranından hesaplayalım. $x \neq 0$ için Adım 2 gereği

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\, p_n\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = q_n\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2},$$

 CC BY-NC-SA 4.0

burada $q_n(u) = u\,p_n(u)$ bir polinomdur. Adım 1 gereği bu ifadenin $x \to 0$ iken limiti 0'dır. Demek ki fark oranının limiti vardır ve

$$f^{(n+1)}(0) = 0$$

olur. Tümevarım tamamlandı; f her mertebeden türevlenebilirdir ve bütün türevleri 0'da sıfırlanır.
Adım 4: Türevler süreklidir. $f^{(n)}$'nin 0'da sürekli olduğunu da görelim: Adım 1 ve Adım 2 gereği

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} p_n\!\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0 = f^{(n)}(0).$$

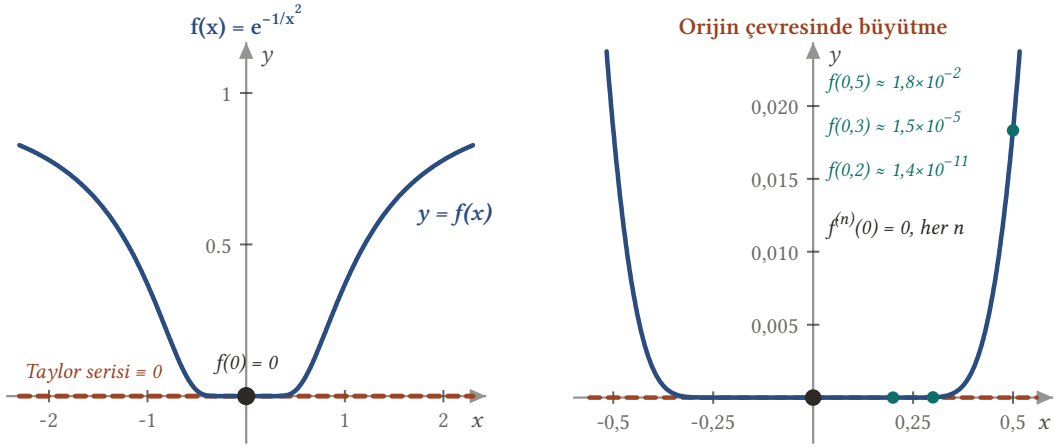
$x \neq 0$ noktalarında $f^{(n)}$ zaten temel fonksiyonların bileşke ve çarpımıdır, dolayısıyla süreklidir. Yani f sonsuz kez türevlenebilir bir fonksiyondur.
Adım 5: Taylor serisi ve sonuç. f'nin 0 merkezli Maclaurin serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$$

yani özdeş olarak sıfır serisidir. Bu seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsar (yakınsaklık yarıçapı $+\infty$'dur) ve toplamı 0'dır. Oysa $x \neq 0$ için $f(x) = e^{-1/x^2} > 0$'dır. Demek ki seri, $x = 0$ dışında hiçbir noktada $f(x)$'e eşit değildir.
Tanım 44.2 gereği f, 0 noktasında analitik olamaz: eğer olsaydı, temsil eden seri zorunlu olarak Taylor serisi olurdu ve bu da özdeş sıfırdır; ama f, 0'ın hiçbir komşuluğunda özdeş sıfır değildir. Öte yandan f, $x_0 \neq 0$ olan her noktada analitiktir; kusur yalnızca tek bir noktadadır.
Ölçüt açısından bakış. Teorem 44.1'ne dönelim. Burada $T_n(x) \equiv 0$ olduğundan her n için

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = f(x)$$

olur. $x \neq 0$ sabitken $R_n(x)$ dizisi n'ye hiç bağlı değildir ve sabit $f(x) \neq 0$ değerine eşittir; elbette sıfıra gitmez. Ölçüt tam da bu yüzden sağlanmaz. Aynı biçimde Sonuç 44.1'in koşulu da 0'ı içeren hiçbir aralıkta sağlanamaz; üstelik bunu görmek için türevlerin büyüme hızını tek tek kestirmeye gerek yoktur. Gerçekten, 0'ı içeren bir J aralığı ile $M, C \geq 0$ sabitleri öyle bulunsaydı ki her n ve her $t \in J$ için $\left| f^{(n)}(t) \right| \leq MC^n$ olsun, o sonuç gereği f, J üzerinde 0 merkezli Taylor serisine — yani özdeş sıfır serisine — eşit olurdu; oysa f, J'nin sıfırdan farklı her noktasında pozitiftir. Demek ki türevler hiçbir 0 komşuluğunda MC^n türü bir sınıra uymaz.



Şekil 44.2: $f(x) = e^{-1/x^2}$ (ve $f(0) = 0$) fonksiyonu her mertebeden türevlenebilirdir ve orijinde bütün türevleri sıfırdır; dolayısıyla Taylor serisi özdeş olarak sıfırdır (kesikli doğru). Oysa $x \neq 0$ için $f(x) > 0$'dır: seri her yerde yakınsar ama fonksiyona yalnızca $x = 0$'da eşittir. Sağdaki büyütme, orijin çevresinde grafiğin eksene ne kadar hızlı yapıştığını gösterir — sonsuz türevlenebilir olmak analitik olmak demek değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

i Bu fonksiyon bir kusur değil, bir alettir

e^{-1/x^2} örneği ilk bakışta patolojik görünür; oysa modern analizde en çok kullanılan yapı taşlarından biridir. Önce f'nin **yarısını** alalım:

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Bu fonksiyon da sonsuz kez türevlenebilirdir: $x \neq 0$ noktalarında bu açıktır, $x = 0$'da ise fark oranının sol limiti özdeş sıfır olduğundan sıfır, sağ limiti de yukarıdaki Adım 1–3 hesabının birebir tekrarıyla yine sıfırdır; dolayısıyla her mertebeden türev 0'da vardır ve sıfıra eşittir. Dikkat edilecek nokta f'nin **çift** olmasıdır: $f(x)$ negatif x'lerde de pozitiftir, bu yüzden tıkaç kurmak için f değil h gerekir. Şimdi $g(x) = h(x)\,h(1-x)$ alırsak, g sonsuz kez türevlenebilir, $[0,1]$ dışında özdeş sıfır ve $(0,1)$ içinde pozitif bir fonksiyon olur — gerçekten $g(x) > 0$ olması için hem $x > 0$ hem $1 - x > 0$ gerekir. Böyle fonksiyonlara **tıkaç fonksiyonu** (bump function) denir; verilen bir bölgede istenildiği gibi davranıp dışarıda tamamen sönen düzgün fonksiyonlar üretmeye yararlar. Analitik fonksiyonlarla bunu yapmak **imkânsızdır**: bir aralıkta özdeş sıfır olan analitik fonksiyonun tanım aralığının tamamında sıfır olduğu gösterilebilir. Yani "sonsuz türevlenebilir ama analitik değil" sınıfı, kayıp değil kazançtır.

44.8 Serilerle İşlem Yapmak

Elimizde bir açılım deposu var. Yeni açılımlar üretmenin en ekonomik yolu, sıfırdan türev hesaplamak değil, var olan serileri toplamak, çarpmak, bölmek ve birbirinin içine koymaktır. Bu işlemlerin hangi koşullarda serbest olduğunu şimdi kayda geçirelim.

Önerme 44.1 (Kuvvet Serilerinde Dört İşlem). *$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapları sırasıyla $R_1 > 0$ ve $R_2 > 0$ olsun ve $R = \min\{R_1, R_2\}$ yazalım. O hâlde:*
(i) *Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $\mid x \mid < R$ olduğunda*

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n.$$

(ii) *$\mid x \mid < R$ olduğunda*

$$f(x)\,g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}.$$

(iii) *$b_0 \neq 0$ ise, öyle bir $r > 0$ ve öyle tek bir (d_n) dizisi vardır ki $\sum d_n x^n$ serisi $\mid x \mid < r$ için yakınsar ve orada*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

olur. Katsayılar

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0}, \qquad d_n = \frac{1}{b_0}\left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k\, b_{n-k}\right), \quad n \ge 1$$

özyinelemesiyle bulunur.

İspat.
(i) *$\mid x \mid < R$ için iki seri de yakınsaktır; Teorem 34.4 doğrudan sonucu verir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(ii) *$|x|<R$ için her iki seri de **mutlak** yakınsaktır: yakınsaklık yarıçapının içinde kuvvet serisi mutlak yakınsar. Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık bölümünde ispatladığımız Cauchy çarpımı teoremi, iki mutlak yakınsak serinin Cauchy çarpımının yakınsak olduğunu ve toplamının toplamların çarpımına eşit olduğunu söyler. $\sum a_n x^n$ ile $\sum b_n x^n$ serilerinin Cauchy çarpımının n. terimi*

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k x^k)(b_{n-k}x^{n-k}) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n = c_n x^n$$

olduğundan istenen elde edilir.

(iii) *Genelliği bozmadan $b_0 = 1$ alabiliriz: aksi hâlde hem f'yi hem g'yi b_0 sabitine böleriz. Bu, $\dfrac{f}{g}$ oranını değiştirmez; yeni katsayılar $\dfrac{a_n}{b_0}$ ile $\dfrac{b_n}{b_0}$ olur ve paydanın sabit terimi 1'e döner. Önce $\dfrac{1}{g}$'yi açalım, sonra (ii) ile f ile çarparız.*

Katsayıların seçimi. *$d_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için*

$$d_n = -\sum_{k=0}^{n-1} d_k\, b_{n-k}$$

tanımlayalım. Bu özyineleme, $(\sum d_n x^n)(\sum b_n x^n)$ çarpımının n. Cauchy katsayısının $n \geq 1$ için sıfır, $n = 0$ için 1 olmasını dayatan tek seçimdir; yani katsayılar tektir.

Yakınsaklık yarıçapının pozitifliği. *$0 < \rho < R_2$ seçelim. $\sum b_n \rho^n$ mutlak yakınsak olduğundan $A := \sum_{n\geq 1} |\,b_n\,|\,\rho^n < \infty$'dur. Şimdi $0 < r \leq \rho$ sayısını*

$$\frac{r}{\rho}\,A \leq \frac{1}{2}$$

olacak biçimde seçelim (bu her zaman mümkündür; $A = 0$ ise $r = \rho$, $A > 0$ ise $r = \min\left\{\rho, \dfrac{\rho}{2A}\right\}$ alınır). O hâlde

$$\sum_{n\geq 1}|\,b_n\,|\,r^n = \sum_{n\geq 1}|\,b_n\,|\,\rho^n\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq \frac{r}{\rho}\sum_{n\geq 1}|\,b_n\,|\,\rho^n = \frac{r}{\rho}A \leq \frac{1}{2}$$

olur. Şimdi güçlü tümevarımla (bkz. Analiz 1) her $n \geq 0$ için

$$|\,d_n\,|\,r^n \leq 1$$

olduğunu gösterelim. $n = 0$ için $|\,d_0\,| = 1$'dir. $0, 1, \ldots, n-1$ için doğru olsun. Üçgen eşitsizliğiyle

$$|\,d_n\,|\,r^n \leq \sum_{k=0}^{n-1}|\,d_k\,|\,r^k\,|\,b_{n-k}\,|\,r^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n-1}|\,b_{n-k}\,|\,r^{n-k} \leq \sum_{m\geq 1}|\,b_m\,|\,r^m \leq \frac{1}{2} \leq 1.$$

Demek ki $|\,d_n\,| \leq r^{-n}$'dir ve $|\,x\,| < r$ için $\sum|\,d_n x^n\,| \leq \sum\left(\dfrac{|\,x\,|}{r}\right)^n$ geometrik serisiyle karşılaştırma (Teorem 35.2) yakınsaklık verir. Yani $h(x) = \sum d_n x^n$ serisinin yarıçapı en az r'dir.

Çarpımın 1 olduğu. *Artık (ii)'yi h ile g'ye uygulayabiliriz: $|\,x\,| < \min\{r, R_2\}$ için $h(x)g(x)$, katsayıları $\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}$ olan kuvvet serisidir. Özyineleme gereği bu katsayılar $n = 0$ için 1, $n \geq 1$ için 0'dır. Demek ki $h(x)g(x) = 1$, yani $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$'tir (özel olarak bu bölgede $g(x) \neq 0$'dır). Son olarak $\dfrac{f}{g} = f \cdot h$ çarpımına yine (ii)'yi uygularsak, $\dfrac{f}{g}$'nin de bir kuvvet serisi olduğu ve katsayılarının ifadede verilen özyinelemeyi sağladığı çıkar.*

■

Dördüncü işlem, **bileşke**, biraz farklı bir gerekçe ister. $g(0) = 0$ olmak üzere $f\,(\,g(x)\,)$ bileşkesinin katsayılarını bulmak istediğimizde yaptığımız şey şudur: f'nin serisinde x yerine g'nin serisini koyar, istediğimiz dereceye kadar açar, daha yüksek dereceli terimleri atarız. Bu işlemin **doğru** sonuç verdiğinin gerekçesi, Peano kalanlı Taylor teoremi (Teorem 12.3) ile asimptotik açılımın tekliğidir: elde edilen n.

 CC BY-NC-SA 4.0

dereceden polinom, $f \circ g$ ile $x \to 0$ iken $o(x^n)$ mertebesinde uyuşuyorsa, o polinom $f \circ g$'nin n. Taylor polinomudur ve katsayıları da Taylor katsayılarıdır. Kesme işleminde attığımız terimlerin hepsi x^{n+1} ve daha yüksek dereceden olduğundan bu koşul sağlanır. Şimdi bütün bu işlemleri bir örnekte çalıştıralım.

Örnek 44.8 (Çarpım, Bölüm ve Bileşke Hesapları). Aşağıdakileri yapın.

a) Cauchy çarpımını kullanarak her $x, y \in \mathbb{R}$ için $e^{x+y} = e^x e^y$ olduğunu gösterin.

b) $\tan x$ fonksiyonunun Maclaurin açılımını x^5 terimine kadar bölme yoluyla bulun.

c) $e^{\sin x}$ fonksiyonunun Maclaurin açılımını x^4 terimine kadar bileşke yoluyla bulun.

d) $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ fonksiyonunun Maclaurin serisinin genel terimini bulun.

Çözüm.

a) $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ ve $\sum \dfrac{y^n}{n!}$ serileri her x, y için mutlak yakınsaktır (Örnek 44.1). Cauchy çarpımının n. terimi

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

olur; son adımda Binom Teoremi kullanıldı. Cauchy çarpımı teoremi gereği

$$e^x e^y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Üstel fonksiyonun temel işlevsel denklemi, böylece yalnızca seri cebiriyle elde edilmiş oldu.

b) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$'tir ve $\cos 0 = 1 \neq 0$ olduğundan Önerme 44.1 (iii) uygulanabilir. $a_1 = 1$, $a_3 = -\dfrac{1}{6}$, $a_5 = \dfrac{1}{120}$ ve $b_0 = 1$, $b_2 = -\dfrac{1}{2}$, $b_4 = \dfrac{1}{24}$; öteki katsayılar (ilgili derecelere kadar) sıfırdır. $\tan$ tek fonksiyon olduğundan yalnızca tek dereceli terimler beklemeliyiz: $\tan x = d_1 x + d_3 x^3 + d_5 x^5 + \cdots$. Bu ifadeyi $\cos x$ ile çarpıp $\sin x$'e eşitleyelim:

$$(d_1 x + d_3 x^3 + d_5 x^5)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

Sol tarafı açıp dereceleri eşleştirelim:

- x katsayısı: $d_1 = 1$.
- x^3 katsayısı: $d_3 - \dfrac{d_1}{2} = -\dfrac{1}{6}$, yani $d_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.
- x^5 katsayısı: $d_5 - \dfrac{d_3}{2} + \dfrac{d_1}{24} = \dfrac{1}{120}$, yani $d_5 = \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{24} = \dfrac{1+20-5}{120} = \dfrac{2}{15}$.

Demek ki

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

Önerme 44.1 (iii) bize yalnızca **pozitif** bir yakınsaklık yarıçapı garanti eder; bu serinin yarıçapının tam olarak $\dfrac{\pi}{2}$ olduğunu, yani cos'un ilk sıfırının belirlediğini görmek reel eksende yapılan bir hesapla çıkmaz, karmaşık düzlemde çalışmayı gerektirir (aşağıdaki alıştırmalarda $\dfrac{1}{1+x^2}$ örneğinde aynı olguya döneceğiz). Katsayıların genel formülü de basit değildir; bölme yöntemi ise istenildiği kadar terim üretmeye yeter.

c) $u = \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots$ yazalım ve $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^4}{24} + \cdots$ açılımında yerine koyalım. x^4'e kadar olan terimleri tutmak için u'nun kuvvetlerini o mertebeye kadar hesaplarız:

$$u = x - \frac{x^3}{6} + \cdots, \quad u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots, \quad u^3 = x^3 + \cdots, \quad u^4 = x^4 + \cdots$$

 CC BY-NC-SA 4.0

(u^2 hesabında $2 \cdot x \cdot \left(-\dfrac{x^3}{6}\right) = -\dfrac{x^4}{3}$ geldi.) Yerine koyup toplayalım:

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

x^3 terimleri $-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = 0$ ile yok olur; x^4 katsayısı $-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} = -\dfrac{1}{8}$'dir. Sonuç:

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$$

d) $\ln(1+x) = \sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ ve $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{m\geq 0} x^m$ serilerinin ikisi de $|\,x\,| < 1$ için mutlak yakınsaktır. Önerme 44.1 (ii) gereği çarpımın n. katsayısı

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

olur ($k = 0$ terimi $\ln(1+x)$ serisinde yoktur). Yani

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) x^n, \qquad |\,x\,| < 1.$$

Katsayılar alternatif harmonik serinin kısmi toplamlarıdır; $n \to \infty$ iken $\ln 2$'ye giderler. Bu, "$\dfrac{1}{1-x}$ ile çarpmak, katsayıları kısmi toplama dönüştürür" kuralının güzel bir örneğidir.

■

44.9 Uygulamalar

Açılım deposunu kurduk, işlem kurallarını da. Şimdi bunların ne işe yaradığını görelim. Üç tipik kullanım vardır: belirsiz limitleri hesaplamak, ilkel fonksiyonu temel fonksiyonlarla yazılamayan integralleri hesaplamak ve diferansiyel denklemlerin çözümlerini üretmek.

44.9.1 Limit hesabı

Taylor Formülünün Uygulamaları bölümünde belirsiz limitleri Taylor **polinomu** ile hesaplamayı öğrenmiştik. Seri diliyle aynı iş daha rahat yapılır: her fonksiyonu kendi serisiyle değiştirir, gereken dereceye kadar açar, geri kalanı $o(\cdot)$ içine atarız. Kural basittir: pay ve paydada **ilk sıfırdan farklı terim** hangi derecedeyse, limit o derecelerin oranından okunur.

Örnek 44.9 (Serilerle Belirsiz Limitler). Aşağıdaki limitleri seri açılımlarıyla hesaplayın.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$

Çözüm.

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots$ olduğundan pay

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \frac{x^3}{6}\left(1 + \frac{x}{4} + \cdots\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. x^3'e bölünce parantez içindeki ifade kalır ve $x \to 0$ iken 1'e gider. Limit $\dfrac{1}{6}$'dır.

b) İki açılımı x^5'e kadar yazalım:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots, \qquad x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots$$

Farkları

$$\sin x - x\cos x = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{24}\right)x^5 + \cdots = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$$

olduğundan x^3'e bölüp limit alınca $\dfrac{1}{3}$ bulunur.

c) Önce tek kesir hâline getirelim:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}.$$

Pay $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots$, payda ise $x\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots\right) = x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \cdots$'dir. İkisini de x^2 parantezine alalım:

$$\frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \cdots\right)}{x^2\left(1 + \frac{x}{2} + \cdots\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \cdots}{1 + \frac{x}{2} + \cdots} \to \frac{1}{2}.$$

d) x büyük olduğundan $\sqrt{x \pm 1} = \sqrt{x}\sqrt{1 \pm \frac{1}{x}}$ yazıp binom serisini $u = \pm\dfrac{1}{x}$ ile kullanalım ($|\,u\,| < 1$ için geçerlidir):

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \cdots$$

Buradan

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 2 - \frac{2}{8x^2} + \mathcal{O}\!\left(\frac{1}{x^4}\right) = 2 - \frac{1}{4x^2} + \mathcal{O}\!\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

olur; tek dereceli terimler birbirini götürür. $\sqrt{x}$ ile çarpıp $2\sqrt{x}$ çıkarırsak

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{x}}{4x^2} + \mathcal{O}\!\left(\frac{1}{x^{7/2}}\right) = -\frac{1}{4x^{3/2}} + \mathcal{O}\!\left(\frac{1}{x^{7/2}}\right).$$

$x^{3/2}$ ile çarpınca limit $-\dfrac{1}{4}$ çıkar. Bu hesabı L'Hôpital kuralıyla yapmayı denemek, üç kez arka arkaya karekök türevi almak demektir; seri yöntemi tek satırda bitirir.

■

44.9.2 İntegral hesabı

Bazı sürekli fonksiyonların ilkel fonksiyonu temel fonksiyonlarla yazılamaz; e^{-x^2} ve $\dfrac{\sin x}{x}$ bunların en ünlü ikisidir. Bu durumda Analizin Temel Teoremleri bölümündeki integral fonksiyonu (Tanım 29.1) kavramı ilkel fonksiyonun **varlığını** garanti eder (Teorem 29.1), ama onu bir formülle vermez. Seri açılımı tam bu boşluğu doldurur: fonksiyonun serisini terim terim integralleyerek ilkel fonksiyonun kuvvet serisini elde ederiz.

Örnek 44.10 (Kapalı Biçimi Olmayan İntegraller). Aşağıdaki integralleri seri açılımıyla hesaplayın.

a) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ için bir kuvvet serisi bulun ve $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ değerini altı ondalık basamak duyarlıkla hesaplayın.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ değerini altı ondalık basamak duyarlıkla hesaplayın.

Çözüm.
a) Örnek 44.1'deki seride x yerine $-t^2$ koyalım; bu her t için serbesttir ve yakınsaklık yarıçapı yine $+\infty$'dur:

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}.$$

Terim terim integral alma teoremi gereği her $x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots$$

F, Tanım 29.1 anlamında e^{-t^2}'nin integral fonksiyonudur ve Teorem 29.1 gereği $F'(x) = e^{-x^2}$'dir; serinin terim terim türevi de aynı sonucu verir, iki yol tutarlıdır.
$x = 1$ koyalım:

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{685440} - \cdots$$

Terimlerin mutlak değerleri azalarak sıfıra gittiğinden bu alternatif bir seridir; Leibniz ölçütünün hata kestirimi gereği bir yerde kesersek hata, ilk atılan terimi aşmaz. Yukarıdaki dokuz terimi ($n = 0, \ldots, 8$) tutup gerisini atarsak hata, ilk atılan terim olan $\dfrac{1}{9! \cdot 19} = \dfrac{1}{6\,894\,720} < 1{,}5 \times 10^{-7}$ değerini aşmaz; bu, altı basamak için fazlasıyla yeterlidir. (Sekiz terim yetmezdi: dokuzuncu terim $\dfrac{1}{685\,440} \approx 1{,}46 \times 10^{-6}$ olduğundan altıncı basamak henüz oturmamış olurdu.) Sayısal olarak:

$$1 - 0{,}333333 + 0{,}100000 - 0{,}023810 + 0{,}004630 - 0{,}000758 + 0{,}000107 - 0{,}000013 + 0{,}0000015 = 0{,}746824.$$

Gerçek değer $0{,}7468241\ldots$'dir.
b) $\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x = 0$'da tanımsızdır, ama sinüs serisini x'e bölersek

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots$$

elde edilir; sağdaki kuvvet serisi $x = 0$'da 1 değerini alır ve her x için yakınsar. Yani $\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x = 0$'da 1 değeriyle sürekli olarak genişletilebilir (bkz. Analiz 1 ile uyumlu) ve genişletilmiş fonksiyon analitiktir. Terim terim integralleyelim:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \frac{1}{3265920} - \cdots$$

Sayısal olarak toplam şudur:

$$1 - 0{,}055556 + 0{,}001667 - 0{,}000028 + 0{,}0000003 = 0{,}946083$$

Beşinci terim $\dfrac{1}{3\,265\,920} \approx 3{,}1 \times 10^{-7}$ olduğundan, yalnızca ilk dört terim tutulsa bile hata 5×10^{-7}'nin altındadır ve altı basamak güvenlidir; gerçek değer $0{,}9460831\ldots$'dir. Dört terimle bu duyarlığa ulaşmak, faktöriyel paydaların gücünü gösterir.
■

44.9.3 Diferansiyel denklem çözümü

Binom serisinin ispatında bir kuvvet serisinin bir diferansiyel denklemi sağladığını göstermiştik. Aynı fikir ters yönde de çalışır: bir diferansiyel denklem verildiğinde çözümü $\sum a_n x^n$ biçiminde arar, denklemde

 CC BY-NC-SA 4.0

yerine koyar ve katsayılar için bir özyineleme elde ederiz. Bu yöntem, çözümü temel fonksiyonlarla yazılamayan denklemlerde bile işe yarar.

Örnek 44.11 (Kuvvet Serisiyle Diferansiyel Denklem Çözmek).

a) $y' = y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemini kuvvet serisiyle çözün.

b) $y'' = x\,y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ problemini kuvvet serisiyle çözün ve çözümün yakınsaklık yarıçapını belirleyin.

Çözüm.
a) $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ biçiminde, yarıçapı pozitif bir çözüm arayalım. Terim terim türev alırsak

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

$y' = y$ eşitliği, iki kuvvet serisinin eşit olması demektir; katsayıların tekliği gereği her n için

$$(n+1)a_{n+1} = a_n, \qquad \text{yani} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

$y(0) = a_0 = 1$ olduğundan $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{6}$ ve tümevarımla $a_n = \dfrac{1}{n!}$ bulunur. Öyleyse

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Yarıçap $+\infty$'dur. Yöntem, bilinen çözümü baştan varsaymadan üretti.
b) Yine $y = \sum a_n x^n$ yazalım. İki kez terim terim türev alırsak

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

öte yandan

$$x\,y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Katsayıları eşleyelim. $n = 0$ derecesinde sağ tarafta terim yoktur; öyleyse $2a_2 = 0$, yani $a_2 = 0$. $n \geq 1$ için

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} = a_{n-1}.$$

Başlangıç koşulları $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ verir. Özyinelemeyi çalıştıralım:

- $a_3 = \dfrac{a_0}{3\cdot 2} = \dfrac{1}{6}$, $a_4 = \dfrac{a_1}{4\cdot 3} = 0$, $a_5 = \dfrac{a_2}{5\cdot 4} = 0$;
- $a_6 = \dfrac{a_3}{6\cdot 5} = \dfrac{1}{180}$, $a_7 = a_8 = 0$;
- $a_9 = \dfrac{a_6}{9\cdot 8} = \dfrac{1}{12\,960}$.

Örüntü açıktır: yalnızca indisi 3'ün katı olan katsayılar sıfırdan farklıdır ve

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12\,960} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k}, \qquad a_{3k+3} = \frac{a_{3k}}{(3k+3)(3k+2)}.$$

Yakınsaklık yarıçapı. Sıfırdan farklı ardışık terimlerin oranı

$$\left| \frac{a_{3k+3} x^{3k+3}}{a_{3k} x^{3k}} \right| = \frac{|\,x\,|^3}{(3k+3)(3k+2)} \to 0$$

olduğundan Teorem 37.2 her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaklık verir; yarıçap $+\infty$'dur. Demek ki serimiz $\mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyon tanımlar, terim terim iki kez türetilebilir ve kurulduğu gibi $y'' = xy$ denklemini

 CC BY-NC-SA 4.0

sağlar. Bu denklemin çözümleri temel fonksiyonlarla ifade edilemez; kuvvet serisi yöntemi burada yalnızca bir hesap aracı değil, fonksiyonu **tanımlama** aracıdır.
■

44.10 Alıştırmalar

Alıştırma 44.1 (Taylor ve Maclaurin Serileri Üzerine).

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ ve $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ toplamlarını kapalı biçimde bulun ve sayısal değerlerini dört ondalık basamakla verin.

b) $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulun ve yakınsaklık yarıçapını belirleyin.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ toplamlarını hesaplayın.

d) Binom serisini kullanarak $\sqrt[3]{1{,}05}$ sayısını altı ondalık basamak duyarlıkla hesaplayın.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ limitini seri açılımıyla hesaplayın.

f) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ değerini dört ondalık basamak duyarlıkla hesaplayın.

g) $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilirdir ve hiçbir noktada tanımsız değildir. Buna karşın Maclaurin serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Bunu gösterin ve neden böyle olduğunu açıklayın.

Çözüm.
a) Örnek 44.2'ndeki hiperbolik açılımlarda $x=1$ koyalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\cosh 1=\frac{e+e^{-1}}{2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\sinh 1=\frac{e-e^{-1}}{2}.$$

Sayısal olarak $e=2{,}7182818$ ve $e^{-1}=0{,}3678794$ ile $\cosh 1=\dfrac{3{,}0861612}{2}=1{,}5431$ ve $\sinh 1=\dfrac{2{,}3504024}{2}=1{,}1752$ bulunur. Denetim: iki toplamın toplamı $\sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}=e$ olmalıdır; gerçekten $1{,}5431+1{,}1752=2{,}7183=e$'dir.
b) Doğrudan türev almak yerine çarpanlara ayıralım. Her $x\neq 1$ için $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$ olduğundan

$$1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x},\qquad \text{yani}\qquad \ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x).$$

(Her iki logaritmanın argümanı $\mid x\mid<1$ için pozitiftir, dolayısıyla işlem geçerlidir.) Örnek 44.3'nde x yerine $-x$ koyarsak $\mid x\mid<1$ için

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

olur; aynı formülde x yerine x^3 koyup ($\mid x^3\mid<1$) çıkarma yaparsak

$$\ln(1+x+x^2)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{3m}}{m}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}x^n,\qquad c_n=\begin{cases}1, & 3\nmid n\\ 1-3=-2, & 3\mid n\end{cases}$$

çıkar; çünkü $n=3m$ olduğunda $-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{3}{n}$'dir ve $\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n}=-\dfrac{2}{n}$ olur. Açık yazılışı:

$$\ln(1+x+x^2)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{2x^6}{6}+\cdots$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yakınsaklık yarıçapı 1'dir: katsayıların mutlak değeri $\dfrac{1}{n}$ ile $\dfrac{2}{n}$ arasındadır, dolayısıyla $|x|<1$ için karşılaştırma testi (Teorem 35.2) ile $\sum \dfrac{2\,|x|^n}{n}$ yakınsar; $|x|>1$ için ise terimler sıfıra gitmez (Sonuç 34.1).

c) $|x|<1$ için $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ eşitliğinde terim terim türev alalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$x=\dfrac{1}{2}$ koyarsak $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$. Bir kez daha türev alalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\,\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

buradan $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ ve $x=\dfrac{1}{2}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6.$$

d) $\alpha = \dfrac{1}{3}$ ve $x = 0{,}05$ alalım. Katsayılar:

$$\binom{1/3}{1} = \frac{1}{3},\quad \binom{1/3}{2} = \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = -\frac{1}{9},\quad \binom{1/3}{3} = \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{6} = \frac{5}{81},\quad \binom{1/3}{4} = -\frac{10}{243}.$$

Terimler:

$$\frac{0{,}05}{3} = 0{,}0166667,\quad -\frac{(0{,}05)^2}{9} = -0{,}0002778,\quad \frac{5(0{,}05)^3}{81} = 0{,}0000077,\quad -\frac{10(0{,}05)^4}{243} = -0{,}0000003.$$

Toplam:

$$\sqrt[3]{1{,}05} \approx 1 + 0{,}0166667 - 0{,}0002778 + 0{,}0000077 - 0{,}0000003 = 1{,}016396$$

Denetim: $1{,}016396^3 = 1{,}049999\ldots$

e) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \cdots$ (bkz. Örnek 44.8) ve $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots$ olduğundan

$$\tan x - \sin x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + \cdots = \frac{x^3}{2} + \cdots$$

ve limit $\dfrac{1}{2}$'dir. Aynı sonucu L'Hôpital ile almak üç kez türev almayı gerektirirdi.

f) Kosinüs serisinden

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots \quad\Rightarrow\quad \frac{1-\cos x}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n)!}$$

olur; sağdaki kuvvet serisi her x için yakınsar ve $x=0$'da $\dfrac{1}{2}$ değerini alır, yani integrand sürekli olarak genişletilebilir. Terim terim integralleyelim:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!\,(2n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{3600} - \frac{1}{282\,240} + \cdots$$

Sayısal olarak $0{,}5 - 0{,}0138889 + 0{,}0002778 - 0{,}0000035 = 0{,}4863854$. Dördüncü terim 4×10^{-6}'dan küçük olduğundan dört basamak güvenlidir: değer $0{,}4864$'tür.

g) Geometrik seride x yerine $-x^2$ koyarsak, $|x|<1$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

olur. $|\,x\,| \geq 1$ iken terimlerin mutlak değeri $x^{2n} \geq 1$ olduğundan sıfıra gitmez ve seri ıraksar (Sonuç 34.1). Demek ki yakınsaklık yarıçapı tam olarak 1'dir.

Neden? Reel eksende hiçbir sorun görünmüyor: g her yerde tanımlı, sınırlı ve sonsuz kez türevlenebilir. Yarıçapı sınırlayan şey, g'nin **büyüklüğü** değil, türevlerinin büyüme hızıdır. Katsayılar $\left|\, a_{2n} \,\right| = 1$ olduğundan Cauchy–Hadamard formülü doğrudan $R = 1$ verir; buna denk olarak $g^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!$'dir, yani türevler faktöriyel hızla büyür ve Sonuç 44.1'in koşulu hiçbir MC^n ile sağlanamaz.

Bu davranışın kavramsal açıklaması reel eksende değil, karmaşık düzlemdedir: $\dfrac{1}{1+z^2}$ ifadesi $z = \pm i$ noktalarında tanımsızdır ve bu iki nokta merkeze tam 1 uzaklıktadır. Kuvvet serisi, reel eksende görünmeyen bu engeli "hisseder" ve yarıçapını ona göre ayarlar. Aynı olgu $\dfrac{1}{1-x}$ örneğinde de vardı, ama orada engel reel eksendeydi ve gözle görülüyordu; burada gözden tamamen gizlidir.

■

44.11 Analiz 2'nin Sonu

Bu bölümle Analiz 2 notları tamamlanıyor. Geriye dönüp bakınca burada da tek bir iplik görünür.

Analiz 1'de limit kavramını kurmuştuk. Analiz 2, o kavramı iki kez farklı biçimde kullanarak iki büyük yapı üretti. Birincisi **türev**: fark oranının limiti. Türevin kendi başına hiçbir gücü yoktur; gücünü Rolle teoreminden ve onun genellemesi olan **ortalama değer teoreminden** (Teorem 8.2) alır. Monotonluk testleri, ekstremum testleri, konvekslik ölçütü, L'Hôpital kuralı ve Darboux teoremi — hepsi tek bir kaynaktan, kapalı aralıkta ekstremumun var olmasından beslenir. Bu zincirin doruk noktası, ortalama değer teoreminin yüksek mertebeli genellemesi olan **Taylor formülü** oldu: bir fonksiyonu bir noktanın yakınında polinomla değiştirip yapılan hatayı türevlerle denetlemek.

İkincisi **integral**: Riemann toplamlarının limiti. Alt ve üst Darboux toplamlarıyla kurulan bu yapı, ilk bakışta türevle hiç ilgisiz görünüyordu; alan hesabıyla teğet eğimi arasında ne olabilirdi ki? Analizin temel teoremleri (Teorem 29.1) tam olarak bu iki dünyanın birbirinin tersi olduğunu söyledi ve integral fonksiyonu (Tanım 29.1) aracılığıyla her sürekli fonksiyona bir ilkel fonksiyon verdi. Böylece belirsiz integral bölümlerinde kurallarla öğrendiğimiz ilkel fonksiyon, belirli integral bölümlerinde bir varlık teoremine kavuştu.

Üçüncü büyük adım **seriler** oldu. Sonsuz toplam, kısmi toplamlar dizisinin limitidir; yani yine limit. Karşılaştırma, yoğunlaştırma, kök, oran, Kummer ve Raabe testleri (Teorem 35.2, Teorem 36.1, Teorem 37.1, Teorem 37.2, Teorem 38.1, Teorem 38.2) pozitif terimli serileri sınıflandırdı; mutlak ve şartlı yakınsaklık ayrımı, yeniden düzenleme teoremiyle sonsuz toplamın sonlu toplamdan ne kadar farklı olduğunu gösterdi. Kuvvet serileri bu iki dünyayı — türev/integral ile serileri — birleştirdi: yakınsaklık yarıçapının içinde bir kuvvet serisi, sonsuz dereceden bir polinom gibi davranır.

Bu son bölüm ipliğin iki ucunu düğümledi. Taylor formülü bize sonlu polinomu ve kalanı vermişti; seriler kuramı sonsuz toplamın ne anlama geldiğini söylemişti. İkisini birleştirince şu ortaya çıktı: bir fonksiyonun kendi Taylor serisine eşit olması ne otomatiktir ne de nadirdir — tam olarak kalan teriminin sıfıra gitmesi demektir. e^{-1/x^2} örneği, "sonsuz kez türevlenebilir" ile "analitik" arasındaki uçurumu gösterdi; binom serisi ise tek bir formülün ne kadar çok açılımı içerebileceğini.

Analiz 3 buradan devam eder. Bu notlarda serileri hep **noktasal** olarak ele aldık: her x için ayrı ayrı yakınsaklık sorduk. Oysa terim terim türev ve integral alma teoremlerinin arkasında daha güçlü bir kavram vardır: **düzgün yakınsaklık**. Fonksiyon dizileri ve serileri kuramı, sürekliliğin, türevlenebilirliğin ve integrallenebilirliğin limite hangi koşullarda taşındığını inceler; kuvvet serileri hakkında bu bölümde kullandığımız her şey, oradaki genel teoremlerin özel hâlidir. Ardından, bir fonksiyonu kuvvetler yerine **sinüs ve kosinüslerle** açan Fourier serileri gelir; bunlar Taylor serilerinin yapamadığını yapar ve sürekli bile olmayan fonksiyonları temsil eder. Son olarak, sınırsız aralıklarda ya da sınırsız fonksiyonlar için integral kavramını genişleten **genelleştirilmiş integraller**, bu bölümde $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ ile başladığımız hesapların $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ biçimindeki tamamlanmışını verir.

Bu bölümle Analiz 2 tamamlanmış olur. Dersin bütün başlıkları için müfredat sayfasına, dört Analiz dersinin listesi için Analiz sayfasına bakabilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0