Analiz 4: Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

Giriş 9

1 $\mathbb{R}^n$ Uzayı, İç Çarpım ve Norm 10
1.1 $\mathbb{R}^n$ Kümesi 10
1.2 Toplama ve Skalerle Çarpma 11
1.3 İç Çarpım 13
1.4 Öklid Normu 15
1.5 Cauchy–Schwarz Eşitsizliği 16
1.6 İki Vektör Arasındaki Açı 17
1.7 Normun Temel Özellikleri 20
1.8 Genel Norm ve Başka Normlar 21
1.9 p-Normu, Hölder ve Minkowski Eşitsizlikleri 22
1.10 Denk Normlar 25
1.11 Paralelkenar ve Kutuplama Özdeşlikleri 27
1.12 Alıştırmalar 29

2 Metrik, Doğrular ve Konveks Kümeler 34
2.1 Öklid Metriği 34
2.2 Metrik Kavramı ve Normdan Elde Edilen Metrikler 35
2.3 $\mathbb{R}^n$'de Doğru ve Doğru Parçası 37
2.4 Konveks Kümeler 39
2.5 Yuvarlar 42
2.6 Başka Normlara Göre Yuvarlar 44
2.7 $\mathbb{R}^n$'de Aralıklar 48
2.8 $\mathbb{R}^3$'te Vektörel Çarpım 49
2.9 Alıştırmalar 52

3 Açık ve Kapalı Kümeler 57
3.1 Komşuluk 57
3.2 Açık Kümeler 58
3.3 Açık Kümelerin Özellikleri 62
3.4 Kapalı Kümeler 64
3.5 Ne Açık Ne Kapalı Kümeler 67
3.6 Yığılma Noktaları 68
3.7 Sınırlı Kümeler 69
3.8 İç İçe Kapalı Aralıklar 70
3.9 Kümeler için Bolzano–Weierstrass Teoremi 71

 CC BY-NC-SA 4.0

3.10 Kapalı Kümeler ve Yığılma Noktaları . . . 73
3.11 Alıştırmalar . . . 73

4 Sınır, Kapanış ve İç . . . 77
4.1 Sınır Noktası ve Sınır . . . 77
4.2 Sınırın Temel Özellikleri . . . 80
4.3 Kapanış . . . 81
4.4 İç Nokta ve İç . . . 84
4.5 Kapanış ile İç Arasındaki Bağlar . . . 88
4.6 İç, Kapanış ve Sınırı Hesaplamak . . . 88
4.7 Özet Tablosu . . . 91
4.8 Alıştırmalar . . . 91

5 Kompakt ve Bağlantılı Kümeler . . . 95
5.1 Açık Örtü ve Kompakt Küme . . . 95
5.2 Kompakt Kümelerin Özellikleri . . . 97
5.3 Heine–Borel Teoremi . . . 99
5.4 Bağlantılı Kümeler . . . 102
5.5 Aralıklar ve Konveks Kümeler . . . 104
5.6 Bölge . . . 107
5.7 Alıştırmalar . . . 107

6 $\mathbb{R}^n$'de Diziler ve Yakınsaklık . . . 111
6.1 $\mathbb{R}^n$'de Dizi . . . 111
6.2 Yakınsaklık . . . 112
6.3 Limitin Tekliği . . . 115
6.4 Sınırlı Diziler . . . 116
6.5 Koordinat Yakınsaklık . . . 117
6.6 Limit için Cebirsel İşlemler . . . 121
6.7 Limit ve Yığılma Noktası . . . 122
6.8 Alıştırmalar . . . 123

7 Alt Diziler ve Cauchy Dizileri . . . 129
7.1 Alt Diziler . . . 129
7.2 Alt Dizilerin Limiti . . . 130
7.3 Dizinin Yığılma Noktası . . . 132
7.4 Diziler için Bolzano–Weierstrass Teoremi . . . 132
7.5 Kapalı Kümelerin Dizilerle Belirlenmesi . . . 136
7.6 Dizisel Kompaktlık . . . 138
7.7 Cauchy Dizileri . . . 139
7.8 Alıştırmalar . . . 142

8 Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Limit . . . 148
8.1 Çok Değişkenli Fonksiyonlar . . . 148

 CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Tanım Kümesi ve Değer Kümesi . . . 149
8.3 Grafik . . . 154
8.4 Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler . . . 154
8.5 Limit . . . 155
8.6 Tanımla Limit Hesabı . . . 158
8.7 Limitin Dizisel Karakterizasyonu . . . 161
8.8 Cauchy Ölçütü . . . 163
8.9 Limit için Cebirsel İşlemler ve Sıkıştırma . . . 165
8.10 $\mathbb{R}^n$'de Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar . . . 167
8.11 Limitin Bileşenlerle Hesabı . . . 169
8.12 Alıştırmalar . . . 172

9 Yollar Boyunca Limit ve Ardışık Limitler . . . 176
9.1 Bir Noktaya Giden Yollar . . . 176
9.2 Yol Boyunca Limit . . . 177
9.3 Doğrular Yetmez . . . 181
9.4 Kutupsal Koordinatlarla Sınırlama . . . 183
9.5 Ardışık Limitler . . . 185
9.6 Ardışık Limitler ile Limit Arasındaki İlişki . . . 186
9.7 Yöntemlerin Özeti . . . 188
9.8 Alıştırmalar . . . 189

10 Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik . . . 195
10.1 Bir Noktada Süreklilik . . . 195
10.2 İzole Noktalar ve Limitle İlişki . . . 198
10.3 Dizisel Süreklilik . . . 200
10.4 Süreksizlik Türleri . . . 203
10.5 Cebirsel İşlemler . . . 205
10.6 Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar . . . 206
10.7 Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar . . . 206
10.8 Bileşke Fonksiyon ve Norm . . . 209
10.9 Bileşenlerle Süreklilik . . . 210
10.10 Alıştırmalar . . . 211

11 Sürekli Fonksiyonların Global Özellikleri . . . 216
11.1 Görüntü ve Ters Görüntü . . . 216
11.2 Bağıl Açık Kümeler . . . 219
11.3 Sürekliliğin Açık ve Kapalı Kümelerle Belirlenmesi . . . 220
11.4 Kompakt Kümelerin Görüntüsü . . . 223
11.5 Kompakt Kümede Ters Fonksiyon . . . 225
11.6 Bağlantılı Kümelerin Görüntüsü ve Ara Değer Teoremi . . . 227
11.7 Düzgün Süreklilik . . . 229
11.8 Alıştırmalar . . . 233

 CC BY-NC-SA 4.0

12 Kısmi Türevler . . . 237
12.1 Türevin Üç Türü . . . 237
12.2 Kısmi Türevin Tanımı . . . 238
12.3 Tanımla Hesap . . . 242
12.4 Geometrik Yorum . . . 244
12.5 Kısmi Türev ve Süreklilik . . . 247
12.6 Kısmi Türev Kuralları . . . 249
12.7 Gradyan . . . 252
12.8 Vektör Değerli Fonksiyonların Kısmi Türevleri . . . 253
12.9 Alıştırmalar . . . 255

13 Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler . . . 259
13.1 İkinci Mertebeden Kısmi Türevler . . . 259
13.2 Daha Yüksek Mertebeler . . . 262
13.3 C^k Sınıfları . . . 263
13.4 Karışık Türevler Eşit Olmayabilir . . . 264
13.5 Clairaut Teoremi . . . 267
13.6 Çok Değişken ve Yüksek Mertebe . . . 272
13.7 Laplace Denklemi . . . 273
13.8 Alıştırmalar . . . 275

14 Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel . . . 281
14.1 Tek Değişkende Türev: Doğrusal Yaklaşım . . . 281
14.2 Türevlenebilmenin Tanımı . . . 282
14.3 Türevlenebilmenin Sonuçları . . . 285
14.4 Kısmi Türevler Yetmez . . . 286
14.5 Toplam Diferansiyel . . . 288
14.6 Türevlenebilme için Yeter Koşul . . . 289
14.7 Türevlenebilirliği Tanımla İncelemek . . . 292
14.8 Doğrusallaştırma ve Yaklaşık Hesap . . . 295
14.9 Teğet Düzlem ve Normal Doğru . . . 297
14.10 Alıştırmalar . . . 300

15 Jacobi Matrisi ve Zincir Kuralı . . . 304
15.1 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Türevlenebilme . . . 304
15.2 Türevin Tekliği ve Süreklilik . . . 306
15.3 Bileşenlerle Türevlenebilme . . . 307
15.4 Jacobi Matrisi . . . 308
15.5 Sürekli Kısmi Türevlerle Yeter Koşul . . . 311
15.6 Afin Yaklaşım . . . 314
15.7 Cebirsel İşlemler . . . 315
15.8 Zincir Kuralı . . . 318

 CC BY-NC-SA 4.0

15.9 Zincir Kuralının Özel Hâlleri . . . 321
15.10 Alıştırmalar . . . 325

16 Yönlü Türev ve Ortalama Değer Teoremi . . . 330
16.1 Yönlü Türev . . . 330
16.2 Türevlenebilir Fonksiyonlarda Yönlü Türev . . . 332
16.3 En Hızlı Artış Yönü . . . 335
16.4 Kısmi Türev, Yönlü Türev ve Türevlenebilirlik . . . 338
16.5 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Yönlü Türev . . . 341
16.6 Ortalama Değer Teoremi . . . 342
16.7 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Ortalama Değer Teoremi . . . 345
16.8 Alıştırmalar . . . 346

17 Taylor Formülü . . . 351
17.1 Hessian Matrisi . . . 351
17.2 İkinci Mertebeden Toplam Diferansiyel . . . 354
17.3 Yüksek Mertebeden Diferansiyeller . . . 355
17.4 Taylor Teoremi . . . 357
17.5 Operatör Yazımıyla Taylor Polinomu . . . 363
17.6 Kalan Terim: İntegral Biçimi ve Mertebesi . . . 368
17.7 İkinci Mertebeden Taylor Formülü . . . 370
17.8 Taylor Serisi ve Reel Analitik Fonksiyonlar . . . 371
17.9 Alıştırmalar . . . 373

18 Yerel Ekstremumlar . . . 380
18.1 Yerel ve Mutlak Ekstremum . . . 380
18.2 Birinci Mertebeden Gerek Koşul . . . 381
18.3 Durgun, Kritik ve Eyer Noktaları . . . 382
18.4 Simetrik Matrislerin Tanımlılığı . . . 384
18.5 İkinci Türev Testi . . . 387
18.6 İki Değişkenli Fonksiyonlar . . . 388
18.7 Sylvester Ölçütü . . . 394
18.8 Test Sonuç Vermediğinde . . . 399
18.9 Alıştırmalar . . . 402

19 Mutlak ve Bağlı Ekstremumlar . . . 408
19.1 Kompakt Kümede Mutlak Ekstremum . . . 408
19.2 Bağlı Ekstremum . . . 411
19.3 Lagrange Çarpanları Teoremi . . . 412
19.4 Lagrange Fonksiyonu ve Lagrange Yöntemi . . . 414
19.5 Geometrik Yorum . . . 420
19.6 Birden Çok Kısıt . . . 421
19.7 Alıştırmalar . . . 424

 CC BY-NC-SA 4.0

20 Ters ve Kapalı Fonksiyon Teoremleri . . . 428
20.1 Tek Değişkenden Çok Değişkene . . . 428
20.2 Ters Fonksiyon Teoremi . . . 429
20.3 Kapalı Fonksiyonlar . . . 434
20.4 İki Değişkenli Kapalı Fonksiyon Teoremi . . . 435
20.5 Yüzeyler ve Teğet Düzlem . . . 440
20.6 Denklem Sistemleri . . . 442
20.7 Fonksiyonel Bağlılık . . . 448
20.8 Alıştırmalar . . . 451

21 Uygulamalı Özet . . . 456
21.1 Soru Tipine Göre Yöntem . . . 456
21.2 Normlar ve İç Çarpım . . . 458
21.3 İç, Kapanış, Sınır ve Yığılma Noktaları . . . 459
21.4 Açık, Kapalı, Kompakt, Konveks, Bağlantılı . . . 460
21.5 $\mathbb{R}^n$'de Diziler . . . 461
21.6 Tanım Kümesi . . . 463
21.7 Limitin Olmadığını Göstermek . . . 464
21.8 Limitin Var Olduğunu Göstermek . . . 465
21.9 Ardışık Limitler . . . 466
21.10 Süreklilik ve Sürekli Genişleme . . . 467
21.11 Kısmi Türev: Tanımdan . . . 468
21.12 Karışık Türevler ve Clairaut Teoremi . . . 470
21.13 Türevlenebilirlik İncelemesi . . . 471
21.14 Toplam Diferansiyel ve Yaklaşık Hesap . . . 472
21.15 Jacobi Matrisi, Hessian ve Zincir Kuralı . . . 473
21.16 Yönlü Türev, Gradyan ve En Hızlı Artış . . . 474
21.17 Teğet Düzlem ve Normal Doğru . . . 475
21.18 Taylor Formülü . . . 475
21.19 Kritik Noktaları Sınıflandırmak . . . 477
21.20 Kapalı ve Sınırlı Bölgede Mutlak Ekstremum . . . 480
21.21 Lagrange Çarpanları . . . 481
21.22 Kapalı Fonksiyonlar, Ters Fonksiyon ve Jacobi Determinantı . . . 482
21.23 Son Kontrol Listesi . . . 484

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Analiz 4, tek değişkenli analiz kavramlarını n boyutlu Öklid uzayına taşır. $\mathbb{R}^n$ uzayının cebirsel ve topolojik yapısından başlayarak çok değişkenli fonksiyonlarda limit, süreklilik, kısmi türev ve türevlenebilmeyi inceler; ardından Taylor formülüyle ekstremum problemlerine ve kapalı fonksiyon teoremine ulaşır.

> **i** Not
>
> Analiz 4'ün bütün başlıklarının notları hazırdır ve aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Dersin dayandığı tek değişkenli analiz için Analiz 1 ve Analiz 2 notlarına bakılabilir. Dört Analiz dersinin listesi için Analiz sayfasına bakabilirsiniz.

CC BY-NC-SA 4.0

1. $\mathbb{R}^n$ Uzayı, İç Çarpım ve Norm

Analiz 1 ve 2'de incelediğimiz fonksiyonlar tek bir reel değişkene bağlıydı. Oysa pek çok nicelik birden çok değişkene bağlıdır: bir levhanın (x, y) noktasındaki sıcaklığı, bir cismin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu ya da n tane girdiye bağlı bir maliyet. Bu kitapta tanım kümesi $\mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesi olan fonksiyonları inceleyeceğiz.
Tek değişkenli analizin temel kavramlarının hepsi, yani limit, süreklilik ve türev, iki sayı arasındaki $|\, x - y \,|$ uzaklığına dayanıyordu: "x, a'ya yakındır" demek "$|\, x - a \,|$ küçüktür" demekti. Çok değişkenli analize geçerken ilk işimiz bu ölçünün $\mathbb{R}^n$'deki karşılığını kurmaktır. Bunun için önce $\mathbb{R}^n$'nin elemanlarını toplamayı ve bir sayıyla çarpmayı, sonra iki vektörden bir sayı üreten iç çarpımı ve bir vektörün uzunluğunu ölçen normu tanımlayacağız.
Bu bölümde şunları göreceğiz: $\mathbb{R}^n$'nin vektör uzayı yapısı ve doğal tabanı; iç çarpımın aksiyomları ve standart iç çarpım; Öklid normu ve Cauchy–Schwarz eşitsizliği; iki vektör arasındaki açı ve diklik; normun özellikleri ve üçgen eşitsizliği; 1-normu, maksimum normu ve p-normu; normların denkliği; son olarak bir normun ne zaman bir iç çarpımdan gelebileceğini söyleyen paralelkenar özdeşliği.

1.1 $\mathbb{R}^n$ Kümesi

Başlangıç noktamız, n tane reel sayının sıralı bir listesidir.

Tanım 1.1 ($\mathbb{R}^n$ Uzayı). $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\} \\ &= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ tane}}\end{aligned}$$

kümesine **n boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayı** denir; n sayısı uzayın **boyutu**dur. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ elemanlarına **nokta**, **vektör** ya da **sıralı n'li**, $x_1, x_2, ..., x_n$ reel sayılarına x'in **koordinatları** ya da **bileşenleri** denir. Bütün bileşenleri 0 olan $(0, 0, ..., 0)$ elemanına $\mathbb{R}^n$'nin **sıfır vektörü** ya da **orijini** denir ve kısaca 0 ile gösterilir.

Yani $\mathbb{R}^n$'nin bir elemanı, n tane reel sayının belli bir sırayla yazılmış listesidir ve bu sıra önemlidir: bileşenlerin yeri değişirse genellikle başka bir eleman elde edilir. Örneğin $\mathbb{R}^2$'de $(3, 1) \neq (1, 3)$ ve $(-1, 1) \neq (1, -1)$, $\mathbb{R}^3$'te $(2, 1, -1) \neq (-1, 1, 2)$'dir. "Nokta" ile "vektör" sözcüklerini aynı anlamda kullanacağız: x'i uzayda bir yer olarak düşünürken nokta, orijinden o yere çizilen bir ok olarak düşünürken vektör deriz. Noktaları kalın harfle yazmıyoruz; sıfır vektörünü de reel sayı 0 ile aynı simgeyle gösteriyoruz, hangisinin kastedildiği bağlamdan anlaşılır.
Küçük boyutlar tanıdıktır. $n = 1$ için $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir ve elemanlarına **skaler** denir. $n = 2$ için $\mathbb{R}^2$, (x_1, x_2) sıralı ikililerinden oluşur ve geometrik olarak düzlemi betimler. $n = 3$ için $\mathbb{R}^3$, (x_1, x_2, x_3) sıralı üçlülerinden oluşur ve içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayı betimler. İki ve üç değişkende bileşenleri çoğunlukla (x, y) ve (x, y, z) diye yazacağız. $n \geq 4$ için çizim yapamayız, ama hesaplar aynen sürer; bu bölümdeki işlemlerin hepsi bileşen bileşen yapılan reel sayı işlemleridir.

Tanım 1.2 (İki Vektörün Eşitliği). $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$'nin iki elemanı olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i = y_i$ ise x ile y **eşittir** denir ve $x = y$ yazılır.

Yani iki vektörün eşit olması, n tane sayı eşitliğinin aynı anda sağlanması demektir:

$$x = y \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n.$$

Tek bir vektör denklemi, n tane sayı denklemine denktir. Bu gözlemi bölüm boyunca sık sık kullanacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Toplama ve Skalerle Çarpma

$\mathbb{R}$'de sayıları toplayıp çarpabiliyoruz; $\mathbb{R}^n$'de bu işlemleri bileşen bileşen tanımlarız.

Tanım 1.3 (Toplama ve Skalerle Çarpma). $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$'nin iki elemanı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **toplama** işlemi ve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **skalerle çarpma** işlemi

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

ile tanımlanır. Ayrıca $-x = (-1)x$ ve $x - y = x + (-y)$ yazılır.

Yani iki vektörü toplamak için karşılıklı bileşenler toplanır; bir vektörü λ sayısıyla çarpmak için her bileşen λ ile çarpılır. Sonuç yine $\mathbb{R}^n$'nin bir elemanıdır. Her iki işlem de bileşenlerde $\mathbb{R}$'nin bilinen işlemleri olduğundan, $\mathbb{R}$'deki hesap kurallarını her bileşene ayrı ayrı uygulayabiliriz. Farklı boyuttaki vektörler ise toplanamaz: $(1, 2) + (1, 2, 3)$ yazımı anlamsızdır. Hesap her boyutta aynıdır; örneğin $\mathbb{R}^3$'te $x = (1, -2, 3)$ ve $y = (0, 4, -1)$ için

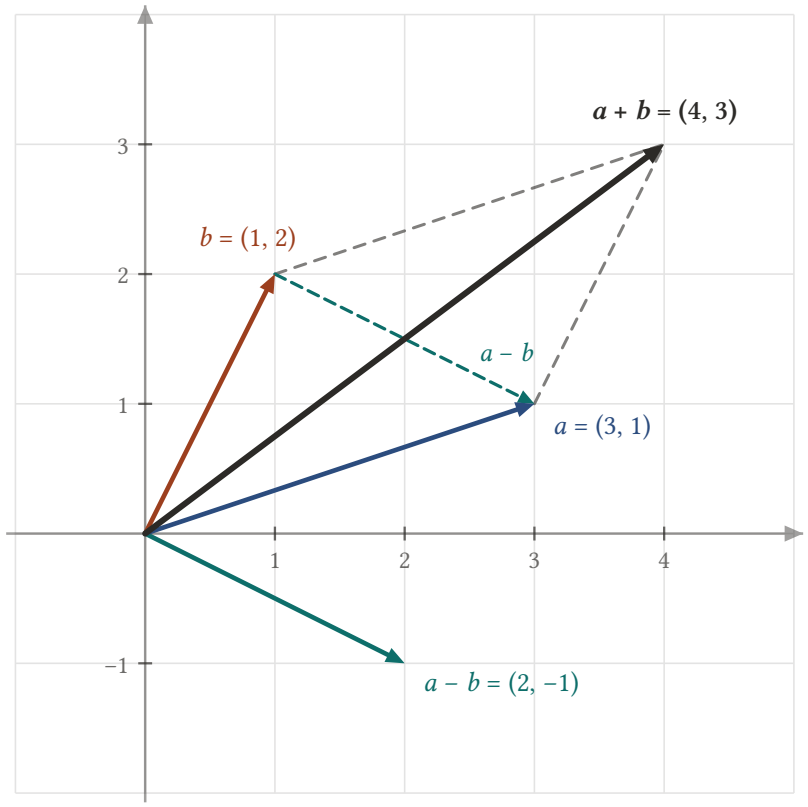
$$3x - 2y = (3, -6, 9) - (0, 8, -2) = (3, -14, 11)$$

olur.

Örnek 1.1 (Düzlemde Toplama ve Çıkarma). $\mathbb{R}^2$'de $a = (3, 1)$ ve $b = (1, 2)$ için $a + b$, $a - b$ ve $2a - 3b$ vektörlerini hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> Bileşen bileşen hesaplayalım:
>
> $$a + b = (3 + 1, 1 + 2) = (4, 3),$$
> $$a - b = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1),$$
> $$2a - 3b = (6, 2) - (3, 6) = (3, -4).$$
>
> Bu işlemlerin geometrik anlamı da vardır. $a + b$, kenarları a ve b olan paralelkenarın orijinden çıkan köşegenidir: a'nın ucundan başlayıp b kadar ilerlersek $a + b$'nin ucuna varırız (paralelkenar kuralı). $b + (a - b) = a$ olduğundan $a - b$ de b'nin ucundan a'nın ucuna giden okun orijine taşınmış hâlidir; bu ok paralelkenarın öbür köşegenidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.1: $a = (3, 1)$ ve $b = (1, 2)$ için $a + b = (4, 3)$, kenarları a ile b olan paralelkenarın orijinden çıkan köşegenidir. b'nin ucundan a'nın ucuna giden kesikli ok öbür köşegendir; orijine taşındığında $a - b = (2, -1)$ vektörü olur.

■

İki işlemin uyduğu kurallar, $\mathbb{R}$'deki toplama ve çarpmanın kurallarından doğrudan gelir.

Önerme 1.1 ($\mathbb{R}^n$'nin Vektör Uzayı Özellikleri). *Her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler geçerlidir.*

1. $x + y = y + x$ *(değişme).*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(birleşme).*
3. $0 + x = x$ *(toplamanın birim elemanı).*
4. $x + (-x) = 0$ *(toplamaya göre ters eleman).*
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
8. $1x = x$.

Ayrıca $0x = 0$'dır (soldaki 0 reel sayı, sağdaki sıfır vektörüdür).

İspat.
Her özellik, iki yanın bileşenlerinin eşit olduğunu göstererek kanıtlanır (Tanım 1.2); bileşenlerde ise yalnız $\mathbb{R}$'nin cisim aksiyomları kullanılır (bkz. Analiz 1). i keyfi bir indis olsun ($1 \le i \le n$).
(1) *$x + y$'nin i. bileşeni $x_i + y_i$, $y + x$'in i. bileşeni $y_i + x_i$'dir; $\mathbb{R}$'de toplama değişmeli olduğundan bunlar eşittir.*
(2) *İki yanın i. bileşenleri $(x_i + y_i) + z_i$ ve $x_i + (y_i + z_i)$'dir; $\mathbb{R}$'de toplama birleşmeli olduğundan eşittir.*
(3) *$0 + x$'in i. bileşeni $0 + x_i = x_i$'dir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(4) $-x = (-x_1, ..., -x_n)$ *olduğundan* $x + (-x)$*'in* i*. bileşeni* $x_i + (-x_i) = 0$*'dır; yani* $x + (-x)$ *sıfır vektörüdür.*
(5) İki yanın i*. bileşenleri* $\lambda(\mu x_i)$ *ve* $(\lambda\mu)x_i$*'dir;* $\mathbb{R}$*'de çarpma birleşmeli olduğundan eşittir.*
(6) İki yanın i*. bileşenleri* $\lambda(x_i + y_i)$ *ve* $\lambda x_i + \lambda y_i$*'dir;* $\mathbb{R}$*'deki dağılma özelliği gereği eşittir.*
(7) İki yanın i*. bileşenleri* $(\lambda + \mu)x_i$ *ve* $\lambda x_i + \mu x_i$*'dir; yine dağılma özelliği gereği eşittir.*
(8) $1x$*'in* i*. bileşeni* $1 \cdot x_i = x_i$*'dir.*
Son olarak $0x$*'in* i*. bileşeni* $0 \cdot x_i = 0$*'dır; öyleyse* $0x$ *sıfır vektörüdür.* ■

Lineer cebirden bildiğimiz gibi bu sekiz özelliği sağlayan yapıya **vektör uzayı** denir. Böylece $\mathbb{R}^n$, toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır; lineer bağımsızlık, taban ve boyut gibi kavramların hepsi $\mathbb{R}^n$'de anlamlıdır.

Tanım 1.4 (Doğal Taban). $i = 1, 2, ..., n$ için i. bileşeni 1, öbür bileşenleri 0 olan vektör e_i ile gösterilir:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, ..., 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, ..., 0, 1). \end{aligned}$$

$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kümesine $\mathbb{R}^n$'nin **doğal tabanı** (standart tabanı) denir.

Yani doğal taban, koordinat eksenleri doğrultusundaki "birim adımlardan" oluşur. Her $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

olur, çünkü sağ yandaki toplamın i. bileşenine yalnız $x_i e_i$ terimi katkı verir ve bu katkı x_i'dir. Bu yazılış tektir: $x = c_1 e_1 + ... + c_n e_n$ ise sağ yan $(c_1, ..., c_n)$ vektörüdür ve Tanım 1.2 gereği her i için $c_i = x_i$ olur. $x = 0$ alındığında teklik, $c_1 e_1 + ... + c_n e_n = 0$ ise bütün c_i'lerin 0 olduğunu söyler; yani $e_1, ..., e_n$ lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^n$'yi gerer. Demek ki doğal taban gerçekten bir tabandır ve $\mathbb{R}^n$'nin boyutu n'dir. Örneğin $\mathbb{R}^2$'de $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ve $(3, 1) = 3e_1 + e_2$'dir. $\mathbb{R}^3$'te $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ ve

$$(1, 2, 3) = (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

olur.

1.3 İç Çarpım

Toplama ve skalerle çarpma, uzunluk ya da açı hakkında hiçbir şey söylemez. Bu geometrik bilgiyi, iki vektörden bir reel sayı üreten bir işlem taşır.

Tanım 1.5 (İç Çarpım). $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} &(\text{İ1}) \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \\ &(\text{İ2}) \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ &(\text{İ3}) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \\ &(\text{İ4}) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$'ye $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir **iç çarpım** (inner product), $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine bir **iç çarpım uzayı** denir. (İ1)'e pozitiflik, (İ3)'e simetri, (İ4)'e ilk bileşende lineerlik denir.

Yani iç çarpım, iki vektöre bir sayı karşılık getiren ve dört makul kurala uyan bir fonksiyondur: bir vektörün kendisiyle iç çarpımı negatif olamaz ve yalnız sıfır vektörü için sıfırdır, vektörlerin sırası önemli değildir ve ilk bileşende toplamaya ve skalerle çarpmaya uyulur. (İ3) ile (İ4) birlikte ikinci bileşende de lineerliği verir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\langle x, \alpha y + \beta z\rangle &= \langle \alpha y + \beta z, x\rangle = \alpha\langle y, x\rangle + \beta\langle z, x\rangle \\ &= \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle.\end{aligned}$$

(İ4)'te $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ alınırsa $\langle 0, z\rangle = 0$ bulunur; simetriyle $\langle z, 0\rangle = 0$ olur.

Tanım 1.6 (Standart İç Çarpım). $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$ için

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

ile tanımlanan $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$'nin **standart iç çarpımı** denir. Sonuç bir skaler olduğundan buna **skaler çarpım** da denir ve $x \cdot y$ biçiminde de yazılır.

Yani karşılıklı bileşenler çarpılıp toplanır. Örneğin $\mathbb{R}^3$'te

$$\begin{aligned}\langle (3,1,1), (1,2,5)\rangle &= 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 5 = 10, \\ \langle (1,3,2), (0,1,4)\rangle &= 1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 2\cdot 4 = 11\end{aligned}$$

olur. Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\langle \cdot, \cdot\rangle$ hep standart iç çarpımı gösterecektir. Önce onun gerçekten bir iç çarpım olduğunu gösterelim.

Önerme 1.2 (Standart İç Çarpımın Özellikleri). *Standart iç çarpım $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır; yani her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için (İ1)–(İ4) koşulları sağlanır. Özel olarak her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned}\langle x, y + z\rangle &= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle, \\ \langle \lambda x, y\rangle &= \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle\end{aligned}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Önce tanımın anlamlı olduğunu görelim: $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ olduğundan her $x_k y_k$ bir reel sayıdır ve sonlu sayıda reel sayının toplamı olan $\langle x, y\rangle$ de bir reel sayıdır. Her (x, y) ikilisine tek bir sayı karşılık geldiğinden $\langle \cdot, \cdot\rangle$ bir fonksiyondur. Şimdi dört koşulu denetleyelim.*
> ***(İ1)*** *$\langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$'dir. Her $x_k^2 \geq 0$ olduğundan toplam da negatif değildir.*
> ***(İ2)*** *$x = 0$ ise her bileşen 0 olduğundan $\langle x, x\rangle = 0$'dır. Tersine $x_1^2 + ... + x_n^2 = 0$ olsun. Negatif olmayan sayıların toplamı 0 ise her biri 0'dır: bir x_j^2 pozitif olsaydı toplam en az $x_j^2 > 0$ olurdu. Öyleyse her k için $x_k^2 = 0$, yani $x_k = 0$ ve $x = 0$'dır.*
> ***(İ3)*** *$\mathbb{R}$'de çarpma değişmeli olduğundan*
>
> $$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \langle y, x\rangle.$$
>
> ***(İ4)*** *$\alpha x + \beta y$'nin k. bileşeni $\alpha x_k + \beta y_k$'dir. Dağılma özelliği ve sonlu toplamların lineerliğiyle*
>
> $$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, z\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta y_k) z_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \\ &= \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle.\end{aligned}$$
>
> *"Özel olarak" diye verilen eşitlikler de buradan çıkar. İç çarpım tanımından sonra, (İ3) ile (İ4)'ün ikinci bileşende de lineerlik verdiğini her iç çarpım için göstermiştik. Bu lineerlikte $\alpha = 1$, $\beta = 1$ alınırsa $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$; $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$ alınırsa $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ bulunur. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ eşitliği ise (İ4)'te $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$ alınarak elde edilir.* ■

Standart iç çarpımıyla birlikte düşünülen $\mathbb{R}^n$'ye ***n* boyutlu Öklid uzayı** ya da kısaca Öklid uzayı denir. Standart iç çarpım $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tek iç çarpım değildir; alıştırmalarda başka bir iç çarpım göreceğiz

 CC BY-NC-SA 4.0

(Alıştırma 1.6). Öte yandan iç çarpıma benzeyen her formül bir iç çarpım olmaz. Bir fonksiyonun iç çarpım olup olmadığını denetlemek bu bölümde birkaç kez yapacağımız bir iştir.

Dört adımda iç çarpım denetimi

1. **Fonksiyon mu?** Formülün her (x, y) ikilisine tek bir reel sayı karşılık getirdiği denetlenir.
2. **Pozitiflik ve belirlilik.** (İ1) ve (İ2) tanımdan denetlenir; çoğu zaman "negatif olmayan sayıların toplamı ya da en büyüğü 0 ise her biri 0'dır" gözlemi yeter.
3. **Simetri ve lineerlik.** (İ3) ve (İ4) bileşen bileşen hesapla denetlenir.
4. **Karar.** Dört koşul da sağlanıyorsa fonksiyon bir iç çarpımdır. Bir koşul bozuluyorsa bunu somut vektörler ve sayılarla gösteren bir karşı örnek verilir.

Örnek 1.2 (İç Çarpım Olmayan Bir Fonksiyon). $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\varphi(x, y) = \max\{\mid x_k y_k \mid : 1 \leq k \leq n\}$$

ile tanımlansın. φ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım mıdır?

Çözüm.
Fonksiyon mu? Her $\mid x_k y_k \mid$ bir reel sayıdır ve n elemanlı sonlu bir kümenin en büyük elemanı vardır. Her (x, y) ikilisine tek bir sayı karşılık gelir; φ bir fonksiyondur.
(İ1) $\mid x_k x_k \mid = x_k^2$ olduğundan $\varphi(x, x) = \max\{x_k^2 : 1 \leq k \leq n\}$'dir. Negatif olmayan sayıların en büyüğü negatif olamaz; $\varphi(x, x) \geq 0$.
(İ2) $x = 0$ ise her $x_k^2 = 0$ ve $\varphi(x, x) = 0$'dır. Tersine $\varphi(x, x) = 0$ ise her k için $0 \leq x_k^2 \leq \varphi(x, x) = 0$ olur; buradan $x_k = 0$ ve $x = 0$ çıkar.
(İ3) $\mid x_k y_k \mid = \mid y_k x_k \mid$ olduğundan iki küme aynıdır ve $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$'tir.
(İ4) Bu koşul sağlanmaz. φ hiç negatif değer almaz; oysa lineerlik, vektör -1 ile çarpılınca değerin işaret değiştirmesini gerektirir. Somut olarak $x = e_1$, $z = e_1$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$ alalım (y keyfi):

$$\begin{aligned} \varphi(-e_1, e_1) &= \max\{\mid (-1) \cdot 1 \mid, 0, \ldots, 0\} = 1, \\ -\varphi(e_1, e_1) &= -1. \end{aligned}$$

$1 \neq -1$ olduğundan (İ4) bozulur. $n \geq 2$ ise toplamaya uyum da bozulur; yani skalerler pozitifken bile sorun vardır. $x = e_1$, $y = e_2$ ve $z = e_1 + e_2$ alalım. $x + y = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ ve $z = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ olduğundan ($\alpha = 1, \beta = 1$)

$$\begin{aligned} \varphi(x + y, z) &= \max\{1, 1, 0, \ldots, 0\} = 1, \\ \varphi(x, z) + \varphi(y, z) &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

bulunur. Aynı vektörlerle $\alpha = -1, \beta = 2$ alınırsa $\alpha x + \beta y = (-1, 2, 0, \ldots, 0)$ olur; sol yan $\max\{1, 2\} = 2$, sağ yan $-1 + 2 = 1$ çıkar. Doğru olan yalnız bir eşitsizliktir: her k için üçgen eşitsizliği gereği

$$\mid (\alpha x_k + \beta y_k) z_k \mid \leq \mid \alpha \mid \mid x_k z_k \mid + \mid \beta \mid \mid y_k z_k \mid \leq \mid \alpha \mid \varphi(x, z) + \mid \beta \mid \varphi(y, z)$$

olur ve sağ yan k'ye bağlı olmadığından

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) \leq \mid \alpha \mid \varphi(x, z) + \mid \beta \mid \varphi(y, z)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (İ4)'ün istediği eşitliğin yerini tutmaz.
Sonuç olarak φ (İ1)–(İ3) koşullarını sağlar ama (İ4)'ü sağlamaz; bir iç çarpım değildir. ■

1.4 Öklid Normu

Bir vektörün kendisiyle iç çarpımı negatif olmadığından karekökü alınabilir; bu karekök vektörün uzunluğudur.

Tanım 1.7 (Öklid Normu). $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$$

sayısına x'in **Öklid normu** (uzunluğu) denir. Böylece $x \mapsto \| x \|$ kuralıyla bir $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanmış olur.

Yani $\| x \|$ negatif olmayan bir reel sayıdır ve karesi $\| x \|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$'dir. Geometrik olarak $\| x \|$, x noktasının orijine uzaklığıdır. $n = 1$ için $\| x \| = \sqrt{x^2}$ ifadesi $| x |$'e eşittir; Öklid normu mutlak değerin $\mathbb{R}^n$'deki karşılığıdır. $n = 2$ ve $n = 3$ için $\| x \|$, Pisagor teoremiyle bulunan vektör uzunluğudur (boyudur). Örneğin

$$\begin{aligned} \| (2, 3) \| &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \\ \| (1, 5) \| &= \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}, \\ \| (1, -2, 2) \| &= \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \end{aligned}$$

olur. İç çarpımla norm arasındaki ilk bağıntı, bir toplamın normunun karesini açmaktır.

Lemma 1.1 (Toplamın ve Farkın Normunun Karesi). *Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 &= \| x \|^2 + 2\langle x, y \rangle + \| y \|^2, \\ \| x - y \|^2 &= \| x \|^2 - 2\langle x, y \rangle + \| y \|^2 \end{aligned}$$

olur.

> ***İspat.***
> *(İ4), ikinci bileşendeki lineerlik ve (İ3) ile*
>
> $$\begin{aligned} \| x + y \|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \| x \|^2 + 2\langle x, y \rangle + \| y \|^2 . \end{aligned}$$
>
> *İkinci eşitlik, birincide y yerine $-y$ yazılarak elde edilir, çünkü $\langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle$ ve $\langle -y, -y \rangle = \langle y, y \rangle$'dir.* ■

İspatta bileşenler hiç kullanılmadı; yalnız (İ3), (İ4) ve bunlardan çıkan ikinci bileşendeki lineerlik kullanıldı. Bu yüzden aynı iki eşitlik, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki herhangi bir iç çarpım için, $\| x \|$ yerine $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ yazılarak da geçerlidir. Bu gözlem bölümün sonunda işe yarayacak.

1.5 Cauchy–Schwarz Eşitsizliği

İç çarpım ile norm arasındaki en önemli bağıntı, iç çarpımın mutlak değerinin normların çarpımını aşamayacağını söyler.

Teorem 1.1 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliği). *Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \sum_{k=1}^{n} | x_k y_k | \leq \| x \| \, \| y \|$$

olur. Özel olarak $| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \, \| y \|$'dir.

> ***İspat.***
> ***Birinci eşitsizlik.*** *Sonlu toplamlar için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| \langle x, y \rangle | = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} | x_k y_k | .$$

İkinci eşitsizlik, vektörlerden biri sıfırken. $\| x \| = 0$ *ise* $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$*'dır ve (İ2)'nin ispatındaki gibi her* $x_k = 0$ *olur. Bu durumda* $\sum_k | x_k y_k | = 0$ *olur ve eşitsizlik* $0 \leq 0$ *biçiminde sağlanır.* $\| y \| = 0$ *durumu aynıdır.*

İkinci eşitsizlik, $\| x \| \neq 0$ ***ve*** $\| y \| \neq 0$ ***iken.*** *Her* k *için* $a_k = \dfrac{| x_k |}{\| x \|}$ *ve* $b_k = \dfrac{| y_k |}{\| y \|}$ *yazalım. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği (bkz. Analiz 1) her* $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ *verir. Bunu her* k *için* a_k *ve* b_k*'ye uygulayıp* k *üzerinden toplayalım.* $| x_k |^2 = x_k^2$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\| x \| \| y \|} \sum_{k=1}^{n} | x_k | | y_k | &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\| x \|^2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{\| y \|^2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\| x \|^2}{\| x \|^2} + \frac{\| y \|^2}{\| y \|^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

olur. $| x_k y_k | = | x_k | | y_k |$ *olduğundan, iki yanı pozitif* $\| x \| \| y \|$ *sayısıyla çarparak* $\sum_k | x_k y_k | \leq \| x \| \| y \|$ *elde ederiz.* ■

Koordinatlarla yazıldığında eşitsizlik

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)$$

biçimini alır. Analiz 2'de gördüğümüz integraller için Cauchy–Schwarz eşitsizliği (bkz. Analiz 2), toplamların yerine integraller konmuş karşılığıdır. Eşitliğin ne zaman sağlandığını bir alıştırmada göreceğiz (Alıştırma 1.3).

Örnek 1.3 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliğinin Üç Niceliği). $x = (1, 2, 3)$ ve $y = (4, -5, 6)$ için Teorem 1.1 içindeki $| \langle x, y \rangle |$, $\sum_k | x_k y_k |$ ve $\| x \| \| y \|$ sayılarını hesaplayıp karşılaştırınız.

Çözüm.
Üç niceliği sırayla hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= 4 - 10 + 18 = 12, \\ \sum_{k=1}^{3} | x_k y_k | &= 4 + 10 + 18 = 32, \\ \| x \| \| y \| &= \sqrt{1 + 4 + 9} \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{14 \cdot 77} = 7\sqrt{22}. \end{aligned}$$

$7\sqrt{22} \approx 32{,}83$ olduğundan $12 \leq 32 \leq 32{,}83$ bulunur. Birinci eşitsizlikte çok şey kaybedildi, çünkü -10 terimi öbür terimlerin bir kısmını götürdü. İkinci eşitsizlik ise neredeyse eşitliktir, çünkü $(| x_1 |, | x_2 |, | x_3 |) = (1, 2, 3)$ ile $(| y_1 |, | y_2 |, | y_3 |) = (4, 5, 6)$ neredeyse aynı doğrultudadır. ■

1.6 İki Vektör Arasındaki Açı

Cauchy–Schwarz eşitsizliği, düzlemden bildiğimiz açı kavramını her boyuta taşımamızı sağlar. x ve y, $\mathbb{R}^n$'nin sıfırdan farklı iki vektörü olsun. Teorem 1.1 gereği $| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \| y \|$, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \| y \|} \leq 1$$

olur. Düzlemde bu oranın anlamını kosinüs teoremi verir. Kenarları x, y ve $x-y$ olan üçgende x ile y arasındaki açı θ ise kosinüs teoremi

$$\| x-y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| x \| \| y \| \cos\theta$$

eşitliğini verir. Öte yandan Lemma 1.1 gereği

$$\| x-y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

olur. İkisini karşılaştırınca

$$\langle x, y\rangle = \| x \| \| y \| \cos\theta$$

bulunur. $n \geq 4$ için açıyı çizemeyiz; bu eşitliği tanım olarak alırız.

Tanım 1.8 (İki Vektör Arasındaki Açı). $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ olsun.

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \| y \|}$$

eşitliğini sağlayan tek $\theta \in [0, \pi]$ sayısına x ile y **arasındaki açı** denir; yani $\theta = \arccos \dfrac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \| y \|}$'dir.

Yani açının kosinüsü, iç çarpımın normların çarpımına oranıdır. Tanım anlamlıdır: oran $[-1, 1]$ aralığındadır ve cos fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığını $[-1, 1]$ aralığına birebir ve örten götürdüğünden bu aralıkta tek bir θ vardır, o da arccos değeridir (bkz. Analiz 2). İç çarpımın işareti açının türünü belirler: $\langle x, y\rangle > 0$ ise θ dar açıdır, $\langle x, y\rangle < 0$ ise geniş açıdır, $\langle x, y\rangle = 0$ ise $\theta = \dfrac{\pi}{2}$'dir. İç çarpımın "iki vektör arasındaki açıyı ölçtüğü" söylenir.

Örnek 1.4 (Düzlemde İki Vektör Arasındaki Açı). $\mathbb{R}^2$'de $x = (3, 1)$ ile $y = (1, 2)$ arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm.
İç çarpım ve normlar:

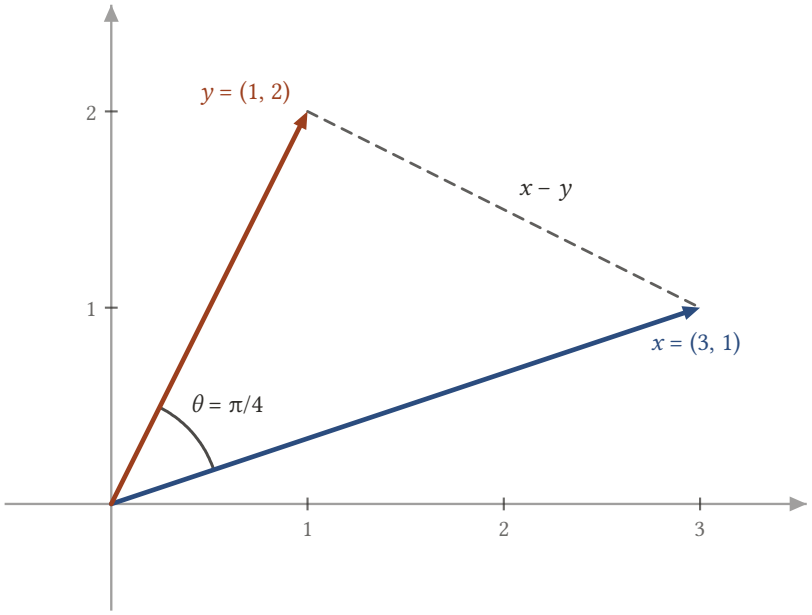
$$\langle x, y\rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5,$$
$$\| x \| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10},$$
$$\| y \| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Buradan

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olur. $[0, \pi]$ aralığında kosinüsü $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ olan tek sayı $\dfrac{\pi}{4}$ olduğundan $\theta = \dfrac{\pi}{4}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.2: $x = (3, 1)$ ile $y = (1, 2)$ arasındaki açı $\theta = \pi/4$'tür. Kesikli kenar, kosinüs teoreminin kullandığı üçgenin üçüncü kenarıdır; uzunluğu $\|x - y\| = \sqrt{5}$'tir.

■

Örnek 1.5 (Uzayda İki Vektör Arasındaki Açı). $\mathbb{R}^3$'te $x = (1, 0, 1)$ ile $y = (0, 1, 1)$ arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm.
$\langle x, y\rangle = 1$, $\| x \| = \sqrt{2}$ ve $\| y \| = \sqrt{2}$ olduğundan

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

olur. $[0, \pi]$ aralığında kosinüsü $\frac{1}{2}$ olan tek sayı $\frac{\pi}{3}$'tür; $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Sonuç geometrik olarak da görülür: $x - y = (1, -1, 0)$ ve $\| x - y \| = \sqrt{2}$ olduğundan orijin, x ve y noktalarının oluşturduğu üçgenin üç kenarı da $\sqrt{2}$ uzunluğundadır. Eşkenar üçgenin her açısı $\frac{\pi}{3}$'tür. ■

Açının $\frac{\pi}{2}$ olduğu durum özel bir ad alır.

Tanım 1.9 (Diklik). $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, y\rangle = 0$ ise x ile y **diktir** denir ve $x \perp y$ yazılır.

Yani sıfırdan farklı iki vektör için diklik, aralarındaki açının $\frac{\pi}{2}$ olmasıdır: $\cos\theta = 0$ ve $\theta \in [0, \pi]$ olması $\theta = \frac{\pi}{2}$ demektir. $\langle 0, y\rangle = 0$ olduğundan sıfır vektörü her vektöre diktir. Doğal tabanın vektörleri birbirine diktir: $i \neq j$ ise $\langle e_i, e_j\rangle = 0$'dır. Örneğin $\mathbb{R}^3$'te

$$\langle (1, 2, -1), (3, -1, 1)\rangle = 3 - 2 - 1 = 0$$

olduğundan bu iki vektör diktir.

Sonuç 1.1 (Pisagor Teoremi). *$x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x \perp y$ olması, $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$ olmasına denktir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Lemma 1.1 gereği

$$\| x+y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 = 2\langle x, y\rangle$$

olur. Sol yanın 0 *olması,* $\langle x, y\rangle = 0$ *olmasına denktir.* ■

1.7 Normun Temel Özellikleri

Mutlak değerin analizde en çok kullandığımız dört özelliği Öklid normunda da aynen geçerlidir.

Teorem 1.2 (Öklid Normunun Özellikleri). *Her* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *ve her* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için aşağıdakiler geçerlidir.*

1. $\| x \| \geq 0$.
2. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \|$.
4. $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(üçgen eşitsizliği).*

İspat.
(1) $\| x \|$*, negatif olmayan bir sayının negatif olmayan kareköküdür.*
(2) $\| x \| = 0$ *olması* $\langle x, x\rangle = 0$ *olmasına denktir; (İ2) gereği bu da* $x = 0$ *olmasına denktir.*
(3) $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} \| \lambda x \| &= \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \ldots + \lambda^2 x_n^2} = \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \\ &= | \lambda | \, \| x \| . \end{aligned}$$

(4) *Lemma 1.1,* $\langle x, y\rangle \leq | \langle x, y\rangle |$ *ve Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) ile*

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \| x \|^2 + 2\langle x, y\rangle + \| y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2 | \langle x, y\rangle | + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \, \| y \| + \| y \|^2 = \left(\| x \| + \| y \| \right)^2 \end{aligned}$$

olur. İki yan negatif olmayan sayıların kareleridir ve karekök fonksiyonu $[0, \infty)$ *üzerinde artandır; öyleyse* $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$*'dir.* ■

Üçgen eşitsizliğinin adı geometrisinden gelir: kenarları x, y ve $x+y$ olan üçgende bir kenarın uzunluğu, öbür iki kenarın uzunlukları toplamını aşamaz. Mutlak değerde olduğu gibi üçgen eşitsizliğinden ters yönde bir eşitsizlik de çıkar (bkz. Analiz 1).

Sonuç 1.2 (Ters Üçgen Eşitsizliği). *Her* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *için* $\left| \, \| x \| - \| y \| \, \right| \leq \| x - y \|$ *olur.*

İspat.
$x = (x-y) + y$ *yazıp üçgen eşitsizliğini uygulayalım:*

$$\| x \| = \| (x-y) + y \| \leq \| x - y \| + \| y \| .$$

Buradan

$$\| x \| - \| y \| \leq \| x - y \| \tag{1}$$

çıkar. Aynı şeyi $y = (y-x) + x$ *için yapalım. Teorem 1.2 (3) gereği*

$$\| y - x \| = \| (-1)(x-y) \| = \| x - y \|$$

olduğundan $\| y \| \leq \| x - y \| + \| x \|$*, yani* $\| y \| - \| x \| \leq \| x - y \|$ *olur. Bu eşitsizliği* -1 *ile çarparsak*

$$- \| x - y \| \leq \| x \| - \| y \| \tag{2}$$

elde ederiz. (1) ve (2) birlikte

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-\parallel x-y \parallel \leq \parallel x \parallel - \parallel y \parallel \leq \parallel x-y \parallel$$

demektir; mutlak değerin özellikleri (bkz. Analiz 1) gereği bu, $\left| \parallel x \parallel - \parallel y \parallel \right| \leq \parallel x-y \parallel$ *ile aynıdır.* ■

Yani iki noktanın orijine uzaklıkları arasındaki fark, bu iki noktayı birleştiren vektörün uzunluğunu aşamaz.
Norm yalnız uzunluk taşıdığından, uzunluğu 1 olan vektörler doğrultu belirtmek için elverişlidir.

Tanım 1.10 (Birim Vektör). Normu 1 olan vektöre **birim vektör** denir.

Yani birim vektör yalnız bir doğrultu taşır. Sıfırdan farklı her x'ten, doğrultusunu koruyarak bir birim vektör elde edilir: $\dfrac{x}{\parallel x \parallel}$ vektörü x'in $\dfrac{1}{\parallel x \parallel}$ ile çarpımıdır ve Teorem 1.2 (3) gereği

$$\parallel \frac{x}{\parallel x \parallel} \parallel = \frac{1}{\parallel x \parallel} \parallel x \parallel = 1$$

olur. Örneğin $(3,4)$'ün doğrultusundaki birim vektör $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $(1,-2,2)$'ninki ise $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$'dir. Doğal tabanın vektörleri birim vektörlerdir.

1.8 Genel Norm ve Başka Normlar

Öklid normunun kanıtladığımız dört özelliği, bir "uzunluk" kavramından beklediğimiz her şeyi içerir. Bu özellikleri aksiyom olarak alırsak genel norm kavramına ulaşırız.

Tanım 1.11 (Norm). $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
&(\text{N1}) \quad N(x) \geq 0, \\
&(\text{N2}) \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\
&(\text{N3}) \quad N(\lambda x) = \mid \lambda \mid N(x), \\
&(\text{N4}) \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)
\end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa N'ye $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir **norm**, $(\mathbb{R}^n, N)$ ikilisine bir **normlu uzay** denir. (N4)'e **üçgen eşitsizliği** denir.

Yani norm, her vektöre negatif olmayan bir "uzunluk" atayan, yalnız sıfır vektörüne sıfır uzunluk veren, vektör λ ile çarpılınca uzunluğu $\mid \lambda \mid$ ile çarpılan ve üçgen eşitsizliğine uyan bir fonksiyondur. Teorem 1.2 gereği Öklid normu bir normdur ve $(\mathbb{R}^n, \parallel \cdot \parallel)$ bir normlu uzaydır. Ters üçgen eşitsizliğinin ispatında (Sonuç 1.2) yalnız (N3) ve (N4) kullanıldığından, her N normu için de $\mid N(x) - N(y) \mid \leq N(x-y)$ geçerlidir. Normları çoğunlukla $\parallel \cdot \parallel$ simgesine bir alt indis ekleyerek gösteririz. Kısaca söylersek, iç çarpım vektörler arasındaki açıyı, norm ise bir vektörün boyunu ölçer.
$\mathbb{R}^n$'de Öklid normu dışında iki standart norm daha vardır.

Tanım 1.12 (Mutlak Değerler Toplamı: 1-Normu). $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\parallel x \parallel_1 = \sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid = \mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \ldots + \mid x_n \mid$$

sayısına x'in **1-normu** denir.

Yani 1-normu bileşenlerin mutlak değerlerini toplar. Düzlemde $\parallel x \parallel_1$, orijinden x'e yalnız eksenlere paralel adımlarla (dik kesişen sokaklarda yürür gibi) gidilen en kısa yolun uzunluğudur.

Tanım 1.13 (Maksimum Normu). $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\parallel x \parallel_\infty = \max\{\mid x_1 \mid, \mid x_2 \mid, \ldots, \mid x_n \mid\} = \max_{1 \leq k \leq n} \mid x_k \mid$$

 CC BY-NC-SA 4.0

sayısına x'in **maksimum normu** (supremum normu ya da ∞-normu) denir.

Yani maksimum normu, bileşenlerin mutlak değerlerinden en büyüğünü seçer. Örneğin $x = (3, -4, 1)$ için $\| x \|_1 = 8$, $\| x \| = \sqrt{26} \approx 5{,}10$ ve $\| x \|_\infty = 4$'tür: aynı vektörün üç normu üç farklı sayıdır. Bu iki fonksiyonun da norm olduğunu gösterelim.

Önerme 1.3 (Maksimum Normu ve 1-Normu Birer Normdur). *$\| \cdot \|_1$ ve $\| \cdot \|_\infty$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde birer normdur.*

> ***İspat.***
> *$x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. İki fonksiyon da iyi tanımlıdır, çünkü sonlu sayıda reel sayının toplamı ve en büyüğü birer reel sayıdır.*
> ***1-normu.***
> ***(N1)*** *Her $|x_k| \geq 0$ olduğundan $\|x\|_1 \geq 0$'dır.*
> ***(N2)*** *$x = 0$ ise $\|x\|_1 = 0$'dır. Tersine $\|x\|_1 = 0$ ise negatif olmayan $|x_k|$ sayılarının toplamı 0 olduğundan her $|x_k| = 0$, yani $x = 0$'dır.*
> ***(N3)*** *$|\lambda x_k| = |\lambda|\,|x_k|$ olduğundan*
>
> $$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda|\,|x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda|\,\|x\|_1 .$$
>
> ***(N4)*** *Her k için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 1) $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ verir. Bu n eşitsizliği toplarsak $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ olur.*
> ***Maksimum normu.***
> ***(N1)*** *$\|x\|_\infty$, negatif olmayan sayıların en büyüğüdür; negatif olamaz.*
> ***(N2)*** *$x = 0$ ise $\|x\|_\infty = 0$'dır. Tersine $\|x\|_\infty = 0$ ise her k için $0 \leq |x_k| \leq \|x\|_\infty = 0$ olur; buradan $x = 0$ çıkar.*
> ***(N3)*** *$|\lambda x_k| = |\lambda|\,|x_k|$'dir ve negatif olmayan $|\lambda|$ ile çarpmak sıralamayı korur. En büyük $|x_k|$ hangi indisteyse en büyük $|\lambda x_k|$ de o indistedir; dolayısıyla $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\,\|x\|_\infty$'dur.*
> ***(N4)*** *Her k için*
>
> $$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$
>
> *olur. Sağ yan k'ye bağlı olmayan bir üst sınırdır; en büyük eleman da bu sınırı aşamaz. Öyleyse $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$'dur.* ■

1.9 p-Normu, Hölder ve Minkowski Eşitsizlikleri

1-normu ile Öklid normu, tek bir norm ailesinin iki üyesidir.

Tanım 1.14 (p-Normu). $1 \leq p < \infty$ ve $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

sayısına x'in ***p*-normu** denir.

Yani bileşenlerin mutlak değerlerinin p. kuvvetleri toplanır ve toplamın p. kökü alınır. $p = 1$ için 1-normu, $p = 2$ için Öklid normu elde edilir: $\|x\|_2 = \|x\|$. Örneğin $x = (3, -4, 1)$ için

$$\|x\|_3 = \left(27 + 64 + 1 \right)^{1/3} = \sqrt[3]{92} \approx 4{,}51$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $\|\cdot\|_p$'nin (N1)–(N3) koşullarını sağladığını görmek kolaydır; asıl iş üçgen eşitsizliğidir. Bunun için önce Cauchy–Schwarz eşitsizliğinin bir genellemesine ihtiyacımız var. Analiz 2'de integraller için gördüğümüz Hölder eşitsizliğinin (bkz. Analiz 2) toplamlar için karşılığı şudur.

Teorem 1.3 (Hölder Eşitsizliği). *$p, q > 1$ sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bağıntısını sağlasın. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\sum_{k=1}^{n} |\, x_k y_k \,| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\, y_k \,|^q \right)^{1/q}$$

olur. Kısaca $\sum_k |\, x_k y_k \,| \leq \|\, x \,\|_p \, \|\, y \,\|_q$ yazılır.

> ***İspat.***
> ***Vektörlerden biri sıfırken.*** *$\|\, x \,\|_p = 0$ ise negatif olmayan $|\, x_k \,|^p$ sayılarının toplamı 0 olduğundan her $x_k = 0$'dır. Sol yan 0 olur ve eşitsizlik $0 \leq 0$ biçiminde sağlanır. $\|\, y \,\|_q = 0$ durumu aynıdır.*
>
> ***İkisi de sıfırdan farklıyken.*** *Her k için $a_k = \dfrac{|\, x_k \,|}{\|\, x \,\|_p}$ ve $b_k = \dfrac{|\, y_k \,|}{\|\, y \,\|_q}$ yazalım. Young eşitsizliği (bkz. Analiz 2) her $a, b \geq 0$ için $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ verir. Bunu her k için a_k, b_k çiftine uygulayıp toplayalım:*
>
> $$\begin{aligned} \frac{1}{\|\, x \,\|_p \, \|\, y \,\|_q} \sum_{k=1}^{n} |\, x_k y_k \,| &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} b_k^q \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_k |\, x_k \,|^p}{\|\, x \,\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_k |\, y_k \,|^q}{\|\, y \,\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$
>
> *Son adımda $\|\, x \,\|_p^p = \sum_k |\, x_k \,|^p$ ve $\|\, y \,\|_q^q = \sum_k |\, y_k \,|^q$ olduğu kullanıldı. İki yanı pozitif $\|\, x \,\|_p \, \|\, y \,\|_q$ sayısıyla çarparak istenen eşitsizliği buluruz.* ■

$p = 2$ ve $q = 2$ için Hölder eşitsizliği, Cauchy–Schwarz eşitsizliğinin (Teorem 1.1) ikinci kısmıdır. $p = 1$ ile $q = \infty$ uç ikilisi için de benzer bir eşitsizlik vardır ve ispatı tek satırdır: her k için $|\, x_k y_k \,| = |\, x_k \,|\,|\, y_k \,| \leq |\, x_k \,| \, \|\, y \,\|_\infty$ olduğundan, toplayınca $\sum_k |\, x_k y_k \,| \leq \|\, x \,\|_1 \, \|\, y \,\|_\infty$ bulunur.

Teorem 1.4 (Minkowski Eşitsizliği). *$1 \leq p < \infty$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\|\, x + y \,\|_p \leq \|\, x \,\|_p + \|\, y \,\|_p$, yani*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k + y_k \,|^p \right)^{1/p} \leq{}& \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,|^p \right)^{1/p} \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{n} |\, y_k \,|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

olur.

> ***İspat.***
> ***$p = 1$.*** *Bu, 1-normunun üçgen eşitsizliğidir (Önerme 1.3).*
> ***$p > 1$.*** *$q = \dfrac{p}{p-1}$ alalım. $q > 1$ ve $(p-1)q = p$'dir; ayrıca*
>
> $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

olduğundan p ile q Hölder eşitsizliğinin koşulunu sağlar. Kısaltma olarak

$$S = \sum_{k=1}^{n} |\, x_k + y_k \,|^p$$

yazalım; $S = \| x + y \|_p^p$'dir. $S = 0$ ise sol yan 0'dır ve eşitsizlik açıktır. Bundan sonra $S > 0$ olsun.

Adım 1: Terimleri ikiye ayıralım. *$p - 1 > 0$ olduğundan $|\, x_k + y_k \,|^{p-1} \geq 0$'dır ve bu sayıyla çarpmak eşitsizliğin yönünü korur. Üçgen eşitsizliğiyle her k için*

$$\begin{aligned} |\, x_k + y_k \,|^p &= |\, x_k + y_k \,|\, |\, x_k + y_k \,|^{p-1} \\ &\leq |\, x_k \,|\, |\, x_k + y_k \,|^{p-1} + |\, y_k \,|\, |\, x_k + y_k \,|^{p-1} \end{aligned}$$

olur. k üzerinden toplarsak

$$S \leq \sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,|\, |\, x_k + y_k \,|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |\, y_k \,|\, |\, x_k + y_k \,|^{p-1} \tag{3}$$

bulunur.

Adım 2: Hölder eşitsizliğini uygulayalım. *Bileşenleri $w_k = |\, x_k + y_k \,|^{p-1}$ olan $w = (w_1, \ldots, w_n)$ vektörünü düşünelim. $(p-1)q = p$ olduğundan*

$$\| w \|_q = \left(\sum_{k=1}^{n} |\, x_k + y_k \,|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = S^{1/q}$$

olur. Hölder eşitsizliği (Teorem 1.3) x ile w'ye ve y ile w'ye uygulanınca (3)'teki iki toplam sırasıyla $\| x \|_p$ $S^{1/q}$ ve $\| y \|_p S^{1/q}$ ile sınırlanır:

$$S \leq \left(\| x \|_p + \| y \|_p \right) S^{1/q}.$$

Adım 3: Sadeleştirelim. *$S > 0$ olduğundan iki yanı $S^{1/q} > 0$ sayısına bölebiliriz: $S^{1-1/q} \leq \| x \|_p + \| y \|_p$. $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ ve $S^{1/p} = \| x + y \|_p$ olduğundan istenen eşitsizlik çıkar.* ■

Minkowski eşitsizliğinin integraller için $p = 2$ biçimini Analiz 2'de görmüştük (bkz. Analiz 2).

Önerme 1.4 (p-Normu Bir Normdur). *Her $1 \leq p < \infty$ için $\| \cdot \|_p, \mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur.*

İspat.
$x \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ keyfi olsun.
(N1) *Negatif olmayan bir sayının $\frac{1}{p}$. kuvveti negatif değildir.*
(N2) *$x = 0$ ise $\| x \|_p = 0$'dır. Tersine $\| x \|_p = 0$ ise $\sum_k |\, x_k \,|^p = 0$ olur; negatif olmayan terimlerin her biri 0 olduğundan her $x_k = 0$'dır.*
(N3) *$|\, \lambda x_k \,|^p = |\, \lambda \,|^p |\, x_k \,|^p$ olduğundan*

$$\| \lambda x \|_p = \left(|\, \lambda \,|^p \sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,|^p \right)^{1/p} = |\, \lambda \,| \, \| x \|_p$$

olur; burada negatif olmayan a, b için $(ab)^{1/p} = a^{1/p} b^{1/p}$ kuralı kullanıldı.
(N4) *Bu, Minkowski eşitsizliğidir (Teorem 1.4).* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

$n \geq 2$ iken $p \geq 1$ koşulu gereklidir ($n = 1$'de formül her $p > 0$ için $\mid x \mid$ değerini verir). Aynı formülü $p = \dfrac{1}{2}$ için yazarsak $\mathbb{R}^2$'de (N4) bozulur: $e_1 + e_2 = (1,1)$ için formül $\left(1^{1/2} + 1^{1/2}\right)^2 = 4$ değerini, e_1 ve e_2 için ise 1 değerini verir; $4 > 1 + 1$'dir.

1.10 Denk Normlar

Aynı vektörün farklı normları farklı sayılar verse de, bu sayılar birbirinden çok uzaklaşamaz.

Tanım 1.15 (Denk Normlar). $\|\cdot\|_a$ ve $\|\cdot\|_b$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde iki norm olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$c_1 \| x \|_a \leq \| x \|_b \leq c_2 \| x \|_a$$

olacak biçimde $c_1, c_2 > 0$ sabitleri varsa bu iki norma **denk normlar** denir.

Yani denk iki normdan biri küçükse öbürü de küçüktür, biri büyükse öbürü de büyüktür; aralarındaki oran, x'ten bağımsız iki pozitif sayı arasında kalır. Tanım iki norma göre simetriktir: eşitsizlikleri düzenlersek

$$\frac{1}{c_2} \| x \|_b \leq \| x \|_a \leq \frac{1}{c_1} \| x \|_b$$

olur. Denklik geçişlidir de: $c_1 \| x \|_a \leq \| x \|_b \leq c_2 \| x \|_a$ ve $d_1 \| x \|_b \leq \| x \|_c \leq d_2 \| x \|_b$ ise

$$c_1 d_1 \| x \|_a \leq \| x \|_c \leq c_2 d_2 \| x \|_a$$

bulunur. İleride tanımlayacağımız yakınsaklık, açık küme ve kapalı küme gibi kavramlar "küçüklük" üzerine kurulduğundan, denk normlardan birine göre sağlanan bu türden bir özellik öbürüne göre de sağlanacaktır.

Teorem 1.5 (Üç Normun Denkliği). *Her $x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\begin{aligned} \| x \|_\infty &\leq \| x \| \leq \sqrt{n} \| x \|_\infty, \\ \| x \| &\leq \| x \|_1 \leq \sqrt{n} \| x \|, \\ \| x \|_\infty &\leq \| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_\infty$ normları $\mathbb{R}^n$ üzerinde ikişer ikişer denktir.

> ***İspat.***
> *$x \in \mathbb{R}^n$ keyfi olsun ve $\| x \|_\infty = \mid x_j \mid$ olacak biçimde bir j indisi seçelim.*
>
> ***Birinci satır.*** *Öbür terimler negatif olmadığından*
>
> $$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq x_j^2 = \| x \|_\infty^2$$
>
> *olur; karekök alınınca $\| x \|_\infty \leq \| x \|$ bulunur. Öte yandan her k için $x_k^2 = \mid x_k \mid^2 \leq \| x \|_\infty^2$ olduğundan*
>
> $$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \| x \|_\infty^2 = n \| x \|_\infty^2,$$
>
> *yani $\| x \| \leq \sqrt{n} \| x \|_\infty$'dur.*
>
> ***İkinci satır.*** *Toplamın karesini açarsak*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| x \|_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k | \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} | x_k |^2 + 2 \sum_{i<j} | x_i | | x_j |$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \| x \|_2^2$$

olur, çünkü karma terimler negatif değildir; karekök alınınca $\| x \|_2 \leq \| x \|_1$ *bulunur. Sağdaki eşitsizlik için Cauchy–Schwarz eşitsizliğini (Teorem 1.1)*

$$u = (| x_1 |, \ldots, | x_n |),$$
$$v = (1, 1, \ldots, 1)$$

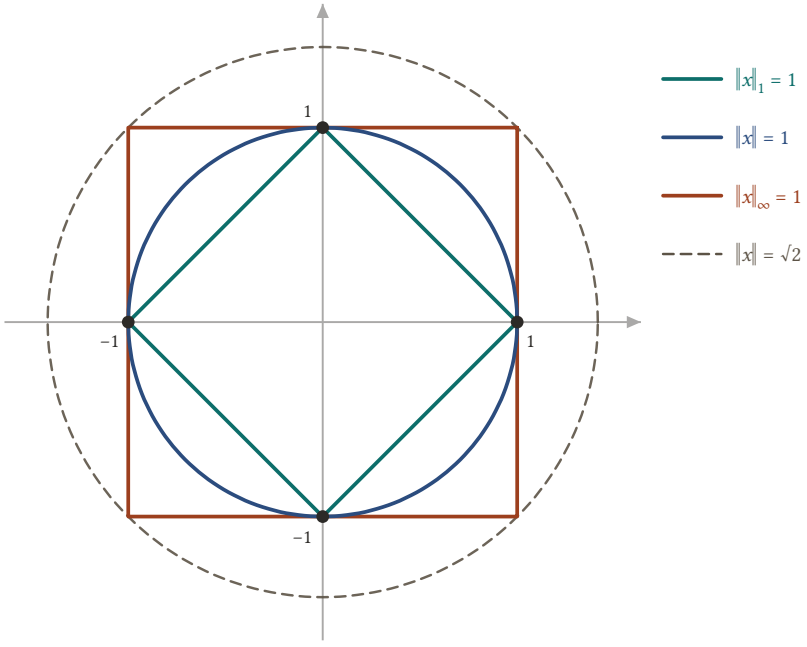
vektörlerine uygulayalım. $\| u \| = \| x \|_2$ *ve* $\| v \| = \sqrt{n}$ *olduğundan*

$$\| x \|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k | \cdot 1 = \langle u, v \rangle \leq \| u \| \, \| v \| = \sqrt{n} \, \| x \|_2$$

olur.

Üçüncü satır. $\| x \|_\infty = | x_j |$ *sayısı,* $\| x \|_1$ *toplamının terimlerinden biridir ve öbür terimler negatif değildir; öyleyse* $\| x \|_\infty \leq \| x \|_1$*'dir. Her* k *için* $| x_k | \leq \| x \|_\infty$ *olduğundan bu* n *eşitsizliği toplayınca* $\| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty$ *bulunur.*

Her satır, Tanım 1.15 koşulunu uygun sabitlerle verir; örneğin birinci satırda $c_1 = 1$ *ve* $c_2 = \sqrt{n}$*'dir. Satırların sol yanları geometrik olarak da okunabilir.* $\mathbb{R}^2$*'de* $\| x \|_1 = 1$ *eşitliğini sağlayan noktalar köşeleri* $(\pm 1, 0)$ *ve* $(0, \pm 1)$ *olan bir kare,* $\| x \|_2 = 1$ *eşitliğini sağlayanlar birim çember,* $\| x \|_\infty = 1$ *eşitliğini sağlayanlar ise köşeleri* $(\pm 1, \pm 1)$ *olan bir karedir.* $\| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \| x \|_1$ *eşitsizlikleri bu üç eğrinin iç içe durduğunu söyler: en içte köşeleri eksenler üzerindeki kare, ortada çember, en dışta kenarları eksenlere paralel kare vardır.*



Şekil 1.3: En içte $\|x\|_1 = 1$ *karesi, ortada* $\|x\| = 1$ *birim çemberi, en dışta* $\|x\|_\infty = 1$ *karesi vardır; üçü* $(\pm 1, 0)$ *ve* $(0, \pm 1)$ *noktalarında birbirine değer. Kesikli* $\|x\| = \sqrt{2}$ *çemberi dış karenin köşelerinden geçer.*

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Sabitler iyileştirilemez. $x = e_1$ için üç norm da 1'dir; bu, bütün sol eşitsizliklerin eşitlikle sağlanabildiğini gösterir. $x = (1, 1, \ldots, 1)$ için ise $\| x \|_\infty = 1$, $\| x \| = \sqrt{n}$ ve $\| x \|_1 = n$ olur; bütün sağ eşitsizlikler de eşitlikle sağlanabilir. Sayısal bir örnek olarak $x = (3, -4, 1)$ ($n = 3$) için üç satır

$$\begin{aligned} 4 &\le \sqrt{26} \le 4\sqrt{3}, \\ \sqrt{26} &\le 8 \le \sqrt{78}, \\ 4 &\le 8 \le 12 \end{aligned}$$

biçimini alır ($\sqrt{26} \approx 5{,}10$, $4\sqrt{3} \approx 6{,}93$, $\sqrt{78} \approx 8{,}83$).

1.11 Paralelkenar ve Kutuplama Özdeşlikleri

Her iç çarpımın bir uzunluk ürettiğini gördük; peki her norm bir iç çarpımdan mı gelir? Yanıtı, iç çarpımdan gelen uzunlukların sağlamak zorunda olduğu bir özdeşlik verir.

Önerme 1.5 (Paralelkenar ve Kutuplama Özdeşlikleri). *$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım ve $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2\,\big(\, N(x)^2 + N(y)^2 \,\big) \tag{4}$$

*(**paralelkenar özdeşliği**) ve*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\,\big(\, N(x+y)^2 - N(x-y)^2 \,\big) \tag{5}$$

*(**kutuplama özdeşliği**) geçerlidir. Özel olarak standart iç çarpım ve Öklid normu için*

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 &= 2\,\big(\, \| x \|^2 + \| y \|^2 \,\big), \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}\,\big(\, \| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 \,\big) \end{aligned}$$

olur.

İspat.
Lemma 1.1 ispatının yalnız (İ3) ve (İ4)'e dayandığını belirtmiştik; aynı hesap herhangi bir iç çarpım için

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 &= N(x)^2 + 2\langle x, y \rangle + N(y)^2, \\ N(x-y)^2 &= N(x)^2 - 2\langle x, y \rangle + N(y)^2 \end{aligned}$$

verir. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak $\langle x, y \rangle$ terimleri birbirini götürür ve (4) elde edilir. Taraf tarafa çıkarırsak $N(x+y)^2 - N(x-y)^2 = 4\langle x, y \rangle$ bulunur; iki yanı 4'e bölmek (5)'i verir. Standart iç çarpım için $N(x) = \| x \|$'dir. ■

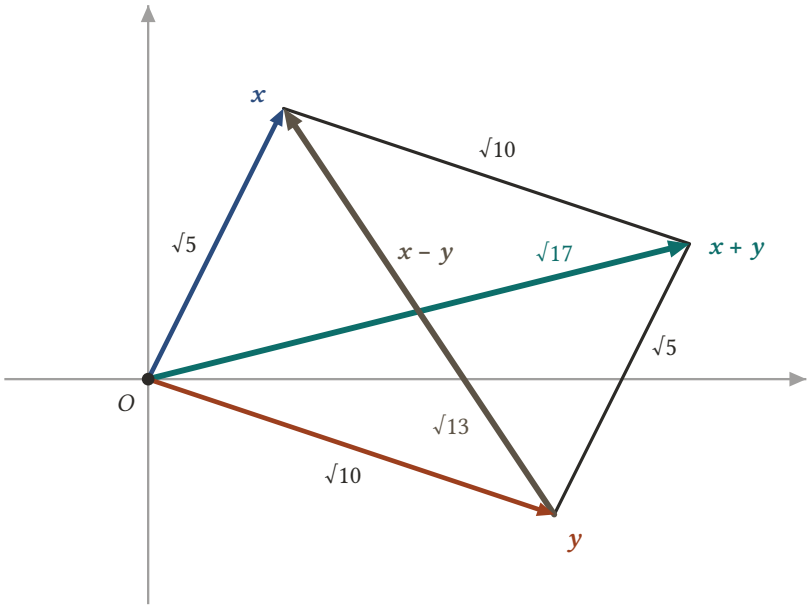
Paralelkenar özdeşliğinin adı geometrisinden gelir: kenarları x ve y olan paralelkenarın köşegenleri $x + y$ ve $x - y$'dir. Özdeşlik, iki köşegenin uzunluklarının kareleri toplamının dört kenarın uzunluklarının kareleri toplamına eşit olduğunu söyler.

Örnek 1.6 (İki Özdeşliğin Sayısal Denetimi). $x = (1, 2)$ ve $y = (3, -1)$ için paralelkenar ve kutuplama özdeşliklerinin sağlandığını doğrulayınız.

Çözüm.
$x + y = (4, 1)$ ve $x - y = (-2, 3)$'tür. Normların kareleri

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= 16+1 = 17, \\ \| x-y \|^2 &= 4+9 = 13, \\ \| x \|^2 &= 1+4 = 5, \\ \| y \|^2 &= 9+1 = 10 \end{aligned}$$

olur. Paralelkenar özdeşliğinin iki yanı $17+13 = 30$ ve $2(5+10) = 30$'dur; eşittir. Kutuplama özdeşliğinin sağ yanı $\frac{1}{4}(17-13) = 1$'dir; sol yan da $\langle x, y\rangle = 1\cdot 3 + 2\cdot(-1)$, yani 1'dir.



Şekil 1.4: $x = (1, 2)$ ve $y = (3, -1)$ üzerine kurulan paralelkenar. Kenar uzunlukları $\sqrt{5}$ ve $\sqrt{10}$, köşegenler $x + y$ ($\sqrt{17}$) ve $x - y$ ($\sqrt{13}$) uzunluğundadır: $17 + 13 = 2(5 + 10)$.

■

Kutuplama özdeşliği, iç çarpımın normdan geri elde edilebileceğini söyler: bir norm bir iç çarpımdan geliyorsa, o iç çarpım yalnız normla belirlenir ve $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2 \right)$ formülüyle üretilir. Paralelkenar özdeşliği ise bir normun iç çarpımdan gelmesi için gerek koşuldur: bir norm paralelkenar özdeşliğini sağlamıyorsa, her x için $N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ olacak biçimde hiçbir iç çarpım bulunamaz. Tersinin de doğru olduğu bilinmektedir: paralelkenar özdeşliğini sağlayan bir normda kutuplama formülüyle tanımlanan fonksiyon bir iç çarpımdır (Jordan–von Neumann teoremi). Bu yönün ispatı uzundur ve kitapta kullanılmayacaktır.

Örnek 1.7 (İç Çarpımdan Gelmeyen Bir Norm). $n \geq 2$ olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde, her x için $\| x \|_1 = \sqrt{\langle x, x\rangle_*}$ olacak biçimde bir $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ iç çarpımının bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Böyle bir iç çarpım olsaydı Önerme 1.5 gereği 1-normu paralelkenar özdeşliğini sağlardı. $x = e_1$ ve $y = e_2$ alalım. $x + y = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ ve $x - y = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| x+y \|_1^2 + \| x-y \|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8,$$
$$2\left(\| x \|_1^2 + \| y \|_1^2 \right) = 2(1+1) = 4$$

bulunur. $8 \neq 4$ olduğundan özdeşlik bozulur; demek ki 1-normu hiçbir iç çarpımdan gelmez.
$n = 1$ durumu farklıdır: orada $\| x \|_1 = | x |$ ve $| x | = \sqrt{x \cdot x}$ olduğundan 1-normu, $\mathbb{R}$'nin standart iç çarpımından gelir. Paralelkenar özdeşliğinin bozulması için en az iki bağımsız doğrultu gerekir. ■

1.12 Alıştırmalar

Alıştırma 1.1 (Uzayda Açının Kosinüsü). $\mathbb{R}^3$'te $x = (2,-1,3)$ ile $y = (1,4,-2)$ arasındaki θ açısının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm.
İç çarpım ve normlar.

$$\langle x, y \rangle = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 3\cdot(-2) = 2 - 4 - 6 = -8,$$
$$\| x \| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14},$$
$$\| y \| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}.$$

Kosinüs. $\sqrt{14}\sqrt{21} = \sqrt{294}$ ve $294 = 49 \cdot 6$ olduğundan normların çarpımı $7\sqrt{6}$'dır. Öyleyse

$$\cos\theta = \frac{-8}{7\sqrt{6}} = -\frac{8\sqrt{6}}{42} = -\frac{4\sqrt{6}}{21} \approx -0{,}467$$

olur. Kosinüs negatif olduğundan θ geniş bir açıdır:

$$\theta = \arccos\left(-\frac{4\sqrt{6}}{21}\right) \approx 2{,}06 \ \text{ radyan},$$

yani yaklaşık $117{,}8^\circ$'dir. ■

Alıştırma 1.2 (Diklik Koşulundan Parametre). $a \in \mathbb{R}$ sayısının hangi değeri için $(a,2,-1)$ ile $(3,a,4)$ vektörleri diktir?

Çözüm.
Diklik, iç çarpımın 0 olmasıdır (Tanım 1.9):

$$\langle (a,2,-1), (3,a,4) \rangle = 3a + 2a - 4 = 5a - 4.$$

$5a - 4 = 0$ denkleminin tek çözümü $a = \dfrac{4}{5}$'tir. Denetleyelim: $a = \dfrac{4}{5}$ için iç çarpım $\dfrac{12}{5} + \dfrac{8}{5} - 4 = 0$'dır. İki vektör yalnız $a = \dfrac{4}{5}$ için diktir. ■

Alıştırma 1.3 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliğinde Eşitlik). $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $| \langle x, y \rangle | = \| x \| \, \| y \|$ olmasının gerek ve yeter koşulunun, x ile y'den birinin öbürünün skaler katı olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Yeter koşul. $y = \lambda x$ olsun. Önerme 1.2 ve Teorem 1.2 (3) gereği

$$| \langle x, \lambda x \rangle | = | \lambda | \, \| x \|_1^2 = \| x \| \left(| \lambda | \, \| x \| \right) = \| x \| \, \| \lambda x \|$$

olur. $x = \lambda y$ durumu, x ile y'nin rolleri değiştirilerek aynı biçimde görülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerek koşul. $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ olsun. $x=0$ ise $x = 0\cdot y$, $y=0$ ise $y = 0\cdot x$'tir ve söylenecek bir şey yoktur. Şimdi $x\neq 0$ ve $y\neq 0$ olsun. Varsayım gereği $\langle x,y\rangle = s\,\|x\|\,\|y\|$ olacak biçimde bir $s\in\{1,-1\}$ vardır. $w = \|y\|\,x - s\,\|x\|\,y$ vektörünün normunun karesini Lemma 1.1 ile hesaplayalım ($s^2=1$):

$$\begin{aligned}\|w\|^2 &= \|y\|^2\|x\|^2 - 2s\,\|x\|\,\|y\|\,\langle x,y\rangle + s^2\,\|x\|^2\|y\|^2\\ &= 2\,\|x\|^2\|y\|^2 - 2s^2\,\|x\|^2\|y\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Teorem 1.2 (2) gereği $w=0$, yani $\|y\|\,x = s\,\|x\|\,y$'dir. $\|x\|>0$ olduğundan

$$y = \frac{s\,\|y\|}{\|x\|}\,x$$

bulunur; y, x'in bir skaler katıdır.
Açı diliyle: sıfırdan farklı x ve y için $\theta = 0$ olması ($s=1$) y'nin x'in pozitif bir katı olmasına, $\theta=\pi$ olması ($s=-1$) negatif bir katı olmasına denktir. ■

Alıştırma 1.4 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliğiyle En Büyük Değer). $x^2+y^2+z^2=1$ koşulunu sağlayan (x,y,z) noktaları üzerinde $2x+3y-z$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm.
Üst sınır. $u=(x,y,z)$ ve $v=(2,3,-1)$ yazalım. O zaman $2x+3y-z=\langle u,v\rangle$ ve $\|u\|=1$ olur; ayrıca $\|v\|^2 = 4+9+1$ olduğundan $\|v\| = \sqrt{14}$'tür. Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) gereği

$$2x+3y-z = \langle u,v\rangle \le |\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\| = \sqrt{14}$$

olur.
Sınıra ulaşılır. Alıştırma 1.3 gereği eşitlik ancak u, v'nin pozitif bir katıyken olabilir; $\|u\|=1$ koşulu $u = \dfrac{v}{\|v\|}$ seçimini verir:

$$u = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1).$$

Bu nokta koşulu sağlar, çünkü $\|u\|=1$'dir. Bu noktada

$$\langle u,v\rangle = \frac{\langle v,v\rangle}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

olur. Öyleyse aranan en büyük değer $\sqrt{14}$'tür. ■

Alıştırma 1.5 (Eşit Köşegenli Paralelkenar). $x,y\in\mathbb{R}^n$ için $\|x+y\| = \|x-y\|$ olmasının $x\perp y$ olmasına denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Lemma 1.1 içindeki iki eşitliği taraf tarafa çıkaralım:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle.$$

Normlar negatif olmadığından $\|x+y\| = \|x-y\|$ olması, kareleri $\|x+y\|^2 = \|x-y\|^2$ olmasına denktir. Yukarıdaki eşitlik gereği bu da $\langle x,y\rangle = 0$, yani $x\perp y$ olmasına denktir.
Geometrik olarak: bir paralelkenarın köşegenleri ancak ve ancak kenarları dikken, yani paralelkenar bir dikdörtgenken eşit uzunluktadır. ■

Alıştırma 1.6 (Standart Olmayan Bir İç Çarpım). $x=(x_1,x_2)$ ve $y=(y_1,y_2)$ için

$$\langle x, y\rangle_* = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

ile tanımlanan fonksiyonun $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Fonksiyon mu? Sağ yan, reel sayıların sonlu sayıda çarpım ve toplamıdır; her (x, y) ikilisine tek bir reel sayı karşılık gelir.
(İ1) ve (İ2). Tam kareye tamamlayalım:

$$\langle x, x\rangle_* = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.$$

İki karenin toplamı ancak ikisi de 0 iken 0'dır: $\langle x, x\rangle_* = 0$ ise $x_2 = 0$ ve $x_1 + x_2 = 0$, dolayısıyla $x_1 = 0$ ve $x = 0$'dır. Tersine $x = 0$ ise açıkça $\langle x, x\rangle_* = 0$'dır.
(İ3). Tanımda x ile y'nin yerini değiştirirsek

$$\langle y, x\rangle_* = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2$$

olur. Buradaki y_1x_2 ve y_2x_1 terimleri, $\langle x, y\rangle_*$ tanımındaki x_2y_1 ve x_1y_2 terimleridir; öbür iki terim zaten aynıdır. Öyleyse iki değer eşittir ve (İ3) sağlanır.
(İ4). Tanımdaki terimleri z'nin bileşenlerine göre gruplarsak her x ve $z = (z_1, z_2)$ için

$$\langle x, z\rangle_* = x_1(z_1 + z_2) + x_2(z_1 + 2z_2)$$

yazılabilir. $\alpha x + \beta y$'nin bileşenleri $\alpha x_1 + \beta y_1$ ve $\alpha x_2 + \beta y_2$ olduğundan dağılma özelliğiyle

$$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, z\rangle_* &= (\alpha x_1 + \beta y_1)(z_1 + z_2) + (\alpha x_2 + \beta y_2)(z_1 + 2z_2)\\ &= \alpha\left[\, x_1(z_1 + z_2) + x_2(z_1 + 2z_2)\,\right]\\ &\quad +\beta\left[\, y_1(z_1 + z_2) + y_2(z_1 + 2z_2)\,\right]\\ &= \alpha\langle x, z\rangle_* + \beta\langle y, z\rangle_*\end{aligned}$$

olur.
Dört koşul da sağlandığından $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ bir iç çarpımdır. Diklik ve uzunluk seçilen iç çarpıma bağlıdır: $\langle e_1, e_2\rangle_* = 1 \neq 0$ olduğundan e_1 ile e_2 bu iç çarpıma göre dik değildir ve e_2'nin bu iç çarpımdan gelen uzunluğu $\sqrt{\langle e_2, e_2\rangle_*} = \sqrt{2}$'dir. ■

Alıştırma 1.7 (Her İç Çarpım Bir Norm Üretir). $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi bir iç çarpım olsun. $N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ile tanımlanan N fonksiyonunun bir norm olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
(İ1) gereği karekök tanımlıdır. Bileşenleri kullanamayacağımız için önce Cauchy–Schwarz eşitsizliğini yalnız aksiyomlarla kanıtlayacağız. Lemma 1.1 ispatındaki hesap yalnız (İ3) ve (İ4)'e dayandığından her x, y için

$$N(x + y)^2 = N(x)^2 + 2\langle x, y\rangle + N(y)^2$$

geçerlidir.
Adım 1: Cauchy–Schwarz eşitsizliği. $|\,\langle x, y\rangle\,| \leq N(x)\,N(y)$ olduğunu gösterelim. $y = 0$ ise $\langle x, 0\rangle = 0$ olduğundan eşitsizlik $0 \leq 0$'dır. $y \neq 0$ olsun; (İ1) ve (İ2) gereği $\langle y, y\rangle > 0$'dır. Her $t \in \mathbb{R}$ için yukarıdaki açılım y yerine ty ile uygulanırsa

$$0 \leq N(x + ty)^2 = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$$

olur. $t = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ seçelim:

$$0 \leq \langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle}.$$

İki yanı pozitif $\langle y, y\rangle$ ile çarparsak $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle$ olur; karekök alınınca $|\,\langle x, y\rangle\,| \leq N(x)\,N(y)$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Norm koşulları.
(N1) $N(x)$, negatif olmayan bir sayının karekökü̈dür.
(N2) $N(x) = 0$ olması $\langle x, x\rangle = 0$ olmasına, bu da (İ2) gereği $x = 0$ olmasına denktir.
(N3) (İ4) ve ikinci bileşendeki lineerlik gereği $\langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle$'tir; karekök alınınca $N(\lambda x) = \mid \lambda \mid N(x)$ olur.
(N4) Adım 1 ile

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 &= N(x)^2 + 2\langle x, y\rangle + N(y)^2 \\ &\le N(x)^2 + 2N(x)\,N(y) + N(y)^2 = \big(\,N(x) + N(y)\big)^2 \end{aligned}$$

olur; iki yan negatif olmayan sayıların kareleri olduğundan $N(x+y) \le N(x) + N(y)$'dir.
Adım 1'deki ispat bileşen kullanmadığından, standart iç çarpım için Teorem 1.1 içindeki $\mid \langle x, y\rangle \mid \le \| x \| \, \| y \|$ eşitsizliğinin ikinci bir ispatını da vermiş olduk. ■

Alıştırma 1.8 (Maksimum Normu İç Çarpımdan Gelmez). $n \ge 2$ olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde, her x için $\| x \|_\infty = \sqrt{\langle x, x\rangle_*}$ olacak biçimde bir $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ iç çarpımının bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Önerme 1.5 gereği böyle bir iç çarpım varsa maksimum normu paralelkenar özdeşliğini sağlamalıdır. $x = e_1$ ve $y = e_2$ alalım. $x + y = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ ve $x - y = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ olduğundan

$$\| x+y \|_\infty^2 + \| x-y \|_\infty^2 = 1 + 1 = 2,$$
$$2\left(\| x \|_\infty^2 + \| y \|_\infty^2 \right) = 2(1+1) = 4$$

bulunur. $2 \neq 4$ olduğundan özdeşlik bozulur; maksimum normu hiçbir iç çarpımdan gelmez.
Aynı vektörler p-normları için de bilgi verir. $\| e_1 + e_2 \|_p$ ve $\| e_1 - e_2 \|_p$ normlarının ikisi de $2^{1/p}$, $\| e_1 \|_p$ ve $\| e_2 \|_p$ normlarının ikisi de 1'dir. Özdeşliğin sol yanı $2 \cdot 2^{2/p} = 2^{1+2/p}$, sağ yanı $2(1+1) = 2^2$ olur. İki yan ancak $1 + \dfrac{2}{p} = 2$, yani $p = 2$ iken eşittir. Demek ki $n \ge 2$ iken p-normları arasında bir iç çarpımdan gelebilen tek norm Öklid normudur. ■

Alıştırma 1.9 (p-Normu ile Maksimum Normunun Denkliği). $1 \le p < \infty$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\| x \|_\infty \le \| x \|_p \le n^{1/p} \| x \|_\infty$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\| x \|_\infty = \mid x_j \mid$ olacak biçimde bir j indisi seçelim.
Sol eşitsizlik. Toplamın öbür terimleri negatif olmadığından

$$\| x \|_p^p = \sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid^p \ge \mid x_j \mid^p = \| x \|_\infty^p$$

olur. $t \mapsto t^{1/p}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde artan olduğundan $\| x \|_p \ge \| x \|_\infty$'dur.
Sağ eşitsizlik. Her k için $\mid x_k \mid \le \| x \|_\infty$, dolayısıyla $\mid x_k \mid^p \le \| x \|_\infty^p$'dir. Bu n eşitsizliği toplarsak

$$\| x \|_p^p \le n \, \| x \|_\infty^p$$

olur; $\dfrac{1}{p}$. kuvvet alınınca $\| x \|_p \le n^{1/p} \| x \|_\infty$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu eşitsizlikler $\|\cdot\|_p$ ile $\|\cdot\|_\infty$'un denk olduğunu söyler; denkliğin geçişliliği ve Teorem 1.5 gereği her p-normu, Öklid normuna ve 1-normuna da denktir. Ayrıca üstel fonksiyon sürekli olduğundan $p \to \infty$ iken

$$n^{1/p} = e^{(\ln n)/p} \to e^0 = 1$$

olur ve sıkıştırma ile $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ bulunur; maksimum normuna ∞-normu denmesinin nedeni budur. ■

Bu bölümde $\mathbb{R}^n$'ye iç çarpım yoluyla açı, norm yoluyla uzunluk kavramı kazandırdık. Bir sonraki adım, normdan iki nokta arasındaki uzaklığı, yani metriği elde etmek ve $\mathbb{R}^n$'de doğruları, doğru parçalarını ve konveks kümeleri tanımlamaktır: Metrik, Doğrular ve Konveks Kümeler.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Metrik, Doğrular ve Konveks Kümeler

Tek değişkenli analizde limit, süreklilik ve türevin bütün tanımları $\mid x-a \mid < \delta$ biçimindeki eşitsizliklere dayanır: iki reel sayının birbirine ne kadar yakın olduğunu aralarındaki $\mid x-a \mid$ uzaklığı ölçer. $\mathbb{R}^n$'de aynı rolü Öklid normu üstlenir. $\mathbb{R}^n$ Uzayı, İç Çarpım ve Norm bölümünde bir vektörün uzunluğunu ölçen normu kurmuştuk. Bu bölümde iki nokta arasındaki uzaklığı farklarının normu olarak tanımlıyor ve bu uzaklığın, bir uzaklıktan beklenen dört özelliği taşıdığını gösteriyoruz.
Ardından $\mathbb{R}^n$'nin geometrisindeki temel nesneleri kuruyoruz: doğrular, doğru parçaları ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını da içeren konveks kümeler. $\mathbb{R}$'de aralıkların üstlendiği rolü $\mathbb{R}^n$'de iki tür küme paylaşır: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ komşuluğunun karşılığı olan yuvarlar ve kenarları eksenlere paralel kutular olan aralıklar. Yuvarlar, sonraki bölümlerde açık küme, limit ve süreklilik tanımlarının yapı taşı olacak. Bölümü yalnız $\mathbb{R}^3$'te tanımlı olan vektörel çarpımla kapatıyoruz.

2.1 Öklid Metriği

İki nokta arasındaki uzaklığı, onları birleştiren fark vektörünün uzunluğu olarak tanımlıyoruz.

Tanım 2.1 (Öklid Metriği). $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ve $y=(y_1,\ldots,y_n)$, $\mathbb{R}^n$'nin iki noktası olsun.

$$d(x,y) = \| x-y \| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}$$

sayısına x ile y arasındaki **uzaklık**, bu biçimde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna da $\mathbb{R}^n$'nin **Öklid metriği** denir.

Yani x ile y arasındaki uzaklık, $x-y$ fark vektörünün Öklid normudur (Tanım 1.7). Küçük boyutlarda formül tanıdık uzaklık formüllerine döner:

$$\begin{aligned} n=1: &\quad d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = \mid x-y \mid, \\ n=2: &\quad d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \\ n=3: &\quad d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}. \end{aligned}$$

$n=1$ için bu, reel sayılarda alışık olduğumuz $\mid x-y \mid$ uzaklığıdır. $n=2$ için formül Pisagor teoremidir: x ile y'yi birleştiren doğru parçası, dik kenarları $\mid y_1-x_1 \mid$ ve $\mid y_2-x_2 \mid$ olan bir dik üçgenin hipotenüsüdür. $n=3$ için Pisagor teoremi iki kez uygulanır ve $d(x,y)$, kenarları $\mid y_j-x_j \mid$ olan dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeninin uzunluğu olur.

Önerme 2.1 (Öklid Metriğinin Özellikleri). *Her $x,y,z \in \mathbb{R}^n$ için şunlar sağlanır:*
(i) $d(x,y) \geq 0$;
(ii) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
(iii) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetri);
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği).

> ***İspat.***
> *Dört özellik de Öklid normunun özelliklerinden (Teorem 1.2) gelir.*
> ***(i)** Bir vektörün normu negatif olmayan bir sayıdır (Teorem 1.2 (1)); dolayısıyla $d(x,y) = \| x-y \| \geq 0$.*
> ***(ii)** Bir vektörün normu ancak ve ancak vektör sıfır vektörüyse sıfırdır (Teorem 1.2 (2)). Bu özelliği $x-y$ vektörüne uygularsak*
>
> $$d(x,y) = \| x-y \| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.$$
>
> ***(iii)** $x-y=(-1)(y-x)$ yazalım. Normun homojenliği ($\| \lambda v \| = \mid \lambda \mid \| v \|$, Teorem 1.2 (3)) ile*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d(x,y) = \| (-1)(y-x) \| = |-1| \, \| y-x \| = d(y,x).$$

(iv) *$x-y = (x-z)+(z-y)$ yazıp normun üçgen eşitsizliğini (Teorem 1.2 (4)) uygulayalım:*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \| (x-z)+(z-y) \| \\ &\leq \| x-z \| + \| z-y \| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

■

Üçgen eşitsizliği adını geometrisinden alır: x, y, z bir üçgenin köşeleriyse bir kenarın uzunluğu öbür iki kenarın uzunlukları toplamını aşamaz. Yani x'ten y'ye doğrudan gitmek, araya bir z durağı koymaktan daha uzun olamaz.

2.2 Metrik Kavramı ve Normdan Elde Edilen Metrikler

Önerme 2.1 ile kanıtladığımız dört özellik, "uzaklık" sözcüğünden beklediğimiz her şeyi söyler; bu yüzden bu dört özelliği taşıyan her fonksiyona ayrı bir ad verilir.

Tanım 2.2 (Metrik). $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için
(i) $\rho(x,y) \geq 0$,
(ii) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
(iv) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$
koşulları sağlanıyorsa ρ'ya $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir **metrik** (uzaklık fonksiyonu) denir.

Yani metrik, uzaklığın dört temel özelliğini taşıyan her fonksiyondur: uzaklık negatif değildir, yalnız bir noktanın kendisine uzaklığı sıfırdır, uzaklık yönden bağımsızdır ve dolambaçlı yol doğrudan yoldan kısa olamaz. Önerme 2.1, Öklid metriğinin bu anlamda bir metrik olduğunu söyler. Aynı tanım $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir X kümesi için de yapılır; üzerinde bir metrik verilmiş kümeye **metrik uzay** denir.
Önerme 2.1 ispatında Öklid normunun yalnız dört özelliğini kullandık: normun negatif olmaması, yalnız sıfır vektöründe sıfır olması, homojenlik ve üçgen eşitsizliği. Bunlar genel normun tanımındaki (N1)–(N4) koşullarıdır (Tanım 1.11); dolayısıyla her norm bir metrik üretir.

Önerme 2.2 (Her Norm Bir Metrik Üretir). *$N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir norm olsun.*

$$d_N(x,y) = N(x-y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

ile tanımlanan d_N fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir. Özel olarak 1-normundan ve maksimum normundan elde edilen

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \| x-y \|_1 = \sum_{j=1}^{n} | x_j - y_j |, \\ d_\infty(x,y) &= \| x-y \|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} | x_j - y_j | \end{aligned}$$

fonksiyonları da $\mathbb{R}^n$ üzerinde metriktir.

İspat.
Normun tanımındaki (N1)–(N4) koşullarını (Tanım 1.11) kullanacağız. $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ olsun.
(i) *(N1) gereği $d_N(x,y) = N(x-y) \geq 0$.*
(ii) *(N2) gereği*

$$d_N(x,y) = 0 \Leftrightarrow N(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(iii) *(N3) gereği*

$$d_N(x,y) = N\big((-1)(y-x) \big) = |-1| \, N(y-x) = d_N(y,x).$$

(iv) *(N4) gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} d_N(x,y) &= N\big(\,(x-z)+(z-y)\,\big) \\ &\le N(x-z)+N(z-y) = d_N(x,z)+d_N(z,y). \end{aligned}$$

1-normu ve maksimum normu birer norm olduğundan (Önerme 1.3) d_1 ve d_∞ bu genel sonucun özel hâlleridir. ■

Öklid metriği d, bu önermede $N = \|\cdot\|$ alınarak elde edilen metriktir. Kitap boyunca aksi söylenmedikçe "uzaklık" Öklid metriği demektir.

Örnek 2.1 (Üç Metriğe Göre Uzaklık). $\mathbb{R}^3$'te $x=(1,-2,3)$ ve $y=(3,1,-3)$ noktaları arasındaki $d(x,y)$, $d_1(x,y)$ ve $d_\infty(x,y)$ uzaklıklarını hesaplayınız.

Çözüm.
Üç metrik de fark vektörüne bakar:

$$x-y = \big(\,1-3,\,-2-1,\,3-(-3)\,\big) = (-2,-3,6).$$

Öklid metriği bileşenlerin karelerinin toplamının karekökünü alır:

$$d(x,y) = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7.$$

d_1 bileşenlerin mutlak değerlerini toplar, d_∞ ise en büyüğünü seçer:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= |-2|+|-3|+|\,6\,| = 11, \\ d_\infty(x,y) &= \max\{2,3,6\} = 6. \end{aligned}$$

Aynı iki nokta için üç farklı sayı bulduk; üçü de birer uzaklıktır ama uzaklığı farklı biçimde ölçer. Bulduğumuz $d_\infty \le d \le d_1$ sıralaması bu örneğe özgü değildir: normların denkliği teoremindeki (Teorem 1.5) $\|v\|_\infty \le \|v\| \le \|v\|_1$ eşitsizliklerini $v = x-y$ vektörüne uygularsak her $x,y\in\mathbb{R}^n$ için $d_\infty(x,y) \le d(x,y) \le d_1(x,y)$ bulunur. ■

Her norm bir metrik üretir; ancak her metrik bir normdan gelmez.

Örnek 2.2 (Normdan Gelmeyen Bir Metrik). $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlanan **ayrık metriğin**, bir metrik olduğu hâlde hiçbir normdan elde edilemediğini, yani hiçbir N normu için $\rho = d_N$ olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Metrik koşulları. (i) ve (iii) tanımdan açıktır: ρ yalnız 0 ve 1 değerlerini alır ve "$x=y$" koşulu x ile y'ye göre simetriktir. (ii) tanımın kendisidir: $\rho(x,y)=0$ ancak ve ancak $x=y$ ise olur. (iv) için iki durum vardır. $x=y$ ise sol taraf 0'dır ve sağ taraf negatif olmadığından eşitsizlik sağlanır. $x\neq y$ ise bir z noktası hem x'e hem y'ye eşit olamaz; dolayısıyla $\rho(x,z)$ ile $\rho(z,y)$ sayılarından en az biri 1'dir ve

$$\rho(x,z)+\rho(z,y) \ge 1 = \rho(x,y)$$

olur. ρ bir metriktir.
Normdan gelmez. Bir N normu için her x,y noktasında $\rho(x,y)=N(x-y)$ olsaydı, $2e_1 \neq 0$ ve $e_1 \neq 0$ olduğundan normun homojenliği

$$1 = \rho(2e_1,0) = N(2e_1) = 2N(e_1) = 2\rho(e_1,0) = 2$$

çelişkisini verirdi. Normdan gelen her metrik ölçeklemeye uyar: $d_N(\lambda x,\lambda y) = |\,\lambda\,|\,N(x-y)$. Ayrık metrik ise iki farklı nokta ne kadar uzaklaştırılırsa uzaklaştırılsın aralarındaki uzaklığı 1'de tutar. ■

Özetle $\mathbb{R}^n$ katmanlı bir yapı taşır: iç çarpım bir norm üretir ($\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$), norm da bir metrik üretir ($d(x,y) = \| x - y \|$). Bu yüzden $\mathbb{R}^n$ aynı anda bir vektör uzayı, bir iç çarpım uzayı, bir normlu uzay ve bir metrik uzaydır. Zincir ters yönde her zaman işlemez. Her metrik bir normdan gelmez; ayrık metrik bunun örneğidir. Her norm da bir iç çarpımdan gelmez: iç çarpımdan gelen her norm paralelkenar özdeşliğini (Önerme 1.5) sağlar, 1-normu ise sağlamaz (Örnek 1.7).

2.3 $\mathbb{R}^n$'de Doğru ve Doğru Parçası

Düzlemde bir doğru, üzerindeki bir nokta ve bir doğrultu ile belirlenir; aynı tarif her boyutta işler ve doğruya parametrik bir gösterim verir.

Tanım 2.3 ($\mathbb{R}^n$'de Doğru). $a \in \mathbb{R}^n$ ve $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ olsun.

$$\ell_a(b) = \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}$$

kümesine $\mathbb{R}^n$'de a noktasından geçen, b doğrultusundaki **doğru** denir. b vektörüne doğrunun **doğrultu vektörü**, t'ye **parametre** denir.

Yani doğru, a noktasından başlayıp b vektörünün bütün reel katları kadar ileri ve geri gidilerek ulaşılan noktalardan oluşur: $t = 0$ için a'nın kendisi, $t = 1$ için $a + b$, $t = -1$ için $a - b$ elde edilir. Koordinatlarla yazılınca $x = a + tb$ eşitliği n tane denkleme ayrılır:

$$x_j = a_j + t\, b_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Bunlara doğrunun **parametrik denklemleri** denir. $b \neq 0$ koşulu gereklidir; $b = 0$ olsaydı küme tek bir a noktasına dönerdi. İki farklı $p, q \in \mathbb{R}^n$ noktasından geçen doğru, $a = p$ ve $b = q - p$ alınarak elde edilir:

$$\ell_p(q-p) = \{p + t(q-p) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t)p + tq : t \in \mathbb{R}\}.$$

Örnek 2.3 (Düzlemde Parametrik ve Kartezyen Denklem). $\mathbb{R}^2$'de $a = (1, 2)$ noktasından geçen, $b = (3, -1)$ doğrultusundaki doğrunun parametrik denklemlerinden yararlanarak kartezyen denklemini bulunuz.

> **Çözüm.**
> $a + tb = (1 + 3t, 2 - t)$ olduğundan doğrunun parametrik denklemleri
>
> $$\begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= 2 - t \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$
>
> olur. Parametreyi yok edelim. İkinci denklemden $t = 2 - y$ bulunur; birinciye yazılırsa
>
> $$x = 1 + 3(2 - y) = 7 - 3y, \quad \text{yani} \quad x + 3y = 7$$
>
> elde edilir. Tersine, $x + 3y = 7$ denklemini sağlayan her (x, y) noktası $t = 2 - y$ parametresine karşılık gelir: bu t için $2 - t = y$ ve $1 + 3t = 7 - 3y = x$ olur. Dolayısıyla
>
> $$\ell_a(b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 7\}.$$
>
> Sınama: $t = 0$ için $a = (1, 2)$ noktasında $1 + 6 = 7$, $t = 1$ için $a + b = (4, 1)$ noktasında $4 + 3 = 7$ olur. ■

Örnek 2.4 (Uzayda İki Noktadan Geçen Doğru). $\mathbb{R}^3$'te $p = (1, 0, -1)$ ve $q = (3, 2, 1)$ noktalarından geçen doğru üzerinde $(4, 3, 2)$ ve $(0, -1, -1)$ noktalarından hangisinin bulunduğunu belirleyiniz.

> **Çözüm.**
> Doğrultu vektörü $q - p = (2, 2, 2)$'dir; doğru
>
> $$\ell_p(q-p) = \{(1 + 2t, 2t, -1 + 2t) : t \in \mathbb{R}\}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

kümesidir. Bir noktanın doğru üzerinde olması, üç koordinat denklemini aynı anda sağlayan bir t bulunması demektir.

$(4,3,2)$ noktası. Birinci denklemden $1+2t=4$, yani $t=\dfrac{3}{2}$. Bu değer öbür iki denklemi de sağlar: $2t=3$ ve $-1+2t=2$. Nokta doğru üzerindedir.

$(0,-1,-1)$ noktası. Birinci denklemden $1+2t=0$, yani $t=-\dfrac{1}{2}$; ikinci denklem $2t=-1$ de sağlanır. Ancak üçüncü koordinat $-1+2t=-2\neq -1$ olur. Üç denklemi birden sağlayan bir t yoktur; nokta doğru üzerinde değildir. ■

Doğrunun iki noktası arasında kalan kısmı, parametre bir aralıkla kısıtlanarak elde edilir.

Tanım 2.4 ($\mathbb{R}^n$'de Doğru Parçası). $a,b\in\mathbb{R}^n$ olsun.

$$L(a;b)=\{ta+(1-t)b : t\in[0,1]\}$$

kümesine a ile b arasındaki (onları birleştiren) **doğru parçası** denir.

Yani t parametresi 0'dan 1'e giderken $ta+(1-t)b$ noktası b'den a'ya doğru yürür: $t=0$ için b, $t=1$ için a, $t=\frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=\frac{a+b}{2}$$

orta noktası elde edilir. $a\neq b$ ise $ta+(1-t)b=b+t(a-b)$ yazılışı, doğru parçasının b'den geçen, $a-b$ doğrultusundaki $\ell_b(a-b)$ doğrusunun parametresi $[0,1]$ aralığına kısıtlanmış parçası olduğunu gösterir. Bir noktanın doğru parçası üzerinde olması için doğru üzerinde olması yetmez; karşılık gelen parametre $[0,1]$ aralığında olmalıdır. t yerine $1-t$ yazılırsa $L(a;b)=L(b;a)$ olduğu ve bu kümenin $\{a+t(b-a):t\in[0,1]\}$ biçiminde de yazılabildiği görülür. Örneğin Örnek 2.4 içinde doğru üzerinde bulduğumuz $(4,3,2)$ noktası $p+t(q-p)$ gösteriminde $t=\frac{3}{2}\notin[0,1]$ değerine karşılık geldiğinden p ile q arasındaki doğru parçasında değildir.

Örnek 2.5 (Bir Doğru Parçasının Noktaları). $\mathbb{R}^2$'de $a=(4,1)$ ve $b=(0,3)$ olsun. $L(a;b)$ doğru parçasını parametrik olarak yazınız ve $t=0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1$ değerlerine karşılık gelen noktaları bulunuz.

Çözüm.
Tanıma göre

$$ta+(1-t)b=(4t,t)+(0,3-3t)=(4t,3-2t),$$

dolayısıyla

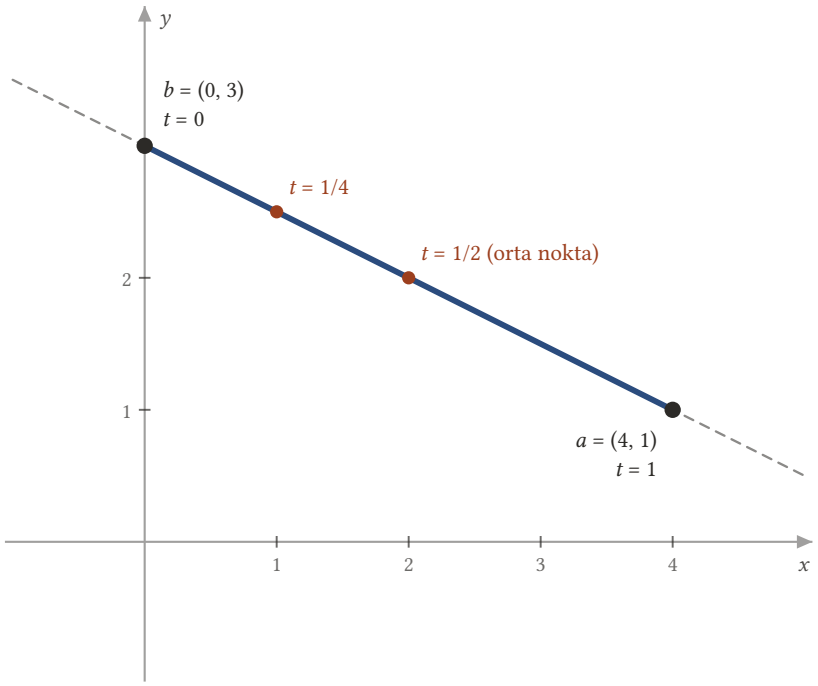
$$L(a;b)=\{(4t,3-2t):t\in[0,1]\}.$$

İstenen noktalar:

- $t=0$ için $(0,3)=b$;
- $t=\frac{1}{4}$ için $\left(1,\frac{5}{2}\right)$;
- $t=\frac{1}{2}$ için $(2,2)$; bu, orta nokta $\dfrac{a+b}{2}$'dir;
- $t=1$ için $(4,1)=a$.

$x=4t$ ve $y=3-2t$ ise $x+2y=4t+6-4t=6$ olur; $t\in[0,1]$ iken de $x=4t$ sayısı $[0,4]$ aralığını tarar. Demek ki $L(a;b)$, $x+2y=6$ doğrusunun $0\le x\le 4$ olan parçasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.1: $a = (4, 1)$ ile $b = (0, 3)$ arasındaki $L(a; b)$ doğru parçası (kalın), $x + 2y = 6$ doğrusunun (kesikli) $0 \le x \le 4$ olan kısmıdır. $t = 0$ için b, $t = 1/4$ için $(1, 5/2)$, $t = 1/2$ için orta nokta $(2, 2)$, $t = 1$ için a elde edilir.

■

2.4 Konveks Kümeler

Doğru parçası kavramı, $\mathbb{R}^n$'deki "girintisiz ve deliksiz" kümeleri tarif etmemizi sağlar.

Tanım 2.5 (Konveks Küme). $C \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Her $x, y \in C$ ve her $t \in [0, 1]$ için

$$tx + (1 - t)y \in C$$

oluyorsa C'ye **konveks küme** denir.

Yani C konvekstir ancak ve ancak C'nin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı yine C'nin içinde kalır: her $x, y \in C$ için $L(x; y) \subseteq C$. Konveks olmayan bir kümede ise öyle $x, y \in C$ ve $t_0 \in [0, 1]$ bulunur ki $t_0 x + (1 - t_0)y \notin C$ olur; kümenin bir girintisi ya da deliği, doğru parçasını kümenin dışına taşır. Tanım şöyle de yazılabilir: $\lambda, \mu \ge 0$ ve $\lambda + \mu = 1$ olan her λ, μ sayısı ve her $x, y \in C$ için $\lambda x + \mu y \in C$. $\lambda = t$, $\mu = 1 - t$ alınınca iki yazılış aynı koşulu söyler. Boş küme (koşulu sınanacak nokta yoktur), tek noktalı kümeler ve $\mathbb{R}^n$'nin kendisi konvekstir.
İlk örnek olarak $\mathbb{R}$'nin konveks alt kümelerini belirleyelim; bunlar tam olarak aralıklardır.

Önerme 2.3 ($\mathbb{R}$'nin Konveks Alt Kümeleri). *Boş olmayan bir $C \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul C'nin bir aralık olmasıdır.*

İspat.
Aralık tanımını hatırlayalım: boş olmayan bir $I \subseteq \mathbb{R}$ kümesi, $x < y$ olan her $x, y \in I$ için $x < z < y$ koşulunu sağlayan her z sayısını da içeriyorsa bir aralıktır (bkz. Analiz 1).
(⇐) *C bir aralık olsun. $x, y \in C$, $t \in [0, 1]$ ve $z = tx + (1 - t)y$ alalım. $s = 1 - t \in [0, 1]$ için $z = sy + (1 - s)x$ olduğundan x ile y'nin rolleri değiştirilebilir; $x \le y$ varsayabiliriz. $t \ge 0$ ve $1 - t \ge 0$ olduğundan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = tx + (1-t)x \le tx + (1-t)y = z,$$
$$z = tx + (1-t)y \le ty + (1-t)y = y$$

olur, yani $x \le z \le y$. $z = x$ ya da $z = y$ ise $z \in C$'dir. Aksi hâlde $x < z < y$ olur ve aralık tanımı gereği $z \in C$'dir. C konvekstir.
(⇒) C boş olmayan konveks bir küme olsun. $x, y \in C$, $x < y$ ve $x < z < y$ alalım.

$$t = \frac{y - z}{y - x}$$

sayısı $0 < t < 1$ koşulunu sağlar, çünkü pay ve payda pozitiftir ve $y - z < y - x$'tir. Bu t için

$$tx + (1-t)y = y - t(y - x) = y - (y - z) = z$$

olur. C konveks olduğundan $z \in C$'dir. C, aralık tanımındaki koşulu sağlar. ■

Özel olarak $(1, 2)$, $[0, 1]$, $[3, +\infty)$ gibi bütün aralıklar $\mathbb{R}$'nin konveks alt kümeleridir. Önerme, aralık olmayan kümelerin konveks olmadığını da söyler. Örneğin $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ konveks değildir: -1 ve 1 kümededir, aralarındaki 0 ise değildir.

Örnek 2.6 (Doğru Parçası Konvekstir). Her $a, b \in \mathbb{R}^n$ için $L(a; b)$ doğru parçasının konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x, y \in L(a; b)$ ve $t \in [0, 1]$ olsun. Tanım gereği öyle $s, u \in [0, 1]$ vardır ki

$$x = sa + (1-s)b,$$
$$y = ua + (1-u)b$$

olur. $w = ts + (1-t)u$ diyelim. Terimleri a ve b'ye göre toplarsak

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= \big(\, ts + (1-t)u \,\big)\, a + \big(\, t(1-s) + (1-t)(1-u) \,\big)\, b \\ &= w\, a + (1-w)\, b \end{aligned}$$

bulunur; çünkü b'nin katsayısı

$$t(1-s) + (1-t)(1-u) = t + (1-t) - \big(\, ts + (1-t)u \,\big) = 1 - w$$

olur. Öte yandan $t, 1-t, s, u$ negatif olmadığından $w \ge 0$'dır ve $s, u \le 1$ olduğundan $w \le t + (1-t) = 1$'dir. Demek ki $w \in [0, 1]$ ve $tx + (1-t)y \in L(a; b)$. ■

Doğrular da konvekstir: $x = a + sb$ ve $y = a + ub$, $\ell_a(b)$ doğrusunun iki noktasıysa her $t \in [0, 1]$ için

$$tx + (1-t)y = a + \big(\, ts + (1-t)u \,\big)\, b \in \ell_a(b)$$

olur.

Örnek 2.7 (Sağ Yarı Düzlem). $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ kümesini düzlemde tarif ediniz ve konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Tarif. A, birinci koordinatı pozitif olan noktalardan oluşur: y ekseninin sağında kalan yarı düzlemdir. y ekseninin kendisi ($x = 0$ doğrusu) kümeye dahil değildir; çizimde kesikli gösterilir ve eksenin sağı taranır. İkinci koordinat üzerinde hiçbir koşul yoktur; küme yukarı ve aşağı doğru sonsuza kadar uzanır.
Konvekslik. $p = (p_1, p_2)$ ve $q = (q_1, q_2)$, A'nın iki noktası, $t \in [0, 1]$ olsun. $tp + (1-t)q$ noktasının birinci koordinatı $tp_1 + (1-t)q_1$'dir. $m = \min\{p_1, q_1\}$ diyelim; $p_1, q_1 > 0$ olduğundan $m > 0$'dır. $t \ge 0$ ve $1 - t \ge 0$ olduğundan

$$tp_1 + (1-t)q_1 \ge tm + (1-t)m = m > 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

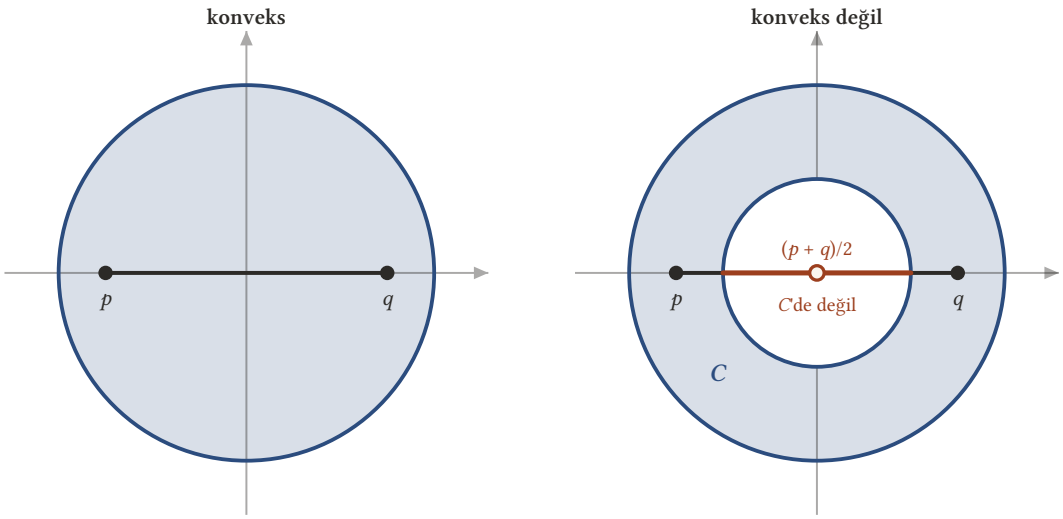
olur. Dolayısıyla $tp + (1-t)q \in A$ ve A konvekstir. ■

Örnek 2.8 (Halka Konveks Değildir). $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ halkasının konveks olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Konveks olmadığını göstermek için kümeden iki nokta ve bu noktaları birleştiren doğru parçasından kümenin dışına düşen bir nokta bulmak yeter. Halkanın deliğinin iki yanından $p = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ve $q = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ noktalarını seçelim. İkisi için de $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ olur ve $1 \leq \frac{9}{4} \leq 4$ olduğundan $p, q \in C$'dir. $t = \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = (0,0)$$

bulunur. Bu noktada $x^2 + y^2 = 0 < 1$ olduğundan $(0,0) \notin C$'dir. Doğru parçası deliğin içinden geçer; C konveks değildir.



Şekil 2.2: Solda $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesi: iki noktasını birleştiren parça dairenin içinde kalır. Sağda $C = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ halkası: $p = (-3/2, 0)$ ile $q = (3/2, 0)$ arasındaki parçanın $-1 < x < 1$ kısmı (turuncu) delikten geçer; orta nokta $(p + q)/2 = (0, 0)$ C'ye ait değildir.

■

Konveks kümeler kesişim altında korunur; üstelik kesişen kümelerin sayısı sonsuz olabilir.

Teorem 2.1 (Konveks Kümelerin Kesişimi). *Λ boş olmayan bir indis kümesi ve her $i \in \Lambda$ için $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun. O zaman*

$$C = \bigcap_{i \in \Lambda} C_i$$

kesişimi konvekstir. Özel olarak iki konveks kümenin kesişimi ve konveks kümelerden oluşan bir $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ kesişimi konvekstir.

İspat.
$x, y \in C$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Kesişimin tanımı gereği her $i \in \Lambda$ için $x, y \in C_i$'dir. C_i konveks olduğundan her $i \in \Lambda$ için $tx + (1-t)y \in C_i$ olur. Bir nokta bütün C_i'lere ait olduğundan kesişime aittir: $tx + (1-t)y \in C$. C konvekstir.
İki küme için $\Lambda = \{1, 2\}$, bir dizi için $\Lambda = \mathbb{N}$ alınır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Birleşim için aynı şey söylenemez. $x, y \in A \cup B$ ise x ile y farklı kümelerde olabilir; o zaman A'nın ve B'nin konveksliği, aralarındaki doğru parçası hakkında hiçbir şey söylemez.

Örnek 2.9 (Konveks Kümelerin Birleşimi). $A = (1, 2)$ ve $B = (3, 4)$ olsun. A ve B konveks olduğu hâlde $A \cup B$'nin konveks olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> A ve B birer aralık olduğundan Önerme 2.3 gereği konvekstir. $x = \frac{3}{2} \in A$ ve $y = \frac{7}{2} \in B$ noktalarını ve $t = \frac{1}{2}$ değerini alalım:
>
> $$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5}{2}.$$
>
> $\frac{5}{2}$ sayısı ne $(1, 2)$ aralığında ne de $(3, 4)$ aralığındadır; $\frac{5}{2} \notin A \cup B$. Dolayısıyla $A \cup B$ konveks değildir. Aynı sonuç Önerme 2.3 ile de görülür: $A \cup B$ bir aralık değildir. ■

Birleşim bazı durumlarda yine de konveks olabilir; örneğin $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$'dir.

2.5 Yuvarlar

$\mathbb{R}$'de bir a noktasının ε-komşuluğu, a'ya uzaklığı ε'dan küçük olan sayıların kümesidir: $B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (bkz. Analiz 1). Mutlak değerin yerine Öklid metriğini koyunca aynı tanım $\mathbb{R}^n$'de yuvarları verir.

Tanım 2.6 (Açık Yuvar, Kapalı Yuvar ve Yuvar Yüzeyi). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun.

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| < r\}$$

kümesine x_0 merkezli, r yarıçaplı **açık yuvar** (açık n-yuvar),

$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli, r yarıçaplı **kapalı yuvar**,

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli, r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** (yuvar kabuğu) denir.

Yani açık yuvar x_0'a uzaklığı r'den küçük olan, kapalı yuvar r'yi aşmayan, yuvar yüzeyi ise tam r olan noktalardan oluşur. Bir noktanın x_0'a uzaklığı r'yi aşmıyorsa ya r'den küçüktür ya da r'ye eşittir; bu yüzden kapalı yuvar, birbirinden ayrık olan açık yuvar ile yuvar yüzeyinin birleşimidir:

$$B[x_0, r] = B(x_0, r) \cup S(x_0, r).$$

Merkez her zaman açık yuvardadır, çünkü $\| x_0 - x_0 \| = 0 < r$'dir.

Tanım 2.7 (Birim Yuvar). Merkezi $0 \in \mathbb{R}^n$ ve yarıçapı 1 olan

$$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| < 1\}$$

açık yuvarına **birim yuvar** (açık birim yuvar),

$$B[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq 1\}$$

kümesine **kapalı birim yuvar**, $S(0, 1)$ kümesine de **birim yuvar yüzeyi** denir.

Yani birim yuvar, normu 1'den küçük vektörlerin, kısaca "uzunluğu 1'den kısa" vektörlerin kümesidir. Örneğin $\mathbb{R}^2$'de $\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olduğundan

$$B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

olur; bu, merkezi başlangıç noktasında olan birim çemberin iç kısmıdır (birim daire).
Küçük boyutlarda yuvarlar tanıdık kümelerdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 2.1: Küçük boyutlarda yuvarlar

n	$B(x_0, r)$	$B[x_0, r]$	$S(x_0, r)$
1	açık aralık $(x_0 - r, x_0 + r)$	kapalı aralık $[x_0 - r, x_0 + r]$	iki nokta: $x_0 - r$, $x_0 + r$
2	çemberin iç kısmı (açık daire)	çemberiyle birlikte daire	çember
3	kürenin iç kısmı	içi dolu küre	küre yüzeyi

$n = 1$ için Öklid normu mutlak değerdir ve

$$\| x - x_0 \| = | x - x_0 | < r \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r$$

olduğundan açık yuvar tam olarak $\mathbb{R}$'deki ε-komşuluğudur. $n = 2$ için merkez $x_0 = (a, b)$ ise

$$B(x_0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\},$$

$n = 3$ için merkez $x_0 = (a, b, c)$ ise

$$B(x_0, r) = \{(x, y, z) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2\}$$

olur. $<$ yerine $\leq$ yazılınca kapalı yuvar, $=$ yazılınca çember ya da küre yüzeyi elde edilir. "Yuvar" sözcüğü bu yüzden seçilmiştir: yalnız yüzeyden ibaret olan küreyi değil, içi dolu cismi anlatır.

Örnek 2.10 (Hangi Nokta Hangi Yuvarda). $x_0 = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ olsun. $p = (2, 1, 4)$, $q = (0, 0, 3)$ ve $s = (4, 1, 0)$ noktalarının her birinin $B(x_0, 3)$, $B[x_0, 3]$ ve $S(x_0, 3)$ kümelerinden hangilerine ait olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.
Her noktanın merkeze uzaklığını hesaplayıp 3 ile karşılaştırmak yeter.

$$\| p - x_0 \| = \| (1, 2, 2) \| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Uzaklık tam 3 olduğundan $p \in S(x_0, 3)$ ve $p \in B[x_0, 3]$, ama $p \notin B(x_0, 3)$.

$$\| q - x_0 \| = \| (-1, 1, 1) \| = \sqrt{3} < 3.$$

Uzaklık 3'ten küçük olduğundan $q \in B(x_0, 3)$, dolayısıyla $q \in B[x_0, 3]$; ama $q \notin S(x_0, 3)$.

$$\| s - x_0 \| = \| (3, 2, -2) \| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}.$$

$17 > 9$ olduğundan $\sqrt{17} > 3$'tür; s üç kümenin hiçbirinde değildir. ■

Şimdi bölümün ana sonucuna geliyoruz: yuvarlar konvekstir. İspat yalnız normun homojenliğini ve üçgen eşitsizliğini kullanır.

Teorem 2.2 (Yuvarlar Konvekstir). *Her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $B(x_0, r)$ açık yuvarı ve $B[x_0, r]$ kapalı yuvarı konveks kümelerdir.*

İspat.
Açık yuvar. *$x, y \in B(x_0, r)$ ve $t \in [0, 1]$ olsun. $tx + (1 - t)y \in B(x_0, r)$, yani*

$$\| tx + (1 - t)y - x_0 \| < r$$

olduğunu göstereceğiz. $x_0 = tx_0 + (1 - t)x_0$ yazarak farkı iki parçaya ayıralım:

$$tx + (1 - t)y - x_0 = t(x - x_0) + (1 - t)(y - x_0).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$t \geq 0$ ve $1-t \geq 0$ olduğundan $\mid t \mid = t$ ve $\mid 1-t \mid = 1-t$'dir. Normun üçgen eşitsizliği ve homojenliği ile

$$\begin{aligned} \| tx + (1-t)y - x_0 \| &\leq \| t(x-x_0) \| + \| (1-t)(y-x_0) \| \\ &= t \| x - x_0 \| + (1-t) \| y - x_0 \| \end{aligned}$$

olur. $\rho = \max\{\| x-x_0 \|, \| y-x_0 \|\}$ diyelim; $x, y \in B(x_0, r)$ olduğundan $\rho < r$'dir. Son satırdaki iki norm da ρ'yu aşmadığından

$$\| tx + (1-t)y - x_0 \| \leq t\rho + (1-t)\rho = \rho < r$$

bulunur. Demek ki $tx + (1-t)y \in B(x_0, r)$ ve açık yuvar konvekstir.
Kapalı yuvar. *$x, y \in B[x_0, r]$ ise aynı hesap yapılır; bu kez $\rho \leq r$ olduğundan*

$$\| tx + (1-t)y - x_0 \| \leq \rho \leq r$$

bulunur. Yani $tx + (1-t)y \in B[x_0, r]$ ve kapalı yuvar da konvekstir. ■

Yuvar yüzeyi ise konveks değildir; iki noktası arasındaki doğru parçası yuvarın içinden geçer.

Örnek 2.11 (Yuvar Yüzeyi Konveks Değildir). Her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $S(x_0, r)$ yuvar yüzeyinin konveks olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$p = x_0 + re_1$ ve $q = x_0 - re_1$ noktalarını alalım. $\| e_1 \| = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \| p - x_0 \| &= \| re_1 \| = r \| e_1 \| = r, \\ \| q - x_0 \| &= \| -re_1 \| = r \| e_1 \| = r \end{aligned}$$

olur; yani $p, q \in S(x_0, r)$. $t = \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = x_0$$

bulunur ve $\| x_0 - x_0 \| = 0 \neq r$ olduğundan $x_0 \notin S(x_0, r)$'dir. $S(x_0, r)$ konveks değildir. $n = 1$ için bu çok açıktır: $S(x_0, r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}$ iki noktalı bir kümedir ve aralık değildir. ■

2.6 Başka Normlara Göre Yuvarlar

Yuvar tanımında Öklid normu yerine herhangi bir norm kullanılabilir. Norm değişince uzaklık, onunla birlikte de yuvarın biçimi değişir.

Tanım 2.8 (Bir Norma Göre Yuvar). N, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir norm, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun.

$$B_N(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - x_0) < r\}$$

kümesine N normuna göre x_0 merkezli, r yarıçaplı **açık yuvar**,

$$B_N[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - x_0) \leq r\}$$

kümesine de **kapalı yuvar** denir. 1-normu için $B_1(x_0, r)$ ve $B_1[x_0, r]$, maksimum normu için $B_\infty(x_0, r)$ ve $B_\infty[x_0, r]$ yazılır.

Yani yuvarın tarifi hep aynıdır, "merkeze uzaklığı r'den küçük noktalar", ama uzaklığı ölçen d_N metriği değişir. Öklid normuna göre yuvarlar Tanım 2.6 ile tanımlanan yuvarlardır; onları indissiz yazmayı sürdürüyoruz ve aksi söylenmedikçe "yuvar" Öklid yuvarı demektir.

Sonuç 2.1 (Her Normun Yuvarları Konvekstir). *N, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir norm ise her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $B_N(x_0, r)$ ve $B_N[x_0, r]$ kümeleri konvekstir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Teorem 2.2 ispatında Öklid normunun yalnız homojenliği ve üçgen eşitsizliği kullanıldı; bunlar her normun tanımındaki (N3) ve (N4) koşullarıdır (Tanım 1.11). Adımları N ile yazalım. $x, y \in B_N(x_0, r)$, $t \in [0,1]$ ve $\rho = \max\{N(x-x_0), N(y-x_0)\}$ olsun; $\rho < r$'dir.

$$\begin{aligned} N\left(\, tx + (1-t)y - x_0 \,\right) &= N\left(\, t(x-x_0) + (1-t)(y-x_0) \,\right) \\ &\le t\,N(x-x_0) + (1-t)\,N(y-x_0) \\ &\le t\rho + (1-t)\rho = \rho < r. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $tx + (1-t)y \in B_N(x_0, r)$'dir. $x, y \in B_N[x_0, r]$ ise $\rho \le r$ olur ve aynı zincir

$$N\left(\, tx + (1-t)y - x_0 \,\right) \le \rho \le r$$

verir; yani $tx + (1-t)y \in B_N[x_0, r]$. ■

$\mathbb{R}^2$'de 1-normu, Öklid normu ve maksimum normuna göre yuvarları belirlemek, eşitsizliği koordinatlarla çözmekten ibarettir.

Üç adımda bir yuvarı belirlemek

1. **Eşitsizliği koordinatlarla yaz.** $N(x - x_0) < r$ (kapalı yuvarda $\le r$) koşulu noktanın koordinatları cinsinden açıkça yazılır.
2. **Mutlak değerlerden ve maksimumdan kurtul.** Öklid normunda iki taraf negatif olmadığından kareye alınır. 1-normunda her mutlak değerin içindeki ifadenin işaretine göre durumlara ayrılır ($\mathbb{R}^2$'de dört durum). Maksimum normunda "en büyüğü r'den küçük" demek "her biri r'den küçük" demektir.
3. **Parçaları birleştir.** Durumlarda bulunan parçalar birleştirilip çizilir. Açık yuvarda kenar çizgileri kümeye dahil değildir (kesikli çizilir), kapalı yuvarda dahildir.

Örnek 2.12 (Birim Yuvar (1-Normu)). $\mathbb{R}^2$'de 1-normuna göre $B_1(0,1)$ birim yuvarını belirleyiniz.

Çözüm.
Eşitsizlik. $\| (x,y) \|_1 = |\,x\,| + |\,y\,|$ olduğundan

$$B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\,x\,| + |\,y\,| < 1\}.$$

Durumlar. Mutlak değerlerden kurtulmak için x ve y'nin işaretine göre dört durum vardır.

- $x \ge 0, y \ge 0$ (birinci çeyrek): $x + y < 1$; $x + y = 1$ doğrusunun altında kalan kısım.
- $x < 0, y \ge 0$ (ikinci çeyrek): $-x + y < 1$, yani $y < x + 1$.
- $x < 0, y < 0$ (üçüncü çeyrek): $-x - y < 1$, yani $x + y > -1$.
- $x \ge 0, y < 0$ (dördüncü çeyrek): $x - y < 1$, yani $y > x - 1$.

Birleştirme. Dört parça birleşince köşeleri $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ve $(0,-1)$ olan kare elde edilir; karenin kenarları $x + y = 1$, $y - x = 1$, $x + y = -1$ ve $x - y = 1$ doğruları üzerindedir. Eşitsizlikler kesin olduğundan kenarlar kümeye dahil değildir: $B_1(0,1)$, köşeleri eksenler üzerinde duran bu karenin iç kısmıdır.
Aynı inceleme $\le$ ile yapılırsa her durumdaki eşitsizlik $\le$ olur. Kapalı birim yuvar $B_1[0,1]$ kenarlarıyla birlikte bu karedir; kenarların kendisi $\{(x,y) : |\,x\,| + |\,y\,| = 1\}$ kümesidir. ■

Örnek 2.13 (Birim Yuvar (Öklid Normu)). $\mathbb{R}^2$'de Öklid normuna göre $B(0,1)$ birim yuvarını belirleyiniz.

Çözüm.
$\| (x,y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olduğundan koşul $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$'dir. İki taraf da negatif olmadığından kare almak eşitsizliği korur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sqrt{x^2+y^2} < 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 < 1.$$

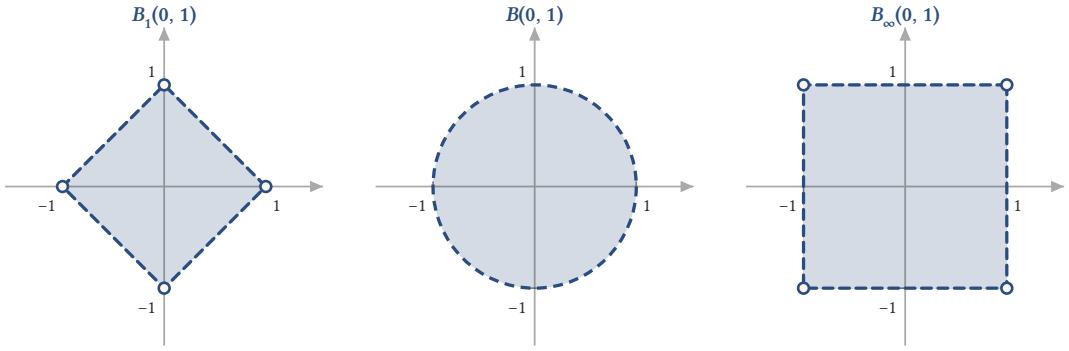
Dolayısıyla $B(0,1)$, merkezi $(0,0)$ ve yarıçapı 1 olan $x^2+y^2=1$ çemberinin iç kısmıdır; çemberin kendisi kümeye dahil değildir. Kapalı birim yuvar $B[0,1] = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ çemberiyle birlikte dairedir. ■

Örnek 2.14 (Birim Yuvar (Maksimum Normu)). $\mathbb{R}^2$'de maksimum normuna göre $B_\infty(0,1)$ birim yuvarını belirleyiniz.

Çözüm.
$\| (x,y) \|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ olduğundan koşul $\max\{|x|, |y|\} < 1$'dir. Bu koşul, $|x| < 1$ ve $|y| < 1$ koşullarının ikisinin birden sağlanmasına denktir. Gerçekten iki sayının her biri en büyüklerini aşmaz, dolayısıyla $\max\{|x|, |y|\} < 1$ ise $|x| < 1$ ve $|y| < 1$ olur. Tersine $|x| < 1$ ve $|y| < 1$ ise en büyükleri bu iki sayıdan biri olduğundan 1'den küçüktür. Buna göre

$$B_\infty(0,1) = \{(x,y) : |x| < 1, |y| < 1\} = (-1,1) \times (-1,1).$$

Bu, köşeleri $(\pm 1, \pm 1)$ olan ve kenarları eksenlere paralel karenin iç kısmıdır; kenarlar dahil değildir. Kapalı birim yuvar $B_\infty[0,1] = [-1,1] \times [-1,1]$ kenarlarıyla birlikte bu karedir.



Şekil 2.3: $\mathbb{R}^2$'de üç açık birim yuvar. Solda 1-normuna göre $B_1(0,1) = \{|x| + |y| < 1\}$, ortada Öklid normuna göre $B(0,1) = \{x^2 + y^2 < 1\}$, sağda maksimum normuna göre $B_\infty(0,1) = (-1,1) \times (-1,1)$. Kesikli kenarlar ve içi boş köşeler yuvarlara ait değildir.

■

Üç birim yuvar birbirinin içine yerleşir: köşeleri eksenler üzerindeki kare daireye, daire de kenarları eksenlere paralel kareye sığar,

$$B_1(0,1) \subseteq B(0,1) \subseteq B_\infty(0,1).$$

Bu iç içe duruş, normların denkliği teoremindeki (Teorem 1.5) $\| x \|_\infty \leq \| x \| \leq \| x \|_1$ eşitsizliklerinin yuvarlar diliyle söylenişidir; kapsamaların her boyutta ve her yarıçap için geçerli olduğunu Alıştırma 2.6 gösteriyor. Merkez değişince aynı biçimler yalnız yer değiştirir; yine de durum incelemesini yeni merkezle baştan yapalım.

Örnek 2.15 (Merkezi (2, 2) Olan Yuvar (1-Normu)). $\mathbb{R}^2$'de 1-normuna göre $(2,2)$ merkezli, 1 yarıçaplı $B_1((2,2),1)$ açık yuvarını belirleyiniz.

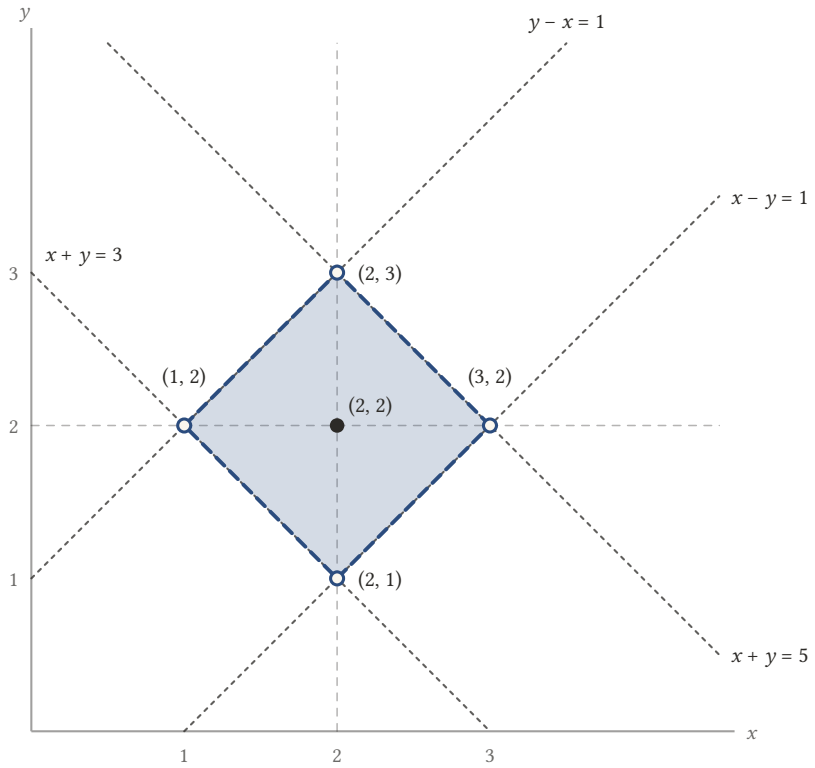
Çözüm.
Eşitsizlik. $(x,y) - (2,2) = (x-2, y-2)$ olduğundan

$$B_1((2,2),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| + |y-2| < 1\}.$$

Durumlar. Mutlak değerlerin işaretleri $x = 2$ ve $y = 2$ doğrularında değişir; dört durum vardır.

- $x \geq 2, y \geq 2$: $(x-2)+(y-2) < 1$, yani $x + y < 5$.
- $x < 2, y < 2$: $-(x-2)-(y-2) < 1$, yani $x + y > 3$.
- $x < 2, y \geq 2$: $-(x-2)+(y-2) < 1$, yani $y - x < 1$.
- $x \geq 2, y < 2$: $(x-2)-(y-2) < 1$, yani $x - y < 1$.

Birleştirme. Dört parça birleşince kenarları $x + y = 5$, $x + y = 3$, $y - x = 1$ ve $x - y = 1$ doğruları üzerinde olan, köşeleri $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 2)$ ve $(2, 1)$ olan karenin iç kısmı elde edilir; kenarlar dahil değildir. Bu, $B_1(0, 1)$ karesinin $(2, 2)$ vektörü kadar ötelenmişidir. Kapalı yuvar $B_1[(2, 2), 1]$ ise bu kare kenarlarıyla birliktedir.



Şekil 2.4: $B_1((2, 2), 1)$ yuvarı: $x + y = 5$, $x + y = 3$, $y - x = 1$ ve $x - y = 1$ doğrularının sınırladığı, köşeleri $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$ ve $(2, 3)$ olan karenin içi. Soluk kesikli $x = 2$ ve $y = 2$ doğruları dört durumu ayırır; karenin kenarları ve köşeleri yuvara ait değildir.

■

Örnek 2.16 (Merkezi (2, 2) Olan Yuvar (Öklid Normu)). $\mathbb{R}^2$'de Öklid normuna göre $B((2, 2), 1)$ açık yuvarını belirleyiniz.

Çözüm.
Koşul $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} < 1$'dir. İki taraf negatif olmadığından kare alınabilir:

$$B((2, 2), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 < 1\}.$$

Bu, merkezi $(2, 2)$ ve yarıçapı 1 olan çemberin iç kısmıdır; çember dahil değildir. Çember $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$ ve $y = 3$ doğrularına teğettir. Kapalı yuvar $B[(2, 2), 1]$ çemberiyle birlikte bu dairedir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.17 (Merkezi (2, 2) Olan Yuvar (Maksimum Normu)). $\mathbb{R}^2$'de maksimum normuna göre $B_\infty((2,2),1)$ açık yuvarını belirleyiniz.

> **Çözüm.**
> Koşul $\max\{|\ x-2\ |, |\ y-2\ |\} < 1$'dir. Örnek 2.14 çözümündeki gerekçeyle bu, $|\ x-2\ | < 1$ ve $|\ y-2\ | < 1$ koşullarının ikisinin birden sağlanmasına denktir:
>
> $$|\ x-2\ | < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3,$$
> $$|\ y-2\ | < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 3.$$
>
> Dolayısıyla
>
> $$B_\infty((2,2),1) = (1,3) \times (1,3),$$
>
> köşeleri $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,3)$, $(1,3)$ olan karenin iç kısmıdır. Kapalı yuvar $[1,3] \times [1,3]$ karesidir. Üç yuvar da $(2,2)$ merkezlidir ve birim yuvarlardaki kapsama burada da geçerlidir:
>
> $$B_1((2,2),1) \subseteq B((2,2),1) \subseteq B_\infty((2,2),1).$$
>
> ■

2.7 $\mathbb{R}^n$'de Aralıklar

$\mathbb{R}$'deki aralıkların $\mathbb{R}^n$'deki ikinci karşılığı, her koordinatı ayrı bir aralıkta değişen noktaların kümesidir.

Tanım 2.9 ($\mathbb{R}^n$'de Aralık (n-Hücre)). $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ ve her $j = 1, ..., n$ için $a_j \leq b_j$ olsun.

$$J = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j, j = 1, ..., n\}$$

kümesine $\mathbb{R}^n$'de **açık aralık** (açık n-hücre),

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, ..., n\}$$

kümesine de **kapalı aralık** (kapalı n-hücre) denir.

Yani $\mathbb{R}^n$'de bir aralık, $\mathbb{R}$'deki n aralığın kartezyen çarpımıdır: x noktası ancak ve ancak her x_j koordinatı kendi aralığındaysa kümededir. $I_j = [a_j, b_j]$ yazılırsa

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

ve aynı biçimde $J = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ olur. $n = 1$ için $\mathbb{R}$'deki olağan aralıklar, $n = 2$ için kenarları eksenlere paralel $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgeni, $n = 3$ için $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ dikdörtgenler prizması elde edilir. Bir j için $a_j = b_j$ ise J boştur; I ise o doğrultuda ezilmiş bir kutudur (örneğin $\mathbb{R}^2$'de bir doğru parçası).
Aralıklar, maksimum normunun yuvarlarıyla yakından ilişkilidir. $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. Bir maksimumun r'yi aşmaması, maksimumu alınan sayıların her birinin r'yi aşmaması demektir; dolayısıyla $\max_j |\ x_j - c_j\ | \leq r$ koşulu, her j için $|\ x_j - c_j\ | \leq r$, yani $c_j - r \leq x_j \leq c_j + r$ koşuluna denktir. Kesin eşitsizlikle de aynı gerekçe işler. Buna göre

$$B_\infty[c, r] = [c_1 - r, c_1 + r] \times ... \times [c_n - r, c_n + r],$$
$$B_\infty(c, r) = (c_1 - r, c_1 + r) \times ... \times (c_n - r, c_n + r)$$

olur: maksimum normunun yuvarları, bütün kenarları $2r$ uzunluğunda olan aralıklardır, yani küplerdir. Örnek 2.17 bunun $n = 2$ örneğidir.

Örnek 2.18 (Aralıklar Konvekstir). $\mathbb{R}^n$'deki her açık ve her kapalı aralığın konveks olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Kapalı aralık. $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ olsun; $z = tx + (1-t)y$ diyelim. z'nin j. koordinatı

$$z_j = tx_j + (1-t)y_j$$

sayısıdır. $x_j, y_j \in [a_j, b_j]$'dir ve $[a_j, b_j]$ ($a_j \leq b_j$ olduğundan boş olmayan) bir aralık olduğundan Önerme 2.3 gereği konvekstir; dolayısıyla $z_j \in [a_j, b_j]$ olur. Bu her j için doğru olduğundan $z \in I$'dır.
Açık aralık. $J = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ boşsa konvekstir. Boş değilse her j için $a_j < b_j$'dir ve (a_j, b_j) boş olmayan bir aralıktır. Kapalı aralıktaki gerekçe olduğu gibi işler: $x, y \in J$ ise her j için $x_j, y_j \in (a_j, b_j)$ ve bu aralığın konveksliğinden $tx_j + (1-t)y_j \in (a_j, b_j)$ olur; yani $tx + (1-t)y \in J$. ■

2.8 $\mathbb{R}^3$'te Vektörel Çarpım

İç çarpım iki vektöre bir sayı karşılık getirir. $\mathbb{R}^3$'te iki vektöre yine $\mathbb{R}^3$'ten bir vektör karşılık getiren bir çarpım daha vardır; bu çarpım yalnız $n = 3$ için tanımlanır.

Tanım 2.10 (Vektörel Çarpım). $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbb{R}^3$'ün iki vektörü olsun.

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\; x_3 y_1 - x_1 y_3,\; x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

vektörüne x ile y'nin **vektörel çarpımı** denir.

Yani vektörel çarpımın bileşenleri 2×2 determinantlardır. Formülü akılda tutmanın kolay yolu, ilk satırına doğal taban vektörleri e_1, e_2, e_3 yazılmış biçimsel bir determinantı ilk satıra göre açmaktır:

$$\begin{aligned} x \times y &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3. \end{aligned}$$

İkinci bileşendeki eksi işareti $-(x_1 y_3 - x_3 y_1) = x_3 y_1 - x_1 y_3$ verir. Determinant "biçimsel"dir, çünkü ilk satırında sayılar değil vektörler vardır; açılım yalnız bir hesap kuralı olarak kullanılır. Taban vektörleri için tanımdan

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3, \\ e_2 \times e_3 &= e_1, \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned}$$

bulunur. Örneğin $e_1 = (1,0,0)$ ve $e_2 = (0,1,0)$ için

$$e_1 \times e_2 = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\; 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0,\; 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0,0,1)$$

olur.

Örnek 2.19 (Vektörel Çarpım Hesabı). $x = (1,2,3)$ ve $y = (4,5,6)$ için $x \times y$ vektörünü hesaplayınız.

Çözüm.
Tanımdaki formülü uygulayalım:

$$\begin{aligned} x \times y &= (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5,\; 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6,\; 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) \\ &= (12 - 15,\; 12 - 6,\; 5 - 8) = (-3, 6, -3). \end{aligned}$$

Sonucu sınamanın kolay bir yolu, iç çarpımlara bakmaktır:

$$\begin{aligned} \langle x \times y, x \rangle &= -3 + 12 - 9 = 0, \\ \langle x \times y, y \rangle &= -12 + 30 - 18 = 0. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$x \times y$ hem x'e hem y'ye diktir. Bunun her zaman doğru olduğunu aşağıdaki teoremin (vii) şıkkı gösteriyor. ■

Teorem 2.3 (Vektörel Çarpımın Özellikleri). *$x, y, z \in \mathbb{R}^3$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.*
(i) $x \times x = 0$ *ve* $x \times y = -(y \times x)$;
(ii) $(\alpha x) \times y = \alpha(x \times y) = x \times (\alpha y)$;
(iii) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$;
(iv) $\langle x \times y, z\rangle = \langle x, y \times z\rangle$ *ve bu sayı satırları* x, y, z *olan determinanttır:*

$$\langle x \times y, z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

(v) $x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$;
(vi) $\| x \times y \|^2 = \| x \|^2 \| y \|^2 - \langle x, y\rangle^2$;
(vii) $\langle x \times y, x\rangle = \langle x \times y, y\rangle = 0$; *yani* $x \times y$ *hem* x*'e hem* y*'ye diktir.*

İspat.
Bileşenleri tek tek yazmak yerine şu gözlemi kullanacağız. (k, i, j) *üçlüsü* $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ *ya da* $(3, 1, 2)$ *olduğunda tanım gereği*

$$(x \times y)_k = x_i y_j - x_j y_i$$

olur; tanımdaki üç bileşen tam olarak bu üç üçlüye karşılık gelir. Bu üçlüler döngüseldir: (k, i, j) *bunlardan biriyse* (i, j, k) *ve* (j, k, i) *de bunlardan biridir.*
(i) x *ile* y*'nin yerini değiştirelim:*

$$(y \times x)_k = y_i x_j - y_j x_i = -(x_i y_j - x_j y_i) = -(x \times y)_k.$$

Dolayısıyla $y \times x = -(x \times y)$*'dir.* $y = x$ *alınırsa* $(x \times x)_k = x_i x_j - x_j x_i = 0$ *bulunur.*
(ii) *Her bileşende* x*'in bir,* y*'nin bir koordinatı çarpan olarak bulunur:*

$$\begin{aligned} \big((\alpha x) \times y\big)_k &= (\alpha x_i) y_j - (\alpha x_j) y_i = \alpha (x \times y)_k, \\ \big(x \times (\alpha y)\big)_k &= x_i (\alpha y_j) - x_j (\alpha y_i) = \alpha (x \times y)_k. \end{aligned}$$

(iii) *Her bileşen* y*'nin koordinatlarına göre lineerdir:*

$$\begin{aligned} \big(x \times (y + z)\big)_k &= x_i (y_j + z_j) - x_j (y_i + z_i) \\ &= (x_i y_j - x_j y_i) + (x_i z_j - x_j z_i) = (x \times y)_k + (x \times z)_k. \end{aligned}$$

(iv) *Tanımı yerine koyalım:*

$$\begin{aligned} \langle x \times y, z\rangle = {} & z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - z_2 (x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ & + z_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Sağ taraf, satırları x, y, z *olan determinantın üçüncü satıra göre açılımıdır. Öte yandan*

$$\begin{aligned} \langle x, y \times z\rangle = {} & x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2 (y_1 z_3 - y_3 z_1) \\ & + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) \end{aligned}$$

aynı determinantın birinci satıra göre açılımıdır. İki ifade de determinanta eşittir.
(v) $w = y \times z$ *diyelim. Döngüsellikten* (i, j, k) *ve* (j, k, i) *de izin verilen üçlülerdir; dolayısıyla*

$$\begin{aligned} w_i &= y_j z_k - y_k z_j, \\ w_j &= y_k z_i - y_i z_k \end{aligned}$$

olur. Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}(x \times w)_k &= x_i w_j - x_j w_i \\ &= x_i(y_k z_i - y_i z_k) - x_j(y_j z_k - y_k z_j) \\ &= y_k(x_i z_i + x_j z_j) - z_k(x_i y_i + x_j y_j).\end{aligned}$$

$\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ olduğundan parantezler $x_i z_i + x_j z_j = \langle x, z\rangle - x_k z_k$ ve $x_i y_i + x_j y_j = \langle x, y\rangle - x_k y_k$ biçiminde yazılır. Yerine koyarsak $x_k y_k z_k$ terimleri sadeleşir:

$$\begin{aligned}(x \times w)_k &= y_k\langle x, z\rangle - x_k y_k z_k - z_k\langle x, y\rangle + x_k y_k z_k \\ &= \langle x, z\rangle\, y_k - \langle x, y\rangle\, z_k.\end{aligned}$$

Bu her k için doğru olduğundan $x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle\, y - \langle x, y\rangle\, z$'dir.
(vi) *(iv)'ü $z = x \times y$ ile, ardından (v)'i (y, x, y) üçlüsüyle uygulayalım:*

$$\begin{aligned}\| x \times y \|^2 &= \langle x \times y, x \times y\rangle = \langle x, y \times (x \times y)\rangle \\ &= \text{chevron.l} x, \langle y, y\rangle x - \langle y, x\rangle y \text{chevron.r}.\end{aligned}$$

İç çarpımın lineerliği ve simetrisiyle (Önerme 1.2) son ifade

$$\| y \|^2 \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle\langle x, y\rangle = \| x \|^2 \| y \|^2 - \langle x, y\rangle^2$$

olur.
(vii) *(iv)'ü $z = x$ ile uygulayıp (i)'yi ve iç çarpımın özelliklerini kullanalım:*

$$\langle x \times y, x\rangle = \langle x, y \times x\rangle = -\langle x, x \times y\rangle = -\langle x \times y, x\rangle.$$

Bir sayı kendi negatifine eşitse sıfırdır; $\langle x \times y, x\rangle = 0$. İkinci eşitlik için (iv)'ü $z = y$ ile uygulayıp (i)'deki $y \times y = 0$ eşitliğini kullanalım:

$$\langle x \times y, y\rangle = \langle x, y \times y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

■

(i) özelliği, vektörel çarpımın sayıların çarpımından farklı davrandığını gösterir: çarpım değişmeli değil, ters değişmelidir. Birleşme özelliği de yoktur.

Örnek 2.20 (Vektörel Çarpım Birleşmeli Değildir). $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ eşitliğinin her $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ için sağlanmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$x = y = e_1$ ve $z = e_2$ alalım. Teorem 2.3 (i) gereği $e_1 \times e_1 = 0$'dır. (ii)'de $\alpha = 0$ alınırsa

$$0 \times e_2 = (0 \cdot e_1) \times e_2 = 0\,(e_1 \times e_2) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0 \times e_2 = 0.$$

Öte yandan $e_1 \times e_2 = e_3$ ve tanımdan

$$e_1 \times e_3 = (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = (0, -1, 0)$$

olduğundan $e_1 \times (e_1 \times e_2) = -e_2 \neq 0$'dır. İki taraf farklıdır. Aynı sonucu (v) de verir:

$$e_1 \times (e_1 \times e_2) = \langle e_1, e_2\rangle e_1 - \langle e_1, e_1\rangle e_2 = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 = -e_2.$$

■

(vi) özdeşliği, vektörel çarpımın uzunluğunu açıyla ilişkilendirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 2.2 (Vektörel Çarpımın Uzunluğu). *$x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve $\theta \in [0, \pi]$, x ile y arasındaki açı olsun (Tanım 1.8). O zaman*

$$\| x \times y \| = \| x \| \, \| y \| \sin\theta.$$

> ***İspat.***
> *Açının tanımı gereği $\langle x, y \rangle = \| x \| \, \| y \| \cos\theta$'dır. Teorem 2.3 (vi) ile*
>
> $$\begin{aligned} \| x \times y \|^2 &= \| x \|^2 \| y \|^2 - \| x \|^2 \| y \|^2 \cos^2\theta \\ &= \| x \|^2 \| y \|^2 (1 - \cos^2\theta) = \| x \|^2 \| y \|^2 \sin^2\theta. \end{aligned}$$
>
> *$\theta \in [0, \pi]$ olduğundan $\sin\theta \geq 0$'dır; iki tarafın negatif olmayan karekökleri alınırsa sonuç çıkar.* ■

Geometrik anlamı şudur: kenarları x ve y olan paralelkenarın tabanı $\| x \|$, bu tabana ait yüksekliği $\| y \| \sin\theta$'dır. Dolayısıyla $\| x \times y \|$, x ile y'nin gerdiği paralelkenarın alanıdır; aynı iki kenarın belirlediği üçgenin alanı bunun yarısıdır. Sonuç ayrıca sıfırdan farklı x, y için $x \times y = 0$ olmasının $\sin\theta = 0$, yani $\theta = 0$ ya da $\theta = \pi$ olmasına denk olduğunu söyler. Bunu açı kullanmadan da görebiliriz.

Önerme 2.4 (Vektörel Çarpımın Sıfır Olması). *$x, y \in \mathbb{R}^3$ için $x \times y = 0$ olması için gerek ve yeter koşul x ile y'nin lineer bağımlı olması, yani birinin öbürünün bir skaler katı olmasıdır.*

> ***İspat.***
> *(⇐) $y = \lambda x$ ise Teorem 2.3 (ii) ve (i) ile $x \times y = x \times (\lambda x) = \lambda(x \times x) = 0$. $x = \mu y$ ise aynı biçimde $x \times y = (\mu y) \times y = \mu(y \times y) = 0$.*
> *(⇒) $x \times y = 0$ olsun. $x = 0$ ise $x = 0 \cdot y$ olur ve iş biter. $x \neq 0$ olsun. (v)'i (x, x, y) üçlüsüne uygulayalım:*
>
> $$x \times (x \times y) = \langle x, y \rangle \, x - \langle x, x \rangle \, y.$$
>
> *Sol taraf $x \times 0$'dır ve (ii)'de $\alpha = 0$ alınırsa $x \times 0 = x \times (0 \cdot y) = 0$ olur. Demek ki $\| x \|^2 y = \langle x, y \rangle \, x$'tir. $x \neq 0$ olduğundan $\| x \|^2 \neq 0$'dır ve*
>
> $$y = \frac{\langle x, y \rangle}{\| x \|^2} \, x$$
>
> *bulunur; y, x'in bir skaler katıdır.* ■

2.9 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar metrik, konvekslik, yuvarlar, aralıklar ve vektörel çarpımla ilgili hesapları ve ispatları pekiştirir.

Alıştırma 2.1 (Metrikte Ters Üçgen Eşitsizliği). ρ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik olsun. Her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için

$$| \, \rho(x, z) - \rho(y, z) \, | \leq \rho(x, y)$$

olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Üçgen eşitsizliğini x'ten z'ye giderken y'ye uğrayarak yazalım:
>
> $$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad \text{yani} \quad \rho(x, z) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y).$$
>
> x ile y'nin rollerini değiştirip simetriyi kullanalım:
>
> $$\rho(y, z) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z), \quad \text{yani} \quad \rho(y, z) - \rho(x, z) \leq \rho(x, y).$$
>
> İkinci eşitsizlik $-\rho(x, y) \leq \rho(x, z) - \rho(y, z)$ demektir. İkisi birlikte

$$-\rho(x,y) \le \rho(x,z) - \rho(y,z) \le \rho(x,y)$$

verir; bu, istenen mutlak değer eşitsizliğidir. Öklid metriği için sonuç, ters üçgen eşitsizliğinin (Sonuç 1.2) $x-z$ ve $y-z$ vektörlerine uygulanmış hâlidir, çünkü $(x-z)-(y-z)=x-y$'dir. ■

Alıştırma 2.2 (Doğru Parçası Üzerinde Uzaklıklar). $a, b \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1]$ ve $z = ta + (1-t)b$ olsun. $d(a,z) + d(z,b) = d(a,b)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İki farkı $a-b$ cinsinden yazalım:

$$z - b = ta + (1-t)b - b = t(a-b),$$
$$a - z = a - ta - (1-t)b = (1-t)(a-b).$$

$t \ge 0$ ve $1-t \ge 0$ olduğundan normun homojenliği

$$d(z,b) = \| \, t(a-b) \, \| = t\, d(a,b),$$
$$d(a,z) = \| \, (1-t)(a-b) \, \| = (1-t)\, d(a,b)$$

verir. Toplarsak

$$d(a,z) + d(z,b) = (1-t+t)\, d(a,b) = d(a,b)$$

bulunur.
Yani doğru parçası üzerindeki bir nokta, üçgen eşitsizliğini eşitliğe çevirir ve parçayı $(1-t) : t$ oranında böler. Özel olarak orta nokta ($t = \frac{1}{2}$) iki uca eşit uzaklıktadır: $d(a,z) = d(z,b) = \frac{1}{2} d(a,b)$. ■

Alıştırma 2.3 (Yarı Uzay Konvekstir). $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \le c\}$$

yarı uzayının konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x, y \in H$ ve $t \in [0,1]$ olsun; $\langle a, x \rangle \le c$ ve $\langle a, y \rangle \le c$'dir. İç çarpımın lineerliği (Önerme 1.2) ile

$$\langle a, tx + (1-t)y \rangle = t \, \langle a, x \rangle + (1-t) \, \langle a, y \rangle.$$

$t \ge 0$ ve $1-t \ge 0$ olduğundan eşitsizlikleri bu sayılarla çarpabiliriz:

$$t \, \langle a, x \rangle + (1-t) \, \langle a, y \rangle \le tc + (1-t)c = c.$$

Dolayısıyla $tx + (1-t)y \in H$ ve H konvekstir.
$n = 2, a = (-1, 0), c = 0$ için $H = \{(x, y) : x \ge 0\}$, kapalı sağ yarı düzlemdir. Bu alıştırma Teorem 2.1 ile birleşince kapalı aralıkların konveksliğine ikinci bir kanıt verir: $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ kümesi, $\langle -e_j, x \rangle \le -a_j$ ve $\langle e_j, x \rangle \le b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ biçimindeki $2n$ yarı uzayın kesişimidir, çünkü $\langle e_j, x \rangle = x_j$'dir. ■

Alıştırma 2.4 (Konveks Kümelerin Toplamı). $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeler olsun.

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

kümesinin konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
A ya da B boşsa $A + B$ boştur ve konvekstir. $x, y \in A + B$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Tanım gereği öyle $a_1, a_2 \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ vardır ki $x = a_1 + b_1$ ve $y = a_2 + b_2$ olur. Terimleri yeniden gruplayalım:

$$tx + (1-t)y = \big(\, ta_1 + (1-t)a_2 \, \big) + \big(\, tb_1 + (1-t)b_2 \, \big) \, .$$

 CC BY-NC-SA 4.0

A konveks olduğundan birinci parantez A'dadır, B konveks olduğundan ikinci parantez B'dedir. Toplam, A'dan bir eleman ile B'den bir elemanın toplamı olduğundan $tx + (1-t)y \in A + B$'dir. ■

Alıştırma 2.5 (Yuvarlar Birim Yuvarın Ötelemesidir). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun.

$$B(x_0, r) = \{x_0 + ru : u \in B(0,1)\}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sağdaki kümeye K diyelim ve iki yönlü kapsamayı gösterelim.
$\boldsymbol{K \subseteq B(x_0, r).}$ $u \in B(0,1)$ ise homojenlikten

$$\| (x_0 + ru) - x_0 \| = \| ru \| = r \| u \| < r$$

olur; yani $x_0 + ru \in B(x_0, r)$.
$\boldsymbol{B(x_0, r) \subseteq K.}$ $x \in B(x_0, r)$ olsun ve $u = \dfrac{1}{r}(x - x_0)$ diyelim. O zaman $x = x_0 + ru$ ve

$$\| u \| = \frac{1}{r} \| x - x_0 \| < \frac{1}{r} \cdot r = 1$$

olduğundan $u \in B(0,1)$'dir; yani $x \in K$.
Her yuvar, birim yuvarın r katına büyütülüp x_0 kadar ötelenmesiyle elde edilir. İspatta normun yalnız homojenliği, yani (N3) koşulu kullanıldığından aynı eşitlik her N normu için de geçerlidir:

$$B_N(x_0, r) = \{x_0 + ru : u \in B_N(0,1)\}.$$

Aynı ispat $<$ yerine $\leq$ yazılarak kapalı yuvarlar için de işler: $B_N[x_0, r] = \{x_0 + ru : u \in B_N[0,1]\}$. $(2,2)$ merkezli yuvarların birim yuvarlarla aynı biçimde çıkmasının nedeni budur. ■

Alıştırma 2.6 (Üç Normun Yuvarlarının Kapsanması). $r > 0$ olsun. $\mathbb{R}^n$'de

$$B_1(0,r) \subseteq B(0,r) \subseteq B_\infty(0,r) \subseteq B_1(0,nr)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Normların denkliği teoremi (Teorem 1.5) her $x \in \mathbb{R}^n$ için üç eşitsizlik verir: birinci satırdan $\| x \|_\infty \leq \| x \|$, ikinci satırdan $\| x \| \leq \| x \|_1$, üçüncü satırdan $\| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty$. Kapsamaları sırayla gösterelim.
Birinci kapsama. $x \in B_1(0,r)$ ise $\| x \|_1 < r$ olduğundan $\| x \| \leq \| x \|_1 < r$ olduğundan $x \in B(0,r)$'dir.
İkinci kapsama. $x \in B(0,r)$ ise $\| x \| \leq \| x \|_\infty < r$ olduğundan $x \in B_\infty(0,r)$'dir.
Üçüncü kapsama. $x \in B_\infty(0,r)$ ise $\| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty < nr$ olduğundan $x \in B_1(0,nr)$'dir.
$n = 2$, $r = 1$ için ilk iki kapsama, birim yuvar örneklerinde gördüğümüz iç içe kare, daire ve karedir. Üçüncüsü, kenarları eksenlere paralel $(-1,1) \times (-1,1)$ karesinin, köşeleri $(\pm 2, 0)$ ve $(0, \pm 2)$ olan $B_1(0,2)$ karesinin içinde kaldığını söyler. Zincir 1-normunun bir yuvarıyla başlayıp yine 1-normunun, yarıçapı n katına çıkmış bir yuvarıyla biter: denk normların yuvarları, yarıçaplar uygun sabitlerle çarpıldığında birbirinin içine sığar. ■

Alıştırma 2.7 (Bir Kapalı Yuvar (1-Normu)). $\mathbb{R}^2$'de 1-normuna göre $(1,-1)$ merkezli, 2 yarıçaplı $B_1[(1,-1), 2]$ kapalı yuvarını belirleyiniz.

Çözüm.
Eşitsizlik. $(x,y) - (1,-1) = (x-1, y+1)$ olduğundan

$$B_1[(1,-1), 2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : | x - 1 | + | y + 1 | \leq 2\}.$$

Durumlar. İşaretler $x = 1$ ve $y = -1$ doğrularında değişir.

- $x \geq 1, y \geq -1$: $(x-1)+(y+1) \leq 2$, yani $x + y \leq 2$.
- $x < 1, y \geq -1$: $-(x-1)+(y+1) \leq 2$, yani $y \leq x$.
- $x < 1, y < -1$: $-(x-1)-(y+1) \leq 2$, yani $x + y \geq -2$.
- $x \geq 1, y < -1$: $(x-1)-(y+1) \leq 2$, yani $x - y \leq 4$.

Birleştirme. Dört parça birleşince kenarları $x + y = 2$, $y = x$, $x + y = -2$ ve $x - y = 4$ doğruları üzerinde olan kare, iç kısmıyla birlikte elde edilir. Köşeler ardışık kenar doğrularının kesişimidir: $x + y = 2$ ile $y = x$ doğruları $(1, 1)$'de, $y = x$ ile $x + y = -2$ doğruları $(-1, -1)$'de, $x + y = -2$ ile $x - y = 4$ doğruları $(1, -3)$'te, $x - y = 4$ ile $x + y = 2$ doğruları $(3, -1)$'de kesişir. Eşitsizlikler $\leq$ olduğundan kenarlar kümeye dahildir.
Sınama: dört köşenin de merkeze 1-normuna göre uzaklığı 2'dir; örneğin $(3, -1)$ için $\mid 3-1 \mid + \mid -1+1 \mid = 2$. Sonuç, Alıştırma 2.5 gereği beklenen biçimdedir: $B_1[0, 1]$ karesi 2 katına büyütülüp $(1, -1)$ kadar ötelenmiştir. ■

Alıştırma 2.8 (Kapalı Aralığın Köşegeni). $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ bir kapalı aralık olsun. Her $x, y \in I$ için

$$\| x - y \| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2 \right)^{1/2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x, y \in I$ ise her j için $a_j \leq x_j \leq b_j$ ve $a_j \leq y_j \leq b_j$'dir. İkinci eşitsizlik $-b_j \leq -y_j \leq -a_j$ demektir; birinciyle taraf tarafa toplarsak

$$a_j - b_j \leq x_j - y_j \leq b_j - a_j, \quad \text{yani} \quad \mid x_j - y_j \mid \leq b_j - a_j$$

bulunur. Negatif olmayan sayılarda kare almak eşitsizliği korur; karelerini toplayalım:

$$\| x - y \|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2.$$

Karekök alınırsa istenen eşitsizlik çıkar. Eşitlik $x = (b_1, \ldots, b_n)$ ve $y = (a_1, \ldots, a_n)$ noktalarında sağlanır; bu iki nokta I'dadır. Dolayısıyla sağdaki sayı, I'nın iki noktası arasındaki en büyük uzaklıktır: aralığın köşegeninin uzunluğu. $n = 2$ için bu sayı, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgeninin köşegen uzunluğudur:

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

■

Alıştırma 2.9 (Vektörel Çarpımla Üçgen Alanı). $\mathbb{R}^3$'te köşeleri $P = (1, 0, 1)$, $Q = (2, 1, 3)$ ve $R = (0, 2, 2)$ olan üçgenin alanını vektörel çarpımla bulunuz.

Çözüm.
Üçgenin P köşesinden çıkan kenar vektörleri

$$u = Q - P = (1, 1, 2),$$
$$v = R - P = (-1, 2, 1)$$

olsun. Sonuç 2.2 sonrasında gördüğümüz gibi $\| u \times v \|$, u ile v'nin gerdiği paralelkenarın alanıdır ve PQR üçgeni bu paralelkenarın yarısıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} u \times v &= \big(\,1\cdot 1 - 2\cdot 2,\; 2\cdot(-1) - 1\cdot 1,\; 1\cdot 2 - 1\cdot(-1) \,\big) \\ &= (-3, -3, 3). \end{aligned}$$

Bu vektörün uzunluğu

$$\| \,u \times v\, \| = \sqrt{9 + 9 + 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

olduğundan üçgenin alanı

$$\text{Alan} = \frac{1}{2} \| \,u \times v\, \| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olur.
Sınama: $\| \,u\, \|^2 = 6$, $\| \,v\, \|^2 = 6$ ve $\langle u, v \rangle = -1 + 2 + 2 = 3$'tür; Teorem 2.3 (vi) gereği $\| \,u \times v\, \|^2 = 36 - 9 = 27$ olmalıdır ve öyledir. Ayrıca $\| \,R - Q\, \| = \| \,(-2, 1, -1)\, \| = \sqrt{6}$ olduğundan üç kenarın uzunluğu da $\sqrt{6}$'dır: üçgen eşkenardır ve eşkenar üçgen alan formülü de $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ verir. ■

Bu bölümde kurduğumuz yuvarlar, $\mathbb{R}^n$'de "bir noktaya yakın olmak" kavramının ölçüsüdür; konvekslik ve aralıklar da ileride sık sık karşımıza çıkacak. Açık ve Kapalı Kümeler bölümünde yuvarlar yardımıyla komşuluk kavramını tanımlıyor, bunun üzerine $\mathbb{R}^n$'nin açık ve kapalı kümelerini kuruyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Açık ve Kapalı Kümeler

Analiz 1′de reel sayıların topolojisini aralıklar üzerine kurmuştuk: bir kümenin açık olması, her noktasının çevresinde kümeden taşmayan bir açık aralık bulunması demekti (bkz. Analiz 1). $\mathbb{R}^n$'de aralığın rolünü açık yuvar üstlenir. Metrik, Doğrular ve Konveks Kümeler bölümünde tanımladığımız $B(x_0, r)$, $B[x_0, r]$ ve $S(x_0, r)$ kümeleri (Tanım 2.6) bu bölümün temel araçlarıdır; iki nokta arasındaki yakınlığı artık mutlak değer yerine Öklid normu ölçer.
Tanımlar Analiz 1′dekilerle neredeyse kelimesi kelimesine aynıdır; değişen, kümelerin geometrisidir. Sayı doğrusunda bir aralığın "kenarı" iki uç noktadan ibaretti. Düzlemde ve uzayda ise kenar bir çember, bir doğru ya da bir yüzey olabilir ve bir kümenin kenarının bir kısmını içerip bir kısmını içermemesi çok daha kolaydır. Bu bölümde açık ve kapalı kümeleri, yığılma noktalarını ve sınırlı kümeleri tanıyor; kümeler için Bolzano–Weierstrass teoremini ispatlıyor ve kapalı kümeleri yığılma noktaları yardımıyla betimliyoruz.

3.1 Komşuluk

Bir noktanın yakınında olmak, o noktanın çevresindeki küçük bir açık yuvarın içinde kalmak demektir; bir kümenin bir noktayı "çevreleyip çevrelemediğini" bu fikirle ölçeriz.

Tanım 3.1 (Komşuluk). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $U \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad B(x_0, \varepsilon) \subseteq U$$

koşulu sağlanıyorsa U kümesine x_0 noktasının bir **komşuluğu** denir. $B(x_0, \varepsilon)$ yuvarının kendisine de x_0 noktasının **ε-komşuluğu** denir.

Yani U, x_0'ın bir komşuluğuysa x_0'a uzaklığı ε'dan küçük olan bütün noktalar U'dadır: x_0 ile U'nun dışı arasında bir açık yuvar sığacak kadar boşluk vardır. $x_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ olduğundan bir noktanın her komşuluğu o noktayı içerir. Analiz 1′de "komşuluk" sözcüğünü doğrudan $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığı için kullanmıştık; burada sözcük daha geniş anlamdadır: x_0 merkezli bir açık yuvarı içeren her küme x_0'ın bir komşuluğudur.
Örneğin $\mathbb{R}$'de $U = (-1, 1)$ kümesi 0'ın bir komşuluğudur, çünkü $B\big(0, \tfrac{1}{2}\big) = \big(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big) \subseteq (-1, 1)$'dir. Aynı küme 1'in komşuluğu değildir: 1'in her komşuluğu 1'i içermek zorundadır, oysa $1 \notin U$'dur.

Örnek 3.1 (Kapalı Yuvar Merkezinin Komşuluğudur). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $B[x_0, r]$ kapalı yuvarının x_0 noktasının bir komşuluğu olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\varepsilon = \dfrac{r}{2} > 0$ alalım. $x \in B(x_0, \tfrac{r}{2})$ ise $\| x - x_0 \| < \dfrac{r}{2} < r$ olur; dolayısıyla $\| x - x_0 \| \leq r$, yani $x \in B[x_0, r]$'dir. Böylece

$$B\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \subseteq B[x_0, r]$$

olur ve $B[x_0, r]$, x_0'ın bir komşuluğudur.
Aynı ε için $B(x_0, \tfrac{r}{2}) \subseteq B(x_0, r)$ de sağlandığından açık yuvar $B(x_0, r)$ da x_0'ın bir komşuluğudur. (Burada $\varepsilon = r$ seçmek de yeterdi.) ■

Örnek 3.2 (Kapalı Aralık Uç Noktasının Komşuluğu Değildir). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $[a, b]$ aralığının a noktasının bir komşuluğu olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tersine, $[a, b]$'nin a'nın bir komşuluğu olduğunu varsayalım. O zaman bir $\varepsilon > 0$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [a,b]$$

olur. Oysa $a - \frac{\varepsilon}{2}$ sayısı $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığındadır ve a'dan küçük olduğundan $[a,b]$'de değildir. Bu çelişki, $[a,b]$'nin a'nın komşuluğu olmadığını gösterir.
Aynı yolla, $b + \frac{\varepsilon}{2}$ sayısı kullanılarak, $[a,b]$'nin b'nin de komşuluğu olmadığı görülür; $[a,b)$ aralığı da a'nın komşuluğu değildir. Buna karşılık $a < c < b$ ise $\varepsilon = \min\{c-a, b-c\}$ için $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq [a,b]$ olduğundan $[a,b]$, uç noktaların arasındaki her c noktasının komşuluğudur. ■

3.2 Açık Kümeler

Komşuluk tek bir noktayı çevreler. Her noktasını çevreleyen kümeler ise bu bölümün ana konusudur.

Tanım 3.2 (Açık Küme). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Her $x \in U$ için

$$B(x,\varepsilon) \subseteq U$$

olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ varsa U kümesine **açık küme** denir.

Yani U açıktır ancak ve ancak her noktasının bir komşuluğudur: kümenin her noktasının çevresine kümeden taşmayan bir açık yuvar yerleştirilebilir. Yarıçap ε genellikle noktaya bağlıdır; kümenin kenarına yaklaşan noktalarda yuvarın küçülmesi gerekir. $n = 1$ için bu, Analiz 1'deki açık küme tanımının ta kendisidir (bkz. Analiz 1).
İlk örnek olarak açık birim yuvarı ele alalım; ardından sonucu her açık yuvara genelleştireceğiz.

Örnek 3.3 (Açık Birim Yuvar Açıktır). $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| < 1\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Keyfi bir $x_0 \in U$ alalım. $\| x_0 \| < 1$ olduğundan $\varepsilon = 1 - \| x_0 \| > 0$'dır. $B(x_0,\varepsilon) \subseteq U$ olduğunu gösterelim.
$y \in B(x_0,\varepsilon)$ olsun; o zaman $\| y - x_0 \| < \varepsilon$'dur. Üçgen eşitsizliği (Teorem 1.2) gereği

$$\begin{aligned} \| y \| &= \| (y - x_0) + x_0 \| \leq \| y - x_0 \| + \| x_0 \| \\ &< \varepsilon + \| x_0 \| = 1 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $y \in U$'dur. y keyfi olduğundan $B(x_0,\varepsilon) \subseteq U$; x_0 keyfi olduğundan U açıktır. ■

Seçtiğimiz yarıçap, x_0'ın birim yuvarın yüzeyine olan uzaklığıdır. Aynı fikir her açık yuvarda işler.

Teorem 3.1 (Açık Yuvar Açıktır). *$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $B(x_0,r)$ açık yuvarı $\mathbb{R}^n$'de açık bir kümedir.*

İspat.
Keyfi bir $x \in B(x_0,r)$ alalım. $\| x - x_0 \| < r$ olduğundan

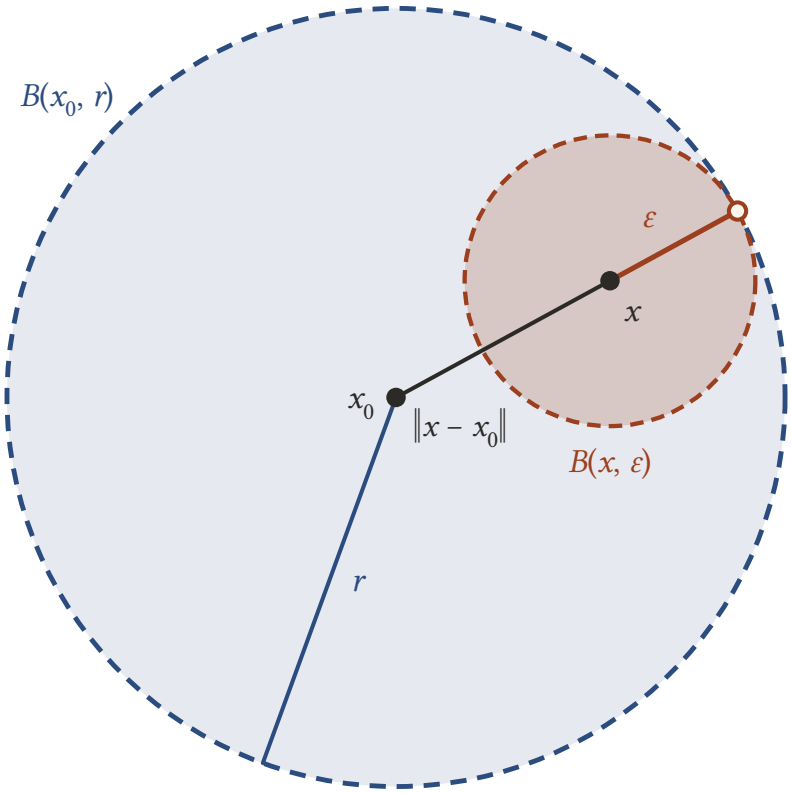
$$\varepsilon = r - \| x - x_0 \| > 0$$

sayısını tanımlayabiliriz. $B(x,\varepsilon) \subseteq B(x_0,r)$ olduğunu gösterelim. $y \in B(x,\varepsilon)$ ise $\| y - x \| < \varepsilon$'dur ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \| y - x_0 \| &= \| (y - x) + (x - x_0) \| \leq \| y - x \| + \| x - x_0 \| \\ &< \varepsilon + \| x - x_0 \| = r \end{aligned}$$

bulunur; yani $y \in B(x_0,r)$'dir. y keyfi olduğundan $B(x,\varepsilon) \subseteq B(x_0,r)$ olur. Her $x \in B(x_0,r)$ için böyle bir ε bulunduğundan $B(x_0,r)$ açıktır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.1: $x_0 = (0, 0)$ *merkezli,* $r = 2$ *yarıçaplı açık yuvar ve içindeki* $x = (1{,}1;\ 0{,}6)$ *noktası.* $\varepsilon = r - \|x - x_0\| \approx 0{,}747$ *yarıçaplı* $B(x, \varepsilon)$ *yuvarı büyük yuvara içten teğettir ve tamamen onun içinde kalır. Kesikli çemberler yuvarlara ait değildir.*

Sezgisel olarak: x'in büyük yuvarın yüzeyine uzaklığı $r - \| x - x_0 \|$'dır ve bu uzaklığı aşmayan yarıçaplı her yuvar büyük yuvarın içinde kalır. ■

$n = 1$ için $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ olduğundan teorem, açık aralıkların açık olduğunu söyler: $a < b$ ise (a, b) aralığı $\frac{a+b}{2}$ merkezli, $\frac{b-a}{2}$ yarıçaplı yuvardır. Öte yandan Örnek 3.2 gereği $[a, b]$, $[a, b)$ ve $(a, b]$ aralıkları açık değildir: her biri, içerdiği bir uç noktanın komşuluğu değildir.
Kapalı yuvarın dışı da benzer biçimde davranır: yuvarın dışındaki bir noktanın çevresine yuvara değmeyen küçük bir yuvar yerleştirilebilir.

Teorem 3.2 (Kapalı Yuvarın Tümleyeni Açıktır). *$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. Kapalı yuvarın tümleyeni*

$$\mathbb{R}^n \setminus B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| > r\}$$

$\mathbb{R}^n$'de açık bir kümedir.

İspat.
Keyfi bir $y \in \mathbb{R}^n \setminus B[x_0, r]$ alalım. $y \notin B[x_0, r]$ olduğundan $\| y - x_0 \| > r$, yani

$$\rho = \| y - x_0 \| - r > 0$$

olur. $B(y, \rho) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B[x_0, r]$ olduğunu gösterelim. $x \in B(y, \rho)$ olsun; $\| x - y \| < \rho$'dur. Üçgen eşitsizliğinden $\| y - x_0 \| \leq \| y - x \| + \| x - x_0 \|$ olduğundan

$$\| x - x_0 \| \geq \| y - x_0 \| - \| x - y \| > \| y - x_0 \| - \rho = r$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Böylece $\| x - x_0 \| > r$*, yani* $x \notin B[x_0, r]$*'dir.* x *keyfi olduğundan* $B(y, \rho)$ *tümleyenin içindedir;* y *keyfi olduğundan tümleyen açıktır.* ■

Bir kümenin açık olup olmadığını tanımdan incelerken hep aynı yolu izledik. Bu yolu bir reçete olarak yazalım.

Üç adımda açıklık incelemesi

1. **Noktayı al.** Kümenin keyfi bir noktası alınır ve kümeyi tanımlayan eşitsizlikler bu nokta için yazılır.
2. **Yarıçapı seç.** Her kesin eşitsizlikte iki yan arasındaki fark pozitiftir (örneğin $1 - \| x_0 \|$ ya da $1 - x_0$); eşitsizlik bir koordinat ya da $\| x - a \|$ içeriyorsa ε bu farkların en küçüğü seçilebilir; başka durumlarda fark uygun bir sabite bölünür.
3. **Yuvarı denetle.** Yuvarın her noktasının eşitsizlikleri sağladığı, üçgen eşitsizliğiyle ya da her bileşen için geçerli olan $| x_j - y_j | \leq \| x - y \|$ eşitsizliğiyle (Teorem 1.5) gösterilir.

Küme açık değilse tersine, kümeyi tanımlayan bir eşitsizliğin eşitlikle sağlandığı bir nokta seçilir ve her $\varepsilon > 0$ için yuvarın içinde ama kümenin dışında kalan bir nokta gösterilir; çoğu zaman bir bileşeni $\frac{\varepsilon}{2}$ kaydırılmış nokta işe yarar.

Örnek 3.4 (Açık Şerit Açıktır). $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Nokta. Keyfi bir $(x_0, y_0) \in A$ alalım; $0 < x_0 < 1$'dir. y_0 üzerinde hiçbir koşul yoktur.
Yarıçap. İki kesin eşitsizlikten $x_0 - 0 = x_0 > 0$ ve $1 - x_0 > 0$ farkları elde edilir.

$$\varepsilon = \min\{x_0, 1 - x_0\} > 0$$

seçelim.
Yuvar. $(x, y) \in B\big((x_0, y_0), \varepsilon\big)$ olsun. O zaman

$$| x - x_0 | = \sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

olur. $\varepsilon \leq x_0$ ve $\varepsilon \leq 1 - x_0$ olduğundan

$$0 \leq x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \leq 1$$

bulunur. Yani $0 < x < 1$ ve $(x, y) \in A$'dır. Böylece $B\big((x_0, y_0), \varepsilon\big) \subseteq A$ olur ve A açıktır.
Şeridin her noktası için uygun yarıçap, noktanın şeridi sınırlayan $x = 0$ ve $x = 1$ doğrularına olan uzaklıklarının küçüğüdür. ■

Açık olmayan bir kümede öyle bir nokta vardır ki bu noktanın çevresine ne kadar küçük bir yuvar konursa konsun yuvar kümeden taşar. Böyle kümelerin tipik örnekleri "incelmiş" kümelerdir: düzlemdeki bir doğru ya da çember, uzaydaki bir düzlem ya da küre yüzeyi hiçbir açık yuvarı içeremez.

Örnek 3.5 (Yarım Silindir Açık Değildir).

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 > 0\}$$

kümesinin $\mathbb{R}^3$'te açık olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
S, ekseni x_1 ekseni olan birim silindir yüzeyinin $x_1 > 0$ kısmıdır. Tersine, S'nin açık olduğunu varsayalım. $a = (1, 0, 1)$ noktası S'dedir, çünkü $0^2 + 1^2 = 1$ ve $1 > 0$'dır. S açık olduğundan $B(a, \varepsilon) \subseteq S$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır.
$p = \big(1, 0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\big)$ noktasını ele alalım.

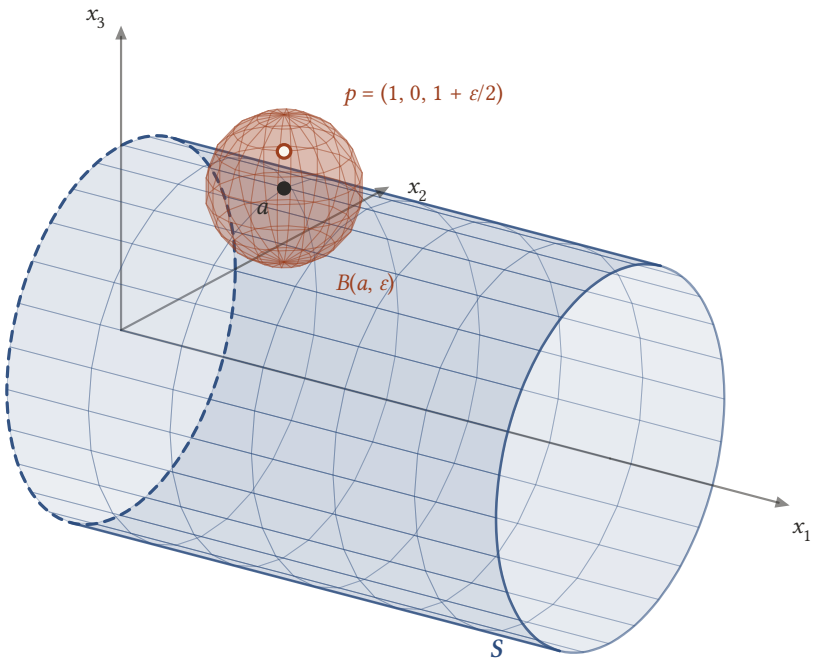
$$\| p - a \| = \| \left(0, 0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan $p \in B(a,\varepsilon)$'dir. Öte yandan

$$0^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} > 1$$

olduğundan $p \notin S$'dir. Bu, $B(a,\varepsilon) \subseteq S$ ile çelişir; S açık değildir.



Şekil 3.2: S yarım silindirinin $x_1 \le 3$ kısmı; kesikli $x_1 = 0$ çemberi S'ye ait değildir. $a = (1, 0, 1)$ merkezli $B(a, \varepsilon)$ yuvarı yüzeyden taşar: $p = (1, 0, 1 + \varepsilon/2)$ yuvarın içindedir ama S'de değildir.

Aynı akıl yürütme S'nin her noktasında işler: yüzeyin hiçbir noktası, çevresindeki bir yuvarla birlikte yüzeyde kalamaz. ■

Örnek 3.6 (Dört Boyutta Açık Olmayan Bir Küme).

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 4,\, z > 0,\, t \geq 0\}$$

kümesinin $\mathbb{R}^4$'te açık olmadığını $a = (2, 0, 1, 0)$ noktasından yararlanarak gösteriniz.

Çözüm.
Açık küme tanımının olumsuzunu yazalım: A açık değildir ancak ve ancak

$$\exists\, a \in A \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad B(a,\varepsilon) \not\subseteq A$$

sağlanır. Önce $a \in A$ olduğunu doğrulayalım: $2^2 + 0^2 = 4$, $z = 1 > 0$ ve $t = 0 \geq 0$'dır.
Şimdi keyfi bir $\varepsilon > 0$ alalım ve $B(a,\varepsilon)$'da olup A'da olmayan bir nokta bulalım. a'nın yalnız ikinci bileşenini değiştirip $p = (2, \frac{\varepsilon}{2}, 1, 0)$ diyelim.

$$\| p - a \| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olduğundan $p \in B(a,\varepsilon)$'dir. Ama

$$2^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 4 + \frac{\varepsilon^2}{4} > 4$$

 CC BY-NC-SA 4.0

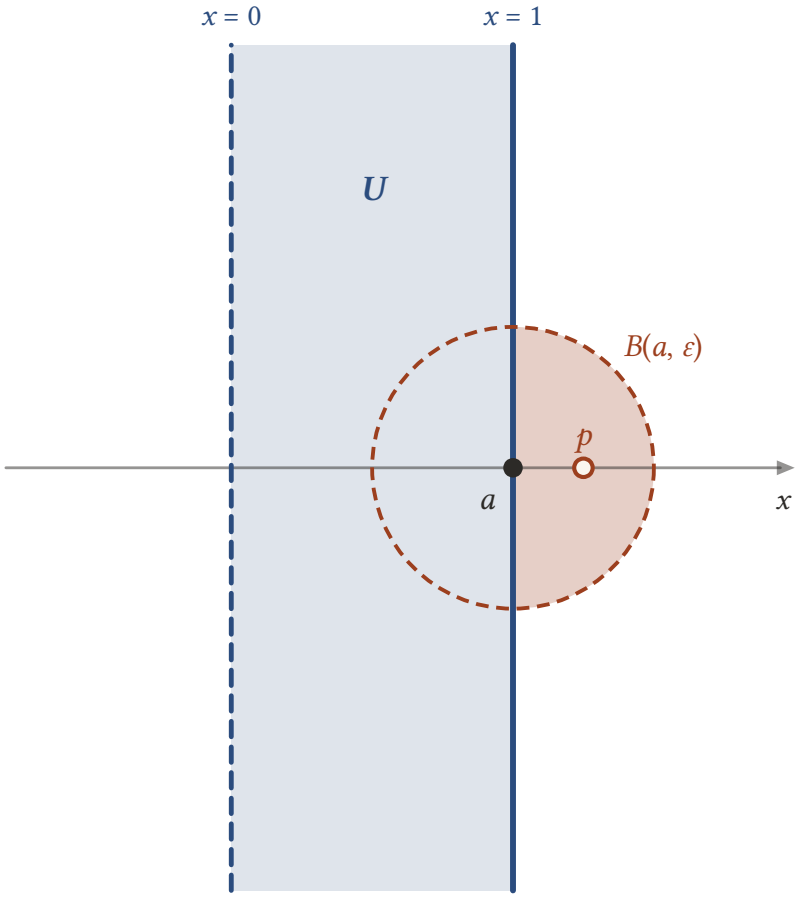
olduğundan $p \notin A$'dır. Her $\varepsilon > 0$ için $B(a,\varepsilon) \not\subseteq A$ olduğundan A açık değildir. ■

Örnek 3.7 (Bir Kenarı Dahil Şerit Açık Değildir). $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ kümesinin açık olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Sorun, $x \leq 1$ eşitsizliğinin eşitlikle sağlandığı $x = 1$ doğrusundaki noktalardadır. $a = (1,0)$ alalım; $0 < 1 \leq 1$ olduğundan $a \in U$'dur.
Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $p = (1 + \frac{\varepsilon}{2}, 0)$ noktası

$$\| p - a \| = \| \left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

sağladığından $B(a,\varepsilon)$'dadır, ama $1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1$ olduğundan $p \notin U$'dur. Dolayısıyla hiçbir $\varepsilon > 0$ için $B(a,\varepsilon) \subseteq U$ olmaz; U açık değildir.



Şekil 3.3: $U = \{0 < x \leq 1\}$ şeridi: $x = 0$ doğrusu kümeye ait değil (kesikli), $x = 1$ doğrusu ait (düz). $a = (1, 0)$ merkezli, $\varepsilon = 0{,}5$ yarıçaplı yuvarın sağ yarısı şeridin dışındadır; $p = (1{,}25; 0)$ bu yarıdadır.

Kenarlarından biri kümeye katılmış bu şerit, sayı doğrusundaki $(0, 1]$ aralığının düzlemdeki karşılığıdır. ■

3.3 Açık Kümelerin Özellikleri

Açık kümelerden yeni açık kümeler üretmenin iki temel yolu vardır: keyfi birleşim ve sonlu kesişim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 3.3 (Açık Kümelerin Özellikleri). *$\mathbb{R}^n$'nin açık kümeleri şu özellikleri sağlar.*
(a) *$\varnothing$ ve $\mathbb{R}^n$ açık kümelerdir.*
(b) *Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi açıktır: $U_1, \ldots, U_m \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ise $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$ açıktır.*
(c) *Keyfi sayıda açık kümenin birleşimi açıktır: Λ bir indis kümesi ve $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ açık kümelerden oluşan bir aile ise $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ açıktır.*

İspat.
(a) *Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $B(x,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ olduğundan $\mathbb{R}^n$ açıktır. Boş kümenin hiç elemanı olmadığından "her $x \in \varnothing$ için ..." diye başlayan koşulu bozacak bir nokta yoktur; $\varnothing$ açıktır.*
(b) *$U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ diyelim. $U = \varnothing$ ise (a) gereği açıktır; $U \neq \varnothing$ olsun ve keyfi bir $x \in U$ alalım. Her $i = 1, \ldots, m$ için $x \in U_i$'dir ve U_i açık olduğundan*

$$B(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$$

olacak biçimde bir $\varepsilon_i > 0$ vardır. Sonlu sayıda pozitif sayının en küçüğü de pozitiftir:

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\} > 0.$$

Her i için $\varepsilon \leq \varepsilon_i$ olduğundan $B(x,\varepsilon) \subseteq B(x,\varepsilon_i) \subseteq U_i$ olur; öyleyse

$$B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} U_i = U.$$

x keyfi olduğundan U açıktır.
(c) *$V = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ diyelim ve keyfi bir $x \in V$ alalım. Birleşimin tanımı gereği $x \in U_{\alpha_0}$ olan bir $\alpha_0 \in \Lambda$ vardır. U_{α_0} açık olduğundan bir $\varepsilon_0 > 0$ için*

$$B(x, \varepsilon_0) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq V$$

olur. x keyfi olduğundan V açıktır. Burada indis kümesinin sonlu ya da sonsuz olması rol oynamadı; x'i içeren tek bir üye yetti. ■

$n = 1$ için bunlar Analiz 1'deki özelliklerin aynısıdır (bkz. Analiz 1).
Bu üç özellik, "topoloji" adının kaynağıdır. Bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir τ ailesi $\varnothing$ ile X'i içeriyorsa ve ailenin üyelerinin sonlu kesişimleri de keyfi birleşimleri de yine ailede kalıyorsa τ'ya X üzerinde bir **topoloji**, (X,τ) ikilisine de bir **topolojik uzay** denir. Teorem 3.3, açık yuvarlar yardımıyla tanımlanan açık kümeler ailesinin $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir topoloji oluşturduğunu söyler; $\mathbb{R}^n$ bu topolojiyle bir topolojik uzaydır. "$\mathbb{R}^n$'nin topolojisi" dendiğinde açık kümeler ve onlardan türetilen kavramların (kapalı küme, yığılma noktası, sınır, kapanış, kompaktlık, ...) bütünü kastedilir.

Örnek 3.8 (Sonsuz Sayıda Yuvarın Birleşimi).

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B\left((k,0), \frac{1}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$$

kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $k \in \mathbb{N}$ için $B\big((k,0), \frac{1}{2}\big)$, $(k,0)$ merkezli ve $\frac{1}{2}$ yarıçaplı bir açık yuvardır ve Teorem 3.1 gereği açıktır. U bu açık kümelerin birleşimi olduğundan Teorem 3.3 (c) gereği açıktır.
Tanıma dönüp her noktada ayrı ayrı yarıçap aramaya gerek kalmadı. U, x ekseni boyunca dizilmiş sonsuz sayıda ayrık diskten oluşur (komşu iki diskin merkezleri arasındaki uzaklık 1'dir); böyle "dağınık" bir küme de açık olabilir. ■

Örnek 3.9 (Açık Halka Açıktır). $a \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < s < r$ olsun.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : s <\| x - a \| < r\}$$

kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Nokta.** Keyfi bir $y \in A$ alalım; $s <\| y - a \| < r$'dir.
> **Yarıçap.** İki kesin eşitsizlikten $\| y - a \| - s > 0$ ve $r - \| y - a \| > 0$ farkları elde edilir.
>
> $$\delta = \min\left\{ \| y - a \| - s,\, r - \| y - a \| \right\} > 0$$
>
> seçelim.
> **Yuvar.** $w \in B(y, \delta)$ olsun; $\| w - y \| < \delta$'dır. Üst sınır için üçgen eşitsizliğinden
>
> $$\| w - a \| \leq \| w - y \| + \| y - a \| < \delta + \| y - a \| \leq r$$
>
> olur. Alt sınır için üçgen eşitsizliği $\| y - a \| \leq \| y - w \| + \| w - a \|$ biçiminde kullanılırsa
>
> $$\| w - a \| \geq \| y - a \| - \| w - y \| > \| y - a \| - \delta \geq s$$
>
> bulunur. Böylece $s <\| w - a \| < r$, yani $w \in A$'dır. $B(y, \delta) \subseteq A$ olduğundan A açıktır.
> Aynı sonuca daha kısa bir yoldan da ulaşılır:
>
> $$A = B(a, r) \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus B[a, s] \right)$$
>
> yazılabilir. Birinci küme Teorem 3.1, ikincisi Teorem 3.2 gereği açıktır; iki açık kümenin kesişimi Teorem 3.3 (b) gereği açıktır. ■

Teorem 3.3 (b) şıkkındaki "sonlu" sözcüğü atlanamaz. İspatta ε'u sonlu sayıda pozitif sayının en küçüğü olarak seçtik; sonsuz sayıda pozitif sayının ise en küçüğü olmayabilir ve bunların infimumu 0 olabilir.

Örnek 3.10 (Açık Kümelerin Sonsuz Kesişimi). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) = \{x_0\}$$

olduğunu ve bu kümenin açık olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Eşitlik.** Her k için $\| x_0 - x_0 \| = 0 < \frac{1}{k}$ olduğundan x_0 bütün yuvarlardadır. Tersine $y \neq x_0$ olsun; $d = \| y - x_0 \| > 0$'dır. Arşimet özelliği gereği $\dfrac{1}{k} < d$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır (bkz. Analiz 1); bu k için $y \notin B\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$ olur ve y kesişimde değildir. Kesişim yalnız x_0'dan oluşur.
> **Açık değil.** $\varepsilon > 0$ verilsin. $x_0 + \frac{\varepsilon}{2} e_1$ noktasının x_0'a uzaklığı $\frac{\varepsilon}{2} \| e_1 \| = \frac{\varepsilon}{2}$'dir; bu nokta $B(x_0, \varepsilon)$'dadır ama x_0'dan farklı olduğundan $\{x_0\}$'da değildir. Hiçbir $\varepsilon > 0$ için $B(x_0, \varepsilon) \subseteq \{x_0\}$ olmaz.
> Böylece açık kümelerin sonsuz kesişimi açık olmayabilir. $n = 1$ ve $x_0 = 0$ için bu,
>
> $$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \{0\}$$
>
> örneğidir. ■

3.4 Kapalı Kümeler

Açık kümelerin tümleyenleri, analizde en az açık kümeler kadar önemli ikinci bir küme sınıfı oluşturur.

Tanım 3.3 (Kapalı Küme). $F \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Tümleyeni

$$F^c = \mathbb{R}^n \setminus F = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin F\}$$

açık bir küme ise F'ye **kapalı küme** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani F kapalıdır ancak ve ancak F'nin dışındaki her noktanın çevresine F'ye hiç değmeyen bir açık yuvar yerleştirilebilir. Tümleyenin tümleyeni kümenin kendisi olduğundan, yani $(F^c)^c = F$ olduğundan, bir küme ancak ve ancak tümleyeni kapalıysa açıktır. $n = 1$ için tanım Analiz 1'dekiyle aynıdır (bkz. Analiz 1).

Sonuç 3.1 (Kapalı Yuvar Kapalıdır). *$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $B[x_0, r]$ kapalı yuvarı kapalı bir kümedir.*

> ***İspat.***
> *$B[x_0, r]$'nin tümleyeni Teorem 3.2 gereği açıktır; tanım gereği $B[x_0, r]$ kapalıdır.* ■

Adlandırma böylece yerini bulur: açık yuvar açık, kapalı yuvar kapalı bir kümedir. $n = 1$ için $B[x_0, r] = [x_0 - r, x_0 + r]$ olduğundan kapalı aralıklar kapalıdır.

Örnek 3.11 (Tek Nokta Kümesi Kapalıdır). $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\{a\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ kümesinin açık olduğunu göstermeliyiz. Keyfi bir $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ alalım. $x \neq a$ olduğundan $\| x - a \| > 0$'dır;
>
> $$\varepsilon = \frac{\| x - a \|}{2} > 0$$
>
> seçelim. $\| x - a \| = 2\varepsilon > \varepsilon$ olduğundan $a \notin B(x, \varepsilon)$'dir; yani $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. x keyfi olduğundan tümleyen açıktır ve $\{a\}$ kapalıdır. ■

Açık kümelerin özellikleri tümleyene geçilerek kapalı kümelere taşınır. Köprüyü De Morgan kuralları kurar: her $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ailesi için

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c,$$
$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c.$$

Birleşimin tümleyeni tümleyenlerin kesişimi, kesişimin tümleyeni tümleyenlerin birleşimidir.

Teorem 3.4 (Kapalı Kümelerin Özellikleri). *$\mathbb{R}^n$'nin kapalı kümeleri şu özellikleri sağlar.*
(a) *$\varnothing$ ve $\mathbb{R}^n$ kapalı kümelerdir.*
(b) *Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalıdır: $F_1, \ldots, F_m \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı ise $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ kapalıdır.*
(c) *Keyfi sayıda kapalı kümenin kesişimi kapalıdır: $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ kapalı kümelerden oluşan bir aile ise $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$ kapalıdır.*

> ***İspat.***
> ***(a)*** *$\varnothing^c = \mathbb{R}^n$ ve $(\mathbb{R}^n)^c = \varnothing$ kümeleri Teorem 3.3 (a) gereği açıktır; dolayısıyla $\varnothing$ ve $\mathbb{R}^n$ kapalıdır.*
> ***(b)*** *Her F_i^c açıktır. De Morgan kuralından*
>
> $$\Big(\bigcup_{i=1}^{m} F_i\Big)^c = \bigcap_{i=1}^{m} F_i^c$$
>
> *olur. Sağ yan sonlu sayıda açık kümenin kesişimidir ve Teorem 3.3 (b) gereği açıktır. Tümleyeni açık olduğundan $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ kapalıdır.*
> ***(c)*** *Her F_α^c açıktır ve De Morgan kuralından*
>
> $$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha^c$$
>
> *olur. Sağ yan açık kümelerin birleşimidir ve Teorem 3.3 (c) gereği açıktır. Öyleyse $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$ kapalıdır.* ■

Sonuç 3.2 (Sonlu Kümeler Kapalıdır). *$\mathbb{R}^n$'nin sonlu her alt kümesi kapalıdır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Boş küme Teorem 3.4 (a) gereği kapalıdır. $F = \{p_1, ..., p_m\}$ *ise*

$$F = \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup ... \cup \{p_m\}$$

sonlu sayıda tek nokta kümesinin birleşimidir. Örnek 3.11 gereği her $\{p_i\}$ *kapalıdır; Teorem 3.4 (b) gereği* F *kapalıdır.* ■

Örnek 3.12 (Kapalı Halka Kapalıdır). $a \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < s < r$ olsun.

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : s \leq \| x - a \| \leq r\}$$

kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
K, $s \leq \| x - a \|$ ve $\| x - a \| \leq r$ koşullarının ikisini birden sağlayan noktalardan oluşur. Bir nokta ancak bu iki koşuldan en az birini bozduğunda K'nin dışındadır:

$$\begin{aligned} K^c &= \{x : \| x - a \| < s\} \cup \{x : \| x - a \| > r\} \\ &= B(a, s) \cup \left(\mathbb{R}^n \setminus B[a, r] \right). \end{aligned}$$

$B(a, s)$ Teorem 3.1 gereği, $\mathbb{R}^n \setminus B[a, r]$ ise Teorem 3.2 gereği açıktır. İki açık kümenin birleşimi Teorem 3.3 (c) gereği açık olduğundan K^c açıktır ve K kapalıdır.
Tümleyeni yazarken "ve" bağlacının "veya" bağlacına dönüştüğüne dikkat edelim. Aynı gerekçe $s = r$ için de işler: bu durumda K, yuvar yüzeyi $S(a, r) = \{x : \| x - a \| = r\}$ olur; dolayısıyla yuvar yüzeyi de kapalı bir kümedir. ■

Teorem 3.4 (b) şıkkındaki "sonlu" sözcüğü de atlanamaz. Aşağıdaki örnek, Örnek 3.10 ile verilen örneğin tümleyen tarafındaki karşılığıdır.

Örnek 3.13 (Kapalı Kümelerin Sonsuz Birleşimi). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B\left[x_0, \frac{k}{k+1}\right] = B(x_0, 1)$$

olduğunu ve bu kümenin kapalı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Eşitlik. Her k için $\frac{k}{k+1} < 1$ olduğundan $B\left[x_0, \frac{k}{k+1}\right] \subseteq B(x_0, 1)$'dir; birleşim $B(x_0, 1)$'in içindedir. Tersine $x \in B(x_0, 1)$ olsun; $d = \| x - x_0 \| < 1$'dir. Arşimet özelliği gereği $\dfrac{1}{k+1} < 1 - d$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu k için

$$\| x - x_0 \| = d < 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

olur; yani $x \in B\left[x_0, \frac{k}{k+1}\right]$ ve x birleşimdedir.
Kapalı değil. $B(x_0, 1)$'in tümleyeninin açık olmadığını gösterelim. $z = x_0 + e_1$ için $\| z - x_0 \| = \| e_1 \| = 1$ olduğundan z tümleyendedir. $\varepsilon > 0$ verilsin; $c = \min\{\varepsilon, 1\}$ ve $w = x_0 + (1 - \frac{c}{2})e_1$ diyelim. O zaman

$$\begin{aligned} \| w - z \| &= \| -\frac{c}{2} e_1 \| = \frac{c}{2} < \varepsilon, \\ \| w - x_0 \| &= 1 - \frac{c}{2} < 1 \end{aligned}$$

olur. Yani $w \in B(z, \varepsilon)$'dir ama $w \in B(x_0, 1)$ olduğundan w tümleyende değildir. z'nin hiçbir yuvarı tümleyenin içinde kalmaz; tümleyen açık değildir ve $B(x_0, 1)$ kapalı değildir.
Kapalı yuvarlar büyüyerek açık yuvarı doldurur, ama yüzeydeki noktalar hiçbir kapalı yuvara girmez. $n = 1$ için benzer bir örnek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}, 1-\frac{1}{k+1}\right] = (0,1)$$

eşitliğidir. Her aralık $(0,1)$'in içindedir; $x \in (0,1)$ ise Arşimet özelliğiyle $\frac{1}{k+1} < \min\{x, 1-x\}$ olan bir k seçilir ve x bu k için yazılan aralıktadır. Kapalı aralıkların sonsuz birleşimi, kapalı olmayan bir açık aralık vermiştir. ■

Örnek 3.14 (Bir Kenarı Eksik Kare Kapalı Değildir).

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

kümesinin kapalı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
A kapalıdır ancak ve ancak A^c açıktır. Bir nokta ancak dört eşitsizlikten en az birini bozduğunda A'nın dışındadır:

$$A^c = \{(x,y) : x \leq 0 \text{ veya } x > 1 \text{ veya } y < 0 \text{ veya } y > 1\}.$$

A^c'nin açık olmadığını gösterelim. A'ya ait olmayan kenar, $x = 0$ doğrusu üzerindeki kenardır. Bu kenarın ortasındaki $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ noktası $x \leq 0$ koşulunu sağladığından A^c'dedir. $\delta > 0$ verilsin ve $t = \min\left\{\frac{\delta}{2}, 1\right\}$ diyelim. $\left(t, \frac{1}{2}\right)$ noktası için

$$\| \left(t, \frac{1}{2}\right) - \left(0, \frac{1}{2}\right) \| = t < \delta$$

olduğundan bu nokta $B\left((0, \frac{1}{2}), \delta\right)$'dadır. Öte yandan $0 < t \leq 1$ ve $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ olduğundan $\left(t, \frac{1}{2}\right) \in A$'dır, yani bu nokta A^c'de değildir. Hiçbir $\delta > 0$ için $B\left((0, \frac{1}{2}), \delta\right) \subseteq A^c$ olmaz; A^c açık değildir ve A kapalı değildir.
A açık da değildir: $\left(1, \frac{1}{2}\right) \in A$ noktasının her ε yarıçaplı yuvarı, A'ya ait olmayan $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktasını içerir. ■

3.5 Ne Açık Ne Kapalı Kümeler

Günlük dilde bir kapı ya açıktır ya kapalı; kümeler için böyle bir ikilik yoktur.
Bir kümenin açık olup olmadığı ile tümleyeninin açık olup olmadığı birbirinden bağımsız iki sorudur; bu yüzden dört durum ortaya çıkar. $\varnothing$ ve $\mathbb{R}^n$ hem açık hem kapalıdır (Teorem 3.3 ve Teorem 3.4); $\mathbb{R}$'de bu ikisinden başka hem açık hem kapalı küme olmadığını Analiz 1'de görmüştük (bkz. Analiz 1). $B(x_0, 1)$'in kapalı olmadığını Örnek 3.13 içinde gördük ve aynı akıl yürütme her $r > 0$ yarıçapı için geçerlidir. $B[x_0, r]$ ise açık değildir: $x_0 + re_1$ noktası bu yuvardadır, ama her $\varepsilon > 0$ için $x_0 + \left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right)e_1$ noktası bu noktanın ε yarıçaplı yuvarında olup kapalı yuvarın dışındadır. Aynı nokta seçimi $S(x_0, r)$ yuvar yüzeyinin de açık olmadığını gösterir: $x_0 + re_1 \in S(x_0, r)$ iken $x_0 + \left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right)e_1$ noktası $B(x_0 + re_1, \varepsilon)$ içindedir ama yüzeyde değildir. Açık şerit $A = \{0 < x < 1\}$ de kapalı değildir: $(0, y_0) \notin A$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\left(\frac{1}{2}\min\{\varepsilon, 1\}, y_0\right)$ noktası hem A'da hem $B\left((0, y_0), \varepsilon\right)$ yuvarındadır; yani A^c'nin $(0, y_0)$ noktasının hiçbir yuvarı A^c'nin içinde kalmaz.

Tablo 3.1: Açıklık ve kapalılığın dört durumu

Açık mı?	Kapalı mı?	Örnek
evet	evet	$\varnothing$, $\mathbb{R}^n$
evet	hayır	$B(x_0, r)$, açık şerit $\{0 < x < 1\}$
hayır	evet	$B[x_0, r]$, $\{a\}$, $S(x_0, r)$
hayır	hayır	bir kenarı eksik kare (Örnek 3.14)

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir kümenin açık olmadığını göstermek, onun kapalı olduğunu göstermez; kapalılık için tümleyene ayrıca bakmak gerekir.

Örnek 3.15 (Ne Açık Ne Kapalı Halka). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : 2 \leq \| x - x_0 \| < 3\}$$

kümesinin ne açık ne kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
X, iç yüzeyi $S(x_0, 2)$'yi içeren, dış yüzeyi $S(x_0, 3)$'ü içermeyen bir halkadır. İki yüzeyin her biri ayrı bir sorun çıkarır.
Açık değil. $p = x_0 + 2e_1$ noktası $\| p - x_0 \| = 2$ sağladığından X'tedir. $\varepsilon > 0$ verilsin; $t = \min\{\varepsilon, 1\}$ ve $q = x_0 + (2 - \frac{t}{2})e_1$ diyelim. $\| q - p \| = \frac{t}{2} < \varepsilon$ olduğundan $q \in B(p, \varepsilon)$'dir; ama $\| q - x_0 \| = 2 - \frac{t}{2} < 2$ olduğundan $q \notin X$'tir. p'nin hiçbir yuvarı X'in içinde kalmaz; X açık değildir.
Kapalı değil. $z = x_0 + 3e_1$ noktası $\| z - x_0 \| = 3$ sağladığından X^c'dedir. $\varepsilon > 0$ verilsin; $t = \min\{\varepsilon, 1\}$ ve $w = x_0 + (3 - \frac{t}{2})e_1$ diyelim. $\| w - z \| = \frac{t}{2} < \varepsilon$ olduğundan $w \in B(z, \varepsilon)$'dir ve

$$2 < \frac{5}{2} \leq 3 - \frac{t}{2} = \| w - x_0 \| < 3$$

olduğundan $w \in X$'tir; yani w, X^c'de değildir. X^c açık değildir, dolayısıyla X kapalı değildir.
Kümeyi iki parçanın kesişimi olarak yazmak durumu aydınlatır:

$$X = \{x : \| x - x_0 \| \geq 2\} \cap B(x_0, 3).$$

Birinci küme kapalıdır (tümleyeni $B(x_0, 2)$ açıktır), ikincisi açıktır. Kapalı bir kümeyle açık bir kümenin kesişimi hakkında genel bir şey söylenemez; sayı doğrusunda da $(0, 2) \cap [-1, 1] = (0, 1]$ kesişimi ne açık ne kapalıdır. ■

3.6 Yığılma Noktaları

Bir kümenin kapalı olup olmadığını, kümeye istenildiği kadar yaklaşan noktalara bakarak da anlayabiliriz. Bu noktaları yığılma noktası kavramı betimler.

Tanım 3.4 (Yığılma Noktası). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\big(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \big) \cap S \neq \varnothing$$

oluyorsa x noktasına S kümesinin bir **yığılma noktası** denir. S'nin bütün yığılma noktalarının kümesi S' ile gösterilir.

Yani $x \in S'$ olması, x'in her komşuluğunun S'nin x'ten farklı en az bir elemanını içermesidir: her $\varepsilon > 0$ için $0 < \| y - x \| < \varepsilon$ olan bir $y \in S$ vardır. Tanım x'in S'ye ait olmasını gerektirmez; önemli olan, x'in çevresinde S'nin başka noktalarının "yığılmasıdır". Örneğin $\mathbb{R}$'de $\left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin tek yığılma noktası 0'dır ve 0 kümeye ait değildir (bkz. Analiz 1).

Örnek 3.16 (Açık Yuvarın Yığılma Noktaları). $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ve $A = B(x_0, r)$ olsun. $A' = B[x_0, r]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$B[x_0, r] \subseteq A'$. $\| x - x_0 \| \leq r$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. A'da, x'ten farklı ve x'e ε'dan yakın bir y noktası bulacağız.
$x = x_0$ ise $\eta = \min\{\varepsilon, r\}$ ve $y = x_0 + \frac{\eta}{2}e_1$ alalım. $\| y - x_0 \| = \frac{\eta}{2}$ olduğundan hem $0 < \| y - x \| < \varepsilon$ hem de $\| y - x_0 \| < r$, yani $y \in A$'dır.
$x \neq x_0$ ise $d = \| x - x_0 \|$ diyelim; $0 < d \leq r$'dir. y'yi x_0 ile x'i birleştiren doğru parçası üzerinde, x'e yakın seçelim:

$$t = \max\left\{0, 1 - \frac{\varepsilon}{2d}\right\},$$
$$y = x_0 + t(x - x_0).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$0 \leq t < 1$ ve $1 - t \leq \dfrac{\varepsilon}{2d}$ olduğundan

$$\| y - x_0 \| = t\, d < d \leq r,$$
$$\| y - x \| = (1-t)\, d \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olur; ayrıca $1 - t > 0$ olduğundan $\| y - x \| > 0$'dır. Yani $y \in A$, $y \neq x$ ve $y \in B(x, \varepsilon)$'dir.
Her iki durumda da $\big(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \big) \cap A \neq \varnothing$ olduğundan $x \in A'$'dür.
$A' \subseteq B[x_0, r]$. $\| x - x_0 \| > r$ olsun. Teorem 3.2 ispatındaki gibi $\rho = \| x - x_0 \| - r$ alınırsa $B(x,\rho)$ yuvarının bütün noktaları x_0'dan r'den fazla uzaktadır; yani $B(x,\rho) \cap A = \varnothing$'dir. Dolayısıyla $x \notin A'$'dür.
İki kapsama birlikte $A' = B[x_0, r]$ verir. Açık yuvarın yığılma noktaları kümesi yuvarın kendisinden büyüktür: $S(x_0, r)$ yüzeyindeki noktalar yuvara ait olmadığı hâlde yığılma noktasıdır. ■

3.7 Sınırlı Kümeler

Kümeler için Bolzano–Weierstrass teoremi sınırlı kümelerden söz eder. $\mathbb{R}$'de sınırlılık alttan ve üstten sınırlı olmak demekti; $\mathbb{R}^n$'de sıralama olmadığından sınırlılığı norm yardımıyla tanımlarız.

Tanım 3.5 (Sınırlı Küme). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Her $x \in S$ için $\| x \| \leq r$ olacak biçimde bir $r > 0$ varsa, yani

$$S \subseteq B[0, r]$$

ise S'ye **sınırlı küme** denir.

Yani sınırlı bir küme, orijin merkezli yeterince büyük bir kapalı yuvarın içine sığar. Merkezin orijin olması önemli değildir: $S \subseteq B[x_0, \rho]$ ise her $x \in S$ için

$$\| x \| \leq \| x - x_0 \| + \| x_0 \| \leq \rho + \| x_0 \|$$

olduğundan $S \subseteq B[0, \rho + \| x_0 \|]$'dir. Özel olarak her açık ve her kapalı yuvar sınırlıdır. $n = 1$ için tanım, Analiz 1'deki sınırlı küme kavramıyla aynıdır (bkz. Analiz 1).
Yuvar yerine bir küp de kullanılabilir; bu biçim, küpleri bölerek yapılan ispatlarda işe yarar.

Önerme 3.1 (Sınırlılığın Küple İfadesi). *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, bir $r > 0$ için*

$$S \subseteq [-r, r] \times [-r, r] \times \ldots \times [-r, r]$$

olmasıdır. Kısaca $S \subseteq [-r, r]^n$ yazılır; $[-r, r]^n$, bütün kenarları $2r$ uzunluğunda olan bir kapalı aralıktır (kapalı n-hücre).

İspat.
Teorem 1.5 gereği her $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve her j için

$$| x_j | \leq \| x \|_\infty \leq \| x \| \leq \sqrt{n}\, \| x \|_\infty$$

olur; burada $\| x \|_\infty = \max\{| x_1 |, \ldots, | x_n |\}$'dir.
($\Rightarrow$) $S \subseteq B[0, r]$ olsun. $x \in S$ ise her j için $| x_j | \leq \| x \| \leq r$, yani $x_j \in [-r, r]$'dir; dolayısıyla $x \in [-r, r]^n$ olur.
($\Leftarrow$) $S \subseteq [-r, r]^n$ olsun. $x \in S$ ise her i için $| x_i | \leq r$, yani $\| x \|_\infty \leq r$ olduğundan $\| x \| \leq \sqrt{n}\, r$'dir; yani $S \subseteq B[0, \sqrt{n}\, r]$ ve S sınırlıdır. ■

Örnek 3.17 (Şerit Sınırlı Değildir). $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$ şeridinin sınırlı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tersine, bir $r > 0$ için $A \subseteq B[0,r]$ olduğunu varsayalım. Arşimet özelliği gereği $k > r$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır (bkz. Analiz 1). $\left(\frac{1}{2}, k\right)$ noktası A'dadır, ama

$$\| \left(\frac{1}{2}, k\right) \| = \sqrt{\frac{1}{4} + k^2} > k > r$$

olduğundan $B[0,r]$'de değildir. Bu çelişki A'nın sınırlı olmadığını gösterir.
Şerit açık bir kümedir (Örnek 3.4) ama sınırlı değildir; açıklık ile sınırlılık birbirinden bağımsız özelliklerdir. ■

3.8 İç İçe Kapalı Aralıklar

Bolzano–Weierstrass teoreminin ispatı, gittikçe küçülen iç içe kutular kurar ve bu kutuların ortak bir noktası olduğunu kullanır. $\mathbb{R}$'de bu, iç içe kapalı aralıklar teoremidir (bkz. Analiz 1); $\mathbb{R}^n$'deki karşılığı ondan bileşen bileşen elde edilir. $\mathbb{R}^n$'nin bir kapalı aralığı (Tanım 2.9), $\mathbb{R}$'nin n tane kapalı aralığının Kartezyen çarpımıdır:

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n];$$

burada her j için $a_j \leq b_j$'dir.

Teorem 3.5 (İç İçe Kapalı Aralıklar Özelliği). *$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$'nin kapalı aralıklarından oluşan ve*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$$

koşulunu sağlayan bir dizi olsun. O zaman $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$'dir.

İspat.
Her k için I_k'yi $\mathbb{R}$'nin kapalı aralıklarının çarpımı olarak yazalım:

$$I_k = I_{k,1} \times I_{k,2} \times \ldots \times I_{k,n};$$

burada her $j = 1, \ldots, n$ için $I_{k,j} = [a_{k,j}, b_{k,j}]$ ve $a_{k,j} \leq b_{k,j}$'dir.
Bileşen aralıkları da iç içedir. *Bir j indisini sabitleyip $I_{k+1,j} \subseteq I_{k,j}$ olduğunu gösterelim. $t \in I_{k+1,j}$ olsun. j-inci bileşeni t, öbür her $i \neq j$ için i-inci bileşeni $a_{k+1,i}$ olan p noktasının her bileşeni ilgili aralıktadır; yani $p \in I_{k+1}$'dir. $I_{k+1} \subseteq I_k$ olduğundan $p \in I_k$ olur; özel olarak p'nin j-inci bileşeni olan t, $I_{k,j}$'dedir. Böylece her j için*

$$I_{1,j} \supseteq I_{2,j} \supseteq I_{3,j} \supseteq \cdots$$

$\mathbb{R}$'de iç içe kapalı aralıklardan oluşan bir dizidir.
Her bileşende ortak nokta. *$\mathbb{R}$'deki iç içe aralıklar teoremi gereği her j için*

$$x_j \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{k,j}$$

olan bir $x_j \in \mathbb{R}$ vardır.
Ortak nokta. *$x = (x_1, \ldots, x_n)$ diyelim. Her k ve her j için $x_j \in I_{k,j}$ olduğundan $x \in I_{k,1} \times \ldots \times I_{k,n} = I_k$'dir. x bütün I_k'lerde olduğundan kesişim boş değildir.* ■

Aralıkların kapalı olması gereklidir. $\mathbb{R}$'de $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ açık aralıkları iç içedir ama ortak noktaları yoktur; $\mathbb{R}^n$'de de $\left(0, \frac{1}{k}\right)^n$ açık aralıklarının ortak noktası yoktur, çünkü ortak bir noktanın birinci bileşeni bütün $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ aralıklarında olmalıydı.

 CC BY-NC-SA 4.0

3.9 Kümeler için Bolzano–Weierstrass Teoremi

Sonsuz sayıda nokta sınırlı bir bölgeye sıkıştırılırsa bir yerde yığılmak zorundadır. Bu sezgiyi $\mathbb{R}$'de Bolzano–Weierstrass teoremi olarak ispatlamıştık (bkz. Analiz 1). Aynı "ikiye bölme" fikri $\mathbb{R}^n$'de bir küpü 2^n küçük küpe bölerek çalışır.

Teorem 3.6 (Bolzano–Weierstrass Teoremi). *$\mathbb{R}^n$'nin sınırlı ve sonsuz elemanlı her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.*

İspat.
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve sonsuz elemanlı olsun. Önerme 3.1 gereği bir $r > 0$ için

$$S \subseteq I_1 = [-r, r] \times \ldots \times [-r, r]$$

olur. I_1, bütün kenarları $\ell_1 = 2r$ uzunluğunda olan bir kapalı aralıktır; kısaca bir küptür.
Bölme adımı. *Bütün kenarları ℓ uzunluğunda olan bir kapalı aralık*

$$I = [c_1, c_1 + \ell] \times \ldots \times [c_n, c_n + \ell]$$

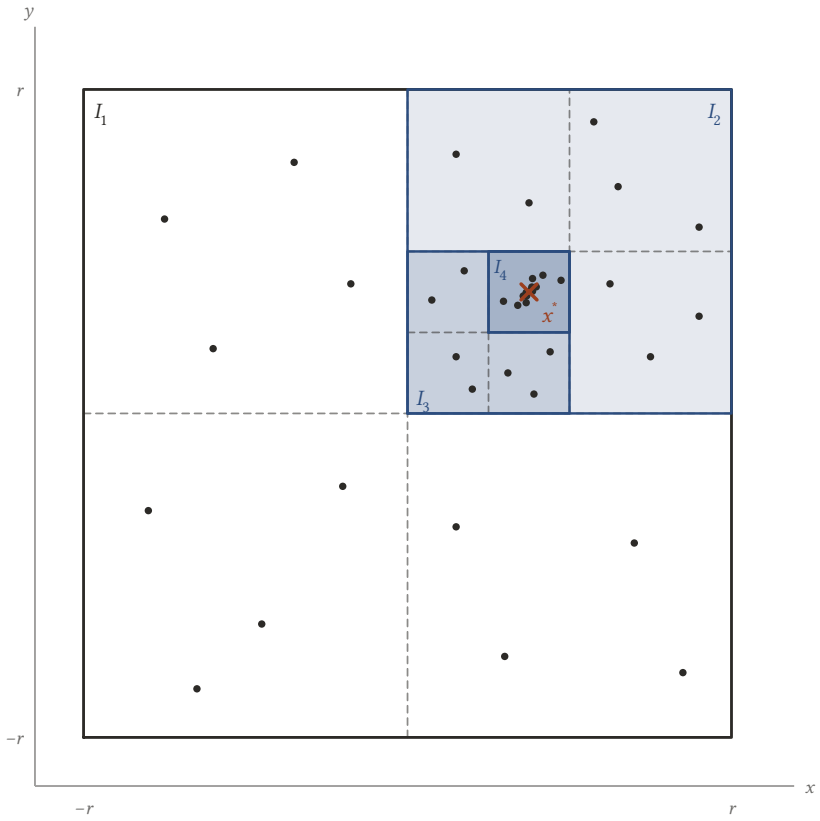
olsun. Her $[c_j, c_j + \ell]$ kenarını orta noktasından ikiye bölelim:

$$[c_j, c_j + \ell] = \left[c_j, c_j + \frac{\ell}{2}\right] \cup \left[c_j + \frac{\ell}{2}, c_j + \ell\right].$$

Her bileşen için iki yarıdan birini seçerek 2^n tane kapalı aralık elde ederiz. Bunların her birinin bütün kenarları $\frac{\ell}{2}$ uzunluğundadır ve birleşimleri I'dır. $n = 2$ için bir kare dört küçük kareye, $n = 3$ için bir küp sekiz küçük küpe bölünür.
İç içe küpler. *I_1'i böyle 2^n parçaya bölelim: $I_1 = I_1^{(1)} \cup \ldots \cup I_1^{(2^n)}$. $S = S \cap I_1$ sonsuz elemanlı olduğundan $S \cap I_1^{(j)}$ kümelerinden en az biri sonsuz elemanlıdır; aksi hâlde S, sonlu sayıda sonlu kümenin birleşimi olarak sonlu olurdu. Böyle bir parçaya I_2 diyelim: $I_2 \subseteq I_1$, $S \cap I_2$ sonsuz elemanlıdır ve I_2'nin kenarları $\ell_2 = r$ uzunluğundadır. Aynı işlemi I_2'ye uygulayıp I_3'ü, I_3'e uygulayıp I_4'ü seçeriz ve böyle devam ederiz. Sonuçta her $m \in \mathbb{N}$ için şu üç özelliği taşıyan kapalı aralıklar elde ederiz:*

- *$I_{m+1} \subseteq I_m$,*
- *$S \cap I_m$ sonsuz elemanlıdır,*
- *I_m'in bütün kenarları $\ell_m = \dfrac{2r}{2^{m-1}}$ uzunluğundadır.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.4: $I_1 = [-2, 2]^2$ *karesi* ($r = 2$) *dört eş kareye bölünür ve* S*'nin sonsuz çoklukta noktasını içeren parça* $I_2 = [0, 2]^2$ *seçilir; aynı işlemle* $I_3 = [0, 1]^2$ *ve* $I_4 = [0{,}5; 1]^2$ *bulunur. Noktalar bütün* I_m*'lerde bulunan* $x^* = (0{,}75; 0{,}75)$ *çevresinde birikir.*

Ortak nokta. *Teorem 3.5 gereği bütün* I_m*'lerde bulunan bir* x^* *noktası vardır.*
x^* bir yığılma noktasıdır. $\varepsilon > 0$ *verilsin.* $y \in I_m$ *ise* x^* *ile* y *aynı küpte olduğundan her* j *için* $| x_j^* - y_j | \leq \ell_m$*'dir; Teorem 1.5 gereği*

$$\| x^* - y \| \leq \sqrt{n}\, \| x^* - y \|_\infty \leq \sqrt{n}\, \ell_m = \frac{2r\sqrt{n}}{2^{m-1}}$$

olur. Arşimet özelliği gereği $m > \dfrac{2r\sqrt{n}}{\varepsilon}$ *olan bir* $m \in \mathbb{N}$ *vardır. Her* $m \in \mathbb{N}$ *için* $2^{m-1} \geq m$*'dir (tümevarımla:* $m = 1$ *için eşitlik vardır ve* $2^{m-1} \geq m$ *ise* $2^m \geq 2m \geq m + 1$ *olur). Dolayısıyla bu* m *için*

$$\frac{2r\sqrt{n}}{2^{m-1}} \leq \frac{2r\sqrt{n}}{m} < \varepsilon$$

ve $I_m \subseteq B(x^*, \varepsilon)$ *olur.* $S \cap I_m$ *sonsuz elemanlı olduğundan* $B(x^*, \varepsilon)$*,* S*'nin sonsuz çoklukta elemanını, özel olarak* x^**'dan farklı en az bir elemanını içerir:*

$$\big(B(x^*, \varepsilon) \setminus \{x^*\} \big) \cap S \neq \varnothing.$$

$\varepsilon > 0$ *keyfi olduğundan* x^**,* S*'nin bir yığılma noktasıdır.* ■

Teoremin iki koşulu da gereklidir. Sonlu bir kümenin hiç yığılma noktası yoktur: $S = \{p_1, \ldots, p_m\}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde, x'ten farklı p_i'lerin x'e uzaklıklarının en küçüğüne ε dersek (x'ten farklı p_i yoksa $\varepsilon = 1$ alınır) $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$ kümesi S'nin hiçbir noktasını içermez. Sınırlı olmayan sonsuz bir kümenin de yığılma noktası olmayabilir: $S = \{ke_1 : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin farklı iki noktası arasındaki uzaklık en az

 CC BY-NC-SA 4.0

1'dir. Bu yüzden her $B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ yuvarı S'nin en çok bir noktasını içerir (iki nokta aynı yuvarda olsaydı aralarındaki uzaklık üçgen eşitsizliği gereği 1'den küçük olurdu). Bu nokta x'ten farklı bir p ise yarıçapı $\| p - x \|$'e küçültmek x'in çevresinde S'nin başka noktası bırakmaz; dolayısıyla $S' = \varnothing$'dir.
Son olarak, teoremin verdiği yığılma noktası kümeye ait olmak zorunda değildir: $\left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin tek yığılma noktası olan 0 kümede değildir.

3.10 Kapalı Kümeler ve Yığılma Noktaları

Kapalı kümeyi tümleyeni üzerinden tanımladık. Aşağıdaki teorem kapalılığı kümenin yığılma noktaları cinsinden ifade eder ve pek çok durumda tanımdan daha kullanışlıdır.

Teorem 3.7 (Kapalılık ve Yığılma Noktaları). *$F \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul, F'nin bütün yığılma noktalarını içermesidir:*

$$F \text{ kapalı} \Leftrightarrow F' \subseteq F.$$

> ***İspat.***
> *($\Rightarrow$) F kapalı olsun ve x, F'nin bir yığılma noktası olsun. $x \notin F$ olduğunu varsayalım. O zaman $x \in F^c$'dir ve F^c açık olduğundan $B(x, \varepsilon) \subseteq F^c$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu yuvar F ile hiç kesişmez; özel olarak*
>
> $$\left(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \right) \cap F = \varnothing$$
>
> *olur. Bu, x'in yığılma noktası olmasıyla çelişir. Öyleyse $x \in F$'dir; yani $F' \subseteq F$.*
> *($\Leftarrow$) $F' \subseteq F$ olsun; F^c'nin açık olduğunu gösterelim. Keyfi bir $x \in F^c$ alalım. $x \notin F$ ve F bütün yığılma noktalarını içerdiğinden x, F'nin bir yığılma noktası değildir. Dolayısıyla bir $\varepsilon > 0$ için*
>
> $$\left(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \right) \cap F = \varnothing$$
>
> *olur. x'in kendisi de F'de olmadığından $B(x, \varepsilon) \cap F = \varnothing$, yani $B(x, \varepsilon) \subseteq F^c$'dir. x keyfi olduğundan F^c açıktır ve F kapalıdır.* ■

$n = 1$ için aynı sonuç Analiz 1'de de vardı (bkz. Analiz 1). Örneğin $\left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi kapalı değildir, çünkü yığılma noktası olan 0'ı içermez.

Örnek 3.18 (Açık Yuvar Kapalı Değildir). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $B(x_0, r)$'nin kapalı olmadığını Teorem 3.7 yardımıyla gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Örnek 3.16 gereği $B(x_0, r)$'nin yığılma noktaları kümesi $B[x_0, r]$'dir. $x_0 + re_1$ noktası
>
> $$\text{parallel}(x_0 + re_1) - x_0 \text{parallel} = r \| e_1 \| = r$$
>
> sağladığından $B[x_0, r]$'dedir, yani $B(x_0, r)$'nin bir yığılma noktasıdır; ama $B(x_0, r)$'de değildir. $B(x_0, r)$ bütün yığılma noktalarını içermediğinden Teorem 3.7 gereği kapalı değildir.
> Buna karşılık $B[x_0, r]$ kapalıdır (Sonuç 3.1); teorem gereği onun bütün yığılma noktaları kendi içindedir. ■

Teorem 3.6 ile Teorem 3.7 birlikte şunu söyler: kapalı, sınırlı ve sonsuz elemanlı bir kümenin en az bir yığılma noktası vardır ve bu nokta kümenin içindedir. Bu gözlem, ileride kompakt kümeleri incelerken temel rol oynayacaktır.

3.11 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (Uzayda Yatay Bir Disk).

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4, z = 1\}$$

kümesinin $\mathbb{R}^3$'te açık olmadığını $a = (1, 0, 1)$ noktasından yararlanarak gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$1^2 + 0^2 = 1 < 4$ ve $z = 1$ olduğundan $a \in C$'dir. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $p = \left(1, 0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ diyelim.

$$\| p - a \| = \| \left(0, 0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olduğundan $p \in B(a, \varepsilon)$'dir; ama p'nin üçüncü bileşeni $1 + \frac{\varepsilon}{2} \neq 1$ olduğundan $p \notin C$'dir. Hiçbir $\varepsilon > 0$ için $B(a, \varepsilon) \subseteq C$ olmadığından C açık değildir.
C, $z = 1$ düzlemindeki açık bir disktir. Düzlemin içinde kalındığında her noktasının çevresine C'de kalan bir disk yerleştirilebilir; ama $\mathbb{R}^3$'te her yuvar düzlemin üstüne ve altına taşar. Açıklık, kümenin hangi uzayın alt kümesi olarak düşünüldüğüne bağlıdır. ■

Alıştırma 3.2 (Sağ Yarı Düzlem Açıktır). $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ kümesinin açık olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Keyfi bir $(x_0, y_0) \in A$ alalım; $x_0 > 0$'dır. $\varepsilon = x_0$ seçelim. $(x, y) \in B\left((x_0, y_0), \varepsilon\right)$ ise

$$| x - x_0 | \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon = x_0$$

olur; buradan $x > x_0 - x_0 = 0$, yani $(x, y) \in A$ bulunur. $B\left((x_0, y_0), x_0\right) \subseteq A$ olduğundan A açıktır.
Seçtiğimiz yarıçap, (x_0, y_0) noktasının A'yı sınırlayan $x = 0$ doğrusuna, yani y eksenine olan uzaklığıdır. Aynı kümenin konveks olduğunu Örnek 2.7 içinde görmüştük; A hem açık hem konvekstir, ama Örnek 3.17 içindeki akıl yürütmeyle sınırlı değildir. ■

Alıştırma 3.3 (Açık Dikdörtgen Açıktır). $A = (0, 1) \times (3, 4) \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kartezyen çarpımın tanımı gereği $(x_0, y_0) \in A$ olması, $0 < x_0 < 1$ ve $3 < y_0 < 4$ olması demektir. Dört kesin eşitsizlikten dört pozitif fark elde edilir; en küçüğünü seçelim:

$$\varepsilon = \min\{x_0, 1 - x_0, y_0 - 3, 4 - y_0\} > 0.$$

$(x, y) \in B\left((x_0, y_0), \varepsilon\right)$ olsun. $| x - x_0 |$ ve $| y - y_0 |$ farklarının her biri $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$ ile sınırlıdır. ε dört farkın her birinden büyük olmadığından

$$0 \leq x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \leq 1,$$
$$3 \leq y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon \leq 4$$

olur. Yani $(x, y) \in A$ ve $B\left((x_0, y_0), \varepsilon\right) \subseteq A$'dır; A açıktır.
Bir başka yol: A, $\{(x, y) : 0 < x < 1\}$ ve $\{(x, y) : 3 < y < 4\}$ şeritlerinin kesişimidir. Birinci şerit Örnek 3.4 gereği, ikincisi aynı gerekçeyle açıktır; iki açık kümenin kesişimi Teorem 3.3 (b) gereği açıktır. ■

Alıştırma 3.4 (Sağ Kenarı Dahil Şerit). $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq 1\}$ kümesinin açık olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$a = (1, 0)$ noktası $-1 < 1 \leq 1$ sağladığından U'dadır. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $p = (1 + \frac{\varepsilon}{2}, 0)$ noktası $\| p - a \| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ sağladığından $B(a, \varepsilon)$'dadır, ama $1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1$ olduğundan U'da değildir. Hiçbir $\varepsilon > 0$ için $B(a, \varepsilon) \subseteq U$ olmaz; U açık değildir.
Şeridin sol kenarı ($x = -1$) açıklık için sorun çıkarmaz; sorun, kümeye katılmış sağ kenardadır. Sol kenar ise kapalılığı bozar: $(-1, 0) \notin U$ noktası ve her $\varepsilon > 0$ için $t = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, 2\}$ alınırsa $(-1 + t, 0)$ noktası hem bu noktanın ε yarıçaplı yuvarında hem de U'dadır. Dolayısıyla U kapalı da değildir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 3.5 (Yarı Açık Kare Açık Değildir).

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$$

kümesinin açık olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
A'ya ait olan bir kenardaki noktayı seçelim: $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ için $0 < \frac{1}{2} \leq 1$ ve $0 \leq 0 < 1$ olduğundan $a \in A$'dır. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $p = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\varepsilon}{2}\right)$ noktası

$$\| p - a \| = \| \left(0, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

sağladığından $B(a, \varepsilon)$'dadır; ama ikinci bileşeni negatif olduğundan A'da değildir. Hiçbir $\varepsilon > 0$ için $B(a, \varepsilon) \subseteq A$ olmaz; A açık değildir.
A kapalı da değildir: $\left(0, \frac{1}{2}\right) \notin A$ noktası için Örnek 3.14 çözümündeki akıl yürütme aynen işler. A, dört kenarından ikisini ($x = 1$ ve $y = 0$) içeren, öbür ikisini ($x = 0$ ve $y = 1$) içermeyen bir karedir ve ne açık ne kapalıdır. ■

Alıştırma 3.6 (Tek Nokta Kapalı Yuvarların Kesişimidir). $x \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\{x\} = \bigcap_{r>0} B[x, r]$$

olduğunu gösteriniz ve buradan $\{x\}$ kümesinin kapalı olduğu sonucunu çıkarınız.

Çözüm.
Kesişim x'i içerir. Her $r > 0$ için $\| x - x \| = 0 \leq r$ olduğundan $x \in B[x, r]$'dir.
Kesişimde başka nokta yoktur. y kesişimde olsun ve $y \neq x$ olduğunu varsayalım. O zaman $d = \| y - x \| > 0$'dır ve $r = \frac{d}{2}$ için $\| y - x \| = d > \frac{d}{2}$ olduğundan $y \notin B\left[x, \frac{d}{2}\right]$ olur. Bu, y'nin kesişimde olmasıyla çelişir; öyleyse $y = x$'tir.
Kapalılık. Her $B[x, r]$ Sonuç 3.1 gereği kapalıdır; kapalı kümelerin keyfi kesişimi Teorem 3.4 (c) gereği kapalıdır. Dolayısıyla $\{x\}$ kapalıdır. Örneğin $\{(1, 2, 3)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$'te kapalıdır.
Bu, Örnek 3.11 sonucunun ikinci bir ispatıdır: orada tümleyenin açıklığını doğrudan göstermiştik, burada kapalı kümelerin kesişim özelliğini kullandık. ■

Alıştırma 3.7 (Yığılma Noktasının Her Yuvarında Sonsuz Nokta). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x \in S'$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap S$ kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Tersine, bir $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap S$ kümesinin sonlu olduğunu varsayalım. O zaman onun alt kümesi olan

$$T = \left(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \right) \cap S$$

de sonludur. $x \in S'$ olduğundan $T \neq \varnothing$'dir; $T = \{p_1, \ldots, p_m\}$ yazalım. Her $p_i \neq x$ olduğundan

$$\delta = \min\{\| p_1 - x \|, \ldots, \| p_m - x \|\} > 0$$

olur; her p_i, $B(x, \varepsilon)$'da olduğundan $\delta < \varepsilon$'dur.
Şimdi $\left(B(x, \delta) \setminus \{x\} \right) \cap S$ kümesine bakalım. Bu kümenin bir q elemanı $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$'te ve S'de olduğundan T'ye aittir, yani bir i için $q = p_i$'dir. Ama o zaman $\| q - x \| = \| p_i - x \| \geq \delta$ olur ve $q \in B(x, \delta)$ ile çelişir. Demek ki

$$\left(B(x, \delta) \setminus \{x\} \right) \cap S = \varnothing$$

olur; bu da $x \in S'$ olmasıyla çelişir. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap S$ sonsuz elemanlıdır.
Tersi de doğrudur: her yuvar S'nin sonsuz çoklukta elemanını içeriyorsa bunlardan en az biri x'ten farklıdır ve $x \in S'$'dür. Bu sonuç, sonlu kümelerin yığılma noktası olmadığını bir kez daha gösterir. $n = 1$ için bkz. Analiz 1. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 3.8 (İki Yığılma Noktalı Bir Küme).

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{k}, (-1)^k \right) : k \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

Çözüm.
S'nin noktaları $y = 1$ (k çift) ve $y = -1$ (k tek) doğruları üzerinde, y eksenine yaklaşarak dizilir. Adaylar $(0,1)$ ve $(0,-1)$ noktalarıdır.
$(0,1) \in S'$. $\varepsilon > 0$ verilsin. Arşimet özelliği gereği $\frac{1}{k} < \varepsilon$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır; çift sayı olan $2k$ de bu koşulu sağlar. $p = \left(\frac{1}{2k}, 1\right) \in S$ için

$$\text{parallel} p - (0,1) \text{parallel} = \frac{1}{2k} < \varepsilon$$

ve $p \neq (0,1)$'dir. Öyleyse $(0,1) \in S'$'dür. Aynı yolla, tek sayı olan $2k+1$ indisiyle, $(0,-1) \in S'$ bulunur.
Başka yığılma noktası yoktur. $x = (a,b)$ bu iki noktadan farklı olsun.
$b \neq 1$ *ve* $b \neq -1$ *ise* $\delta = \min\{\mid b-1 \mid, \mid b+1 \mid\} > 0$ diyelim. S'nin her noktasının ikinci bileşeni 1 ya da -1 olduğundan her $p \in S$ için $\parallel p - x \parallel \geq \delta$'dır; $B(x,\delta) \cap S = \varnothing$ ve $x \notin S'$.
$b = 1$ *ise* $a \neq 0$'dır. $a < 0$ ise S'nin her noktasının birinci bileşeni pozitif olduğundan her $p \in S$ için $\parallel p - x \parallel \geq \frac{1}{k} - a > \mid a \mid$ olur; $B(x, \mid a \mid) \cap S = \varnothing$'dir. $a > 0$ ise $B(x, \frac{a}{2})$ yuvarındaki her $p = \left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right)$ noktası için $\left|\frac{1}{k} - a\right| < \frac{a}{2}$, dolayısıyla $\frac{1}{k} > \frac{a}{2}$, yani $k < \frac{2}{a}$ olmalıdır. Bu yuvar S'nin yalnız sonlu çoklukta noktasını içerir ve Alıştırma 3.7 gereği $x \notin S'$'dür.
$b = -1$ *ise* aynı akıl yürütme geçerlidir.
Sonuç. $S' = \{(0,1), (0,-1)\}$'dir. Bu iki nokta S'de olmadığından Teorem 3.7 gereği S kapalı değildir.
■

Bu bölümde bir kümenin açık ya da kapalı olmasını tanımladık ve kapalılığı yığılma noktalarıyla betimledik. Doğal bir sonraki adım, noktaları bir kümeye göre konumlarına göre ayırmaktır: bir nokta kümenin tam içinde mi, kenarında mı, yoksa kümeden uzakta mı? Sınır, Kapanış ve İç bölümünde sınır noktası, kapanış ve iç kavramlarını tanımlıyor ve bunları açık ve kapalı kümelerle ilişkilendiriyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Sınır, Kapanış ve İç

Açık ve Kapalı Kümeler bölümünde kümeleri iki uç özellikle sınıflandırdık: açık kümenin her noktasının çevresinde kümenin içinde kalan bir yuvar vardır, kapalı küme ise bütün yığılma noktalarını içerir. Oysa karşılaştığımız kümelerin çoğu bu iki sınıfın hiçbirine girmez. Örneğin $\{x \in \mathbb{R}^n : 2 \leq \| x - x_0 \| < 3\}$ halkası iç yüzeyini içerir ama dış yüzeyini içermez; ne açıktır ne kapalıdır. Böyle bir kümede neyin tamam olduğunu, neyin eksik kaldığını söyleyebilmek için noktaları tek tek sınıflandırmamız gerekir.
Bir $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi ve bir x noktası verildiğinde üç durum vardır: x merkezli küçük bir yuvar tamamen S'nin içinde kalabilir, tamamen S'nin dışında kalabilir ya da ne kadar küçük seçilirse seçilsin hem S'den hem tümleyenden nokta içerebilir. Birinci türden noktalar kümenin **içini**, üçüncü türden noktalar kümenin **sınırını** oluşturur; kümeye sınırını eklediğimizde de **kapanışını** elde ederiz. Gerçel sayılarda kapanışı (bkz. Analiz 1) ve içi (bkz. Analiz 1) aralıklarla tanımlamıştık; burada aynı kavramları $\mathbb{R}^n$'de, aralıkların yerine yuvarlarla kuruyoruz.
Bölümün ana sonuçları şunlardır: bir kümenin açık olması sınırından hiçbir nokta içermemesi, kapalı olması ise sınırının tamamını içermesi demektir. Kapanış, kümeyi içeren en küçük kapalı kümedir; iç ise kümenin içinde kalan en büyük açık kümedir.

4.1 Sınır Noktası ve Sınır

Önce bir kümenin "kıyısında" duran noktaları tanımlayalım.

Tanım 4.1 (Sınır Noktası ve Sınır). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing \quad \text{ve} \quad B(x,\varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing$$

oluyorsa x noktasına S kümesinin bir **sınır noktası** denir. S'nin bütün sınır noktalarının kümesine S'nin **sınırı** denir ve ∂S ile gösterilir:

$$\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : x, S \text{ 'nin bir sınır noktasıdır}\}.$$

Yani x bir sınır noktasıdır ancak ve ancak x merkezli her yuvar hem S'ye hem de S^c'ye değer. Sınır noktası kümeye ait olabilir de olmayabilir de; tanım yalnız noktanın çevresine bakar. $x \in S$ ise birinci koşul kendiliğinden sağlanır, çünkü x yuvarın merkezidir; geriye her yuvarın S^c'den bir nokta içermesi kalır. $x \notin S$ ise ikinci koşul kendiliğinden sağlanır; geriye her yuvarın S'den bir nokta içermesi kalır.
Hesaplarda en çok tanımın olumsuzu kullanılır: $x \notin \partial S$ olması için gerek ve yeter koşul

$$B(x,\varepsilon) \subseteq S \quad \text{ya da} \quad B(x,\varepsilon) \subseteq S^c$$

olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ bulunmasıdır. Gerçekten $B(x,\varepsilon) \cap S^c = \varnothing$ eşitliği $B(x,\varepsilon) \subseteq S$ demektir, $B(x,\varepsilon) \cap S = \varnothing$ eşitliği de $B(x,\varepsilon) \subseteq S^c$ demektir. Özel olarak $\partial\varnothing = \varnothing$ ve $\partial\mathbb{R}^n = \varnothing$ olur: boş küme hiçbir yuvarla kesişmez, $\mathbb{R}^n$'nin tümleyeni ise boştur.
İlk örneğimiz yuvarlardır. Açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi (Tanım 2.6) için sezgimiz sınırın yuvar yüzeyi olduğunu söyler; bunu tanımdan gösterelim.

Önerme 4.1 (Açık ve Kapalı Yuvarın Sınırı). *$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. O zaman*

$$\partial B(x_0,r) = \partial B[x_0,r] = S(x_0,r)$$

olur; burada $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| = r\}$ yuvar yüzeyidir.

> ***İspat.***
> *$x \in \mathbb{R}^n$ alalım ve $\| x - x_0 \|$ uzaklığının r'ye eşit, r'den küçük ya da r'den büyük olmasına göre üç durumu ayrı ayrı inceleyelim.*
> ***$\| x - x_0 \| = r$ ise x iki yuvarın da sınır noktasıdır.*** *$\varepsilon > 0$ verilsin. x_0'dan çıkıp x'ten geçen ışın üzerindeki $y_t = x_0 + t\,(x - x_0)$ noktalarını ($t > 0$) kullanacağız. Normun özelliklerinden*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| y_t - x_0 \| = t \| x - x_0 \| = t\, r,$$
$$\| y_t - x \| = | t - 1 | \| x - x_0 \| = | t - 1 | r$$

olur. $0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{r}\right\}$ *olan bir* δ *seçelim.*

- $t = 1 - \delta$ *için* $\| y_t - x_0 \| = (1 - \delta)\, r < r$ *olur; yani* $y_{1-\delta} \in B(x_0, r) \subseteq B[x_0, r]$.
- $t = 1 + \delta$ *için* $\| y_t - x_0 \| = (1 + \delta)\, r > r$ *olur; yani* $y_{1+\delta} \notin B[x_0, r]$ *ve dolayısıyla* $y_{1+\delta} \notin B(x_0, r)$.

İki nokta da x*'e* $\delta r < \varepsilon$ *uzaklıktadır, yani* $B(x, \varepsilon)$ *içindedir. Böylece* $B(x, \varepsilon)$ *hem* $B(x_0, r)$ *ile hem* $B[x_0, r]$ *ile kesişir ve ikisinin de tümleyeniyle kesişir.* ε *keyfi olduğundan* $x \in \partial B(x_0, r)$ *ve* $x \in \partial B[x_0, r]$.
$\| x - x_0 \| < r$ ise x hiçbirinin sınır noktası değildir. $\varepsilon = r - \| x - x_0 \| > 0$ *alalım.* $y \in B(x, \varepsilon)$ *ise üçgen eşitsizliği (Teorem 1.2) gereği*

$$\| y - x_0 \| \leq \| y - x \| + \| x - x_0 \| < \varepsilon + \| x - x_0 \| = r$$

olur. Demek ki $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r) \subseteq B[x_0, r]$*; bu yuvar iki kümenin de tümleyeniyle kesişmez.*
$\| x - x_0 \| > r$ ise x hiçbirinin sınır noktası değildir. $\varepsilon = \| x - x_0 \| - r > 0$ *alalım.* $y \in B(x, \varepsilon)$ *ise ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 1.2) gereği*

$$\| y - x_0 \| \geq \| x - x_0 \| - \| y - x \| > \| x - x_0 \| - \varepsilon = r$$

olur. Demek ki $B(x, \varepsilon)$*,* $B[x_0, r]$ *ile, dolayısıyla* $B(x_0, r)$ *ile de kesişmez.*
Üç durum birlikte, $\partial B(x_0, r)$ *ve* $\partial B[x_0, r]$ *kümelerinin ikisinin de tam olarak* $\| x - x_0 \| = r$ *koşulunu sağlayan noktalardan oluştuğunu gösterir.* ■

Açık ve kapalı yuvarın sınırı aynıdır. İkisini ayıran şey, sınırın ne kadarının kümeye ait olduğudur: $B(x_0, r)$ sınırından hiçbir nokta içermez, $B[x_0, r]$ ise sınırının tamamını içerir. Bu gözlemin genel bir teorem olduğunu birazdan göreceğiz.

Örnek 4.1 (Bir Çember ile Bir Hiperbolün Sınırladığı Küme). $\mathbb{R}^2$'de

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\, xy > 1\}$$

kümesinin sınırını bulunuz.

Çözüm.
Kısalık için $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ldots\}$ yerine yalnız koşulları yazacağız. Her bileşen için $| x - x_0 | \leq \| (x, y) - (x_0, y_0) \|$ ve $| y - y_0 | \leq \| (x, y) - (x_0, y_0) \|$ eşitsizliklerini sık sık kullanacağız; bunlar, normun karesinin $(x - x_0)^2$ ve $(y - y_0)^2$ terimlerini içermesinden gelir.
Kümeyi tanıyalım. $xy > 1$ koşulu x ile y'nin sıfırdan farklı ve aynı işaretli olmasını gerektirir. Bu yüzden E, biri birinci ve öbürü üçüncü bölgede olan iki parçadan oluşur. Birinci bölgedeki parça, $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin içinde ve $xy = 1$ hiperbolünün üstünde kalan mercek biçimli bölgedir. Çember ile hiperbolün kesişim noktalarını bulalım: $y = \frac{1}{x}$ yazılırsa $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$, yani $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ ve $x^2 = 2 \pm \sqrt{3}$ bulunur.

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \approx 1{,}93,$$
$$b = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \approx 0{,}52$$

yazarsak $ab = 1$, $a^2 + b^2 = 4$ ve $a - b = \sqrt{2}$ olur. Kesişim noktaları (a, b), (b, a), $(-a, -b)$ ve $(-b, -a)$'dır.
İddia. İki yardımcı küme tanımlayalım:

$$F = \{x^2 + y^2 \leq 4,\, xy \geq 1\},$$
$$U = \{x^2 + y^2 < 4,\, xy > 1\}.$$

$U \subseteq E \subseteq F$ olduğu açıktır. $\partial E = F \setminus U$ olduğunu göstereceğiz. Aşağıda $p = (x_0, y_0)$ incelenen nokta, $q = (x, y)$ ise yuvarın genel noktasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: U'nun noktaları sınırda değildir. $p \in U$ olsun ve

$$\varepsilon = \min\left\{2 - \| p \|, \frac{x_0 y_0 - 1}{4}\right\} > 0$$

alalım. $q \in B(p,\varepsilon)$ ise üçgen eşitsizliğiyle $\| q \| < \varepsilon + \| p \| \leq 2$ olur; özel olarak $| y | < 2$ ve $| x_0 | \leq \| p \| < 2$'dir. Bu sınırları

$$xy - x_0 y_0 = (x - x_0)\, y + x_0\, (y - y_0)$$

özdeşliğinde kullanırsak

$$| xy - x_0 y_0 | \leq 2\, | x - x_0 | + 2\, | y - y_0 | < 4\varepsilon \leq x_0 y_0 - 1$$

bulunur ve buradan $xy > x_0 y_0 - (x_0 y_0 - 1) = 1$ çıkar. Demek ki $B(p,\varepsilon) \subseteq U \subseteq E$; bu yuvar E^c ile kesişmez ve $p \notin \partial E$.

Adım 2: F'nin dışındaki noktalar sınırda değildir. $p \notin F$ ise ya $\| p \| > 2$ ya da $x_0 y_0 < 1$'dir.

- $\| p \| > 2$ ise $\varepsilon = \| p \| - 2$ alalım. $q \in B(p,\varepsilon)$ için ters üçgen eşitsizliğiyle $\| q \| > \| p \| - \varepsilon = 2$ olur; $q \notin E$.
- $x_0 y_0 < 1$ ise

  $$\varepsilon = \min\left\{1, \frac{1 - x_0 y_0}{| x_0 | + | y_0 | + 1}\right\}$$

  alalım. $q \in B(p,\varepsilon)$ ise $| y | \leq | y_0 | + | y - y_0 | < | y_0 | + 1$ olduğundan

  $$\begin{aligned} | xy - x_0 y_0 | &\leq | x - x_0 |\, | y | + | x_0 |\, | y - y_0 | \\ &< \varepsilon\,(\, | y_0 | + 1\,) + \varepsilon\, | x_0 | \leq 1 - x_0 y_0 \end{aligned}$$

  olur. Buradan $xy < 1$ ve $q \notin E$ çıkar.

İki durumda da $B(p,\varepsilon) \subseteq E^c$ olur; $p \notin \partial E$.

Adım 3: $F \setminus U$'nun noktaları sınırdadır. $p \in F \setminus U$ ve $\varepsilon > 0$ olsun; $B(p,\varepsilon)$ içinde E'den ve E^c'den birer nokta bulacağız. $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ dönüşümü E'yi, F'yi ve U'yu kendilerine götürür ve uzaklıkları korur. $x_0 y_0 \geq 1$ olduğundan iki koordinat aynı işaretlidir; bu yüzden $x_0 > 0$ ve $y_0 > 0$ varsayabiliriz. $p \in F$ ve $p \notin U$ olduğundan $\| p \| = 2$ ya da $x_0 y_0 = 1$'dir. Aşağıda seçilen δ sayısı hep $0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ aralığındadır; $\| p \| \leq 2$ olduğundan $(1 \pm \delta)\, p$ noktaları p'ye $\delta \| p \| < \varepsilon$ uzaklıkta, yani $B(p,\varepsilon)$ içindedir.

E^c'den bir nokta. $\| p \| = 2$ ise $(1+\delta)\, p$ noktasının normu $2(1+\delta) > 2$ olduğundan bu nokta E'de değildir. $x_0 y_0 = 1$ ise $(1-\delta)\, p$ noktasının koordinatları çarpımı $(1-\delta)^2 < 1$ olduğundan bu nokta da E'de değildir.

E'den bir nokta. Üç alt durum vardır.

- $\| p \| = 2$ ve $x_0 y_0 > 1$ ise δ sayısını ayrıca $\delta < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x_0 y_0}}$ seçelim. $(1-\delta)\, p$ noktasının normu $2(1-\delta) < 2$, koordinatları çarpımı $(1-\delta)^2 x_0 y_0 > 1$'dir; bu nokta E'dedir.
- $x_0 y_0 = 1$ ve $\| p \| < 2$ ise δ sayısını ayrıca $\delta < \dfrac{2}{\| p \|} - 1$ seçelim. $(1+\delta)\, p$ noktasının normu $(1+\delta) \| p \| < 2$, koordinatları çarpımı $(1+\delta)^2 > 1$'dir; bu nokta E'dedir.
- $\| p \| = 2$ ve $x_0 y_0 = 1$ ise p köşe noktalarından biridir. $(x,y) \mapsto (y,x)$ simetrisi de E'yi ve uzaklıkları korur; bu yüzden $p = (a,b)$ alabiliriz. $q = (a - \delta, b + \delta)$ noktasına bakalım. $ab = 1$, $a^2 + b^2 = 4$ ve $a - b = \sqrt{2}$ eşitliklerinden

  $$\begin{aligned} \| q \|^2 &= 4 - 2\delta\,(\,\sqrt{2} - \delta\,) < 4, \\ (a-\delta)(b+\delta) &= 1 + \delta\,(\,\sqrt{2} - \delta\,) > 1 \end{aligned}$$

  olur ($\delta < 1 < \sqrt{2}$). Demek ki $q \in E$ ve $\| q - p \| = \sqrt{2}\, \delta < \varepsilon$.

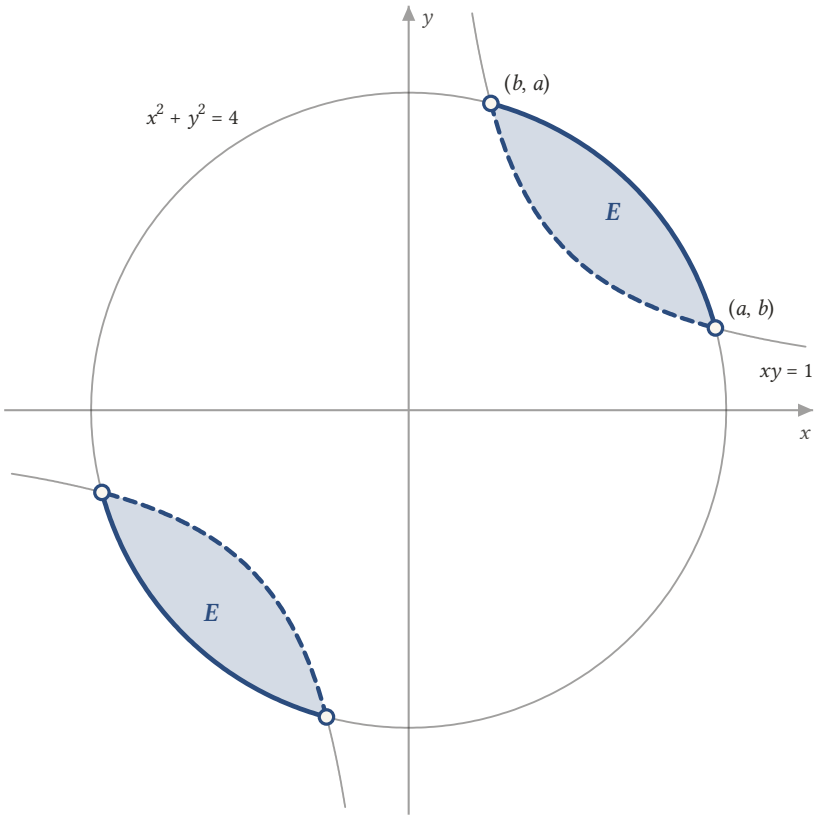
Her durumda $B(p,\varepsilon)$ hem E ile hem E^c ile kesişir; $p \in \partial E$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. Düzlemin her noktası ya U'dadır, ya F'nin dışındadır, ya da $F \setminus U$'dadır. Üç adım birlikte

$$\partial E = F \setminus U = \{x^2 + y^2 = 4,\, xy \geq 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 4,\, xy = 1\}$$

verir: sınır, uçlarında dört köşe noktasında birleşen iki çember yayı ile iki hiperbol yayından oluşur. Çember yayları üzerindeki köşe dışı noktalar E'ye aittir; hiperbol yayları üzerindeki noktalar ise ait değildir.



Şekil 4.1: $E = \{x^2 + y^2 \leq 4,\, xy > 1\}$ kümesinin iki parçası. Sınırın düz çizilen çember yayları E'ye aittir, kesikli hiperbol yayları ait değildir; $a \approx 1{,}93$ ve $b \approx 0{,}52$ olmak üzere dört köşe noktası da E'nin dışındadır.

■

Örnek 4.2 (Rasyonel Sayıların Sınırı). $\mathbb{R}$'de $(n = 1)$ $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$n = 1$ iken yuvarlar açık aralıklardır: $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Her açık aralıkta bir rasyonel sayı (bkz. Analiz 1) ve bir irrasyonel sayı (bkz. Analiz 1) bulunur. Dolayısıyla

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing \quad \text{ve} \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c \neq \varnothing$$

olur, yani $x \in \partial\mathbb{Q}$. x keyfi olduğundan $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
Bu örnek, sınırın kümenin "kenarı" diye düşündüğümüz ince bir çizgi olmak zorunda olmadığını gösterir: $\mathbb{Q}$ sayı doğrusu üzerinde öyle dağılmıştır ki her nokta onun sınırındadır. ■

4.2 Sınırın Temel Özellikleri

Bir kümenin açık ya da kapalı olup olmadığı, yalnız sınırına bakılarak anlaşılabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 4.1 (Sınır ile Açıklık ve Kapalılık). *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.*
(a) *$\partial S = \partial(S^c)$.*
(b) *S açıktır ancak ve ancak $S \cap \partial S = \varnothing$.*
(c) *S kapalıdır ancak ve ancak $\partial S \subseteq S$.*

> ***İspat.***
> ***(a)*** *$(S^c)^c = S$ olduğundan x'in S^c kümesinin sınır noktası olma koşulu, her $\varepsilon > 0$ için*
>
> $$B(x,\varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing \quad \text{ve} \quad B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$$
>
> *olmasıdır. Bu, x'in S kümesinin sınır noktası olma koşulunun aynısıdır; yalnız iki koşulun sırası değişmiştir. Öyleyse $\partial(S^c) = \partial S$.*
> ***(b)*** *($\Rightarrow$) S açık ve $x \in S$ olsun. Açık küme tanımı (Tanım 3.2) gereği $B(x,\varepsilon) \subseteq S$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır; bu yuvar S^c ile kesişmez ve $x \notin \partial S$. S'nin hiçbir noktası sınırda olmadığından $S \cap \partial S = \varnothing$.*
> *($\Leftarrow$) $S \cap \partial S = \varnothing$ ve $x \in S$ olsun. $x \notin \partial S$ olduğundan $B(x,\varepsilon) \cap S = \varnothing$ ya da $B(x,\varepsilon) \cap S^c = \varnothing$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. Birinci eşitlik olamaz, çünkü x hem $B(x,\varepsilon)$'da hem S'dedir. Öyleyse $B(x,\varepsilon) \cap S^c = \varnothing$, yani $B(x,\varepsilon) \subseteq S$. $x \in S$ keyfi olduğundan S açıktır.*
> ***(c)*** *Kapalı küme tanımını (Tanım 3.3), ardından (b) şıkkını S^c kümesine ve son olarak (a) şıkkını uygulayalım:*
>
> $$\begin{aligned} S \ \text{ kapalı} &\Leftrightarrow S^c \ \text{ açık} \\ &\Leftrightarrow S^c \cap \partial(S^c) = \varnothing \\ &\Leftrightarrow S^c \cap \partial S = \varnothing. \end{aligned}$$
>
> *Son koşul, ∂S'nin hiçbir noktasının S^c'de olmaması, yani $\partial S \subseteq S$ demektir.* ■

Teoremi önceki örneklere uygulayalım. $B(x_0,r) \cap S(x_0,r) = \varnothing$ olduğundan açık yuvar açıktır; $S(x_0,r) \subseteq B[x_0,r]$ olduğundan kapalı yuvar kapalıdır. Böylece Teorem 3.1 ve Sonuç 3.1 sonuçlarını sınır diliyle yeniden elde etmiş oluyoruz. E kümesi (Örnek 4.1) sınırının çember yayları üzerindeki noktaları içerdiğinden açık değildir; hiperbol yaylarını içermediğinden kapalı da değildir. $\mathbb{Q}$ da ne açıktır ne kapalıdır: $\mathbb{Q} \cap \partial\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \neq \varnothing$ ve $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}$. Genel olarak sınırının bir kısmını içerip bir kısmını dışarıda bırakan bir küme ne açık ne kapalıdır.

4.3 Kapanış

Bir kümeye, ona istenildiği kadar yakın olan bütün noktaları ekleyerek onu "kapatabiliriz".

Tanım 4.2 (Kapanış). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun ve S'nin yığılma noktalarının (Tanım 3.4) kümesini S' ile gösterelim.

$$\overline{S} = S \cup S'$$

kümesine S'nin **kapanışı** denir.

Yani kapanış, kümeye bütün yığılma noktalarını ekleyerek elde edilir. Her küme kapanışının içindedir: $S \subseteq \overline{S}$. S kapalıysa Teorem 3.7 gereği $S' \subseteq S$ olur ve kapanış yeni bir nokta eklemez; kapalı olmayan bir kümede ise kapanış, kümede eksik kalan yığılma noktalarını tamamlar.
Bir noktanın kapanışta olup olmadığını anlamak için yığılma noktalarıyla uğraşmak yerine yalnız yuvarlara bakmak çoğu zaman daha kolaydır.

Lemma 4.1 (Kapanışın Yuvarlarla Belirlenmesi). *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $x \in \overline{S}$ olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$ olmasıdır.*

> ***İspat.***
> *($\Rightarrow$) $x \in \overline{S}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $x \in S$ ise $x \in B(x,\varepsilon) \cap S$ olur. $x \in S'$ ise yığılma noktası tanımı gereği $\big(\, B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \,\big) \cap S \neq \varnothing$'dır ve bu küme $B(x,\varepsilon) \cap S$ kümesinin içinde kalır. İki durumda da $B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$.*
> *($\Leftarrow$) Her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$ olsun. $x \in S$ ise $x \in \overline{S}$'dir. $x \notin S$ ise $B(x,\varepsilon) \cap S$ kümesinin elemanları x'ten farklıdır; yani*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\big(\ B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\ \big)\cap S = B(x,\varepsilon)\cap S \neq \varnothing$$

olur. Bu her $\varepsilon>0$ için doğru olduğundan $x\in S'$ ve dolayısıyla $x\in\overline{S}$. ■

Lemmanın olumsuzu da sık kullanılır: $x\notin\overline{S}$ olması, $B(x,\varepsilon)\cap S=\varnothing$ olan bir $\varepsilon>0$ bulunması demektir. Kapanış doğrudan lemmadaki yuvar koşuluyla da tanımlanabilirdi; lemma, bu tanımın $S\cup S'$ ile aynı kümeyi verdiğini söyler.

Teorem 4.2 (Kapanışın Özellikleri). *$S\subseteq\mathbb{R}^n$ olsun.*
(a) *$\overline{S}$ kapalı bir kümedir.*
(b) *F kapalı ve $S\subseteq F$ ise $\overline{S}\subseteq F$. Yani $\overline{S}$, S'yi içeren en küçük kapalı kümedir.*
(c) *$\overline{S}$, S'yi içeren bütün kapalı kümelerin kesişimidir:*

$$\overline{S}=\bigcap\{F\subseteq\mathbb{R}^n : S\subseteq F \ \text{ ve } \ F \ \text{ kapalı}\}.$$

(d) *$\overline{S}=S\cup\partial S$.*
(e) *S kapalıdır ancak ve ancak $\overline{S}=S$.*

İspat.
(a) *$\mathbb{R}^n\setminus\overline{S}$ kümesinin açık olduğunu gösterelim. $x\notin\overline{S}$ olsun. Lemma 4.1 gereği $B(x,\varepsilon)\cap S=\varnothing$ olan bir $\varepsilon>0$ vardır. Bu yuvarın hiçbir noktasının $\overline{S}$'de olmadığını gösterelim. $y\in B(x,\varepsilon)$ alalım. Açık yuvar açık bir küme olduğundan (Teorem 3.1) $B(y,\delta)\subseteq B(x,\varepsilon)$ olan bir $\delta>0$ vardır. O zaman $B(y,\delta)\cap S\subseteq B(x,\varepsilon)\cap S=\varnothing$ olur ve lemma gereği $y\notin\overline{S}$. Böylece $B(x,\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\overline{S}$ bulunur. x keyfi olduğundan $\mathbb{R}^n\setminus\overline{S}$ açık, $\overline{S}$ kapalıdır.*
(b) *F kapalı, $S\subseteq F$ ve $x\in\overline{S}$ olsun. $x\in S$ ise $x\in F$'dir. $x\in S'$ ise her $\varepsilon>0$ için $\big(\ B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\ \big)\cap S\neq\varnothing$ olur; $S\subseteq F$ olduğundan aynı $B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}$ delikli yuvarı F ile de kesişir, yani x, F'nin de bir yığılma noktasıdır. Kapalı küme bütün yığılma noktalarını içerdiğinden (Teorem 3.7) $x\in F$. Demek ki $\overline{S}\subseteq F$. (a) gereği $\overline{S}$'nin kendisi de S'yi içeren kapalı bir kümedir; öyleyse böyle kümelerin en küçüğüdür.*
(c) *Sağ yandaki kesişimi K ile gösterelim; $\mathbb{R}^n$ kapalı olduğundan kesişim boş olmayan bir aile üzerinden alınır. (a) gereği $\overline{S}$ bu ailenin bir üyesidir, dolayısıyla $K\subseteq\overline{S}$. (b) gereği $\overline{S}$ ailenin her üyesinin içindedir, dolayısıyla $\overline{S}\subseteq K$. Öyleyse $\overline{S}=K$.*
(d) *$x\in\partial S$ ise x merkezli her yuvar S ile kesişir ve lemma gereği $x\in\overline{S}$ olur; $S\subseteq\overline{S}$ olduğundan $S\cup\partial S\subseteq\overline{S}$. Tersine $x\in\overline{S}$ olsun. $x\in S$ ise $x\in S\cup\partial S$'dir. $x\notin S$ ise lemma gereği her $B(x,\varepsilon)$ yuvarı S ile kesişir; ayrıca $x\in B(x,\varepsilon)\cap S^c$ olduğundan her yuvar S^c ile de kesişir. Demek ki $x\in\partial S$. Böylece $\overline{S}\subseteq S\cup\partial S$.*
(e) *S kapalıysa (b) şıkkını $F=S$ ile uygulayarak $\overline{S}\subseteq S$ buluruz; $S\subseteq\overline{S}$ her zaman doğru olduğundan $\overline{S}=S$. Tersine $\overline{S}=S$ ise (a) gereği S kapalıdır.* ■

Teoremin (b) ve (c) şıkları kapanışa dışarıdan bakar: $\overline{S}$, S'yi saran kapalı kümelerin en darıdır. Tanım ise içeriden bakar: S'ye eksik noktaları tek tek ekler. İki bakış aynı kümeyi verir.
Teoremin (d) şıkkını tanımla yan yana koyarsak $S\cup S'=S\cup\partial S$ eşitliğini buluruz. Buna rağmen S' ile ∂S genellikle farklı kümelerdir: açık yuvarın merkezi bir yığılma noktasıdır ama sınır noktası değildir; tek noktalı bir kümenin noktası ise sınır noktasıdır ama yığılma noktası değildir (bkz. Alıştırma 4.4 ve Alıştırma 4.6). Fark yalnız S'nin kendi noktalarında ortaya çıkar. $x\notin S$ ise $B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}$ ile $B(x,\varepsilon)$ yuvarı S ile aynı noktalarda kesişir ve x her yuvarında S^c'nin bir noktasıdır; bu yüzden S'nin dışındaki bir nokta için yığılma noktası olmak ile sınır noktası olmak aynı şeydir.
Kapanışı bütün uzay olan kümeler özel bir ad taşır.

Tanım 4.3 (Yoğun Küme). *$S\subseteq\mathbb{R}^n$ olsun. $\overline{S}=\mathbb{R}^n$ ise S'ye $\mathbb{R}^n$'de* **yoğun** *küme denir.*

Yani S yoğundur ancak ve ancak $\mathbb{R}^n$'deki her yuvar S'den bir nokta içerir (Lemma 4.1): uzayın hiçbir noktası S'den uzak değildir. $n=1$ için bu, gerçel sayılardaki yoğunluk kavramıdır (bkz. Analiz 1).

Örnek 4.3 (Açık Yuvarın Kapanışı). *$x_0\in\mathbb{R}^n$ ve $r>0$ olsun. $\overline{B(x_0,r)}=B[x_0,r]$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm.
Teorem 4.2 (d) ve Önerme 4.1 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\overline{B(x_0,r)} &= B(x_0,r) \cup \partial B(x_0,r)\\ &= B(x_0,r) \cup S(x_0,r) = B[x_0,r]\end{aligned}$$

olur; son eşitlik, $\| x - x_0 \| \leq r$ koşulunun "$\| x - x_0 \| < r$ ya da $\| x - x_0 \| = r$" diye ikiye ayrılmasıdır.
Aynı sonuç doğrudan tanımdan da çıkar: Örnek 3.16 gereği açık yuvarın yığılma noktaları kümesi $B[x_0, r]$'dir, dolayısıyla

$$\overline{B(x_0,r)} = B(x_0,r) \cup B[x_0,r] = B[x_0,r].$$

Kapalı yuvar için de aynı hesap

$$\overline{B[x_0,r]} = B[x_0,r] \cup S(x_0,r) = B[x_0,r]$$

verir; Teorem 4.2 (e) ile bu, kapalı yuvarın kapalı olmasının (Sonuç 3.1) bir başka ifadesidir. ■

Örnek 4.4 (Rasyonel Sayıların Kapanışı). $\mathbb{R}$'de $\overline{\mathbb{Q}}$ kümesini bulunuz. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de yoğun mudur?

Çözüm.
Örnek 4.2 gereği $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$'dir. Teorem 4.2 (d) ile

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

bulunur. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de yoğundur (Tanım 4.3). Aynı sonuca gerçel sayılarda sıralama yoluyla da ulaşmıştık (bkz. Analiz 1). ■

Örnek 4.5 (Papyon Biçimli Bir Kümenin Kapanışı).

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\mid x \mid < y < \mid x \mid\}$$

kümesinin kapanışını bulunuz.

Çözüm.
$-1 \leq x \leq 1$ koşulu $\mid x \mid \leq 1, -\mid x \mid < y < \mid x \mid$ koşulu da $\mid y \mid < \mid x \mid$ demektir; öyleyse kısaca $A = \{\mid y \mid < \mid x \mid \leq 1\}$ yazabiliriz. A, $y = x$ ile $y = -x$ doğruları arasında ve $x = \pm 1$ düşey doğruları arasında kalan papyon biçimli bölgedir. Köşegenler üzerindeki noktalar, başlangıç noktası da dahil, A'ya ait değildir.
Kapanışın

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\mid x \mid \leq y \leq \mid x \mid\}$$

kümesi, yani kısaca $F = \{\mid y \mid \leq \mid x \mid \leq 1\}$ olduğunu göstereceğiz. $p = (x_0, y_0)$ incelenen nokta, $q = (x, y)$ yuvarın genel noktası olsun; her bileşen için $\mid x - x_0 \mid \leq \| q - p \|$ ve $\mid y - y_0 \mid \leq \| q - p \|$'dir.
$\boldsymbol{\overline{A} \subseteq F}$**.** F'nin kapalı olduğunu göstermek yeter; o zaman $A \subseteq F$ olduğundan Teorem 4.2 (b) gereği $\overline{A} \subseteq F$ olur. $F^c = \{\mid x \mid > 1\} \cup \{\mid y \mid > \mid x \mid\}$'dir ve iki parça da açıktır:

- $\mid x_0 \mid > 1$ ise $\varepsilon = \mid x_0 \mid - 1$ alalım. $q \in B(p,\varepsilon)$ için $\mid x - x_0 \mid < \varepsilon$ olduğundan $\mid x \mid \geq \mid x_0 \mid - \mid x - x_0 \mid > 1$ olur.
- $\mid y_0 \mid > \mid x_0 \mid$ ise $\varepsilon = \dfrac{\mid y_0 \mid - \mid x_0 \mid}{2}$ alalım. $q \in B(p,\varepsilon)$ için $\mid y \mid > \mid y_0 \mid - \varepsilon$ ve $\mid x \mid < \mid x_0 \mid + \varepsilon$ olduğundan $\mid y \mid - \mid x \mid > \mid y_0 \mid - \mid x_0 \mid - 2\varepsilon = 0$ olur.

İki açık kümenin birleşimi açık olduğundan (Teorem 3.3) F^c açık, F kapalıdır.
$\boldsymbol{F \subseteq \overline{A}}$**.** $p \in F$ alalım. $p \in A$ ise iş biter. $p \notin A$ ise $\mid y_0 \mid = \mid x_0 \mid \leq 1$'dir; Lemma 4.1 gereği her $\varepsilon > 0$ için $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ olduğunu göstermeliyiz.

- $x_0 \neq 0$ ise $1 - t < \varepsilon$ olan bir $t \in (0,1)$ seçip $q = (x_0, ty_0)$ noktasına bakalım. $\mid ty_0 \mid = t \mid x_0 \mid < \mid x_0 \mid \leq 1$ olduğundan $q \in A$. Ayrıca $\mid y_0 \mid \leq 1$ olduğundan $\| q - p \| = (1-t) \mid y_0 \mid < \varepsilon$.

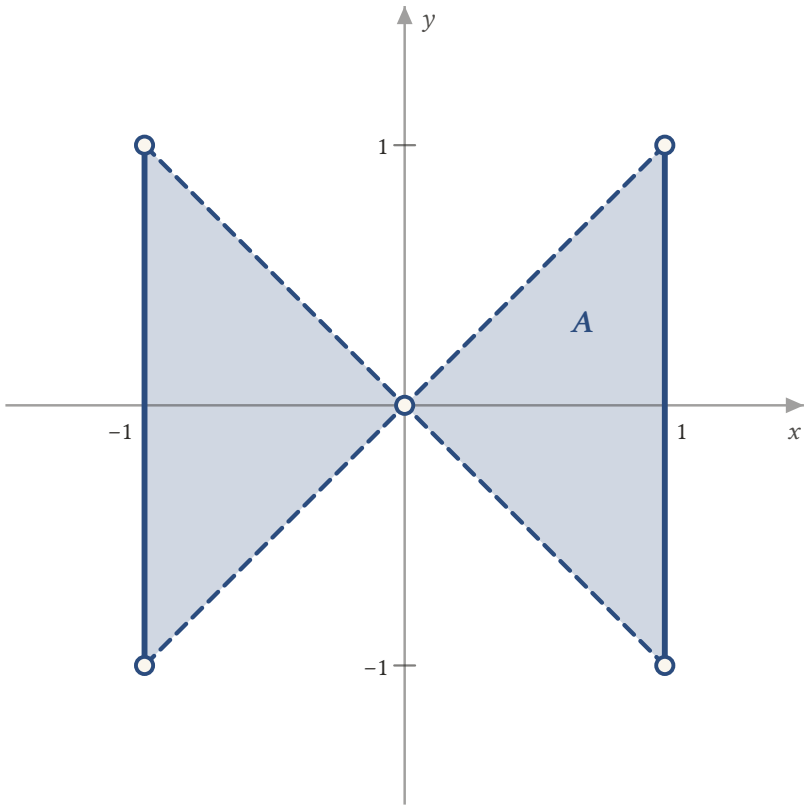
 CC BY-NC-SA 4.0

- $p = (0,0)$ ise $0 < s < \min\{\varepsilon, 1\}$ seçip $q = (s, 0)$ noktasını alalım. $\mid 0 \mid < s \leq 1$ olduğundan $q \in A$ ve $\parallel q - p \parallel = s < \varepsilon$.

Sonuç olarak

$$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\mid x \mid \leq y \leq \mid x \mid\}.$$

Kapanışa köşegen parçaları eklenmiştir; özel olarak A'ya ait olmayan $(0,0)$ noktası kapanıştadır.



Şekil 4.2: $A = \{|y| < |x| \leq 1\}$ papyonu. $x = \pm 1$ kenarları A'ya aittir (düz); köşegen parçaları, dört köşe ve başlangıç noktası ait değildir. Kapanış bu kesikli parçaları ve boş noktaları da içerir.

■

4.4 İç Nokta ve İç

Kapanış kümeyi dışarıdan tamamlar; iç ise kümenin kıyısındaki noktaları atarak onu içeriye doğru küçültür.

Tanım 4.4 (İç Nokta ve İç). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $B(x,\varepsilon) \subseteq S$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ varsa x noktasına S'nin bir **iç noktası** denir. S'nin bütün iç noktalarının kümesine S'nin **içi** denir ve S° ile gösterilir:

$$S^\circ = \{x \in S : \exists \varepsilon > 0,\, B(x,\varepsilon) \subseteq S\}.$$

Yani iç nokta, çevresinde kümeden hiç çıkmadan her yöne biraz hareket edilebilen noktadır. $x \in B(x,\varepsilon)$ olduğundan her iç nokta kümenin bir elemanıdır; böylece $S^\circ \subseteq S \subseteq \overline{S}$ zinciri elde edilir. Açık küme tanımı (Tanım 3.2) bu dille "her noktası bir iç nokta olan küme" diye okunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 4.3 (İçin Özellikleri). *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.*
(a) *S° açık bir kümedir.*
(b) *S°, S'nin içinde kalan bütün açık kümelerin birleşimidir:*

$$S^\circ = \bigcup \{G \subseteq \mathbb{R}^n : G \subseteq S \text{ ve } G \text{ açık}\}.$$

Yani S°, S'nin içinde kalan en büyük açık kümedir.
(c) *$S^\circ = S \setminus \partial S$.*
(d) *S açıktır ancak ve ancak $S^\circ = S$.*

> ***İspat.***
> ***(a)*** *$x \in S^\circ$ olsun; $B(x,\varepsilon) \subseteq S$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu yuvarın her noktasının da iç nokta olduğunu gösterelim. $y \in B(x,\varepsilon)$ alalım. Açık yuvar açık olduğundan (Teorem 3.1) $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ olan bir $\delta > 0$ vardır; o zaman $B(y,\delta) \subseteq S$ ve $y \in S^\circ$. Böylece $B(x,\varepsilon) \subseteq S^\circ$ olur. S°'ın her noktasının çevresinde S°'ın içinde kalan bir yuvar bulunduğundan S° açıktır. ($S^\circ = \varnothing$ ise de açıktır.)*
> ***(b)*** *Sağ yandaki birleşimi V ile gösterelim. (a) gereği S° açıktır ve $S^\circ \subseteq S$'dir; yani S°, birleşimi alınan kümelerden biridir ve $S^\circ \subseteq V$. Tersine $x \in V$ olsun. O zaman $x \in G$ olan açık bir $G \subseteq S$ vardır; G açık olduğundan $B(x,\varepsilon) \subseteq G \subseteq S$ olan bir $\varepsilon > 0$ bulunur, yani $x \in S^\circ$. Böylece $V \subseteq S^\circ$ ve $S^\circ = V$. Özel olarak S'nin içindeki her açık küme S°'ın içindedir; S° bu kümelerin en büyüğüdür.*
> ***(c)*** *$x \in S^\circ$ olsun. $B(x,\varepsilon) \subseteq S$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır; bu yuvar S^c ile kesişmediğinden $x \notin \partial S$. Ayrıca $x \in S$ olduğundan $x \in S \setminus \partial S$. Böylece $S^\circ \subseteq S \setminus \partial S$.*
> *Tersine $x \in S \setminus \partial S$ olsun. $x \notin \partial S$ olduğundan $B(x,\varepsilon) \cap S = \varnothing$ ya da $B(x,\varepsilon) \cap S^c = \varnothing$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. $x \in B(x,\varepsilon) \cap S$ olduğundan birinci eşitlik olamaz. Öyleyse $B(x,\varepsilon) \cap S^c = \varnothing$, yani $B(x,\varepsilon) \subseteq S$ ve $x \in S^\circ$. Böylece $S \setminus \partial S \subseteq S^\circ$.*
> ***(d)*** *S açıksa her noktası bir iç noktadır, yani $S \subseteq S^\circ$; $S^\circ \subseteq S$ her zaman doğru olduğundan $S^\circ = S$. Tersine $S^\circ = S$ ise (a) gereği S açıktır.* ■

Kapanış ile iç birbirinin aynadaki görüntüsüdür: $\overline{S}$ kümeye sınırını ekler, S° kümeden sınırını çıkarır. Örneğin $\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{Q} \setminus \partial\mathbb{Q} = \varnothing$ olur; $\mathbb{Q}$ hiçbir açık aralığı içermez. Üç kavram birlikte, bir kümeye göre uzayı üç parçaya ayırır.

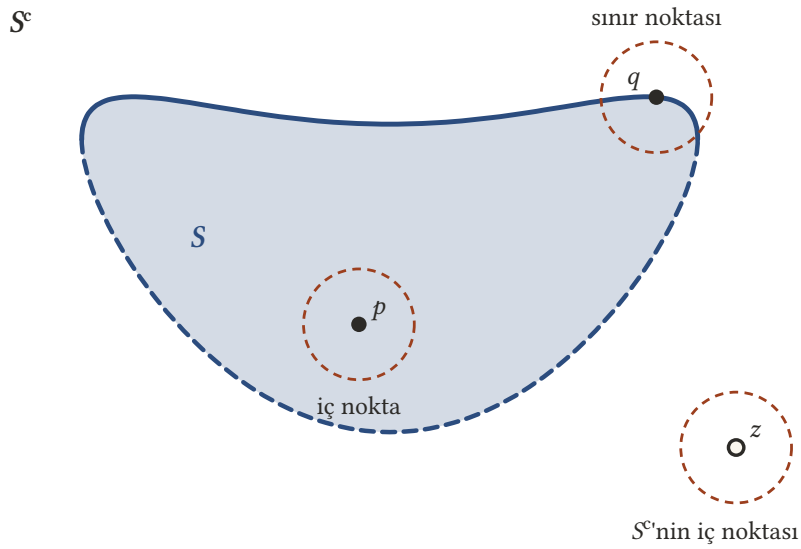
Sonuç 4.1 (Uzayın Üç Parçaya Ayrılışı). *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$, ikişer ikişer ayrık olan S°, ∂S ve $(S^c)^\circ$ kümelerinin birleşimidir. Özel olarak $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ$.*

> ***İspat.***
> *$x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $x \notin S^\circ$ ve $x \notin (S^c)^\circ$ olması, x merkezli hiçbir yuvarın ne S'nin ne de S^c'nin içinde kalmaması demektir; yani her yuvar hem S^c ile hem S ile kesişir, bu da $x \in \partial S$ demektir. Dolayısıyla üç kümenin birleşimi $\mathbb{R}^n$'dir.*
> *Ayrıklığa bakalım. $S^\circ \subseteq S$ ve $(S^c)^\circ \subseteq S^c$ olduğundan bu ikisi ayrıktır. Teorem 4.3 (c) gereği $S^\circ \cap \partial S = \varnothing$'dır. Aynı şıkkı S^c'ye uygular ve Teorem 4.1 (a)'i kullanırsak $(S^c)^\circ \cap \partial S = (S^c)^\circ \cap \partial(S^c) = \varnothing$ buluruz. Son olarak Teorem 4.3 (c) gereği S'nin sınırda olmayan noktaları tam olarak S°'ı oluşturur; bu yüzden Teorem 4.2 (d) ile*

$$\overline{S} = S \cup \partial S = S^\circ \cup \partial S$$

olur. S° ile ∂S ayrık olduğundan $\overline{S} \setminus S^\circ = \partial S$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.3: S kümesi ve üç tür nokta: p'nin çevresindeki küçük yuvar tamamen S'de (iç nokta), q'nun çevresindeki her yuvar hem S'ye hem S^c'ye taşar (sınır noktası), z'nin çevresindeki yuvar tamamen S^c'de. Sınırın düz kısmı S'ye aittir, kesikli kısmı ait değildir.

■

$(S^c)^\circ$ kümesinin noktalarına S'nin **dış noktaları** da denir: bunlar, çevresinde S'den hiç nokta bulunmayan bir yuvar taşıyan noktalardır.

Örnek 4.6 (Kapalı Yuvarın İçi). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $\big(\ B[x_0, r]\big)^\circ = B(x_0, r)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Teorem 4.3 (c) ve Önerme 4.1 gereği

$$\begin{aligned}\big(\ B[x_0, r]\big)^\circ &= B[x_0, r] \setminus S(x_0, r) \\ &= \{x : \| \ x - x_0 \ \| < r\} = B(x_0, r)\end{aligned}$$

olur. Aynı biçimde

$$\big(\ B(x_0, r)\big)^\circ = B(x_0, r) \setminus S(x_0, r) = B(x_0, r)$$

bulunur; açık yuvar kendi içine eşittir, bu da Teorem 4.3 (d) gereği açık olmasıyla uyumludur. ■

Örnek 4.7 (Papyon Biçimli Kümenin İçi).

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -\ |\ x\ | < y < |\ x\ |\}$$

kümesinin içini ve sınırını bulunuz.

Çözüm.
Örnek 4.5 çözümünde gördüğümüz gibi $A = \{|\ y\ | < |\ x\ | \le 1\}$ yazılabilir. $p = (x_0, y_0)$ incelenen nokta, $q = (x, y)$ yuvarın genel noktası olsun. İçin

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -\ |\ x\ | < y < |\ x\ |\}$$

kümesi, yani kısaca $G = \{|\ y\ | < |\ x\ | < 1\}$ olduğunu göstereceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

$G \subseteq A^\circ$. $G \subseteq A$ olduğu açıktır. G'nin açık olduğunu gösterirsek Teorem 4.3 (b) gereği $G \subseteq A^\circ$ olur. $p \in G$ için

$$\varepsilon = \min\left\{1 - |\, x_0 \,|, \frac{|\, x_0 \,| - |\, y_0 \,|}{2}\right\} > 0$$

alalım. $q \in B(p,\varepsilon)$ ise $|\, x - x_0 \,| < \varepsilon$ ve $|\, y - y_0 \,| < \varepsilon$ olduğundan

$$|\, x \,| < |\, x_0 \,| + \varepsilon \leq 1,$$
$$|\, x \,| - |\, y \,| > \left(|\, x_0 \,| - \varepsilon\right) - \left(|\, y_0 \,| + \varepsilon\right) \geq 0$$

olur; yani $B(p,\varepsilon) \subseteq G$ ve G açıktır.
$A^\circ \subseteq G$. $A \setminus G$ kümesinin noktaları $|\, x_0 \,| = 1$ ve $|\, y_0 \,| < 1$ olan noktalar, yani papyonun düşey kenarlarıdır. Böyle bir p ve $\varepsilon > 0$ için

$$q = \left(\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) x_0, y_0\right)$$

noktasında $|\, x \,| = 1 + \dfrac{\varepsilon}{2} > 1$ olduğundan $q \notin A$'dır ve $\| q - p \| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$'dur. Demek ki p merkezli hiçbir yuvar A'nın içinde kalmaz; $p \notin A^\circ$.
Sonuç.

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -|\, x \,| < y < |\, x \,|\}.$$

Sonuç 4.1 gereği $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$'dır. $\overline{A} = \{|\, y \,| \leq |\, x \,| \leq 1\}$ kümesinden $\{|\, y \,| < |\, x \,| < 1\}$ çıkarılınca $|\, y \,| = |\, x \,|$ ya da $|\, x \,| = 1$ olan noktalar kalır:

$$\partial A = \{|\, y \,| = |\, x \,| \leq 1\} \cup \{|\, x \,| = 1, |\, y \,| \leq 1\}.$$

Sınır iki köşegen parçası ile iki düşey kenardan oluşur. A açık değildir, çünkü $A^\circ \neq A$; kapalı da değildir, çünkü $\overline{A} \neq A$. ■

Örnek 4.8 (Çember ile Hiperbolün Sınırladığı Kümenin İçi ve Kapanışı).

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, xy > 1\}$$

kümesinin içini ve kapanışını bulunuz.

Çözüm.
Örnek 4.1 çözümünde

$$F = \{x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 1\},$$
$$U = \{x^2 + y^2 < 4, xy > 1\}$$

kümeleri için $U \subseteq E \subseteq F$ ve $\partial E = F \setminus U$ bulmuştuk.
Kapanış. Teorem 4.2 (d) gereği $\overline{E} = E \cup (F \setminus U)$'dur. E ve $F \setminus U$ kümeleri F'nin içinde olduğundan birleşim de F'nin içindedir. Tersine F'nin her noktası ya $U \subseteq E$'dedir ya da $F \setminus U$'dadır. Öyleyse $\overline{E} = F$.
İç. Teorem 4.3 (c) gereği $E^\circ = E \setminus (F \setminus U)$'dur. E'nin U'da olan noktaları $F \setminus U$'da olmadığından çıkarılmaz; U'da olmayan noktaları ise $E \subseteq F$ olduğundan $F \setminus U$'dadır ve çıkarılır. Öyleyse $E^\circ = U$.
Sonuç.

$$\overline{E} = \{x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 1\},$$
$$E^\circ = \{x^2 + y^2 < 4, xy > 1\}.$$

Kapanışa geçerken kesin eşitsizlikler geniş eşitsizliğe, içe geçerken geniş eşitsizlikler kesin eşitsizliğe dönüşmüştür. Bu kural iyi bir sezgi verir ama bir ispat değildir ve her zaman doğru sonuç vermez. Örneğin $S = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1)^2 \geq 0\}$ kümesi $[0, +\infty)$ aralığıdır ve içi $(0, +\infty)$'dur; oysa kural

 CC BY-NC-SA 4.0

$\{x(x-1)^2 > 0\}$ kümesini, yani $(0,1) \cup (1,+\infty)$ kümesini verirdi. Bu yüzden her aday nokta yuvarlarla sınanmalıdır. ■

4.5 Kapanış ile İç Arasındaki Bağlar

Kapanış ve iç, kümeler arasındaki kapsama ve tümleme işlemleriyle uyumludur; aşağıdaki örnekler bu bağları tanımlardan çıkarır.

Örnek 4.9 (Kapanış Kapsamayı Korur). $A, C \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $A \subseteq C$ olsun. $\overline{A} \subseteq \overline{C}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x \in \overline{A}$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Lemma 4.1 gereği $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$'dır, yani $y \in B(x,\varepsilon)$ ve $y \in A$ olan bir y vardır. $A \subseteq C$ olduğundan $y \in C$ olur, dolayısıyla $y \in B(x,\varepsilon) \cap C$ ve bu kesişim boş değildir. ε keyfi olduğundan lemma gereği $x \in \overline{C}$. Böylece $\overline{A} \subseteq \overline{C}$.
Aynı sonuç Teorem 4.2 (b) ile tek satırda da çıkar: $\overline{C}$ kapalıdır ve $A \subseteq C \subseteq \overline{C}$ olduğundan A'yı içerir; öyleyse A'yı içeren en küçük kapalı küme olan $\overline{A}$, $\overline{C}$'nin içindedir. ■

Örnek 4.10 (İç Kapsamayı Korur). $A, C \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $A \subseteq C$ olsun. $A^\circ \subseteq C^\circ$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x \in A^\circ$ olsun. İç nokta tanımı gereği $B(x,\varepsilon) \subseteq A$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. $A \subseteq C$ olduğundan $B(x,\varepsilon) \subseteq C$ olur; aynı ε, x'in C'nin de iç noktası olduğunu gösterir. Böylece $x \in C^\circ$ ve $A^\circ \subseteq C^\circ$.
Teorem 4.3 (b) ile de gösterilebilir: A° açıktır ve $A^\circ \subseteq A \subseteq C$ olduğundan C'nin içinde kalan açık bir kümedir; C° bu tür kümelerin en büyüğü olduğundan $A^\circ \subseteq C^\circ$. ■

Örnek 4.11 (Kapanışın Tümleyeni). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Bir $x \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki denklikleri sırayla yazalım:

$$\begin{aligned} x \in \left(\overline{A}\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq A^c \\ &\Leftrightarrow x \in (A^c)^\circ. \end{aligned}$$

İkinci denklik, Lemma 4.1 sonucunun olumsuzudur; üçüncüsü, A ile kesişmeyen bir kümenin A^c'nin içinde kalmasıdır; dördüncüsü iç nokta tanımıdır. İki küme aynı elemanlara sahip olduğundan eşittir. Eşitliği A yerine A^c kümesine uygulayıp iki yanın tümleyenini alırsak, $(A^c)^c = A$ olduğundan $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ eşitliği de elde edilir. Bu iki eşitlik, kapanış ile ilgili her sonucun tümleme yoluyla iç ile ilgili bir sonuca çevrilebileceğini söyler; örneğin $\overline{A}$'nın kapalı olması, $(A^c)^\circ$'ın açık olmasının bir başka ifadesidir. ■

4.6 İç, Kapanış ve Sınırı Hesaplamak

Somut bir kümenin içini, kapanışını ve sınırını bulurken hep aynı yolu izleriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört adımda iç, kapanış ve sınır

1. **Adayları belirle.** Kümeyi tanımlayan koşullarda kesin eşitsizlikleri sağlayan noktalar iç nokta adayıdır; bir koşulun eşitliğe dönüştüğü noktalar sınır noktası adayıdır.
2. **İç adaylar için yuvar bul.** Her iç aday p için kümenin içinde kalan bir $B(p,\varepsilon)$ bulunur. ε çoğu zaman p'nin en yakın "eşitlik yüzeyine" uzaklığıdır; kapsama üçgen eşitsizliğiyle gösterilir.
3. **Sınır adaylarını sına.** Her sınır adayı p ve her $\varepsilon > 0$ için $B(p,\varepsilon)$ içinde kümeden bir nokta ve tümleyenden bir nokta gösterilir; bunun için p uygun bir doğru boyunca biraz kaydırılır.
4. **Geri kalanları ele ve sonucu yaz.** Kalan her nokta için tümleyenin içinde kalan bir yuvar bulunur. Sonra $S^\circ = S \setminus \partial S$ ve $\overline{S} = S \cup \partial S$ yazılır.

Örnek 4.12 (Yarı Açık Bir Halka). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : 2 \leq \| x - x_0 \| < 3\}$$

kümesinin içini, kapanışını ve sınırını bulunuz. X açık mıdır, kapalı mıdır?

Çözüm.
Bu kümenin ne açık ne kapalı olduğunu Örnek 3.15 ile görmüştük; şimdi reçeteyi izleyerek kümenin tam olarak nerede "eksik" ve nerede "fazla" olduğunu belirleyeceğiz.
Adaylar. $2 < \| p - x_0 \| < 3$ olan noktalar iç nokta adayı, $\| p - x_0 \| = 2$ ya da $\| p - x_0 \| = 3$ olan noktalar sınır noktası adayıdır.
İç adaylar. $2 < \| p - x_0 \| < 3$ olsun ve

$$\varepsilon = \min\left\{ \| p - x_0 \| - 2,\, 3 - \| p - x_0 \| \right\}$$

alalım. $y \in B(p,\varepsilon)$ ise üçgen eşitsizliği ve ters üçgen eşitsizliği

$$\begin{aligned} \| y - x_0 \| &\leq \| y - p \| + \| p - x_0 \| < \varepsilon + \| p - x_0 \| \leq 3, \\ \| y - x_0 \| &\geq \| p - x_0 \| - \| y - p \| > \| p - x_0 \| - \varepsilon \geq 2 \end{aligned}$$

verir; yani $B(p,\varepsilon) \subseteq X$.
Sınır adayları. p'yi x_0'dan çıkan ışın boyunca kaydıralım: $t > 0$ için $y_t = x_0 + t\,(p - x_0)$ noktasında

$$\begin{aligned} \| y_t - x_0 \| &= t \,\| p - x_0 \|, \\ \| y_t - p \| &= |\, t - 1 \,|\, \| p - x_0 \| \end{aligned}$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $0 < \delta < \min\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$ seçelim.

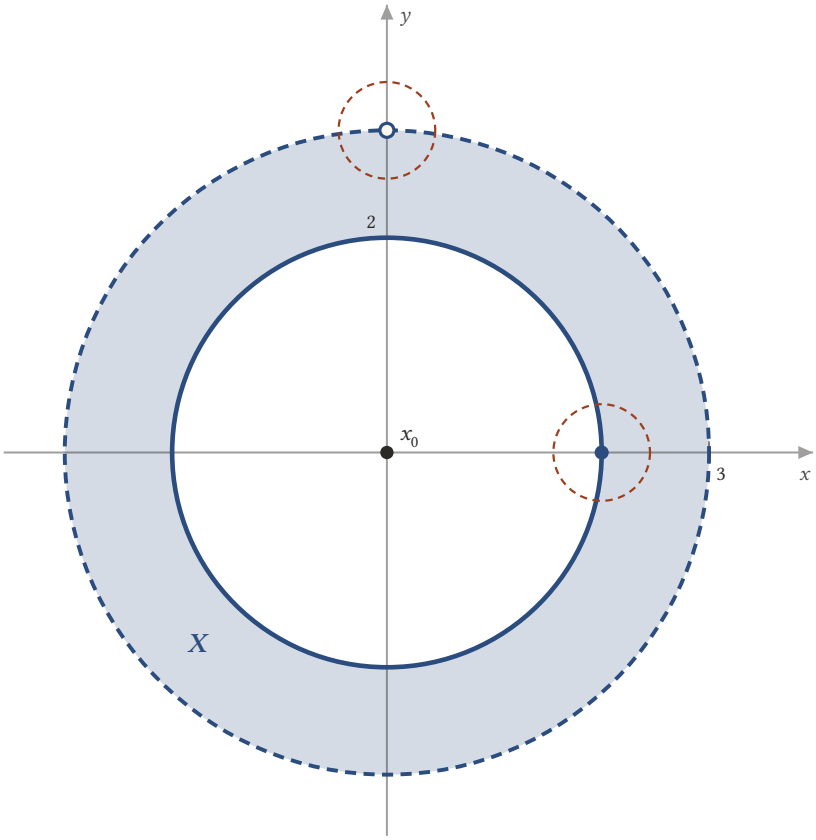
- $\| p - x_0 \| = 3$ ise $p \notin X$'tir; p'nin kendisi $B(p,\varepsilon) \cap X^c$ kümesindedir. $y_{1-\delta}$ noktasında $\| y_{1-\delta} - x_0 \| = 3 - 3\delta$ ve $\delta < \dfrac{1}{3}$ olduğundan bu sayı 2 ile 3 arasındadır; yani $y_{1-\delta} \in X$. Ayrıca $\| y_{1-\delta} - p \| = 3\delta < \varepsilon$.
- $\| p - x_0 \| = 2$ ise $p \in X$'tir. $y_{1-\delta}$ noktasında $\| y_{1-\delta} - x_0 \| = 2 - 2\delta < 2$, yani $y_{1-\delta} \notin X$. Ayrıca $\| y_{1-\delta} - p \| = 2\delta < \varepsilon$.

İki durumda da her yuvar hem X ile hem X^c ile kesişir; bu noktalar sınırdadır.
Geri kalanlar. $\| p - x_0 \| < 2$ ise $\varepsilon = 2 - \| p - x_0 \|$ alındığında üçgen eşitsizliği, $B(p,\varepsilon)$'nın her y noktası için $\| y - x_0 \| < 2$ verir. $\| p - x_0 \| > 3$ ise $\varepsilon = \| p - x_0 \| - 3$ alındığında ters üçgen eşitsizliği, her y noktası için $\| y - x_0 \| > 3$ verir. İki durumda da $B(p,\varepsilon) \subseteq X^c$ ve $p \notin \partial X$.
Sonuç.

$$\begin{aligned} \partial X &= S(x_0, 2) \cup S(x_0, 3), \\ X^\circ &= X \setminus \partial X = \{x : 2 < \| x - x_0 \| < 3\}, \\ \overline{X} &= X \cup \partial X = \{x : 2 \leq \| x - x_0 \| \leq 3\}. \end{aligned}$$

$X \cap \partial X = S(x_0, 2) \neq \varnothing$ olduğundan X açık değildir; $S(x_0, 3)$ yüzeyi sınırın bir parçası olduğu hâlde X'in dışında kaldığından X kapalı da değildir (Teorem 4.1).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.4: $X = \{2 \le \|x - x_0\| < 3\}$ halkası ($x_0 = (0, 0)$). İç çember X'e aittir (düz), dış çember ait değildir (kesikli). (2, 0) ve (0, 3) sınır noktalarının çevresindeki her yuvar hem X'e hem tümleyenine taşar.

■

Örnek 4.13 (Yarı Açık Bir Şerit).

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 1\}$$

şeridinin içini, kapanışını ve sınırını bulunuz.

Çözüm.
$p = (x_0, y_0)$ incelenen nokta olsun. Her (x, y) için $\mid x - x_0 \mid \le \| (x, y) - p \|$ olduğunu kullanacağız.
İç adaylar: $0 < x_0 < 1$. $\varepsilon = \min\{x_0, 1 - x_0\}$ alalım. $(x, y) \in B(p, \varepsilon)$ ise $\mid x - x_0 \mid < \varepsilon$ olduğundan $0 < x < 1$ olur; $B(p, \varepsilon) \subseteq T$.
Sınır adayları: $x_0 = 0$ ya da $x_0 = 1$. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1\}$ seçelim. $x_0 = 0$ ise $p \notin T$ ve $(\delta, y_0) \in T$'dir. $x_0 = 1$ ise $p \in T$ ve $(1 + \delta, y_0) \notin T$'dir. Kaydırılan nokta p'ye $\delta < \varepsilon$ uzaklıktadır. İki durumda da $B(p, \varepsilon)$ hem T ile hem T^c ile kesişir.
Geri kalanlar. $x_0 < 0$ ise $\varepsilon = -x_0$ alındığında yuvarın her noktasında $x < 0$ olur. $x_0 > 1$ ise $\varepsilon = x_0 - 1$ alındığında yuvarın her noktasında $x > 1$ olur. İki durumda da yuvar T^c'nin içindedir.
Sonuç. ∂T, $x = 0$ ve $x = 1$ düşey doğrularının birleşimidir. Buradan $T^\circ = \{0 < x < 1\}$ açık şeridi ve $\overline{T} = \{0 \le x \le 1\}$ kapalı şeridi bulunur. T, sınırının $x = 1$ parçasını içerdiğinden açık değildir (bunu Örnek 3.7 ile doğrudan da görmüştük); $x = 0$ parçasını içermediğinden kapalı da değildir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Özet Tablosu

Bölümde incelediğimiz kümelerin içini, kapanışını ve sınırını bir arada görelim; son sütundaki bilgiler Sonuç 4.1 gereği ilk iki sütundan da okunabilir.

Tablo 4.1: Sık karşılaşılan kümelerin içi, kapanışı ve sınırı

Küme	İç	Kapanış	Sınır
$B(x_0, r)$	$B(x_0, r)$	$B[x_0, r]$	$S(x_0, r)$
$B[x_0, r]$	$B(x_0, r)$	$B[x_0, r]$	$S(x_0, r)$
$S(x_0, r)$	$\varnothing$	$S(x_0, r)$	$S(x_0, r)$
$\{s < \|x - a\| < r\}$	kendisi	$\{s \leq \|x - a\| \leq r\}$	$S(a, s) \cup S(a, r)$
$\{2 \leq \|x - x_0\| < 3\}$	$\{2 < \|x - x_0\| < 3\}$	$\{2 \leq \|x - x_0\| \leq 3\}$	$S(x_0, 2) \cup S(x_0, 3)$
$\{0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$	$\{0 < x < 1\}$	$\{0 \leq x \leq 1\}$	$x = 0$ ve $x = 1$ doğruları
$(0, 1] \times [0, 1]$	$(0, 1) \times (0, 1)$	$[0, 1] \times [0, 1]$	birim karenin çevresi
papyon A	$\{\mid y \mid < \mid x \mid < 1\}$	$\{\mid y \mid \leq \mid x \mid \leq 1\}$	köşegen parçaları ve düşey kenarlar
E	$\{x^2 + y^2 < 4, xy > 1\}$	$\{x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 1\}$	iki çember yayı ve iki hiperbol yayı
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$	$\varnothing$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$
boş olmayan sonlu S	$\varnothing$	S	S
$\varnothing$ ve $\mathbb{R}^n$	kendisi	kendisi	$\varnothing$

Tablodaki açık halka, kare, $\mathbb{Q}^n$, sonlu küme ve yuvar yüzeyi satırları aşağıdaki alıştırmalarda gösterilmektedir. Tablo bir örüntüyü de öne çıkarır: bir kümenin açık olması iç sütunuyla kendisinin, kapalı olması kapanış sütunuyla kendisinin aynı olmasıdır.

4.8 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (Açık Halka). $a \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < s < r$ olsun.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : s < \| x - a \| < r\}$$

halkasının içini, kapanışını ve sınırını bulunuz.

> **Çözüm.**
> **İç.** Örnek 3.9 gereği A açıktır; Teorem 4.3 (d) gereği $A^\circ = A$ olur.
> **Sınır adayları.** $\| p - a \| = r$ ya da $\| p - a \| = s$ olsun; iki durumda da $p \notin A$, dolayısıyla her yuvar A^c ile kesişir. $y_t = a + t\,(p - a)$ noktaları için $\| y_t - a \| = t \| p - a \|$ ve $\| y_t - p \| = \mid t - 1 \mid \| p - a \|$'dır. $\varepsilon > 0$ verilsin.
>
> - $\| p - a \| = r$ ise t'yi $\max\left\{\frac{s}{r}, 1 - \frac{\varepsilon}{r}\right\} < t < 1$ aralığından seçelim. O zaman $s < tr < r$, yani $y_t \in A$ ve $\| y_t - p \| = (1 - t)\, r < \varepsilon$.
> - $\| p - a \| = s$ ise t'yi $1 < t < \min\left\{\frac{r}{s}, 1 + \frac{\varepsilon}{s}\right\}$ aralığından seçelim. O zaman $s < ts < r$, yani $y_t \in A$ ve $\| y_t - p \| = (t - 1)\, s < \varepsilon$.
>
> Her yuvar A ile de kesiştiğinden bu noktalar sınırdadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Geri kalanlar. $\| p-a \| < s$ ise $\varepsilon = s - \| p-a \|$ ile yuvarın her noktası $\| y-a \| < s$ sağlar; $\| p-a \| > r$ ise $\varepsilon = \| p-a \| - r$ ile her noktası $\| y-a \| > r$ sağlar. İki durumda da yuvar A^c'nin içindedir.
Sonuç. $\partial A = S(a,s) \cup S(a,r)$ bulunur; A açık olduğundan bu sınırdan hiçbir nokta içermez (Teorem 4.1). Kapanış için

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : s \leq \| x-a \| \leq r\}$$

elde edilir. ■

Alıştırma 4.2 (Bir Kenarı Eksik Kare).

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

kümesinin içini, kapanışını ve sınırını bulunuz; K açık ya da kapalı mıdır?

Çözüm.
$K = (0,1] \times [0,1]$ yazalım ve $p = (x_0, y_0)$ incelenen nokta olsun. Yine her bileşen için $| x - x_0 | \leq \| (x,y) - p \|$ ve $| y - y_0 | \leq \| (x,y) - p \|$'dir.
İç adaylar: $0 < x_0 < 1$ ve $0 < y_0 < 1$. $\varepsilon = \min\{x_0, 1-x_0, y_0, 1-y_0\}$ alalım. $(x,y) \in B(p,\varepsilon)$ ise $| x - x_0 | < \varepsilon$ ve $| y - y_0 | < \varepsilon$ olduğundan $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ olur; $B(p,\varepsilon) \subseteq K$.
Sınır adayları: $p \in [0,1] \times [0,1]$ ve koordinatlardan biri 0 ya da 1. $\varepsilon > 0$ verilsin.
K'dan bir nokta. Karenin merkezi $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olsun ve $0 < t \leq 1$ için $q_t = p + t\,(c - p)$ noktasına bakalım. Birinci koordinat $(1-t)\,x_0 + \frac{t}{2}$'dir; $x_0 \in [0,1]$ olduğundan bu sayı $\frac{t}{2}$ ile $1 - \frac{t}{2}$ arasındadır, dolayısıyla $0 < x < 1$ olur. İkinci koordinat için de aynısı geçerlidir. Öyleyse $q_t \in (0,1) \times (0,1) \subseteq K$. Ayrıca $\| q_t - p \| = t \| c - p \| \leq t\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan t yeterince küçük seçilirse $q_t \in B(p,\varepsilon)$ olur.
K^c'den bir nokta. $0 < \delta < \varepsilon$ seçelim. $x_0 = 0$ ise p'nin kendisi K'da değildir. $x_0 = 1$ ise $(1+\delta, y_0)$, $y_0 = 0$ ise $(x_0, -\delta)$, $y_0 = 1$ ise $(x_0, 1+\delta)$ noktası K'da değildir ve p'ye $\delta < \varepsilon$ uzaklıktadır.
Demek ki karenin çevresindeki her nokta sınırdadır.
Geri kalanlar: $p \notin [0,1] \times [0,1]$. O zaman $x_0 < 0$, $x_0 > 1$, $y_0 < 0$ ya da $y_0 > 1$'dir. Sırasıyla $\varepsilon = -x_0$, $x_0 - 1$, $-y_0$ ya da $y_0 - 1$ alınırsa yuvarın her noktası aynı eşitsizliği sağlar ve K'nın dışında kalır.
Sonuç. ∂K, birim karenin çevresidir: $[0,1] \times [0,1]$ kümesinin en az bir koordinatı 0 ya da 1 olan noktaları. Buradan

$$K^\circ = K \setminus \partial K = (0,1) \times (0,1),$$
$$\overline{K} = K \cup \partial K = [0,1] \times [0,1]$$

bulunur. $\left(1, \frac{1}{2}\right) \in K \cap \partial K$ olduğundan K açık değildir; $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in \partial K$ noktası K'da olmadığından K kapalı da değildir. İkinci sonucu Örnek 3.14 ile yığılma noktaları yoluyla da görmüştük. ■

Alıştırma 4.3 (Yuvar Yüzeyinin İçi Boştur). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. Yuvar yüzeyi $S(x_0, r)$ için sınırı, kapanışı ve içi bulunuz.

Çözüm.
Yüzeydeki noktalar sınırdadır. $\| p - x_0 \| = r$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. p'nin kendisi $S(x_0,r)$'dedir. $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{r}$ için $y = x_0 + (1+\delta)(p - x_0)$ noktasında $\| y - x_0 \| = (1+\delta)\,r \neq r$ olduğundan $y \notin S(x_0,r)$ ve $\| y - p \| = \delta r < \varepsilon$. Her yuvar hem kümeyle hem tümleyenle kesişir.
Öbür noktalar sınırda değildir. $\| p - x_0 \| < r$ ise Önerme 4.1 ispatındaki gibi $\varepsilon = r - \| p - x_0 \|$ için $B(p,\varepsilon) \subseteq B(x_0,r)$ olur; $\| p - x_0 \| > r$ ise $\varepsilon = \| p - x_0 \| - r$ için $B(p,\varepsilon)$ yuvarı $B[x_0,r]$ ile kesişmez. İki durumda da yuvarın hiçbir noktası r uzaklıkta değildir, yani yuvar $S(x_0,r)$'nin tümleyeninin içindedir.
Sonuç. $\partial S(x_0,r) = S(x_0,r)$. Sınır kümenin içinde olduğundan küme kapalıdır (Teorem 4.1) ve kapanışı kendisidir. İçi ise

$$S(x_0,r)^\circ = S(x_0,r) \setminus \partial S(x_0,r) = \varnothing$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur (Teorem 4.3). Yüzey "kalınlığı olmayan" bir kümedir: hiçbir yuvarı içine alamaz. ■

Alıştırma 4.4 (Sonlu Bir Kümenin İçi, Kapanışı ve Sınırı). $S = \{p_1, ..., p_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ boş olmayan sonlu bir küme olsun. S', $\overline{S}$, S° ve ∂S kümelerini bulunuz.

Çözüm.
Yığılma noktası yoktur. Alıştırma 3.7 gereği bir yığılma noktasının her yuvarında kümenin sonsuz çoklukta noktası bulunur. S sonlu olduğundan bu olanaksızdır; demek ki $S' = \varnothing$.
Kapanış. $\overline{S} = S \cup S' = S$ olur; Teorem 4.2 (e) gereği bu, sonlu kümelerin kapalı olmasının (Sonuç 3.2) bir başka ifadesidir.
İç. $p_i \in S$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $0 < t < \varepsilon$ için $p_i + t\,e_1$ noktaları $B(p_i, \varepsilon)$ içinde birbirinden farklı sonsuz çoklukta noktadır; S sonlu olduğundan bunların hepsi S'de olamaz. Öyleyse hiçbir yuvar S'nin içinde kalmaz ve $S^\circ = \varnothing$.
Sınır. Sonuç 4.1 gereği $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ = S$.
Bu örnekte $S' = \varnothing$ iken $\partial S = S$'dir; yığılma noktası ile sınır noktası kavramlarının ne kadar farklı olabileceğini gösterir. ■

Alıştırma 4.5 (Rasyonel Koordinatlı Noktalar).

$$\mathbb{Q}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1, ..., x_n \in \mathbb{Q}\}$$

kümesinin sınırını, kapanışını ve içini bulunuz; $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$'de yoğun mudur?

Çözüm.
$x \in \mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun; $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ yazalım. Her j için $(x_j - \eta, x_j + \eta)$ aralığında bir q_j rasyonel sayısı vardır (bkz. Analiz 1). $q = (q_1, ..., q_n)$ noktası $\mathbb{Q}^n$'dedir ve

$$\| q - x \|^2 = \sum_{j=1}^{n} (q_j - x_j)^2 < n\,\eta^2 = \varepsilon^2$$

olduğundan $q \in B(x, \varepsilon)$. Ayrıca $(x_1 - \eta, x_1 + \eta)$ aralığında bir r_1 irrasyonel sayısı vardır (bkz. Analiz 1). $z = (r_1, q_2, ..., q_n)$ noktasının birinci koordinatı irrasyonel olduğundan $z \notin \mathbb{Q}^n$ ve aynı hesapla $\| z - x \| < \varepsilon$.
Demek ki x merkezli her yuvar hem $\mathbb{Q}^n$ ile hem tümleyeniyle kesişir; $x \in \partial\mathbb{Q}^n$. x keyfi olduğundan $\partial\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$. Buradan

$$\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{Q}^n \cup \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n,$$
$$\left(\mathbb{Q}^n\right)^\circ = \mathbb{Q}^n \setminus \mathbb{R}^n = \varnothing$$

bulunur. Kapanış bütün uzay olduğundan $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$'de yoğundur. $n = 1$ için bu, Örnek 4.2 ve Örnek 4.4 sonuçlarıdır. ■

Alıştırma 4.6 (Yığılma Noktası ile Sınır Noktasının Farkı). $\mathbb{R}^2$'de $c = (3, 0)$ ve $S = B(0, 1) \cup \{c\}$ olsun. S' ve ∂S kümelerini bulunuz ve karşılaştırınız.

Çözüm.
Yığılma noktaları. $\| p \| \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $p = 0$ ise $0 < s < \min\{\varepsilon, 1\}$ için $(s, 0)$ noktası $B(0, 1)$'dedir, p'den farklıdır ve p'ye $s < \varepsilon$ uzaklıktadır. $p \neq 0$ ise $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1\}$ için $q = (1 - \delta)\,p$ noktasında $\| q \| = (1 - \delta) \| p \| < 1$ olur; $q \in S$, $q \neq p$ ve $\| q - p \| = \delta \| p \| < \varepsilon$. Demek ki $B[0, 1] \subseteq S'$.
$\| p \| > 1$ olsun. $p \neq c$ ise $\varepsilon = \min\{\| p \| - 1, \| p - c \|\}$, $p = c$ ise $\varepsilon = 2$ alalım. Ters üçgen eşitsizliği gereği yuvarın her q noktası için $\| q \| > \| p \| - \varepsilon \geq 1$ olur, yani yuvar $B(0, 1)$ ile kesişmez. $p \neq c$ ise $\| c - p \| \geq \varepsilon$ olduğundan c yuvarın dışındadır; $p = c$ ise c delikli yuvardan çıkarılmıştır. Her iki durumda $\left(B(p, \varepsilon) \setminus \{p\}\right) \cap S = \varnothing$ ve $p \notin S'$. Sonuç: $S' = B[0, 1]$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sınır noktaları. $\| p \| < 1$ ise $B(p, 1 - \| p \|) \subseteq B(0,1) \subseteq S$ olduğundan p sınırda değildir. $\| p \| = 1$ ise Önerme 4.1 gereği her yuvar $B(0,1) \subseteq S$ ile kesişir; ayrıca $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1\}$ için $(1+\delta)\,p$ noktasının normu 1 ile 2 arasındadır, bu nokta ne $B(0,1)$'dedir ne de c'ye eşittir, yani S^c'dedir ve p'ye $\delta < \varepsilon$ uzaklıktadır. Böylece $p \in \partial S$. $p = c$ ise her yuvar $c \in S$ noktasını ve $(3+\delta, 0) \notin S$ noktalarını $(0 < \delta < \varepsilon)$ içerir; $c \in \partial S$. Son olarak $\| p \| > 1$ ve $p \neq c$ ise yukarıdaki ε için $B(p,\varepsilon) \cap S = \varnothing$ olduğundan p sınırda değildir. Sonuç: $\partial S = S(0,1) \cup \{c\}$.
Karşılaştırma. Açık yuvarın bütün noktaları, örneğin merkez 0, yığılma noktasıdır ama sınır noktası değildir. c ise sınır noktasıdır ama yığılma noktası değildir; çevresinde S'nin başka hiçbir noktası yoktur. Buna karşın iki birleşim aynıdır:

$$S \cup S' = S \cup \partial S = B[0,1] \cup \{c\} = \overline{S},$$

Teorem 4.2 (d) ile uyumlu olarak. S'nin dışındaki noktalarda iki kavram çakışır: $S' \setminus S = \partial S \setminus S = S(0,1)$. ■

Alıştırma 4.7 (Sınır Kapalı Bir Kümedir). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$ olduğunu gösteriniz ve buradan ∂S'nin kapalı olduğunu çıkarınız.

Çözüm.
Lemma 4.1 sonucunu hem S kümesine hem S^c kümesine uygulayalım:

$$x \in \overline{S} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing,$$
$$x \in \overline{S^c} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing.$$

$x \in \partial S$ olması tanım gereği bu iki koşulun birlikte sağlanmasıdır; öyleyse $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$.
Teorem 4.2 (a) gereği $\overline{S}$ ve $\overline{S^c}$ kapalıdır. Kapalı kümelerin kesişimi kapalı olduğundan (Teorem 3.4) ∂S kapalıdır. Örneğin $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ve $\partial B(x_0, r) = S(x_0, r)$ kapalı kümelerdir. ■

Alıştırma 4.8 (Birleşimin Kapanışı). $A, C \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\overline{A \cup C} = \overline{A} \cup \overline{C}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
($\supseteq$) $A \subseteq A \cup C$ olduğundan Örnek 4.9 gereği $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup C}$; aynı biçimde $\overline{C} \subseteq \overline{A \cup C}$. Öyleyse $\overline{A} \cup \overline{C} \subseteq \overline{A \cup C}$.
($\subseteq$) $\overline{A}$ ve $\overline{C}$ kapalıdır (Teorem 4.2 (a)); iki kapalı kümenin birleşimi kapalı olduğundan (Teorem 3.4) $\overline{A} \cup \overline{C}$ kapalıdır. Bu küme $A \cup C$'yi içerir. Teorem 4.2 (b) gereği $A \cup C$'yi içeren en küçük kapalı küme onun içindedir: $\overline{A \cup C} \subseteq \overline{A} \cup \overline{C}$.
Kesişim için yalnız bir yön doğrudur. $A \cap C \subseteq A$ ve $A \cap C \subseteq C$ olduğundan $\overline{A \cap C} \subseteq \overline{A} \cap \overline{C}$ olur, ama eşitlik bozulabilir: $\mathbb{R}$'de $A = \mathbb{Q}$ ve $C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ için $\overline{A \cap C} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ iken $\overline{A} \cap \overline{C} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$'dir. ■

Sınır, kapanış ve iç, bir kümenin kenarını kesin bir dille konuşmamızı sağladı ve açıklığı ile kapalılığı birer sınır koşuluna çevirdi. Kapalı kümeler arasında sınırlı olanların neden ayrı bir yeri olduğu, açık örtüler ve kompaktlık kavramıyla birlikte bir sonraki bölümün, Kompakt ve Bağlantılı Kümeler bölümünün konusudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Kompakt ve Bağlantılı Kümeler

Tek değişkenli analizin en güçlü teoremlerinden bazıları kapalı ve sınırlı bir $[a,b]$ aralığında çalışır: bu aralıkta sürekli bir fonksiyon en büyük ve en küçük değerini alır (bkz. Analiz 1) ve düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1). Ara değer teoremi ise tanım kümesinin bir aralık, yani "tek parça" olmasına dayanır (bkz. Analiz 1). Çok değişkenli fonksiyonlara geçtiğimizde tanım kümeleri yuvarlar, kutular, halkalar ya da çok daha karmaşık kümeler olur. Bu kümelerden hangilerinin $[a,b]$ aralığı gibi davrandığını iki kavram belirler: **kompaktlık** ve **bağlantılılık**.
Kompaktlığı $\mathbb{R}$'de açık örtülerle tanımlamış ve kompakt kümelerin tam olarak kapalı ve sınırlı kümeler olduğunu söyleyen Heine–Borel teoremini ispatlamıştık (bkz. Analiz 1). Bu bölümde aynı tanımı $\mathbb{R}^n$'de kuruyor ve Heine–Borel teoremini n boyutta, bir aralığı ikiye bölmek yerine bir n-hücreyi 2^n parçaya bölerek ispatlıyoruz. Ardından bir kümenin "tek parça" olmasını açık kümelerle ifade eden bağlantılılık kavramını tanımlıyor, aralıkların ve konveks kümelerin bağlantılı olduğunu gösteriyoruz. Bölüm, ileride türev ve ekstremum sonuçlarının üzerine kurulacağı bölge kavramıyla bitiyor.

5.1 Açık Örtü ve Kompakt Küme

Bir kümeyi örtmek, onu birleşimleri içinde kalacak biçimde başka kümelerle kaplamaktır; kompaktlık ise açık kümelerle yapılan her kaplamadan sonlu tane parça seçilerek yine bir kaplama elde edilebilmesidir.

Tanım 5.1 (Açık Örtü). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathbb{R}^n$'nin açık kümelerinden oluşan bir aile olsun.

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{G}$ ailesine S'nin bir **açık örtüsü** (açık örtülüşü) denir. Λ indis kümesi sonlu ise $\mathcal{G}$'ye S'nin bir **sonlu açık örtüsü** denir.
$\mathcal{G}$, S'nin bir açık örtüsü ve $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ olsun. $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_0}$ ailesi de S'yi örtüyorsa bu aileye $\mathcal{G}$'nin bir **alt örtüsü**, Λ_0 sonluysa bir **sonlu alt örtüsü** denir.

Yani örtüdeki kümelerin her biri açıktır ve S'nin her noktası bu kümelerden en az birinin içindedir. Örtü kümelerinin S'nin içinde kalması gerekmez; tek istenen, birleşimlerinin S'yi kapsamasıdır. Sonlu alt örtü yeni kümeler eklenerek değil, verilen ailenin içinden sonlu tane küme seçilerek kurulur.

Örnek 5.1 (Merkezi Orijin Olan Yuvarlar). $\{B(0,r)\}_{r>0}$ ailesinin $\mathbb{R}^n$'nin bir açık örtüsü olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Her $B(0,r)$ açık yuvarı açık bir kümedir (Teorem 3.1). $x \in \mathbb{R}^n$ keyfi bir nokta olsun. $r = \| x \| + 1$ alınırsa $\| x - 0 \| = \| x \| < r$ olduğundan $x \in B(0, \| x \| + 1)$ olur. Demek ki her nokta ailenin en az bir kümesindedir:
>
> $$\mathbb{R}^n = \bigcup_{r>0} B(0,r).$$
>
> Aile $\mathbb{R}^n$'yi örttüğü için $\mathbb{R}^n$'nin her alt kümesini de örter; bu yüzden ispatlarda sık sık karşımıza çıkacak.
> ■

Tanım 5.2 (Kompakt Küme). $K \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. K'nin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa K'ye **kompakt** (tıkız) **küme** denir. Başka bir deyişle, K'yi örten her $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtüsü için öyle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \Lambda$ vardır ki

$$K \subseteq G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \ldots \cup G_{\alpha_m}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

Yani kompakt bir küme, ne kadar çok (sonsuz, hatta sayılamaz çoklukta) açık kümeyle örtülürse örtülsün, bu kümelerin sonlu tanesiyle de örtülebilen kümedir. Tanımdaki kilit sözcük "her"dir ve iki yönde çok farklı iş yükü doğurur:

- Bir kümenin kompakt **olmadığını** göstermek için sonlu alt örtüsü bulunmayan **tek bir** açık örtü bulmak yeter.
- Kompakt **olduğunu** tanımdan göstermek için verilebilecek **bütün** açık örtülerle başa çıkmak gerekir.

İkinci iş genellikle zordur. Bölümün ana teoremi olan Heine–Borel teoremi bu işi $\mathbb{R}^n$'de kapalılık ve sınırlılık denetimine indirecek.

Örnek 5.2 (Uzayın Tamamı Kompakt Değildir). $\mathbb{R}^n$'nin kompakt olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $k \in \mathbb{N}$ için $G_k = B(0,k)$ açık yuvarlarını alalım. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için Arşimet özelliği gereği $k > \| x \|$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır (bkz. Analiz 1); bu k için $x \in B(0,k)$ olur. Dolayısıyla $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ailesi $\mathbb{R}^n$'nin bir açık örtüsüdür.
> Bu örtüden sonlu tane küme seçelim: $G_{k_1}, ..., G_{k_m}$. $N = \max\{k_1, ..., k_m\}$ olsun. Her j için $k_j \leq N$ olduğundan $B(0,k_j) \subseteq B(0,N)$ olur, yani
>
> $$G_{k_1} \cup ... \cup G_{k_m} = B(0,N).$$
>
> Oysa $z = Ne_1$ noktası için $\| z \| = N$ olduğundan $z \notin B(0,N)$'dir. Seçilen sonlu aile $\mathbb{R}^n$'yi örtmez. Sonlu tane küme nasıl seçilirse seçilsin durum aynı olduğundan örtünün sonlu alt örtüsü yoktur ve $\mathbb{R}^n$ kompakt değildir.
> $n = 1$ için bu, $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(-k,k)$ olduğu hâlde örneğin
>
> $$(-1,1) \cup (-2,2) \cup (-3,3) = (-3,3)$$
>
> birleşiminin 3 sayısını dışarıda bıraktığını söyler. ■

Örnek 5.3 (Açık Birim Aralık Kompakt Değildir). $\mathbb{R}$'de $(0,1)$ aralığının kompakt olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $k \geq 2$ doğal sayıları için $G_k = \left(\frac{1}{k}, 1\right)$ olsun. $\mathbb{R}$'de açık bir aralık, orta noktası merkezli bir açık yuvardır; dolayısıyla her G_k açıktır (Teorem 3.1).
> **Açık örtüdür.** $x \in (0,1)$ olsun. Arşimet özelliği gereği $k > \frac{1}{x}$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $0 < x < 1$ olduğundan $\frac{1}{x} > 1$, dolayısıyla $k \geq 2$'dir. Bu k için $\frac{1}{k} < x < 1$, yani $x \in G_k$ olur.
> **Sonlu alt örtüsü yoktur.** $G_{k_1}, ..., G_{k_m}$ seçilsin ve $N = \max\{k_1, ..., k_m\}$ olsun. $k_j \leq N$ için $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{k_j}$ olduğundan $G_{k_j} \subseteq G_N$ olur ve seçilen kümelerin birleşimi $G_N = \left(\frac{1}{N}, 1\right)$'dir. $\frac{1}{N+1}$ sayısı $(0,1)$ aralığındadır ama $\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N}$ olduğundan bu birleşimde değildir. Örtünün sonlu alt örtüsü yoktur; $(0,1)$ kompakt değildir. ■

Aynı örtüyü Analiz 1'de de incelemiştik (bkz. Analiz 1). Buna karşılık $[0,1]$ kapalı aralığı kompakttır; bunu birazdan Heine–Borel teoreminin $n = 1$ hâli olarak göreceğiz. İki kümenin farkı yalnız iki uç noktadır: yukarıdaki örtü 0'ın yakınını ancak sonsuz tane kümeyle örtebiliyor. 0 kümeye ait olsaydı, onu içeren tek bir açık küme 0'ın yakınındaki bütün noktaları birden yutardı.
Sonlu kümeler ise hiçbir zorluk çıkarmaz.

Önerme 5.1 (Sonlu Kümeler Kompakttır). *$\mathbb{R}^n$'nin sonlu elemanlı her alt kümesi kompakttır.*

> ***İspat.***

 CC BY-NC-SA 4.0

$S = \{x_1, x_2, ..., x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, S'nin keyfi bir açık örtüsü olsun. Her $j = 1, ..., m$ için x_j noktası $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ birleşimindedir; dolayısıyla $x_j \in G_{\alpha_j}$ olacak biçimde bir $\alpha_j \in \Lambda$ vardır. O zaman

$$S \subseteq G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup ... \cup G_{\alpha_m}$$

olur ve $\left\{G_{\alpha_j}\right\}_{j=1}^{m}$ ailesi verilen örtünün sonlu bir alt örtüsüdür. Örtü keyfi olduğundan S kompakttır. Boş küme de kompakttır: örtülecek noktası olmadığından verilen örtünün herhangi bir sonlu alt ailesi onu örter. ■

5.2 Kompakt Kümelerin Özellikleri

Kompaktlık sonsuz kümeler için güçlü bir kısıttır. İlk iki sonuç kompakt bir kümenin sınırlı ve kapalı olmak zorunda olduğunu söyler; iki ispatta da uygun bir açık örtü seçip sonlu alt örtüsünden yararlanıyoruz.

Teorem 5.1 (Kompakt Kümeler Sınırlıdır). *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme ise K sınırlıdır.*

İspat.
$K = \varnothing$ ise K her $B[0, r]$ yuvarının içindedir ve sınırlıdır; $K \neq \varnothing$ olsun.
$\{B(0, r)\}_{r>0}$ ailesi $\mathbb{R}^n$'nin bir açık örtüsüdür (Örnek 5.1); dolayısıyla K'nin de bir açık örtüsüdür:

$$K \subseteq \bigcup_{r>0} B(0, r).$$

K kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır: öyle $r_1, r_2, ..., r_m > 0$ sayıları vardır ki

$$K \subseteq B(0, r_1) \cup B(0, r_2) \cup ... \cup B(0, r_m)$$

olur ($K \neq \varnothing$ olduğundan $m \geq 1$). $r^* = \max\{r_1, ..., r_m\}$ alalım. Her i için $r_i \leq r^*$ olduğundan $B(0, r_i) \subseteq B(0, r^*)$ olur; yani yukarıdaki birleşim $B(0, r^*)$ yuvarına eşittir. Öyleyse her $x \in K$ için $\| x \| < r^*$, dolayısıyla $K \subseteq B[0, r^*]$ olur. Tanım 3.5 gereği K sınırlıdır. ■

Teoremin tersi doğru değildir: $(0, 1)$ aralığı sınırlıdır, çünkü $B[0, 1]$ kapalı yuvarının (yani $[-1, 1]$ aralığının) içindedir; ama Örnek 5.3 gereği kompakt değildir.

Teorem 5.2 (Kompakt Kümeler Kapalıdır). *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme ise K kapalıdır.*

İspat.
$K = \varnothing$ ise tümleyeni $\mathbb{R}^n$ açık olduğundan K kapalıdır; $K \neq \varnothing$ olsun. $K^c = \mathbb{R}^n \setminus K$ kümesinin açık olduğunu göstereceğiz. $x \in K^c$ keyfi bir nokta olsun.
Örtü. *Her $r > 0$ için*

$$G_r = \mathbb{R}^n \setminus B[x, r]$$

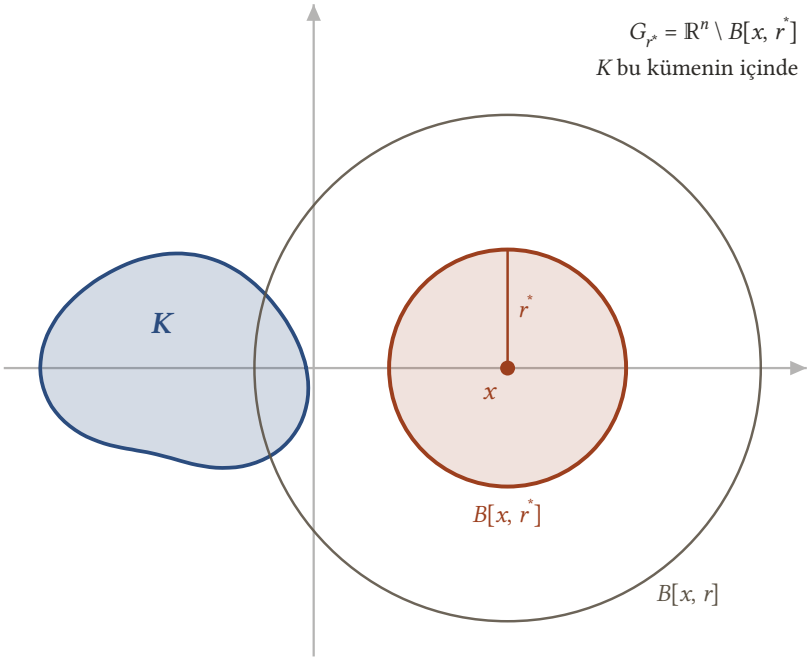
diyelim. Kapalı yuvar kapalı bir küme olduğundan (Açık ve Kapalı Kümeler) tümleyeni G_r açıktır. Bu kümelerin birleşimi $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ kümesidir. Gerçekten $y \neq x$ ise $r = \dfrac{\| y - x \|}{2} > 0$ için $\| y - x \| > r$ olur; yani $y \notin B[x, r]$ ve $y \in G_r$. Öte yandan x her $B[x, r]$ yuvarının merkezi olduğundan hiçbir G_r kümesinde değildir. $x \notin K$ olduğundan

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x\} = \bigcup_{r>0} G_r$$

olur; yani $\{G_r\}_{r>0}$ ailesi K'nin bir açık örtüsüdür.
Sonlu alt örtü. *K kompakt olduğundan öyle $r_1, ..., r_m > 0$ vardır ki $K \subseteq G_{r_1} \cup ... \cup G_{r_m}$ olur. $r^* = \min\{r_1, ..., r_m\}$ alalım; sonlu tane pozitif sayının en küçüğü olduğundan $r^* > 0$'dır. Her i için $r^* \leq r_i$ olduğundan $B[x, r^*] \subseteq B[x, r_i]$ ve tümleyenlere geçince $G_{r_i} \subseteq G_{r^*}$ olur. r^* sayılardan biri olduğundan G_{r^*} de seçilen kümelerden biridir; dolayısıyla*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$K \subseteq G_{r_1} \cup \ldots \cup G_{r_m} = G_{r^*} = \mathbb{R}^n \setminus B[x, r^*].$$



Şekil 5.1: Kompakt K *kümesi ve* K*'nin dışındaki* x *noktası. Sonlu alt örtünün en küçük yarıçapı* r* *ile çizilen* B*[*x, r**]* *kapalı yuvarı* K*'ye değmez; yani* K ⊆ G_{r^*} = $\mathbb{R}^n$ \ B*[*x, r**]* *ve* B*(*x, r**)* *yuvarı* K*'nin tümleyeninde kalır. Daha büyük bir* r *için* B*[*x, r*]* *yuvarı* K*'yi kesebilir.*

Sonuç. *Son bağıntı* $K \cap B[x, r^*] = \varnothing$ *demektir. Buradan*

$$B(x, r^*) \subseteq B[x, r^*] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$$

bulunur. $x \in K^c$ *keyfi olduğundan* K^c *açıktır ve Tanım 3.3 gereği* K *kapalıdır.* ■

İspatın özü, sonlu tane pozitif sayının en küçüğünün yine pozitif olmasıdır. Sonsuz çoklukta yarıçapın en küçüğü olmayabilirdi; kompaktlık, bu yarıçapların yalnız sonlu tanesine ihtiyaç duymamızı sağladı. İki teoremin karşıt terslerini birlikte yazalım.

Sonuç 5.1 (Kompakt Olmama Ölçütleri). *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.*

1. *S sınırlı değilse kompakt değildir.*
2. *S kapalı değilse kompakt değildir.*

İspat.
Birinci ifade Teorem 5.1 teoreminin, ikincisi Teorem 5.2 teoreminin karşıt tersidir. ■

Örneğin her $r > 0$ için $\| (r+1)e_1 \| = r + 1 > r$ olduğundan $\mathbb{R}^n$ sınırlı değildir ve kompakt olamaz; Örnek 5.2 sonucunu böylece tek satırda yeniden elde ederiz. Kompakt kümelerden yeni kompakt kümeler elde etmenin en kullanışlı yolu kapalı alt kümelere geçmektir.

Teorem 5.3 (Kompakt Kümenin Kapalı Alt Kümesi). *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $F \subseteq K$ kapalı bir küme ise F kompakttır.*

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, F'nin keyfi bir açık örtüsü olsun. F kapalı olduğundan $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ açıktır. Örtüye F^c kümesini ekleyelim. Genişletilmiş aile bütün $\mathbb{R}^n$'yi örter: bir nokta F'deyse bir G_α kümesindedir, F'de değilse F^c'dedir. Özel olarak

$$K \subseteq \Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha\Big) \cup F^c$$

olur ve bu aile K'nin bir açık örtüsüdür. K kompakt olduğundan öyle $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \Lambda$ vardır ki

$$K \subseteq G_{\alpha_1} \cup ... \cup G_{\alpha_m} \cup F^c$$

olur (sonlu alt örtüde F^c bulunmasa bile onu birleşime eklemek kapsamayı bozmaz). $F \subseteq K$ olduğundan F de bu birleşimin içindedir. $F \cap F^c = \varnothing$ olduğundan F'nin hiçbir noktası F^c'de değildir; demek ki F'nin her noktası $G_{\alpha_1}, ..., G_{\alpha_m}$ kümelerinden birindedir:

$$F \subseteq G_{\alpha_1} \cup ... \cup G_{\alpha_m}.$$

Bu, verilen örtünün sonlu bir alt örtüsüdür. Örtü keyfi olduğundan F kompakttır. ■

5.3 Heine–Borel Teoremi

Kompakt kümelerin kapalı ve sınırlı olduğunu gördük; $\mathbb{R}^n$'de bunun tersi de doğrudur. İspatı iki adımda kuruyoruz: önce en basit kapalı ve sınırlı kümelerin, yani kapalı n-hücrelerin kompakt olduğunu gösteriyor, sonra her kapalı ve sınırlı kümeyi böyle bir hücrenin kapalı alt kümesi olarak görüyoruz.
$a_i \le b_i$ $(i = 1, ..., n)$ olmak üzere

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

bir kapalı n-hücredir (Tanım 2.9). $[a_i, b_i]$ aralığına hücrenin i. kenarı, $b_i - a_i$ sayısına da bu kenarın uzunluğu diyeceğiz. İspatın ana fikri, $\mathbb{R}$'deki ikiye bölme yönteminin n boyutlu karşılığıdır: her kenar orta noktasından ikiye bölünür ve her koordinatta iki yarıdan biri seçilerek 2^n tane küçük hücre elde edilir. Düzlemde bu, bir dikdörtgeni iki orta doğrusuyla dört eş parçaya; uzayda bir kutuyu sekiz küçük kutuya bölmektir.

Teorem 5.4 (Kapalı n-Hücreler Kompakttır). *$\mathbb{R}^n$'de her kapalı n-hücre kompakttır.*

İspat.
$I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ bir kapalı n-hücre ve

$$\ell = \max\{b_1 - a_1, ..., b_n - a_n\}$$

*en uzun kenarının uzunluğu olsun. Olmayana ergi yöntemiyle I'nın kompakt olmadığını varsayalım: I'nın sonlu alt örtüsü olmayan bir $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtüsü vardır. Bu örtüyü ispat boyunca sabit tutuyoruz. I'nın içindeki bir kapalı n-hücre bu örtünün sonlu tane kümesiyle örtülemiyorsa ona **kötü hücre** diyelim. Varsayım gereği I kötüdür.*
Adım 1: Kötü bir hücrenin kötü bir parçası vardır. *$J = [c_1, d_1] \times ... \times [c_n, d_n] \subseteq I$ kötü bir hücre olsun. Her kenarı orta noktasından bölelim: $m_i = \dfrac{c_i + d_i}{2}$ için*

$$[c_i, d_i] = [c_i, m_i] \cup [m_i, d_i] \qquad (i = 1, ..., n).$$

Her koordinatta bu iki yarıdan birini seçip Kartezyen çarpımını alırsak 2^n tane kapalı n-hücre elde ederiz: $J^{(1)}, ..., J^{(2^n)}$. Her birinin i. kenarı J'nin i. kenarının yarısı uzunluğundadır. Bu hücrelerin birleşimi J'dir, çünkü $y \in J$ noktasının her y_i bileşeni iki yarıdan en az birindedir. Parçaların hiçbiri kötü olmasaydı, yani her $J^{(j)}$ sonlu tane G_α ile örtülebilseydi, bu 2^n sonlu ailenin birleşimi yine sonlu bir aile olur ve J'yi örterdi. J kötü olduğundan parçalardan en az biri kötüdür.
Adım 2: İç içe kötü hücreler. *$I_1 = I$ diyelim. Adım 1'i I_1'e uygulayıp kötü bir parçasını I_2 olarak seçelim; sonra I_2'nin kötü bir parçasını I_3 olarak seçelim ve böyle sürdürelim. Tümevarımla*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_m \supseteq ...$$

 CC BY-NC-SA 4.0

kapalı n-hücreleri elde ederiz; öyle ki her $m \in \mathbb{N}$ için
(i) I_m kötüdür, yani $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesinin sonlu tane kümesiyle örtülemez;
(ii) I_m'nin i. kenarının uzunluğu $\dfrac{b_i - a_i}{2^{m-1}} \leq \dfrac{\ell}{2^{m-1}}$ olur.

Adım 3: Ortak nokta. *I_m hücreleri iç içe kapalı n-hücreler olduğundan, $\mathbb{R}^n$'de iç içe kapalı aralıklar teoremi (Teorem 3.5) gereği hepsinde bulunan bir x noktası vardır:*

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m.$$

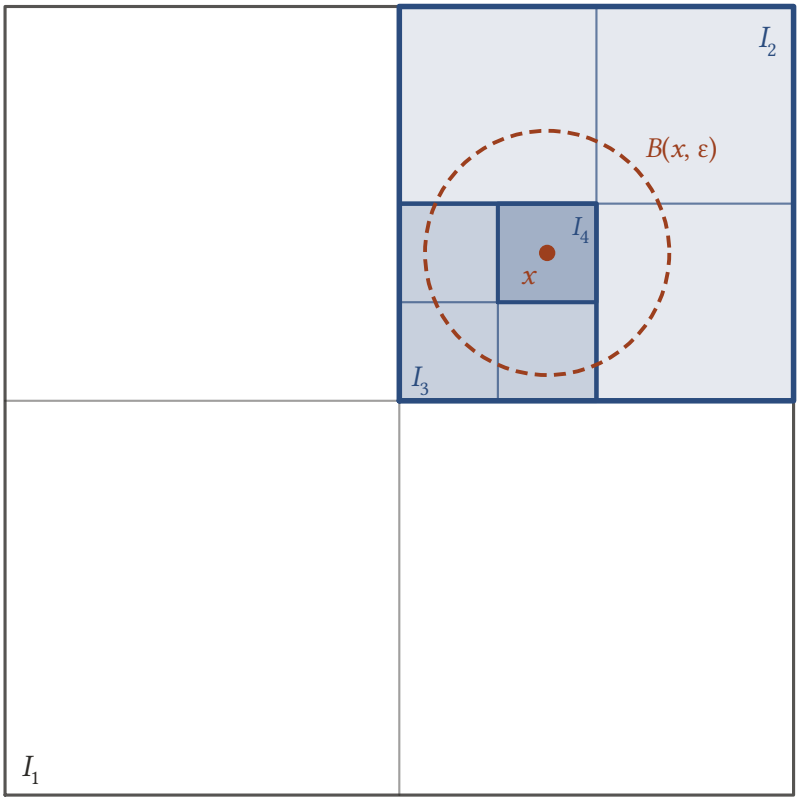
Adım 4: Çelişki. *$x \in I_1 = I$ olduğundan örtünün bir G_{α_0} kümesi x'i içerir. G_{α_0} açık olduğundan $B(x,\varepsilon) \subseteq G_{\alpha_0}$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Şimdi $y \in I_m$ olsun. x ve y aynı I_m hücresinde olduğundan her i için $|\, y_i - x_i \,|$ farkı I_m'nin i. kenarının uzunluğunu aşmaz. (ii) gereği*

$$\| y - x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \leq \sqrt{n \cdot \frac{\ell^2}{4^{m-1}}} = \frac{\sqrt{n}\,\ell}{2^{m-1}}$$

olur. Her $m \in \mathbb{N}$ için $2^{m-1} \geq m$'dir; bu tümevarımla görülür: $2^0 = 1$ ve $2^{m-1} \geq m$ ise $2^m \geq 2m \geq m+1$. Arşimet özelliği gereği $m > \dfrac{\sqrt{n}\,\ell}{\varepsilon}$ olan bir $m \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu m için her $y \in I_m$ noktası

$$\| y - x \| \leq \frac{\sqrt{n}\,\ell}{2^{m-1}} \leq \frac{\sqrt{n}\,\ell}{m} < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar; yani $I_m \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq G_{\alpha_0}$. Böylece I_m, örtünün tek bir kümesiyle örtülür. Bu, (i) ile çelişir.



Şekil 5.2: İkiye bölme yöntemi: $I_1 = [-2, 2] \times [-2, 2]$ karesi dört eş parçaya bölünür ve kötü bir parça I_2 seçilir; I_3 ve I_4 aynı biçimde elde edilir. Hücreler ortak x noktasına büzülür ve bir adımdan sonra $B(x, \varepsilon) \subseteq G_{\alpha_0}$ yuvarının içine girer.

Varsayımımız yanlıştır; I kompakttır. ■

Artık teoremin kendisini ispatlayabiliriz.

Teorem 5.5 (Heine–Borel Teoremi). *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. K'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul K'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

İspat.
($\Rightarrow$) K kompakt olsun. Teorem 5.1 gereği K sınırlı, Teorem 5.2 gereği kapalıdır.
($\Leftarrow$) K kapalı ve sınırlı olsun. K sınırlı olduğundan her $x \in K$ için $\| x \| \leq r$ olacak biçimde bir $r > 0$ vardır (Tanım 3.5). Her i için $x_i^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2$ olduğundan

$$| x_i | \leq \| x \| \leq r \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

olur. Yani K kümesi

$$I = [-r, r] \times [-r, r] \times \ldots \times [-r, r]$$

kapalı n-hücresinin içindedir. Teorem 5.4 gereği I kompakttır. K, kompakt I kümesinin kapalı bir alt kümesi olduğundan Teorem 5.3 gereği kompakttır. ■

$n = 1$ için teorem, $\mathbb{R}$'deki Heine–Borel teoremidir. Teoremin değeri şuradadır: tanımdan kompaktlık göstermek bütün açık örtülerle uğraşmayı gerektiriyordu; $\mathbb{R}^n$'de ise bunun yerine iki somut soruyu yanıtlamak yeter.

Üç adımda kompaktlık denetimi

1. **Sınırlılık.** Kümenin her x noktası için $\| x \| \leq r$ sağlayan bir $r > 0$ aranır. Normu istenildiği kadar büyük noktalar varsa küme sınırlı değildir ve kompakt değildir.
2. **Kapalılık.** Tümleyenin açık olduğu gösterilir ya da küme, kapalı olduğu bilinen kümelerin (kapalı yuvar, tümleyeni açık olan küme, kapanış) kesişimi ya da sonlu birleşimi olarak yazılır. Kümeye ait olmayan bir yığılma noktası bulunursa küme kapalı değildir (Teorem 3.7).
3. **Karar.** Küme hem sınırlı hem kapalıysa Heine–Borel teoremi gereği kompakttır; ikisinden biri bozuluyorsa kompakt değildir (Sonuç 5.1).

Örnek 5.4 (Kapalı Yuvar Kompakttır). $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| \leq 3\}$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sınırlılık. $x \in A$ ise üçgen eşitsizliği (Teorem 1.2) gereği

$$\| x \| = \| (x - a) + a \| \leq \| x - a \| + \| a \| \leq 3 + \| a \|$$

olur. $r = 3 + \| a \| > 0$ için $A \subseteq B[0, r]$; A sınırlıdır.
Kapalılık. $A = B[a, 3]$ bir kapalı yuvardır ve kapalı yuvarlar kapalı kümelerdir (Açık ve Kapalı Kümeler).
Karar. A kapalı ve sınırlı olduğundan Teorem 5.5 gereği kompakttır.
Aynı akıl yürütme 3 yerine herhangi bir $r > 0$ ile yapılabilir: $\mathbb{R}^n$'de her $B[x_0, r]$ kapalı yuvarı kompakttır. Özel olarak $a = 0$ alınırsa $\{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq 3\}$ kümesinin kompakt olduğu çıkar. ■

Örnek 5.5 (Açık Aralık ve Heine–Borel). $a < b$ olsun. $\mathbb{R}$'de (a, b) aralığının kompakt olmadığını Heine–Borel teoremiyle gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \in (a, b)$ için $| x | \leq \max\{| a |, | b |\}$ olduğundan (a, b) aralığı sınırlıdır. Ama kapalı değildir; bunu görmek için tümleyeninin açık olmadığını gösterelim. Tümleyen

 CC BY-NC-SA 4.0

$$C = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

kümesidir ve $a \in C$'dir. $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun

$$t = a + \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, b-a\}$$

noktası için $a < t < b$ ve $\mid t - a \mid < \varepsilon$ olur. Yani $t \in B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ama $t \notin C$. a noktasının hiçbir yuvarı C'nin içinde kalmadığından C açık değildir; dolayısıyla (a,b) kapalı değildir. Heine–Borel teoremi (Teorem 5.5) gereği (a,b) kompakt değildir.
Buna karşılık $[a,b]$ bir kapalı 1-hücredir ve Teorem 5.4 gereği kompakttır. İki aralığın tek farkı uç noktalardır: uçlar kümeye eklenince kapalılık, onunla birlikte de kompaktlık kazanılır. ■

Örnek 5.6 (Sınırlı Kümenin Kapanışı Kompakttır). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme ise $\overline{A}$ kapanışının kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kapalılık. Bir kümenin kapanışı her zaman kapalıdır (Teorem 4.2).
Sınırlılık. A sınırlı olduğundan $A \subseteq B[0,r]$ olacak biçimde bir $r > 0$ vardır. $B[0,r]$ kapalı bir kümedir ve A'yı kapsar. Kapanış, A'yı kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan (Teorem 4.2) $\overline{A} \subseteq B[0,r]$ olur; yani $\overline{A}$ sınırlıdır.
Karar. $\overline{A}$ kapalı ve sınırlı olduğundan Teorem 5.5 gereği kompakttır.
Tersine A sınırlı değilse $A \subseteq \overline{A}$ olduğundan $\overline{A}$ da sınırlı değildir ve kompakt olamaz. Örneğin $(0,1)$ kompakt değildir, ama sınırlı olduğundan kapanışı kompakttır. ■

5.4 Bağlantılı Kümeler

Bir aralık "tek parça"dır; $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{Z}$ ise aralarına boşluklar giren parçalardan oluşur. Bu sezgiyi açık kümelerle kesin bir tanıma dönüştürüyoruz: bir küme, iki açık küme yardımıyla boş olmayan ve ortak noktası olmayan iki parçaya ayrılabiliyorsa bağlantısızdır.

Tanım 5.3 (Bağlantısız ve Bağlantılı Küme). $S \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Aşağıdaki üç koşulu sağlayan $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümeleri varsa S'ye **bağlantısız** (bağlantılı olmayan) **küme** denir:
(i) $U \cap S \neq \varnothing$ ve $V \cap S \neq \varnothing$;
(ii) $(U \cap S) \cap (V \cap S) = \varnothing$;
(iii) $S \subseteq U \cup V$, başka bir ifadeyle $(U \cap S) \cup (V \cap S) = S$.
S bağlantısız değilse S'ye **bağlantılı küme** denir.

Yani S bağlantısızsa $U \cap S$ ve $V \cap S$ kümeleri S'yi boş olmayan, ortak noktasız iki parçaya ayırır ve her parça bir açık kümenin S ile kesişimidir. Bağlantılı küme böyle bir ayrışmaya izin vermeyen, "tek parça" kümedir. İki gözlem işimizi kolaylaştırır:

- $U \cap V = \varnothing$ olan açık kümeler bulunursa (ii) koşulu kendiliğinden sağlanır. Bağlantısızlığı gösterirken çoğu zaman böyle kümeler seçeceğiz.
- U ile V'nin S'nin dışında ortak noktaları olabilir; (ii) koşulu yalnız S'nin içinde ayrık olmalarını ister.

Örnek 5.7 (Tek Noktalı Küme Bağlantılıdır). $a \in \mathbb{R}^n$ için $S = \{a\}$ kümesinin bağlantılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
S'nin bağlantısız olduğunu, yani (i)–(iii) koşullarını sağlayan U, V açık kümeleri bulunduğunu varsayalım. (i) gereği $U \cap \{a\} \neq \varnothing$, yani $a \in U$; yine (i) gereği $V \cap \{a\} \neq \varnothing$, yani $a \in V$. O zaman $a \in (U \cap S) \cap (V \cap S)$ olur ve bu (ii) ile çelişir. Böyle U, V kümeleri yoktur; $\{a\}$ bağlantılıdır. ■

Boş küme de bağlantılıdır: $U \cap \varnothing = \varnothing$ olduğundan (i) koşulu hiçbir U için sağlanamaz. Bu iki örnek birlikte şunu söyler: bağlantısız bir kümenin en az iki elemanı vardır. Nitekim (i) ve (ii) koşulları, $U \cap S$ ve $V \cap S$ parçalarından seçilen iki noktanın farklı olmasını gerektirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.8 (Rasyonel Sayılar Bağlantısızdır). $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin bağlantısız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$U = (-\infty, \sqrt{2})$ ve $V = (\sqrt{2}, +\infty)$ alalım. İkisi de $\mathbb{R}$'de açıktır: $x < \sqrt{2}$ ise $\varepsilon = \sqrt{2} - x$ için $B(x, \varepsilon) = (2x - \sqrt{2}, \sqrt{2}) \subseteq U$ olur; $x > \sqrt{2}$ ise $\varepsilon = x - \sqrt{2}$ için $B(x, \varepsilon) = (\sqrt{2}, 2x - \sqrt{2}) \subseteq V$ olur. Koşulları denetleyelim.
(i) $0 \in U \cap \mathbb{Q}$ ve $2 \in V \cap \mathbb{Q}$.
(ii) $U \cap V = \varnothing$ olduğundan (ii) sağlanır.
(iii) $\sqrt{2}$ rasyonel olmadığından (bkz. Analiz 1) her rasyonel sayı ya $\sqrt{2}$'den küçük ya da $\sqrt{2}$'den büyüktür; $\mathbb{Q} \subseteq U \cup V$.
Üç koşul sağlandığından $\mathbb{Q}$ bağlantısızdır. Rasyonel sayılar sayı doğrusunun her yerine sokulduğu hâlde, bir irrasyonel sayının açtığı "delik" boyunca iki parçaya ayrılırlar. ■

Örnek 5.9 (Tam Sayılar Bağlantısızdır). $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin bağlantısız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$U = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ve $V = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ alalım. İkisi de açıktır: $x < \frac{1}{2}$ ise $B\left(x, \frac{1}{2} - x\right) \subseteq U$, $x > \frac{1}{2}$ ise $B\left(x, x - \frac{1}{2}\right) \subseteq V$ olur.
(i) $0 \in U \cap \mathbb{Z}$ ve $1 \in V \cap \mathbb{Z}$.
(ii) $U \cap V = \varnothing$.
(iii) $\frac{1}{2}$ bir tam sayı olmadığından her tam sayı U ya da V'dedir; $\mathbb{Z} \subseteq U \cup V$.
$\mathbb{Z}$ bağlantısızdır. Aynı yöntem, iki elemanı arasında kendisine ait olmayan bir sayı bulunan her $S \subseteq \mathbb{R}$ kümesine uygulanır (Alıştırma 5.7). ■

Örnek 5.10 (İki Üçgenden Oluşan Küme).

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, - \mid x \mid < y < \mid x \mid\}$$

kümesinin $\mathbb{R}^2$'de bağlantısız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$- \mid x \mid < y < \mid x \mid$ koşulu $\mid x \mid > 0$, yani $x \neq 0$ olmasını gerektirir. A, orijinde birbirine değen ama orijini içermeyen iki üçgenden oluşur. Bu iki parçayı ayıran açık kümeler sol ve sağ yarı düzlemlerdir:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\},$$

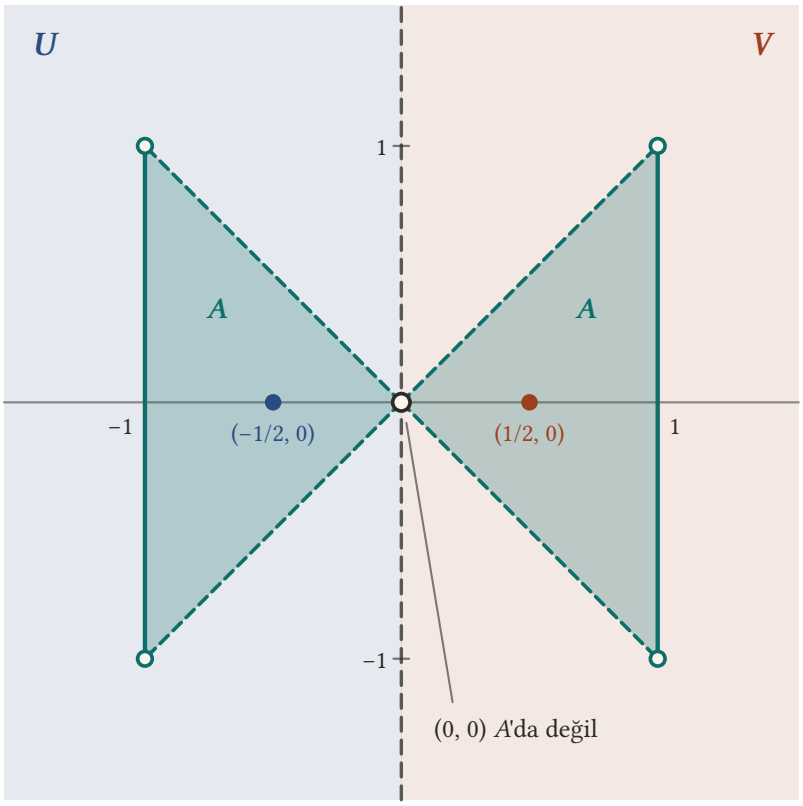
$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

***U* ve *V* açıktır.** $p = (x, y) \in U$ olsun ve $\varepsilon = -x > 0$ alalım. $q = (x', y') \in B(p, \varepsilon)$ ise $(x' - x)^2 \leq (x' - x)^2 + (y' - y)^2$ olduğundan

$$\mid x' - x \mid \leq \| q - p \| < -x$$

olur; buradan $x' < x + (-x) = 0$, yani $q \in U$ çıkar. Demek ki $B(p, \varepsilon) \subseteq U$ ve U açıktır. $p = (x, y) \in V$ için $\varepsilon = x > 0$ alınırsa aynı biçimde $\mid x' - x \mid < x$ eşitsizliğinden $x' > 0$ çıkar; V de açıktır.
Koşullar. Şimdi üç koşulu denetleyelim.
(i) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in A \cap U$ ve $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in A \cap V$, çünkü $\left|\pm\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ve $-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2}$'dir.
(ii) $U \cap V = \varnothing$.
(iii) A'nın her noktasında $x \neq 0$ olduğundan $x < 0$ ya da $x > 0$'dır; $A \subseteq U \cup V$.
Üç koşul sağlandığından A bağlantısızdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.3: A kümesi orijinde birbirine değen iki üçgendir; eğik kenarlar ve orijin kümeye ait değildir, $x = \pm 1$ üzerindeki dikey kenarlar (uçları hariç) kümeye aittir. Sol yarı düzlem U ile sağ yarı düzlem V açık ve ayrık kümelerdir; A'yı iki parçaya ayırırlar.

İki üçgen orijinde birbirine "değer" gibi görünse de orijin kümeye ait değildir; parçaları birleştiren bir nokta olmadığı için küme iki parçaya ayrılır. ■

5.5 Aralıklar ve Konveks Kümeler

Bağlantılı kümelerin temel örnekleri $\mathbb{R}$'deki aralıklardır. Önce bunu ispatlıyor, sonra doğru parçaları yardımıyla sonucu $\mathbb{R}^n$'deki konveks kümelere taşıyoruz.
$\mathbb{R}$'nin boş olmayan bir C alt kümesi, $x, y \in C$ ve $x < z < y$ olduğunda $z \in C$ oluyorsa bir aralıktır (bkz. Analiz 1). Sınırlı ya da sınırsız; açık, kapalı ya da yarı açık bütün aralıklar bu tanıma uyar ve ispatta aralıkların yalnız bu özelliğini kullanacağız.

Teorem 5.6 (Aralıklar Bağlantılıdır). *$\mathbb{R}$'de her aralık bağlantılıdır. Özel olarak $\mathbb{R}$ bağlantılıdır.*

İspat.
$C \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun ve bağlantısız olduğunu varsayalım: (i)–(iii) koşullarını sağlayan $U, V \subseteq \mathbb{R}$ açık kümeleri vardır. $x_1 \in U \cap C$ ve $x_2 \in V \cap C$ seçelim. $x_1 = x_2$ olsaydı bu nokta $(U \cap C) \cap (V \cap C)$ kümesinde olurdu; (ii) gereği $x_1 \neq x_2$'dir. Gerekirse U ile V'nin adlarını değiştirerek $x_1 < x_2$ varsayabiliriz. C bir aralık olduğundan $[x_1, x_2] \subseteq C$'dir.

$$T = U \cap [x_1, x_2]$$

kümesini ele alalım. $x_1 \in T$ olduğundan $T \neq \varnothing$'dir ve x_2, T'nin bir üst sınırıdır. Tamlık aksiyomu gereği (bkz. Analiz 1) $\alpha = \sup T$ vardır ve $x_1 \leq \alpha \leq x_2$'dir. O hâlde $\alpha \in [x_1, x_2] \subseteq C \subseteq U \cup V$ olur. İki durum vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Durum 1: $\alpha \in U$. *$\alpha \in U \cap C$ olduğundan (ii) gereği $\alpha \notin V$'dir. $x_2 \in V$ olduğundan $\alpha \neq x_2$, yani $\alpha < x_2$'dir. U açık olduğundan $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq U$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır.*

$$t = \alpha + \frac{1}{2}\min\{\delta, x_2 - \alpha\}$$

alalım. $\alpha < t < \alpha + \delta$ olduğundan $t \in U$; $x_1 \leq \alpha < t < x_2$ olduğundan $t \in [x_1, x_2]$'dir. Demek ki $t \in T$ ve $t > \alpha$. Bu, α'nın T'nin bir üst sınırı olmasıyla çelişir.
Durum 2: $\alpha \in V$. *V açık olduğundan $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq V$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. Supremum için epsilon ölçütü gereği (bkz. Analiz 1) $\alpha - \delta < t \leq \alpha$ olan bir $t \in T$ vardır. Bu t için $t \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq V$ olur; ayrıca $t \in T$ olduğundan $t \in U$ ve $t \in [x_1, x_2] \subseteq C$'dir. O hâlde $t \in (U \cap C) \cap (V \cap C)$ olur ve bu (ii) ile çelişir.*
İki durum da çelişki verdiğinden varsayımımız yanlıştır; C bağlantılıdır. $\mathbb{R}$'nin kendisi de bir aralık olduğundan bağlantılıdır. ■

$\mathbb{R}$'nin bağlantılı olması, Analiz 1'de gördüğümüz "$\mathbb{R}$'nin hem açık hem kapalı alt kümeleri yalnız $\varnothing$ ve $\mathbb{R}$'dir" sonucunun başka bir ifadesidir (bkz. Analiz 1). Tersine, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan her bağlantılı alt kümesi bir aralıktır (Alıştırma 5.7); $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ bu yüzden bağlantısızdı.
$\mathbb{R}^n$'de aralığın rolünü doğru parçası üstlenir. $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $p(t) = tx + (1-t)y$ yazarsak $p(1) = x$, $p(0) = y$ olur ve t sayısı $[0,1]$ aralığını taradığında $p(t)$ noktası x ile y'yi birleştiren doğru parçasını tarar (Tanım 2.4). Konveks bir kümede bu doğru parçası kümenin içinde kalır (Tanım 2.5). Aşağıdaki ispat, konveks bir kümenin olası bir ayrışmasını bu doğru parçası üzerinden $[0,1]$ aralığına taşır.

Teorem 5.7 (Konveks Kümeler Bağlantılıdır). *$\mathbb{R}^n$'de her konveks küme bağlantılıdır.*

İspat.
$C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun ve bağlantısız olduğunu varsayalım: (i)–(iii) koşullarını sağlayan $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümeleri vardır. $x \in U \cap C$ ve $y \in V \cap C$ seçelim. (ii) gereği $x \neq y$'dir. Her $t \in \mathbb{R}$ için $p(t) = tx + (1-t)y$ diyelim.
Adım 1: Doğru üzerindeki izler açıktır. *$W \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme olsun ve*

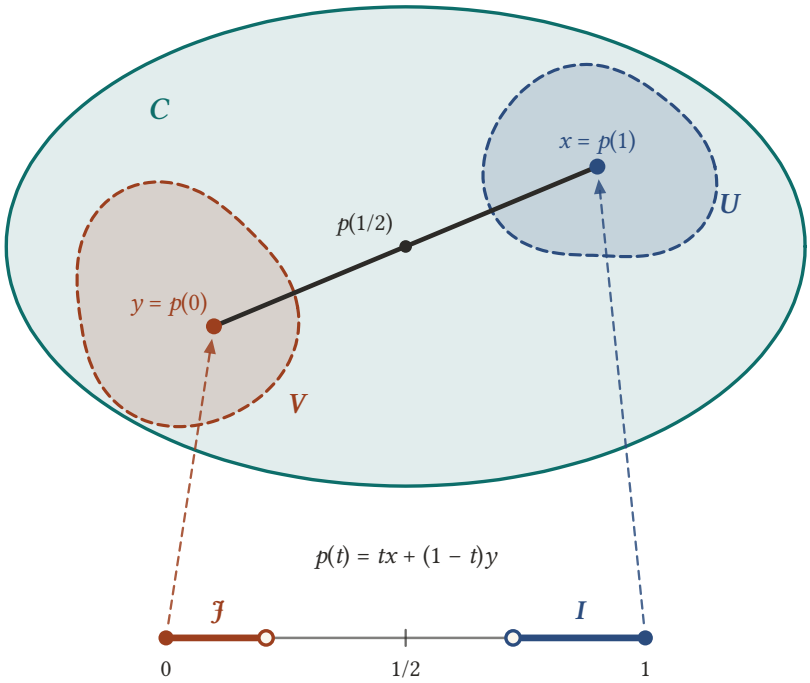
$$T_W = \{t \in \mathbb{R} : p(t) \in W\}$$

diyelim. T_W'nin $\mathbb{R}$'de açık olduğunu gösterelim. $t_0 \in T_W$ olsun. $p(t_0) \in W$ ve W açık olduğundan $B(p(t_0), \varepsilon_0) \subseteq W$ olacak biçimde bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır. $x \neq y$ olduğundan $\| x - y \| > 0$'dır; $\delta = \dfrac{\varepsilon_0}{\| x - y \|} > 0$ alalım. $| t - t_0 | < \delta$ ise

$$\begin{aligned} \| p(t) - p(t_0) \| &= \| (t - t_0)x - (t - t_0)y \| \\ &= | t - t_0 | \, \| x - y \| < \delta \, \| x - y \| = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

olur; yani $p(t) \in B(p(t_0), \varepsilon_0) \subseteq W$ ve $t \in T_W$. Demek ki $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq T_W$ ve T_W açıktır.
Adım 2: $[0,1]$ ***aralığı ayrışır.*** *$I = T_U$ ve $J = T_V$ olsun; Adım 1 gereği ikisi de $\mathbb{R}$'de açıktır. Bu iki kümenin $[0,1]$ aralığı için (i)–(iii) koşullarını sağladığını gösterelim.*
(i) $p(1) = x \in U$ olduğundan $1 \in I \cap [0,1]$; $p(0) = y \in V$ olduğundan $0 \in J \cap [0,1]$.
(ii) Bir $t \in [0,1]$ hem I'da hem J'de olsaydı C konveks olduğundan $p(t) \in C$, ayrıca $p(t) \in U$ ve $p(t) \in V$ olurdu. Bu, C için (ii) koşuluyla, yani $(U \cap C) \cap (V \cap C) = \varnothing$ eşitliğiyle çelişir. Demek ki $I \cap [0,1]$ ile $J \cap [0,1]$ ayrıktır.
(iii) $t \in [0,1]$ ise $p(t) \in C \subseteq U \cup V$ olduğundan $t \in I \cup J$'dir; $[0,1] \subseteq I \cup J$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.4: Konveks C *kümesinde* x *ile* y*'yi birleştiren doğru parçası* p(t) = tx + (1 − t)y, t ∈ *[0, 1] ile taranır. Parçanın* U*'ya düşen noktaları* I *kümesine (mavi),* V*'ye düşen noktaları* J *kümesine (turuncu) karşılık gelir.* C *bağlantısız olsaydı bu iki küme [0, 1] aralığını da ayırırdı.*

Adım 3: Çelişki. *Adım 2'ye göre* $[0,1]$ *aralığı bağlantısızdır. Bu, Teorem 5.6 ile çelişir. Varsayımımız yanlıştır;* C *bağlantılıdır.* ■

Konveks olduğunu bildiğimiz kümeler bu teoremle hemen bağlantılı çıkar.

Sonuç 5.2 (Yuvarlar ve n-Hücreler Bağlantılıdır). $\mathbb{R}^n$ *uzayı, her açık ya da kapalı yuvar ve her açık ya da kapalı* n*-hücre bağlantılıdır.*

İspat.
Teorem 5.7 gereği bu kümelerin konveks olduğunu göstermek yeter. x, y *kümenin iki noktası ve* $t \in [0,1]$ *olsun.*
$\mathbb{R}^n$**.** $tx + (1-t)y$ *noktası* $\mathbb{R}^n$*'dedir;* $\mathbb{R}^n$ *konvekstir.*
Yuvarlar. *Yuvarların konveks olduğunu Teorem 2.2 teoreminde görmüştük; hesabı kısaca hatırlayalım.* $x, y \in B[x_0, r]$ *olsun.* $x_0 = tx_0 + (1-t)x_0$ *yazıp üçgen eşitsizliğini kullanırsak*

$$\begin{aligned} \| tx + (1-t)y - x_0 \| &= \| t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0) \| \\ &\leq t \| x - x_0 \| + (1-t) \| y - x_0 \| \\ &\leq tr + (1-t)r = r \end{aligned}$$

bulunur; yani $tx + (1-t)y \in B[x_0, r]$*.* $x, y \in B(x_0, r)$ *ise son eşitsizlik kesindir:* $t > 0$ *ise* $t \| x - x_0 \| < tr$*,* $t < 1$ *ise* $(1-t) \| y - x_0 \| < (1-t)r$ *olur ve bu iki durumdan en az biri geçerlidir. Böylece* $tx + (1-t)y \in B(x_0, r)$*.*
n-hücreler. $J = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$ *bir kapalı* n*-hücre ve* $x, y \in J$ *olsun. Her* i *için* $c_i \leq x_i \leq d_i$ *ve* $c_i \leq y_i \leq d_i$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} c_i = tc_i + (1-t)c_i &\leq tx_i + (1-t)y_i \\ &\leq td_i + (1-t)d_i = d_i \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; yani $tx + (1-t)y \in J$. Açık n-hücrede $c_i < x_i < d_i$ ve $c_i < y_i < d_i$ olduğundan, yuvardaki gerekçeyle aynı eşitsizlikler kesin olur. ■

Teoremin tersi doğru değildir: bağlantılı her küme konveks değildir. Örnek 5.10 kümesi bağlantısız olduğundan, teoremin karşıt tersi gereği konveks de değildir; öte yandan konveks olmayan bağlantılı kümeler de vardır (Alıştırma 5.9).

5.6 Bölge

Türev ve ekstremum konularında fonksiyonları çoğu zaman hem her noktasının çevresinde hareket alanı bulunan hem de tek parça olan kümeler üzerinde inceleyeceğiz. Bu iki özelliği birleştiren kavrama bölge denir.

Tanım 5.4 (Bölge). $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan, açık ve bağlantılı bir alt kümesine **bölge** denir.

Yani bir bölgenin her noktasının bir yuvarı bölgenin içinde kalır (açıklık) ve bölge iki açık parçaya ayrılamaz (bağlantılılık). Sonuç 5.2, Teorem 3.3 (a) ve Teorem 3.1 gereği $\mathbb{R}^n$ ve her açık yuvar birer bölgedir. Bir kümenin bölge olmaması için koşullardan birinin bozulması yeter. $B[x_0, r]$ kapalı yuvarı bağlantılıdır ama açık değildir: $p = x_0 + re_1$ noktası kümededir, oysa her $\varepsilon > 0$ için $q = x_0 + (r + \frac{\varepsilon}{2})e_1$ noktası $B(p, \varepsilon)$ içindedir ve $\| q - x_0 \| > r$ olduğundan kümenin dışındadır. İki ayrık açık yuvarın birleşimi, örneğin $B((-2,0),1) \cup B((2,0),1)$, açıktır (Teorem 3.3) ama bağlantısızdır: yuvarların kendileri U ve V olarak alınabilir. Bu yuvarlar ayrıktır, çünkü birincisinin noktalarında $x < -1$, ikincisinin noktalarında $x > 1$'dir.

Örnek 5.11 (Üst Yarı Düzlem Bir Bölgedir). $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ kümesinin bir bölge olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Boş değildir. $(0,1) \in H$.
Açıktır. $p = (x,y) \in H$ için $\varepsilon = y > 0$ alalım. $q = (x', y') \in B(p, \varepsilon)$ ise $| y' - y | \leq \| q - p \| < y$ olduğundan $y' > 0$, yani $q \in H$ olur. Demek ki $B(p,\varepsilon) \subseteq H$.
Bağlantılıdır. H konvekstir: $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in H$ ve $t \in [0,1]$ ise $t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2)$ noktasının ikinci bileşeni $ty_1 + (1-t)y_2$ olur. İki terim de negatif değildir ve t ile $1-t$ sayılarından en az biri pozitif olduğundan terimlerden en az biri pozitiftir. Demek ki $ty_1 + (1-t)y_2 > 0$ ve nokta H'dedir. Teorem 5.7 gereği H bağlantılıdır.
Üç koşul sağlandığından H bir bölgedir. ■

5.7 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Açık Yuvar Kompakt Değildir). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $B(x_0, r)$ açık yuvarının kompakt olmadığını, sonlu alt örtüsü olmayan bir açık örtü bularak gösteriniz.

Çözüm.
$k \geq 2$ doğal sayıları için

$$G_k = B\left(x_0, r\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

olsun; yarıçaplar pozitiftir ve her G_k açıktır (Teorem 3.1).
Açık örtüdür. $y \in B(x_0, r)$ olsun ve $d = \| y - x_0 \|$ diyelim; $0 \leq d < r$'dir. Arşimet özelliği gereği $k > \frac{r}{r-d}$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $\frac{r}{r-d} \geq 1$ olduğundan $k \geq 2$'dir. Bu k için $\frac{r}{k} < r - d$, yani $d < r\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ ve $y \in G_k$ olur.
Sonlu alt örtüsü yoktur. $G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}$ seçilsin ve $N = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$ olsun. Yarıçap k ile arttığından her $G_{k_j} \subseteq G_N$ olur ve birleşim G_N'dir. $z = x_0 + r\left(1 - \frac{1}{N}\right)e_1$ noktası için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| z - x_0 \| = r\left(1 - \frac{1}{N}\right) < r$$

olduğundan $z \in B(x_0, r)$'dir; ama z'nin x_0'a uzaklığı G_N'nin yarıçapına eşit olduğundan $z \notin G_N$. Hiçbir sonlu alt aile $B(x_0, r)$'yi örtmez; yuvar kompakt değildir.
Sonuç Heine–Borel teoremiyle uyumludur: açık yuvar sınırlıdır ama kapalı değildir. $n = 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$ alınırsa $B(x_0, r) = (0, 1)$ olur ve Örnek 5.3 sonucu yeniden elde edilir. ■

Alıştırma 5.2 (Yarı Açık Aralık Kompakt Değildir). $a < b$ olsun. $\mathbb{R}$'de $(a, b]$ aralığının kompakt olmadığını tanımdan gösteriniz.

Çözüm.
$k \in \mathbb{N}$ için

$$G_k = \left(a + \frac{b-a}{k},\, b + 1\right)$$

açık aralıklarını alalım; her biri $\mathbb{R}$'de bir açık yuvardır.
Açık örtüdür. $x \in (a, b]$ ise $x - a > 0$'dır. Arşimet özelliği gereği $k > \dfrac{b-a}{x-a}$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu k için $a + \dfrac{b-a}{k} < x \le b < b + 1$, yani $x \in G_k$ olur.
Sonlu alt örtüsü yoktur. $G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}$ seçilsin ve $N = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$ olsun. Sol uç noktalar k büyüdükçe küçüldüğünden her $G_{k_j} \subseteq G_N$ olur ve birleşim G_N'dir. $c = a + \dfrac{b-a}{N}$ noktası için $N \ge 1$ olduğundan $a < c \le b$, yani $c \in (a, b]$ olur; ama c, açık G_N aralığının sol ucu olduğundan $c \notin G_N$. Sonlu alt örtü yoktur; $(a, b]$ kompakt değildir.
Heine–Borel teoremi açısından bakarsak: $(a, b]$ sınırlıdır ama kapalı değildir. Kümeye ait olmayan a noktası bir yığılma noktasıdır, çünkü her $\varepsilon > 0$ için $a + \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, b - a\}$ noktası $(a, b]$'dedir ve a'dan farklı olup a'ya uzaklığı ε'dan küçüktür (Teorem 3.7). ■

Alıştırma 5.3 (Kapalı Halka Kompakttır). $H = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 \le \| x \| \le 2\}$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sınırlılık. Her $x \in H$ için $\| x \| \le 2$ olduğundan $H \subseteq B[0, 2]$; H sınırlıdır.
Kapalılık. H iki kümenin kesişimi olarak yazılır:

$$H = B[0, 2] \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1) \right).$$

Gerçekten x'in sağdaki kümede olması, hem $\| x \| \le 2$ hem de $\| x \| \ge 1$ olması demektir. $B[0, 2]$ kapalıdır. $B(0, 1)$ açık olduğundan (Teorem 3.1) tümleyeni kapalıdır (Tanım 3.3). Kapalı kümelerin kesişimi kapalı olduğundan (Teorem 3.4) H kapalıdır.
Karar. H kapalı ve sınırlı olduğundan Teorem 5.5 gereği kompakttır.
Aynı yazılışla, $S(0, r)$ yuvar yüzeyi de $B[0, r]$ ile $\mathbb{R}^n \setminus B(0, r)$ kümelerinin kesişimi olduğundan kompakttır. ■

Alıştırma 5.4 (Delinmiş Kapalı Disk). $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$ kümesinin kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Sınırlıdır. Her $p \in D$ için $\| p \| \le 1$ olduğundan $D \subseteq B[0, 1]$.
Kapalı değildir. Orijin $0 = (0, 0)$ kümeye ait değildir, ama D'nin bir yığılma noktasıdır. Gerçekten $\varepsilon > 0$ verilsin ve $s = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, 1\}$ olmak üzere $p = (s, 0)$ alalım. $0 < s^2 \le \frac{1}{4}$ olduğundan $p \in D$; ayrıca $p \neq 0$ ve $\| p - 0 \| = s < \varepsilon$'dur. Yani $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ kümesi D'den bir nokta içerir (Tanım 3.4). Kapalı bir küme bütün yığılma noktalarını içerdiğinden (Teorem 3.7) D kapalı değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Karar. Sonuç 5.1 gereği D kompakt değildir. Sınırlı olmak yetmez; orijindeki tek bir "delik" kompaktlığı bozar. ■

Alıştırma 5.5 (Hiperbol Kompakt Değildir). $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ kümesinin kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
E'nin sınırlı olmadığını gösterelim. $r > 0$ verilsin. Arşimet özelliği gereği $k > r$ olan bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $p = \left(k, \frac{1}{k}\right)$ noktası için $k \cdot \frac{1}{k} = 1$ olduğundan $p \in E$'dir ve

$$\| p \| = \sqrt{k^2 + \frac{1}{k^2}} \geq k > r$$

olur. Demek ki hiçbir $B[0,r]$ yuvarı E'yi kapsamaz; E sınırlı değildir ve Sonuç 5.1 gereği kompakt değildir.
E aslında kapalı bir kümedir; bunu sürekli fonksiyonların ters görüntüleriyle göreceğiz (Sonuç 11.2). Demek ki kapalılık tek başına kompaktlık için yetmez, sınırlılık da gereklidir. ■

Alıştırma 5.6 (Kompakt Kümelerin Birleşimi). $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler ise $K_1 \cup K_2$ kümesinin kompakt olduğunu tanımdan gösteriniz.

Çözüm.
$\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $K_1 \cup K_2$'nin keyfi bir açık örtüsü olsun. $K_1 \subseteq K_1 \cup K_2$ olduğundan bu aile K_1'in de açık örtüsüdür. K_1 kompakt olduğundan öyle $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \Lambda$ vardır ki $K_1 \subseteq G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_p}$ olur. Aynı gerekçeyle, K_2 kompakt olduğundan öyle $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \Lambda$ vardır ki $K_2 \subseteq G_{\beta_1} \cup \ldots \cup G_{\beta_q}$ olur. İki sonlu ailenin birleşimi sonludur ve

$$K_1 \cup K_2 \subseteq G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_p} \cup G_{\beta_1} \cup \ldots \cup G_{\beta_q}$$

olur. Örtü keyfi olduğundan $K_1 \cup K_2$ kompakttır. Tümevarımla, sonlu tane kompakt kümenin birleşiminin de kompakt olduğu çıkar.
Sonsuz birleşimlerde sonuç yanlıştır: her $\{ke_1\}$ tek noktalı kümesi kompakttır (Önerme 5.1), ama $\| ke_1 \| = k$ olduğundan birleşimleri olan $\{ke_1 : k \in \mathbb{N}\}$ sınırlı değildir ve kompakt değildir. ■

Alıştırma 5.7 (Boşluklu Küme Bağlantısızdır). $S \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $a, b \in S$ ve $a < c < b$ olan ama S'ye ait olmayan bir c sayısı varsa S'nin bağlantısız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$U = (-\infty, c)$ ve $V = (c, +\infty)$ alalım. Bunlar $\mathbb{R}$'de açıktır: $x < c$ ise $B(x, c-x) \subseteq U$, $x > c$ ise $B(x, x-c) \subseteq V$ olur.
(i) $a \in U \cap S$ ve $b \in V \cap S$.
(ii) $U \cap V = \varnothing$.
(iii) $c \notin S$ olduğundan $S \subseteq \mathbb{R} \setminus \{c\} = U \cup V$.
Üç koşul sağlandığından S bağlantısızdır.
Buradan önemli bir sonuç çıkar. $S \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bağlantılı bir küme olsun. $x, y \in S$ ve $x < z < y$ ise $z \in S$ olmalıdır; yoksa az önce gösterdiğimiz gibi S bağlantısız olurdu. Bu, S'nin bir aralık olması demektir. Teorem 5.6 ile birlikte: $\mathbb{R}$'nin boş olmayan bağlantılı alt kümeleri tam olarak aralıklardır. $\mathbb{Q}$ ($c = \sqrt{2}$) ve $\mathbb{Z}$ ($c = \frac{1}{2}$) bu sonucun örnekleridir. ■

Alıştırma 5.8 (Ortak Noktalı Bağlantılı Kümeler). $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ bağlantılı kümeler ve $A \cap B \neq \varnothing$ ise $A \cup B$ kümesinin bağlantılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$p \in A \cap B$ seçelim ve $S = A \cup B$ diyelim. S'nin bağlantısız olduğunu varsayalım: (i)–(iii) koşullarını sağlayan U, V açık kümeleri vardır. $p \in S \subseteq U \cup V$ olduğundan p, U ya da V'dedir; gerekirse adlarını değiştirerek $p \in U$ varsayalım.
C, A ya da B kümelerinden biri olsun. $V \cap C = \varnothing$ olduğunu gösterelim. $V \cap C \neq \varnothing$ olsaydı U ve V açık kümeleri C için üç koşulu sağlardı:
(i) $p \in U \cap C$ ve $V \cap C \neq \varnothing$;
(ii) $C \subseteq S$ olduğundan

$$(U \cap C) \cap (V \cap C) \subseteq (U \cap S) \cap (V \cap S) = \varnothing;$$

(iii) $C \subseteq S \subseteq U \cup V$.
Bu, bağlantılı C kümesinin bağlantısız olması demek olurdu. Demek ki $V \cap A = \varnothing$ ve $V \cap B = \varnothing$. O zaman

$$V \cap S = (V \cap A) \cup (V \cap B) = \varnothing$$

olur ve bu, S için (i) koşuluyla çelişir. $S = A \cup B$ bağlantılıdır. ■

Alıştırma 5.9 (Konveks Olmayan Bağlantılı Küme).

$$L = \big([0,2] \times [0,1] \big) \cup \big([0,1] \times [0,2] \big)$$

kümesinin $\mathbb{R}^2$'de bağlantılı olduğunu ama konveks olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Bağlantılıdır. $L_1 = [0,2] \times [0,1]$ ve $L_2 = [0,1] \times [0,2]$ kapalı 2-hücrelerdir; Sonuç 5.2 gereği ikisi de bağlantılıdır. $(0,0) \in L_1 \cap L_2$ olduğundan Alıştırma 5.8 gereği $L = L_1 \cup L_2$ bağlantılıdır.
Konveks değildir. $p = (2,1) \in L_1$ ve $q = (1,2) \in L_2$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ noktasıdır. Bu nokta L_1'de değildir, çünkü ikinci bileşeni 1'den büyüktür; L_2'de de değildir, çünkü birinci bileşeni 1'den büyüktür. Doğru parçası L'nin dışına çıktığından L konveks değildir.
Demek ki bağlantılılık konvekslikten gerçekten daha zayıf bir özelliktir. L ayrıca kompakttır: L_1 ve L_2 kompakt olduğundan (Teorem 5.4) Alıştırma 5.6 gereği birleşimleri de kompakttır. ■

Bu bölümde $\mathbb{R}^n$'nin iki önemli küme sınıfını tanıdık. Kompakt kümeler açık örtülerle tanımlanır, ama Heine–Borel teoremi sayesinde $\mathbb{R}^n$'de tam olarak kapalı ve sınırlı kümelerdir. Bağlantılı kümeler iki açık kümeyle parçalanamayan kümelerdir ve her konveks küme bu türdendir. İki kavram, sürekli fonksiyonların en büyük ve en küçük değerini alması ve ara değer özelliği gibi sonuçların çok boyutlu karşılıklarının temelini oluşturacak. Kompaktlığı dizilerle ifade etmeden önce $\mathbb{R}^n$'de dizileri ve yakınsaklığı tanımlamamız gerekiyor: Rⁿ'de Diziler ve Yakınsaklık.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. $\mathbb{R}^n$'de Diziler ve Yakınsaklık

Analiz 1'de reel sayı dizilerinin yakınsaklığını $\mid a_k - a \mid$ farkıyla ölçtük: dizinin a'ya yakınsaması, yeterince ileri gidildiğinde bu farkın istenen kadar küçük kalmasıydı (bkz. Analiz 1). $\mathbb{R}^n$'de iki nokta arasındaki uzaklık $d(x,y) = \| x - y \|$ ile ölçülür (Tanım 2.1). Bu bölümde mutlak değerin yerine Öklid normunu koyarak diziler kuramını $\mathbb{R}^n$'ye taşıyoruz. Tanımların ve ispatların çoğu neredeyse harfi harfine aynı kalır, çünkü reel dizilerde kullanılan temel araç üçgen eşitsizliğiydi ve norm da bu eşitsizliği sağlar.
$\mathbb{R}^n$'nin kendine özgü iki yanı da var. Birincisi, $\mathbb{R}^n$'de bir dizi aslında aynı indisle yürüyen n tane reel sayı dizisidir. Koordinat yakınsaklık teoremi, $\mathbb{R}^n$'deki yakınsaklığın tam olarak bu n reel dizinin yakınsaklığı olduğunu söyler ve limit hesabını Analiz 1'e indirger. İkincisi, $n \geq 2$ iken $\mathbb{R}^n$'de reel sayılardaki sıralamanın bir karşılığı yoktur; bu yüzden monoton dizi kavramı ve ona dayanan sonuçlar buraya taşınamaz. Önceki bölümlerde kurduğumuz topolojik dil de burada dizilerle buluşuyor. Yakınsaklığı açık yuvarlar ve komşuluklarla ifade edecek, bir dizinin limiti ile görüntü kümesinin yığılma noktaları arasındaki ilişkiyi göreceğiz.

6.1 $\mathbb{R}^n$'de Dizi

Reel dizilerde olduğu gibi bir dizi, doğal sayılar üzerinde tanımlı bir fonksiyondur; yalnız değerleri artık $\mathbb{R}^n$'nin noktalarıdır.

Tanım 6.1 ($\mathbb{R}^n$'de Dizi). $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $k \mapsto f(k) = x_k$ biçiminde tanımlanan her fonksiyona $\mathbb{R}^n$'de bir **dizi** denir. x_k noktasına dizinin k-inci **terimi** (genel terimi) denir ve dizi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ya da kısaca (x_k) ile gösterilir. Her terim $\mathbb{R}^n$'nin bir noktası olduğundan n bileşenle yazılır:

$$x_k = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $\left(x_k^{(j)} \right)_{k\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine (x_k) dizisinin **j-inci bileşen dizisi** denir.

Yani $\mathbb{R}^n$'de bir dizi, aynı k indisiyle ilerleyen n tane reel sayı dizisidir. Açık yazılırsa

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)} \right), \left(x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(n)} \right), \ldots \right)$$

olur. Tersine, n tane reel sayı dizisi verilirse bunlar bileşen yapılarak $\mathbb{R}^n$'de bir dizi elde edilir. Alt indis terimin sırasını, üst indis bileşenin numarasını gösterir; üst indisteki ayraç, bunun bir kuvvet olmadığını hatırlatır. Karışıklık olmasın diye boyutu hep n ile, dizinin indisini hep k ile gösteriyoruz. Sabit noktaların bileşenlerini ise alışıldığı gibi alt indisle yazıyoruz: $a = (a_1, \ldots, a_n)$.
Birkaç örnek:

- $x_k = \dfrac{1}{k}$ reel sayılarda ($n = 1$) bir dizidir. Analiz 1'deki diziler, $n = 1$ özel durumudur.
- $x_k = \left(\dfrac{1}{k}, \sin(k^2) \right)$, $\mathbb{R}^2$'de bir dizidir; bileşen dizileri $\left(\dfrac{1}{k} \right)$ ve $\left(\sin(k^2) \right)$ reel dizileridir.
- $x_k = \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{2k}, \dfrac{\cos k}{k} \right)$, $\mathbb{R}^3$'te bir dizidir.
- $x_k = \left(\dfrac{1}{k}, \sin \dfrac{1}{k} \right)$ dizisinin ilk terimleri $(1, \sin 1)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \sin \dfrac{1}{2} \right)$, $\left(\dfrac{1}{3}, \sin \dfrac{1}{3} \right)$, ... noktalarıdır.

Tanım 6.2 (Dizinin Görüntü Kümesi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi olsun. Terimlerinden oluşan

$$f(\mathbb{N}) = \{ x_k : k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

kümesine dizinin **görüntü kümesi** denir.

Yani görüntü kümesi, terimlerin sırası ve tekrarları unutulunca geriye kalan noktalar kümesidir. Dizinin sonsuz sayıda terimi vardır ama görüntü kümesi sonlu da olabilir: $x_k = \left((-1)^k, 0 \right)$ dizisinin görüntü

 CC BY-NC-SA 4.0

kümesi iki noktalı $\{(-1,0),(1,0)\}$ kümesidir, $x_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ dizisininki ise sonsuz bir kümedir. Dizi ile görüntü kümesini ayırt etmek gerekir: $\big(\ (-1)^k, 0\ \big)$ ve $\big(\ (-1)^{k+1}, 0\ \big)$ farklı dizilerdir (biri $(-1,0)$ noktasıyla, öbürü $(1,0)$ noktasıyla başlar) ama görüntü kümeleri aynıdır.

6.2 Yakınsaklık

Reel dizilerde $\mid a_k - a \mid$ farkının küçülmesi yakınsaklık demekti. $\mathbb{R}^n$'de bu farkın yerini x_k ile a arasındaki uzaklık, yani $\parallel x_k - a \parallel$ alır.

Tanım 6.3 (Yakınsak Dizi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa ki $k \geq N_\varepsilon$ olan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\parallel x_k - a \parallel < \varepsilon$$

oluyorsa (x_k) dizisi a noktasına **yakınsar** denir. Bu durumda a noktasına dizinin **limiti**, (x_k) dizisine de **yakınsak dizi** denir ve

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad \text{ya da} \qquad x_k \to a \ \ (k \to \infty)$$

yazılır. Sembolik olarak:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall k \geq N_\varepsilon : \ \parallel x_k - a \parallel < \varepsilon.$$

Yani hangi $\varepsilon > 0$ seçilirse seçilsin, dizide yeterince ileri gidildiğinde bütün terimler a'dan ε'dan az uzakta kalır. $n = 1$ için Öklid normu mutlak değerdir ve bu tanım Analiz 1'deki tanımın kendisidir. Değişen tek şey uzaklığın ölçülme biçimidir: örneğin $\mathbb{R}^2$'de $\parallel x_k - a \parallel$, x_k ile a noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğudur. Niceleyicilerin sırası yine önemlidir: önce ε verilir, N_ε ona bağlı olarak bulunur.
Tanımı üç farklı biçimde daha ifade etmek işimizi kolaylaştırır.

Önerme 6.1 (Yakınsaklığın Denk İfadeleri). *(x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

1. $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.
2. $\lim_{k\to\infty} \parallel x_k - a \parallel = 0$; *yani $d(x_k, a)$ uzaklıklarından oluşan reel sayı dizisi 0'a yakınsar.*
3. *Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki $k \geq N_\varepsilon$ iken $x_k \in B(a,\varepsilon)$ olur.*
4. *a noktasının her U komşuluğu için $\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin U\}$ indis kümesi sonludur.*

> ***İspat.***
> ***1 ve 2.*** *$t_k = \parallel x_k - a \parallel$ reel sayı dizisinin terimleri negatif olmadığından $\mid t_k - 0 \mid = \parallel x_k - a \parallel$'dir. Dolayısıyla "$k \geq N_\varepsilon$ iken $\mid t_k - 0 \mid < \varepsilon$" koşulu, yakınsaklık tanımındaki (Tanım 6.3) koşulun kendisidir; biri için işe yarayan N_ε öbürü için de işe yarar.*
> ***1 ve 3.*** *Açık yuvar $B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \parallel x - a \parallel < \varepsilon\}$ olduğundan (Tanım 2.6) $x_k \in B(a,\varepsilon)$ ile $\parallel x_k - a \parallel < \varepsilon$ aynı şeydir.*
> ***3'ten 4'e.*** *U, a noktasının bir komşuluğu olsun. Tanım 3.1 gereği $B(a,\varepsilon) \subseteq U$ olacak bir $\varepsilon > 0$ vardır. 3 gereği $k \geq N_\varepsilon$ olan bütün terimler $B(a,\varepsilon)$ içindedir, dolayısıyla U içindedir. U'nun dışında kalabilecek terimler en çok $x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon - 1}$ terimleridir; bunlar sonlu sayıdadır.*
> ***4'ten 3'e.*** *$\varepsilon > 0$ verilsin. $B(a,\varepsilon)$ yuvarı a noktasının bir komşuluğudur, çünkü kendisini kapsar. 4 gereği bu yuvarın dışında kalan terimlerin indisleri sonlu bir $F \subseteq \mathbb{N}$ kümesi oluşturur. $F = \varnothing$ ise $N_\varepsilon = 1$, değilse $N_\varepsilon = \max F + 1$ alalım. $k \geq N_\varepsilon$ için $k \notin F$, yani $x_k \in B(a,\varepsilon)$ olur.* ■

3 ve 4, yakınsaklığın geometrik okunuşudur: a merkezli ne kadar küçük bir yuvar çizilirse çizilsin, dizinin yalnız sonlu sayıda terimi yuvarın dışında kalır. 2 ise $\mathbb{R}^n$'deki her yakınsaklık sorusunu bir reel sayı dizisinin 0'a yakınsamasına çevirir.

Tanım 6.4 (Iraksak Dizi). $\mathbb{R}^n$'de hiçbir noktaya yakınsamayan diziye **ıraksak dizi** denir.

Yani ıraksaklık, yakınsaklığın her aday nokta için bozulmasıdır. Niceleyicileri kuralına göre olumsuzlarsak (bkz. Analiz 1) (x_k) dizisinin ıraksak olması

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\forall a \in \mathbb{R}^n \ \exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists k \geq N : \parallel x_k - a \parallel \geq \varepsilon_0$$

demektir. Sözle: her a noktası için öyle bir ε_0 yarıçapı vardır ki $\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B(a, \varepsilon_0)\}$ indis kümesi sonsuzdur. ε_0 yarıçapı a noktasına bağlı olabilir.

Üç adımda tanımla yakınsaklık

1. **Aday limit.** Her bileşen dizisinin limiti tahmin edilir; aday nokta a bu limitlerden oluşur.
2. **Uzaklığı sınırla.** $\parallel x_k - a \parallel$ hesaplanır ve her bileşen farkı ayrı ayrı sınırlanarak $\parallel x_k - a \parallel \leq c_k$ olacak biçimde, k cinsinden basit ve azalan bir c_k bulunur (örneğin $c_k = \dfrac{C}{k}$).
3. **Eşiği seç.** $c_k < \varepsilon$ eşitsizliği k için çözülür, $N_\varepsilon = \lfloor \cdot \rfloor + 1$ biçiminde seçilir ve $k \geq N_\varepsilon$ için $\parallel x_k - a \parallel \leq c_k \leq c_{N_\varepsilon} < \varepsilon$ zinciri yazılır.

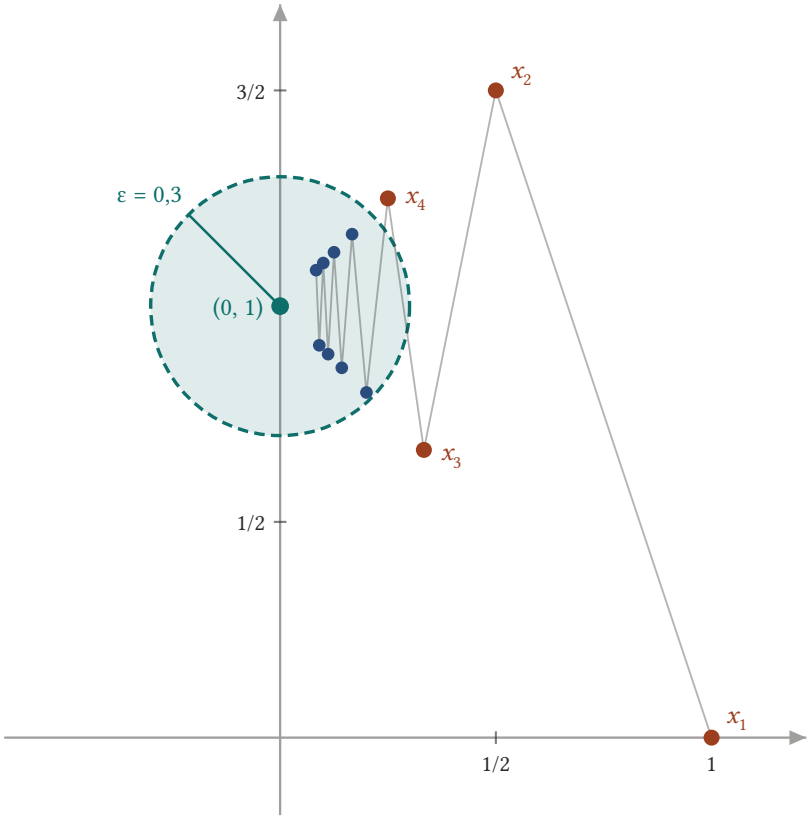
Örnek 6.1 (Tanımla Yakınsaklık). $\mathbb{R}^2$'de genel terimi $x_k = \left(\dfrac{1}{k}, 1 + \dfrac{(-1)^k}{k} \right)$ olan dizinin $(0, 1)$ noktasına yakınsadığını tanımla gösteriniz.

Çözüm.
Aday limit. $\dfrac{1}{k} \to 0$ ve $\dfrac{(-1)^k}{k} \to 0$ olduğundan aday nokta $a = (0, 1)$'dir.
Uzaklık. Her k için

$$\parallel x_k - (0,1) \parallel = \parallel \left(\frac{1}{k}, \frac{(-1)^k}{k} \right) \parallel = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k}$$

olur. Burada $\big((-1)^k \big)^2 = 1$ kullanıldı.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.1: $x_k = (1/k,\ 1 + (-1)^k/k)$ dizisinin ilk 12 terimi; ardışık terimler ince çizgiyle birleştirildi. İkinci bileşen 1'in bir altına bir üstüne sıçrar. $\varepsilon = 0{,}3$ için $x_1, \ldots, x_4$ (turuncu) $B((0,1), 0{,}3)$ yuvarının dışında, x_5 ve sonraki terimler (mavi) içindedir.

Eşik. $\dfrac{\sqrt{2}}{k} < \varepsilon$ eşitsizliği $k > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ ile denktir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve

$$N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

alalım; taban fonksiyonunun özelliği gereği $N_\varepsilon > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$'dur (bkz. Analiz 1). $k \geq N_\varepsilon$ olan her k için

$$\| x_k - (0,1) \| = \frac{\sqrt{2}}{k} \leq \frac{\sqrt{2}}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $x_k \to (0,1)$. İkinci bileşen 1'in bir altına bir üstüne sıçrayarak yaklaşır, ama uzaklık yalnızca $\dfrac{1}{k}$'ya bağlıdır. Örneğin $\varepsilon = 0{,}3$ için $N_\varepsilon = \lfloor 4{,}71\ldots \rfloor + 1 = 5$ olur: $x_1, \ldots, x_4$ terimleri $B\left((0,1), 0{,}3\right)$ yuvarının dışında, x_5 ve sonrası içindedir. ■

Örnek 6.2 (Tanımla Iraksaklık). $\mathbb{R}^2$'de genel terimi $x_k = \left((-1)^k,\ \dfrac{1}{2^k}\right)$ olan dizinin ıraksak olduğunu tanımla gösteriniz.

Çözüm.
Keyfi bir $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ noktası alalım ve bu noktanın dizinin limiti olamayacağını gösterelim. Her $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| z-a \|^2 = (z_1-a_1)^2+(z_2-a_2)^2 \geq (z_1-a_1)^2, \quad \text{yani} \quad \| z-a \| \geq | z_1-a_1 |$$

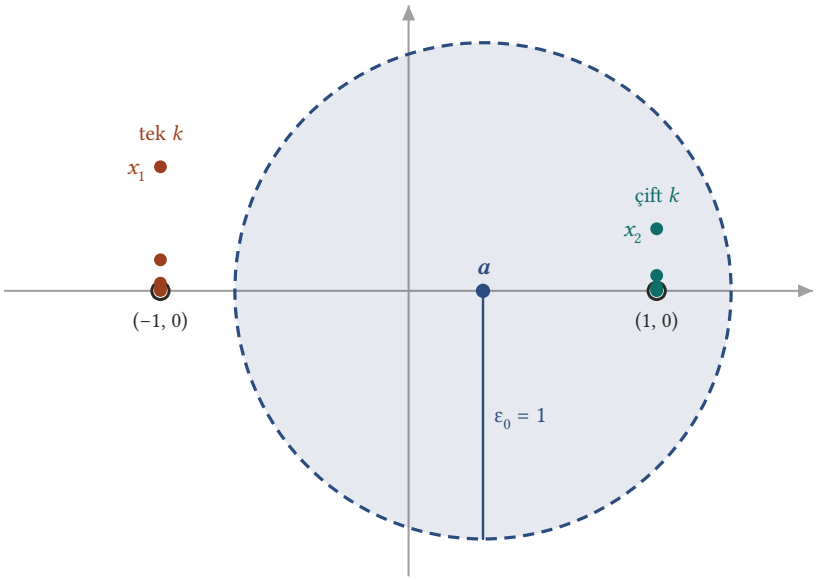
olduğunu kullanacağız. Dizinin birinci bileşeni tek k için -1, çift k için 1'dir. Üçgen eşitsizliğinden

$$| 1-a_1 | + | 1+a_1 | \geq | (1-a_1)+(1+a_1) | = 2$$

olduğundan $| 1-a_1 |$ ve $| 1+a_1 |$ sayılarından en az biri 1'den küçük değildir. $\varepsilon_0 = 1$ alalım ve $N \in \mathbb{N}$ verilsin.

- $| 1-a_1 | \geq 1$ ise çift sayı olan $k = 2N \geq N$ indisini seçelim: $\| x_{2N} - a \| \geq | 1-a_1 | \geq 1 = \varepsilon_0$.
- $| 1+a_1 | \geq 1$ ise tek sayı olan $k = 2N+1 \geq N$ indisini seçelim: $\| x_{2N+1} - a \| \geq | -1-a_1 |$ ve $| -1-a_1 | = | 1+a_1 | \geq \varepsilon_0$.

Her iki durumda da her N için $\| x_k - a \| \geq \varepsilon_0$ olan bir $k \geq N$ bulduk; a noktası dizinin limiti değildir. a keyfi olduğundan dizi hiçbir noktaya yakınsamaz, yani ıraksaktır.



Şekil 6.2: $x_k = ((-1)^k, 1/2^k)$ dizisinin ilk 10 terimi. Aday nokta a = (0,3; 0) için $\varepsilon_0 = 1$ yarıçaplı yuvar tek indisli terimlerin hiçbirini içermez: bu terimlerin a'ya uzaklığı en az 1,3'tür. a nereye konursa konsun, (−1, 0) ile (1, 0) arasındaki uzaklık 2 olduğundan iki terim grubundan biri bu yuvarın dışında kalır.

Terimler iki kümeye ayrılır: tek indisliler $(-1,0)$ noktasına, çift indisliler $(1,0)$ noktasına yaklaşır. Bu iki nokta arasındaki uzaklık 2 olduğundan hiçbir nokta ikisine birden 1'den yakın olamaz. ■

6.3 Limitin Tekliği

Tanım "bir limit"ten söz ediyor. Norm üçgen eşitsizliğini sağladığından reel dizilerdeki teklik ispatı (bkz. Analiz 1) $\mathbb{R}^n$'ye aynen taşınır.

Teorem 6.1 (Limitin Tekliği). *$\mathbb{R}^n$'de yakınsak bir dizinin limiti tektir: $x_k \to a$ ve $x_k \to b$ ise $a = b$'dir.*

İspat.
Olmayana ergi yöntemini kullanalım: $x_k \to a$, $x_k \to b$ ve $a \neq b$ olsun. Normun pozitifliği gereği (Teorem 1.2) $\| a-b \| > 0$'dır; $\varepsilon = \dfrac{\| a-b \|}{2} > 0$ alalım. Yakınsaklık tanımından

- *$k \geq N_1$ iken $\| x_k - a \| < \varepsilon$ olacak bir $N_1 \in \mathbb{N}$,*
- *$k \geq N_2$ iken $\| x_k - b \| < \varepsilon$ olacak bir $N_2 \in \mathbb{N}$*

 CC BY-NC-SA 4.0

vardır. $k = \max\{N_1, N_2\}$ için iki eşitsizlik birlikte sağlanır. $a - b$ vektörüne x_k ekleyip çıkarıp üçgen eşitsizliğini ve $\| a - x_k \| = \| x_k - a \|$ eşitliğini kullanırsak

$$\| a - b \| \leq \| a - x_k \| + \| x_k - b \| < \varepsilon + \varepsilon = \| a - b \|$$

elde ederiz. Bir sayı kendisinden küçük olamaz; bu çelişki $a = b$ olduğunu gösterir. ■

Teklik sayesinde yakınsak bir dizi için "dizinin limiti" diye tek bir noktadan söz edebilir ve $\lim_{k\to\infty} x_k$ yazımını belirsizlik olmadan kullanabiliriz.

6.4 Sınırlı Diziler

Reel bir dizinin sınırlılığı, terimlerin mutlak değerlerinin ortak bir sayıyla sınırlanmasıydı. $\mathbb{R}^n$'de mutlak değerin yerini yine norm alır.

Tanım 6.5 (Sınırlı Dizi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\| x_k \| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ reel sayısı varsa (x_k) dizisine **sınırlı** denir. Sınırlı olmayan diziye **sınırsız dizi** denir; bu, her $M > 0$ için $\| x_{k_M} \| > M$ olacak bir $k_M \in \mathbb{N}$ bulunması demektir.

Yani sınırlı bir dizinin bütün terimleri orijin merkezli bir $B[0, M]$ kapalı yuvarının içindedir; başka bir deyişle görüntü kümesi $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ sınırlı bir kümedir (Tanım 3.5). Yuvarın merkezinin orijin olması önemli değildir: bütün terimler bir $B[x_0, r]$ yuvarındaysa üçgen eşitsizliğinden $\| x_k \| \leq \| x_k - x_0 \| + \| x_0 \| \leq r + \| x_0 \|$ olur.

Örnek 6.3 (Sınırlı Bir Dizi). $x_k = \left(\frac{1}{k}, \sin\frac{1}{k}\right)$ dizisinin $\mathbb{R}^2$'de sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{1}{k} \leq 1$ ve $\left|\sin\frac{1}{k}\right| \leq 1$ olduğundan

$$\| x_k \| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \sin^2\frac{1}{k}} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

olur. $M = \sqrt{2}$ sayısı bütün terimlerin normları için ortak bir sınırdır; dizi sınırlıdır. ■

Örnek 6.4 (Sınırsız Bir Dizi). $x_k = \left(k, \sin\frac{1}{k}\right)$ dizisinin $\mathbb{R}^2$'de sınırsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$M > 0$ verilsin ve $k_M = \lfloor M \rfloor + 1$ alalım. k_M bir doğal sayıdır ve $k_M > M$'dir. Karekökün altındaki ikinci terim negatif olmadığından

$$\| x_{k_M} \| = \sqrt{k_M^2 + \sin^2\frac{1}{k_M}} \geq \sqrt{k_M^2} = k_M > M$$

olur. Her $M > 0$ için normu M'yi aşan bir terim bulunduğundan dizi sınırsızdır. ■

Reel dizilerde olduğu gibi yakınsaklık sınırlılığı gerektirir.

Teorem 6.2 (Yakınsak Diziler Sınırlıdır). *$\mathbb{R}^n$'de yakınsak her dizi sınırlıdır.*

İspat.
$x_k \to a$ olsun. Yakınsaklık tanımını $\varepsilon = 1$ için uygulayalım: $k \geq N_1$ iken $\| x_k - a \| < 1$ olacak bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu k'lar için üçgen eşitsizliğinden

$$\| x_k \| = \| (x_k - a) + a \| \leq \| x_k - a \| + \| a \| < 1 + \| a \|$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Geriye sonlu sayıda terim kalır: $x_1, ..., x_{N_1-1}$. Bunların normlarını da hesaba katan

$$M = \max\{ \parallel x_1 \parallel, \parallel x_2 \parallel, ..., \parallel x_{N_1-1} \parallel, 1 + \parallel a \parallel \}$$

sayısını alalım ($N_1 = 1$ ise küme yalnız $1 + \parallel a \parallel$ sayısından oluşur). Sonlu bir kümenin en büyük elemanı vardır ve $M \geq 1 + \parallel a \parallel > 0$'dır. $k < N_1$ ise $\parallel x_k \parallel \leq M$ tanım gereği, $k \geq N_1$ ise $\parallel x_k \parallel < 1 + \parallel a \parallel \leq M$ yukarıdaki eşitsizlik gereği sağlanır. Yani her k için $\parallel x_k \parallel \leq M$; dizi sınırlıdır. ■

Teoremin karşıt tersi, ıraksaklığı göstermenin en kolay yollarından biridir.

Sonuç 6.1 (Sınırsız Diziler Iraksaktır). *$\mathbb{R}^n$'de sınırsız bir dizi ıraksaktır.*

İspat.
Dizi yakınsak olsaydı Teorem 6.2 gereği sınırlı olurdu. Bu, dizinin sınırsız olmasıyla çelişir. ■

Örneğin Örnek 6.4 içindeki $\left(k, \sin\frac{1}{k}\right)$ dizisi sınırsız olduğundan ıraksaktır. Teoremin tersi ise doğru değildir: sınırlı olup ıraksak olan diziler vardır.

Örnek 6.5 (Sınırlı Ama Iraksak Bir Dizi). $x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{2^k}\right)$ dizisinin sınırlı ama ıraksak bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her k için $\left((-1)^k\right)^2 = 1$ ve $\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{4^k} \leq 1$ olduğundan

$$\parallel x_k \parallel = \sqrt{1 + \frac{1}{4^k}} \leq \sqrt{2}$$

olur; dizi sınırlıdır. Iraksak olduğunu ise Örnek 6.2 içinde tanımla gösterdik. Demek ki Teorem 6.2 teoreminin tersi yanlıştır: sınırlılık yakınsaklık için yetmez. ■

6.5 Koordinat Yakınsaklık

$\mathbb{R}^n$'de bir dizinin n bileşen dizisinden oluştuğunu gördük. Şimdi yakınsaklığın da bileşen bileşen incelenebileceğini gösteriyoruz. Bunun anahtarı, bir vektörün normu ile bileşenleri arasındaki şu iki eşitsizliktir: her $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ ve her $j = 1, ..., n$ için

$$\mid z_j \mid \leq \parallel z \parallel \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid + ... + \mid z_n \mid . \tag{1}$$

Sol eşitsizlik, $\parallel z \parallel^2 = z_1^2 + ... + z_n^2$ toplamının, negatif olmayan terimlerinden biri olan z_j^2'den küçük olamamasından gelir; iki yanın karekökü alınır. Sağ eşitsizlik için $\left(\mid z_1 \mid + ... + \mid z_n \mid\right)^2$ açılır: $z_1^2 + ... + z_n^2 = \parallel z \parallel^2$ terimlerinin yanında yalnızca negatif olmayan $2 \mid z_i \mid \mid z_j \mid$ çapraz terimleri çıkar; yine karekök alınır. Bu iki eşitsizlik, Öklid normunun maksimum normu ve 1-normuyla karşılaştırılmasıdır (bkz. Teorem 1.5). Sol yanı "iki nokta yakınsa her bileşenleri de yakındır", sağ yanı "bütün bileşenler yakınsa noktalar da yakındır" diye okunur.

Teorem 6.3 (Koordinat Yakınsaklık Teoremi). *(x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi, $x_k = \left(x_k^{(1)}, ..., x_k^{(n)}\right)$ ve $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. O zaman*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k^{(j)} = a_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

olur. Yani $\mathbb{R}^n$'de bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, bütün bileşen dizilerinin reel sayı dizileri olarak yakınsak olmasıdır; bu durumda limitin bileşenleri, bileşen dizilerinin limitleridir.

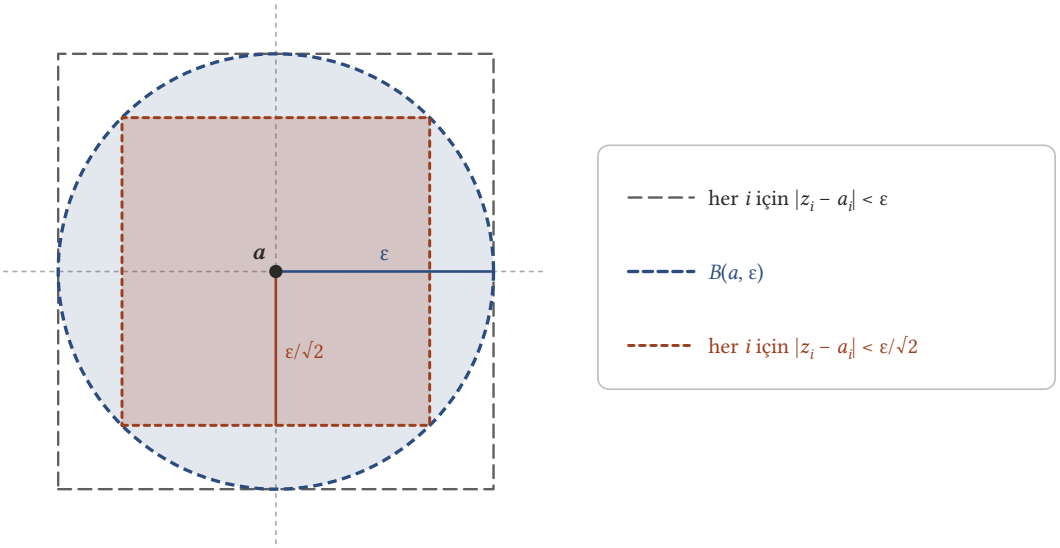
İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Gereklilik (⇒). *$x_k \to a$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $k \geq N_\varepsilon$ iken $\| x_k - a \| < \varepsilon$ olacak bir N_ε vardır. (1) eşitsizliğinin sol yanını $x_k - a$ vektörüne uygularsak $k \geq N_\varepsilon$ ve her j için*

$$| x_k^{(j)} - a_j | \leq \| x_k - a \| < \varepsilon$$

olur. Aynı N_ε bütün bileşenler için işe yarar; her j için $x_k^{(j)} \to a_j$.



Şekil 6.3: a merkezli üç bölge (üçü de açık). Turuncu karenin her noktasında bileşen farkları $\varepsilon/\sqrt{2}$'den küçüktür ve bu kare B(a, ε) yuvarının içindedir: bileşen farkları $\varepsilon/\sqrt{2}$'den küçükse nokta yuvardadır. Yuvar da kesikli gri karenin içindedir: nokta yuvardaysa her bileşen farkı ε'dan küçüktür.

Yeterlilik (⇐). *Her j için $x_k^{(j)} \to a_j$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Her bileşen dizisine yakınsaklık tanımını $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0$ için uygulayalım: her $j = 1, \ldots, n$ için*

$$k \geq N^{(j)} \text{ iken } | x_k^{(j)} - a_j | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

olacak bir $N^{(j)} \in \mathbb{N}$ vardır. $N_\varepsilon = \max\{ N^{(1)}, \ldots, N^{(n)} \}$ alalım; sonlu sayıda doğal sayının en büyüğü olarak bu bir doğal sayıdır. $k \geq N_\varepsilon$ için n eşitsizliğin hepsi birden sağlanır ve

$$\| x_k - a \|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_k^{(j)} - a_j)^2 < n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

olur. Karekök alırsak $\| x_k - a \| < \varepsilon$; yani $x_k \to a$. ■

İspattaki $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ seçimi, n bileşenin katkılarının karelerinin toplandığını hesaba katar. İspatın sonlu boyuta dayandığına da dikkat edelim: N_ε, sonlu sayıda eşiğin en büyüğü olarak seçildi. Teorem, $\mathbb{R}^n$'deki limit hesabını reel dizilere indirger:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \left(\lim_{k\to\infty} x_k^{(1)}, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_k^{(n)} \right).$$

Teoremin gereklilik yönü ıraksaklık için de kullanışlı bir ölçüt verir.

Sonuç 6.2 (Iraksak Bileşenli Diziler Iraksaktır). *(x_k) dizisinin bileşen dizilerinden en az biri $\mathbb{R}$'de ıraksaksa (x_k) dizisi $\mathbb{R}^n$'de ıraksaktır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Olmayana ergi: (x_k) dizisi bir $a = (a_1, \ldots, a_n)$ noktasına yakınsasın. Teorem 6.3 teoreminin gereklilik yönü gereği her j için $x_k^{(j)} \to a_j$ olur; yani bütün bileşen dizileri yakınsaktır. Bu, bileşenlerden birinin ıraksak olmasıyla çelişir. ■

İki adımda koordinat yakınsaklık

1. **Bileşen limitleri.** Her bileşen dizisi Analiz 1'in araçlarıyla incelenir: limit aritmetiği, sıkıştırma, özel limitler ve sürekli fonksiyonlar için dizisel ölçüt.
2. **Karar.** Bütün bileşenler yakınsaksa dizi, bileşen limitlerinden oluşan noktaya yakınsar (Teorem 6.3). Bir bileşen bile ıraksaksa (örneğin sınırsızsa ya da iki farklı değer arasında gidip geliyorsa) dizi ıraksaktır (Sonuç 6.2).

Örnek 6.6 (Üç Bileşenli Yakınsak Bir Dizi). $\mathbb{R}^3$'te $x_k = \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{2k+1}{3k-1}, \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.

Çözüm.
Bileşen limitleri. Birinci bileşen için $\dfrac{1}{k} \to 0$'dır. İkinci bileşende pay ve payda k'ya bölünür ($3k - 1 \neq 0$):

$$\frac{2k+1}{3k-1} = \frac{2+\frac{1}{k}}{3-\frac{1}{k}} \to \frac{2}{3};$$

paydanın limiti $3 \neq 0$ olduğundan bölüm kuralı uygulanabilir (bkz. Analiz 1). Üçüncü bileşen e sayısını tanımlayan dizidir: $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k \to e$ (bkz. Analiz 1).
Karar. Üç bileşen dizisi de yakınsak olduğundan Teorem 6.3 gereği dizi yakınsaktır ve

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \left(0, \frac{2}{3}, e\right)$$

olur. ■

Örnek 6.7 (Sürekli Fonksiyon İçeren Bir Bileşen). $\mathbb{R}^3$'te $x_k = \left(\dfrac{(-1)^k}{k}, \sin\dfrac{k}{k+1}, e^{-k}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.
Birinci bileşen. $\left((-1)^k\right)$ sınırlı, $\dfrac{1}{k} \to 0$ olduğundan çarpımları 0'a yakınsar (bkz. Analiz 1).
İkinci bileşen. $\dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{k}} \to 1$'dir. sin fonksiyonu 1 noktasında sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) süreklilik için dizisel ölçüt gereği

$$\sin\frac{k}{k+1} \to \sin 1$$

olur (bkz. Analiz 1).
Üçüncü bileşen. $e > 1$ olduğundan $0 < \dfrac{1}{e} < 1$ ve $e^{-k} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^k \to 0$'dır (bkz. Analiz 1).
Üç bileşen de yakınsak olduğundan Teorem 6.3 gereği $x_k \to (0, \sin 1, 0)$. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 6.8 (Bir Bileşeni Iraksak Olan Dizi). $\mathbb{R}^2$'de $x_k = \left(\dfrac{1}{k^2+3k},\,(-1)^k\right)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Birinci bileşen $0 < \dfrac{1}{k^2+3k} \le \dfrac{1}{k}$ eşitsizliği ve sıkıştırma teoremiyle 0'a yakınsar. İkinci bileşen $\big(\,(-1)^k\,\big)$ ise $\mathbb{R}$'de ıraksaktır (bkz. Analiz 1). Bir bileşen ıraksak olduğundan Sonuç 6.2 gereği dizi ıraksaktır; birinci bileşenin yakınsak olması durumu değiştirmez.
> Aynı gerekçe Örnek 6.2 içindeki $\left((-1)^k,\dfrac{1}{2^k}\right)$ dizisinin ıraksaklığını da tek satırda verir: birinci bileşeni $\big(\,(-1)^k\,\big)$ ıraksaktır. $\blacksquare$

Örnek 6.9 (Sinüs ve Kosinüsle Kurulan Dizi). $\mathbb{R}^2$'de $x_k = \big(\sin(k\pi),\cos(k\pi)\,\big)$ dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

> **Çözüm.**
> Her $k \in \mathbb{N}$ için $\sin(k\pi) = 0$'dır; birinci bileşen sabit 0 dizisidir ve 0'a yakınsar. İkinci bileşen için $\cos(k\pi) = (-1)^k$'dir: terimler $-1, 1, -1, 1, \ldots$ biçiminde gidip gelir ve bu dizi ıraksaktır (bkz. Analiz 1). Sonuç 6.2 gereği (x_k) dizisi ıraksaktır. Terimler $(0,-1)$ ve $(0,1)$ noktaları arasında gidip gelir. $\blacksquare$

Aynı iki adım aşağıdaki dizilerde tek satırda sonuç verir.

Tablo 6.1: Koordinat yakınsaklıkla incelenen diziler

Dizi x_k	Bileşen limitleri	Sonuç
$\left(\dfrac{1}{2k},\,5,\,\dfrac{6k^2+7}{k^2+3k}\right)$	$0;\,5;\,6$	$(0,5,6)$ noktasına yakınsar
$\left(\dfrac{1}{k},\,1-\dfrac{1}{k},\,e^{-k}\right)$	$0;\,1;\,0$	$(0,1,0)$ noktasına yakınsar
$\left(\dfrac{1}{k},\,\dfrac{k-3k^2}{k+k^2}\right)$	$0;\,-3$	$(0,-3)$ noktasına yakınsar
$\left(\dfrac{1}{k},\,\dfrac{2k^2-k+1}{k^2+2k-1}\right)$	$0;\,2$	$(0,2)$ noktasına yakınsar
$\left(\dfrac{1}{k+1},\,\dfrac{k-2}{k+k^2}\right)$	$0;\,0$	$(0,0)$ noktasına yakınsar
$\left(1,\,\sin(\pi k),\,\cos\dfrac{1}{k}\right)$	$1;\,0;\,1$	$(1,0,1)$ noktasına yakınsar
$\left(\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k,\,\dfrac{(-1)^k}{k},\,5\right)$	$e;\,0;\,5$	$(e,0,5)$ noktasına yakınsar
$\left(e^{-k},\,\sin\dfrac{1}{k},\,k\right)$	$0;\,0;$ sınırsız	ıraksaktır

Tablodaki rasyonel bileşenlerde pay ve payda k^2'ye bölünür (bkz. Analiz 1); örneğin

$$\frac{6k^2+7}{k^2+3k} = \frac{6+\frac{7}{k^2}}{1+\frac{3}{k}} \to 6, \qquad \frac{k-3k^2}{k+k^2} = \frac{\frac{1}{k}-3}{\frac{1}{k}+1} \to -3$$

olur ($k^2+2k-1 \ge 2$ olduğundan dördüncü satırdaki payda hiç sıfır olmaz). $\sin(\pi k) = 0$ olduğundan altıncı satırın ikinci bileşeni sabit sıfır dizisidir. sin ve cos sürekli olduğundan $\cos\dfrac{1}{k} \to \cos 0 = 1$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$\sin\frac{1}{k} \to \sin 0 = 0$ olur. $\left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \frac{1}{k} \to 0$ ve $e^{-k} \to 0$'dır. Son satırda üçüncü bileşen k sınırsız olduğundan ıraksaktır (bkz. Analiz 1) ve Sonuç 6.2 gereği dizi ıraksaktır.

6.6 Limit için Cebirsel İşlemler

Koordinat yakınsaklık teoremi, reel dizilerdeki limit kurallarını $\mathbb{R}^n$'deki vektör işlemlerine taşımanın en kısa yoludur: her işlem bileşenler üzerinden yapılır ve bileşenlerde Analiz 1'in kuralları geçerlidir.

Teorem 6.4 (Limit için Cebirsel İşlemler). *(x_k) ve (y_k), $\mathbb{R}^n$'de iki dizi, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ ve $\lim_{k\to\infty} y_k = b$ olsun. (λ_k) bir reel sayı dizisi ve $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = \lambda$ olsun. O zaman:*

1. ***Toplam.*** $\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = a + b$.
2. ***Skalerle çarpım.*** $\lim_{k\to\infty}\lambda_k x_k = \lambda a$. *Özel olarak her $c \in \mathbb{R}$ için* $\lim_{k\to\infty} c\,x_k = c\,a$.
3. ***İç çarpım.*** $\lim_{k\to\infty}\langle x_k, y_k\rangle = \langle a, b\rangle$. *Özel olarak sabit bir $\beta \in \mathbb{R}^n$ için* $\lim_{k\to\infty}\langle \beta, x_k\rangle = \langle \beta, a\rangle$.
4. ***Norm.*** $\lim_{k\to\infty} \parallel x_k \parallel = \parallel a \parallel$.
5. ***Skalere bölme.*** *Her k için $\lambda_k \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ ise* $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_k}x_k = \frac{1}{\lambda}a$.
6. ***Vektörel çarpım.*** $n = 3$ *ise* $\lim_{k\to\infty}(x_k \times y_k) = a \times b$.

> ***İspat.***
> $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *yazalım. Teorem 6.3 teoreminin gereklilik yönü gereği her j için $x_k^{(j)} \to a_j$ ve $y_k^{(j)} \to b_j$'dir. Aşağıda bileşenlerde kullanılan toplam, çarpım ve bölüm kuralları reel dizilerin limit aritmetiğidir (bkz. Analiz 1).*
> ***1.*** *$x_k + y_k$ vektörünün j-inci bileşeni $x_k^{(j)} + y_k^{(j)}$'dir ve toplam kuralı gereği $a_j + b_j$'ye yakınsar. Bu sayı $a + b$ vektörünün j-inci bileşenidir; Teorem 6.3 teoreminin yeterlilik yönü gereği $x_k + y_k \to a + b$.*
> ***2.*** *$\lambda_k x_k$ vektörünün j-inci bileşeni $\lambda_k x_k^{(j)}$'dir ve çarpım kuralı gereği λa_j'ye yakınsar. Yeterlilik yönüyle $\lambda_k x_k \to \lambda a$. Özel durum, $\lambda_k = c$ sabit dizisi alınarak elde edilir.*
> ***3.*** $\langle x_k, y_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_k^{(j)} y_k^{(j)}$ *bir reel sayı dizisidir. Çarpım kuralıyla her j için $x_k^{(j)} y_k^{(j)} \to a_j b_j$ olur. Toplam kuralını $n-1$ kez uygularsak bu n yakınsak dizinin toplamı $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \langle a, b\rangle$ sayısına yakınsar. Özel durum için her terimi β olan sabit diziyi alalım; $\parallel \beta - \beta \parallel = 0 < \varepsilon$ olduğundan bu dizi β noktasına yakınsar.*
> ***4.*** *Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 1.2) gereği her k için*
>
> $$\big|\, \parallel x_k \parallel - \parallel a \parallel \,\big| \leq \parallel x_k - a \parallel$$
>
> *olur. Önerme 6.1 gereği sağ taraf 0'a yakınsar. Sıfır dizisiyle karşılaştırma (bkz. Analiz 1) gereği $\parallel x_k \parallel - \parallel a \parallel \to 0$, yani $\parallel x_k \parallel \to \parallel a \parallel$. (Başka bir yol: 3 gereği $\parallel x_k \parallel^2 = \langle x_k, x_k\rangle$ dizisi $\langle a, a\rangle = \parallel a \parallel^2$ sayısına yakınsar, sonra kök alınır; bkz. Analiz 1.)*
> ***5.*** *$\lambda_k \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ olduğundan bölüm kuralı gereği $\frac{1}{\lambda_k} \to \frac{1}{\lambda}$'dır. 2'yi $\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$ reel dizisine uygularız.*
> ***6.*** *Vektörel çarpımın tanımı (Tanım 2.10) gereği $x_k \times y_k$ vektörünün bileşenleri*
>
> $$x_k^{(2)}y_k^{(3)} - x_k^{(3)}y_k^{(2)}, \qquad x_k^{(3)}y_k^{(1)} - x_k^{(1)}y_k^{(3)}, \qquad x_k^{(1)}y_k^{(2)} - x_k^{(2)}y_k^{(1)}$$
>
> *reel dizileridir. Çarpım ve fark kuralları gereği bunlar sırasıyla $a_2b_3 - a_3b_2$, $a_3b_1 - a_1b_3$ ve $a_1b_2 - a_2b_1$ sayılarına, yani $a \times b$ vektörünün bileşenlerine yakınsar. Yeterlilik yönüyle $x_k \times y_k \to a \times b$.* ■

1 ve 2 birlikte fark kuralını da verir: $x_k - y_k = x_k + (-1)\,y_k \to a - b$. $\mathbb{R}^n$'de iki vektörün bölümü tanımlı olmadığından reel dizilerdeki bölüm kuralının karşılığı yalnız skalere bölmedir.
4'ün tersi doğru değildir. $x_k = \big((-1)^k, 0\big)$ için $\parallel x_k \parallel = 1 \to 1$'dir ama dizi ıraksaktır, çünkü birinci bileşeni ıraksaktır. Tek istisna limitin 0 olduğu durumdur: Önerme 6.1 gereği $x_k \to 0$ ile $\parallel x_k - 0 \parallel = \parallel x_k \parallel \to 0$ aynı şeydir.

Örnek 6.10 (Vektörel Çarpımın Limiti). $\mathbb{R}^3$'te $x_k = \left(\frac{1}{k}, 1, 2 - \frac{1}{k}\right)$ ve $y_k = \left(\frac{k}{k+1}, -\frac{1}{k}, 1\right)$ olsun. $(x_k \times y_k)$ dizisinin limitini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Teoremle. Koordinat yakınsaklıkla $x_k \to a = (0,1,2)$ ve $y_k \to b = (1,0,1)$'dir. Teorem 6.4 teoreminin 6. maddesi gereği

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(x_k \times y_k) = a \times b &= \big(\ 1\cdot 1 - 2\cdot 0,\ 2\cdot 1 - 0\cdot 1,\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1\ \big)\\ &= (1,2,-1)\end{aligned}$$

olur.
Doğrudan hesapla sağlama. Vektörel çarpımın bileşenlerini önce hesaplayıp sonra limit alalım:

$$x_k^{(2)}y_k^{(3)} - x_k^{(3)}y_k^{(2)} = 1 - \left(2-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2} \to 1,$$

$$x_k^{(3)}y_k^{(1)} - x_k^{(1)}y_k^{(3)} = \left(2-\frac{1}{k}\right)\frac{k}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{2k-1}{k+1} - \frac{1}{k} \to 2,$$

$$x_k^{(1)}y_k^{(2)} - x_k^{(2)}y_k^{(1)} = \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k}\right) - \frac{k}{k+1} = -\frac{1}{k^2} - \frac{k}{k+1} \to -1.$$

Sonuç aynıdır. Aynı yolla iç çarpım için

$$\langle x_k, y_k\rangle \to \langle a, b\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2$$

bulunur. ■

i Monotonluk $\mathbb{R}^n$'ye taşınmaz

Reel dizilerde "sınırlı ve monoton her dizi yakınsaktır" teoremi, yakınsaklığı limiti bilmeden göstermenin temel aracıydı (bkz. Analiz 1). Bu teorem reel sayılardaki $\le$ sıralamasına dayanır. $n \ge 2$ iken $\mathbb{R}^n$'nin noktaları arasında bu rolü oynayan doğal bir sıralama yoktur; örneğin $(1,0)$ ile $(0,1)$ noktalarından hangisinin "büyük" olduğu sorusunun geometrik bir anlamı yoktur. Bu yüzden monoton dizi kavramı $\mathbb{R}$'ye özgüdür ve $\mathbb{R}^n$'de kullanılmaz.
Bir $\mathbb{R}^n$ dizisinin bileşen dizileri ise reel dizilerdir ve tek tek monoton olabilir. Bütün bileşen dizileri monoton ve sınırlıysa her biri yakınsar ve Teorem 6.3 gereği dizinin kendisi de yakınsar. Genel sınırlı dizilerde monotonluğun yerini, bir sonraki bölümde göreceğimiz diziler için Bolzano–Weierstrass teoremi alır.

6.7 Limit ve Yığılma Noktası

Bir dizinin limiti ile görüntü kümesinin yığılma noktaları (Tanım 3.4) arasında yakın bir ilişki vardır. İkisi arasındaki tek fark, belli bir yerden sonra sabitleşen dizilerden gelir.

Tanım 6.6 (Durağan Dizi). Öyle bir $N \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ varsa ki $k \ge N$ olan her k için $x_k = a$ oluyorsa (x_k) dizisine **durağan** (durgun) dizi denir.

Yani durağan bir dizinin terimleri belli bir indisten sonra hep aynı noktadır. Böyle bir dizi a noktasına yakınsar, çünkü $k \ge N$ için $\| x_k - a \| = 0 < \varepsilon$ olur. Sabit diziler durağandır.

Önerme 6.2 (Limit ve Yığılma Noktası). *(x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi, $S = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ görüntü kümesi ve $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ olsun. O zaman aşağıdaki iki durumdan biri ve yalnız biri gerçekleşir:*

1. *a, S kümesinin bir yığılma noktasıdır, yani $a \in S'$.*
2. *(x_k) dizisi durağandır: $k \ge N$ iken $x_k = a$ olacak bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.*

İspat.
İkisi birden gerçekleşmez. *2 doğru olsun. O zaman $S \subseteq \{x_1, \dots, x_{N-1}, a\}$ sonlu bir kümedir. $F = \{x_1, \dots, x_{N-1}\} \setminus \{a\}$ diyelim. $F = \varnothing$ ise $r = 1$, değilse $r = \min\{\| x - a \| : x \in F\}$ alalım; sonlu sayıda*

 CC BY-NC-SA 4.0

pozitif sayının en küçüğü olarak $r > 0$'dır. $B(a,r)$ yuvarı S kümesinin a'dan farklı hiçbir noktasını içermez. Dolayısıyla a, S kümesinin yığılma noktası değildir; 1 yanlıştır.
Biri mutlaka gerçekleşir. *2 yanlış olsun: her $N \in \mathbb{N}$ için $x_k \neq a$ olan bir $k \geq N$ vardır. $a \in S'$ olduğunu gösterelim. $r > 0$ verilsin. $x_k \to a$ olduğundan $k \geq N$ iken $\| x_k - a \| < r$ olacak bir N vardır. Varsayım gereği bu N için $x_k \neq a$ olan bir $k \geq N$ seçebiliriz. Bu x_k noktası S kümesindedir, a'dan farklıdır ve $B(a,r)$ yuvarının içindedir. $r > 0$ keyfi olduğundan a merkezli her açık yuvar S kümesinin a'dan farklı bir noktasını içerir; yani $a \in S'$.* ■

İki durumu birer örnekle görelim. $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ dizisi $(0,0)$ noktasına yakınsar ve durağan değildir; $(0,0)$ noktası, görüntü kümesine ait olmadığı hâlde bu kümenin yığılma noktasıdır. Öte yandan $x_1 = (5,5)$ ve $k \geq 2$ için $x_k = (0,0)$ olan dizi durağandır ve $(0,0)$ noktasına yakınsar; görüntü kümesi iki noktalı $\{(5,5),(0,0)\}$ kümesidir ve hiç yığılma noktası yoktur.
Önermenin tersi doğru değildir: görüntü kümesinin bir yığılma noktası dizinin limiti olmak zorunda değildir. $x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{2^k}\right)$ dizisinde çift indisli terimler $x_{2m} = \left(1, \frac{1}{4^m}\right)$ biçimindedir; bunlar $(1,0)$ noktasından farklıdır ve ona keyfi yakındır. Dolayısıyla $(1,0)$ noktası görüntü kümesinin bir yığılma noktasıdır, ama dizi ıraksaktır (Örnek 6.2). Bir dizinin terimlerinden seçilen ve böyle bir noktaya yakınsayan "parçalar", yani alt diziler, bir sonraki bölümün konusudur.

6.8 Alıştırmalar

İlk üç alıştırmada yakınsaklık doğrudan tanımla, sonrakilerde koordinat yakınsaklık ve bölümün öbür sonuçlarıyla incelenir.

Alıştırma 6.1 (Tanımla Yakınsaklık: Kesirli Bileşenler). Yakınsaklık tanımını kullanarak $x_k = \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k^2}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Aday limit. $\frac{1}{k} \to 0$ ve $1 - \frac{1}{k^2} \to 1$ olduğundan aday nokta $a = (0,1)$'dir.
Uzaklık. $k \geq 1$ için $k^4 \geq k^2$, yani $\frac{1}{k^4} \leq \frac{1}{k^2}$ olduğundan

$$\| x_k - (0,1) \| = \| \left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k^2}\right) \| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} \leq \sqrt{\frac{2}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k}$$

olur.
Eşik. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ alalım; $N_\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$'dur. $k \geq N_\varepsilon$ için

$$\| x_k - (0,1) \| \leq \frac{\sqrt{2}}{k} \leq \frac{\sqrt{2}}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $x_k \to (0,1)$. ■

Alıştırma 6.2 (Tanımla Yakınsaklık: Sınırlı Çarpan). Yakınsaklık tanımını kullanarak $x_k = \left(\frac{k}{k+1}, \frac{\sin(k^3)}{k}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Aday limit. $\frac{k}{k+1} \to 1$'dir. $|\sin(k^3)| \leq 1$ olduğundan $\left|\frac{\sin(k^3)}{k}\right| \leq \frac{1}{k}$ ve sıkıştırma teoremiyle ikinci bileşen 0'a yakınsar. Aday nokta $a = (1,0)$'dır.
Uzaklık. $\frac{k}{k+1} - 1 = -\frac{1}{k+1}$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| x_k - (1,0) \|^2 = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{\sin^2(k^3)}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{2}{k^2}$$

olur; yani $\| x_k - (1,0) \| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{k}$.

Eşik. $\varepsilon > 0$ için $N_\varepsilon = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ alalım. $k \geq N_\varepsilon$ için

$$\| x_k - (1,0) \| \leq \frac{\sqrt{2}}{k} \leq \frac{\sqrt{2}}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $x_k \to (1,0)$. ■

Alıştırma 6.3 (Tanımla Yakınsaklık: Logaritma Farkı). Yakınsaklık tanımını kullanarak $x_k = \left(\ln(k+1) - \ln k, \dfrac{1}{2^k} \right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Aday limit. $\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ ve $\ln$ sürekli olduğundan birinci bileşen $\ln 1 = 0$'a, ikinci bileşen de 0'a yakınsar. Aday nokta $a = (0,0)$'dır. Tanımı kullanmak için bu gözlem yetmez; bileşenleri k cinsinden açıkça sınırlamalıyız.

Birinci bileşen. $\ln$ fonksiyonuna $[k, k+1]$ aralığında ortalama değer teoremini uygulayalım (bkz. Analiz 2): $(\ln t)' = \dfrac{1}{t}$ olduğundan

$$\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c_k} \big((k+1) - k \big) = \frac{1}{c_k}$$

olacak bir $c_k \in (k, k+1)$ vardır. $c_k > k$ olduğundan $0 < \ln(k+1) - \ln k < \dfrac{1}{k}$ olur.

İkinci bileşen. Bernoulli eşitsizliğiyle (bkz. Analiz 1) $2^k = (1+1)^k \geq 1 + k > k$, dolayısıyla $0 < \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{1}{k}$,'dır.

Uzaklık ve eşik. İki sınırı birleştirirsek

$$\| x_k - (0,0) \| = \sqrt{\big(\ln(k+1) - \ln k\big)^2 + \frac{1}{4^k}} < \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k}$$

olur. $\varepsilon > 0$ için $N_\varepsilon = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ alırsak $k \geq N_\varepsilon$ iken $\| x_k \| < \dfrac{\sqrt{2}}{k} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla $x_k \to (0,0)$. ■

Alıştırma 6.4 (Sınırsız Rasyonel Bileşen). $x_k = \left(\dfrac{k^3 + 3k - 10}{2k^2 + 1}, \dfrac{1}{3^k} \right)$ dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

Birinci bileşende payı paydaya bölelim:

$$k^3 + 3k - 10 = (2k^2 + 1) \cdot \frac{k}{2} + \left(\frac{5k}{2} - 10 \right)$$

olduğundan

$$\frac{k^3 + 3k - 10}{2k^2 + 1} = \frac{k}{2} + \frac{5k - 20}{2\,(2k^2 + 1)}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $k \geq 4$ için ikinci terim negatif değildir; bu k'lar için birinci bileşen en az $\frac{k}{2}$'dir. Dolayısıyla birinci bileşen dizisi sınırsızdır ve $\mathbb{R}$'de ıraksaktır (bkz. Analiz 1). İkinci bileşen $\frac{1}{3^k} \to 0$ olsa da Sonuç 6.2 gereği (x_k) dizisi ıraksaktır. ■

Alıştırma 6.5 (Karekök Bileşenli Dizi). $x_k = \left(\sqrt{k},\ \sqrt[k]{k},\ \frac{1}{k}\right)$ dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
İkinci ve üçüncü bileşenler yakınsaktır: $\sqrt[k]{k} \to 1$ (bkz. Analiz 1) ve $\frac{1}{k} \to 0$. Ama birinci bileşen sınırsızdır: $M > 0$ verildiğinde $k > M^2$ olan her k için $\sqrt{k} > M$ olur. Dolayısıyla $(\sqrt{k})$ ıraksaktır ve Sonuç 6.2 gereği (x_k) dizisi ıraksaktır.
Aynı sonuç sınırlılıktan da çıkar: (1) gereği $\| x_k \| \geq \sqrt{k}$ olduğundan dizi sınırsızdır ve Sonuç 6.1 gereği ıraksaktır. ■

Alıştırma 6.6 (İlk Terimi Tanımsız Bir Dizi). $k \geq 2$ için $x_k = \left(\frac{k^2-k}{k-\sqrt{k}},\ \frac{1-k}{1+k^2},\ e^{-k}\right)$ dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
$k = 1$ için birinci bileşenin paydası 0 olduğundan dizi $k = 2$'den başlatılmıştır. Yakınsaklık yalnız yeterince büyük k'lara bağlı olduğundan bu bir şey değiştirmez. Kesin olmak için $y_k = x_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ dizisine bakabiliriz; iki dizi aynı terimleri aynı sırayla içerdiğinden biri yakınsaksa öbürü de aynı limite yakınsar.
Birinci bileşeni sadeleştirelim. $k - 1 = (\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)$ olduğundan

$$\frac{k^2-k}{k-\sqrt{k}} = \frac{k\,(\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)}{\sqrt{k}\,(\sqrt{k}-1)} = \sqrt{k}\,(\sqrt{k}+1) = k + \sqrt{k}$$

olur ($k \geq 2$ için $\sqrt{k} - 1 \neq 0$). Birinci bileşen $k + \sqrt{k} \geq k$ olduğundan sınırsızdır ve $\mathbb{R}$'de ıraksaktır. Öbür iki bileşen 0'a yakınsasa da ($\frac{1-k}{1+k^2} = \frac{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+1} \to 0$ ve $e^{-k} \to 0$) Sonuç 6.2 gereği dizi ıraksaktır. ■

Alıştırma 6.7 (Dört Adımda Bir Tekrarlanan Bileşen). $x_k = \left(1,\ \sin\frac{k\pi}{2},\ \cos\frac{1}{k}\right)$ dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
Birinci bileşen sabit 1 dizisidir. cos sürekli olduğundan üçüncü bileşen $\cos\frac{1}{k} \to \cos 0 = 1$ olur.
İkinci bileşen $s_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ dizisinin terimleri $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ biçimindedir: her $m \geq 0$ için

$$s_{4m+1} = \sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad s_{4m+3} = \sin\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

olur. (s_k) dizisinin bir s sayısına yakınsadığını varsayalım. $\varepsilon = 1$ için $k \geq N$ iken $| s_k - s | < 1$ olacak bir N vardır. $4N+1$ ve $4N+3$ indisleri N'den büyüktür; üçgen eşitsizliğiyle

$$2 = | s_{4N+1} - s_{4N+3} | \leq | s_{4N+1} - s | + | s - s_{4N+3} | < 1 + 1 = 2$$

çelişkisi çıkar. Demek ki ikinci bileşen ıraksaktır ve Sonuç 6.2 gereği (x_k) dizisi ıraksaktır.
Karşılaştırma için: ikinci bileşen $\sin(\pi k)$ olsaydı, bu dizi sabit 0 olacağından dizi $(1, 0, 1)$ noktasına yakınsardı (bkz. Tablo 6.1). ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 6.8 (Sınırlı Kuvvet Bölü k). $x_k = \left(\dfrac{(\sin k)^k}{k}, \dfrac{1}{k^2} \right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.
$|\sin k| \leq 1$ olduğundan $|(\sin k)^k| = |\sin k|^k \leq 1$ ve

$$\left| \frac{(\sin k)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{k}$$

olur. $\dfrac{1}{k} \to 0$ olduğundan sıfır dizisiyle karşılaştırma gereği (bkz. Analiz 1) birinci bileşen 0'a yakınsar. $((\sin k)^k)$ dizisinin kendisinin yakınsak olup olmadığını bilmemize gerek yoktur. İkinci bileşen $\dfrac{1}{k^2} \to 0$'dır. Teorem 6.3 gereği $x_k \to (0, 0)$. ■

Alıştırma 6.9 (Kök Farkı ve k-inci Kök). $x_k = \left(k - \sqrt{k^2 + k},\ \sqrt[k]{k},\ \dfrac{1}{k} \right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.
Birinci bileşen. Eşleniğiyle genişletelim:

$$k - \sqrt{k^2 + k} = \frac{k^2 - (k^2 + k)}{k + \sqrt{k^2 + k}} = \frac{-k}{k + \sqrt{k^2 + k}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}}.$$

$1 + \dfrac{1}{k} \to 1$ olduğundan kök alma kuralıyla (bkz. Analiz 1) $\sqrt{1 + \frac{1}{k}} \to 1$ ve birinci bileşen $\dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$ sayısına yakınsar.
Öbür bileşenler. $\sqrt[k]{k} \to 1$ (bkz. Analiz 1) ve $\dfrac{1}{k} \to 0$'dır.
Teorem 6.3 gereği $x_k \to \left(-\dfrac{1}{2}, 1, 0 \right)$. ■

Alıştırma 6.10 (Eşlenikle Limit: Artı İşaretli Kök). $\mathbb{R}^2$'de

$$x_k = \left(\frac{2k^2 + 1}{(k^2 + 3k - 1)^3},\ \frac{2k - \sqrt{4k^2 + 1}}{\sqrt{k^2 + 3} - k} \right)$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.
Birinci bileşen. $k \geq 1$ için $k^2 + 3k - 1 \geq 3$ olduğundan payda sıfır olmaz. Pay ve paydayı k^6'ya bölelim; $(k^2 + 3k - 1)^3 = k^6 \left(1 + \dfrac{3}{k} - \dfrac{1}{k^2} \right)^3$ olduğundan

$$\frac{2k^2 + 1}{(k^2 + 3k - 1)^3} = \frac{\frac{2}{k^4} + \frac{1}{k^6}}{\left(1 + \frac{3}{k} - \frac{1}{k^2}\right)^3} \to \frac{0}{1} = 0$$

olur.
İkinci bileşen. Pay ve paydayı ayrı ayrı eşlenikleriyle genişletelim:

$$2k - \sqrt{4k^2 + 1} = \frac{4k^2 - (4k^2 + 1)}{2k + \sqrt{4k^2 + 1}} = \frac{-1}{2k + \sqrt{4k^2 + 1}},$$

$$\sqrt{k^2 + 3} - k = \frac{(k^2 + 3) - k^2}{\sqrt{k^2 + 3} + k} = \frac{3}{\sqrt{k^2 + 3} + k}.$$

Bölüp pay ve paydayı k'ya bölersek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{2k-\sqrt{4k^2+1}}{\sqrt{k^2+3}-k} = -\frac{\sqrt{k^2+3}+k}{3\left(2k+\sqrt{4k^2+1}\right)} = -\frac{\sqrt{1+\frac{3}{k^2}}+1}{3\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{k^2}}\right)}$$

olur. Kök alma kuralıyla $\sqrt{1+\frac{3}{k^2}} \to 1$ ve $\sqrt{4+\frac{1}{k^2}} \to 2$; ikinci bileşen

$$-\frac{1+1}{3\,(2+2)} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

sayısına yakınsar. Teorem 6.3 gereği $x_k \to \left(0, -\frac{1}{6}\right)$. ■

Alıştırma 6.11 (Eşlenikle Limit: Eksi İşaretli Kök). $\mathbb{R}^2$'de

$$x_k = \left(\frac{1-k-k^3}{(3k+1)^3}, \frac{2k-\sqrt{4k^2-1}}{\sqrt{k^2+3}-k}\right)$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.
Birinci bileşen. Pay ve paydayı k^3'e bölelim; $(3k+1)^3 = k^3\left(3+\frac{1}{k}\right)^3$ olduğundan

$$\frac{1-k-k^3}{(3k+1)^3} = \frac{\frac{1}{k^3}-\frac{1}{k^2}-1}{\left(3+\frac{1}{k}\right)^3} \to \frac{-1}{27}$$

olur.
İkinci bileşen. Bu kez payın eşleniği pozitif bir kesir verir:

$$2k-\sqrt{4k^2-1} = \frac{4k^2-(4k^2-1)}{2k+\sqrt{4k^2-1}} = \frac{1}{2k+\sqrt{4k^2-1}}.$$

Payda için önceki alıştırmadaki gibi $\sqrt{k^2+3}-k = \dfrac{3}{\sqrt{k^2+3}+k}$'dır. Bölüp pay ve paydayı k'ya bölersek

$$\frac{2k-\sqrt{4k^2-1}}{\sqrt{k^2+3}-k} = \frac{\sqrt{1+\frac{3}{k^2}}+1}{3\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{k^2}}\right)} \to \frac{1+1}{3\,(2+2)} = \frac{1}{6}$$

olur. Teorem 6.3 gereği $x_k \to \left(-\frac{1}{27}, \frac{1}{6}\right)$. ■

Alıştırma 6.12 (Logaritmalı ve Köklü Bileşenler). $\mathbb{R}^2$'de

$$x_k = \left(\ln\left[\left(\frac{k+3}{k}\right)^{k+3}\right], \sqrt{k^2+3k}-k\right)$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.
Birinci bileşen. Logaritmanın içindeki diziyi iki çarpana ayıralım:

$$u_k = \left(1+\frac{3}{k}\right)^{k+3} = \left(1+\frac{3}{k}\right)^{k} \cdot \left(1+\frac{3}{k}\right)^{3}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Üstel fonksiyonun limit tanımı gereği (bkz. Analiz 1) birinci çarpan e^3'e yakınsar. $1+\dfrac{3}{k}\to 1$ olduğundan ikinci çarpan $1^3=1$'e yakınsar. Çarpım kuralıyla $u_k\to e^3$ olur. ln fonksiyonu türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir (bkz. Analiz 2 ve Analiz 2). Süreklilik için dizisel ölçüt gereği

$$\ln u_k \to \ln e^3 = 3$$

olur (bkz. Analiz 1).
İkinci bileşen. Eşleniğiyle genişletip pay ve paydayı k'ya bölelim:

$$\sqrt{k^2+3k}-k=\frac{3k}{\sqrt{k^2+3k}+k}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{k}}+1}\to\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Teorem 6.3 gereği $x_k\to\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$. ■

Alıştırma 6.13 (Farkı Sıfıra Giden İki Dizi). (x_k) ve (y_k), $\mathbb{R}^n$'de iki dizi olsun ve $\lim_{k\to\infty}\| x_k-y_k\|=0$ olsun. (x_k) yakınsaksa (y_k) dizisinin de yakınsak olduğunu ve iki dizinin limitinin aynı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x_k\to a$ olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin.

- $x_k\to a$ olduğundan $k\geq N_1$ iken $\| x_k-a\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ olacak bir N_1 vardır.
- $(\| x_k-y_k\|)$ reel dizisi 0'a yakınsadığından $k\geq N_2$ iken $\big|\,\| x_k-y_k\|-0\,\big|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, yani $\| x_k-y_k\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ olacak bir N_2 vardır.

$N_\varepsilon=\max\{N_1,N_2\}$ alalım. $k\geq N_\varepsilon$ için üçgen eşitsizliğinden

$$\| y_k-a\|=\text{parallel}(y_k-x_k)+(x_k-a)\text{parallel}\leq\| x_k-y_k\|+\| x_k-a\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olur (burada $\| y_k-x_k\|=\| x_k-y_k\|$ kullanıldı). Dolayısıyla $y_k\to a$.
Aynı sonuç cebirsel işlemlerden de çıkar: Önerme 6.1 gereği $y_k-x_k\to 0$'dır ve Teorem 6.4 teoreminin toplam kuralıyla $y_k=x_k+(y_k-x_k)\to a+0=a$ olur. ■

Alıştırma 6.14 (Yakınsak Dizi ve Limitinden Oluşan Küme). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $x_k\to a$ olsun. $K=\{x_k:k\in\mathbb{N}\}\cup\{a\}$ kümesinin kompakt olduğunu açık örtü tanımıyla gösteriniz.

Çözüm.
Kompaktlık tanımını (Tanım 5.2) doğrudan kullanalım. $\{U_i\}_{i\in I}$, K kümesinin açık kümelerden oluşan keyfi bir örtüsü olsun (Tanım 5.1). Sonlu bir alt örtü bulacağız.
Limiti örten küme. $a\in K$ olduğundan $a\in U_{i_0}$ olacak bir $i_0\in I$ vardır. U_{i_0} açık olduğundan $B(a,r)\subseteq U_{i_0}$ olacak bir $r>0$ vardır (Tanım 3.2).
Kuyruk. $x_k\to a$ olduğundan $k\geq N$ iken $\| x_k-a\|<r$, yani $x_k\in B(a,r)\subseteq U_{i_0}$ olacak bir $N\in\mathbb{N}$ vardır. Demek ki tek başına U_{i_0} kümesi, a noktasını ve $k\geq N$ olan bütün terimleri örter.
Geriye kalan sonlu terimler. Geriye en çok $x_1,\ldots,x_{N-1}$ terimleri kalır. Her $k=1,\ldots,N-1$ için $x_k\in U_{i_k}$ olacak bir $i_k\in I$ seçelim.
O zaman $\left\{U_{i_0},U_{i_1},\ldots,U_{i_{N-1}}\right\}$ ailesi sonludur ve K kümesini örter ($N=1$ ise yalnız U_{i_0} yeter). Her açık örtünün sonlu bir alt örtüsü bulunduğundan K kompakttır. Özel olarak Teorem 5.2 ve Teorem 5.1 gereği K kapalı ve sınırlıdır. ■

Bu bölümde $\mathbb{R}^n$'deki yakınsaklığın bileşenlerin yakınsaklığına indirgendiğini ve limitin vektör işlemleriyle uyumlu olduğunu gördük. Sınırlı her dizinin yakınsak olmadığını da gördük; ama sınırlı bir dizinin terimleri arasından her zaman yakınsak bir alt dizi seçilebilir. Alt Diziler ve Cauchy Dizileri bölümünde alt dizileri, diziler için Bolzano–Weierstrass teoremini, kapalı ve kompakt kümelerin dizilerle belirlenmesini ve limiti bilinmeden yakınsaklığı sınayan Cauchy ölçütünü inceliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Alt Diziler ve Cauchy Dizileri

Tek değişkenli analizde alt diziler, Bolzano–Weierstrass teoremi ve Cauchy dizileri birlikte çalışan üç araçtı: sınırlı bir dizi yakınsak olmasa bile içinde yakınsak bir alt dizi saklar (bkz. Analiz 1), Cauchy koşulu ise limiti bilmeden yakınsaklığa karar vermeyi sağlar (bkz. Analiz 1). $\mathbb{R}^n$'de Diziler ve Yakınsaklık bölümünde $\mathbb{R}^n$'de bir dizinin yakınsaklığının bileşenlerinin yakınsaklığına indirgendiğini gördük (Teorem 6.3). Bu bölümde aynı üç aracı $\mathbb{R}^n$'ye taşıyoruz. Tanımlarda mutlak değerin yerini Öklid normu alır; ispatlar ise ya doğrudan normla ya da bileşenlere inerek yürür.
Bölümün asıl kazancı, önceki bölümlerde açık yuvarlar ve açık örtülerle kurduğumuz topolojik kavramların dizilerle yeniden okunmasıdır. Kapalı bir küme, içindeki yakınsak dizilerin limitlerini de içeren kümedir; kompakt bir küme ise içindeki her dizinin, kümede yakınsayan bir alt dizisi bulunan kümedir. Bu dizisel betimlemeler, sonraki bölümlerde fonksiyonların limitini ve sürekliliğini incelerken en sık başvuracağımız araçlar olacak.

7.1 Alt Diziler

Bir diziden sonsuz tane terimi sırayı bozmadan seçerek yeni bir dizi elde ederiz; $\mathbb{R}^n$'de tanım, reel dizilerdekiyle aynıdır (bkz. Analiz 1).

Tanım 7.1 (Alt Dizi). $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kesin artan bir doğal sayı dizisi olsun:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_j < k_{j+1} < \cdots.$$

j-inci terimi x_{k_j} olan $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ dizisine (x_k) dizisinin bir **alt dizisi** denir.

Yani alt dizinin j-inci terimi, ana dizinin k_j-inci terimidir. Diziyi $k \mapsto x_k$ kuralıyla $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}^n$'ye, indis dizisini de $j \mapsto k_j$ kuralıyla $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden birer fonksiyon olarak düşünürsek alt dizi bu iki fonksiyonun bileşkesidir:

$$j \mapsto k_j \mapsto x_{k_j}.$$

İndisler kesin arttığı için her j için $k_j \geq j$ olur: ilk seçilen indis en az 1, ondan büyük olan ikincisi en az 2'dir ve bu böyle sürer (tümevarımla ispatı için bkz. Analiz 1). Özel olarak $j \to \infty$ iken $k_j \to \infty$ olur; alt dizi de ana dizi gibi sonsuza doğru ilerler, yalnızca bazı terimleri atlar.
Alt dizi seçmenin bir başka yolu, **sonsuz bir indis kümesi** seçmektir. Sonsuz bir $I \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin elemanlarını küçükten büyüğe sıralayalım: $k_1 = \min I$ olsun ve her j için k_{j+1}, I kümesinin k_j'den büyük elemanlarının en küçüğü olsun. I sonsuz olduğundan bu elemanlar hiçbir adımda tükenmez ve iyi sıralama ilkesi gereği en küçük eleman her adımda vardır (bkz. Analiz 1). Böylece kesin artan bir (k_j) dizisi, dolayısıyla bir alt dizi elde edilir. Bu gözle bakınca bir alt dizinin alt dizisini seçmek, daha küçük bir sonsuz $J \subseteq I$ indis kümesi seçmektir; dolayısıyla **bir alt dizinin alt dizisi, ana dizinin de bir alt dizisidir.**
Son olarak alt dizilerin bileşenlerine bakalım. $x_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)} \right)$ ise $x_{k_j} = \left(x_{k_j}^{(1)}, \ldots, x_{k_j}^{(n)} \right)$ olur. Yani alt dizinin i-inci bileşen dizisi, ana dizinin i-inci bileşen dizisinin aynı indislerle alınmış alt dizisidir. Bu gözlem, alt dizilerle ilgili soruları Teorem 6.3 yardımıyla reel dizilere indirmemizi sağlar.

Örnek 7.1 (Düzlemde Bir Alt Dizi). $\left(\frac{1}{2j}, 1\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin, genel terimi $x_k = \left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right)$ olan dizinin bir alt dizisi olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Çift indisleri seçelim: $k_j = 2j$. $k_1 = 2 < k_2 = 4 < k_3 = 6 < \cdots$ dizisi kesin artandır. Her j için $(-1)^{2j} = 1$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_{k_j} = x_{2j} = \left(\frac{1}{2j}, (-1)^{2j}\right) = \left(\frac{1}{2j}, 1\right)$$

olur. Verilen dizi, (x_k) dizisinin çift indisli terimlerinden oluşan alt dizidir. ■

Örnek 7.2 (Uzayda Çift İndisli Alt Dizi). $\mathbb{R}^3$'te genel terimi $x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}, (-1)^{3k}\right)$ olan dizinin çift indisli terimlerinden oluşan alt diziyi yazınız ve limitini bulunuz.

Çözüm.
$k_j = 2j$ alalım. $(-1)^{2j} = 1$ ve $3 \cdot 2j = 6j$ çift olduğundan $(-1)^{6j} = 1$ olur. Dolayısıyla

$$x_{2j} = \left(1, \frac{1}{2j}, 1\right)$$

bulunur. Bileşen dizileri sırasıyla sabit 1 dizisi, $\frac{1}{2j} \to 0$ dizisi ve yine sabit 1 dizisidir. Teorem 6.3 gereği

$$\lim_{j\to\infty} x_{2j} = (1, 0, 1).$$

■

Örnek 7.3 (Uzayda Tek İndisli Alt Dizi). $\mathbb{R}^3$'te genel terimi $x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}, (-1)^{3k}\right)$ olan dizinin tek indisli terimlerinden oluşan alt diziyi yazınız ve limitini bulunuz.

Çözüm.
$k_j = 2j - 1$ alalım; $k_1 = 1 < k_2 = 3 < k_3 = 5 < \cdots$ kesin artandır. $2j - 1$ ve $3(2j - 1)$ tek sayılar olduğundan $(-1)^{2j-1} = (-1)^{3(2j-1)} = -1$ olur ve

$$x_{2j-1} = \left(-1, \frac{1}{2j-1}, -1\right)$$

bulunur. $\frac{1}{2j-1} \to 0$ olduğundan Teorem 6.3 gereği

$$\lim_{j\to\infty} x_{2j-1} = (-1, 0, -1).$$

■

7.2 Alt Dizilerin Limiti

Yakınsak bir dizinin terimleri bir yerden sonra limitin çevresindeki her yuvarın içine girer; alt dizinin terimleri bu terimlerin arasından seçildiği için onlar da aynı yuvara girmek zorundadır.

Teorem 7.1 (Alt Dizilerle Yakınsaklık). *(x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. (x_k) dizisinin a'ya yakınsaması için gerek ve yeter koşul, her alt dizisinin a'ya yakınsamasıdır. Özel olarak yakınsak bir dizinin bütün alt dizileri yakınsaktır ve hepsinin limiti dizinin limitidir.*

İspat.
($\Rightarrow$) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ olsun ve (x_{k_j}) herhangi bir alt dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Yakınsaklık tanımı (Tanım 6.3) gereği öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $k \geq N$ olan her k için $\| x_k - a \| < \varepsilon$ olur. Şimdi $j \geq N$ olsun. $k_j \geq j$ olduğundan $k_j \geq N$'dir; eşitsizliği $k = k_j$ için uygularsak

$$\| x_{k_j} - a \| < \varepsilon \qquad (j \geq N)$$

elde ederiz. Bu, $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a$ demektir. Alt dizi için işe yarayan N, ana dizininkiyle aynıdır.

(⇐) Her alt dizi a'ya yakınsasın. $k_j = j$ seçimi kesin artandır ve bu seçimle elde edilen alt dizi (x_k) dizisinin kendisidir. Dolayısıyla (x_k) de a'ya yakınsar. ■

Aynı sonuca bileşenler üzerinden de varılabilir. $x_k \to a$ ise Teorem 6.3 gereği her bileşen dizisi a'nın ilgili bileşenine yakınsar. Reel dizilerde yakınsak dizinin her alt dizisi aynı limite gittiğinden (bkz. Analiz 1) alt dizinin bileşenleri de aynı sayılara yakınsar ve yine Teorem 6.3 ile $x_{k_j} \to a$ bulunur.
Teoremin asıl kullanımı olumsuz yöndedir: bir dizinin ıraksak olduğunu göstermek için tanımla uğraşmak yerine uygun alt diziler bulmak yeter.

Sonuç 7.1 (Alt Dizilerle Iraksaklık). *(x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi olsun.*

1. *(x_k) dizisinin farklı limitlere yakınsayan iki alt dizisi varsa (x_k) ıraksaktır.*
2. *(x_k) dizisinin ıraksak bir alt dizisi varsa (x_k) ıraksaktır.*

İspat.
(1) *(x_{k_j}) alt dizisi p noktasına, (x_{m_j}) alt dizisi q noktasına yakınsasın ve $p \neq q$ olsun. (x_k) bir a noktasına yakınsasaydı Teorem 7.1 gereği iki alt dizi de a'ya yakınsardı. Limitin tekliğinden (Teorem 6.1) $p = a$ ve $q = a$, yani $p = q$ olurdu; bu bir çelişkidir.*
(2) *(x_k) yakınsak olsaydı Teorem 7.1 gereği bütün alt dizileri yakınsak olurdu; ıraksak bir alt dizinin varlığı buna aykırıdır.* ■

Üç adımda alt dizilerle ıraksaklık

1. **Salınımı bul.** Dizinin bir noktaya yerleşmesini engelleyen bileşen belirlenir; $(-1)^k$ gibi işaret değiştiren ya da periyodik çarpanlar çoğu kez ipucudur.
2. **İndis dizilerini seç.** Salınımı sabitleyen iki indis dizisi alınır; çoğu kez $k_j = 2j$ ve $k_j = 2j-1$ yeter, periyodik çarpanlarda periyodun katları alınır.
3. **Limitleri karşılaştır.** Alt dizilerin limitleri Teorem 6.3 ile bileşen bileşen hesaplanır. Limitler farklıysa ya da alt dizilerden biri ıraksaksa Sonuç 7.1 gereği dizi ıraksaktır.

Örnek 7.4 (İki Kollu Bir Düzlem Dizisi). $\mathbb{R}^2$'de genel terimi $x_k = \left((-1)^k, \dfrac{1}{2^k}\right)$ olan dizinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Salınım. İkinci bileşen $\dfrac{1}{2^k} \to 0$ olduğundan sorun yaratmaz; salınan, birinci bileşendeki $(-1)^k$ çarpanıdır.
İndis dizileri. Çift indisler için $k_j = 2j$, tek indisler için $k_j = 2j+1$ alalım:

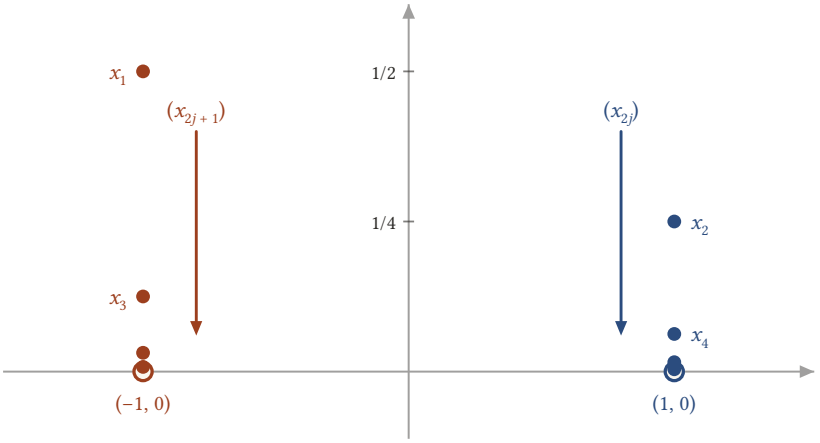
$$x_{2j} = \left(1, \frac{1}{2^{2j}}\right),$$
$$x_{2j+1} = \left(-1, \frac{1}{2^{2j+1}}\right).$$

Limitler. $\dfrac{1}{2^{2j}} \to 0$ ve $\dfrac{1}{2^{2j+1}} \to 0$ olduğundan Teorem 6.3 gereği

$$\lim_{j\to\infty} x_{2j} = (1,0),$$
$$\lim_{j\to\infty} x_{2j+1} = (-1,0)$$

olur. $(1,0) \neq (-1,0)$ olduğundan Sonuç 7.1 gereği (x_k) ıraksaktır. Aynı sonucu Örnek 6.2 içinde yakınsaklık tanımıyla elde etmiştik; alt dizilerle çok daha kısa yoldan ulaştık.
Terimler iki kol hâlinde ilerler: çift indisli terimler $(1,0)$ noktasına, tek indisli terimler $(-1,0)$ noktasına yukarıdan ve her adımda yüksekliği yarıya inerek yaklaşır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.1: $x_k = ((-1)^k, 1/2^k)$ dizisinin ilk 8 terimi iki kol hâlinde ilerler. Çift indisli alt dizi (x_{2j}) (mavi) (1, 0) noktasına, tek indisli alt dizi (x_{2j+1}) (turuncu) (−1, 0) noktasına yaklaşır; yükseklik her adımda yarıya iner. İki alt dizinin limitleri farklı olduğundan dizi ıraksaktır.

■

Örnek 7.2 ve Örnek 7.3 örneklerindeki $\mathbb{R}^3$ dizisi de aynı nedenle ıraksaktır: iki alt dizisi $(1, 0, 1)$ ve $(-1, 0, -1)$ gibi farklı noktalara yakınsar. En basit örnek yine tek değişkenli $\left((-1)^k \right)$ dizisidir; çift indisli terimleri 1'e, tek indisli terimleri -1'e yakınsar.

7.3 Dizinin Yığılma Noktası

Iraksak bir dizinin limiti yoktur, ama terimleri bazı noktaların çevresinde toplanabilir; yukarıdaki örnekte terimler $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$ çevresinde yığılıyordu. Bu noktaları alt dizilerle tanımlıyoruz.

Tanım 7.2 (Dizinin Yığılma Noktası). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. (x_k) dizisinin a'ya yakınsayan bir alt dizisi varsa a'ya (x_k) dizisinin bir **yığılma noktası** denir.

Yani a, dizinin bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak öyle bir (x_{k_j}) alt dizisi vardır ki her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ bulunur ve $j \geq N$ olduğunda $\| x_{k_j} - a \| < \varepsilon$ olur. Bu koşul, "her $\varepsilon > 0$ için $\| x_k - a \| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz çoklukta k indisi vardır" koşuluna denktir; ispatı, reel dizilerdeki ispatta (bkz. Analiz 1) mutlak değer yerine norm yazılarak elde edilir.

Örneğin $x_k = \left((-1)^k, \dfrac{1}{2^k} \right)$ dizisinin yığılma noktaları $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$'dır. Başka yığılma noktası yoktur. Gerçekten, bir (x_{k_j}) alt dizisinin k_j indisleri arasında ya sonsuz çoklukta çift sayı ya da sonsuz çoklukta tek sayı bulunur. İlk durumda yalnız çift k_j indisleriyle alınan terimler hem (x_{k_j}) dizisinin hem de (x_{2j}) dizisinin bir alt dizisini oluşturur ve $(1, 0)$'a gider; ikinci durumda aynı akıl yürütmeyle $(-1, 0)$'a giden bir alt dizi bulunur. (x_{k_j}) yakınsaksa bu alt dizisi de aynı limite gideceğinden (Teorem 7.1) limit bu iki noktadan biridir.

Yakınsak bir dizinin ise tek yığılma noktası vardır, o da limitidir: Teorem 7.1 gereği her alt dizi dizinin limitine yakınsar ve limit tektir (Teorem 6.1). Bunun tersi doğru değildir; tek yığılma noktası olan ıraksak diziler vardır (Alıştırma 7.2). Ama dizi sınırlıysa ters yön de doğrudur (Alıştırma 7.3).

7.4 Diziler için Bolzano–Weierstrass Teoremi

Kümeler için Bolzano–Weierstrass teoremi (Teorem 3.6) sınırlı ve sonsuz her kümenin bir yığılma noktası olduğunu söylüyordu. Şimdi bu sonucu dizilere aktarıyoruz. Köprüyü dizinin görüntü kümesi (Tanım 6.2), yani terimlerinden oluşan $E = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi kurar. Görüntü kümesinde tekrarlar sayılmaz; örneğin $\left((-1)^k \right)$ dizisinin görüntü kümesi $\{-1, 1\}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önce görüntü kümesinin yığılma noktalarının dizinin de yığılma noktası olduğunu gösterelim. Hatırlatalım: a noktası E kümesinin bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için

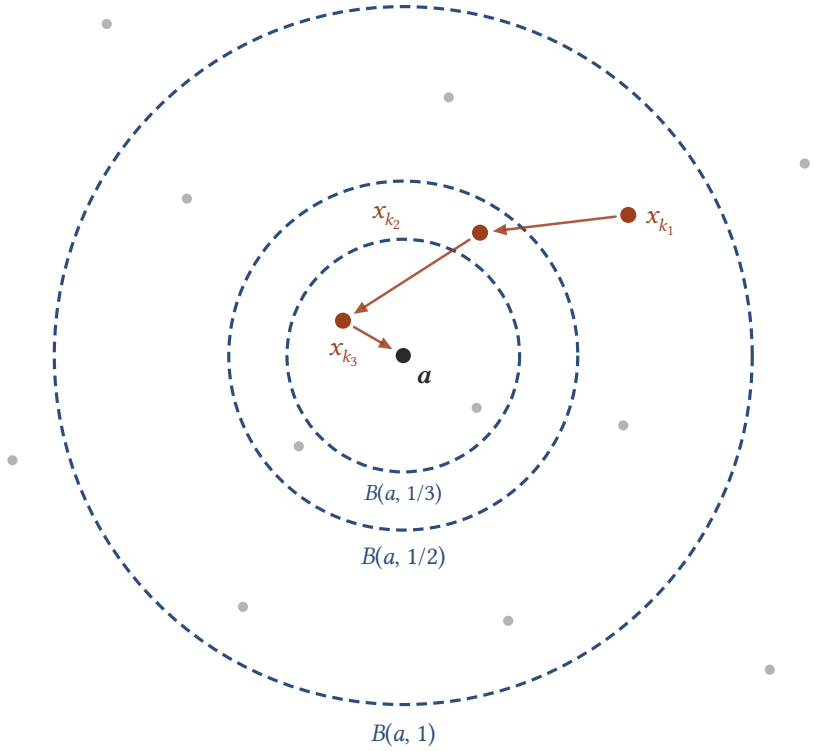
$$\big(\; B(a,\varepsilon) \setminus \{a\} \; \big) \cap E \neq \varnothing$$

olur (Tanım 3.4).

Önerme 7.1 (Görüntü Kümesinin Yığılma Noktaları). *(x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $E = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ görüntü kümesi olsun. $a \in \mathbb{R}^n$ noktası E'nin bir yığılma noktasıysa (x_k) dizisinin a'ya yakınsayan bir alt dizisi vardır; yani a dizinin de bir yığılma noktasıdır.*

> ***İspat.***
> ***Birinci adım: a'nın her yuvarına sonsuz çoklukta indis düşer.*** *$\varepsilon > 0$ için*
>
> $$I_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : 0 < \| \, x_k - a \, \| < \varepsilon\}$$
>
> *indis kümesinin sonsuz olduğunu gösterelim. $x_k \in B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$ olması tam olarak $k \in I_\varepsilon$ olması demektir; a bir yığılma noktası olduğundan I_ε boş değildir. Bir ε için I_ε kümesinin sonlu olduğunu varsayalım ve*
>
> $$\delta = \min\{\| \, x_k - a \, \| : k \in I_\varepsilon\}$$
>
> *diyelim. Sonlu ve boş olmayan bir sayı kümesinin en küçük elemanı vardır; dolayısıyla δ tanımlıdır ve $0 < \delta < \varepsilon$'dur. Şimdi bir x_k terimi $B(a,\delta) \setminus \{a\}$ kümesinde olsaydı $0 < \| \, x_k - a \, \| < \delta < \varepsilon$ olurdu. O zaman $k \in I_\varepsilon$ olur ve δ'nın tanımından $\| \, x_k - a \, \| \geq \delta$ çıkardı; bu bir çelişkidir. Demek ki*
>
> $$\big(\; B(a,\delta) \setminus \{a\} \; \big) \cap E = \varnothing$$
>
> *olur ve bu, a'nın E'nin yığılma noktası olmasına aykırıdır. Sonuç olarak her $\varepsilon > 0$ için I_ε sonsuzdur.*
> ***İkinci adım: indisleri seçmek.*** *I_1 boş olmadığından bir $k_1 \in I_1$ seçelim; $\| \, x_{k_1} - a \, \| < 1$ olur. $k_1 < \cdots < k_j$ seçilmiş olsun. $I_{1/(j+1)}$ sonsuz bir doğal sayı kümesi olduğundan üstten sınırlı değildir; dolayısıyla $k_{j+1} > k_j$ koşulunu sağlayan bir $k_{j+1} \in I_{1/(j+1)}$ vardır. Böylece kesin artan bir (k_j) indis dizisi elde edilir ve her j için*
>
> $$\| \, x_{k_j} - a \, \| < \frac{1}{j}$$
>
> *olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.2: İndislerin seçimi: x_{k_1} *terimi* $B(a, 1)$ *yuvarından,* x_{k_2} $(k_2 > k_1)$ $B(a, 1/2)$ *yuvarından,* x_{k_3} $(k_3 > k_2)$ $B(a, 1/3)$ *yuvarından alınır; hepsi* a*'dan farklıdır. Her yuvara dizinin sonsuz çoklukta terimi düştüğü için seçim hiç tıkanmaz. Gri noktalar dizinin seçilmeyen terimleridir.*

Üçüncü adım: yakınsaklık. $\varepsilon > 0$ *verilsin. Arşimet özelliği gereği* $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *olan bir* $N \in \mathbb{N}$ *vardır (bkz. Analiz 1).* $j \geq N$ *için*

$$\| x_{k_j} - a \| < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

olur. Yani $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a$. ■

Artık teoremi ispatlamaya hazırız.

Teorem 7.2 (Diziler için Bolzano–Weierstrass Teoremi). *$\mathbb{R}^n$'de sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Başka bir deyişle, sınırlı her dizinin en az bir yığılma noktası vardır.*

İspat.
(x_k) sınırlı bir dizi olsun: her k için $\| x_k \| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır (Tanım 6.5). $E = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ görüntü kümesi ya sonludur ya da sonsuzdur.
E sonlu ise. *$E = \{p_1, \ldots, p_r\}$ olsun ve her i için $I_i = \{k \in \mathbb{N} : x_k = p_i\}$ diyelim. Her k indisi bu kümelerden birine düştüğü için*

$$\mathbb{N} = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_r$$

olur. Sonlu tane sonlu kümenin birleşimi sonludur, oysa $\mathbb{N}$ sonsuzdur; demek ki bu kümelerden en az biri, diyelim I_i, sonsuzdur. I_i kümesinin elemanlarını küçükten büyüğe dizerek bir (x_{k_j}) alt dizisi elde ederiz ve her j için $x_{k_j} = p_i$ olur. Sabit dizi yakınsak olduğundan bu alt dizi p_i noktasına yakınsar.

 CC BY-NC-SA 4.0

E sonsuz ise. *E'nin her elemanı $\| x_k \| \leq M$ eşitsizliğini sağladığından E sınırlı bir kümedir (Tanım 3.5). Kümeler için Bolzano–Weierstrass teoremi (Teorem 3.6) gereği E'nin bir $a \in \mathbb{R}^n$ yığılma noktası vardır. Önerme 7.1 gereği (x_k) dizisinin a'ya yakınsayan bir alt dizisi vardır.* ■

Bileşenlerle ikinci ispat.
Teoremi reel dizilerdeki Bolzano–Weierstrass teoreminden (bkz. Analiz 1) de çıkarabiliriz. (x_k) sınırlı olsun: her k için $\| x_k \| \leq M$. Her $i = 1, \ldots, n$ için

$$\left| x_k^{(i)} \right| \leq \| x_k \| \leq M$$

olduğundan bütün bileşen dizileri sınırlı reel dizilerdir. İndis kümesini bileşen bileşen küçülteceğiz.
Birinci bileşen. *$\left(x_k^{(1)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ sınırlı olduğundan yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt dizinin indislerinin oluşturduğu sonsuz kümeye I_1, limitine a_1 diyelim.*
Sonraki bileşenler. *I_i sonsuz indis kümesi seçilmiş olsun ve I_i boyunca ilk i bileşen dizisi sırasıyla $a_1, \ldots, a_i$ sayılarına yakınsasın. I_i boyunca alınan alt dizinin $(i+1)$-inci bileşeni sınırlı bir reel dizidir; yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt dizinin indis kümesine $I_{i+1} \subseteq I_i$, limitine a_{i+1} diyelim. I_{i+1} boyunca ilk i bileşen de aynı limitlere yakınsamaya devam eder; çünkü I_{i+1} boyunca alınan her bileşen dizisi, I_i boyunca alınan yakınsak bileşen dizisinin bir alt dizisidir ve Teorem 7.1 gereği aynı limite gider.*
Sonuç. *n adımın sonunda sonsuz bir I_n indis kümesi elde ederiz. I_n'nin elemanlarını küçükten büyüğe $k_1 < k_2 < \cdots$ diye dizersek her $i = 1, \ldots, n$ için $x_{k_j}^{(i)} \to a_i$ olur. Teorem 6.3 gereği (x_{k_j}) alt dizisi $a = (a_1, \ldots, a_n)$ noktasına yakınsar.* ■

Teorem yakınsak bir alt dizinin **varlığını** söyler; bu alt dizi tek değildir ve farklı alt diziler farklı limitlere gidebilir. Örnek 7.4 örneğindeki sınırlı dizinin biri $(1, 0)$'a, öbürü $(-1, 0)$'a giden iki alt dizisi vardı.
Sınırlılık koşulu atılamaz. $x_k = k\, e_1 = (k, 0, \ldots, 0)$ dizisini düşünelim. Her alt dizi için $\| x_{k_j} \| = k_j \geq j$ olur; yani her alt dizi sınırsızdır. Yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 6.2) bu dizinin hiçbir alt dizisi yakınsak değildir. Öte yandan sınırsız bir dizinin de yakınsak bir alt dizisi olabilir (Alıştırma 7.2); teorem yalnız, sınırlılığın bunu garanti ettiğini söyler.
İspattan şu da çıktı: görüntü kümesinin her yığılma noktası dizinin de yığılma noktasıdır (Önerme 7.1). Tersi doğru değildir. $x_k = \left((-1)^k, 0 \right)$ dizisinin çift ve tek indisli alt dizileri sabittir; dolayısıyla $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$ dizinin yığılma noktalarıdır. Oysa görüntü kümesi iki elemanlı $E = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ kümesidir ve sonlu bir kümenin hiç yığılma noktası yoktur: bir a noktası verildiğinde ε sayısını a'nın E'nin kendisinden farklı noktalarına olan uzaklıklarının en küçüğünden küçük seçersek $B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ kümesi E'nin hiçbir noktasını içermez. Kısacası dizinin yığılma noktası terimleri **indisleriyle** sayar, kümenin yığılma noktası ise yalnız **noktalara** bakar; tekrar eden terimler dizide yığılma yaratır, kümede yaratmaz.

Örnek 7.5 (Tam Değer Fonksiyonuyla Kurulan Bir Dizi). $\lfloor t \rfloor$, t reel sayısının tam değerini (tabanını) göstersin (bkz. Analiz 1). $\mathbb{R}^2$'de

$$x_k = \left(\frac{k}{3} - \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor, \frac{k}{7} - \left\lfloor \frac{k}{7} \right\rfloor \right)$$

dizisinin yakınsak bir alt dizisini bulunuz.

Çözüm.
Varlık. Her t için $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$ olduğundan iki bileşen de $[0, 1)$ aralığındadır; dolayısıyla $\| x_k \| < \sqrt{2}$ ve dizi sınırlıdır. Teorem 7.2 yakınsak bir alt dizinin varlığını garanti eder; şimdi birini açıkça bulalım.
Alt diziyi seçmek. k, 3'ün katıysa birinci bileşen 0 olur; 7'nin katıysa ikinci bileşen 0 olur. İkisini birden sıfırlamak için k'yı $3 \cdot 7 = 21$'in katı seçelim: $k_j = 21j$. $\dfrac{21j}{3} = 7j$ ve $\dfrac{21j}{7} = 3j$ tam sayılar olduğundan

$$x_{21j} = \left(7j - \lfloor 7j \rfloor, 3j - \lfloor 3j \rfloor \right) = (0, 0)$$

olur. (x_{21j}) sabit dizidir ve $(0, 0)$ noktasına yakınsar.
Başka seçimler. Yalnız $k_j = 3j$ almak yetmez: birinci bileşen 0 olur, ama ikinci bileşen

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{3j}{7} - \left\lfloor \frac{3j}{7} \right\rfloor$$

sırasıyla $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 0$ değerlerini alır ve bu yedi değeri döngüyle tekrarlar. 0 ve $\frac{3}{7}$ değerlerinin her birini sonsuz kez aldığından Sonuç 7.1 gereği yakınsamaz.
Dizinin tamamına bakınca durum daha da açıktır. Bir sayıya tam sayı eklemek kesirli kısmını değiştirmez ve

$$\frac{k+21}{3} = \frac{k}{3} + 7,$$
$$\frac{k+21}{7} = \frac{k}{7} + 3$$

olduğundan her k için $x_{k+21} = x_k$ olur. Dizi 21 adımda bir kendini tekrar eder; görüntü kümesi sonludur ve her noktası sonsuz çoklukta indiste alınır. Bu, Bolzano–Weierstrass teoreminin ispatındaki "E sonlu" durumudur. Örneğin $k_j = 21j + 1$ seçimiyle $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$ noktasına yakınsayan sabit bir alt dizi daha bulunur. ■

Örnek 7.6 (Normu Üstten Sınırlı Bir Dizi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\| x_k \| \leq 3$ olsun. (x_k) dizisinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Koşul, dizinin $M = 3$ ile sınırlı olduğunu söyler (Tanım 6.5). Teorem 7.2 gereği sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.
Aynı sonuç olmayana ergiyle de okunabilir. (x_k) dizisinin hiç yakınsak alt dizisi olmasaydı teoremin karşıt tersi gereği dizi sınırsız olurdu; o zaman özel olarak $M = 3$ için $\| x_{k_0} \| > 3$ olan bir k_0 bulunurdu. Bu, her k için $\| x_k \| \leq 3$ olmasıyla çelişir.
Limit hakkında da bir şey söyleyebiliriz. Alt dizi a'ya yakınsıyorsa üçgen eşitsizliğinden her j için

$$\| a \| \leq \| a - x_{k_j} \| + \| x_{k_j} \| \leq \| a - x_{k_j} \| + 3$$

olur. Sağ taraf $j \to \infty$ iken 3'e gittiğinden limitlerde sıralama (bkz. Analiz 1) gereği $\| a \| \leq 3$ bulunur; limit de $B[0,3]$ kapalı yuvarındadır. Bunun genel nedenini bir sonraki başlıkta göreceğiz. Koşul $\| x_k \| \geq 3$ olsaydı sonuç yanlış olurdu (Alıştırma 7.1). ■

7.5 Kapalı Kümelerin Dizilerle Belirlenmesi

Kapalı kümeleri tümleyeni açık olan kümeler olarak tanımlamış (Tanım 3.3) ve yığılma noktalarının hepsini içeren kümeler olarak betimlemiştik (Teorem 3.7). Dizilerle üçüncü bir betimleme veriyoruz: kapalı küme, limit alarak dışına çıkılamayan kümedir. Reel sayılardaki karşılığı için bkz. Analiz 1.

Teorem 7.3 (Kapalı Kümelerin Dizilerle Belirlenmesi). *$F \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. F'nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul şudur: terimleri F'de olan ve $\mathbb{R}^n$'de yakınsak olan her (x_k) dizisinin limiti F'ye aittir.*

İspat.
($\Rightarrow$) F kapalı olsun. (x_k) dizisinin her terimi F'de olsun ve $x_k \to a \in \mathbb{R}^n$ olsun. $a \in F$ olduğunu göstereceğiz. $a \notin F$ olduğunu varsayalım. O zaman $a \in F^c$'dir ve F kapalı olduğundan F^c açıktır; dolayısıyla $B(a,\varepsilon) \subseteq F^c$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. $x_k \to a$ olduğundan bu ε için öyle bir N vardır ki $k \geq N$ için $\| x_k - a \| < \varepsilon$, yani

$$x_k \in B(a,\varepsilon) \subseteq F^c \qquad (k \geq N)$$

olur. Oysa her k için $x_k \in F$'dir. Bu çelişki $a \in F$ olduğunu gösterir.
($\Leftarrow$) Terimleri F'de olan yakınsak her dizinin limiti F'de olsun. F'nin kapalı olmadığını varsayalım. O zaman F^c açık değildir: öyle bir $a \in F^c$ noktası vardır ki hiçbir $r > 0$ için $B(a,r) \subseteq F^c$ olmaz. Başka bir deyişle her $r > 0$ için $B(a,r) \cap F \neq \varnothing$'dir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $r = \frac{1}{k}$ alıp

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap F$$

olacak biçimde bir nokta seçelim. Terimlerin hepsi F'dedir ve $\| x_k - a \| < \frac{1}{k}$*'dır.* $\varepsilon > 0$ *verildiğinde* $N > \frac{1}{\varepsilon}$ *alınırsa* $k \geq N$ *için*

$$\| x_k - a \| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

olur; yani $x_k \to a$*. Varsayım gereği* $a \in F$ *olmalıdır; bu* $a \in F^c$ *olmasıyla çelişir. Demek ki* F *kapalıdır.* ■

Yani kapalı bir kümenin içinde kalarak bir noktaya yaklaşan her dizi, o noktayı da kümenin içinde bulur; kapalı küme limit almaya karşı "kapalıdır". Teorem iki yönde kullanılır. Bir kümenin kapalı olmadığını göstermek için kümeden kaçan tek bir yakınsak dizi yeter; kapalı olduğunu göstermek için ise kümeden alınan keyfi bir yakınsak dizinin limitinin kümede kaldığı gösterilir.

İki adımda kapalı olmadığını gösterme

1. **Aday noktayı bul.** Kümeye ait olmayan ama kümenin noktalarıyla istenildiği kadar yaklaşılabilen bir a noktası aranır; bu nokta çoğu kez tanımdaki kesin eşitsizliğin eşitliğe dönüştüğü kenar üzerindedir.
2. **Diziyi kur.** Terimleri kümede olan ve a'ya yakınsayan bir dizi yazılır; örneğin a'ya $\frac{1}{k}$ adımlarla içeriden yaklaşan noktalar. Teorem 7.3 gereği küme kapalı değildir.

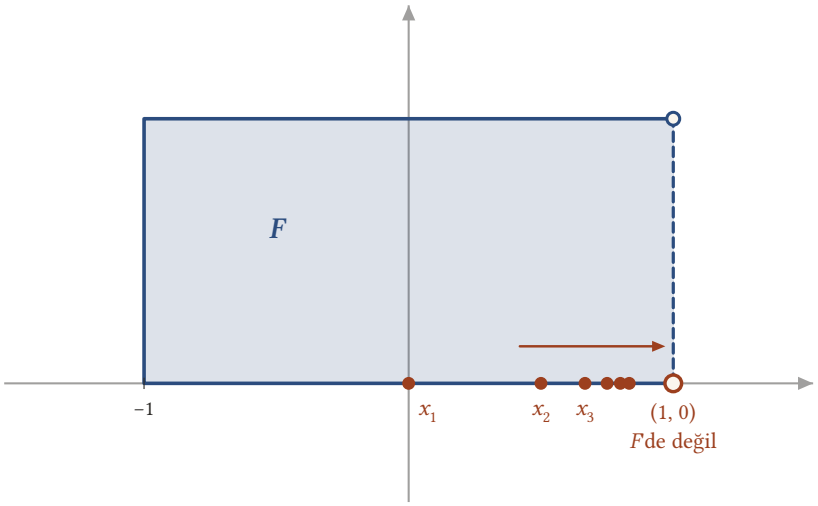
Örnek 7.7 (Bir Kenarı Eksik Dikdörtgen).

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

kümesinin kapalı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Aday nokta. $x < 1$ kesin eşitsizliği, $x = 1$ kenarının F'ye ait olmadığını gösterir. Bu kenardan $a = (1, 0)$ noktasını seçelim; $a \notin F$'dir.
Dizi. $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}, 0\right)$ dizisini alalım. Her k için $0 \leq 1 - \frac{1}{k} < 1$ ve ikinci bileşen $0 \in [0, 1]$ olduğundan $x_k \in F$'dir. Bileşenler $1 - \frac{1}{k} \to 1$ ve $0 \to 0$ olduğundan Teorem 6.3 gereği $x_k \to (1, 0)$ olur. Terimleri F'de olan yakınsak bir dizinin limiti F'de değildir; Teorem 7.3 gereği F kapalı değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.3: $F = [-1, 1) \times [0, 1]$ kümesinin sağ kenarı (kesikli) kümeye ait değildir. $x_k = (1 - 1/k, 0)$ terimlerinin hepsi Fdedir ve $(1, 0)$ noktasına yakınsar; oysa $(1, 0) \notin F$. Bu yüzden F kapalı değildir.

Örnek 3.14 örneğinde benzer bir kümenin kapalı olmadığını, tümleyeninin açık olmadığını göstererek kanıtlamıştık; bunun için sınırdaki bir noktanın her yuvarında kümeye ait bir nokta bulmak gerekiyordu. Dizilerle aynı iş, tek bir dizi yazmakla biter. ■

Teoremin öbür yönüyle bir kümenin kapalı olduğunu da gösterebiliriz; bunun için kümeyi tanımlayan eşitsizlik limite taşınır.

Örnek 7.8 (Parabolün Üstündeki Bölge). $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Terimleri F'de olan ve (a, b) noktasına yakınsayan bir $p_k = (x_k, y_k)$ dizisi alalım. Her k için $y_k \geq x_k^2$'dir. Teorem 6.3 gereği $x_k \to a$ ve $y_k \to b$ olur. Reel dizilerde limit çarpma ve çıkarmayla uyumlu olduğundan (bkz. Analiz 1) $x_k^2 \to a^2$ ve $y_k - x_k^2 \to b - a^2$ bulunur. Her k için $y_k - x_k^2 \geq 0$ olduğundan limitlerde sıralama (bkz. Analiz 1) gereği $b - a^2 \geq 0$, yani $(a, b) \in F$ olur. Yakınsak her dizinin limiti F'de kaldığından Teorem 7.3 gereği F kapalıdır.
Eşitsizliğin kesin olmaması burada kilit rol oynar. $\{(x, y) : y > x^2\}$ kümesi için aynı akıl yürütme çalışmaz, çünkü limit almak kesin eşitsizliği korumaz. Nitekim $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ noktaları $y > x^2$ koşulunu sağlar ama limitleri olan $(0, 0)$ noktası sağlamaz; dolayısıyla bu küme kapalı değildir. ■

7.6 Dizisel Kompaktlık

Kompakt kümeleri açık örtülerle tanımlamış (Tanım 5.2) ve Heine–Borel teoremiyle bunların tam olarak kapalı ve sınırlı kümeler olduğunu görmüştük (Teorem 5.5). Bolzano–Weierstrass teoremi ile kapalı kümelerin dizisel betimlemesi birleşince kompaktlığın dizilerle bir betimlemesi ortaya çıkar.

Teorem 7.4 (Dizisel Kompaktlık Teoremi). *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. K'nın kompakt olması için gerek ve yeter koşul, terimleri K'da olan her dizinin, limiti K'da olan yakınsak bir alt dizisinin bulunmasıdır.*

İspat.
($\Rightarrow$) K kompakt olsun ve (x_k), terimleri K'da olan bir dizi olsun. Heine–Borel teoremi (Teorem 5.5) gereği K kapalı ve sınırlıdır: her $x \in K$ için $\| x \| \leq M$ olan bir M vardır. Terimler K'da olduğundan (x_k) dizisi de sınırlıdır. Teorem 7.2 gereği yakınsak bir (x_{k_j}) alt dizisi vardır; limitine a diyelim. Alt dizinin terimleri K'dadır ve K kapalıdır; Teorem 7.3 gereği $a \in K$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

(⇐) Terimleri K'da olan her dizinin, limiti K'da olan yakınsak bir alt dizisi olsun. Heine–Borel teoremi gereği K'nın sınırlı ve kapalı olduğunu göstermek yeter.
K sınırlıdır. Sınırlı olmadığını varsayalım. O zaman hiçbir $M > 0$ için K'nın bütün noktaları $\| x \| \leq M$ eşitsizliğini sağlamaz; özel olarak her $k \in \mathbb{N}$ için $\| x_k \| > k$ olan bir $x_k \in K$ vardır. Bu dizinin herhangi bir (x_{k_j}) alt dizisi için $\| x_{k_j} \| > k_j \geq j$ olur; yani her alt dizi sınırsızdır. Yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 6.2) hiçbir alt dizi yakınsak değildir. Bu, varsayımla çelişir.
K kapalıdır. Kapalı olmadığını varsayalım. Teorem 7.3 gereği terimleri K'da olan ve K'ya ait olmayan bir a noktasına yakınsayan bir (x_k) dizisi vardır. Varsayım gereği bu dizinin, bir $b \in K$ noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır. Oysa Teorem 7.1 gereği bu alt dizi a'ya da yakınsar ve limitin tekliğinden (Teorem 6.1) $b = a$ bulunur. $b \in K$ ve $a \notin K$ olduğundan bu bir çelişkidir.
K sınırlı ve kapalı olduğundan Teorem 5.5 gereği kompakttır. ■

Yani $\mathbb{R}^n$'de kompaktlık üç denk biçimde ifade edilebilir: kümenin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır; küme kapalı ve sınırlıdır; kümedeki her dizinin, limiti kümede olan yakınsak bir alt dizisi vardır. Son özelliğe **dizisel kompaktlık** denir. Uygulamada dizisel biçim çoğu kez en kullanışlısıdır: kompakt bir kümede bir dizinin "gidebileceği bir yer" her zaman vardır. Reel sayılardaki karşılığı için bkz. Analiz 1. Koşuldaki "limiti K'da olan" ifadesi atılamaz. $K = (0, 1]$ aralığında $\left(\frac{1}{k}\right)$ dizisinin her alt dizisi $\mathbb{R}$'de yakınsaktır, ama limit olan 0 aralığa ait değildir; nitekim $(0, 1]$ kapalı olmadığından kompakt değildir.

Örnek 7.9 (Yakınsak Bir Dizi ile Limitinin Kümesi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ olsun.

$$K = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$$

kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Teorem 7.4 koşulunu doğrulayalım. Terimleri K'da olan keyfi bir $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi alalım; limiti K'da olan yakınsak bir alt dizisini bulmalıyız. İki durum vardır.
Bir nokta sonsuz kez tekrarlanıyorsa. Bir $p \in K$ için $\{j \in \mathbb{N} : y_j = p\}$ indis kümesi sonsuzsa bu indislerle alınan alt dizi sabit p dizisidir ve $p \in K$ noktasına yakınsar.
Hiçbir nokta sonsuz kez tekrarlanmıyorsa. Bu durumda (y_j) dizisinin kendisinin x_0'a yakınsadığını gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x_k \to x_0$ olduğundan $k \geq N$ için $\| x_k - x_0 \| < \varepsilon$ olan bir N vardır. x_0 da $B(x_0, \varepsilon)$ yuvarındadır; demek ki K'nın bu yuvarın dışında kalan noktaları $x_1, \ldots, x_{N-1}$ arasındadır ve sonlu tanedir ($N = 1$ ise hiç yoktur). Bu noktaların her biri (y_j) dizisinde yalnız sonlu kez geçtiğinden

$$J = \{j \in \mathbb{N} : \| y_j - x_0 \| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu tane sonlu kümenin birleşimidir, dolayısıyla sonludur. J'nin bütün elemanlarından büyük bir j_0 seçersek (J boşsa $j_0 = 1$) $j \geq j_0$ için $\| y_j - x_0 \| < \varepsilon$ olur. Yani $y_j \to x_0$ ve $x_0 \in K$'dır; aranan alt dizi dizinin kendisidir.
İki durumda da istenen alt dizi bulunduğundan Teorem 7.4 gereği K kompakttır. Aynı sonucun açık örtü tanımıyla doğrudan ispatı Alıştırma 6.14 çözümündedir. ■

Özel olarak K kapalıdır (Teorem 5.2) ve sınırlıdır (Teorem 5.1). x_0 noktasının kümeye katılması önemlidir: $x_k = \frac{1}{k} e_1$ için $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi kapalı değildir, çünkü terimleri bu kümede olan (x_k) dizisi kümeye ait olmayan 0 noktasına yakınsar.

7.7 Cauchy Dizileri

Yakınsaklık tanımı limiti önceden bilmeyi gerektirir. Cauchy koşulu ise yalnız terimlerin birbirine olan uzaklıklarına bakar; $\mathbb{R}^n$'de bu iki koşulun aynı olduğunu göreceğiz.

Tanım 7.3 (Cauchy Dizisi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ varsa ki $k, m \geq N$ olan her k, m için

$$\| x_k - x_m \| < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun, (x_k) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Yani Cauchy dizisinin terimleri bir yerden sonra birbirine istenildiği kadar yakındır. Koşul yalnız ardışık terimler için değil, N'den sonraki **bütün** terim çiftleri için aranır; limit ise koşulda hiç geçmez. $n = 1$ için bu, reel sayılardaki Cauchy dizisi tanımıdır (bkz. Analiz 1).

Örnek 7.10 (İçe Dönen Bir Sarmal). $x_k = \left(\frac{\cos k}{k}, \frac{\sin k}{k}\right)$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu tanımla gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $\cos^2 k + \sin^2 k = 1$ olduğundan
>
> $$\| x_k \| = \sqrt{\frac{\cos^2 k + \sin^2 k}{k^2}} = \frac{1}{k}$$
>
> olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $N > \frac{2}{\varepsilon}$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ seçelim. $k, m \geq N$ için üçgen eşitsizliği (Teorem 1.2) ve $\| -x_m \| = \| x_m \|$ eşitliği gereği
>
> $$\| x_k - x_m \| \leq \| x_k \| + \| x_m \| = \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$
>
> olur. Dizi bir Cauchy dizisidir. Terimler, başlangıç noktası çevresinde dönerken ona yaklaşan bir sarmal üzerinde durur; $\| x_k \| = \frac{1}{k} \to 0$ olduğundan limit 0'dır. ■

Cauchy dizilerinin ilk özelliği, yakınsak diziler gibi sınırlı olmalarıdır.

Teorem 7.5 (Cauchy Dizisi Sınırlıdır). *$\mathbb{R}^n$'deki her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

> ***İspat.***
> *(x_k) bir Cauchy dizisi olsun. Tanımı $\varepsilon = 1$ için uygulayalım: öyle bir N vardır ki $k, m \geq N$ için $\| x_k - x_m \| < 1$ olur. $m = N$ alırsak $k \geq N$ için üçgen eşitsizliğiyle*
>
> $$\| x_k \| \leq \| x_k - x_N \| + \| x_N \| < 1 + \| x_N \|$$
>
> *bulunur. Geriye sonlu tane terim kalır.*
>
> $$M = \max\{ \| x_1 \|, \ldots, \| x_{N-1} \|, 1 + \| x_N \| \}$$
>
> *diyelim ($N = 1$ ise listede yalnız $1 + \| x_1 \|$ vardır). $k < N$ için $\| x_k \| \leq M$ eşitsizliği M'nin tanımından, $k \geq N$ için de yukarıdaki eşitsizlikten çıkar. Demek ki her k için $\| x_k \| \leq M$'dir ve dizi sınırlıdır (Tanım 6.5).* ■

Bölümün son büyük teoremi, Cauchy dizileriyle yakınsak dizilerin $\mathbb{R}^n$'de aynı olduğunu söyler.

Teorem 7.6 (Cauchy Ölçütü). *$\mathbb{R}^n$'de bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, Cauchy dizisi olmasıdır.*

> ***İspat.***
> ***($\Rightarrow$)*** *$x_k \to a$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Yakınsaklık tanımını $\frac{\varepsilon}{2}$ için uygulayalım: $k \geq N$ için $\| x_k - a \| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir N vardır. $k, m \geq N$ için*
>
> $$\| x_k - x_m \| \leq \| x_k - a \| + \| a - x_m \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
>
> *olur. (x_k) bir Cauchy dizisidir.*
> ***($\Leftarrow$)*** *(x_k) bir Cauchy dizisi olsun. Teorem 7.5 gereği sınırlıdır; Teorem 7.2 gereği yakınsak bir (x_{k_j}) alt dizisi vardır. Limitine a diyelim. Dizinin tamamının a'ya yakınsadığını gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin.*

 CC BY-NC-SA 4.0

- *Cauchy koşulundan, $k, m \geq N_1$ için $\| x_k - x_m \| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir N_1 vardır.*
- *Alt dizinin yakınsaklığından, $j \geq N_2$ için $\| x_{k_j} - a \| < \frac{\varepsilon}{2}$ olan bir N_2 vardır.*

$N = \max\{N_1, N_2\}$ alalım ve $k \geq N$ olsun. Alt dizinin N-inci terimini ara nokta olarak kullanacağız. $N \geq N_2$ olduğundan $\| x_{k_N} - a \| < \frac{\varepsilon}{2}$'dir. Ayrıca $k_N \geq N \geq N_1$ ve $k \geq N_1$ olduğundan $\| x_k - x_{k_N} \| < \frac{\varepsilon}{2}$'dir. Üçgen eşitsizliğiyle

$$\| x_k - a \| \leq \| x_k - x_{k_N} \| + \| x_{k_N} - a \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Yani $x_k \to a$. ■

Cauchy ölçütünün ($\Leftarrow$) yönü $\mathbb{R}^n$'nin önemli bir özelliğini dile getirir: Cauchy dizilerinin limiti uzayın içindedir. Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu uzaylara **tam** uzay denir; teorem, $\mathbb{R}^n$'nin tam olduğunu söyler. Reel sayılardaki tam küme kavramı (bkz. Analiz 1) $\mathbb{R}^n$'nin alt kümelerine aynen taşınır. Yakınsak her dizinin Cauchy olması her yerde geçerlidir, ama tersi, dizinin "gitmek istediği" noktanın ele alınan kümede bulunmasına bağlıdır. Örneğin $B(0,1)$ açık yuvarında $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) e_1$ dizisini düşünelim. Terimler yuvardadır ve dizi $\mathbb{R}^n$'de e_1'e yakınsadığı için bir Cauchy dizisidir; ama $\| e_1 \| = 1$ olduğundan limit yuvara ait değildir. Açık yuvar tam değildir; $\mathbb{R}^n$'nin kendisi ise tamdır.
Yakınsaklık gibi Cauchy koşulu da bileşenlere ayrılır.

Önerme 7.2 (Cauchy Koşulu Bileşenlerle). *(x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi olsun. (x_k) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul, her $i = 1, \ldots, n$ için $\left(x_k^{(i)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ bileşen dizisinin $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi olmasıdır.*

İspat.
Her $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve her i için

$$|\, y_i \,| \leq \| y \| \leq \sum_{l=1}^{n} |\, y_l \,|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (ℝⁿ'de Diziler ve Yakınsaklık bölümündeki (1) eşitsizliği). Bu eşitsizlikleri $y = x_k - x_m$ vektörüne uygulayacağız; bu vektörün i-inci bileşeni $x_k^{(i)} - x_m^{(i)}$'dir.
($\Rightarrow$) $\varepsilon > 0$ verilsin. $k, m \geq N$ için $\| x_k - x_m \| < \varepsilon$ olan bir N vardır. Bu k, m için her i bileşeninde

$$\left| x_k^{(i)} - x_m^{(i)} \right| \leq \| x_k - x_m \| < \varepsilon$$

olur; her bileşen dizisi Cauchy dizisidir.
($\Leftarrow$) $\varepsilon > 0$ verilsin. Her i için, $k, m \geq N_i$ olduğunda $\left| x_k^{(i)} - x_m^{(i)} \right| < \frac{\varepsilon}{n}$ olacak biçimde bir N_i vardır. $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$ alalım. $k, m \geq N$ için

$$\| x_k - x_m \| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| x_k^{(i)} - x_m^{(i)} \right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

olur; (x_k) bir Cauchy dizisidir. ■

Bu önerme Cauchy ölçütüne ikinci bir yol açar. (x_k) bir Cauchy dizisiyse bileşen dizileri reel Cauchy dizileridir; reel sayılarda her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan (bkz. Analiz 1) her bileşen dizisi yakınsar ve Teorem 6.3 gereği (x_k) yakınsar. Kısacası $\mathbb{R}^n$'nin tamlığı, $\mathbb{R}$'nin tamlığından bileşen bileşen elde edilir. Cauchy ölçütünün asıl gücü, limiti hesaplanamayan dizilerde ortaya çıkar.

Örnek 7.11 (Limiti Bilinmeyen Yakınsak Bir Dizi). $\mathbb{R}^2$'de

$$x_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l^2} (\cos l, \sin l)$$

dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Dizinin limitini hesaplamak kolay değildir; bu yüzden Cauchy ölçütünü kullanalım. $m > k$ olsun. Fark, k-ıncı terimden sonraki toplananların toplamıdır:

$$x_m - x_k = \sum_{l=k+1}^{m} \frac{1}{l^2}\,(\cos l, \sin l).$$

Üçgen eşitsizliği tümevarımla sonlu toplamlara genişler ve $\| \,(\cos l, \sin l)\, \| = 1$'dir. Dolayısıyla

$$\| \,x_m - x_k\, \| \leq \sum_{l=k+1}^{m} \frac{1}{l^2} \| \,(\cos l, \sin l)\, \| = \sum_{l=k+1}^{m} \frac{1}{l^2}$$

olur. $l \geq 2$ için $\dfrac{1}{l^2} < \dfrac{1}{l(l-1)} = \dfrac{1}{l-1} - \dfrac{1}{l}$ olduğundan toplam teleskopik bir toplamla sınırlanır:

$$\sum_{l=k+1}^{m} \frac{1}{l^2} < \sum_{l=k+1}^{m} \left(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{m} < \frac{1}{k}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin ve $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ seçilsin. $m > k \geq N$ için

$$\| \,x_m - x_k\, \| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

olur; $m = k$ için fark 0'dır ve k ile m'nin rolleri simetriktir. Dizi Cauchy dizisidir ve Teorem 7.6 gereği yakınsaktır. Limitin kapalı bir formülünü bilmeden yakınsaklığı elde ettik. ■

Örnek 7.12 (Cauchy Olmayan Bir Dizi). $x_k = \left((-1)^k, \dfrac{1}{k}\right)$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığını, dolayısıyla ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Cauchy koşulunun olumsuzu şudur: öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her N için $\| \,x_k - x_m\, \| \geq \varepsilon_0$ olan $k, m \geq N$ indisleri bulunur. $\varepsilon_0 = 2$ alalım. N ne olursa olsun $k = N$ ve $m = N+1$ için birinci bileşenler $(-1)^N$ ve $(-1)^{N+1} = -(-1)^N$ olduğundan, bir vektörün normu bileşeninin mutlak değerinden küçük olamayacağı için

$$\| \,x_N - x_{N+1}\, \| \geq \left| \,(-1)^N - (-1)^{N+1}\, \right| = 2$$

olur. Dizi Cauchy dizisi değildir ve Teorem 7.6 gereği yakınsak değildir. Aynı sonuca Sonuç 7.1 ile de varılır: çift ve tek indisli alt diziler $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$ noktalarına yakınsar. ■

7.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda alt diziler, Bolzano–Weierstrass teoremi, kapalılığın ve kompaktlığın dizisel betimlemeleri ve Cauchy ölçütü birlikte kullanılıyor.

Alıştırma 7.1 (Normu Alttan Sınırlı Diziler). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve her k için $\| \,x_k\, \| \geq 3$ olsun. (x_k) dizisinin yakınsak bir alt dizisi olmak zorunda mıdır?

Çözüm.
Hayır. $x_k = (k+2)\,e_1 = (k+2, 0, \ldots, 0)$ dizisini alalım. Her k için $\| \,x_k\, \| = k+2 \geq 3$ olduğundan koşul sağlanır.
Herhangi bir (x_{k_j}) alt dizisi için $k_j \geq j$ olduğundan

$$\| \,x_{k_j}\, \| = k_j + 2 \geq j + 2$$

olur; yani her alt dizi sınırsızdır. Yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 6.2) bu dizinin hiçbir alt dizisi yakınsak değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\| x_k \| \geq 3$ koşulu terimleri $B(0,3)$ yuvarının dışında tutar, ama sonsuza gitmelerini engellemez. Bu koşulu sağlayan bazı dizilerin yakınsak alt dizisi vardır (örneğin sabit $3e_1$ dizisi), ama bu garanti değildir. Yakınsak bir alt diziyi garanti eden, Örnek 7.6 örneğindeki gibi bir üst sınırdır. ■

Alıştırma 7.2 (Tek Yığılma Noktası Yakınsaklık İçin Yetmez). Yakınsak bir dizinin tek yığılma noktası vardır. Tek yığılma noktası olan ama ıraksak olan bir dizi örneği veriniz.

Çözüm.
Örnek. $\mathbb{R}^2$'de

$$x_k = \begin{cases} (k,0), & k \text{ çift ise,} \\ (\frac{1}{k},0), & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dizisini alalım. Tek yığılma noktasının $(0,0)$ olduğunu ve dizinin ıraksak olduğunu göstereceğiz.
Iraksaklık. $\| x_{2j} \| = 2j$ olduğundan dizi sınırsızdır; yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 6.2) ıraksaktır.
$(0,0)$ bir yığılma noktasıdır. Tek indisli alt dizi $x_{2j-1} = \left(\dfrac{1}{2j-1}, 0\right)$ olur ve $(0,0)$ noktasına yakınsar.
Başka yığılma noktası yoktur. (x_{k_j}) alt dizisi bir b noktasına yakınsasın. Yakınsak olduğu için sınırlıdır: her j için $\| x_{k_j} \| \leq M$ olan bir M vardır. k_j çiftse $\| x_{k_j} \| = k_j \leq M$ olmalıdır. k_j indisleri birbirinden farklı doğal sayılar olduğundan M'yi aşmayan çift k_j sayısı sonludur. Demek ki bir j_0'dan sonra bütün k_j indisleri tektir ve $j \geq j_0$ için

$$\| x_{k_j} - (0,0) \| = \frac{1}{k_j} \leq \frac{1}{j}$$

olur. Buradan $j \geq j_0$ indisleriyle alınan kuyruğun $(0,0)$ noktasına yakınsadığı çıkar. Bu kuyruk, b'ye yakınsayan dizinin bir alt dizisi olduğundan Teorem 7.1 gereği b'ye de yakınsar; limitin tekliğinden (Teorem 6.1) $b = (0,0)$ bulunur.
Dizinin tek yığılma noktası vardır ama dizi ıraksaktır. Tek yığılma noktası, dizi ancak sınırlıysa yakınsaklığı garanti eder (Alıştırma 7.3). ■

Alıştırma 7.3 (Sınırlı ve Tek Yığılma Noktalı Dizi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de sınırlı bir dizi olsun ve tek yığılma noktası a olsun. $x_k \to a$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x_k \to a$ olmadığını varsayalım. Yakınsaklık tanımının olumsuzu gereği öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her N için $\| x_k - a \| \geq \varepsilon_0$ olan bir $k \geq N$ bulunur. Dolayısıyla

$$I = \{k \in \mathbb{N} : \| x_k - a \| \geq \varepsilon_0\}$$

indis kümesi üstten sınırlı değildir, yani sonsuzdur.
I boyunca alınan alt dizi, sınırlı bir dizinin terimlerinden oluştuğu için sınırlıdır. Teorem 7.2 gereği bu alt dizinin, sonsuz bir $J \subseteq I$ indis kümesi boyunca alınan yakınsak bir alt dizisi vardır; limitine b diyelim. Alt dizinin alt dizisi ana dizinin de alt dizisi olduğundan b, (x_k) dizisinin bir yığılma noktasıdır. Tek yığılma noktası a olduğundan $b = a$'dır.
Öte yandan J boyunca alınan dizi a'ya yakınsadığından, J'nin yeterince büyük her k elemanı için $\| x_k - a \| < \varepsilon_0$ olur. Oysa $J \subseteq I$ olduğundan her $k \in J$ için $\| x_k - a \| \geq \varepsilon_0$'dır. Bu çelişki $x_k \to a$ olduğunu gösterir. ■

Alıştırma 7.4 (Yuvar Yüzeyi Dizilerle Kapalıdır). $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| = r\}$ yuvar yüzeyinin kapalı olduğunu Teorem 7.3 yardımıyla gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Terimleri $S(x_0, r)$ kümesinde olan ve bir $a \in \mathbb{R}^n$ noktasına yakınsayan bir (x_k) dizisi alalım; $a \in S(x_0, r)$ olduğunu göstereceğiz.
Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 1.2) gereği her k için

$$\left| \| x_k - x_0 \| - \| a - x_0 \| \right| \leq \| (x_k - x_0) - (a - x_0) \| = \| x_k - a \|$$

olur. $x_k \to a$ olduğundan sağ taraf 0'a gider; sıkıştırma ile $\| x_k - x_0 \| \to \| a - x_0 \|$ bulunur. Öte yandan terimler yuvar yüzeyinde olduğundan her k için $\| x_k - x_0 \| = r$'dir; yani $(\| x_k - x_0 \|)$ sabit r dizisidir ve r'ye yakınsar. Reel dizilerde limit tek olduğundan $\| a - x_0 \| = r$, yani $a \in S(x_0, r)$ olur. Yakınsak her dizinin limiti kümede kaldığından Teorem 7.3 gereği $S(x_0, r)$ kapalıdır. Aynı akıl yürütme, $\| x_k - x_0 \| \leq r$ eşitsizliğine limitlerde sıralama uygulanarak $B[x_0, r]$ kapalı yuvarının kapalı olduğunu (Sonuç 3.1) da dizilerle yeniden gösterir. ■

Alıştırma 7.5 (Aralıktaki Rasyonel Sayılar). $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin kompakt olup olmadığını dizilerle araştırınız.

Çözüm.
A kompakt değildir. Terimleri A'da olan ve A'ya ait olmayan bir noktaya yakınsayan bir dizi kuracağız.
Limit noktası. $a = \sqrt{2} - 1$ olsun. $1 < \sqrt{2} < 2$ olduğundan $0 < a < 1$'dir. a irrasyoneldir: rasyonel olsaydı $\sqrt{2} = a + 1$ de rasyonel olurdu (bkz. Analiz 1). Dolayısıyla $a \notin A$'dır.
Dizi. a'nın ondalık açılımını k basamakta keselim:

$$q_k = \frac{\lfloor 10^k a \rfloor}{10^k}.$$

q_k iki tam sayının oranı olduğundan rasyoneldir. Taban fonksiyonunun tanımından $10^k a - 1 < \lfloor 10^k a \rfloor \leq 10^k a$ olduğundan

$$a - \frac{1}{10^k} < q_k \leq a$$

bulunur. $10^k a > 0$ olduğundan $\lfloor 10^k a \rfloor \geq 0$, yani $q_k \geq 0$'dır; ayrıca $q_k \leq a < 1$'dir. Demek ki her k için $q_k \in A$'dır. $10^k > k$ olduğundan $| q_k - a | < \frac{1}{10^k} < \frac{1}{k}$ olur ve $q_k \to a$ bulunur.
Sonuç. Teorem 7.1 gereği (q_k) dizisinin her alt dizisi a'ya yakınsar ve limit tek olduğundan hiçbir alt dizi A'nın bir noktasına yakınsamaz. Teorem 7.4 gereği A kompakt değildir. A sınırlıdır; kompaktlığı bozan, kapalı olmamasıdır (Teorem 7.3). ■

Alıştırma 7.6 (Düşey Bir Şerit).

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

kümesinin kompakt olup olmadığını dizilerle araştırınız.

Çözüm.
A kompakt değildir. $p_k = (0, k)$ dizisini alalım; $0 \leq 0 \leq 1$ olduğundan her terim A'dadır. Herhangi bir (p_{k_j}) alt dizisi için

$$\| p_{k_j} \| = k_j \geq j$$

olduğundan her alt dizi sınırsızdır; yakınsak diziler sınırlı olduğundan (Teorem 6.2) hiçbir alt dizi yakınsak değildir. Teorem 7.4 gereği A kompakt değildir.
Burada kompaktlığı bozan, sınırlı olmamaktır. A kapalıdır: terimleri A'da olan bir (x_k, y_k) dizisi (a, b)'ye yakınsıyorsa her k için $0 \leq x_k \leq 1$ ve $x_k \to a$ olduğundan limitlerde sıralama gereği $0 \leq a \leq 1$, yani $(a, b) \in A$ olur. ■

Alıştırma 7.7 (Hiperbol ile Çemberin Arasındaki Bölge).

 CC BY-NC-SA 4.0

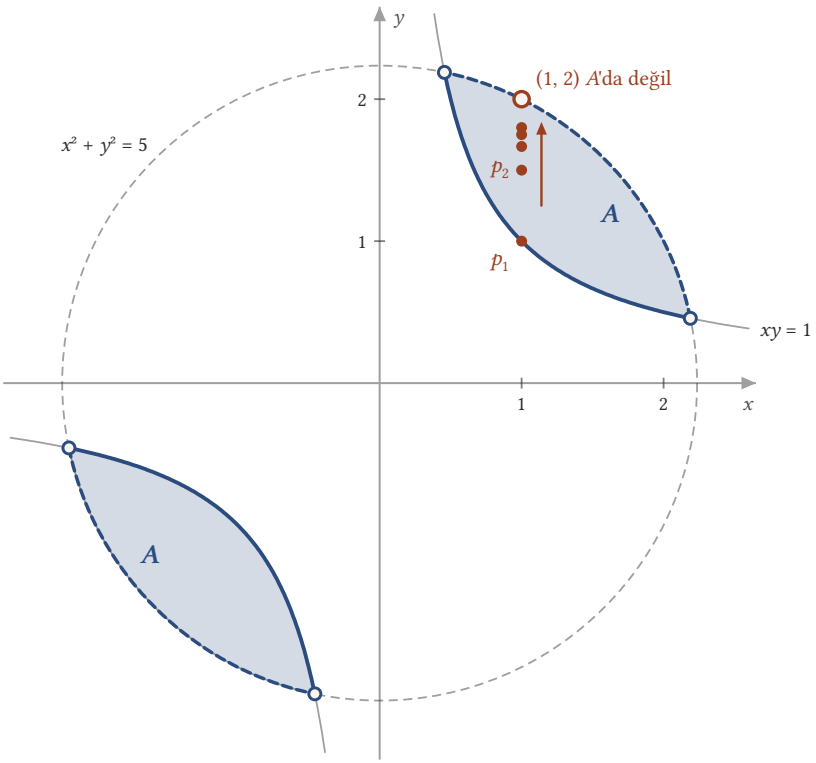
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 5\}$$

kümesinin kompakt olup olmadığını dizilerle araştırınız.

Çözüm.
A kompakt değildir.
Aday nokta. $x^2 + y^2 < 5$ kesin eşitsizliği, $x^2 + y^2 = 5$ çemberinin A'ya ait olmadığını gösterir. Çember üzerinde $xy \geq 1$ koşulunu sağlayan bir nokta arayalım: $(1,2)$ için $1 \cdot 2 = 2 \geq 1$ ve $1^2 + 2^2 = 5$'tir. Demek ki $(1,2) \notin A$'dır.
Dizi. $p_k = \left(1, 2 - \dfrac{1}{k}\right)$ dizisini alalım. Her k için $1 \leq 2 - \dfrac{1}{k} < 2$ olduğundan

$$1 \cdot \left(2 - \frac{1}{k}\right) \geq 1,$$
$$1 + \left(2 - \frac{1}{k}\right)^2 < 1 + 4 = 5$$

olur; yani her terim A'dadır. Teorem 6.3 gereği $p_k \to (1,2)$ bulunur.



Şekil 7.4: A kümesi $xy = 1$ hiperbolü (düz, kümeye ait) ile $x^2 + y^2 = 5$ çemberi (kesikli, kümeye ait değil) arasındaki iki mercek biçimli parçadır; köşeler çemberin üstünde olduğundan kümeye ait değildir. $p_k = (1, 2 - 1/k)$ terimleri A'dadır ve $(1, 2)$ noktasına yakınsar; $(1, 2) \notin A$.

Sonuç. Teorem 7.1 gereği (p_k) dizisinin her alt dizisi $(1,2)$ noktasına yakınsar; limit tek olduğundan hiçbir alt dizi A'nın bir noktasına yakınsamaz. Teorem 7.4 gereği A kompakt değildir. A sınırlıdır (her noktası için $\| (x,y) \| < \sqrt{5}$); kompaktlığı bozan, kapalı olmamasıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 7.8 (Ardışık Terimleri Yaklaşan Ama Cauchy Olmayan Dizi). $x_k = \left(\sqrt{k}, \dfrac{(-1)^k}{k}\right)$ dizisinde ardışık terimler arasındaki uzaklığın 0'a gittiğini, buna karşın dizinin Cauchy dizisi olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Ardışık terimler. Birinci bileşende eşleniğiyle çarparak

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

buluruz. İkinci bileşende

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} < \frac{2}{k}$$

olur. $\| y \| \leq | y_1 | + | y_2 |$ eşitsizliğinden (Önerme 7.2 ispatındaki eşitsizlik)

$$\| x_{k+1} - x_k \| < \frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{2}{k}$$

elde edilir. Sağ taraf 0'a gittiğinden sıkıştırma ile $\| x_{k+1} - x_k \| \to 0$ olur.
Cauchy değildir. $\| x_k \| \geq \sqrt{k}$ olduğundan dizi sınırsızdır: her $M > 0$ için $k > M^2$ olduğunda $\| x_k \| > M$ olur. Teorem 7.5 gereği Cauchy dizileri sınırlı olduğundan (x_k) bir Cauchy dizisi değildir. Olumsuz koşulu doğrudan da görebiliriz: her N için $k = N$ ve $m = 4N$ alınırsa

$$\| x_{4N} - x_N \| \geq \sqrt{4N} - \sqrt{N} = \sqrt{N} \geq 1$$

olur; $\varepsilon_0 = 1$ için Cauchy koşulu bozulur.
Cauchy koşulu yalnız ardışık terimlere değil, N'den sonraki bütün terim çiftlerine bakar; ardışık farkların küçülmesi yetmez. ■

Alıştırma 7.9 (Farkları Geometrik Olarak Küçülen Dizi). (x_k), $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve her k için $\| x_{k+1} - x_k \| \leq \dfrac{1}{2^k}$ olsun. (x_k) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterip Teorem 7.6 ile sonuca varacağız.
Fark tahmini. $m > k$ olsun. $x_m - x_k$ farkını ardışık farkların toplamı olarak yazalım (toplam açılınca ara terimler sadeleşir):

$$x_m - x_k = \sum_{l=k}^{m-1} (x_{l+1} - x_l).$$

Üçgen eşitsizliği ve geometrik toplam formülüyle

$$\begin{aligned} \| x_m - x_k \| &\leq \sum_{l=k}^{m-1} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{m-k}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{2^k} - \frac{2}{2^m} < \frac{2}{2^k} \end{aligned}$$

elde edilir.
Cauchy koşulu. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $N > \dfrac{2}{\varepsilon}$ seçilsin. Tümevarımla her N için $2^N > N$ olduğundan $m > k \geq N$ için

$$\| x_m - x_k \| < \frac{2}{2^k} \leq \frac{2}{2^N} < \frac{2}{N} < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

> olur; $m = k$ için fark 0'dır. (x_k) bir Cauchy dizisidir ve Teorem 7.6 gereği yakınsaktır. Aynı tahmin reel dizilerde de kullanılır (bkz. Analiz 1); $\mathbb{R}^n$'de yalnız mutlak değerin yerini norm alır. ■

Bu bölümle birlikte $\mathbb{R}^n$'deki dizilerin temel araçları tamamlandı: alt diziler, Bolzano–Weierstrass teoremi, kapalı ve kompakt kümelerin dizisel betimlemeleri ve Cauchy ölçütü. Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Limit bölümünde bu araçları fonksiyonlara uyguluyoruz: çok değişkenli bir fonksiyonun limitini tanımlayacak ve limitin varlığını dizilerle nasıl sınayabileceğimizi göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Limit

Analiz 1'de tanım kümesi $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olan fonksiyonların limitini inceledik: x, a noktasına yeterince yakın ve ondan farklı olduğunda $|\ f(x) - \ell\ |$ farkı istenildiği kadar küçük kalıyorsa $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ yazıyorduk (bkz. Analiz 1). Oysa karşılaşılan niceliklerin çoğu birden fazla değişkene bağlıdır: ince bir levhanın (x, y) noktasındaki sıcaklığı iki değişkenli bir fonksiyondur, uzayda hareket eden bir parçacığın konumu ise üç bileşenli bir büyüklüktür. Bu bölümde tanım kümesi $\mathbb{R}^n$'nin, değerleri $\mathbb{R}^m$'nin bir alt kümesinde olan fonksiyonlarla çalışmaya başlıyoruz.
Limit tanımını taşımak için yapılacak iş, dizilerde olduğu gibi (Tanım 6.3), mutlak değerin yerine normu koymaktır: x ile x_0 arasındaki uzaklık $\mathbb{R}^n$'de, $f(x)$ ile L arasındaki uzaklık ise $\mathbb{R}^m$'de Öklid normuyla ölçülür. Tanımların ve ispatların çoğu Analiz 1'dekilerle neredeyse aynı kalır. Önemli fark yaklaşma biçimindedir. Gerçel doğruda bir noktaya yalnız soldan ve sağdan yaklaşılabilir; düzlemde ise bir noktaya sonsuz çoklukta doğrultudan, doğrular, parabol yayları ya da sarmallar üzerinden yaklaşılabilir. Limit bunların hepsinde aynı davranışı ister; bu yüzden çok değişkenli limit, tek değişkenli limitten çok daha kolay bozulur.
Önce fonksiyonları, tanım kümelerini ve grafiklerini tanıtıyoruz. Sonra limiti tanımlıyor, önceki bölümlerde kurduğumuz dizileri ve Cauchy koşulunu limitle ilişkilendiriyoruz. Son olarak cebirsel işlemler, sıkıştırma ve bileşenler aracılığıyla limit hesabını reel değerli fonksiyonların limitine indiriyoruz.

8.1 Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Fonksiyon kavramının kendisi değişmez: bir kümenin her elemanına başka bir kümenin tek bir elemanı karşılık getirilir. Değişen, tanım ve değer kümelerinin içinde bulunduğu uzaydır.

Tanım 8.1 (Çok Değişkenli Fonksiyon). $n, m \in \mathbb{N}$ ve $D \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $f : D \to \mathbb{R}^m$ biçimindeki bir fonksiyona **n değişkenli, m değerli fonksiyon**, **vektör değerli fonksiyon** ya da kısaca **vektör fonksiyon** denir. Özel olarak

- $m = 1$ ise $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **reel değerli** (çok değişkenli) **fonksiyon**,
- $n = 1$ ise $f : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ fonksiyonuna **vektör değerli tek değişkenli fonksiyon**

denir.

Yani fonksiyon, $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ noktasına $f(x) = f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^m$ noktasını karşılık getirir. Örneğin $f(x, y) = x^2 + y^2$ iki değişkenli, reel değerli bir fonksiyondur ve (x, y) noktasının başlangıç noktasına uzaklığının karesini verir. $g(t) = (\cos t, \sin t)$ ise $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^2$'ye tek değişkenli, vektör değerli bir fonksiyondur ve t arttıkça birim çemberin üzerinde dolaşan bir noktayı betimler. $n = m = 1$ durumu Analiz 1'in fonksiyonlarıdır.
$f(x)$, $\mathbb{R}^m$'nin bir noktası olduğundan m bileşeni vardır ve her bileşen x'e bağlıdır.

Tanım 8.2 (Bileşen Fonksiyonlar). $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. Her $x \in D$ ve $j = 1, ..., m$ için $f(x)$ noktasının j-inci bileşenini $f_j(x)$ ile gösterelim. Böylece tanımlanan $f_j : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarına f'nin **bileşen** (ya da **koordinat**) **fonksiyonları** denir. Her $x \in D$ için

$$f(x) = \big(\ f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)\ \big)$$

olur ve kısaca $f = (f_1, ..., f_m)$ yazılır.

Yani vektör değerli bir fonksiyon, aynı kümede tanımlı m tane reel değerli fonksiyonun bir araya getirilmesidir. Tersine, D üzerinde tanımlı m tane reel değerli fonksiyon bileşen yapılarak bir vektör fonksiyon elde edilir. Her bileşen fonksiyon n değişkenli, reel değerli bir fonksiyondur. Bu gözlem bölüm boyunca işimize yarayacak: vektör değerli fonksiyonlarla ilgili birçok soru, bileşenler aracılığıyla reel değerli fonksiyonlara indirgenir.
$y = (y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n)$ yazılırsa bileşenlerin tanımı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

denklem sistemini verir. Bu sisteme $f(D)$ kümesinin bir **parametrizasyonu** denir: $(x_1, ..., x_n)$ parametreleri D içinde değiştikçe $(y_1, ..., y_m)$ noktası $f(D)$ kümesini tarar. Örneğin $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ üzerinde

$$f(x_1, x_2) = \big(\sin x_2 \cos x_1, \sin x_2 \sin x_1, \cos x_2 \big)$$

fonksiyonunun her değerinin normunun karesi $\sin^2 x_2(\cos^2 x_1 + \sin^2 x_1) + \cos^2 x_2 = 1$'dir; değerler $\mathbb{R}^3$'teki birim yuvar yüzeyi $S(0,1)$ üzerindedir. Aslında $f(D) = S(0,1)$'dir ve sistem bu yüzeyi iki parametreyle betimler: x_2 kuzey kutbundan ölçülen açı, x_1 ise ekvator düzlemindeki dönme açısıdır.

8.2 Tanım Kümesi ve Değer Kümesi

Analiz 1'de olduğu gibi fonksiyonlar çoğu kez yalnız bir formülle verilir ve tanım kümesi ayrıca yazılmaz. Bu durumda formülün anlamlı olduğu en geniş küme kullanılır.

Tanım 8.3 (Tanım Kümesi ve Maksimal Tanım Kümesi). $f : D \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunda $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine f'nin **tanım kümesi** denir. f yalnız bir formülle verilmişse, formülün $\mathbb{R}^m$'de bir değer belirttiği bütün $x \in \mathbb{R}^n$ noktalarının kümesine f'nin **maksimal** (en geniş) **tanım kümesi** denir ve dom f ile gösterilir. Aksi söylenmedikçe formülle verilen bir fonksiyonun tanım kümesi, maksimal tanım kümesidir.

Yani formülle verilen bir fonksiyonun tanım kümesini bulmak, formüldeki her işlemin gerçel sayılarda yapılabildiği noktaları belirlemektir. Örneğin $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ iki değişkenli, reel değerli bir fonksiyondur; payda yalnız $(0,0)$ noktasında sıfır olduğundan dom $f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır.
Bileşenler birer formülle verilmişse $f(x)$ ancak bütün bileşenler tanımlıyken tanımlıdır. Dolayısıyla

$$\text{dom } f = \text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2 \cap ... \cap \text{dom } f_m$$

olur. Örneğin $f(x,y) = \left(\dfrac{x-1}{y-1}, x+2 \right)$ için dom $f_1 = \{(x,y) : y \neq 1\}$ ve dom $f_2 = \mathbb{R}^2$ olduğundan dom f, düzlemden $y = 1$ doğrusunun çıkarılmasıyla elde edilir.

Tanım 8.4 (Değer Kümesi). $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun.

$$f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

kümesine f'nin **değer kümesi** denir.

Yani değer kümesi, fonksiyonun gerçekten aldığı değerlerin kümesidir ve genellikle $\mathbb{R}^m$'nin tamamı değildir. Örneğin $f(x,y) = x^2 + y^2$ için dom $f = \mathbb{R}^2$ ve $f(\mathbb{R}^2) = [0, \infty)$'dur: her (x,y) için $x^2 + y^2 \geq 0$'dır ve her $c \geq 0$ değeri $(\sqrt{c}, 0)$ noktasında alınır. $g(t) = (\cos t, \sin t)$ fonksiyonunun değer kümesi ise birim çemberdir.

> Üç adımda tanım kümesi
>
> 1. **Bileşenlere ayır.** $f = (f_1, ..., f_m)$ yazılır. Toplam ya da çarpım biçimindeki bir bileşen de parçalarına ayrılır.
> 2. **Koşulları yaz.** Her parça için koşul yazılır: payda sıfırdan farklı; çift kuvvetten kökün içi negatif değil; ln'in içi pozitif; arcsin ve arccos'un içi $[-1,1]$ aralığında; tan u için $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
> 3. **Kesiştir ve betimle.** Bütün koşulları sağlayan noktalar bulunur ve küme mümkünse tanıdık bir bölge olarak (yuvar, yarı düzlem, iki eğri arasındaki bölge) betimlenir.

Örnek 8.1 (Logaritma ve Karekök Bileşenli Fonksiyon).

$$f(x,y) = \big(\ln(xy - y + 2x - 2), \sqrt{9 - x^2 - y^2} \big)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
f, iki değişkenli ve iki değerli bir vektör fonksiyondur. Bileşenleri

$$f_1(x,y) = \ln(xy - y + 2x - 2),$$
$$f_2(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

reel değerli fonksiyonlarıdır.
Birinci bileşen. Logaritmanın içi pozitif olmalıdır. İç ifade çarpanlarına ayrılır:

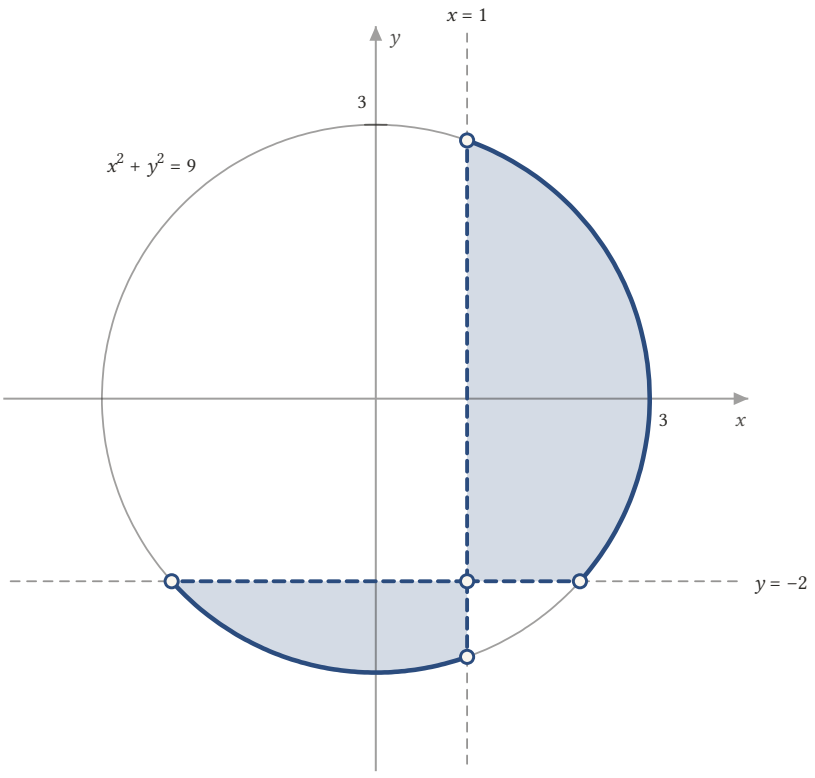
$$xy - y + 2x - 2 = y(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(y+2).$$

İki çarpanın çarpımı ancak ikisi aynı işaretliyse pozitiftir:

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} f_1 &= \{(x,y) : (x-1)(y+2) > 0\} \\ &= \{x > 1, y > -2\} \cup \{x < 1, y < -2\}.\end{aligned}$$

Bu, $x = 1$ ve $y = -2$ doğrularının düzlemi ayırdığı dört açık bölgeden sağ üstteki ile sol alttakinin birleşimidir; iki doğru kümeye dahil değildir.
İkinci bileşen. Karekökün içi negatif olmamalıdır: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, yani $x^2 + y^2 \leq 9$. Bu, merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı 3 olan kapalı yuvardır: $\operatorname{dom} f_2 = B[(0,0), 3]$.
Kesişim.

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)(y+2) > 0, x^2 + y^2 \leq 9\}.$$



Şekil 8.1: dom f: kapalı $x^2 + y^2 \leq 9$ yuvarının $x = 1$ ve $y = -2$ doğrularıyla ayrılan parçalarından $x > 1$, $y > -2$ olan sağ üstteki ile $x < 1$, $y < -2$ olan sol alttaki. Çember yayları kümeye aittir (düz), doğru parçaları ve $(1, -2)$ noktası ait değildir (kesikli, içi boş).

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım kümesi, kapalı yuvarın $x = 1$ ve $y = -2$ doğrularıyla ayrılan parçalarından ikisidir: $x > 1, y > -2$ olan büyük parça ile $x < 1$, $y < -2$ olan küçük parça. Çemberin bu iki parçaya düşen yayları kümeye dahildir, doğru parçaları dahil değildir. ■

Örnek 8.2 (Üç Bileşenli Fonksiyonun Tanım Kümesi).

$$f(x,y) = \left(\sqrt{1-x^2}, \ln(x^2 - y), \sin x \cos y \right)$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
f, iki değişkenli ve üç değerli bir fonksiyondur; bileşenleri $f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2}$, $f_2(x,y) = \ln(x^2 - y)$ ve $f_3(x,y) = \sin x \cos y$'dir.
Birinci bileşen. $1 - x^2 \geq 0$, yani $x^2 \leq 1$ ya da $\mid x \mid \leq 1$ olmalıdır:

$$\text{dom } f_1 = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Bu, $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları arasındaki kapalı dikey şerittir; y serbesttir.
İkinci bileşen. $x^2 - y > 0$, yani $y < x^2$ olmalıdır:

$$\text{dom } f_2 = \{(x,y) : y < x^2\}.$$

Bu, $y = x^2$ parabolünün altında kalan açık bölgedir.
Üçüncü bileşen. Sinüs ve kosinüs her gerçel sayıda tanımlıdır; dom $f_3 = \mathbb{R}^2$.
Kesişim.

$$\text{dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mid x \mid \leq 1, y < x^2\}.$$

Tanım kümesi, kapalı şeridin parabolün altında kalan kısmıdır; aşağıya doğru sınırsızdır. Şeridin kenarlarından $y < 1$ olan kısımlar kümeye dahildir, parabol yayı dahil değildir. ■

Örnek 8.3 (Üç Değişkenli Fonksiyonun Tanım Kümesi). $f(x,y,z) = \ln(z - y) + xy \sin z$ fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
$f : \text{dom } f \to \mathbb{R}$ üç değişkenli, reel değerli bir fonksiyondur ve iki reel değerli fonksiyonun toplamıdır. Toplam, iki terim birden tanımlıyken tanımlıdır.

- $xy \sin z$ her $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için tanımlıdır.
- $\ln(z - y)$ ancak $z - y > 0$, yani $z > y$ iken tanımlıdır.

Dolayısıyla

$$\text{dom } f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > y\}$$

olur. Bu küme, $z = y$ düzleminin bir yanında kalan açık yarı uzaydır. Düzlem x-eksenini içerir ve yz-düzlemini $z = y$ doğrusu boyunca keser; x koordinatı hiçbir koşula bağlı değildir. ■

Örnek 8.4 (Her Yerde Tanımlı Fonksiyon). $f(x,y) = \left(\sin xy, y^3 + x, x^4 \right)$ fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
Bileşenler $f_1(x,y) = \sin xy$, $f_2(x,y) = y^3 + x$ ve $f_3(x,y) = x^4$'tür. Sinüs her gerçel sayıda tanımlıdır ve xy her (x,y) için bir gerçel sayıdır; f_2 ile f_3 de her noktada tanımlıdır. Üç bileşenin tanım kümesi de $\mathbb{R}^2$ olduğundan kesişimleri de $\mathbb{R}^2$'dir:

$$\text{dom } f = \mathbb{R}^2.$$

f, $\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^3$'e bir fonksiyondur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 8.5 (Paydada Karekök).

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
İki koşul vardır: karekökün içi negatif olmamalı ve payda sıfır olmamalıdır. Karekök yalnız içi sıfırken sıfır olduğundan iki koşul birlikte $1-x^2-y^2>0$ demektir:

$$\text{dom } f = \{(x,y) : x^2+y^2<1\} = B\left((0,0),1\right).$$

Tanım kümesi açık birim yuvardır. Birim çember kümeye dahil değildir, çünkü orada payda sıfır olur. ■

Örnek 8.6 (Ters Trigonometrik Bileşenler). $a, b \neq 0$ sabit sayılar olsun.

$$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{a} + \arccos\frac{y}{b}$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
arcsin ve arccos fonksiyonlarının tanım kümesi $[-1,1]$'dir; değer kümeleri sırasıyla $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ve $[0,\pi]$'dir. Dolayısıyla iki koşul vardır:

$$-1 \le \frac{x}{a} \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{a}\right| \le 1 \Leftrightarrow |\,x\,| \le |\,a\,|$$

ve aynı biçimde $|\,y\,| \le |\,b\,|$. Buradan

$$\text{dom } f = [-|\,a\,|, |\,a\,|] \times [-|\,b\,|, |\,b\,|]$$

bulunur. Tanım kümesi, kenarları eksenlere paralel ve merkezi başlangıç noktası olan kapalı bir dikdörtgendir. a ya da b negatif olabileceğinden sınırlar mutlak değerle yazılmıştır; örneğin $a=-2$ için koşul $-2 \le x \le 2$'dir. ■

Örnek 8.7 (Tanım Kümesi Bir Çember Olan Fonksiyon).

$$f(x,y) = \sqrt{\ln\frac{9}{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2-9}$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
Birinci terim. Önce payda sıfır olmamalıdır: $(x,y) \neq (0,0)$. Bu durumda $\frac{9}{x^2+y^2} > 0$ olduğundan logaritma tanımlıdır. Karekökün tanımlı olması için logaritmanın değeri negatif olmamalıdır:

$$\ln\frac{9}{x^2+y^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{9}{x^2+y^2} \ge 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 9.$$

Birinci terim $0 < x^2+y^2 \le 9$ iken tanımlıdır.
İkinci terim. $x^2+y^2-9 \ge 0$, yani $x^2+y^2 \ge 9$ olmalıdır.
Kesişim. İki koşul birlikte $x^2+y^2=9$ verir:

$$\text{dom } f = \{(x,y) : x^2+y^2=9\} = S\left((0,0),3\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım kümesi, yarıçapı 3 olan çemberdir. Bu çemberin her noktasında iki terim de $\sqrt{0} = 0$ olduğundan f tanım kümesinin her yerinde 0'dır. Tanım kümesi düzlemde bir bölge olmak zorunda değildir; burada kümenin hiç iç noktası yoktur. ■

Örnek 8.8 (Yuvarın Parabol Üstünde Kalan Kısmı).

$$f(x,y) = \frac{\ln(2x - x^2 - y^2)}{\sqrt{1 + y - x^2}}$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz ve düzlemde betimleyiniz.

Çözüm.
Pay. Logaritmanın içi pozitif olmalıdır. Kareye tamamlarsak

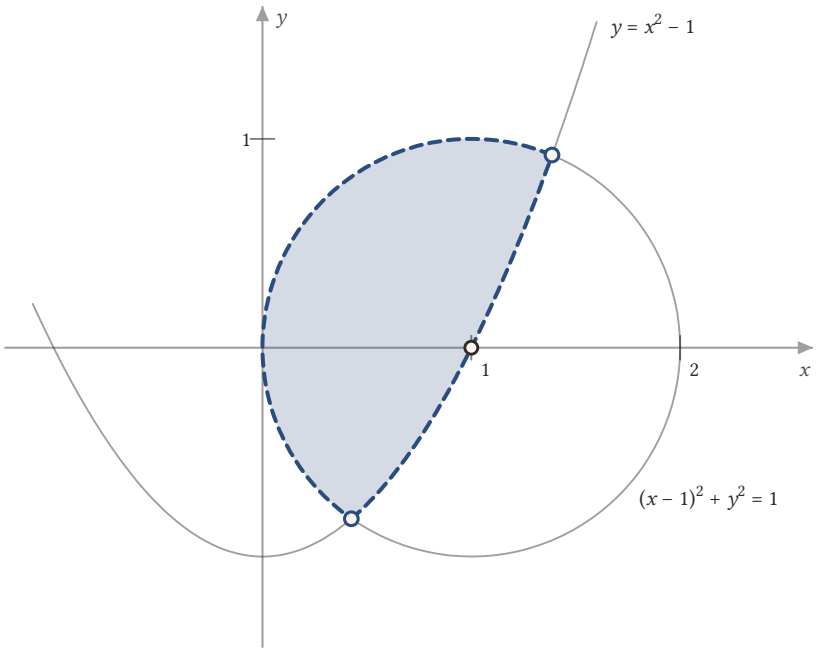
$$2x - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 < 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 < 1$$

olur. Bu, merkezi $(1,0)$, yarıçapı 1 olan açık yuvardır: $B\big((1,0),1\big)$.
Payda. Karekök tanımlı ve sıfırdan farklı olmalıdır; yani içi pozitif olmalıdır:

$$1 + y - x^2 > 0 \Leftrightarrow y > x^2 - 1.$$

Bu, tepe noktası $(0,-1)$ olan $y = x^2 - 1$ parabolünün üstünde kalan açık bölgedir.
Kesişim.

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 < 1, y > x^2 - 1\}.$$



Şekil 8.2: dom f: (1, 0) merkezli açık birim yuvarın $y = x^2 - 1$ parabolünün üstünde kalan kısmı. Parabol yuvarın merkezinden geçer ve çemberi yaklaşık (0,43; −0,82) ile (1,39; 0,92) noktalarında keser; çember yayı da parabol yayı da kümeye ait değildir (kesikli).

Tanım kümesi, açık yuvarın parabolün üstünde kalan kısmıdır. Parabol yuvarın merkezinden geçer, çünkü $1^2 - 1 = 0$'dır. Parabol ile çemberin kesişim noktaları $(x-1)^2 + (x^2-1)^2 = 1$ denkleminden, yani

$$(x-1)^2(x^2 + 2x + 2) = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

denkleminden bulunur; yaklaşık olarak $(0{,}43;\ -0{,}82)$ ve $(1{,}39;\ 0{,}92)$ noktalarıdır. Yuvarın bu iki nokta arasında parabolün altında kalan sağ alt kısmı tanım kümesinin dışındadır. Çember de parabol de kümeye dahil değildir. ■

8.3 Grafik

Tek değişkenli bir fonksiyonu, $(x, f(x))$ noktalarının oluşturduğu eğriyle görselleştirirdik. Aynı kavram çok değişkenli fonksiyonlar için de tanımlanır.

Tanım 8.5 (Grafik). $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun.

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

kümesine f'nin **grafiği** denir. Burada $(x, f(x))$ çifti, $\mathbb{R}^{n+m}$'nin

$$\left(x_1, ..., x_n, f_1(x), ..., f_m(x) \right)$$

noktası olarak düşünülür.

Yani grafik, tanım kümesindeki noktayı ve o noktadaki değeri yan yana yazarak elde edilen $n+m$ bileşenli noktaların kümesidir. Reel değerli bir fonksiyonun ($m = 1$) grafiği tanım uzayından bir boyut fazla olan $\mathbb{R}^{n+1}$'dedir. Örneğin:

- $n = m = 1$ ise grafik düzlemde bir eğridir; Analiz 1'in grafikleri bunlardır.
- $n = 2$, $m = 1$ ise grafik $\mathbb{R}^3$'te $z = f(x, y)$ yüzeyidir. $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği, tepesi başlangıç noktasında olan ve yukarı açılan bir paraboloittir. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ fonksiyonunun $B[(0, 0), 3]$ üzerindeki grafiği ise $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$ koşullarıyla verilen üst yarım küredir.
- $n + m \geq 4$ ise grafik çizilemez. Örneğin $f(x, y) = (x^2, xy)$ fonksiyonunun grafiği $\mathbb{R}^4$'ün bir alt kümesidir. Grafik yine de iyi tanımlı bir kümedir ve analizin araçları çizime ihtiyaç duymadan onunla çalışır.

8.4 Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler

Değerleri $\mathbb{R}^m$'de olan fonksiyonlar, $\mathbb{R}^m$'deki işlemler her noktada ayrı ayrı uygulanarak birleştirilir.

Tanım 8.6 (Vektör Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in D$ için

1. **Skalerle çarpım:** $\alpha f : D \to \mathbb{R}^m$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$;
2. **Toplam:** $f + g : D \to \mathbb{R}^m$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
3. **İç çarpım:** $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$;
4. **Vektörel çarpım** ($m = 3$ ise): $f \times g : D \to \mathbb{R}^3$, $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$;
5. **Bölüm** ($m = 1$ ve her $x \in D$ için $g(x) \neq 0$ ise): $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara sırasıyla f'nin α ile **çarpımı**, f ile g'nin **toplamı**, **iç çarpımı**, **vektörel çarpımı** ve **bölümü** denir.

Yani işlemler değerler üzerinde, her noktada ayrı ayrı yapılır. İç çarpım reel değerli bir fonksiyondur. $m = 1$ iken $\langle f(x), g(x) \rangle = f(x)g(x)$ olduğundan iç çarpım bilinen çarpımdır ve $f \cdot g$ yerine fg yazılır. Vektörel çarpım, $\mathbb{R}^3$'teki vektörel çarpımın (Tanım 2.10) her noktada uygulanmasıdır.
Fonksiyonların tanım kümeleri farklıysa işlemler ortak kısımda yapılır: $f + g$, $f \cdot g$ ve $f \times g$ fonksiyonlarının tanım kümesi $\text{dom } f \cap \text{dom } g$'dir. $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonunun tanım kümesi ise bu kesişimden g'nin sıfır olduğu noktalar çıkarılarak elde edilir.

Örnek 8.9 (İki Değişkenli Vektör Fonksiyonlarla İşlemler). $f(x, y) = (x, x + y, 2y)$ ve $g(x, y) = (xy, x, 2x)$ olsun. $f + g$, $f \cdot g$ ve $f \times g$ fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım kümeleri. Bütün bileşenler her noktada tanımlı olduğundan $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = \mathbb{R}^2$'dir; üç işlemin tanım kümesi de $\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ olur.
Toplam. Bileşen bileşen toplarız:

$$(f+g)(x,y) = \big(\, x+xy,\, 2x+y,\, 2(x+y) \,\big)\,.$$

İç çarpım. Karşılıklı bileşenlerin çarpımlarını toplarız:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x,y) &= x\cdot xy + (x+y)\cdot x + 2y\cdot 2x \\ &= x^2y + x^2 + xy + 4xy = x^2y + x^2 + 5xy.\end{aligned}$$

Sonuç reel değerli bir fonksiyondur.
Vektörel çarpım. Tanım 2.10 formülüne $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ bileşenlerini yazarız:

$$\begin{aligned}(x+y)\cdot 2x - 2y\cdot x &= 2x^2,\\ 2y\cdot xy - x\cdot 2x &= 2xy^2 - 2x^2,\\ x\cdot x - (x+y)\cdot xy &= x^2 - x^2y - xy^2.\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$(f\times g)(x,y) = \big(\, 2x^2,\, 2xy^2-2x^2,\, x^2-x^2y-xy^2 \,\big)$$

olur. ■

Örnek 8.10 (Tek Değişkenli Vektör Fonksiyonların İç Çarpımı). $f(t) = (t, 1+t, 2)$ ve $g(t) = (t^2, t, t)$ olsun. $f\cdot g$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.
f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^3$'e tek değişkenli vektör değerli fonksiyonlardır ve her $t\in\mathbb{R}$ için tanımlıdır; $f\cdot g$'nin tanım kümesi de $\mathbb{R}$'dir. Her $t\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(t) &= t\cdot t^2 + (1+t)\cdot t + 2\cdot t\\ &= t^3 + t + t^2 + 2t = t^3 + t^2 + 3t\end{aligned}$$

olur. $f\cdot g$, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyondur. ■

8.5 Limit

Analiz 1'deki limit tanımında iki uzaklık vardı: $|\,x-a\,|$ ve $|\,f(x)-\ell\,|$. Şimdi birincisini $\mathbb{R}^n$'deki, ikincisini $\mathbb{R}^m$'deki normla ölçüyoruz.

Tanım 8.7 (Fonksiyonun Bir Noktadaki Limiti). $\varnothing \neq D\subseteq\mathbb{R}^n$, $f: D\to\mathbb{R}^m$ ve $x_0\in\mathbb{R}^n$ noktası D'nin bir yığılma noktası (Tanım 3.4) olsun. $L\in\mathbb{R}^m$ için, her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$$x\in D \;\text{ ve }\; 0 < \|\,x-x_0\,\| < \delta \Rightarrow \|\,f(x)-L\,\| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa f'nin x_0 noktasındaki **limiti** L'dir denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \text{ya da} \qquad f(x)\to L \;\; (x\to x_0)$$

yazılır. Böyle bir L yoksa f'nin x_0 noktasında **limiti yoktur** denir.

Yani x, x_0'a yeterince yakın ve ondan farklı bir D noktası olduğunda $f(x)$, L'ye istenildiği kadar yakındır. Tanımdaki iki norm farklı uzaylardadır: $\|\,x-x_0\,\|$ $\mathbb{R}^n$'de, $\|\,f(x)-L\,\|$ ise $\mathbb{R}^m$'de hesaplanır. $n=m=1$ için iki norm da mutlak değerdir ve tanım Analiz 1'deki tanımın kendisidir. Sembolik olarak:
Tanımdan hemen çıkan bir gözlemi de not edelim: $D_1\subseteq D$, $x_0\in D_1'$ ve $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ise f'nin D_1 kümesine kısıtlanışının da x_0 noktasındaki limiti L'dir, çünkü tanımdaki koşul bu kez daha az sayıda x

 CC BY-NC-SA 4.0

için istenir. Bu yüzden bir fonksiyonun limitini, daha geniş bir kümede tanımlı bir ifadenin (örneğin bir polinomun) limitinden okuyabiliriz.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : \\ 0 <\| \ x - x_0 \ \| < \delta \Rightarrow \| \ f(x) - L \ \| < \varepsilon.$$

İki değişkende nokta (x, y), limit noktası (x_0, y_0) ile gösterilir ve $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ yazılır. Bu durumda

$$\| \ (x,y) - (x_0,y_0) \ \| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

olur. Tanımla ilgili üç gözlem yapalım.

- **x_0 tanım kümesinde olmak zorunda değildir.** $0 <\| \ x - x_0 \ \|$ koşulu $x = x_0$ noktasını dışarıda bırakır; f, x_0'da tanımlı olsa bile $f(x_0)$ değeri limite hiçbir etki yapmaz.
- **δ, hem ε'a hem x_0'a bağlıdır.** Bu bağlılık bazen $\delta(\varepsilon, x_0)$ yazılarak vurgulanır. Aynı fonksiyonun farklı noktalardaki limitleri için genellikle farklı δ'lar gerekir.
- **Limitin olmaması** tanımın olumsuzudur: her $L \in \mathbb{R}^m$ için

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in D : \\ 0 <\| \ x_\delta - x_0 \ \| < \delta \ \text{ ve } \ \| \ f(x_\delta) - L \ \| \geq \varepsilon_0.$$

Sözle: hangi L aday gösterilirse gösterilsin, öyle bir ε_0 yarıçapı vardır ki x_0'ın ne kadar küçük bir yuvarında aransa f'nin değeri $B(L, \varepsilon_0)$ dışında kalan bir nokta bulunur.
Tanımda x_0'ın D'nin bir yığılma noktası olması istendi. Bu koşulun neden gerekli olduğunu görmek için tersi durumu adlandıralım.

Tanım 8.8 (İzole Nokta). $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in D$ olsun. x_0, D'nin bir yığılma noktası değilse, yani

$$\big(\ B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \ \big) \cap D = \varnothing$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa x_0'a D'nin bir **izole** (ayrık) **noktası** denir.

Yani izole bir noktanın yeterince küçük bir yuvarında D'nin kendisinden başka noktası yoktur. x_0 izole bir noktaysa limit tanımı anlamını yitirir: yukarıdaki δ için "$x \in D$ ve $0 <\| \ x - x_0 \ \| < \delta$" koşulunu sağlayan hiçbir x yoktur. Bu yüzden tanımdaki koşul her $L \in \mathbb{R}^m$ için, hiçbir şey denetlenmeden sağlanır ve $\mathbb{R}^m$'nin her noktası "limit" olur. Limitten anlamlı biçimde söz edebilmek için x_0'ın yakınında D'nin x_0'dan farklı noktaları bulunmalıdır; yığılma noktası koşulu tam olarak bunu sağlar.

Örnek 8.11 (Her Noktası İzole Olan Tanım Kümesi).

$$f(x,y) = \sqrt{-\sin^2(\pi x) - \sin^2(\pi y)}$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz ve bu kümenin her noktasının izole nokta olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Tanım kümesi.** Karekökün içi negatif olmamalıdır: $\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) \leq 0$. İki kare toplamı ancak iki terim de sıfırsa sıfırdan büyük değildir; dolayısıyla $\sin(\pi x) = 0$ ve $\sin(\pi y) = 0$ olmalıdır. $\sin(\pi t) = 0$ ancak t bir tam sayıyken sağlandığından
>
> $$\operatorname{dom} f = \{(k,l) : k, l \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$$
>
> olur. Tanım kümesi, koordinatları tam sayı olan noktaların oluşturduğu kafestir ve f bu noktaların her birinde 0 değerini alır.
> **İzole noktalar.** $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ olsun ve $\delta = 1$ alalım. $(k',l') \in \mathbb{Z}^2$ noktası (k,l)'den farklıysa $k' \neq k$ ya da $l' \neq l$'dir; iki tam sayı farklıysa aralarındaki fark en az 1 olduğundan
>
> $$\| \ (k',l') - (k,l) \ \| \geq \max\{| \ k' - k \ |, | \ l' - l \ |\} \geq 1$$
>
> olur. Yani $B\big(\ (k,l), 1 \ \big)$ yuvarı $\mathbb{Z}^2$'nin (k,l)'den başka noktasını içermez ve (k,l) izole bir noktadır.

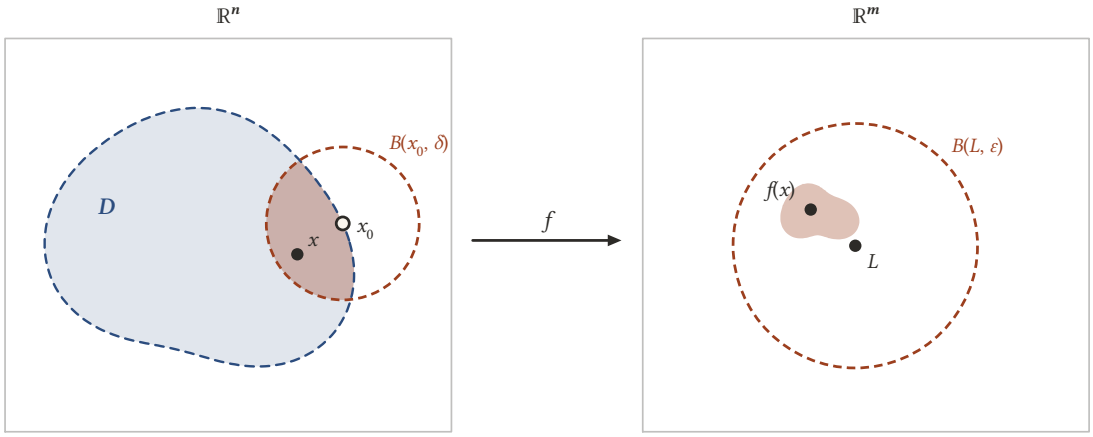
 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı gözlem düzlemin hiçbir noktasının $\mathbb{Z}^2$'nin yığılma noktası olmadığını da gösterir: yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan bir yuvar $\mathbb{Z}^2$'nin iki farklı noktasını içerseydi bu noktalar arasındaki uzaklık 1'den küçük olurdu. Öyleyse bir $p \in \mathbb{R}^2$ için $B\left(p, \frac{1}{2}\right)$ en çok bir $q \in \mathbb{Z}^2$ içerir; q yoksa ya da $q = p$ ise $r = \frac{1}{2}$, $q \neq p$ ise $r = \| q - p \|$ alınırsa $B(p, r) \setminus \{p\}$ kümesi $\mathbb{Z}^2$ ile kesişmez. Tanım kümesinin hiç yığılma noktası yoktur; bu fonksiyonun hiçbir noktada limitinden söz edilemez. ■

Limitin anlamını bir de yuvarlar ve komşuluklarla okuyalım.

Önerme 8.1 (Limitin Komşuluklarla İfadesi). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ ve $L \in \mathbb{R}^m$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.
2. *Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki*
$$f\left(D \cap \left(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \right) \right) \subseteq B(L, \varepsilon)$$
olur.
3. *L'nin $\mathbb{R}^m$'deki her U komşuluğu için x_0'ın $\mathbb{R}^n$'de öyle bir N komşuluğu vardır ki*
$$f\left(D \cap (N \setminus \{x_0\}) \right) \subseteq U$$
olur.



Şekil 8.3: Solda D *kümesi ve kenarındaki* x_0 *yığılma noktası.* D*'nin* B(x_0, δ) *yuvarına düşen,* x_0 *dışındaki parçası (turuncu)* f *altında sağdaki* B(L, ε) *yuvarının içine gider: bu parçadaki her* x *için* f(x) *de o yuvardadır.*

İspat.
1 ile 2. *$x \in D \cap \left(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \right)$ olması "$x \in D$ ve $0 < \| x - x_0 \| < \delta$" demektir; $f(x) \in B(L, \varepsilon)$ olması da $\| f(x) - L \| < \varepsilon$ demektir. Dolayısıyla 2, limit tanımının (Tanım 8.7) kümelerle yazılışıdır.*
2'den 3'e. *U, L'nin bir komşuluğu olsun. Tanım 3.1 gereği $B(L, \varepsilon) \subseteq U$ olacak bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu ε için 2'deki δ'yı alalım ve $N = B(x_0, \delta)$ diyelim; açık yuvar merkezinin bir komşuluğudur. O zaman*
$$f\left(D \cap (N \setminus \{x_0\}) \right) \subseteq B(L, \varepsilon) \subseteq U$$
olur.
3'ten 2'ye. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $U = B(L, \varepsilon)$ yuvarı L'nin bir komşuluğudur; 3 gereği $f\left(D \cap (N \setminus \{x_0\}) \right) \subseteq U$ olan bir N komşuluğu vardır. N, x_0'ın komşuluğu olduğundan $B(x_0, \delta) \subseteq N$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. Bu durumda*
$$D \cap \left(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \right) \subseteq D \cap (N \setminus \{x_0\})$$
olduğundan soldaki kümenin görüntüsü de $B(L, \varepsilon)$ içinde kalır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme, limiti bir oyun gibi okumamızı sağlar: rakip L'nin etrafına ne kadar dar bir $B(L,\varepsilon)$ yuvarı çizerse çizsin, biz x_0'ın etrafına öyle bir $B(x_0,\delta)$ yuvarı çizebiliriz ki bu yuvarın x_0 dışındaki bütün D noktaları $B(L,\varepsilon)$ içine gönderilir.

Teorem 8.1 (Limitin Tekliği). *$D\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}^m$ ve $x_0\in D'$ olsun. $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ ve $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_2$ ise $L_1=L_2$'dir.*

> ***İspat.***
> *Olmayana ergi yöntemini kullanalım: $L_1\neq L_2$ olsun. Normun pozitifliği gereği $\| L_1-L_2\|>0$'dır; $\varepsilon=\dfrac{\| L_1-L_2\|}{2}$ alalım. Limit tanımından*
>
> - *$x\in D$ ve $0<\| x-x_0\|<\delta_1$ iken $\| f(x)-L_1\|<\varepsilon$ olacak bir $\delta_1>0$,*
> - *$x\in D$ ve $0<\| x-x_0\|<\delta_2$ iken $\| f(x)-L_2\|<\varepsilon$ olacak bir $\delta_2>0$*
>
> *vardır. $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ diyelim. x_0, D'nin bir yığılma noktası olduğundan $\big(B(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}\big)\cap D$ kümesi boş değildir; bu kümeden bir x seçelim. Bu x için iki eşitsizlik birlikte sağlanır ve üçgen eşitsizliğiyle*
>
> $$\| L_1-L_2\|\leq\| L_1-f(x)\|+\| f(x)-L_2\|<\varepsilon+\varepsilon=\| L_1-L_2\|$$
>
> *elde edilir. Bir sayı kendisinden küçük olamaz; bu çelişki $L_1=L_2$ olduğunu gösterir.* ■

İspatta yığılma noktası koşulu tam olarak bir x seçebilmek için kullanıldı. İzole bir noktada böyle bir x bulunmaz ve yukarıda gördüğümüz gibi teklik bozulur. Tek değişkenli durumdaki ispat da aynıdır (bkz. Analiz 1).
En basit fonksiyonların limitleri doğrudan tanımdan okunur. Bunlar, daha karmaşık fonksiyonların limitlerini kurarken yapı taşı olacak.

Önerme 8.2 (Sabit ve İzdüşüm Fonksiyonlarının Limiti). *$D\subseteq\mathbb{R}^n$ ve $x_0=(a_1,\ldots,a_n)\in D'$ olsun.*

1. *Her $c\in\mathbb{R}^m$ için $\lim_{x\to x_0} c=c$; yani sabit fonksiyonun limiti kendi değeridir.*
2. *Her $j=1,\ldots,n$ için $\lim_{x\to x_0} x_j=a_j$; yani $x\mapsto x_j$ izdüşüm fonksiyonunun limiti x_0'ın j-inci bileşenidir.*
3. *$\lim_{x\to x_0} x=x_0$; yani birim fonksiyonun limiti x_0'dır.*

> ***İspat.***
> *$\varepsilon>0$ verilsin.*
> ***1.*** *Her $x\in D$ için $\| c-c\|=0<\varepsilon$ olduğundan herhangi bir $\delta>0$ iş görür.*
> ***2.*** *$\delta=\varepsilon$ alalım. $x\in D$ ve $0<\| x-x_0\|<\delta$ ise, bir bileşenin mutlak değeri vektörün normunu aşmadığından*
>
> $$|x_j-a_j|=\sqrt{(x_j-a_j)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}=\| x-x_0\|<\varepsilon$$
>
> *olur.*
> ***3.*** *$\delta=\varepsilon$ alalım: $0<\| x-x_0\|<\delta$ ise $\| x-x_0\|<\varepsilon$'dur.* ■

8.6 Tanımla Limit Hesabı

Tanımı kullanarak bir limiti kanıtlamak, verilen ε için uygun bir δ bulmak demektir. İki değişkende bu iş için sürekli kullanacağımız iki eşitsizliği hatırlayalım. Her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için

$$|x|\leq\| (x,y)\|,\quad |y|\leq\| (x,y)\| \tag{1}$$

ve

$$2|xy|\leq x^2+y^2 \tag{2}$$

olur. (1), $x^2\leq x^2+y^2$ eşitsizliğinin karekökünden; (2) ise $\big(|x|-|y|\big)^2\geq 0$ eşitsizliğinin açılmasından gelir. (1)'in bir noktadan uzaklık biçimi de aynı yolla elde edilir: $|x-x_0|\leq\| (x,y)-(x_0,y_0)\|$ ve $|y-y_0|\leq\| (x,y)-(x_0,y_0)\|$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda tanımla limit

1. **Aday limit.** L tahmin edilir; örneğin fonksiyonun x_0 yakınındaki birkaç noktadaki değerlerine bakılır.
2. **Farkı sınırla.** $\| f(x) - L \|$ farkı, yalnız $\| x - x_0 \|$'a bağlı ve $\| x - x_0 \| \to 0$ iken 0'a giden bir ifadeyle üstten sınırlanır; örneğin $\| f(x) - L \| \leq C \| x - x_0 \|^p$ $(C, p > 0)$. Bunun için paydalar alttan, paylar üstten sınırlanır; çoğu zaman (1) ve (2) eşitsizlikleri yeter.
3. **δ'yı seç.** $C\delta^p = \varepsilon$ eşitliğinden δ bulunur. $0 < \| x - x_0 \| < \delta$ iken $\| f(x) - L \| \leq C \| x - x_0 \|^p$ ve $C \| x - x_0 \|^p < C\delta^p = \varepsilon$ olduğu yazılır.

Örnek 8.12 (Paydası Norm Olan Fonksiyon).

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

olsun. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ olduğunu tanımla gösteriniz.

Çözüm.
f, $(x,y) \neq (0,0)$ olan her noktada tanımlıdır: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $(0,0)$ noktası tanım kümesinde değildir ama her $B\big((0,0), r\big) \setminus \{(0,0)\}$ kümesi tanım kümesinin içindedir; dolayısıyla $(0,0)$ bir yığılma noktasıdır.
Farkı sınırla. $(x,y) \neq (0,0)$ için (2) eşitsizliğiyle

$$| f(x,y) - 0 | = \frac{| xy |}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

olur; yani $| f(x,y) | \leq \frac{1}{2} \| (x,y) - (0,0) \|$.
δ'yı seç. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = 2\varepsilon$ alalım. $0 < \| (x,y) \| < \delta$ ise

$$| f(x,y) - 0 | \leq \frac{1}{2} \| (x,y) \| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$'dır. ■

Örnek 8.13 (Paydası Hiç Sıfır Olmayan Kesir).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{5}{2}$$

olduğunu tanımla gösteriniz.

Çözüm.
Payda her noktada en az 2 olduğundan fonksiyon bütün düzlemde tanımlıdır: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$. Her nokta bu kümenin yığılma noktasıdır.
Farkı hesapla. Paydaları eşitleyelim:

$$\begin{aligned} f(x,y) - \frac{5}{2} &= \frac{2(3x^2 - y^2 + 5) - 5(x^2 + y^2 + 2)}{2(x^2 + y^2 + 2)} \\ &= \frac{x^2 - 7y^2}{2(x^2 + y^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Farkı sınırla. $x^2 + y^2 \geq 0$ olduğundan $2(x^2 + y^2 + 2) \geq 4$'tür. Pay için üçgen eşitsizliği $| x^2 - 7y^2 | \leq x^2 + 7y^2$'yi verir. Böylece

$$\left| f(x,y) - \frac{5}{2} \right| \leq \frac{x^2 + 7y^2}{4}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.
***δ*'yı seç.** $0 <\| (x,y) \| < \delta$ ise (1) gereği $x^2 < \delta^2$ ve $y^2 < \delta^2$'dir; dolayısıyla

$$\left| f(x,y) - \frac{5}{2} \right| \leq \frac{x^2 + 7y^2}{4} < \frac{\delta^2 + 7\delta^2}{4} = 2\delta^2.$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $2\delta^2 = \varepsilon$, yani $\delta = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}}$ seçilirse $0 <\| (x,y) \| < \delta$ iken $\left| f(x,y) - \dfrac{5}{2} \right| < \varepsilon$ olur. Limit $\dfrac{5}{2}$'dir.
Bu örnekte limit, fonksiyonun $(0,0)$ noktasındaki değerine eşit çıktı: $f(0,0) = \dfrac{5}{2}$. Rasyonel fonksiyonlar için bunun genel bir kural olduğunu aşağıda göreceğiz. ■

Örnek 8.14 (Sinüslü Bir Limit).

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{y} = 0$$

olduğunu tanımla gösteriniz.

Çözüm.
$f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{y}$ fonksiyonunun tanım kümesi $\{(x,y) : y \neq 0\}$'dır, yani düzlemden x-ekseni çıkarılmıştır. $(0,1)$ noktasının 1'den küçük yarıçaplı her yuvarı tanım kümesinin içindedir; dolayısıyla $(0,1)$ bir yığılma noktasıdır.
Farkı sınırla. Her $t \in \mathbb{R}$ için $|\sin t| \leq |t|$ olduğunu biliyoruz (bkz. Analiz 1). $t = xy$ alınırsa $y \neq 0$ için

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|\sin(xy)|}{|y|} \leq \frac{|xy|}{|y|} = |x|$$

olur.
***δ*'yı seç.** (1) eşitsizliğinin uzaklık biçimiyle

$$|x| = |x - 0| \leq \|(x,y) - (0,1)\| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \varepsilon$ alalım. $y \neq 0$ ve $0 <\| (x,y) - (0,1) \| < \delta$ ise

$$|f(x,y) - 0| \leq |x| \leq \|(x,y) - (0,1)\| < \delta = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla limit 0'dır. ■

Limitin olmadığını göstermek için tanımın olumsuzunu kullanabiliriz.
Örnek 8.15 (Parabol Üzerinde Farklı Değer Alan Fonksiyon). $\mathbb{R}^2$'de

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y = x^2, \\ 1, & y \neq x^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını tanımla gösteriniz.

Çözüm.
Her $L \in \mathbb{R}$ için limit tanımının bozulduğunu göstereceğiz. Fikir şudur: $(0,0)$'ın her yuvarında hem parabol üzerinde ($f = 0$) hem de parabolün dışında ($f = 1$) noktalar vardır ve bir L sayısı 0'a da 1'e de aynı anda yakın olamaz.
***L* ≠ 1 ise.** $\varepsilon_0 = \dfrac{|L - 1|}{2} > 0$ alalım. $\delta > 0$ verilsin. $(x_\delta, y_\delta) = \left(0, \dfrac{\delta}{2}\right)$ noktası için $y_\delta = \dfrac{\delta}{2} \neq 0 = x_\delta^2$ olduğundan $f(x_\delta, y_\delta) = 1$'dir. Ayrıca $0 <\| (x_\delta, y_\delta) \| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ ve

$$| f(x_\delta, y_\delta) - L | = | 1 - L | = 2\varepsilon_0 \geq \varepsilon_0$$

olur.
$L = 1$ ise. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ alalım. $\delta > 0$ verilsin ve $t = \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ diyelim. (t, t^2) noktası parabol üzerindedir, dolayısıyla $f(t, t^2) = 0$'dır. $t \leq \frac{1}{2}$ olduğundan $1 + t^2 < 4$ ve

$$0 < \| (t, t^2) \| = t\sqrt{1 + t^2} < 2t \leq \delta$$

olur. Üstelik $| f(t, t^2) - 1 | = 1 \geq \varepsilon_0$'dır.
İki durumda da limitin olumsuzu sağlanır. Hiçbir $L \in \mathbb{R}$, f'nin $(0, 0)$'daki limiti olamaz; limit yoktur. ■

8.7 Limitin Dizisel Karakterizasyonu

Analiz 1'de fonksiyon limitini dizilerin limitiyle ifade etmiştik (bkz. Analiz 1). Aynı köprü $\mathbb{R}^n$'de de kurulur ve limitin olmadığını göstermenin en pratik yoludur.

Teorem 8.2 (Limitin Dizisel Karakterizasyonu). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ ve $L \in \mathbb{R}^m$ olsun. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olması için gerek ve yeter koşul şudur: terimleri $D \setminus \{x_0\}$ kümesinde olan ve x_0'a yakınsayan her (x_k) dizisi için*

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = L$$

olur.

İspat.
(⇒) *$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olsun. (x_k) dizisinin terimleri $D \setminus \{x_0\}$'da olsun ve $x_k \to x_0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Limit tanımından, $x \in D$ ve $0 < \| x - x_0 \| < \delta$ iken $\| f(x) - L \| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. $x_k \to x_0$ olduğundan bu δ için, $k \geq N$ iken $\| x_k - x_0 \| < \delta$ olacak bir $N \in \mathbb{N}$ vardır (Tanım 6.3). Ayrıca $x_k \neq x_0$ olduğundan $\| x_k - x_0 \| > 0$'dır. Dolayısıyla $k \geq N$ için $x_k \in D$ ve $0 < \| x_k - x_0 \| < \delta$ olur; buradan*

$$\| f(x_k) - L \| < \varepsilon \qquad (k \geq N)$$

çıkar. Bu, $\mathbb{R}^m$'de $f(x_k) \to L$ demektir.
(⇐) *Karşıt tersini ispatlayalım: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olmasın. Limit tanımının olumsuzu gereği öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için*

$$x \in D, \quad 0 < \| x - x_0 \| < \delta, \quad \| f(x) - L \| \geq \varepsilon_0$$

koşullarını sağlayan bir x bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için bunu $\delta = \frac{1}{k}$ ile uygulayıp elde edilen noktaya x_k diyelim:

$$x_k \in D, \quad 0 < \| x_k - x_0 \| < \frac{1}{k}, \quad \| f(x_k) - L \| \geq \varepsilon_0.$$

$\| x_k - x_0 \| > 0$ olduğundan $x_k \neq x_0$'dır; terimler $D \setminus \{x_0\}$ kümesindedir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $N > \frac{1}{\varepsilon}$ alınırsa $k \geq N$ için $\| x_k - x_0 \| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ olur; yani $x_k \to x_0$. Öte yandan her terim için $\| f(x_k) - L \| \geq \varepsilon_0$ olduğundan $f(x_k)$ dizisinin hiçbir terimi $B(L, \varepsilon_0)$ yuvarının içinde değildir; $f(x_k) \to L$ olamaz. Böylece koşulu bozan bir dizi bulduk. ■

Teoremin koşulu boş değildir: $x_0 \in D'$ olduğundan her k için $\left(B(x_0, \frac{1}{k}) \setminus \{x_0\} \right) \cap D$ kümesinden bir x_k seçilebilir ve böylece terimleri $D \setminus \{x_0\}$'da olup x_0'a yakınsayan en az bir dizi vardır.
Teorem, fonksiyon limitini dizi limitine çevirir. Bir limiti *kanıtlarken* her diziyi denetlemek gerektiğinden çoğu zaman tanım daha kullanışlıdır. Ama limitin *olmadığını* göstermek için tek bir kötü dizi, ya da farklı davranan iki dizi yeter.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 8.1 (Limitin Olmadığını Gösteren Dizisel Ölçüt). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D'$ olsun.*

1. *Terimleri $D \setminus \{x_0\}$'da olan ve x_0'a yakınsayan iki (x_k), (y_k) dizisi için $f(x_k) \to L_1$, $f(y_k) \to L_2$ ve $L_1 \neq L_2$ ise $\lim_{x\to x_0} f(x)$ yoktur.*
2. *Terimleri $D \setminus \{x_0\}$'da olan ve x_0'a yakınsayan bir (x_k) dizisi için $\big(\, f(x_k) \,\big)$ dizisi ıraksaksa $\lim_{x\to x_0} f(x)$ yoktur.*

> ***İspat.***
> *$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olduğunu varsayalım.*
> ***1.*** *Teorem 8.2 gereği $f(x_k) \to L$ ve $f(y_k) \to L$'dir. Dizilerde limit tek olduğundan (Teorem 6.1) $L_1 = L$ ve $L_2 = L$, dolayısıyla $L_1 = L_2$ olur; bu varsayımla çelişir.*
> ***2.*** *Teorem 8.2 gereği $f(x_k) \to L$ olur; yani $\big(\, f(x_k) \,\big)$ yakınsaktır. Bu da varsayımla çelişir.* ■

İki adımda limitin olmadığını gösterme

1. **İki dizi seç.** Terimleri tanım kümesinde, x_0'dan farklı ve x_0'a yakınsayan iki dizi seçilir. Formülü sadeleştiren diziler tercih edilir; örneğin terimleri bir doğru ya da bir parabol üzerinde olan, $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ ya da $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ gibi diziler.
2. **Görüntüleri karşılaştır.** $f(x_k)$ ve $f(y_k)$ dizilerinin limitleri hesaplanır. Limitler farklıysa (ya da görüntü dizilerinden biri ıraksaksa) Sonuç 8.1 gereği limit yoktur.

Örnek 8.16 (Dizilerle Limitin Olmadığını Gösterme).

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

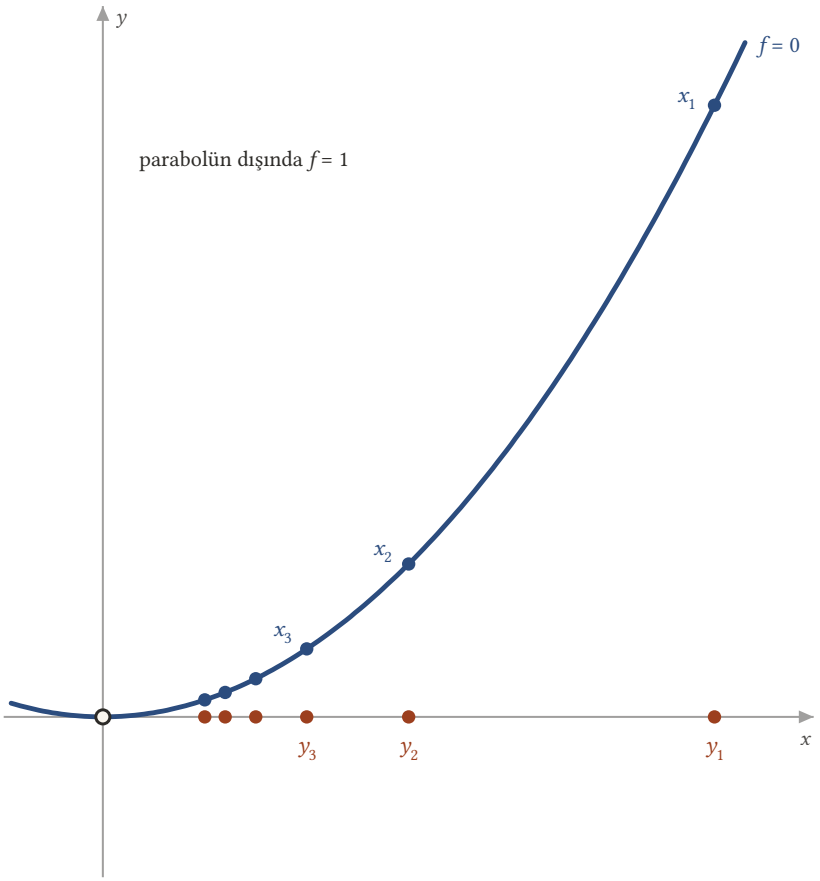
> **Çözüm.**
> $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır ve $(0,0)$ bu kümenin bir yığılma noktasıdır.
> **Birinci dizi.** $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ alalım. Terimler $(0,0)$'dan farklıdır ve bileşenler 0'a gittiğinden Teorem 6.3 gereği $x_k \to (0,0)$'dır. Her k için
>
> $$f(x_k) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$
>
> olur; dolayısıyla $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \frac{1}{2}$.
> **İkinci dizi.** $y_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ alalım. Terimler $(0,0)$'dan farklıdır ve $y_k \to (0,0)$'dır. Her k için
>
> $$f(y_k) = \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}} = \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{k^2+1}{k^4}} = \frac{k}{k^2+1}$$
>
> olur ve $0 \le \dfrac{k}{k^2+1} \le \dfrac{1}{k}$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} f(y_k) = 0$'dır.
> **Sonuç.** $\frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan Sonuç 8.1 gereği f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur.
> f sınırlı bir fonksiyondur: (2) gereği $|\, f(x,y) \,| \le \frac{1}{2}$'dir. Limit, değerlerin sonsuza kaçmasından değil, $(0,0)$'a hangi dizi üzerinden yaklaşıldığına göre farklı değerlere yaklaşmasından ötürü yoktur. Örnek 8.12 ile karşılaştıralım: orada paydadaki karekök payı yeterince hızlı küçülttüğü için limit vardı. ■

Örnek 8.17 (Parabol Örneğine Dizilerle Bakış). Örnek 8.15 fonksiyonunun, yani $y = x^2$ iken 0, $y \neq x^2$ iken 1 değerini alan fonksiyonun $(0,0)$'da limitinin olmadığını dizilerle gösteriniz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Parabol üzerinde bir dizi. $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ alalım. İkinci bileşen birincinin karesi olduğundan terimler parabol üzerindedir: $f(x_k) = 0$ ve $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0$.
Parabolün dışında bir dizi. $y_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ alalım. $0 \neq \frac{1}{k^2}$ olduğundan terimler parabolün dışındadır: $f(y_k) = 1$ ve $\lim_{k\to\infty} f(y_k) = 1$.



Şekil 8.4: $x_k = (1/k, 1/k^2)$ noktaları $y = x^2$ parabolü üzerindedir ve orada $f = 0$'dır; $y_k = (1/k, 0)$ noktaları parabolün dışındadır ve orada $f = 1$'dir. İki dizi de $(0, 0)$'a yakınsar, görüntüleri ise 0'a ve 1'e gider.

İki dizinin terimleri de $(0, 0)$'dan farklıdır ve iki dizi de $(0, 0)$'a yakınsar. Görüntü dizilerinin limitleri $0 \neq 1$ olduğundan Sonuç 8.1 gereği limit yoktur. Tanımla yapılan ispata göre çok daha kısadır. ■

8.8 Cauchy Ölçütü

Dizilerde Cauchy ölçütü (Teorem 7.6), limiti bilmeden yakınsaklığa karar vermeyi sağlıyordu. Fonksiyon limitinde de aynı ölçüt vardır (tek değişkenli hâli için bkz. Analiz 1): limitin varlığı, x_0 yakınındaki değerlerin birbirine yakın olmasıyla ifade edilir.

Teorem 8.3 (Fonksiyon Limiti için Cauchy Ölçütü). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D'$ olsun. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limitinin var olması için gerek ve yeter koşul şudur: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki*

$$x, s \in D \cap \big(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \big) \Rightarrow \| f(x) - f(s) \| < \varepsilon$$

olur.

İspat.

(⇒) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *olsun ve* $\varepsilon > 0$ *verilsin. Limit tanımını* $\dfrac{\varepsilon}{2}$ *için uygulayalım:* $x \in D$ *ve* $0 <\| x - x_0 \|< \delta$ *iken* $\| f(x) - L \|< \dfrac{\varepsilon}{2}$ *olacak bir* $\delta > 0$ *vardır.* $x, s \in D \cap \big(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \big)$ *ise iki nokta için de bu eşitsizlik sağlanır ve*

$$\| f(x) - f(s) \| \le \| f(x) - L \| + \| L - f(s) \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur.
(⇐) Koşul sağlansın. İspatı iki adımda yapacağız: önce aday bir L *bulacak, sonra limitin* L *olduğunu göstereceğiz.*
Aday limit. $x_0 \in D'$ *olduğundan her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $x_k \in D$ *ve* $0 <\| x_k - x_0 \|< \dfrac{1}{k}$ *olan bir nokta seçebiliriz;* $x_k \to x_0$ *olur.* $\big(f(x_k) \big)$ *dizisinin* $\mathbb{R}^m$*'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.* $\varepsilon > 0$ *verilsin ve koşuldaki* δ*'yı alalım.* $N > \dfrac{1}{\delta}$ *olan bir* $N \in \mathbb{N}$ *seçelim.* $k, l \ge N$ *ise*

$$0 <\| x_k - x_0 \|< \frac{1}{k} \le \frac{1}{N} < \delta$$

ve aynı biçimde $0 <\| x_l - x_0 \|< \delta$ *olur; yani* $x_k, x_l \in D \cap \big(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \big)$*'dır. Koşul gereği* $\| f(x_k) - f(x_l) \|< \varepsilon$ *olur.* $\big(f(x_k) \big)$ *bir Cauchy dizisidir; Teorem 7.6 gereği* $\mathbb{R}^m$*'de bir* L *noktasına yakınsar.*
Limit L'dir. $\varepsilon > 0$ *verilsin. Koşulu* $\dfrac{\varepsilon}{2}$ *için uygulayıp bir* $\delta > 0$ *bulalım.* $x_k \to x_0$ *ve* $f(x_k) \to L$ *olduğundan yeterince büyük bir* k *için hem* $\| x_k - x_0 \|< \delta$ *hem de* $\| f(x_k) - L \|< \dfrac{\varepsilon}{2}$ *olur; böyle bir* k *sabitleyelim. Şimdi* $x \in D$ *ve* $0 <\| x - x_0 \|< \delta$ *olsun.* x *ile* x_k *noktalarının ikisi de* $D \cap \big(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \big)$ *kümesindedir; dolayısıyla*

$$\| f(x) - L \| \le \| f(x) - f(x_k) \| + \| f(x_k) - L \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *demektir.* ■

İspatın (⇐) yönü, $\mathbb{R}^m$'nin tam olmasına, yani Cauchy dizilerinin $\mathbb{R}^m$'de yakınsamasına dayanır. Ölçütün olumsuzu, limitin olmadığını göstermek için de kullanılır: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ yoksa öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için

$$x_\delta, s_\delta \in D \cap \big(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \big), \quad \| f(x_\delta) - f(s_\delta) \| \ge \varepsilon_0$$

koşullarını sağlayan iki nokta bulunur. Bu yolun üstünlüğü, aday bir L hakkında hiçbir şey söylemeyi gerektirmemesidir.

Örnek 8.18 (Cauchy Ölçütüyle Limitin Olmadığını Gösterme). $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında Cauchy ölçütünü sağlamadığını gösteriniz.

Çözüm.
$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ alalım ve $\delta > 0$ verilsin. $t = \dfrac{\delta}{2}$ olmak üzere $x_\delta = (t,t)$ ve $s_\delta = (t,0)$ noktalarını seçelim. $\| x_\delta \| = t\sqrt{2} = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$ ve $\| s_\delta \| = t < \delta$ olduğundan iki nokta da $B\big((0,0),\delta \big) \setminus \{(0,0)\}$ içindedir. Öte yandan

$$f(x_\delta) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2},$$
$$f(s_\delta) = \frac{0}{t^2} = 0$$

olduğundan $| f(x_\delta) - f(s_\delta) | = \dfrac{1}{2} \ge \varepsilon_0$'dır. Cauchy ölçütü sağlanmaz; Teorem 8.3 gereği limit yoktur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

8.9 Limit için Cebirsel İşlemler ve Sıkıştırma

Tanımla limit hesabı her seferinde yeni bir eşitsizlik bulmayı gerektirir. Limitlerin toplam, çarpım ve bölümle uyumu bu işi büyük ölçüde ortadan kaldırır. İspatı, dizisel karakterizasyon sayesinde dizilerin limit kurallarına (Teorem 6.4) indirgeyeceğiz.

Teorem 8.4 (Limit için Cebirsel İşlemler). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$, $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1,$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

ise:

1. ***Toplam.*** $\lim_{x \to x_0}(f+g)(x) = L_1 + L_2$.
2. ***Skalerle çarpım.*** $\lim_{x \to x_0}(\alpha f)(x) = \alpha L_1$.
3. ***İç çarpım.*** $\lim_{x \to x_0}(f \cdot g)(x) = \langle L_1, L_2 \rangle$. *Özel olarak* $m = 1$ *ise* $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2$.
4. ***Norm.*** $\lim_{x \to x_0} \parallel f(x) \parallel = \parallel L_1 \parallel$.
5. ***Bölüm.*** $m = 1$ *ve* $L_2 \neq 0$ *olsun. O zaman öyle bir* $\delta_0 > 0$ *vardır ki* $x \in D$ *ve* $0 < \parallel x - x_0 \parallel < \delta_0$ *iken* $g(x) \neq 0$ *olur;* $E = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ *için* $x_0 \in E'$*'dür ve*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

olur.

6. ***Vektörel çarpım.*** $m = 3$ *ise* $\lim_{x \to x_0}(f \times g)(x) = L_1 \times L_2$.

İspat.
1, 2, 3, 4 ve 6. *Terimleri $D \setminus \{x_0\}$'da olan ve x_0'a yakınsayan keyfi bir (x_k) dizisi alalım. Teorem 8.2 gereği $\mathbb{R}^m$'de $f(x_k) \to L_1$ ve $g(x_k) \to L_2$ olur. İşlemler noktadan noktaya tanımlandığından (Tanım 8.6) $(f+g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k)$, $(\alpha f)(x_k) = \alpha f(x_k)$, $(f \cdot g)(x_k) = \langle f(x_k), g(x_k) \rangle$ ve $(f \times g)(x_k) = f(x_k) \times g(x_k)$'dir. Dizilerin limit kuralları (Teorem 6.4; toplam, skalerle çarpım, iç çarpım, norm ve vektörel çarpım maddeleri) gereği*

$$f(x_k) + g(x_k) \to L_1 + L_2,$$
$$\alpha f(x_k) \to \alpha L_1,$$
$$\langle f(x_k), g(x_k) \rangle \to \langle L_1, L_2 \rangle,$$
$$\parallel f(x_k) \parallel \to \parallel L_1 \parallel$$

olur ve $m = 3$ iken $f(x_k) \times g(x_k) \to L_1 \times L_2$'dir. (x_k) keyfi olduğundan Teorem 8.2 teoreminin ($\Leftarrow$) yönü her fonksiyonun limitini verir. $m = 1$ iken $\langle f(x), g(x) \rangle = f(x)g(x)$ olduğundan çarpım kuralı 3'ün özel durumudur.

5. *Önce g'nin x_0 yakınında sıfır olmadığını gösterelim. Limit tanımını $\varepsilon = \dfrac{\mid L_2 \mid}{2} > 0$ için uygulayalım: $x \in D$ ve $0 < \parallel x - x_0 \parallel < \delta_0$ iken $\mid g(x) - L_2 \mid < \dfrac{\mid L_2 \mid}{2}$ olacak bir $\delta_0 > 0$ vardır. Bu x'ler için ters üçgen eşitsizliğiyle*

$$\mid g(x) \mid \geq \mid L_2 \mid - \mid g(x) - L_2 \mid > \mid L_2 \mid - \frac{\mid L_2 \mid}{2} = \frac{\mid L_2 \mid}{2} > 0$$

olur. Dolayısıyla $D \cap \big(B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\} \big) \subseteq E$'dir. Her $r > 0$ için $\rho = \min\{r, \delta_0\}$ alınırsa $x_0 \in D'$ olduğundan $D \cap \big(B(x_0, \rho) \setminus \{x_0\} \big)$ boş değildir ve bu kümenin noktaları E'dedir; yani $x_0 \in E'$'dür. Şimdi terimleri $E \setminus \{x_0\}$'da olan ve x_0'a yakınsayan bir (x_k) dizisi alalım. $E \subseteq D$ olduğundan Teorem 8.2 gereği $f(x_k) \to L_1$ ve $g(x_k) \to L_2$'dir; ayrıca her k için $g(x_k) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$'dır. Reel dizilerin bölüm kuralı (bkz. Analiz 1) gereği $\dfrac{f(x_k)}{g(x_k)} \to \dfrac{L_1}{L_2}$ olur. Teorem 8.2, $\dfrac{f}{g} : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna uygulanırsa sonuç çıkar. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem, limitleri **var olan** fonksiyonlar hakkındadır; tersi doğru değildir. Örneğin $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ve $g = -f$ fonksiyonlarının $(0,0)$'da limiti yoktur (Örnek 8.16), ama $f+g=0$ fonksiyonunun limiti 0'dır. Bir limiti parçalarına ayırmadan önce parçaların limitlerinin var olduğundan emin olunmalıdır.
Reel değerli fonksiyonlar için sıralamayla ilgili bir araç daha vardır.

Teorem 8.5 (Sıkıştırma Teoremi). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$ ve $f,g,h : D \to \mathbb{R}$ olsun. Bir $r>0$ için*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \left(\, x \in D, 0 < \| \, x - x_0 \, \| < r \, \right)$$

olsun. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$ ise $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$'dir.

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. Limit tanımından*
>
> - *$x \in D$ ve $0 < \| \, x - x_0 \, \| < \delta_1$ iken $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$, dolayısıyla $L - \varepsilon < f(x)$ olacak bir $\delta_1 > 0$,*
> - *$x \in D$ ve $0 < \| \, x - x_0 \, \| < \delta_2$ iken $\mid g(x) - L \mid < \varepsilon$, dolayısıyla $g(x) < L + \varepsilon$ olacak bir $\delta_2 > 0$*
>
> *vardır. $\delta = \min\{r, \delta_1, \delta_2\}$ diyelim. $x \in D$ ve $0 < \| \, x - x_0 \, \| < \delta$ ise üç eşitsizlik birlikte sağlanır:*
>
> $$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon.$$
>
> *Yani $\mid h(x) - L \mid < \varepsilon$'dur; bu, $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$ demektir.* ■

Teoremin Analiz 1'deki karşılığı (bkz. Analiz 1) aynı ispata sahiptir. Uygulamada en sık kullanılan biçimi, farkın normunu sıfıra giden bir fonksiyonla sınırlamaktır; bu biçim vektör değerli fonksiyonlarda da çalışır.

Sonuç 8.2 (Sıfıra Giden Fonksiyonla Karşılaştırma). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $L \in \mathbb{R}^m$ ve $h : D \to \mathbb{R}$ olsun. Bir $r>0$ için*

$$\| \, f(x) - L \, \| \leq h(x) \qquad \left(\, x \in D, 0 < \| \, x - x_0 \, \| < r \, \right)$$

ve $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ ise $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$'dir.

> ***İspat.***
> *$0 \leq \| \, f(x) - L \, \| \leq h(x)$ olur. Sabit 0 fonksiyonunun limiti 0'dır (Önerme 8.2) ve h'nin limiti 0'dır; Teorem 8.5 gereği $\lim_{x\to x_0} \| \, f(x) - L \, \| = 0$'dır. Bu limitin tanımı, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunmasıdır öyle ki $x \in D$ ve $0 < \| \, x - x_0 \, \| < \delta$ iken*
>
> $$\left| \, \| \, f(x) - L \, \| - 0 \, \right| = \| \, f(x) - L \, \| < \varepsilon$$
>
> *olur. Bu da $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ tanımının kendisidir.* ■

Yani $\| \, f(x) - L \, \|$ farkını, x_0'da sıfıra gittiğini bildiğimiz bir fonksiyonla sınırlamak yeter. Tanımla limit hesabında yaptığımız da buydu: Örnek 8.12 örneğinde $h(x,y) = \dfrac{1}{2} \, \| \, (x,y) \, \|$ fonksiyonunu kullandık.
Son olarak, tek değişkenli sürekli fonksiyonların limite girebildiğini gösterelim. Böylece e^y, $\sin(xy)$, $\sqrt{x^2+y^2}$ gibi ifadelerin limitleri de hesaplanabilir.

Önerme 8.3 (Tek Değişkenli Sürekli Fonksiyonla Bileşke). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$, $g : D \to \mathbb{R}$ ve $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ olsun. $I \subseteq \mathbb{R}$ kümesi $g(D) \subseteq I$ ve $b \in I$ koşullarını sağlasın ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu b noktasında sürekli olsun (bkz. Analiz 1). O zaman*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi \left(\, g(x) \, \right) = \varphi(b)$$

olur.

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. φ, b'de sürekli olduğundan*
>
> $$t \in I \;\text{ ve }\; \mid t - b \mid < \eta \Rightarrow \mid \varphi(t) - \varphi(b) \mid < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olacak bir $\eta > 0$ vardır. $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ olduğundan, limit tanımını η için uygulayarak, $x \in D$ ve $0 < \| x - x_0 \| < \delta$ iken $| g(x) - b | < \eta$ olacak bir $\delta > 0$ buluruz. Bu x'ler için $t = g(x) \in I$ ve $| t - b | < \eta$ olduğundan $| \varphi(g(x)) - \varphi(b) | < \varepsilon$ olur. ■

Örneğin Önerme 8.2 gereği $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$ olduğundan, üstel fonksiyonun sürekliliğiyle $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^y = e^{y_0}$ bulunur. Dış fonksiyonun da çok değişkenli olabildiği genel bileşke, süreklilik bölümünde ele alınacak.

Örnek 8.19 (Sıkıştırmayla Limit).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır. Bu kümede $y^2 \le x^2 + y^2$ olduğundan $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$'dir; dolayısıyla

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2 \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \le x^2$$

olur. Alt sınır sabit 0 fonksiyonudur ve limiti 0'dır. Üst sınır için Önerme 8.2 gereği $\lim x = 0$'dır; Teorem 8.4 çarpım kuralıyla $\lim x^2 = 0 \cdot 0 = 0$ olur. Teorem 8.5 gereği aradaki fonksiyonun limiti de 0'dır. ■

8.10 $\mathbb{R}^n$'de Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar

Cebirsel işlemler teoreminin ilk büyük uygulaması, en basit çok değişkenli fonksiyonlar olan polinomlardır.

Tanım 8.9 ($\mathbb{R}^n$'de Polinom). $N_1, \dots, N_n$ negatif olmayan tam sayılar ve $a_{j_1 j_2 \cdots j_n} \in \mathbb{R}$ sabit katsayılar olmak üzere, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$P(x) = \sum_{j_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{j_n=0}^{N_n} a_{j_1 j_2 \cdots j_n}\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$$

biçimindeki reel değerli fonksiyonlara $\mathbb{R}^n$'de (ya da n değişkenli) **polinom** denir. Katsayısı sıfırdan farklı olan terimler arasında $j_1 + j_2 + \dots + j_n$ toplamının en büyük değerine polinomun **derecesi** denir. n değişkenli bütün polinomların kümesi $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ile gösterilir.

Yani polinom, $a\, x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ biçimindeki sonlu sayıda terimin toplamıdır; bir terimin derecesi değişkenlerin kuvvetlerinin toplamıdır, polinomun derecesi de terimlerin derecelerinin en büyüğüdür. Örneğin iki değişkende

$$P(x,y) = x^4 + 5x^3y^2 + xy^4 - 7y + 6$$

polinomunun terimlerinin dereceleri sırasıyla 4, $3+2=5$, $1+4=5$, 1 ve 0'dır; P beşinci dereceden bir polinomdur. $3x^2y$ üçüncü, x^2+y^2 ikinci dereceden birer polinomdur. Polinomlar her noktada tanımlıdır ve değerleri gerçel sayılardır.

Tanım 8.10 (Rasyonel Fonksiyon). P ve Q, $\mathbb{R}^n$'de iki polinom olsun.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad x \in \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \neq 0\}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}^n$'de bir **rasyonel fonksiyon** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani rasyonel fonksiyon iki polinomun bölümüdür ve paydanın sıfır olduğu noktalarda tanımsızdır. Bu bölümde gördüğümüz $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ve $\dfrac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$ fonksiyonları birer rasyonel fonksiyondur.

Önerme 8.4 (Polinomların ve Rasyonel Fonksiyonların Limiti). *P ve Q, $\mathbb{R}^n$'de iki polinom ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

1. $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.
2. $Q(x_0) \neq 0$ *ise* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

İspat.
$x_0 = (a_1, ..., a_n)$ yazalım. Polinomların tanım kümesi $\mathbb{R}^n$'dir ve her nokta $\mathbb{R}^n$'nin bir yığılma noktasıdır.
Terimler. *$j_1 + ... + j_n = d$ olsun ve $T(x) = x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ terimini düşünelim. $d = 0$ ise $T = 1$ sabit fonksiyondur ve limiti $1 = T(x_0)$'dır (Önerme 8.2). $d \geq 1$ ise T, her biri $x \mapsto x_i$ biçiminde olan d tane izdüşüm fonksiyonunun çarpımıdır. Önerme 8.2 gereği her izdüşümün limiti a_i'dir. Çarpım kuralını (Teorem 8.4) çarpan sayısı üzerinden tümevarımla $d-1$ kez uygularsak*

$$\lim_{x\to x_0} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n} = a_1^{j_1}\cdots a_n^{j_n} = T(x_0)$$

buluruz.
Polinom. *P, sonlu sayıda terimin katsayılarla çarpılıp toplanmasıyla elde edilir. Skalerle çarpım kuralı her terimin limitini katsayısıyla çarpar; toplam kuralı terim sayısı üzerinden tümevarımla uygulanınca*

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \sum a_{j_1\cdots j_n}\, a_1^{j_1}\cdots a_n^{j_n} = P(x_0)$$

olur.
Rasyonel fonksiyon. *1 gereği $P(x) \to P(x_0)$ ve $Q(x) \to Q(x_0) \neq 0$'dır. Teorem 8.4 teoreminin bölüm kuralı, x_0'ın $\{Q \neq 0\}$ kümesinin bir yığılma noktası olduğunu ve $\dfrac{P}{Q}$'nun limitinin $\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ olduğunu verir.* ■

Yani bir polinomun limiti, x_0 noktasını yerine yazarak bulunur; paydası x_0'da sıfır olmayan rasyonel fonksiyonlar için de aynısı geçerlidir. Tek değişkenli karşılığı Analiz 1'den bilinir (bkz. Analiz 1). Paydanın x_0'da sıfır olduğu durumda önerme hiçbir şey söylemez; o zaman tanıma, dizilere ya da sıkıştırmaya başvurmak gerekir.

Örnek 8.20 (Yerine Koyarak Limit).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2+x-y}{1+2x^2+3y^2}$$

limitini bulunuz.

Çözüm.
$P(x,y) = 2+x-y$ ve $Q(x,y) = 1+2x^2+3y^2$ birer polinomdur. Önerme 8.4 gereği

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} P(x,y) = P(0,0) = 2,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} Q(x,y) = Q(0,0) = 1$$

olur. $Q(0,0) = 1 \neq 0$ olduğundan bölüm kuralı uygulanır:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2+x-y}{1+2x^2+3y^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

■

Örnek 8.21 (Paydası Sıfır Olan Rasyonel Fonksiyon).

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz ve tanımla kanıtlayınız.

Çözüm.
$f = \dfrac{P}{Q}$ biçimindedir; $P(x,y) = 3x^2y$ üçüncü, $Q(x,y) = x^2+y^2$ ikinci dereceden bir polinomdur. $Q(0,0) = 0$ olduğundan Önerme 8.4 kullanılamaz; pay da paydada sıfıra gider. Pay ve payda homojendir; pay üçüncü, payda ikinci derecedendir ve payda yalnız $(0,0)$'da sıfırlanır. Bu durumda $(0,0)$ yakınında pay paydadan hızlı küçülür ve limitin 0 olması beklenir. Ama bu bir tahmindir; kanıt gerekir. Payda başka noktalarda da sıfırlanıyorsa derece karşılaştırması yanıltabilir (Örnek 9.6).
Farkı sınırla. $(x,y) \neq (0,0)$ için (2) eşitsizliğini $2 \mid xy \mid \leq x^2+y^2$ biçiminde kullanırsak

$$\mid f(x,y) \mid = \frac{3x^2 \mid y \mid}{x^2+y^2} = \frac{3}{2} \mid x \mid \cdot \frac{2 \mid xy \mid}{x^2+y^2} \leq \frac{3}{2} \mid x \mid$$

olur. (1) gereği $\mid x \mid \leq \parallel (x,y) \parallel$ olduğundan $\mid f(x,y) \mid \leq \dfrac{3}{2} \parallel (x,y) \parallel$'dir.
δ'yı seç. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{3}$ alalım. $0 < \parallel (x,y) \parallel < \delta$ ise

$$\mid f(x,y) - 0 \mid \leq \frac{3}{2} \parallel (x,y) \parallel < \frac{3}{2}\delta = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$'dır. ■

8.11 Limitin Bileşenlerle Hesabı

Dizilerde yakınsaklığın bileşenlerin yakınsaklığıyla aynı şey olduğunu görmüştük (Teorem 6.3). Fonksiyonlarda da vektör değerli bir limit, bileşenlerin limitlerinden oluşur.

Teorem 8.6 (Limitin Bileşenlerle Hesabı). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$, $f = (f_1, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ ve $L = (L_1, ..., L_m) \in \mathbb{R}^m$ olsun. O zaman*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f_j(x) = L_j \quad (j = 1, 2, ..., m)$$

olur.

İspat.
Terimleri $D \setminus \{x_0\}$'da olan ve x_0'a yakınsayan keyfi bir (x_k) dizisi alalım. $f(x_k)$ noktasının bileşenleri $f_1(x_k), ..., f_m(x_k)$ olduğundan Teorem 6.3 gereği

$$f(x_k) \to L \Leftrightarrow f_j(x_k) \to L_j \quad (j = 1, ..., m) \tag{3}$$

olur.
(⇒) *$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olsun. Teorem 8.2 gereği $f(x_k) \to L$; (3) gereği her j için $f_j(x_k) \to L_j$ olur. Dizi keyfi olduğundan Teorem 8.2, f_j fonksiyonuna uygulanınca $\lim_{x\to x_0} f_j(x) = L_j$ verir.*
(⇐) *Her j için $\lim_{x\to x_0} f_j(x) = L_j$ olsun. Teorem 8.2 gereği her j için $f_j(x_k) \to L_j$; (3) gereği $f(x_k) \to L$ olur. Dizi keyfi olduğundan Teorem 8.2 gereği $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$'dir.* ■

Yani vektör değerli bir fonksiyonun limiti bileşen bileşen hesaplanır ve bileşenlerden birinin limiti yoksa f'nin de limiti yoktur. $x_0 = (a_1, ..., a_n)$ iken bileşenlerin limiti bazen

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1 \\ \vdots \\ x_n\to a_n}} f_j(x_1, ..., x_n) = L_j$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçiminde de yazılır. Bu yazımda bütün değişkenler **aynı anda** yaklaşır; yani yazılan şey $x \to x_0$ limitidir. Değişkenlerin sırayla, biri sabit tutulurken öbürü yaklaştırılarak alınan limitler başka bir kavramdır ve sonraki bölümde ele alınacak.

Üç adımda bileşenlerle limit

1. **Bileşenlere ayır.** $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ve x_0 yazılır; x_0'ın tanım kümesinin yığılma noktası olduğu denetlenir.
2. **Her bileşenin limitini bul.** Payda x_0'da sıfır değilse Önerme 8.4 ve Teorem 8.4, tek değişkenli fonksiyonlar için Önerme 8.3, belirsizlik durumunda sıkıştırma (Teorem 8.5, Sonuç 8.2) ya da tanım kullanılır.
3. **Birleştir.** Teorem 8.6 gereği $\lim_{x\to x_0} f(x) = (L_1, \ldots, L_m)$ olur.

Örnek 8.22 (Üstel Bileşenli Fonksiyonun Limiti).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2xy + 1, e^y + 2 \right)$$

limitini bulunuz.

Çözüm.
Bileşenler $f_1(x,y) = 2xy + 1$ ve $f_2(x,y) = e^y + 2$'dir; ikisi de her noktada tanımlıdır.
Birinci bileşen. f_1 bir polinomdur; Önerme 8.4 gereği limiti $f_1(0,0) = 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$'dir.
İkinci bileşen. Önerme 8.2 gereği $\lim y = 0$'dır. Üstel fonksiyon 0'da sürekli olduğundan Önerme 8.3 gereği $\lim e^y = e^0 = 1$'dir. Sabit 2'nin limiti 2 olduğundan toplam kuralıyla $\lim f_2 = 1 + 2 = 3$ olur.
Birleştir. Teorem 8.6 gereği

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2xy + 1, e^y + 2 \right) = (1, 3)$$

olur. ■

Örnek 8.23 (Kesirli Bileşenin Limiti).

$$f(x,y) = \left(\frac{x-1}{y}, x + 2 \right)$$

fonksiyonunun $(1, -1)$ noktasındaki limitini bulunuz.

Çözüm.
$\operatorname{dom} f = \{(x,y) : y \neq 0\}$'dır; $(1,-1)$ bu kümededir ve 1'den küçük yarıçaplı her yuvarı kümenin içinde kaldığından bir yığılma noktasıdır.
Birinci bileşen. $f_1 = \dfrac{x-1}{y}$ bir rasyonel fonksiyondur ve paydası $(1,-1)$'de $-1 \neq 0$'dır. Önerme 8.4 gereği

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x-1}{y} = \frac{1-1}{-1} = 0.$$

İkinci bileşen. $f_2 = x + 2$ bir polinomdur; limiti $1 + 2 = 3$'tür.
Birleştir. Teorem 8.6 gereği $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = (0, 3)$'tür. ■

Örnek 8.24 (Sinüs ve Tanjant Bileşenli Fonksiyon).

$$f(x,y) = \left(\frac{y \sin x}{x}, \tan \frac{x}{y}, x^2 + y^2 - xy \right)$$

fonksiyonunun $(0, 1)$ noktasındaki limitini bulunuz.

Çözüm.

Tanım kümesi. f_1 için $x \neq 0$; f_2 için $y \neq 0$ ve $\dfrac{x}{y} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gerekir; f_3 her yerde tanımlıdır. $(0,1)$ noktası tanım kümesinde değildir, çünkü $x = 0$'dır. Ama $0 < |\, t \,| < \dfrac{\pi}{2}$ için $(t,1)$ noktaları tanım kümesindedir ve $(0,1)$'e istenildiği kadar yakındır; $(0,1)$ bir yığılma noktasıdır.
Birinci bileşen. $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ ($t \neq 0$), $\varphi(0) = 1$ fonksiyonu $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan 0'da süreklidir (bkz. Analiz 1). Tanım kümesinde $x \neq 0$ olduğundan $\dfrac{\sin x}{x} = \varphi(x)$'tir; $\lim x = 0$ olduğundan Önerme 8.3 gereği $\lim \dfrac{\sin x}{x} = \varphi(0) = 1$'dir. $\lim y = 1$ olduğundan çarpım kuralıyla

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y \sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

İkinci bileşen. $\dfrac{x}{y}$ rasyonel fonksiyonunun paydası $(0,1)$'de $1 \neq 0$'dır; limiti $\dfrac{0}{1} = 0$'dır. Tanım kümesinde $\dfrac{x}{y}$ tanjantın tanım kümesindedir ve tanjant 0'da süreklidir (bkz. Analiz 1). Önerme 8.3 gereği

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan \frac{x}{y} = \tan 0 = 0.$$

Üçüncü bileşen. Polinomdur; limiti $0^2 + 1^2 - 0 \cdot 1 = 1$'dir.
Birleştir. Teorem 8.6 gereği $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = (1,0,1)$'dir. ■

Örnek 8.25 (Sıkıştırmayla Hesaplanan Bileşenler).

$$f(x,y) = \left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2},\ \frac{\sqrt{|\, xy \,|}}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \right)$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitinin $(0,0)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İki bileşen de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'da tanımlıdır ve $(0,0)$'da $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği verir. Tek değişkenli limitlerdeki L'Hôpital kuralının burada bir karşılığı yoktur; her bileşeni sıkıştırmayla inceleyeceğiz.
Birinci bileşen. $2x^2y^2 \geq 0$ olduğundan

$$0 \leq x^4 + y^4 \leq x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

olur; $x^2 + y^2 > 0$ ile bölersek

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2.$$

Üst sınır bir polinomdur ve limiti 0'dır (Önerme 8.4); Teorem 8.5 gereği birinci bileşenin limiti 0'dır.
İkinci bileşen. (2) eşitsizliği $|\, xy \,| \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ verir; karekök alırsak $\sqrt{|\, xy \,|} \leq \dfrac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{\sqrt{2}}$ olur. Buradan

$$0 \leq \frac{\sqrt{|\, xy \,|}}{(x^2 + y^2)^{1/3}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^{1/2 - 1/3}}{\sqrt{2}} = \frac{\| \,(x,y)\, \|^{1/3}}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Üst sınırın limitinin 0 olduğunu tanımla gösterelim: $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \left(\sqrt{2}\,\varepsilon \right)^3 = 2\sqrt{2}\,\varepsilon^3$ alalım. $0 < \| \,(x,y)\, \| < \delta$ ise

$$\frac{\| \,(x,y)\, \|^{1/3}}{\sqrt{2}} < \frac{\delta^{1/3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$$

olur. Teorem 8.5 gereği ikinci bileşenin limiti de 0'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Birleştir. Teorem 8.6 gereği $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$'dır. ■

Örnek 8.26 (Çarpanlara Ayırarak Sıkıştırma).

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-1}{y^2+1},\ \frac{x^2y - 2xy + y - (x-1)^2}{x^2+y^2-2x-2y+2} \right)$$

fonksiyonunun $(1,1)$ noktasındaki limitini bulunuz.

Çözüm.
Birinci bileşen. $\dfrac{x^2-1}{y^2+1}$ rasyonel fonksiyonunun paydası hiçbir yerde sıfır değildir; $(1,1)$'de 2'dir. Önerme 8.4 gereği limit $\dfrac{1-1}{1+1} = 0$'dır.
İkinci bileşen. Burada pay da payda da $(1,1)$'de sıfırdır. İkisini de düzenleyelim:

$$x^2y - 2xy + y - (x-1)^2 = y(x-1)^2 - (x-1)^2 = (x-1)^2(y-1),$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Payda yalnız $(1,1)$'de sıfırdır; tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$'dir ve

$$f_2(x,y) = \frac{(x-1)^2(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

olur. $(x-1)^2 \le (x-1)^2 + (y-1)^2$ olduğundan

$$|\ f_2(x,y) - 0\ | \le |\ y-1\ |$$

bulunur. $y-1$ polinomunun $(1,1)$'deki limiti 0'dır ve norm kuralı (Teorem 8.4, $m=1$ için mutlak değer) gereği $\lim |\ y-1\ | = 0$'dır. Sonuç 8.2 gereği $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x,y) = 0$'dır.
Birleştir. Teorem 8.6 gereği $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = (0,0)$'dır. ■

8.12 Alıştırmalar

İlk altı alıştırmada maksimal tanım kümesi bulunur; sonraki üçünde limit, tanımla ya da dizilerle incelenir.

Alıştırma 8.1 (Karekök ve Logaritmanın Toplamı). $f(x,y) = \sqrt{x^2-y} + \ln(y-1)$ fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz ve betimleyiniz.

Çözüm.
Birinci terim. $x^2 - y \ge 0$, yani $y \le x^2$ olmalıdır: parabol ve altı.
İkinci terim. $y - 1 > 0$, yani $y > 1$ olmalıdır: $y = 1$ doğrusunun üstü.
Kesişim.

$$\text{dom } f = \{(x,y) : 1 < y \le x^2\}.$$

Bu kümenin boş olmaması için $x^2 > 1$, yani $|\ x\ | > 1$ gerekir. Dolayısıyla tanım kümesi iki ayrı parçadan oluşur: $x > 1$ ve $x < -1$ yanlarında, $y = 1$ doğrusunun üstünde ve $y = x^2$ parabolünün üzerinde ya da altında kalan bölgeler. Parabol yayları kümeye dahildir, $y = 1$ doğrusu dahil değildir; iki parça da yukarı doğru sınırsızdır. ■

Alıştırma 8.2 (Açının İçinde Kalan Bölge).

$$f(x,y) = \left(\ \sqrt{1-x^2},\ \ln(x^2-y^2),\ \sin x \cos y\ \right)$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci bileşen. $1 - x^2 \geq 0$, yani $\mid x \mid \leq 1$.
İkinci bileşen. $x^2 - y^2 > 0$, yani $y^2 < x^2$; iki yanın karekökü alınırsa $\mid y \mid < \mid x \mid$.
Üçüncü bileşen. Her yerde tanımlıdır.
Kesişim.

$$\text{dom } f = \{(x, y) : \mid y \mid < \mid x \mid \leq 1\}.$$

$\mid y \mid < \mid x \mid$ koşulu, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularının arasında kalan ve x-eksenini içeren iki açık açısal bölgeyi betimler; bu koşul $x \neq 0$'ı da gerektirir, dolayısıyla başlangıç noktası kümede değildir. $\mid x \mid \leq 1$ ile kesişince, tepeleri başlangıç noktasında olan ve $x = \pm 1$ doğrularıyla kapanan iki üçgen bölge elde edilir: tanım kümesi bir papyonu andırır. Üçgenlerin $x = \pm 1$ üzerindeki kenarları (uç noktaları hariç) kümeye dahildir, $y = \pm x$ üzerindeki kenarlar dahil değildir. ■

Alıştırma 8.3 (Tanjant Bileşenli Fonksiyonun Tanım Kümesi).

$$f(x, y) = \left(\frac{y \sin x}{x},\, \tan \frac{x}{y},\, x^2 + y^2 - xy \right)$$

fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
Birinci bileşen. Payda sıfır olmamalıdır: $x \neq 0$.
İkinci bileşen. Önce $\dfrac{x}{y}$ tanımlı olmalıdır: $y \neq 0$. Ayrıca tanjant, kosinüsün sıfır olduğu noktalarda tanımsızdır:

$$\frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\, y \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Üçüncü bileşen. Polinomdur; her yerde tanımlıdır.
Kesişim.

$$\text{dom } f = \Big\{ (x, y) : x \neq 0,\, y \neq 0,\; x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\, y \;\; (k \in \mathbb{Z}) \Big\}.$$

Tanım kümesi, düzlemden iki koordinat ekseni ve başlangıç noktasından geçen $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\, y$ doğrularının ($k \in \mathbb{Z}$) çıkarılmasıyla elde edilir. Bu doğruların eğimleri $\dfrac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}$ sayılarıdır ve $\mid k \mid$ büyüdükçe x-eksenine yaklaşırlar. Örnek 8.24 örneğinde bu fonksiyonun $(0, 1)$ noktasındaki limitini hesaplamıştık. ■

Alıştırma 8.4 (Çarpımın Karekökü). $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)(y + 2)}$ fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
Karekökün içi negatif olmamalıdır: $(x - 1)(y + 2) \geq 0$. Bir çarpım ancak çarpanlar aynı işaretliyse ya da çarpanlardan biri sıfırsa negatif değildir:

$$\text{dom } f = \{x \geq 1, y \geq -2\} \cup \{x \leq 1, y \leq -2\}.$$

Tanım kümesi, $x = 1$ ve $y = -2$ doğrularının ayırdığı dört bölgeden sağ üstteki ile sol alttakinin, kenarlarıyla birlikte birleşimidir. Örnek 8.1 örneğindeki logaritmalı bileşenle karşılaştıralım: orada eşitsizlik kesin olduğu için doğrular kümeye dahil değildi; burada karekök sıfırda da tanımlı olduğu için iki doğrunun tamamı kümeye dahildir. ■

Alıştırma 8.5 (Bölümün Logaritması). $f(x, y) = \ln \dfrac{x}{y}$ fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Önce kesir tanımlı olmalıdır: $y \neq 0$. Sonra logaritmanın içi pozitif olmalıdır: $\dfrac{x}{y} > 0$. Bir bölüm ancak pay ve payda aynı işaretliyse pozitiftir; bu da $xy > 0$ demektir ($y \neq 0$ koşulunu da içerir):

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) : xy > 0\} = \{x > 0, y > 0\} \cup \{x < 0, y < 0\}.$$

Tanım kümesi birinci ve üçüncü açık çeyrek düzlemlerin birleşimidir; eksenler kümeye dahil değildir. $\ln x - \ln y$ fonksiyonuyla karşılaştıralım: onun tanım kümesi yalnız birinci çeyrektir. İki formül birinci çeyrekte aynı değeri verir, ama tanım kümeleri farklı olduğundan farklı fonksiyonlardır. ■

Alıştırma 8.6 (Dama Tahtasına Benzeyen Tanım Kümesi). $f(x,y) = \sqrt{y \sin x}$ fonksiyonunun maksimal tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.
Karekökün içi negatif olmamalıdır: $y \sin x \geq 0$. Bu, iki çarpanın aynı işaretli olması ya da birinin sıfır olması demektir:

- $y \geq 0$ ve $\sin x \geq 0$; $\sin x \geq 0$ ancak $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$ iken sağlanır;
- $y \leq 0$ ve $\sin x \leq 0$; $\sin x \leq 0$ ancak $x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$ iken sağlanır.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} f = &\Big\{\, y \geq 0,\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \,\Big\} \\ &\cup \Big\{\, y \leq 0,\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi] \,\Big\}\end{aligned}$$

olur. Genişliği π olan dikey şeritler sırayla üst yarıda ve alt yarıda kümeye girer: $[0,\pi]$ şeridinin üst yarısı, $[\pi, 2\pi]$ şeridinin alt yarısı, $[2\pi, 3\pi]$ şeridinin üst yarısı ve bu biçimde devam eder; görüntü bir dama tahtasını andırır. x-ekseninin tamamı ($y = 0$) ve $x = k\pi$ dikey doğrularının tamamı ($\sin x = 0$) da kümeye dahildir. ■

Alıştırma 8.7 (Eşleniğiyle Tanımla Limit).

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1 + x^2y^2} - 1}{x^2 + y^2}$$

olsun. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ olduğunu tanımla gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır.
Eşlenikle çarp. Payı ve paydayı $\sqrt{1 + x^2y^2} + 1$ ile çarparsak

$$f(x,y) = \frac{(1 + x^2y^2) - 1}{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{1 + x^2y^2} + 1\right)} = \frac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{1 + x^2y^2} + 1\right)}$$

olur; $f(x,y) \geq 0$'dır.
Farkı sınırla. $\sqrt{1 + x^2y^2} \geq 1$ olduğundan ikinci çarpan en az 2'dir. (2) eşitsizliğiyle $x^2y^2 = |\,xy\,| \cdot |\,xy\,| \leq |\,xy\,| \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ olur. Böylece

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)} \leq \frac{|\,xy\,|}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{8} = \frac{\|\,(x,y)\,\|^2}{8}$$

bulunur; son adımda (2) yeniden kullanıldı.
***δ*'yı seç.** $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \sqrt{8\varepsilon}$ alalım. $0 < \|\,(x,y)\,\| < \delta$ ise

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| f(x,y) - 0 | \leq \frac{\| (x,y) \|^2}{8} < \frac{\delta^2}{8} = \varepsilon$$

olur. Limit 0'dır. ■

Alıştırma 8.8 (Köşegen Üzerinde Farklı Tanımlı Fonksiyon).

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, x \neq y, \\ 1, \qquad x = y \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
f bütün düzlemde tanımlıdır; $(0,0)$ bir yığılma noktasıdır. Köşegen dışında $f(x,y) = x+y$ olduğundan limitin 0 olması beklenebilir; ama köşegende değer hep 1'dir. İki diziyle karşılaştıralım.
Köşegen üzerinde. $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ alalım. Terimler $(0,0)$'dan farklıdır, $x_k \to (0,0)$'dır ve iki bileşen eşit olduğundan $f(x_k) = 1$'dir. Dolayısıyla $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1$.
Köşegen dışında. $y_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)$ alalım. Terimler $(0,0)$'dan farklıdır, $y_k \to (0,0)$'dır ve $\frac{1}{k} \neq \frac{2}{k}$ olduğundan

$$f(y_k) = \frac{1}{k} + \frac{2}{k} = \frac{3}{k} \to 0$$

olur.
Sonuç. $1 \neq 0$ olduğundan Sonuç 8.1 gereği f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur. ■

Alıştırma 8.9 (Noktadaki Değer Limiti Kurtarmaz).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \qquad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
f bütün düzlemde tanımlıdır, ama limit tanımında $f(0,0)$ değeri kullanılmaz: yalnız $(0,0)$'dan farklı noktalar önemlidir. Dizisel ölçütü uygulayalım.
Birinci dizi. $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \neq (0,0)$ ve $x_k \to (0,0)$'dır;

$$f(x_k) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2}.$$

İkinci dizi. $y_k = \left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) \neq (0,0)$ ve $y_k \to (0,0)$'dır;

$$f(y_k) = \frac{-\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Sonuç. $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ olduğundan Sonuç 8.1 gereği limit yoktur. $f(0,0)$ için hangi değer seçilirse seçilsin sonuç değişmez; limitin var olup olmadığı yalnız $(0,0)$'ın çevresindeki değerlere bağlıdır. ■

Bu bölümde limitin olmadığını, x_0'a yakınsayan iki dizi üzerinde farklı değerlere yaklaşan fonksiyonlarla gösterdik. Seçtiğimiz dizilerin terimleri çoğu kez bir doğru ya da parabol üzerindeydi. Yollar Boyunca Limit ve Ardışık Limitler bölümünde bu fikri, x_0'a eğriler boyunca yaklaşarak sistemli hâle getiriyor ve değişkenlerin sırayla limite götürüldüğü ardışık limitlerin, gerçek limitle ilişkisini inceliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Yollar Boyunca Limit ve Ardışık Limitler

Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Limit bölümünde limitin tanımını, dizilerle ifadesini ve hesap kurallarını gördük. Tanıma dikkatle bakınca önemli bir şey göze çarpar: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olması için yalnız $\| x - x_0 \|$ uzaklığının küçük olması gerekir. x noktasının x_0'a hangi yönden ya da hangi eğri üzerinde yaklaştığı tanımda hiç geçmez. Limit varsa, x nereden gelirse gelsin $f(x)$ aynı L değerine yaklaşmak zorundadır.
Tek değişkenli fonksiyonlarda bir noktaya yalnız iki yönden, sağdan ve soldan yaklaşılabiliyordu ve limitin var olması için sağ ve sol limitlerin var olup eşit olması gerek ve yeterdi (bkz. Analiz 1). Düzlemde ise bir noktaya sonsuz çoklukta biçimde yaklaşılabilir: her eğimden doğrular, paraboller, noktanın çevresinde dolanan sarmallar ya da noktaya sıçrayarak yaklaşan diziler. Limit varsa bu yaklaşımların hepsi aynı sonucu verir. Öyleyse farklı sonuç veren iki yaklaşım bulmak, limitin olmadığını göstermenin en kısa yoludur. Bu yolun tersi ise tehlikelidir: denenen bütün yolların, hatta noktadan geçen bütün doğruların aynı değeri vermesi bile limitin var olduğunu göstermez.
Bölümün ikinci aracı ardışık limitlerdir: değişkenleri aynı anda değil de birer birer limite götürmek. Ardışık limitlerin iki katlı limitle ilişkisini veren bir önerme, onları da limitin yokluğunu göstermenin bir aracına dönüştürecek.

9.1 Bir Noktaya Giden Yollar

Yaklaşma biçimlerini kesin bir dille konuşabilmek için önce "bir noktaya giden yol" kavramını tanımlayalım.

Tanım 9.1 (Bir Noktaya Giden Yol). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}$ ve $t_0 \in T'$ olsun. $\gamma : T \to D$ fonksiyonu

1. her $t \in T$ için $\gamma(t) \neq x_0$ ve
2. $\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = x_0$

koşullarını sağlıyorsa γ'ya D içinde, $t \to t_0$ iken x_0 noktasına giden bir **yol** denir.

Yani bir yol, t parametresi t_0'a giderken D'nin içinde kalarak x_0 noktasına yaklaşan bir noktalar ailesidir. İkinci koşuldaki limit, limit tanımının (Tanım 8.7) tanım uzayı $\mathbb{R}$ olan hâlidir: her $\delta > 0$ için öyle bir $\eta > 0$ vardır ki $t \in T$ ve $0 < | t - t_0 | < \eta$ iken $\| \gamma(t) - x_0 \| < \delta$ olur. Birinci koşul, limitte x_0 noktasının kendisine hiç bakılmamasının karşılığıdır; yol x_0'a yaklaşır ama ona hiç varmaz. f fonksiyonu x_0'da tanımlı olmasa bile yol boyunca f'nin değerleri anlamlıdır.
Uygulamada kullanacağımız yollar şunlardır.

- **Doğrular.** x_0 noktasından geçen, $b \neq 0$ doğrultusundaki doğru (Tanım 2.3), x_0 dışında D'de kalıyorsa $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $t_0 = 0$ ile $\gamma(t) = x_0 + tb$ yolunu verir; kalmıyorsa $T = \{t : 0 < | t | < r, x_0 + tb \in D\}$ alınır ve $0 \in T'$ olması gerekir. Gerçekten $\| \gamma(t) - x_0 \| = | t | \| b \|$ olduğundan $t \neq 0$ iken $\gamma(t) \neq x_0$ ve $t \to 0$ iken $\gamma(t) \to x_0$'dır. Düzlemde $(0,0)$'dan geçen $y = mx$ doğrusu $b = (1, m)$ ile $\gamma(t) = (t, mt)$ yoludur; dikey doğru $x = 0$ ise $b = (0, 1)$ ile $\gamma(t) = (0, t)$ yoludur.
- **Grafikler.** $g : T \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $x_0 \in T'$, $x_0 \notin T$ ve $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ olsun. $\gamma(x) = \big(x, g(x) \big)$ fonksiyonunun bileşenleri x_0 ve y_0'a gittiğinden $\gamma(x) \to (x_0, y_0)$ olur (Teorem 8.6); $x \neq x_0$ olduğundan da $\gamma(x) \neq (x_0, y_0)$'dır. Böylece $y = x^2$, $y = kx^2$ ya da $y = -x^2 + x^3$ gibi eğriler $(0,0)$'a giden yollardır. Rolleri değiştirerek $x = h(y)$ biçimindeki eğriler de ($x = y^2$ gibi) yol olarak kullanılır.
- **Tek yönlü yollar.** $T = (0, r)$ alınırsa yalnız $t \to 0^+$ yönünde yaklaşılır. Tanım kümesi bir yarı düzlem olduğunda işe yarar: örneğin $y = x$ doğrusunun yalnız $x > 0$ olan parçası.
- **Diziler.** $x_k \in D$, $x_k \neq x_0$ ve $x_k \to x_0$ olsun. $T = \big\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\big\}$, $t_0 = 0$ ve $\gamma\big(\frac{1}{k}\big) = x_k$ alınırsa γ bir yol olur; $t \to 0$ limiti burada $k \to \infty$ limitinin kendisidir. Demek ki x_0'a yakınsayan her dizi de bir yoldur.

Her eğri bir yol değildir. $y = \dfrac{1}{x}$ eğrisi üzerinde $x \to 0$ iken $| y | \to \infty$ olur; bu eğri $(0,0)$'a gitmez. $y = 1$ doğrusu $(1,0)$ noktasından geçmez; bu doğru boyunca hesaplanan bir limit, $(1,0)$ noktasındaki limit

hakkında hiçbir şey söylemez. Bir yol seçerken eğrinin gerçekten x_0'a gittiğinden ve (en azından x_0 yakınında) tanım kümesinin içinde kaldığından emin olmak gerekir.

9.2 Yol Boyunca Limit

Bir yol seçildiğinde f fonksiyonunu yalnız bu yol üzerinde izlemek, çok değişkenli limit sorusunu tek değişkenli bir limit sorusuna çevirir.

Tanım 9.2 (Bir Yol Boyunca Limit). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $\gamma : T \to D$, D içinde $t \to t_0$ iken x_0'a giden bir yol olsun.

$$\lim_{t \to t_0} f\,\big(\,\gamma(t)\,\big) = L$$

oluyorsa **f'nin γ yolu boyunca limiti** L'dir denir. Yol bir $y = g(x)$ grafiği olduğunda bu limit

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=g(x)}} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} f\,\big(\,x, g(x)\,\big)$$

biçiminde de yazılır.

Yani yol boyunca limit, $f \circ \gamma : T \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun t_0'daki limitidir. $f \circ \gamma$ tek değişkenli bir fonksiyondur ve limiti Analiz 1'in araçlarıyla hesaplanır; $m > 1$ ise bileşen bileşen. Örneğin $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ için $y = mx$ doğrusu boyunca limit

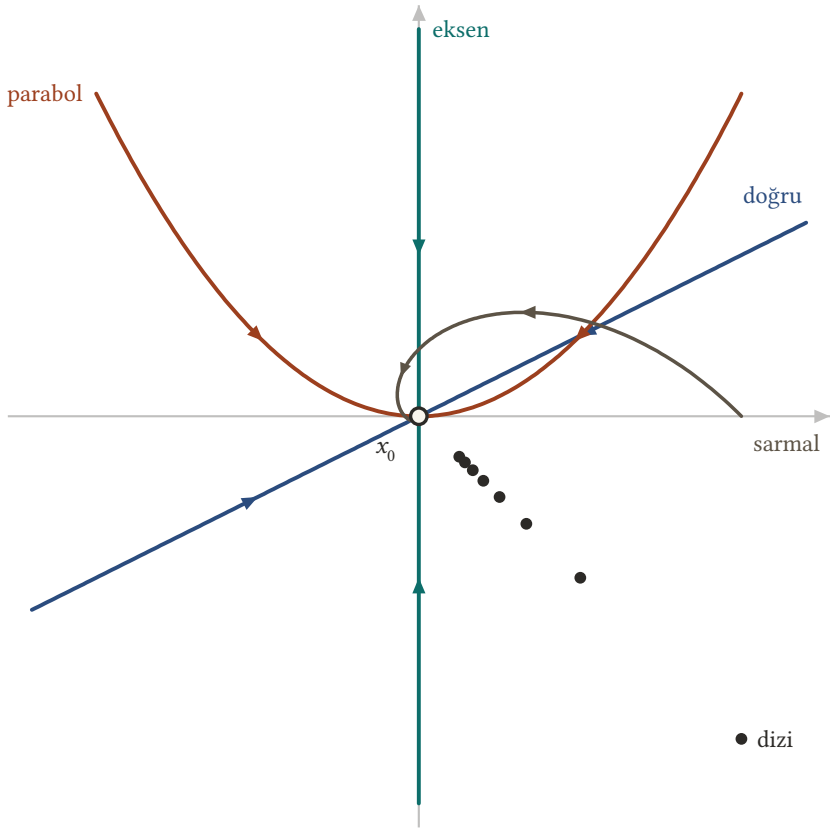
$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

olur; bu fonksiyona Örnek 9.2 içinde döneceğiz. Yol boyunca limit, f'nin yol üzerindeki noktalarda aldığı değerlerle yetinir; yolun dışında ne olup bittiğine bakmaz.

Teorem 9.1 (Limit Her Yol Boyunca Aynıdır). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ ve $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olsun. O zaman D içinde x_0'a giden her γ yolu boyunca f'nin limiti L'dir:*

$$\lim_{t \to t_0} f\,\big(\,\gamma(t)\,\big) = L.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.1: (0, 0) noktasına giden yollar: $y = x/2$ *doğrusu,* $y = x^2$ *parabolü, y ekseni,* $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ *sarmalı ve* $x_k = (1/k, -1/k)$ *dizisi. Hiçbiri* $x_o = (0, 0)$ *noktasının kendisinden geçmez; limit varsa her biri boyunca aynı değeri verir.*

İspat.
$\varepsilon > 0$ *verilsin.* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *olduğundan öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki*

$$x \in D \text{ ve } 0 < \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - L \| < \varepsilon$$

olur. $\gamma(t) \to x_0$ *olduğundan bu* δ *için öyle bir* $\eta > 0$ *vardır ki* $t \in T$ *ve* $0 < |\, t - t_0 \,| < \eta$ *iken* $\| \gamma(t) - x_0 \| < \delta$ *olur. Böyle bir* t *için* $x = \gamma(t)$ *noktası* D*'dedir ve yol tanımının birinci koşulu gereği* $\gamma(t) \neq x_0$*, yani* $\| \gamma(t) - x_0 \| > 0$*'dır. Dolayısıyla* $0 < \| \gamma(t) - x_0 \| < \delta$ *olur ve*

$$\text{parallel} f\ (\ \gamma(t)\ ) - L\text{parallel} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu, $\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = L$ *demektir.* ■

İspatta $\gamma(t) \neq x_0$ koşulu gerçekten kullanıldı: limit tanımı yalnız $0 < \| x - x_0 \|$ olan noktalar hakkında bilgi verir. Yol x_0'dan geçseydi, $f(x_0)$ değeri (tanımlıysa) L'den farklı olabilirdi.

Yollar ve diziler. Teorem, dizisel limit teoreminin (Teorem 8.2) sürekli bir biçimidir. Bir yol üzerinde $t_k \to t_0$ olacak biçimde seçilen her (t_k) dizisi, x_0'a yakınsayan bir $x_k = \gamma(t_k)$ dizisi verir; tersine, x_0'a yakınsayan her dizi kendi başına bir yoldur. Bu sayede teorem tersine de çevrilebilir: D içinde x_0'a giden **her** yol boyunca limit L ise, $D \setminus \{x_0\}$ içinde x_0'a yakınsayan her (x_k) dizisi bir yol olduğundan $f(x_k) \to L$ olur ve Teorem 8.2 gereği $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$'dir. Ne var ki "her yol" sonsuz çoklukta ve çok çeşitli yolu kapsar; birkaç yolu, hatta aşağıda göreceğimiz gibi noktadan geçen bütün doğruları denemek bile limitin varlığını göstermeye yetmez. Uygulamada yollar, limitin **olmadığını** göstermenin aracıdır.

Sonuç 9.1 (İki Yol Ölçütü). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ *ve* $x_0 \in D'$ *olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. *D içinde x_0'a giden öyle iki γ_1, γ_2 yolu varsa ki bu yollar boyunca f'nin limitleri L_1 ve L_2 olsun ve $L_1 \neq L_2$ olsun, o zaman $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limiti yoktur.*
2. *D içinde x_0'a giden ve boyunca f'nin limitinin olmadığı bir yol varsa $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limiti yoktur.*

> ***İspat.***
> *Karşıt olarak $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olduğunu varsayalım. Teorem 9.1 gereği x_0'a giden her yol boyunca f'nin limiti vardır ve L'dir.*
> *Birinci durumda γ_1 boyunca limit hem L_1 hem L olur; tek değişkenli limit tek olduğundan $L_1 = L$'dir. Aynı biçimde $L_2 = L$ bulunur. Buradan $L_1 = L_2$ çıkar; bu, $L_1 \neq L_2$ varsayımıyla çelişir.*
> *İkinci durumda, boyunca limitin olmadığı yolda da limit L olurdu; bu da varsayımla çelişir. Her iki durumda $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limiti yoktur.* ■

Sonucun ikinci maddesi, özellikle bir yol boyunca fonksiyonun sınırsız büyüdüğü durumlarda kullanılır: bir yol boyunca $\| f(\gamma(t)) \| \to \infty$ oluyorsa limit yoktur.

> Üç adımda iki yol testi
>
> 1. **Yolları seç.** x_0'dan geçen ve x_0 dışında tanım kümesinde kalan eğriler seçilir: önce eksenler ve $y - y_0 = m(x - x_0)$ doğruları, gerekirse paraboller ya da paydayı küçülten eğriler. Eğri gerçekten x_0'a gitmelidir.
> 2. **Tek değişkenli limiti hesapla.** Her yol için $f(\gamma(t))$ yazılır ve $t \to t_0$ limiti Analiz 1'in araçlarıyla bulunur.
> 3. **Karşılaştır.** İki yol farklı değer veriyorsa ya da bir yol boyunca limit yoksa limit yoktur (Sonuç 9.1). Denenen bütün yollar aynı L'yi veriyorsa L yalnızca bir adaydır; varlığı tanımla ya da sıkıştırmayla ispatlanır.

Örnek 9.1 (Eksenler Boyunca Farklı Limitler). $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ limitinin olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır ve $(0,0) \in D'$'dır.
> **x ekseni boyunca.** $y = 0$, $x \neq 0$ alalım: $f(x,0) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$. Dolayısıyla bu yol boyunca limit 1'dir.
> **y ekseni boyunca.** $x = 0$, $y \neq 0$ alalım: $f(0,y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$. Bu yol boyunca limit -1'dir.
> $1 \neq -1$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği limit yoktur.
> Daha genel olarak $y = mx$ doğrusu boyunca
>
> $$f(x, mx) = \frac{(1 - m^2)x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$
>
> sabittir; her doğru kendi değerini verir. ■

Örnek 9.2 (Her Doğru Kendi Değerini Verir). $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olup olmadığını araştırınız.

> **Çözüm.**
> Tanım kümesi $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır.
> **Eksenler boyunca.** $y = 0$, $x \neq 0$ için $f(x,0) = 0$; $x = 0$, $y \neq 0$ için $f(0,y) = 0$. İki eksen boyunca da limit 0'dır. Bu, limitin var olduğunu göstermez; başka bir yol deneyelim.
> **$y = x$ doğrusu boyunca.** $x \neq 0$ için
>
> $$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

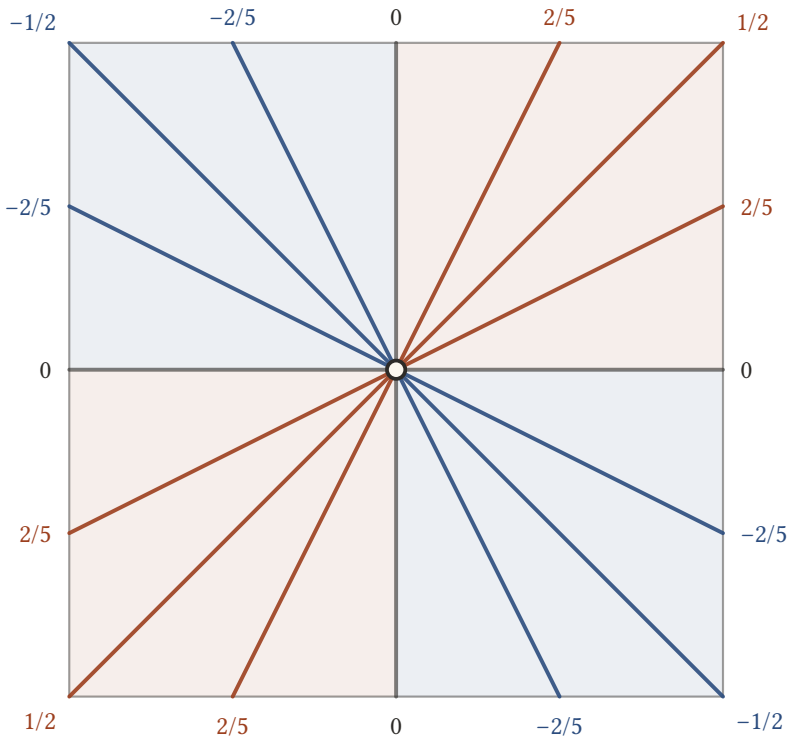
 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan bu yol boyunca limit $\frac{1}{2}$'dir. $\frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur.

Bütün doğrular. $y = mx$ boyunca, $x \neq 0$ için

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

olur. f, orijinden geçen her doğru üzerinde sabittir ve değeri doğrunun eğimine bağlıdır. $m = \pm 1$ için değer $\pm\frac{1}{2}$'dir ve $\frac{m}{1+m^2}$ ifadesi $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ aralığındaki her değeri alır. Orijinin ne kadar küçük bir komşuluğu alınırsa alınsın, orada f bu aralıktaki bütün değerleri alır.



Şekil 9.2: $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ fonksiyonu orijinden geçen her $y = mx$ doğrusu üzerinde $m/(1 + m^2)$ değerini alır; doğruların uçlarındaki sayılar bu değerlerdir ($m = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2$ ve $x = 0$). Hafif tonlar f'nin işaretini gösterir: birinci ve üçüncü bölgede pozitif, ikinci ve dördüncüde negatif. Orijinin her komşuluğunda f, $[-1/2, 1/2]$ aralığındaki bütün değerleri alır.

Aynı fonksiyonun limitinin olmadığını Örnek 8.16 içinde dizilerle görmüştük. Oradaki $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ dizisi $y = x$ doğrusunun, $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ dizisi $y = x^2$ parabolünün üzerindedir; yollar, o dizilerin sürekli karşılıklarıdır. f'yi $(0,0)$'da $f(0,0) = 0$ diye tanımlamak sonucu değiştirmez (Alıştırma 8.9); limit, fonksiyonun noktadaki değerine bakmaz. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonu için de aynı hesap $y = mx$ boyunca $\frac{2m}{1+m^2}$ verir: eksenler boyunca 0, $y = x$ boyunca 1. ■

Örnek 9.3 (Dizilerle ve Doğrularla Limitin Yokluğu). $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını dizisel limit teoremiyle gösteriniz ve sonucu yollarla karşılaştırınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

İki dizi. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ ve $z_k = \left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{2k}\right)$ alalım. İki dizinin terimleri de tanım kümesindedir ve iki dizi de $(0,0)$'a yakınsar (Teorem 6.3). Görüntüler

$$f(x_k) = \frac{\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^2}{2}}{k^2} = \frac{4/k^2}{2/k^2} = 2,$$

$$f(z_k) = \frac{\left(\frac{1}{2k}\right)^2}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4k^2}} = \frac{1/(4k^2)}{5/(4k^2)} = \frac{1}{5}$$

olur. $f(x_k) \to 2$ ve $f(z_k) \to \dfrac{1}{5}$; limitler farklı olduğundan Sonuç 8.1 gereği f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur.
Yollarla karşılaştırma. (x_k) dizisi $y = x$ doğrusunun, (z_k) dizisi $y = -\dfrac{x}{2}$ doğrusunun üzerindedir. $y = mx$ boyunca

$$f(x, mx) = \frac{(1+m)^2 x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{(1+m)^2}{1+m^2}$$

bulunur: $m = 1$ için 2, $m = -\dfrac{1}{2}$ için $\dfrac{1/4}{5/4} = \dfrac{1}{5}$. Diziler, yolların üzerinden seçilmiş kesikli örneklerdir. ■

Limit $(0,0)$ dışında bir noktada sorulduğunda yolların o noktadan geçmesi gerekir. Değişken değiştirerek soruyu orijine taşımak çoğu zaman işi kolaylaştırır.

Örnek 9.4 (Orijin Dışındaki Bir Noktada Limit). $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy - y}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$ limitinin var olup olmadığını, noktaya farklı eğriler boyunca yaklaşarak araştırınız.

Çözüm.
Sadeleştirme. Pay $xy - y = y(x-1)$, payda $x^2 - 2x + 1 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$'dir:

$$f(x,y) = \frac{y(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Payda yalnız $(1,0)$'da sıfır olduğundan tanım kümesi $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$'dır.
$(1,0)$'dan geçen doğrular. $y = m(x-1)$, $x \neq 1$ alalım:

$$f\left(\, x, m(x-1) \,\right) = \frac{m(x-1)^2}{(x-1)^2 + m^2(x-1)^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

$m = 0$ (yani $y = 0$ doğrusu) boyunca limit 0, $m = 1$ (yani $y = x - 1$ doğrusu) boyunca limit $\dfrac{1}{2}$'dir. Sonuç 9.1 gereği limit yoktur.
Dikkat. $y = 1$ doğrusu, y ekseni ya da $y = x$ doğrusu $(1,0)$ noktasından geçmez. Bu doğrular boyunca $x \to 1$ ya da $y \to 0$ iken hesaplanan değerler, $(1,0)$'daki limit hakkında bilgi vermez. Doğru yollar $(1,0)$'dan geçenlerdir.
$u = x - 1$, $v = y$ dönüşümüyle $f = \dfrac{uv}{u^2 + v^2}$ olur ve $(x,y) \to (1,0)$ ile $(u,v) \to (0,0)$ aynı şeydir; soru Örnek 9.2 ile aynıdır. ■

9.3 Doğrular Yetmez

Şimdiye kadarki örneklerde iki doğru, limitin olmadığını göstermeye yetti. Noktadan geçen bütün doğrular boyunca aynı limiti veren ama limiti olmayan fonksiyonlar da vardır.

Örnek 9.5 (Her Doğru Boyunca Sıfır, Parabol Boyunca Değil). $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasına her doğru boyunca limitinin 0 olduğunu, buna karşın $(0,0)$'da limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$x^4 + y^2 = 0$ ancak $x = y = 0$ iken olduğundan tanım kümesi $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır.
Dikey doğru. $x = 0$, $y \neq 0$ için $f(0,y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$; limit 0'dır.
$y = mx$ doğruları. $m = 0$ ise $f(x,0) = 0$'dır. $m \neq 0$ ve $x \neq 0$ için

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}$$

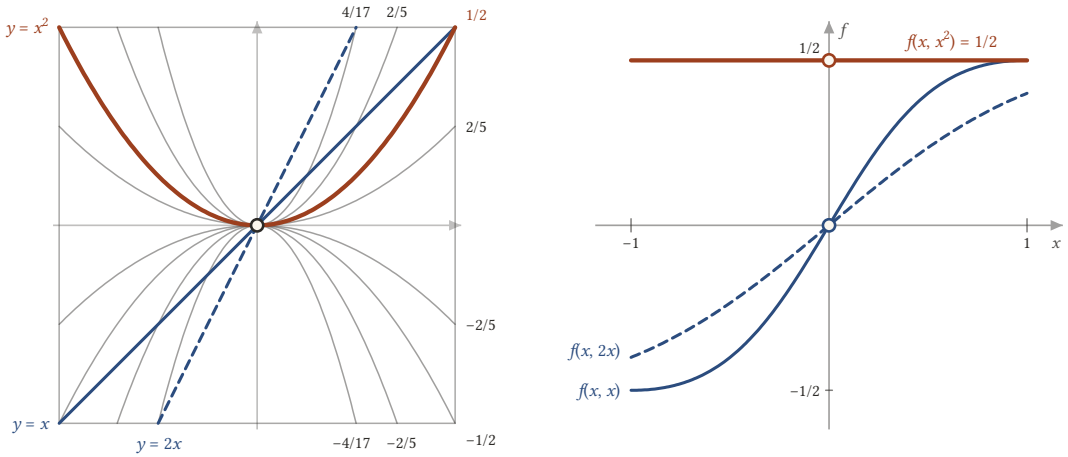
olur. $x \to 0$ iken pay 0'a, payda $m^2 \neq 0$'a gider; limit 0'dır. Demek ki orijinden geçen **her** doğru boyunca limit 0'dır.
$y = x^2$ parabolü. $x \neq 0$ için

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

olur ve bu yol boyunca limit $\dfrac{1}{2}$'dir. $\dfrac{1}{2} \neq 0$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur.
Daha genel olarak $y = kx^2$ parabolü boyunca

$$f(x, kx^2) = \frac{kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

sabittir. f, orijinde birbirine teğet olan her $y = kx^2$ parabolünün üzerinde (orijin hariç) sabittir. Bir doğru orijine çok yaklaştığında bu parabollerden $|\ k\ |$'sı gittikçe büyüyenleri keser ve değer 0'a iner. Parabol boyunca gidildiğinde ise değer hiç değişmez.



Şekil 9.3: Solda $f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$ fonksiyonunun $y = kx^2$ düzey eğrileri ($k = \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \pm 4$) ve uçlarında $k/(1 + k^2)$ değerleri; $y = x$ ve $y = 2x$ doğruları orijine yaklaştıkça bu eğrilerden gittikçe dikleşenlerini keser. Sağda f'nin üç yol boyunca aldığı değerler: $f(x, x) = x/(x^2 + 1)$ ve $f(x, 2x) = 2x/(x^2 + 4)$ sıfıra gider, $f(x, x^2)$ ise sabit 1/2'dir.

Bu örnekte fonksiyon, orijinin her komşuluğunda $y = x^2$ üzerinde $\dfrac{1}{2}$ ve $y = -x^2$ üzerinde $-\dfrac{1}{2}$ değerini alır; her doğru boyunca ise 0'a gider. ■

Değişkenlerin rolleri değiştirilerek aynı olgu $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ için de görülür: $y = mx$ boyunca $g(x, mx) = \dfrac{m^2x}{1 + m^4x^2} \to 0$, $x = 0$ boyunca $g = 0$, ama $x = y^2$ parabolü boyunca $g(y^2, y) = \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2}$ olur.
Doğruların yetmediği durumlar, genellikle paydanın sıfır olduğu (ya da çok küçük kaldığı) bir eğrinin noktaya yaklaşmasından doğar. Böyle bir eğriye yakın bir yol seçmek limitin yokluğunu ortaya çıkarır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 9.6 (Paydayı Sıfırlayan Eğriye Yakın Bir Yol). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ limitinin olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
Payda $y=-x^2$ parabolü üzerinde sıfırdır; tanım kümesi $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x^2\}$'dir. Parabol orijinden geçtiği hâlde orijinin her yuvarı D'nin noktalarını içerir; $(0,0)\in D'$'dır.
Eksenler ve doğrular. $y=0$, $x\neq 0$ için $f(x,0)=\dfrac{x^3}{x^2}=x\to 0$. $x=0$, $y\neq 0$ için $f(0,y)=\dfrac{y^3}{y}=y^2\to 0$. $m\neq 0$ ve $0<\mid x\mid<\mid m\mid$ için $(x,mx)\in D$ olur ve

$$f(x,mx)=\frac{(1+m^3)x^3}{x^2+mx}=\frac{(1+m^3)x^2}{x+m}\to 0$$

bulunur. Bütün doğrular boyunca limit 0'dır.
Paydayı küçülten eğri. Paydayı pay kadar hızlı küçültmek için $y=-x^2+x^3$ eğrisini, $x\neq 0$ ile alalım. Bu eğri üzerinde $x^2+y=x^3\neq 0$ olduğundan eğri D'dedir ve $x\to 0$ iken $(x,y)\to(0,0)$ olur. $y^3=x^6(x-1)^3$ olduğundan

$$f(x,-x^2+x^3)=\frac{x^3+x^6(x-1)^3}{x^3}=1+x^3(x-1)^3\to 1$$

elde edilir. Doğrular boyunca limit 0, bu eğri boyunca 1 olduğundan Sonuç 9.1 gereği limit yoktur. ■

Denenen yolların hepsi aynı değeri veriyorsa bu değer limit için yalnızca bir **adaydır**. Adayın gerçekten limit olduğu tanımla ya da sıkıştırmayla ispatlanır.

Örnek 9.7 (Yollardan Aday, Tanımdan İspat). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
Tanım kümesi $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$'dır.
Aday. $y=x$ boyunca $f(x,x)=0$, $y=-x$ boyunca $f(x,-x)=0$, $y=0$ boyunca $f(x,0)=0$'dır. Üç yol da 0 verdiğinden aday değer 0'dır.
İspat. $\mid x^2-y^2\mid\ \le x^2+y^2$ ve $2\mid xy\mid\ \le x^2+y^2$ olduğundan her $(x,y)\in D$ için

$$\mid f(x,y)-0\mid\ =\mid xy\mid\frac{\mid x^2-y^2\mid}{x^2+y^2}\le\mid xy\mid\le\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{\|(x,y)\|^2}{2}$$

olur. $\varepsilon>0$ verilsin ve $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$ seçilsin. $0<\|(x,y)\|<\delta$ iken

$$\mid f(x,y)\mid\ \le\frac{\|(x,y)\|^2}{2}<\frac{\delta^2}{2}=\varepsilon$$

olur. Limit tanımı (Tanım 8.7) gereği $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=0$'dır. ■

9.4 Kutupsal Koordinatlarla Sınırlama

Düzlemde bir noktadaki limiti incelemenin kullanışlı bir yolu, noktayı merkez alan kutupsal koordinatlara geçmektir; bu, sıkıştırma fikrinin düzlemdeki özel bir biçimidir.
(x_0,y_0)'dan farklı her (x,y) noktası

$$x=x_0+r\cos\theta,$$
$$y=y_0+r\sin\theta$$

biçiminde yazılabilir; burada $r=\|(x,y)-(x_0,y_0)\|>0$ noktanın (x_0,y_0)'a uzaklığı, θ ise bir açıdır. $(x,y)\to(x_0,y_0)$ olması, θ ne olursa olsun $r\to 0$ olması demektir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 9.1 (Kutupsal Koordinatlarla Sınırlama). *$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D'$ ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. $r_0 > 0$ ve $g : (0, r_0) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ koşulunu sağlasın. $0 < r < r_0$, $\theta \in \mathbb{R}$ ve $(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \in D$ olduğunda*

$$\mid f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - L \mid \leq g(r)$$

oluyorsa $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$*'dir.*

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. $g(r) \to 0$ olduğundan öyle bir $\eta > 0$ vardır ki $0 < r < \eta$ ve $r < r_0$ iken $g(r) < \varepsilon$ olur. $\delta = \min\{\eta, r_0\}$ alalım.*
> *$(x,y) \in D$ ve $0 <\| (x,y) - (x_0,y_0) \| < \delta$ olsun. $r =\| (x,y) - (x_0,y_0) \|$ yazalım ve $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$ olacak bir θ seçelim. $0 < r < \delta \leq r_0$ olduğundan varsayım uygulanır:*
>
> $$\mid f(x,y) - L \mid \leq g(r) < \varepsilon.$$
>
> *Bu, limit tanımının ta kendisidir.* ■

Yani $\mid f - L \mid$ farkı, **yalnız r'ye bağlı** ve $r \to 0^+$ iken sıfıra giden bir fonksiyonla sınırlanabiliyorsa limit L'dir. Önemli olan, g'nin θ'yı içermemesidir: sınırın bütün doğrultularda aynı anda işe yaraması gerekir. Önerme, sıfıra giden fonksiyonla karşılaştırmanın (Sonuç 8.2) düzlemdeki kullanışlı bir biçimidir; karşılaştırılan fonksiyon burada yalnız (x_0, y_0)'a uzaklığa bağlıdır.

Örnek 9.8 (Kutupsal Koordinatlarla Limit). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ yazalım. $x^2 + y^2 = r^2$ olduğundan
>
> $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{r^2} = r\,(\cos^3\theta - \sin^3\theta)$$
>
> olur. $\mid\cos\theta\mid \leq 1$ ve $\mid\sin\theta\mid \leq 1$ olduğundan
>
> $$\mid f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0 \mid \leq r\,(\,\mid\cos\theta\mid^3 + \mid\sin\theta\mid^3\,) \leq 2r$$
>
> bulunur. $g(r) = 2r$, θ'ya bağlı değildir ve $r \to 0^+$ iken 0'a gider. Önerme 9.1 gereği limit 0'dır. ε–δ diliyle: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ seçilirse $0 <\| (x,y) \| < \delta$ iken $\mid f(x,y) \mid \leq 2 \| (x,y) \| < \varepsilon$ olur. ■

> ⚠ Sınır θ'dan bağımsız olmalı
>
> Kutupsal yazımda her sabit θ için $r \to 0$ limitinin L çıkması **yetmez**. Bu yalnızca orijinden çıkan her ışın boyunca, yani doğrular boyunca limitin L olduğunu söyler. Örnek 9.5 fonksiyonu kutupsal koordinatlarda
>
> $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$
>
> biçimini alır. $\sin\theta \neq 0$ ise $r \to 0$ iken payda $\sin^2\theta \neq 0$'a, pay 0'a gider; $\sin\theta = 0$ ise ifade zaten 0'dır. Her sabit θ için limit 0'dır. Ama $y = x^2$ parabolü üzerindeki noktalarda, yani $r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$ olduğunda değer $\dfrac{1}{2}$'dir. r ne kadar küçük olursa olsun bu noktalar vardır; dolayısıyla $\mid f \mid$'yi yalnız r'ye bağlı ve sıfıra giden bir $g(r)$ ile sınırlamak olanaksızdır ve limit yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

9.5 Ardışık Limitler

Çok değişkenli bir limiti hesaplarken değişkenleri birer birer hareket ettirmek, yani önce birini sonra öbürünü limite götürmek doğal görünebilir. Bu yöntem bazı fonksiyonlarda işe yarar, bazılarında yaramaz; ne zaman işe yaradığını anlamak için yeni bir kavrama ihtiyaç var.

Tanım 9.3 (Ardışık Limit). $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun; $(x_0, y_0) \in D$ olması gerekmez. Bir $r > 0$ için, $0 < \mid x - x_0 \mid < r$ olan her x için

$$g(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

limiti var olsun. $\lim_{x \to x_0} g(x)$ limiti de varsa bu limit

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right)$$

ile gösterilir. Değişkenlerin rolleri değiştirilerek, $0 < \mid y - y_0 \mid < r$ için $h(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y)$ olmak üzere

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} h(y)$$

tanımlanır. Bu iki limite f'nin (x_0, y_0) noktasındaki **ardışık limitleri** denir.

Yani birinci ardışık limitte önce x sabit tutulur ve yalnız y, y_0'a götürülür; bu **iç limit** x'e bağlı bir $g(x)$ değeri verir. Sonra x, x_0'a götürülür; bu da **dış limittir**. İkinci ardışık limitte sıra tersinedir: önce y sabit tutulup $x \to x_0$, sonra $y \to y_0$. Ardışık limite "ardıl" ya da "tekrarlı" (iterated) limit de denir. Ayırt etmek gerektiğinde $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ limitine **iki katlı limit** diyeceğiz.
Ardışık limitler, art arda alınan iki tane tek değişkenli limittir. Her adımda Analiz 1 ve 2'nin bütün araçları, L'Hôpital kuralı dâhil (bkz. Analiz 2), kullanılabilir. İki katlı limitte ise iki değişken birlikte ve her yönden hareket eder; tek değişkenli araçlar ona doğrudan uygulanamaz.
Ardışık limitler ile iki katlı limit arasında ilk bakışta sanılandan zayıf bir bağ vardır:

- ardışık limitler var olmayabilir;
- ikisi de var olup farklı olabilir (Örnek 9.9);
- ikisi de var ve eşit olduğu hâlde iki katlı limit olmayabilir (Örnek 9.10);
- iki katlı limit var olduğu hâlde ardışık limitler olmayabilir (Örnek 9.12).

Örnek 9.9 (Var Olan Ama Farklı Ardışık Limitler). $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasındaki ardışık limitlerini bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$'dır.
Önce y, sonra x. $x \neq 0$ sabit olsun. $y \to 0$ iken payda $x^2 \neq 0$'a gider:

$$g(x) = \lim_{y \to 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Dolayısıyla

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Önce x, sonra y. $y \neq 0$ sabit olsun:

$$h(y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0.$$

Dolayısıyla

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki ardışık limit de vardır ama $1 \neq 0$'dır: limitlerin sırası değiştirilemez. $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} = 1 - f(x,y)$ fonksiyonunun ardışık limitleri de aynı biçimde, sırasıyla 0 ve 1 çıkar. ■

Örnek 9.10 (Eşit Ardışık Limitler, Olmayan Limit). $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki ardışık limitlerinin var ve eşit olduğunu, buna karşın iki katlı limitin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$x \neq 0$ sabitken $y \to 0$ için pay 0'a, payda $x^2 \neq 0$'a gider; $g(x) = \dfrac{0}{x^2} = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Simetri gereği $y \neq 0$ sabitken $h(y) = 0$ ve

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

bulunur. Ardışık limitler var ve eşittir. Oysa Örnek 9.2 içinde gördüğümüz gibi $y = x$ boyunca limit $\dfrac{1}{2}$, eksenler boyunca 0'dır; iki katlı limit yoktur. Ardışık limitlerin eşit olması, limitin varlığını garanti etmez. (Fonksiyonu iki katıyla, $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ olarak almak hiçbir şeyi değiştirmez.) ■

Ardışık limitlerin var olup farklı çıkması ne anlama gelir? Bir sonraki önerme bu soruyu yanıtlıyor: iki katlı limit varsa ve iç limitler varsa, ardışık limitler eşit olmak zorundadır.

9.6 Ardışık Limitler ile Limit Arasındaki İlişki

Önermeyi reel değerli fonksiyonlar için veriyoruz. Bu bir kısıtlama değildir: $\mathbb{R}^m$ değerli bir fonksiyonun limiti bileşenlerinin limitleriyle belirlenir (Teorem 8.6) ve ardışık limitleri de bileşen bileşen alınır. Böylece problem her zaman reel değerli fonksiyonlara indirgenir.

Önerme 9.2 (Limit ile Ardışık Limitler Arasındaki İlişki). *I ve J, $\mathbb{R}$'de açık aralıklar, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ ve $f : (I \times J) \setminus \{(x_0,y_0)\} \to \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlansın:*

1. *her $x \in I \setminus \{x_0\}$ için $g(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$ limiti vardır;*
2. *her $y \in J \setminus \{y_0\}$ için $h(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ limiti vardır;*
3. *$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$'dir.*

O zaman iki ardışık limit de vardır ve L'ye eşittir:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = L.$$

Başka bir deyişle bu koşullar altında limitlerin sırası değiştirilebilir.

İspat.
Birinci ardışık limit. *$\varepsilon > 0$ verilsin. 3. koşul gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki f'nin tanım kümesindeki her (x,y) için*

$$0 < \| (x,y) - (x_0,y_0) \| < \delta \Rightarrow | f(x,y) - L | < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. I ve J açık aralıklar olduğundan, gerekirse δ'yı küçülterek $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq I$ ve $(y_0-\delta, y_0+\delta) \subseteq J$ olduğunu varsayabiliriz. $\eta = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ diyelim.
$0 < | x - x_0 | < \eta$ olan bir x sabitleyelim; $x \in I \setminus \{x_0\}$'dır. $0 < | y - y_0 | < \eta$ olan her y için $y \in J$'dir, $x \neq x_0$ olduğundan $(x,y) \neq (x_0,y_0)$'dır ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| (x,y)-(x_0,y_0) \|^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2} = \delta^2$$

olur. Dolayısıyla bu y'ler için

$$L-\frac{\varepsilon}{2} < f(x,y) < L+\frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır. 1. koşul gereği $y \to y_0$ iken $f(x,y) \to g(x)$'tir. Sabit sınırlar limite geçtiğinden (bkz. Analiz 1)

$$L-\frac{\varepsilon}{2} \le g(x) \le L+\frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur; yani $\mid g(x)-L \mid \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$'dur. Bu, $0 < \mid x-x_0 \mid < \eta$ olan her x için doğrudur; dolayısıyla $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$, yani

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = L.$$

İkinci ardışık limit. *Aynı akıl yürütme x ile y'nin rolleri değiştirilerek ve 1. koşul yerine 2. koşul kullanılarak yapılır: $0 < \mid y-y_0 \mid < \eta$ olan bir y sabitlenir, $0 < \mid x-x_0 \mid < \eta$ olan x'ler için $\mid f(x,y)-L \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ olur ve $x \to x_0$ iken limite geçilerek $\mid h(y)-L \mid \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ bulunur. Buradan $\lim_{y\to y_0} h(y) = L$ çıkar.* ■

İspatta birinci ardışık limit için yalnız 1. ve 3. koşul, ikincisi için yalnız 2. ve 3. koşul kullanıldı. Önerme en çok ters yönde, limitin olmadığını göstermek için işe yarar.

Sonuç 9.2 (Ardışık Limitlerle Limitin Yokluğu). *I, J, x_0, y_0 ve f, Önerme 9.2 içindeki gibi olsun ve iç limitler var olsun, yani önermenin 1. ve 2. koşulu sağlansın. İki ardışık limit var olup birbirinden farklıysa ya da ardışık limitlerden en az biri yoksa $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ limiti yoktur.*

İspat.
İki katlı limit var ve L olsaydı, 1. ve 2. koşul da sağlandığından Önerme 9.2 gereği iki ardışık limit de var olur ve ikisi de L'ye eşit olurdu. Bu, ardışık limitlerin farklı olmasıyla da birinin olmamasıyla da çelişir. ■

Örneğin $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ için $I = J = \mathbb{R}$ alınırsa iç limitler vardır ve ardışık limitler 1 ile 0'dır (Örnek 9.9); Sonuç 9.2 gereği f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur. Bu sonuç eksenler boyunca yaklaşarak da görülür: x ekseni boyunca 1, y ekseni boyunca 0.
Sonuçtaki "ardışık limitlerden biri yoksa" ifadesi, iç limitlerin var olup **dış** limitin olmaması anlamındadır. İç limit yoksa önerme hiçbir şey söylemez ve iki katlı limit yine de var olabilir (Örnek 9.12).

Örnek 9.11 (Dış Limiti Olmayan Ardışık Limit). $f(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \right)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını ardışık limitlerle gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır. Limit varsa her bileşenin limiti vardır (Teorem 8.6); birinci bileşen $f_1(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$'nin limitinin olmadığını göstermek yeter.
İç limitler. $x \neq 0$ sabitken $y \to 0$ için pay x'e, payda $\sqrt{x^2} = \mid x \mid \neq 0$'a gider:

$$g(x) = \lim_{y\to 0} f_1(x,y) = \frac{x}{\mid x \mid}.$$

$y \neq 0$ sabitken aynı biçimde $h(y) = \lim_{x\to 0} f_1(x,y) = \dfrac{-y}{\mid y \mid}$'dir. $I = J = \mathbb{R}$ ile önermenin 1. ve 2. koşulu sağlanır.
Dış limit. $x > 0$ için $g(x) = 1$, $x < 0$ için $g(x) = -1$ olduğundan g'nin 0'da sağ limiti 1, sol limiti -1'dir ve $\lim_{x\to 0} g(x)$ yoktur (bkz. Analiz 1).

 CC BY-NC-SA 4.0

Ardışık limitlerden biri olmadığından Sonuç 9.2 gereği f_1'in, dolayısıyla f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur. Aynı sonuç yollarla da görülür: x ekseninin $x>0$ parçası boyunca $f_1=1$, $x<0$ parçası boyunca $f_1=-1$'dir. İkinci bileşenin limiti ise 0'dır ($0\le f_2\le x^2+y^2$); ama tek bir bileşenin limitinin olmaması yeter. ■

Örnek 9.12 (Limit Var, Ardışık Limitler Yok). $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ üzerinde $xy\neq 0$ iken $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$, eksenler üzerinde ise $f(x,y)=0$ olsun. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ olduğunu, buna karşın $(0,0)$'da iki ardışık limitin de olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
İki katlı limit. $|\sin t|\le 1$ olduğundan her $(x,y)\in D$ için (eksenler üzerinde $f=0$ olduğundan orada da)

$$|f(x,y)|\le |x|+|y|\le 2\,\|(x,y)\|$$

olur. $\varepsilon>0$ için $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ seçilirse $0<\|(x,y)\|<\delta$ iken $|f(x,y)|<\varepsilon$'dur; limit 0'dır.
İç limitler yoktur. $x\neq 0$ sabit olsun. $y\neq 0$ iken $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$'tir ve $y\to 0$ iken $y\sin\dfrac{1}{x}\to 0$'dır. $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ var olsaydı

$$\sin\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\left(f(x,y)-y\sin\frac{1}{x}\right)$$

eşitliğinin sağ yanının, dolayısıyla $\sin\dfrac{1}{y}$'nin $y\to 0$ iken limiti olurdu. Oysa bu limit yoktur (bkz. Analiz 1). Demek ki hiçbir $x\neq 0$ için iç limit $g(x)$ yoktur ve $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ tanımsızdır. x ile y'nin rolleri simetrik olduğundan öbür ardışık limit de yoktur.
İki katlı limitin var olması, ardışık limitlerin var olmasını gerektirmez. Önerme 9.2 içindeki 1. ve 2. koşullar bu yüzden gereklidir. ■

9.7 Yöntemlerin Özeti

Bir limit sorusunda önce amacı belirlemek gerekir: limitin varlığını mı yoksa yokluğunu mu göstermeye çalışıyoruz? Bu bölümde ve bir önceki bölümde kurulan araçlar bu iki amaca göre şöyle ayrılır.

Tablo 9.1: Limit sorularında yöntem seçimi

Amaç	Yöntem	Dayanak
Limitin varlığı	ε–δ tanımı	Tanım 8.7
Limitin varlığı	Cebirsel işlemler, polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar	Teorem 8.4, Önerme 8.4
Limitin varlığı	Bileşenlere ayırma	Teorem 8.6
Limitin varlığı	Sıkıştırma, kutupsal sınırlama	Teorem 8.5, Önerme 9.1
Limitin yokluğu	Farklı limit veren iki yol	Sonuç 9.1
Limitin yokluğu	Farklı limit veren iki dizi	Sonuç 8.1
Limitin yokluğu	Farklı ya da olmayan ardışık limitler	Sonuç 9.2

Yollar ve ardışık limitler adayı bulmak için de kullanılır: birkaç yol aynı değeri veriyorsa o değer limitin tek adayıdır ve sonra tanımla ya da sıkıştırmayla ispatlanır.

 CC BY-NC-SA 4.0

9.8 Alıştırmalar

Alıştırma 9.1 (Eğime Bağlı Değer). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(2x+y)^2}{x^2+y^2}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır.
$y = x$ boyunca. $x \neq 0$ için

$$f(x,x) = \frac{(3x)^2}{x^2+x^2} = \frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}.$$

$y = -x$ boyunca. $x \neq 0$ için

$$f(x,-x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

$\frac{9}{2} \neq \frac{1}{2}$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği limit yoktur. Genel olarak $y = mx$ boyunca $f(x,mx) = \dfrac{(2+m)^2}{1+m^2}$ sabittir ve m'ye bağlıdır. ■

Alıştırma 9.2 (Sinüslü Fonksiyonun Ardışık Limitleri). $f(x,y) = \dfrac{\sin x \sin y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki ardışık limitlerini hesaplayınız. $(0,0)$'da iki katlı limit var mıdır?

Çözüm.
Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır.
Ardışık limitler. $x \neq 0$ sabitken $y \to 0$ için $\sin y \to 0$ ve $x^2+y^2 \to x^2 \neq 0$'dır:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin x \sin y}{x^2+y^2} = \sin x \cdot \frac{0}{x^2} = 0.$$

Dolayısıyla $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$'dır. Aynı biçimde $y \neq 0$ sabitken $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ ve $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ bulunur. Ardışık limitler var ve eşittir.
İki katlı limit. $x = 0$ ekseni boyunca $f(0,y) = 0$ olduğundan limit 0'dır. $y = x$ doğrusu boyunca, $x \neq 0$ için

$$f(x,x) = \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to \frac{1}{2}$$

olur (bkz. Analiz 1). $\frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği iki katlı limit yoktur. Ardışık limitlerin eşit olması yine yetmedi. ■

Alıştırma 9.3 (Ardışık Limitleri Farklı Olan Kesir). $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^4}{x^2+2y^4}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki ardışık limitlerini hesaplayınız ve iki katlı limitin var olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
$x^2+2y^4 = 0$ ancak $x = y = 0$ iken olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır.
Önce y. $x \neq 0$ sabitken $y \to 0$ için

$$g(x) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^4}{x^2+2y^4} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

ve $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$'dir.
Önce x. $y \neq 0$ sabitken $x \to 0$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$h(y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^4}{x^2+2y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

ve $\lim_{y\to 0} h(y) = \frac{1}{2}$'dir.
$I = J = \mathbb{R}$ ile iç limitler vardır ve ardışık limitler $1 \neq \frac{1}{2}$'dir. Sonuç 9.2 gereği iki katlı limit yoktur. (Yollarla: x ekseni boyunca değer 1, y ekseni boyunca $\frac{1}{2}$'dir.) ■

Alıştırma 9.4 (Kuvvetli Paydada Limitin Varlığı). $\alpha < \frac{1}{2}$ olsun. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki ardışık limitlerini hesaplayınız ve iki katlı limitin var olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.
f'yi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ üzerinde ele alıyoruz.
Ardışık limitler. $x \neq 0$ sabitken $y \to 0$ için pay x'e, payda $(x^2)^\alpha = |\,x\,|^{2\alpha} > 0$ değerine gider (kuvvet fonksiyonu pozitif sayılarda süreklidir):

$$g(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x}{|\,x\,|^{2\alpha}}.$$

Buradan $|\,g(x)\,| = |\,x\,|^{1-2\alpha}$ çıkar. $\alpha < \frac{1}{2}$ olduğundan $1-2\alpha > 0$'dır ve $x \to 0$ iken $|\,x\,|^{1-2\alpha} \to 0$; dolayısıyla $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$'dır. Aynı biçimde $h(y) = \dfrac{-y}{|\,y\,|^{2\alpha}}$ ve $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ bulunur.
İki katlı limit. Aday 0'dır. $\rho = \|\,(x,y)\,\|$ yazalım. $(|\,x\,| + |\,y\,|)^2 \le 2(x^2+y^2)$ olduğundan $|\,x-y\,| \le |\,x\,| + |\,y\,| \le \sqrt{2}\,\rho$'dur. $\rho > 0$ için

$$|\,f(x,y)\,| \le \frac{\sqrt{2}\,\rho}{\rho^{2\alpha}} = \sqrt{2}\,\rho^{1-2\alpha}$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^{1/(1-2\alpha)}$ seçilsin. $0 < \rho < \delta$ iken $|\,f(x,y)\,| < \sqrt{2}\,\delta^{1-2\alpha} = \varepsilon$'dur. Dolayısıyla

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0$$

olur; bu, Önerme 9.2 ile uyumludur: ardışık limitler de 0'dır. ■

Alıştırma 9.5 (Sınırlı Çarpanla Sıkıştırma). $\alpha > 0$ olsun. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|\,x\,|^\alpha\, y^4}{x^2+y^4} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır. $x^2 \ge 0$ olduğundan $0 \le \dfrac{y^4}{x^2+y^4} \le 1$'dir; dolayısıyla

$$0 \le \frac{|\,x\,|^\alpha\, y^4}{x^2+y^4} \le |\,x\,|^\alpha \le \|\,(x,y)\,\|^\alpha$$

olur. $\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}$ seçilirse $0 < \|\,(x,y)\,\| < \delta$ iken ifade $\delta^\alpha = \varepsilon$'dan küçüktür. Limit 0'dır. Aynı sonuç sıkıştırmayla da görülür (Teorem 8.5): fonksiyon 0 ile $|\,x\,|^\alpha$ arasındadır; $t \mapsto |\,t\,|^\alpha$ fonksiyonu 0'da sürekli olduğundan Önerme 8.3 gereği $|\,x\,|^\alpha \to 0$'dır. ■

Alıştırma 9.6 (Yarı Düzlemde Tanımlı Fonksiyon). $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+y^3}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Tanım kümesi. $x^3+y^3>0$ olmalıdır. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ve

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}$$

ifadesi $(x,y)\neq(0,0)$ iken pozitiftir. Dolayısıyla $x^3+y^3>0 \Leftrightarrow x+y>0$ ve $D=\{(x,y):x+y>0\}$ açık yarı düzlemidir. $(0,0)$ bu yarı düzlemin sınırındadır ve D''ye aittir. Yollar yarı düzlemin içinde kalmalıdır; bu yüzden tek yönlü yollar kullanacağız.
$y=x$, $x>0$ boyunca.

$$f(x,x)=\frac{x^2}{\sqrt{2x^3}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\to 0 \quad (x\to 0^+).$$

$y=-x+x^2$, $0<x<1$ boyunca. Bu eğri üzerinde $x+y=x^2>0$ olduğundan eğri D'dedir ve $x\to 0^+$ iken $(0,0)$'a gider. $x^2-xy+y^2=3x^2-3x^3+x^4$ olduğundan

$$x^3+y^3=x^2(3x^2-3x^3+x^4)=x^4(3-3x+x^2)$$

ve

$$f(x,-x+x^2)=\frac{x^2}{x^2\sqrt{3-3x+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3-3x+x^2}}\to\frac{1}{\sqrt{3}}$$

bulunur. $0\neq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği limit yoktur. Bu fonksiyonda da yarı düzlemin içinde kalan bütün doğrular 0 verir; farkı, sınır doğrusu $y=-x$'e yaklaşan eğri ortaya çıkarır. ■

Alıştırma 9.7 (Doğru ve Parabol Boyunca Farklı Limit). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{y}$ limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $D=\{(x,y):y\neq 0\}$'dır ve $(0,0)\in D'$'dır.
$y=x$ boyunca. $x\neq 0$ için $f(x,x)=\dfrac{2x^2}{x}=2x\to 0$.
$y=x^2$ boyunca. $x\neq 0$ için

$$f(x,x^2)=\frac{x^2+x^4}{x^2}=1+x^2\to 1.$$

$0\neq 1$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği limit yoktur. ■

Alıştırma 9.8 (Paydası Bir Parabolde Sıfırlanan Kesir). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2-y}$ limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $D=\{(x,y):y\neq x^2\}$'dir ve $(0,0)\in D'$'dır.
$y=0$ boyunca. $x\neq 0$ için $f(x,0)=\dfrac{x^2}{x^2}=1$.
$y=2x^2$ boyunca. $x\neq 0$ için $2x^2\neq x^2$ olduğundan eğri D'dedir ve

$$f(x,2x^2)=\frac{x^2}{x^2-2x^2}=-1$$

olur. $1\neq -1$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği limit yoktur. ■

Alıştırma 9.9 (Köklü Bileşenle Tanımdan Limit). Limit tanımını kullanarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(x^2+y^2+xy-1, \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} \right) = (0,0)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi. Kökler için $x \geq 0$ ve $y \leq 1$, payda için $\sqrt{x} \neq \sqrt{1-y}$, yani $x+y \neq 1$ gerekir. $(0,1)$ tanım kümesinde değildir ama $(t, 1-2t)$ noktaları ($0<t$ küçük) tanım kümesinde olduğundan bir yığılma noktasıdır. Bileşenleri ayrı ayrı inceleyeceğiz; sonuca Teorem 8.6 ile varılır.
Birinci bileşen. $v = y-1$ yazalım. Açınca

$$f_1 = x^2 + (1+v)^2 + x(1+v) - 1 = x^2 + v^2 + 2v + x + xv$$

olur. $\delta_1 \leq 1$ ve $\| (x,y)-(0,1) \| < \delta_1$ olsun. O zaman $| x | < \delta_1 \leq 1$ ve $| v | < \delta_1 \leq 1$'dir; buradan $x^2 < \delta_1, v^2 < \delta_1, | xv | < \delta_1$ çıkar ve

$$| f_1 | \leq x^2 + v^2 + 2 | v | + | x | + | x | | v | < 6\delta_1$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ için $\delta_1 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ seçilirse $| f_1 | < \varepsilon$ olur.
İkinci bileşen. Tanım kümesinde $x \geq 0$ ve $1-y \geq 0$ olduğundan

$$x+y-1 = x-(1-y) = \left(\sqrt{x}-\sqrt{1-y} \right) \left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y} \right)$$

yazılabilir ve sadeleştirince

$$f_2(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{1-y}$$

olur. $\|_2(x,y)-(0,1)\| < \delta_2$ ise $0 \leq x < \delta_2$ ve $0 \leq 1-y < \delta_2$'dir; dolayısıyla $0 \leq f_2 < 2\sqrt{\delta_2}$'dir. $\delta_2 = \frac{\varepsilon^2}{4}$ seçilirse $f_2 < \varepsilon$ olur.
İki bileşenin limiti de 0'dır; Teorem 8.6 gereği limit $(0,0)$'dır. ■

Alıştırma 9.10 (Bir Bileşeni Limitsiz Fonksiyon). $f(x,y) = \left(\frac{x+y}{y}, \frac{x+y^3}{x-y^2} \right)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $D = \{(x,y) : y \neq 0, x \neq y^2\}$'dir ve $(0,0) \in D'$'dır. Limit olsaydı her bileşenin limiti olurdu (Teorem 8.6); birinci bileşenin limitinin olmadığını gösterelim.
$x = 0$ boyunca. $y \neq 0$ için $(0,y) \in D$ ve $f_1(0,y) = \frac{y}{y} = 1$.
$y = x$ boyunca. $0 < | x | < 1$ için $x \neq x^2$ olduğundan $(x,x) \in D$ ve $f_1(x,x) = \frac{2x}{x} = 2$.
$1 \neq 2$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği f_1'in, dolayısıyla f'nin limiti yoktur.
Burada ardışık limit önermesi doğrudan kullanılamaz: $x \neq 0$ sabitken $\frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1$ ifadesi $y \to 0$ iken sınırsız büyür ve iç limit yoktur. ■

Alıştırma 9.11 (Bir Yol Boyunca Sonsuza Giden Bileşen). $f(x,y) = \left(\frac{x^2-1}{y^2+1}, \frac{y-1}{x} \right)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $D = \{(x,y) : x \neq 0\}$'dır ve $(0,0) \in D'$'dır. Birinci bileşenin limiti -1'dir, ama ikinci bileşen sorun çıkarır.
x ekseninin $x > 0$ parçası, yani $\gamma(t) = (t,0)$, $t \in (0,1)$, D içinde $(0,0)$'a giden bir yoldur. Bu yol boyunca

$$f_2(t,0) = -\frac{1}{t} \to -\infty \quad (t \to 0^+)$$

olur ve yol boyunca f_2'nin (sonlu) limiti yoktur. Sonuç 9.1 (2. madde) gereği f_2'nin, dolayısıyla Teorem 8.6 gereği f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur. ■

Alıştırma 9.12 (Birim Vektör Alanının Limiti). $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tanım kümesi $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$'dır ve $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\parallel (x,y) \parallel}$, (x,y) doğrultusundaki birim vektördür.
x ekseninin sağ yarısı. $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t>0$ için $f(t,0) = \left(\dfrac{t}{\mid t \mid}, 0\right) = (1,0)$.
x ekseninin sol yarısı. $\gamma_2(t) = (-t,0)$, $t>0$ için $f(-t,0) = (-1,0)$.
İki yol boyunca limitler $(1,0) \neq (-1,0)$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği limit yoktur. $\parallel f(x,y) \parallel = 1$ olduğu hâlde fonksiyonun doğrultusu yaklaşma yönüne göre değişir. ■

Alıştırma 9.13 (Orijinde Limiti Olmayan Kesir Çifti). $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x-y}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve $(0,0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Birinci bileşen için $x \neq y$ gerekir; bu koşul $(x,y) \neq (0,0)$ olmasını da sağlar, dolayısıyla ikinci bileşenin paydası sıfır olmaz. Tanım kümesi $D = \{(x,y) : x \neq y\}$'dir ve $(0,0) \in D'$'dır.
Birinci bileşen için $y=0$, $x \neq 0$ boyunca $f_1(x,0) = \dfrac{x}{x} = 1$; $x=0$, $y \neq 0$ boyunca $f_1(0,y) = \dfrac{y}{-y} = -1$'dir. $1 \neq -1$ olduğundan Sonuç 9.1 gereği f_1'in, dolayısıyla f'nin $(0,0)$'da limiti yoktur. ■

Alıştırma 9.14 (Aynı Fonksiyonun Başka Bir Noktadaki Limiti). $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x-y}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktasındaki limitini bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi $D = \{(x,y) : x \neq y\}$'dir ve $0 \neq 1$ olduğundan $(0,1) \in D$'dir.
Birinci bileşen. f_1 rasyonel bir fonksiyondur; pay $0+1=1$'e, payda $0-1=-1\neq 0$'a gider. Önerme 8.4 gereği $f_1 \to -1$.
İkinci bileşen. Pay 1'e, payda $0^2+1^2 = 1 \neq 0$'a gider; $f_2 \to 1$.
Teorem 8.6 gereği

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = (-1,1).$$

Bir dizi ile kontrol. $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k+1}{k}\right) \to (0,1)$ dizisi için

$$f_1(x_k) = \frac{(k+2)/k}{-1} = -\frac{k+2}{k} \to -1,$$
$$f_2(x_k) = \frac{(k+2)/k}{\frac{1}{k^2} + \frac{(k+1)^2}{k^2}} = \frac{k(k+2)}{k^2+2k+2} \to 1$$

olur. Tek bir dizi limiti ispatlamaz, yalnızca bulunan değerle uyumlu olduğunu gösterir; ispatı yukarıdaki cebirsel işlemler verir. ■

Bu bölümde limitin varlığını ve yokluğunu göstermenin yollarını topladık: yollar ve ardışık limitler limitin olmadığını göstermenin, tanım ve sıkıştırma ise var olduğunu ispatlamanın araçlarıdır. Limit tanımında

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonun x_0 noktasındaki değeri hiç rol oynamadı; $f(x_0)$ tanımlı bile olmayabilirdi. Limitin var olup fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olması süreklilik kavramını verir. Bu kavramı ve sürekli fonksiyonların cebirini Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik bölümünde inceliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik

Analiz 1'de $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olmasını, x noktası a'ya yeterince yakınken $f(x)$ değerinin $f(a)$'ya istenen kadar yakın olması diye tanımladık (bkz. Analiz 1). Bu bölümde aynı tanımı $\mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesinde tanımlı ve değerleri $\mathbb{R}^m$'de olan fonksiyonlara taşıyoruz. Değişen yine yalnız uzaklığın ölçülme biçimidir: tanım kümesinde $\mid x-a \mid$ yerine $\parallel x-x_0 \parallel$, değer kümesinde $\mid f(x)-f(a) \mid$ yerine $\parallel f(x)-f(x_0) \parallel$ gelir.
Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Limit ve Yollar Boyunca Limit ve Ardışık Limitler bölümlerinde çok değişkenli limitin tek değişkenli limitten çok daha kırılgan olduğunu gördük: bir noktaya sonsuz çok yoldan yaklaşılabilir ve limit bu yolların hepsinde aynı olmak zorundadır. Süreklilik, limitin fonksiyonun değeriyle uyuşmasıdır. Bu yüzden limit için kurduğumuz her araç (dizisel ölçüt, sıkıştırma, yollar ve ardışık limitler) süreklilik için de iş görür ve aynı kırılganlık süreklilikte de ortaya çıkar: her değişkene göre ayrı ayrı sürekli olan bir fonksiyon, birlikte sürekli olmayabilir.
Bölümün ikinci yarısında sürekliliğin toplama, çarpma, bileşke alma ve bileşenlere ayırma işlemleriyle korunduğunu gösteriyoruz. Bu kurallar sayesinde polinomların, rasyonel fonksiyonların ve bunlardan kurulan fonksiyonların sürekliliği her seferinde ε–δ hesabı yapılmadan elde edilir; ε–δ hesabı yalnız formülün bozulduğu "sorunlu" noktalarda gerekir.

10.1 Bir Noktada Süreklilik

Tanımı Analiz 1'dekiyle aynı kalıpta kuruyoruz; mutlak değerlerin yerini normlar alıyor.

Tanım 10.1 (Bir Noktada Süreklilik). $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon ve $x_0 \in D$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in D \ \text{ ve } \ \parallel x-x_0 \parallel < \delta \Longrightarrow \parallel f(x)-f(x_0) \parallel < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna $\boldsymbol{x_0}$ **noktasında sürekli** denir. Sembolik olarak:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : \\ &\quad \parallel x-x_0 \parallel < \delta \Longrightarrow \parallel f(x)-f(x_0) \parallel < \varepsilon. \end{aligned}$$

f, x_0 noktasında sürekli değilse f'ye $\boldsymbol{x_0}$ **noktasında süreksiz** denir.

Yani $f(x_0)$ çevresinde ne kadar dar bir tolerans (ε) istenirse istensin, x_0'ın çevresinde öyle bir güvenli bölge (δ) vardır ki D'nin bu bölgedeki bütün noktaları tolerans içinde kalan değerler verir. Tanımda iki ayrı norm var: $\parallel x-x_0 \parallel$, $\mathbb{R}^n$'deki Öklid normudur; $\parallel f(x)-f(x_0) \parallel$ ise $\mathbb{R}^m$'deki. $m = 1$ iken ikincisi mutlak değerdir; $n = m = 1$ iken tanım Analiz 1'deki tanımın kendisidir. Bulunan δ hem ε'a hem de x_0 noktasına bağlıdır; bunu vurgulamak gerektiğinde $\delta = \delta_{\varepsilon,x_0}$ yazılır.
Limit tanımıyla (Tanım 8.7) karşılaştıralım. Süreklilikte x_0 noktası D'ye ait olmak zorundadır, çünkü $f(x_0)$ değeri tanımın içindedir. $0 < \parallel x-x_0 \parallel$ koşuluna gerek yoktur: $x = x_0$ için $\parallel f(x)-f(x_0) \parallel = 0 < \varepsilon$ zaten sağlanır. Son olarak x_0'ın D'nin bir yığılma noktası olması istenmez; bu farkın sonuçlarını bir sonraki kısımda göreceğiz.
Limitte olduğu gibi (Önerme 8.1) tanımı yuvarlar ve komşuluklarla da yazabiliriz; tek fark, x_0 noktasının artık dışarıda bırakılmaması ve hedefin $f(x_0)$ olmasıdır. Bu biçim, ileride sürekliliği açık kümelerle ifade ederken işimize yarayacak.

Önerme 10.1 (Sürekliliğin Yuvarlar ve Komşuluklarla İfadesi). *$f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

1. *f, x_0 noktasında süreklidir.*
2. *Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in D \cap B(x_0,\delta)$ iken $f(x) \in B\left(f(x_0),\varepsilon\right)$ olur; kısaca*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f\left(\ D \cap B(x_0,\delta)\ \right) \subseteq B\left(\ f(x_0),\varepsilon\ \right).$$

3. *$f(x_0)$ noktasının $\mathbb{R}^m$'deki her V komşuluğu için x_0 noktasının $\mathbb{R}^n$'de öyle bir U komşuluğu vardır ki $f(D\cap U)\subseteq V$ olur.*

> ***İspat.***
> ***1 ve 2.*** *Açık yuvarın tanımı (Tanım 2.6) gereği*
>
> $$B(x_0,\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n :\parallel x-x_0\parallel<\delta\},$$
> $$B\left(\ f(x_0),\varepsilon\ \right)=\{y\in\mathbb{R}^m :\parallel y-f(x_0)\parallel<\varepsilon\}$$
>
> *olduğundan "$x\in D$ ve $\parallel x-x_0\parallel<\delta$" ile "$x\in D\cap B(x_0,\delta)$" aynı koşuldur; "$\parallel f(x)-f(x_0)\parallel<\varepsilon$" ile "$f(x)\in B\left(\ f(x_0),\varepsilon\ \right)$" de öyle. 2, tanımın yuvarlarla yazılışıdır.*
> ***2'den 3'e.*** *V, $f(x_0)$ noktasının bir komşuluğu olsun. Tanım 3.1 gereği $B\left(\ f(x_0),\varepsilon\ \right)\subseteq V$ olacak bir $\varepsilon>0$ vardır. Bu ε için 2'deki δ'yı alalım ve $U=B(x_0,\delta)$ diyelim. U, x_0'ın bir komşuluğudur, çünkü kendisini kapsar; ayrıca*
>
> $$f(D\cap U)\subseteq B\left(\ f(x_0),\varepsilon\ \right)\subseteq V$$
>
> *olur.*
> ***3'ten 2'ye.*** *$\varepsilon>0$ verilsin. $V=B\left(\ f(x_0),\varepsilon\ \right)$ kümesi $f(x_0)$'ın bir komşuluğudur. 3 gereği $f(D\cap U)\subseteq V$ olacak bir U komşuluğu, Tanım 3.1 gereği de $B(x_0,\delta)\subseteq U$ olacak bir $\delta>0$ vardır. $D\cap B(x_0,\delta)\subseteq D\cap U$ olduğundan*
>
> $$f\left(\ D\cap B(x_0,\delta)\ \right)\subseteq f(D\cap U)\subseteq B\left(\ f(x_0),\varepsilon\ \right)$$
>
> *olur.* ■

Süreklilik bir noktada tanımlandı. Bir fonksiyonun "sürekli olduğunu" söylemek, bunun bir kümenin her noktasında sağlanması demektir.

Tanım 10.2 (Bir Kümede Süreklilik). $f:D\to\mathbb{R}^m$ ve $A\subseteq D$ olsun. f, A'nın her noktasında sürekliyse f'ye ***A* üzerinde sürekli** denir. f, D'nin her noktasında sürekliyse kısaca ***f* süreklidir** ya da ***f*, *D*'de süreklidir** denir.

Yani kümede süreklilik, noktasal bir özelliğin bütün noktalarda sağlanmasıdır. Her noktada ayrı bir δ bulunur ve bu δ'lar noktadan noktaya değişebilir; bütün noktalar için tek bir δ seçilebilmesi daha güçlü bir özelliktir ve bir sonraki bölümde incelenecek. Tanımdan hemen şu da çıkar: f, x_0'da sürekli ve $x_0\in A\subseteq D$ ise f'nin A'ya kısıtlanışı da x_0'da süreklidir, çünkü tanımdaki koşul bu kez daha az sayıda x için istenir.
Tanımın olumsuzu, süreksizliği doğrudan göstermenin yolunu verir. Niceleyicileri kuralına göre çevirirsek f'nin $x_0\in D$ noktasında süreksiz olması

$$\exists\varepsilon_0>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists x_\delta\in D:$$
$$\parallel x_\delta-x_0\parallel<\delta\ \text{ ve }\ \parallel f(x_\delta)-f(x_0)\parallel\geq\varepsilon_0$$

demektir. Sözle: öyle bir "kötü" ε_0 vardır ki x_0'a ne kadar yaklaşılırsa yaklaşılsın, görüntüsü $f(x_0)$'dan en az ε_0 uzakta kalan bir $x_\delta\in D$ noktası bulunur.
Sürekliliği tanımla göstermek, limiti tanımla göstermekle aynı iştir ve Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Limit bölümündeki üç adımlı yöntem burada da kullanılır: aday limitin yerine $f(x_0)$ konur, $\parallel f(x)-f(x_0)\parallel$ farkı $C\parallel x-x_0\parallel^p$ biçiminde bir ifadeyle $(C,p>0)$ üstten sınırlanır ve $C\delta^p=\varepsilon$ eşitliğinden δ seçilir. Tek fark, $x=x_0$ noktasının dışarıda bırakılmamasıdır; orada fark zaten 0'dır. Sınırlamada $\mid x_j-a_j\mid\leq\parallel x-a\parallel$ ve $2\mid xy\mid\leq x^2+y^2$ eşitsizlikleri, paydası kareler toplamı olan kesirlerde $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1$ gözlemi ve $\mid\sin t\mid\leq\mid t\mid$ olgusu (bkz. Analiz 1) iş görür.

Örnek 10.1 (Sinüslü Bir Fonksiyonun Orijinde Sürekliliği). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sin(x^2y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu tanımla gösteriniz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Değer. $f(0,0)=\sin 0=0$'dır.
Sınırlama. $|\sin t\,|\le|\,t\,|$ eşitsizliğini $t=x^2y$ için, ardından $|\,x\,|\le\|\,(x,y)\,\|$ ve $|\,y\,|\le\|\,(x,y)\,\|$ eşitsizliklerini kullanalım:

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=|\sin(x^2y)\,|\le|\,x\,|^2\,|\,y\,|\le\|\,(x,y)\,\|^3.$$

δ seçimi. $\delta^3=\varepsilon$, yani $\delta=\varepsilon^{1/3}$.
Zincir. $\varepsilon>0$ verilsin ve $\delta=\varepsilon^{1/3}$ alalım. $\|\,(x,y)\,\|<\delta$ iken

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|\le\|\,(x,y)\,\|^3<\delta^3=\varepsilon$$

olur; f, $(0,0)$ noktasında süreklidir. Bu fonksiyonun bütün $\mathbb{R}^2$'de sürekli olduğunu ileride bileşke kuralıyla tek satırda göreceğiz. ■

Örnek 10.2 (Dördüncü Kuvvetli Bir Kesir). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y^4}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm.
Değer. $f(0,0)=0$'dır.
Sınırlama. $(x,y)\neq(0,0)$ için $x^4+y^4>0$ ve $y^4\le x^4+y^4$ olduğundan $\dfrac{y^4}{x^4+y^4}\le 1$'dir. Buradan ve $|\,x\,|\le\|\,(x,y)\,\|$ eşitsizliğinden

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=2x^2\cdot\frac{y^4}{x^4+y^4}\le 2x^2\le 2\,\|\,(x,y)\,\|^2$$

elde edilir.
δ seçimi. $2\delta^2=\varepsilon$, yani $\delta=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}}$.
Zincir. $\varepsilon>0$ verilsin ve $\delta=\sqrt{\varepsilon/2}$ alalım. $\|\,(x,y)\,\|<\delta$ iken

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|\le 2\,\|\,(x,y)\,\|^2<2\delta^2=\varepsilon$$

olur. f, $(0,0)$ noktasında süreklidir. ■

Örnek 10.3 (Üç Değişkenli Bir Örnek). $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$p=(x,y,z)$ yazalım; $\|\,p\,\|^2=x^2+y^2+z^2$'dir.
Değer. $f(0,0,0)=0$'dır.
Sınırlama. Her bileşen için $|\,x\,|,|\,y\,|,|\,z\,|\le\|\,p\,\|$ olduğundan $|\,xyz\,|\le\|\,p\,\|^3$'tür. $p\neq 0$ için

$$|\,f(p)-f(0,0,0)\,|=\frac{|\,xyz\,|}{\|\,p\,\|^2}\le\frac{\|\,p\,\|^3}{\|\,p\,\|^2}=\|\,p\,\|$$

olur; $p=0$ için fark 0'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

δ seçimi ve zincir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \varepsilon$ alalım. $\| p \| < \delta$ iken $| f(p) - f(0,0,0) | \leq \| p \| < \varepsilon$ olur. f, orijinde süreklidir. Pay üçüncü, payda ikinci dereceden olduğundan kesir, uzaklığın birinci kuvveti kadar hızlı sıfıra gider. ■

Son örneklerde fark, uzaklığın pozitif bir kuvvetiyle sınırlanabildi; kesirlerde bunu sağlayan, payın paydadan daha yüksek dereceli olmasıydı. Pay ile payda aynı derecedeyse durum değişir.

Örnek 10.4 (Tanımla Süreksizlik). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında süreksiz olduğunu tanımla gösteriniz.

Çözüm.
Süreksizliğin tanımına göre bir $\varepsilon_0 > 0$ seçip her $\delta > 0$ için $(0,0)$'a δ'dan yakın ama görüntüsü $f(0,0) = 0$'dan en az ε_0 uzak bir nokta bulmalıyız.
Aday noktalar. $y = x$ doğrusu üzerindeki (t,t) noktalarında $(t \neq 0)$

$$f(t,t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$

olur. Bu doğru üzerinde fonksiyon, orijine ne kadar yaklaşılırsa yaklaşılsın $\frac{1}{2}$ değerini alır.
ε_0 ve x_δ. $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ alalım ve $\delta > 0$ verilsin. Arşimet özelliği gereği $N_\delta > \frac{\sqrt{2}}{\delta}$ olan bir $N_\delta \in \mathbb{N}$ vardır (bkz. Analiz 1). $x_\delta = \left(\frac{1}{N_\delta}, \frac{1}{N_\delta} \right)$ noktası için

$$\| x_\delta - (0,0) \| = \sqrt{\frac{1}{N_\delta^2} + \frac{1}{N_\delta^2}} = \frac{\sqrt{2}}{N_\delta} < \delta$$

ve

$$| f(x_\delta) - f(0,0) | = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

olur. Süreksizlik koşulu sağlanmıştır; f, $(0,0)$ noktasında süreksizdir. ε_0 yerine $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ aralığındaki her sayı işe yarardı. ■

10.2 İzole Noktalar ve Limitle İlişki

Süreklilik tanımı x_0'ın bir yığılma noktası olmasını istemiyordu. Tanım kümesinin noktaları bu açıdan iki türlüdür: yığılma noktaları ve izole noktalar (Tanım 8.8). $x_0 \in D$ izole bir noktaysa bir $r > 0$ için $\big(B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \big) \cap D = \varnothing$'dır; $x_0 \in D$ olduğundan bu,

$$B(x_0, r) \cap D = \{x_0\}$$

demektir: yeterince küçük bir yuvar D'den yalnız x_0'ın kendisini yakalar. Örneğin $\mathbb{R}^2$'de $D = B[0,1] \cup \{(3,0)\}$ kümesinde $(3,0)$ noktası izoledir: kapalı birim yuvarın her noktasının $(3,0)$'a uzaklığı en az 2 olduğundan $B\big((3,0), 1\big) \cap D = \{(3,0)\}$'dır. Kapalı birim yuvarın noktaları ise D'nin yığılma noktalarıdır, çünkü açık birim yuvarın yığılma noktalarıdır (Örnek 3.16). $\mathbb{Z}^2$ kafesinin her noktası izoledir (Örnek 8.11).

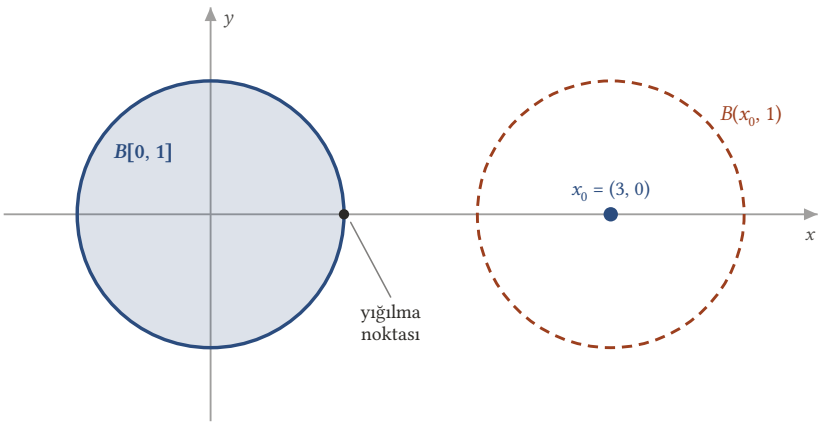
Önerme 10.2 (İzole Noktada Süreklilik). *$f : D \to \mathbb{R}^m$ ve x_0, D'nin bir izole noktası olsun. O zaman f, x_0 noktasında süreklidir.*

İspat.

$B(x_0, r) \cap D = \{x_0\}$ olacak bir $r > 0$ seçelim. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = r$ alalım. $x \in D$ ve $\| x - x_0 \| < \delta$ ise $x \in B(x_0, r) \cap D = \{x_0\}$, yani $x = x_0$'dır ve

$$\| f(x) - f(x_0) \| = 0 < \varepsilon$$

olur. δ, ε'dan bağımsız olarak seçildi: yuvarın içinde x_0'dan başka tanım noktası olmadığından tolerans ne kadar dar olursa olsun denetlenecek bir şey kalmaz.



Şekil 10.1: D = B*[0, 1] ∪ {(3, 0)} kümesi.* x_0 *= (3, 0) merkezli, 1 yarıçaplı yuvar kapalı birim yuvara değmez (aradaki en kısa uzaklık 1'dir); bu yüzden* B(x_0*, 1) ∩* D *= {*x_0*} olur ve* x_0 *izole bir noktadır. (1, 0) gibi bir yığılma noktasının ise her yuvarı* D*'nin başka noktalarını da içerir.*

■

Örneğin $\mathbb{Z}^2$ üzerinde tanımlı her fonksiyon süreklidir; oysa böyle bir fonksiyonun hiçbir noktada limitinden söz edilemez. Yukarıdaki $D = B[0, 1] \cup \{(3, 0)\}$ kümesinde tanımlı bir fonksiyon, $(3, 0)$'daki değeri ne olursa olsun bu noktada süreklidir. İzole noktada süreklilik sorusu içeriksizdir: yakında başka nokta yoksa karşılaştırılacak bir değer de yoktur. İlginç olan yığılma noktalarıdır ve orada süreklilik limit diliyle ifade edilir.

Önerme 10.3 (Yığılma Noktasında Süreklilik ve Limit). *$f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D \cap D'$ olsun. O zaman*

$$f, x_0 \text{ noktasında süreklidir} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

İspat.
$x_0 \in D'$ olduğundan limit tanımı (Tanım 8.7) x_0 noktasında anlamlıdır: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olması, her $\varepsilon > 0$ için $x \in D$ ve $0 < \| x - x_0 \| < \delta$ iken $\| f(x) - L \| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ bulunmasıdır.
(⇒) *f, x_0'da sürekli olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Süreklilik gereği $x \in D$ ve $\| x - x_0 \| < \delta$ iken $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. Özel olarak $x \in D$ ve $0 < \| x - x_0 \| < \delta$ iken de $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$ olur. Bu, $L = f(x_0)$ için limit tanımıdır.*
(⇐) *$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in D$ ve $0 < \| x - x_0 \| < \delta$ iken $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. Şimdi $x \in D$ ve $\| x - x_0 \| < \delta$ olsun. $x \neq x_0$ ise $0 < \| x - x_0 \| < \delta$'dır ve $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$ sağlanır. $x = x_0$ ise fark 0'dır. Her iki durumda da süreklilik koşulu sağlanır.*
■

Önerme, bir yığılma noktasındaki sürekliliği üç koşula ayırır: f, x_0'da tanımlıdır; $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ limiti vardır; $L = f(x_0)$'dır. Süreksizlik, bu koşullardan birinin bozulmasıdır. Özellikle limit yoksa, $f(x_0)$ değeri nasıl seçilirse seçilsin f bu noktada sürekli olamaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Böylece limit için kurduğumuz araçların hepsi sürekliliğe taşınır. Örneğin $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ fonksiyonunu alalım. Bu kesrin orijindeki limitinin 0 olduğunu Örnek 8.21 içinde tanımla gördük; limit $f(0,0)$ değerine eşit olduğundan Önerme 10.3 gereği f orijinde süreklidir. Aynı sonuç sıkıştırmayla da görülür: $(x,y) \neq (0,0)$ için $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ olduğundan $0 \leq |\ f(x,y)\ | \leq 3\ |\ y\ |$'dir ve $(x,y) \to (0,0)$ iken $3\ |\ y\ | \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (Teorem 8.5) limitin 0 olduğunu verir.

Örnek 10.5 (Ardışık Limitlerle Süreksizlik). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini ardışık limitlerle inceleyiniz.

Çözüm.
f, $(0,0)$ noktasında tanımlıdır ve $f(0,0) = 0$'dır. $(0,0)$, $\mathbb{R}^2$'nin bir yığılma noktası olduğundan Önerme 10.3 gereği sürekliliğin ölçütü $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitidir. Bu limiti ardışık limitlerle (Tanım 9.3) sınayalım.

Önce $y \to 0$. $x \neq 0$ sabit olsun. $y \mapsto \dfrac{3x^2}{x^2+3y^2}$ tek değişkenli bir rasyonel fonksiyondur ve paydası $y = 0$'da $x^2 \neq 0$'dır; rasyonel fonksiyonların sürekliliği gereği (bkz. Analiz 1)

$$\lim_{y\to 0} \frac{3x^2}{x^2+3y^2} = \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 3 = 3.$$

Önce $x \to 0$. $y \neq 0$ sabit olsun. Bu kez payda $x = 0$'da $3y^2 \neq 0$'dır ve

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2+3y^2} = \frac{0}{3y^2} = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Karar. İç limitler var ve iki ardışık limit farklıdır ($3 \neq 0$). İki değişkenli limit var olsaydı Önerme 9.2 gereği iki ardışık limit de ona eşit olurdu; Sonuç 9.2 gereği $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ yoktur. (Sonucu $I = J = \mathbb{R}$ ile f'nin $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kümesine kısıtlanışına uygularız; limit tanımı $(0,0)$'daki değere bakmadığından iki fonksiyonun orijindeki limiti aynıdır.) Önerme 10.3 gereği f, $(0,0)$ noktasında sürekli değildir; üstelik $f(0,0)$ değeri başka türlü seçilseydi de sürekli olmazdı. ■

10.3 Dizisel Süreklilik

Limitin dizilerle belirlenmesi (Teorem 8.2) süreklilik için de geçerlidir ve bu kez yığılma noktası koşulu da gerekmez.

Teorem 10.1 (Dizisel Süreklilik). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D$ olsun. f'nin x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan her (x_k) dizisi için*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$$

olmasıdır. Kısaca: terimleri D'de olan her (x_k) dizisi için $x_k \to x_0$ ise $f(x_k) \to f(x_0)$ olur.

İspat.
Gereklilik ($\Rightarrow$). *f, x_0'da sürekli olsun ve (x_k), terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Süreklilik gereği öyle bir $\delta > 0$ vardır ki*

$$x \in D \text{ ve } \| x - x_0 \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon \tag{1}$$

olur. $x_k \to x_0$ olduğundan yakınsaklık tanımını (Tanım 6.3) bu δ için uygularsak $k \geq N$ iken $\| x_k - x_0 \| < \delta$ olacak bir $N \in \mathbb{N}$ buluruz. $k \geq N$ için $x_k \in D$ ve $\| x_k - x_0 \| < \delta$ olduğundan (1) gereği $\| f(x_k) - f(x_0) \| < \varepsilon$ olur. Bu, $f(x_k) \to f(x_0)$ demektir.
Yeterlilik (⇐). *Terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan her (x_k) dizisi için $f(x_k) \to f(x_0)$ olsun. Olmayana ergi: f, x_0'da sürekli olmasın. Süreksizliğin tanımı gereği öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için $\| x_\delta - x_0 \| < \delta$ ve $\| f(x_\delta) - f(x_0) \| \geq \varepsilon_0$ olan bir $x_\delta \in D$ bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için bunu $\delta = \frac{1}{k}$ ile kullanalım: öyle bir $x_k \in D$ vardır ki*

$$\| x_k - x_0 \| < \frac{1}{k} \text{ ve } \| f(x_k) - f(x_0) \| \geq \varepsilon_0 \tag{2}$$

olur. $0 \leq \| x_k - x_0 \| < \frac{1}{k}$ ve $\frac{1}{k} \to 0$ olduğundan sıfır dizisiyle karşılaştırma (bkz. Analiz 1) gereği $\| x_k - x_0 \| \to 0$, yani Önerme 6.1 gereği $x_k \to x_0$'dır. Terimleri D'de olan bu dizi için varsayım gereği $f(x_k) \to f(x_0)$ olmalıdır. Oysa (2)'ye göre hiçbir k için $f(x_k)$ terimi $B\big(f(x_0), \varepsilon_0\big)$ yuvarının içinde değildir; Önerme 6.1 gereği $\big(f(x_k)\big)$ dizisi $f(x_0)$'a yakınsayamaz. Bu çelişki f'nin x_0'da sürekli olduğunu gösterir. ■

Teoremde dizinin terimlerinin x_0'dan farklı olması istenmez; limitin dizisel ölçütünden (Teorem 8.2) tek farkı budur. x_0 bir yığılma noktasıysa teorem, Teorem 8.2 ile Önerme 10.3 birleştirilerek, yani limitin dizisel ölçütünde $L = f(x_0)$ alınarak da elde edilir; $x_k = x_0$ olan terimlerde $f(x_k) = f(x_0)$ olduğundan bu terimler ayrıca sorun çıkarmaz. Yukarıdaki doğrudan ispat izole noktaları da kapsar: izole bir x_0 noktasına yakınsayan ve terimleri D'de olan her dizi, belli bir indisten sonra sabit x_0 olur ve koşul kendiliğinden sağlanır. Bu yüzden teorem, sürekliliğin bir tanımı olarak da kullanılabilir.
Teoremin en sık kullanıldığı yer süreksizliği göstermektir.

Sonuç 10.1 (Dizilerle Süreksizlik). *$f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D$ olsun. Terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan, fakat $\big(f(x_k)\big)$ görüntü dizisi $f(x_0)$'a yakınsamayan bir (x_k) dizisi varsa f, x_0 noktasında süreksizdir.*

İspat.
f, x_0'da sürekli olsaydı Teorem 10.1 teoreminin gereklilik yönü gereği terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan her dizi için $f(x_k) \to f(x_0)$ olurdu. Verilen dizi bunu bozduğundan f, x_0'da sürekli değildir. ■

Görüntü dizisinin $f(x_0)$'a yakınsamaması iki biçimde olabilir: dizi başka bir noktaya yakınsar ya da hiç yakınsamaz.

İki adımda dizilerle süreksizlik

1. **Dizi seçimi.** Terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan bir (x_k) dizisi seçilir. $x_0 = (0,0)$ iken çoğu zaman bir doğru ya da eğri üzerindeki noktalar alınır: $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$, $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ gibi. Dizi, fonksiyonun sorunlu kesrini sabit bir değere götürecek biçimde seçilir.
2. **Karşılaştırma.** $\lim_{k\to\infty} f(x_k)$ hesaplanır. Bu limit yoksa ya da $f(x_0)$'dan farklıysa Sonuç 10.1 gereği f, x_0'da süreksizdir.

Limitin olmadığını göstermek için iki dizi gerekiyordu (Sonuç 8.1); süreksizlik için tek dizi yeter, çünkü karşılaştırılacak değer $f(x_0)$ önceden bellidir.

Örnek 10.6 (Doğrular Üzerinde Sabit Bir Fonksiyon). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında süreksiz olduğunu dizilerle gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dizi seçimi. Pay ile payda aynı dereceden olduğundan orijinden geçen bir doğru üzerinde kesir sabit kalır. $y = x$ doğrusundaki $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ noktalarını alalım. $\| x_k - (0,0) \| = \frac{\sqrt{2}}{k} \to 0$ olduğundan $x_k \to (0,0)$'dır.
Karşılaştırma.

$$f(x_k) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Sonuç 10.1 gereği f, $(0,0)$ noktasında süreksizdir.
Daha fazlası. $y = \frac{x}{2}$ doğrusundaki $y_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2k}\right)$ noktaları da orijine yakınsar ve

$$f(y_k) = \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4k^2}} = \frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5}$$

olur. Görüntüleri farklı limitlere giden iki dizi bulunduğundan orijinde limit yoktur (Sonuç 8.1); aynı sonuç Örnek 8.16 ve Örnek 9.2 içinde de elde edilmişti. Önerme 10.3 gereği $f(0,0)$ değeri nasıl seçilirse seçilsin f orijinde süreksizdir. ■

Bu örnek, çok değişkenli sürekliliğin neden tek değişkenli sürekliliklerden güçlü olduğunu gösterir. y_0 sabit tutulursa $x \mapsto f(x, y_0)$ fonksiyonu süreklidir: $y_0 \neq 0$ iken paydası hiç sıfırlanmayan $\frac{xy_0}{x^2 + y_0^2}$ rasyonel fonksiyonudur, $y_0 = 0$ iken ise özdeş olarak 0'dır. Aynı şey x_0 sabitken $y \mapsto f(x_0, y)$ için de doğrudur. Yani f her değişkene göre ayrı ayrı süreklidir, ama iki değişkenin fonksiyonu olarak orijinde sürekli değildir: eksenler boyunca yaklaşım sorun çıkarmaz, sorun $y = x$ gibi eğik doğrular boyunca ortaya çıkar.

Örnek 10.7 (Ardışık Limit Örneğine Dizilerle Bakış). Örnek 10.5 içindeki $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 3y^2}$, $f(0,0) = 0$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında süreksiz olduğunu dizilerle gösteriniz.

Çözüm.
Dizi seçimi. $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0)$ dizisini alalım.
Karşılaştırma.

$$f(x_k) = \frac{\frac{3}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{3}{k^2}} = \frac{3}{4} \to \frac{3}{4} \neq 0 = f(0,0).$$

Sonuç 10.1 gereği f, $(0,0)$ noktasında süreksizdir. Başka diziler başka değerler verir: x ekseni üzerindeki $\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ noktalarında $f = 3$, y ekseni üzerindeki $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ noktalarında $f = 0$'dır. Bu iki değer, Örnek 10.5 içinde bulunan ardışık limitlerle aynıdır. ■

Örnek 10.8 (Salınan Bir Terimle Süreksizlik). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y} + \sin\frac{1}{x}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$f(0,0) = 0$'dır. Olmayana ergi yoluyla gidelim: f, $(0,0)$'da sürekli olsun. O zaman Teorem 10.1 gereği $(0,0)$'a yakınsayan her dizi için görüntüler 0'a yakınsamalıdır.
Dizi seçimi. $\sin\dfrac{1}{x}$ teriminin 1 olduğu noktaları yakalayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

diyelim ve $x_k = (a_k, a_k)$ alalım. $0 < a_k < \dfrac{1}{2k\pi} < \dfrac{1}{k}$ olduğundan $a_k \to 0$ ve Teorem 6.3 gereği $x_k \to (0,0)$'dır. Ayrıca $a_k \cdot a_k \neq 0$'dır; yani x_k noktalarında formülün birinci satırı geçerlidir.
Karşılaştırma. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ olduğundan

$$f(x_k) = a_k \sin\frac{1}{a_k} + \sin\frac{1}{a_k} = a_k + 1 \to 1$$

olur. $1 \neq 0 = f(0,0)$ olduğundan bu, varsayımla çelişir; f, $(0,0)$ noktasında sürekli değildir (Sonuç 10.1).
Sorunun kaynağı ikinci terimdir. Birinci terim tek başına orijinde sürekli bir fonksiyon verir, çünkü $\left|x \sin\dfrac{1}{y}\right| \leq |\,x\,| \leq \|\,(x,y)\,\|$'dir. İkinci terim ise $x \to 0$ iken hiçbir değere yerleşmeden -1 ile 1 arasında salınır (bkz. Analiz 1); önünde onu söndüren bir çarpan yoktur. ■

10.4 Süreksizlik Türleri

Bir yığılma noktasındaki süreksizlik Önerme 10.3 gereği iki biçimde ortaya çıkar: limit vardır ama değere eşit değildir, ya da limit hiç yoktur. İlki fonksiyonun tek bir değeri değiştirilerek giderilir, ikincisi giderilemez.

Tanım 10.3 (Kaldırılabilir Süreksizlik). $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D'$ olsun. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ limiti var, fakat ya $x_0 \notin D$ ya da $x_0 \in D$ ve $f(x_0) \neq L$ ise x_0 noktasına f'nin bir **kaldırılabilir süreksizlik noktası** denir.

Yani süreksizliğin tek nedeni, fonksiyonun x_0'daki değerinin "yanlış" seçilmiş ya da hiç verilmemiş olmasıdır. x_0'ın çevresinde fonksiyon düzgün biçimde tek bir değere yaklaşır; yalnız o değer x_0'a yazılmamıştır.

Tanım 10.4 (Esas Süreksizlik). $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D'$ olsun. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limiti yoksa x_0 noktasına f'nin bir **esas süreksizlik noktası** denir.

Yani fonksiyon x_0'a yaklaşırken tek bir değere yerleşmez: farklı yollarda farklı değerlere gider, sınırsız büyür ya da salınır. Tek değişkende bir noktaya iki yönden yaklaşılır ve Analiz 1'de limitin olmadığı durumları sağdan ve soldan limitlere bakarak sıçrama ve ikinci tür süreksizlik diye ikiye ayırdık (bkz. Analiz 1). $n = 1$ iken yukarıdaki tanım bu iki türü birlikte kapsar; terimi yalnız $n \geq 2$ için kullanıyoruz. $n \geq 2$ iken bir noktaya sonsuz çok doğrultudan yaklaşılabildiğinden "sağ" ve "sol" yoktur ve bu ayrım yapılmaz; limitin olmadığı her süreksizliğe esas süreksizlik diyoruz. Örnek 10.6 ve Örnek 10.5 örneklerinde orijinde limitin olmadığını gördük; orijin bu fonksiyonların esas süreksizlik noktasıdır. Örnek 10.4 örneğinde de öyledir: x ekseni üzerindeki $\left(\dfrac{1}{k}, 0\right)$ noktalarında fonksiyon 0, $y = x$ doğrusu üzerinde $\dfrac{1}{2}$ değerini alır. Örnek 10.8 örneğinde eksenler üzerinde $f = 0$'dır, x_k noktalarındaki değerler ise 1'e gider; orada da orijin esas süreksizlik noktasıdır.
Adlandırmanın gerekçesini şu önerme verir.

Önerme 10.4 (Süreksizliğin Kaldırılması). *$f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D'$ olsun.*

1. *$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olsun. $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $x \in D \setminus \{x_0\}$ için $\tilde{f}(x) = f(x)$ ve $\tilde{f}(x_0) = L$ ile tanımlansın. O zaman $\tilde{f}$, x_0 noktasında süreklidir. $x_0 \notin D$ ise $\tilde{f}$'ye f'nin x_0 noktasına **sürekli genişlemesi** denir.*
2. *$\lim_{x\to x_0} f(x)$ yoksa $D \setminus \{x_0\}$ üzerinde f ile çakışan hiçbir $g : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu x_0 noktasında sürekli değildir.*

İspat.
$E = D \cup \{x_0\}$ diyelim. $D \subseteq E$ olduğundan D'nin her yığılma noktası E'nin de yığılma noktasıdır; dolayısıyla $x_0 \in E \cap E'$'dür. E'nin x_0'dan farklı noktaları tam olarak $D \setminus \{x_0\}$ kümesinin noktalarıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in D$ ve $0 <\| x - x_0 \|< \delta$ iken $\| f(x) - L \|< \varepsilon$ olur. $x \in E$ ve $0 <\| x - x_0 \|< \delta$ ise $x \in D \setminus \{x_0\}$ ve $\tilde{f}(x) = f(x)$'tir; dolayısıyla $\| \tilde{f}(x) - L \|< \varepsilon$ olur. Bu, $\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = L = \tilde{f}(x_0)$ demektir ve Önerme 10.3 gereği $\tilde{f}$, x_0'da süreklidir.*

2. *Olmayana ergi: böyle bir g, x_0'da sürekli olsun. Önerme 10.3 gereği $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$'dır. $\varepsilon > 0$ verilsin; $x \in E$ ve $0 <\| x - x_0 \|< \delta$ iken $\| g(x) - g(x_0) \|< \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. $x \in D$ ve $0 <\| x - x_0 \|< \delta$ ise $x \in E \setminus \{x_0\}$ ve $g(x) = f(x)$ olduğundan $\| f(x) - g(x_0) \|< \varepsilon$ olur. Yani $\lim_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$'dır; bu, limitin yokluğuyla çelişir.* ■

Önerme, Analiz 1'deki kaldırılabilir süreksizlik sonucunun (bkz. Analiz 1) $\mathbb{R}^n$'deki biçimidir. Kaldırılabilir bir süreksizlik noktasında fonksiyonu sürekli yapan değer tektir: Önerme 10.3 gereği bu değer limite eşit olmalıdır ve limit tektir (Teorem 8.1).

Örnek 10.9 (Kaldırılabilir Bir Süreksizlik). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

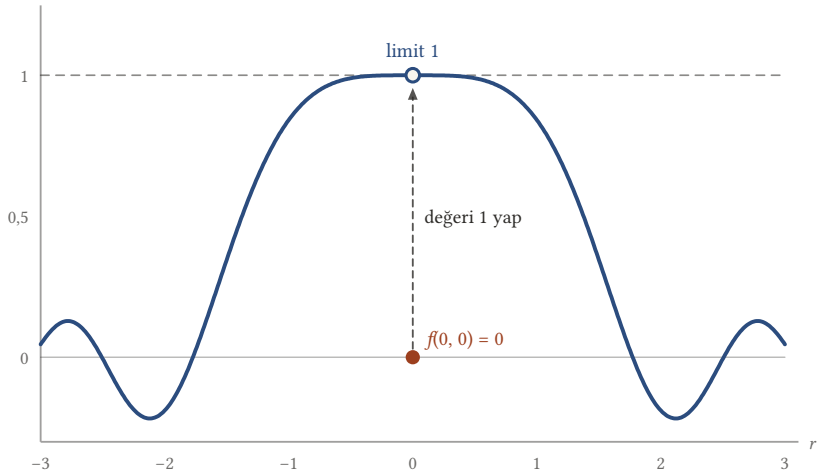
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki süreksizliğinin türünü belirleyiniz.

Çözüm.
Limit. (x_k, y_k), terimleri $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kümesinde olan ve $(0,0)$'a yakınsayan keyfi bir dizi olsun. $t_k = x_k^2 + y_k^2 =\| (x_k, y_k) \|^2$ diyelim. Her k için $t_k > 0$'dır ve Önerme 6.1 gereği $\| (x_k, y_k) \| \to 0$ olduğundan $t_k \to 0$'dır. Tek değişkende $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$'dir (bkz. Analiz 1); dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği

$$f(x_k, y_k) = \frac{\sin t_k}{t_k} \to 1$$

olur. Dizi keyfi olduğundan Teorem 8.2 gereği $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$'dir.
Tür. Limit vardır ve $1 \neq 0 = f(0,0)$'dır; Önerme 10.3 gereği f orijinde süreksizdir ve Tanım 10.3 gereği orijin bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0,0)$ yerine 1 yazılırsa Önerme 10.4 gereği elde edilen fonksiyon orijinde süreklidir. Fonksiyonun değeri yalnız $r =\| (x,y) \|$ uzaklığına bağlıdır: grafiği, $r \mapsto \dfrac{\sin r^2}{r^2}$ eğrisinin düşey eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeydir ve bu yüzeyin tepesindeki tek nokta yerinden oynatılmıştır.



Şekil 10.2: f'nin orijinden geçen bir doğru boyunca kesiti: $r \neq 0$ için $g(r) = \sin(r^2)/r^2$ eğrisi, r uzaklığı işaretli alınmıştır. Eğri $r \longrightarrow 0$ iken 1'e yaklaşır (içi boş nokta), oysa $f(0, 0) = 0$'dır (dolu nokta). Bu tek değer 1 yapılınca fonksiyon orijinde sürekli olur.

■

Limitinin olmadığını önceki bölümlerde gördüğümüz fonksiyonlar ise Önerme 10.4 önermesinin 2. maddesi gereği hiçbir biçimde sürekli genişletilemez. Örneğin $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonu eksenler boyunca 1 ve -1 değerlerini alır ve orijinde limiti yoktur (Örnek 9.1); orijine hangi değer verilirse verilsin orijin bir esas süreksizlik noktası olur. Aynı şey $(x,y) \mapsto \dfrac{(x,y)}{\| (x,y) \|}$ birim vektör fonksiyonu için de geçerlidir: x ekseninin iki yarısı boyunca $(1,0)$ ve $(-1,0)$ değerlerini alır (Alıştırma 9.12). Bu fonksiyonun normu her yerde 1'dir; yani normun orijinde limiti vardır, ama fonksiyonun kendisi orijine sürekli genişletilemez.

10.5 Cebirsel İşlemler

Limitin cebirsel işlemlerle uyumu (Teorem 8.4) sürekliliğe de geçer. İspatı dizisel süreklilik ve dizilerin limit kuralları (Teorem 6.4) üzerinden yapmak en kısasıdır; bu yol izole noktaları ayrıca düşünmeyi de gereksiz kılar.

Teorem 10.2 (Sürekli Fonksiyonlarla Cebirsel İşlemler). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in D$ olsun. $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ ve $\varphi : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları x_0 noktasında sürekli olsun. O zaman aşağıdaki fonksiyonlar x_0 noktasında süreklidir:*

1. ***Toplam ve fark:*** *$f+g$ ve $f-g$.*
2. ***Skaler fonksiyonla çarpım:*** *φf, yani $x \mapsto \varphi(x) f(x)$. Özel olarak her $c \in \mathbb{R}$ için cf.*
3. ***Skaler fonksiyona bölme:*** *$\varphi(x_0) \neq 0$ ise $D_0 = \{x \in D : \varphi(x) \neq 0\}$ kümesinde tanımlı $x \mapsto \dfrac{1}{\varphi(x)} f(x)$ fonksiyonu.*
4. ***İç çarpım:*** *$x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$.*
5. ***Vektörel çarpım:*** *$m = 3$ ise $x \mapsto f(x) \times g(x)$.*

İspat.
Hepsinde yöntem aynıdır: Teorem 10.1 teoremini önce verilen fonksiyonlara gereklilik yönüyle, sonra yeni fonksiyona yeterlilik yönüyle uygularız. (x_k), terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan keyfi bir dizi olsun. f, g ve φ fonksiyonları x_0'da sürekli olduğundan $f(x_k) \to f(x_0)$, $g(x_k) \to g(x_0)$ ve $\varphi(x_k) \to \varphi(x_0)$ olur.
1. *Teorem 6.4 teoreminin toplam kuralı gereği $f(x_k) + g(x_k) \to f(x_0) + g(x_0)$, yani $(f+g)(x_k) \to (f+g)(x_0)$'dır. Dizi keyfi olduğundan Teorem 10.1 gereği $f+g$, x_0'da süreklidir. Fark için $f - g = f + (-1)\,g$ yazılır ve toplam kuralı skalerle çarpım kuralıyla birlikte kullanılır.*
2. *$\lambda_k = \varphi(x_k)$ reel sayı dizisi $\lambda = \varphi(x_0)$ sayısına yakınsar. Teorem 6.4 teoreminin skalerle çarpım kuralı gereği $\varphi(x_k) f(x_k) \to \varphi(x_0) f(x_0)$ olur. Özel durum için φ sabit c fonksiyonu alınır; sabit fonksiyon her noktada süreklidir, çünkü farkı her zaman $\mid c - c \mid = 0 < \varepsilon$'dur.*
3. *$x_0 \in D_0$'dır. Terimleri D_0'da olan ve x_0'a yakınsayan bir (x_k) dizisi alalım. Terimler D'de de olduğundan yine $f(x_k) \to f(x_0)$ ve $\varphi(x_k) \to \varphi(x_0)$ olur; üstelik her k için $\varphi(x_k) \neq 0$ ve $\varphi(x_0) \neq 0$'dır. Teorem 6.4 teoreminin skalere bölme kuralı gereği*

$$\frac{1}{\varphi(x_k)} f(x_k) \to \frac{1}{\varphi(x_0)} f(x_0)$$

olur. Teorem 10.1 teoremi D_0 tanım kümesiyle uygulanırsa bu fonksiyon x_0'da süreklidir.
4. *Teorem 6.4 teoreminin iç çarpım kuralı gereği $\langle f(x_k), g(x_k) \rangle \to \langle f(x_0), g(x_0) \rangle$ olur.*
5. *Teorem 6.4 teoreminin vektörel çarpım kuralı gereği $f(x_k) \times g(x_k) \to f(x_0) \times g(x_0)$ olur.*
4 ve 5'te de dizi keyfi olduğundan sonuç Teorem 10.1 teoreminden çıkar. ■

$m = 1$ için 2, 3 ve 4 alışılmış kuralları verir: $f, g : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları x_0'da sürekliyse fg çarpımı ve $g(x_0) \neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$ bölümü de x_0'da süreklidir; bu durumda iç çarpım sıradan çarpımdır. x_0 bir yığılma noktasıysa teorem, limit kurallarının (Teorem 8.4) Önerme 10.3 ile birleştirilmesinden de çıkar. (Bölüm için: $\varphi(x_0) \neq 0$ ve φ sürekli olduğundan x_0'ın küçük bir yuvarında $\varphi \neq 0$'dır, dolayısıyla x_0 bölümün tanım kümesinin de yığılma noktasıdır.) Teorem her noktada uygulanırsa sürekli fonksiyonların topla-

 CC BY-NC-SA 4.0

mının, çarpımının ve bölümünün kendi tanım kümelerinde sürekli olduğu elde edilir. Bölümde tanım kümesinin daraldığına dikkat edelim: paydanın sıfırlandığı noktalar atılır.

10.6 Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar

Cebirsel işlemlerin ilk büyük ürünü polinomlardır. $\mathbb{R}^n$'de bir polinom (Tanım 8.9), $c \in \mathbb{R}$ ve $k_1, ..., k_n$ negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $c\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ biçimindeki sonlu sayıda tek terimlinin toplamıdır.

Teorem 10.3 (Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar Süreklidir).

1. *$\mathbb{R}^n$'de her P polinomu $\mathbb{R}^n$'nin her noktasında süreklidir. Dolayısıyla her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$'dır.*
2. *P ve Q, $\mathbb{R}^n$'de polinomlar olmak üzere $R = \dfrac{P}{Q}$ rasyonel fonksiyonu (Tanım 8.10), tanım kümesi olan $D_R = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \neq 0\}$ üzerinde süreklidir.*

> ***İspat.***
> ***Adım 1: Yapı taşları.*** *Sabit fonksiyonlar her noktada süreklidir, çünkü sabit bir c için $\mid c - c \mid = 0 < \varepsilon$'dur. $j = 1, ..., n$ için $\pi_j(x) = x_j$ koordinat fonksiyonunu alalım. Her $x, a \in \mathbb{R}^n$ için*
>
> $$\mid \pi_j(x) - \pi_j(a) \mid = \mid x_j - a_j \mid \leq \| x - a \|$$
>
> *olur, çünkü $(x_j - a_j)^2$, toplamı $\| x - a \|^2$ olan negatif olmayan terimlerden biridir. $\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon$ seçilirse $\| x - a \| < \delta$ iken $\mid \pi_j(x) - \pi_j(a) \mid < \varepsilon$ olur; π_j her noktada süreklidir.*
> ***Adım 2: Tek terimliler.*** *$x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ tek terimlisi, $\pi_1, ..., \pi_n$ fonksiyonlarından $k_1 + ... + k_n$ tanesinin çarpımıdır; bütün üsler sıfırsa sabit 1 fonksiyonudur. Teorem 10.2 teoreminin 2. maddesi ($m = 1$) iki sürekli reel fonksiyonun çarpımının sürekli olduğunu söyler. Çarpan sayısı üzerinde tümevarımla her tek terimli her noktada süreklidir. Aynı madde bir kez daha kullanılırsa $c\, x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ de süreklidir.*
> ***Adım 3: Polinomlar.*** *P sonlu sayıda sürekli tek terimlinin toplamıdır. Teorem 10.2 teoreminin 1. maddesi ve terim sayısı üzerinde tümevarımla P her noktada süreklidir. $\mathbb{R}^n$'nin her x_0 noktası $\mathbb{R}^n$'nin bir yığılma noktasıdır (her $r > 0$ için $x_0 + \frac{r}{2} e_1$ noktası $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ içindedir); Önerme 10.3 gereği $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ olur.*
> ***Adım 4: Rasyonel fonksiyonlar.*** *$x_0 \in D_R$ olsun. P ve Q, $\mathbb{R}^n$'nin her noktasında süreklidir ve $Q(x_0) \neq 0$'dır. Teorem 10.2 teoreminin 3. maddesi $D = \mathbb{R}^n$, $m = 1$, $f = P$ ve $\varphi = Q$ ile uygulanırsa $D_0 = D_R$ olur ve $R = \dfrac{P}{Q}$, x_0'da süreklidir.* ■

Aynı sonuç, polinomların ve rasyonel fonksiyonların limitini veren Önerme 8.4 ile Önerme 10.3 birleştirilerek de elde edilir; yukarıdaki ispat ise sürekliliği doğrudan, cebirsel işlemlerin sürekliliği korumasından kurar. İki değişkende yapı taşları $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ ve sabit fonksiyonlardır (Önerme 8.2); bir polinom $A\, x^k y^l$ biçimindeki terimlerin sonlu toplamıdır. Birkaç örnek:

- $f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + xy^4 - 7y + 6$ ve $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ polinomdur; $\mathbb{R}^2$'nin her (x_0, y_0) noktasında süreklidir ve $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$'dır.
- $g(x, y) = \dfrac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$ rasyonel fonksiyonu tanım kümesi olan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ üzerinde süreklidir.
- $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ve $\dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ rasyonel fonksiyonları da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ üzerinde süreklidir. Birincisinin orijine sürekli genişlemesi yoktur (Örnek 9.1 ve Önerme 10.4); ikincisinin orijinde limiti vardır ve 0'dır (Örnek 8.21), dolayısıyla orijine 0 değeriyle sürekli genişler.
- Payda hiç sıfırlanmıyorsa rasyonel fonksiyon her yerde süreklidir: $\dfrac{xyz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde süreklidir.

10.7 Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar

Örneklerimizin çoğu, bir noktanın dışında bir formülle, o noktada ayrıca tanımlanan fonksiyonlardı. Bunların bütün tanım kümesinde sürekliliğini incelemek için sürekliliğin yerel bir özellik olduğunu kullanırız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Lemma 10.1 (Sürekliliğin Yerelliği). *$D, E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D \cap E$ olsun. Bir $r > 0$ için*

$$W = D \cap B(x_0, r) = E \cap B(x_0, r)$$

olsun ve W'nin her noktasında $f(x) = g(x)$ olsun. O zaman f'nin x_0'da sürekli olması için gerek ve yeter koşul g'nin x_0'da sürekli olmasıdır.

> ***İspat.***
> *g, x_0'da sürekli olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in E$ ve $\| x - x_0 \| < \delta$ iken $\| g(x) - g(x_0) \| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. $\delta' = \min\{\delta, r\}$ alalım. $x \in D$ ve $\| x - x_0 \| < \delta'$ ise $x \in W$'dir; dolayısıyla $x \in E$ ve $f(x) = g(x)$'tir. $x_0 \in W$ olduğundan $f(x_0) = g(x_0)$'dır. Buradan*
>
> $$\| f(x) - f(x_0) \| = \| g(x) - g(x_0) \| < \varepsilon$$
>
> *elde edilir; f, x_0'da süreklidir. D ile E'nin, f ile g'nin rolleri değiştirilirse öbür yön elde edilir.* ■

Yani süreklilik yalnız x_0'ın küçük bir çevresine bakar: fonksiyonu x_0'dan uzakta değiştirmek süreklilik sorusunun yanıtını etkilemez.

> Üç adımda parçalı tanımlı fonksiyonun sürekliliği
>
> 1. **Olağan noktalar.** Formülün geçerli olduğu bölgenin bir noktası, fonksiyonun bir rasyonel ya da başka bilinen sürekli fonksiyonla çakıştığı küçük bir yuvarın merkeziyse, orada süreklilik Teorem 10.3 ve Lemma 10.1 ile elde edilir.
> 2. **Özel nokta.** Formülün geçmediği x_0 noktasında limit incelenir: varlığı ε–δ ya da sıkıştırmayla, yokluğu diziler, yollar ya da ardışık limitlerle gösterilir.
> 3. **Karşılaştırma.** Limit varsa $f(x_0)$ ile karşılaştırılır (Önerme 10.3). Eşitse f her yerde süreklidir; değilse x_0 kaldırılabilir, limit yoksa esas süreksizlik noktasıdır.

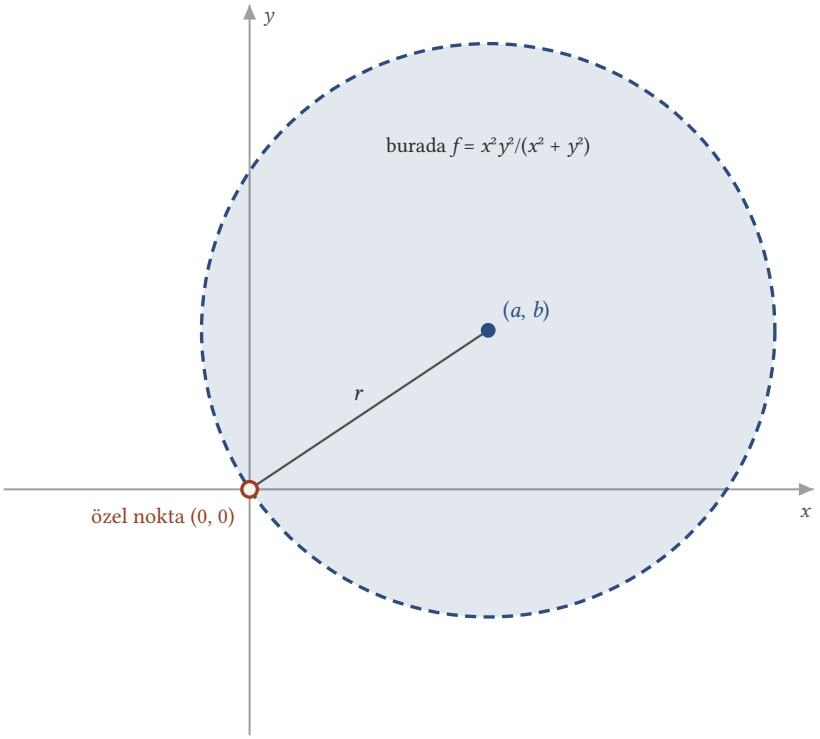
Örnek 10.10 (Her Yerde Sürekli Parçalı Bir Fonksiyon). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$'de sürekli olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Olağan noktalar.** $(a, b) \neq (0, 0)$ olsun ve $r = \| (a, b) \| > 0$ alalım. Orijinin (a, b)'ye uzaklığı tam olarak r olduğundan $B\big((a, b), r\big)$ yuvarı orijini içermez. Bu yuvarda f, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ üzerinde tanımlı $R(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ rasyonel fonksiyonuyla çakışır. Teorem 10.3 gereği R, (a, b)'de süreklidir; Lemma 10.1 ($D = \mathbb{R}^2$, $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$) gereği f de (a, b)'de süreklidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.3: $(a, b) = (1{,}5;\ 1)$ merkezli, $r = \|(a, b)\| \approx 1{,}80$ yarıçaplı açık yuvar. Orijin çemberin üzerindedir, yani yuvara ait değildir; bu yuvarda f, $x^2y^2/(x^2 + y^2)$ rasyonel fonksiyonuyla çakışır ve (a, b)'deki süreklilik oradan gelir.

Özel nokta. $x^4 + y^4 \geq 0$ olduğundan

$$x^2y^2 \leq \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$$

olur. $(x, y) \neq (0, 0)$ için buradan

$$| f(x, y) - f(0, 0) | = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{\| (x, y) \|^2}{2}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ alalım. $\| (x, y) \| < \delta$ iken

$$| f(x, y) - f(0, 0) | \leq \frac{\| (x, y) \|^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon$$

olur ($(x, y) = (0, 0)$ için fark zaten 0'dır).
Karşılaştırma. Özel noktada doğrudan sürekliliği gösterdik; limit 0'dır (aynı limit Örnek 8.19 içinde sıkıştırmayla bulunmuştu) ve $f(0, 0) = 0$ değerine eşittir. f, $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir. Daha keskin $x^2y^2 \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4}$ eşitsizliği ($2 \mid x \mid \mid y \mid \leq x^2 + y^2$ eşitsizliğinin karesi) kullanılsaydı $\delta = 2\sqrt{\varepsilon}$ seçilebilirdi; tanım yalnız bir δ bulunmasını ister, en büyüğünü değil. ■

Örnek 10.11 (Kesirli Fonksiyonun Bütün Düzlemde Sürekliliği). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$'deki sürekliliğini araştırınız.

> **Çözüm.**
> **Olağan noktalar.** $(a,b) \neq (0,0)$ ise $r = \| (a,b) \|$ yarıçaplı yuvarda f, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ üzerinde sürekli olan $\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ rasyonel fonksiyonuyla çakışır; Teorem 10.3 ve Lemma 10.1 gereği f, (a,b)'de süreklidir.
> **Özel nokta.** Bu kesrin orijindeki limiti 0'dır; Örnek 8.21 içinde tanımdan gösterildi. Sıkıştırmayla da görülür: $(x,y) \neq (0,0)$ için $0 \leq | f(x,y) | \leq 3 | y | \leq 3 \| (x,y) \|$'dir.
> **Karşılaştırma.** Limit $0 = f(0,0)$ olduğundan Önerme 10.3 gereği f orijinde de süreklidir.
> Sonuç olarak f, $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir. Formül yalnız $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ üzerinde anlamlıdır; orijine verilen 0 değeri bu rasyonel fonksiyonun sürekli genişlemesini kurar. ■

10.8 Bileşke Fonksiyon ve Norm

Limit için dış fonksiyonun tek değişkenli ve sürekli olduğu durumu Önerme 8.3 ile görmüştük. Şimdi iki fonksiyonun da çok değişkenli olabildiği genel durumu ele alıyoruz: sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir. Tek değişkende olduğu gibi burada ek bir koşul gerekmez (bkz. Analiz 1).

Teorem 10.4 (Bileşke Fonksiyonun Sürekliliği). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$ olsun. $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $g : E \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonları $f(D) \subseteq E$ koşulunu sağlasın; böylece $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$, $(g \circ f)(x) = g\left(f(x) \right)$ bileşkesi tanımlıdır. f, $x_0 \in D$ noktasında ve g, $f(x_0) \in E$ noktasında sürekliyse $g \circ f$ de x_0 noktasında süreklidir.*

> ***İspat.***
> *(x_k), terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan keyfi bir dizi olsun. f, x_0'da sürekli olduğundan Teorem 10.1 gereği $f(x_k) \to f(x_0)$ olur. $y_k = f(x_k)$ dizisinin terimleri $f(D) \subseteq E$ kümesindedir ve $y_k \to f(x_0)$'dır. g, $f(x_0)$ noktasında sürekli olduğundan Teorem 10.1 bu kez g'ye ve (y_k) dizisine uygulanırsa*
>
> $$(g \circ f)(x_k) = g(y_k) \to g\left(f(x_0) \right) = (g \circ f)(x_0)$$
>
> *elde edilir. (x_k) dizisi keyfi olduğundan Teorem 10.1 gereği $g \circ f$, x_0'da süreklidir.* ■

Teoremin en sık kullanılan biçiminde dış fonksiyon tek değişkenlidir: $f : D \to \mathbb{R}$, x_0'da sürekli ve ψ, $f(D)$'yi içeren bir kümede tanımlı ve $f(x_0)$'da sürekli bir reel fonksiyon ise $\psi \circ f$ de x_0'da süreklidir. $| t |$, $\sqrt{t}$ $(t \geq 0)$, $\sin t$ ve $\cos t$ fonksiyonları tanım kümelerinde süreklidir (bkz. Analiz 1); e^t türevlenebilir olduğundan süreklidir (bkz. Analiz 2 ve Analiz 2). Bu yüzden f sürekliyse $| f |$, $\sqrt{f}$ ($f \geq 0$ iken), $\sin f$, $\cos f$ ve e^f de süreklidir. Örneğin $\sin(x^2y)$, x^2y polinomuyla sinüs fonksiyonunun bileşkesi olduğundan $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir; Örnek 10.1 içinde yalnız orijin için yaptığımız hesap böylece her noktaya genellenir. İç fonksiyon bir koordinat fonksiyonu da olabilir: ψ, $\mathbb{R}$'nin bir kümesinde sürekliyse $(x,y) \mapsto \psi(x)$ fonksiyonu, $\psi \circ \pi_1$ bileşkesi olarak süreklidir. Örneğin $(x,y) \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $\{(x,y) : x \neq 0\}$ kümesinde süreklidir.

Sonuç 10.2 (Norm Fonksiyonu Süreklidir). *$f : D \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $x_0 \in D$ noktasında sürekliyse $x \mapsto \| f(x) \|$ fonksiyonu da x_0 noktasında süreklidir. Özel olarak $x \mapsto \| x \|$ norm fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde süreklidir.*

> ***İspat.***
> *Önce $N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $N(y) = \| y \|$ fonksiyonunun her $y_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \varepsilon$ alalım. Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 1.2) gereği $\| y - y_0 \| < \delta$ iken*
>
> $$| N(y) - N(y_0) | = \big| \| y \| - \| y_0 \| \big| \leq \| y - y_0 \| < \varepsilon$$
>
> *olur. $x \mapsto \| f(x) \|$ fonksiyonu $N \circ f$ bileşkesidir; Teorem 10.4 gereği x_0'da süreklidir. Özel durum için f birim fonksiyon ($f(x) = x$) alınır; birim fonksiyon $\delta = \varepsilon$ ile her noktada süreklidir.* ■

Bileşkeye başvurmadan da ispat yapılabilir: ters üçgen eşitsizliği $\big| \| f(x) \| - \| f(x_0) \| \big| \leq \| f(x) - f(x_0) \|$ verir ve sağ tarafı ε'dan küçük yapan δ sol tarafı da küçük yapar. Sonucun bir uygulaması: sabit bir

 CC BY-NC-SA 4.0

$a \in \mathbb{R}^n$ için $x \mapsto \| x - a \| = d(x,a)$ uzaklık fonksiyonu süreklidir, çünkü $x \mapsto x - a$ fonksiyonu (birim fonksiyonla sabitin farkı) süreklidir ve norm onunla bileşke yapılır.

Örnek 10.12 (Bileşkelerle Kurulan Bir Fonksiyon). $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y,z) = e^{xy}\cos(x-z) + \sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$'te sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Fonksiyonu yapı taşlarına ayıralım.
Üstel çarpan. xy bir polinomdur ve Teorem 10.3 gereği süreklidir; $t \mapsto e^t$ sürekli olduğundan Teorem 10.4 gereği e^{xy} süreklidir.
Kosinüslü çarpan. $x - z$ bir polinomdur; cos sürekli olduğundan $\cos(x-z)$ süreklidir.
Kök. $x^2+y^2+z^2+1$ bir polinomdur ve her yerde 1'den büyük ya da eşittir; değerleri $[0,+\infty)$ aralığındadır ve karekök bu aralıkta süreklidir. Bileşke kuralıyla $\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$ süreklidir. (Bu terim $\sqrt{\| p \|^2 + 1}$ biçiminde de yazılabilir.)
Birleştirme. Teorem 10.2 teoreminin 2. maddesi ($m=1$) gereği $e^{xy}\cos(x-z)$ çarpımı, 1. maddesi gereği de toplam süreklidir. h, $\mathbb{R}^3$'ün her noktasında süreklidir. ■

10.9 Bileşenlerle Süreklilik

Vektör değerli bir fonksiyonun sürekliliği, bileşen fonksiyonlarının (Tanım 8.2) sürekliliğine indirgenir. Bu, dizilerdeki koordinat yakınsaklık teoreminin (Teorem 6.3) ve limitlerdeki Teorem 8.6 teoreminin süreklilikteki karşılığıdır.

Teorem 10.5 (Bileşenlerle Süreklilik). *$f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ ve $x_0 \in D$ olsun. f'nin x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $j = 1, \ldots, m$ için $f_j : D \to \mathbb{R}$ bileşen fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olmasıdır.*

İspat.
(x_k), terimleri D'de olan ve x_0'a yakınsayan keyfi bir dizi olsun. $f(x_k) = \big(f_1(x_k), \ldots, f_m(x_k) \big)$ ve $f(x_0) = \big(f_1(x_0), \ldots, f_m(x_0) \big)$ olduğundan Teorem 6.3 gereği

$$f(x_k) \to f(x_0) \Leftrightarrow f_j(x_k) \to f_j(x_0) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

olur.
($\Rightarrow$) *f, x_0'da sürekli olsun. Teorem 10.1 gereği $f(x_k) \to f(x_0)$'dır; yukarıdaki denklik gereği her j için $f_j(x_k) \to f_j(x_0)$ olur. Dizi keyfi olduğundan Teorem 10.1 gereği her f_j, x_0'da süreklidir.*
($\Leftarrow$) *Her f_j, x_0'da sürekli olsun. Teorem 10.1 gereği her j için $f_j(x_k) \to f_j(x_0)$'dır; denklik gereği $f(x_k) \to f(x_0)$ olur. Dizi keyfi olduğundan f, x_0'da süreklidir.* ■

Teorem, vektör değerli bir fonksiyonun sürekliliğini m tane reel değerli fonksiyonun sürekliliğine indirger; bölümün önceki sonuçları bu reel fonksiyonlara tek tek uygulanır. Doğrudan bir ispat da verilebilir: her $z \in \mathbb{R}^m$ için geçerli $| z_j | \le \| z \| \le | z_1 | + \ldots + | z_m |$ eşitsizliği $z = f(x) - f(x_0)$ vektörüne uygulanır. Tersine, sürekli reel fonksiyonlar bileşen yapılarak sürekli vektör değerli fonksiyonlar kurulur. Örneğin bileşenleri polinom olan her $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu süreklidir; özel olarak A bir $m \times n$ matris olmak üzere $F(x) = Ax$ lineer dönüşümü süreklidir, çünkü j-inci bileşeni $a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$ birinci dereceden bir polinomdur.

Örnek 10.13 (Bileşenleriyle İncelenen Vektör Değerli Fonksiyon). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right), & (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$'de sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bileşen fonksiyonları $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$F_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2},$$
$$F_2(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

ve $F_1(0,0) = F_2(0,0) = 0$'dır. F_1, Örnek 10.10 içindeki fonksiyondur ve $\mathbb{R}^2$'de süreklidir. F_2, Örnek 10.11 içindeki fonksiyondur ve o da $\mathbb{R}^2$'de süreklidir. Her iki bileşen $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında sürekli olduğundan Teorem 10.5 gereği F de $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir. ■

Bir bileşenin süreksizliği bütün fonksiyonu süreksiz yapar. Örneğin $G(x,y) = \left(x+y, \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$, $G(0,0) = (0,0)$ fonksiyonunun birinci bileşeni her yerde süreklidir, ama ikinci bileşeni Örnek 10.6 gereği orijinde süreksiz olduğundan Teorem 10.5 gereği G orijinde süreksizdir.

10.10 Alıştırmalar

İlk beş alıştırmada süreklilik tek bir noktada tanımla ya da dizilerle incelenir; son üçünde fonksiyonun bütün düzlemdeki sürekliliği, bileşke, cebirsel işlemler ve sürekli genişleme kullanılarak incelenir.

Alıştırma 10.1 (Üstel Paydalı Bir Kesir). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{e^{y^2}(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını ε–δ tanımıyla inceleyiniz.

Çözüm.
Değer. $f(0,0) = 0$'dır.
Sınırlama. İki basit eşitsizlik kullanacağız. $y^2 \geq 0$ ve üstel fonksiyon artan olduğundan $e^{y^2} \geq e^0 = 1$'dir. $(x,y) \neq (0,0)$ için $y^2 \leq x^2+y^2$'dir. $\mid xy^3 \mid = \mid x \mid \mid y \mid \cdot y^2$ yazarak

$$\begin{aligned} \mid f(x,y) - f(0,0) \mid &= \mid x \mid \mid y \mid \cdot \frac{1}{e^{y^2}} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &\leq \mid x \mid \mid y \mid \cdot 1 \cdot 1 = \mid x \mid \mid y \mid \end{aligned}$$

elde ederiz.
δ seçimi. $\| (x,y) \| < \delta$ ise $\mid x \mid < \delta$ ve $\mid y \mid < \delta$'dır; buradan $\mid x \mid \mid y \mid < \delta^2$ olur. $\delta^2 = \varepsilon$, yani $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ seçelim.
Zincir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ olsun. $\| (x,y) \| < \delta$ iken $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$\mid f(x,y) - f(0,0) \mid \leq \mid x \mid \mid y \mid < \delta^2 = \varepsilon$$

olur; $(x,y) = (0,0)$ için fark 0'dır. f, $(0,0)$ noktasında süreklidir. ■

Alıştırma 10.2 (Paydası Kareler Toplamı Olan Bir Kesir). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2yx^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Değer. $f(0,0) = 0$'dır.
Sınırlama. $(x,y) \neq (0,0)$ için $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ ve $\mid y \mid \leq \| (x,y) \|$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| f(x,y) - f(0,0) | = 2 | y | \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 2 | y | \leq 2 \| (x,y) \| .$$

δ seçimi ve zincir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ alalım. $\| (x,y) \| < \delta$ iken

$$| f(x,y) - f(0,0) | \leq 2 \| (x,y) \| < 2\delta = \varepsilon$$

olur. f, $(0,0)$ noktasında süreklidir. $(a,b) \neq (0,0)$ noktasının $\| (a,b) \|$ yarıçaplı yuvarında f bir rasyonel fonksiyonla çakıştığından Teorem 10.3 ve Lemma 10.1 gereği f aslında $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir. ■

Alıştırma 10.3 (Sinüsün Karesi Bölü Mutlak Değerler). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x-y)}{| x | + | y |}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Değer. $f(0,0) = 0$'dır; $(x,y) \neq (0,0)$ için payda $| x | + | y | > 0$'dır.
Sınırlama. $| \sin t | \leq | t |$ ve üçgen eşitsizliği gereği

$$| \sin(x-y) | \leq | x - y | \leq | x | + | y |$$

olur; kare alınırsa $\sin^2(x-y) \leq \big(| x | + | y | \big)^2$. Buradan

$$| f(x,y) - f(0,0) | \leq \frac{\big(| x | + | y | \big)^2}{| x | + | y |} = | x | + | y | \leq 2 \| (x,y) \|$$

elde edilir; son adımda $| x |, | y | \leq \| (x,y) \|$ kullanıldı.
δ seçimi ve zincir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ alalım. $\| (x,y) \| < \delta$ iken

$$| f(x,y) - f(0,0) | \leq 2 \| (x,y) \| < 2\delta = \varepsilon$$

olur. f, $(0,0)$ noktasında süreklidir. Paydaki sinüsün karesi, uzaklığın ikinci kuvveti kadar küçüktür; payda ise birinci kuvvet kadar. Aradaki fark kesri sıfıra götürür. ■

Alıştırma 10.4 (Sinüs Bölü Mutlak Değerler). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x-y)}{| x | + | y |}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm.
Bir önceki alıştırmadan farkı, paydaki sinüsün karesinin alınmamasıdır. Bu kez pay ile payda aynı mertebeden küçüktür ve süreklilik bozulur.
Dizi seçimi. x ekseni üzerindeki $x_k = \left(\dfrac{1}{k}, 0 \right)$ noktalarını alalım; $x_k \to (0,0)$'dır ve

$$f(x_k) = \frac{\sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}$$

olur.
Karşılaştırma. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan (bkz. Analiz 1) dizisel ölçütle $f(x_k) \to 1$'dir. $1 \neq 0 = f(0,0)$ olduğundan Sonuç 10.1 gereği f, $(0,0)$'da süreksizdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tür. y ekseni üzerindeki $y_k = \left(0, \dfrac{1}{k}\right)$ noktalarında

$$f(y_k) = \frac{\sin\left(-\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = -\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \to -1$$

olur. İki dizi farklı limit verdiğinden Sonuç 8.1 gereği orijinde limit yoktur; orijin bir esas süreksizlik noktasıdır ve $f(0,0)$ değeri değiştirilerek süreksizlik giderilemez. ■

Alıştırma 10.5 (Sönümlenen Salınımlar). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Değer. $(0,0)$ noktasında $xy = 0$ olduğundan $f(0,0) = 0$'dır.
Sınırlama. $xy \neq 0$ ise $\left|\sin\dfrac{1}{y}\right| \leq 1$ ve $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$ olduğundan

$$| f(x,y) | \leq | x | + | y | \leq 2 \| (x,y) \|$$

olur. $xy = 0$ ise $f(x,y) = 0$'dır ve aynı eşitsizlik yine sağlanır. Yani her $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $| f(x,y) - f(0,0) | \leq 2 \| (x,y) \|$'dir.
δ seçimi ve zincir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ alalım. $\| (x,y) \| < \delta$ iken $| f(x,y) - f(0,0) | < 2\delta = \varepsilon$ olur; f orijinde süreklidir.
Örnek 10.8 ile karşılaştıralım: orada $\sin\dfrac{1}{x}$ terimi tek başınaydı ve orijine yaklaşırken -1 ile 1 arasında salınıyordu. Burada aynı terim y ile çarpılmıştır; salınım sürer ama genliği $| y |$ ile birlikte sıfıra iner. ■

Alıştırma 10.6 (Süreklilik İçin Parametre Seçimi). $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. f'nin $\mathbb{R}^2$'de sürekli olması için a ne olmalıdır?

Çözüm.
Olağan noktalar. $x^2 + y^2$ bir polinomdur; üstel fonksiyon sürekli olduğundan Teorem 10.4 gereği $e^{x^2+y^2}$ süreklidir ve sabit 1 çıkarılınca pay süreklidir. Payda $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ üzerinde sıfırlanmaz; Teorem 10.2 teoreminin 3. maddesi gereği kesir bu kümede süreklidir. $(u,v) \neq (0,0)$ noktasının $\| (u,v) \|$ yarıçaplı yuvarında f bu kesirle çakıştığından Lemma 10.1 gereği f, a ne olursa olsun (u,v) noktasında süreklidir.
Özel nokta. $I = [0, +\infty)$ üzerinde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t}, & t > 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\dfrac{e^t - 1}{t} = \dfrac{e^t - e^0}{t - 0}$ oranı, üstel fonksiyonun 0'daki türevinin fark oranıdır; $(e^t)' = e^t$ olduğundan (bkz. Analiz 2) $t \to 0$ iken bu oran $e^0 = 1$'e gider. Dolayısıyla φ, 0'da süreklidir. $(x,y) \neq (0,0)$ için $f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$'dir. Önerme 8.3 önermesini $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $g(x,y) = x^2 + y^2$ ve $b = 0$ ile uygularız: $g(D) \subseteq (0, +\infty)$'dır ve Önerme 8.4 gereği $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$'dır. Öyleyse

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \varphi(0) = 1$$

olur.
Karar. Önerme 10.3 gereği f orijinde ancak ve ancak $a = 1$ iken süreklidir. $a \neq 1$ ise orijin bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. Sonuç: f, $\mathbb{R}^2$'de ancak ve ancak $a = 1$ için süreklidir. ■

Alıştırma 10.7 (Bir Eksen Boyunca Tanımlanan Fonksiyon). $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0, \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$'de sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Formül x ekseninin bütün noktalarında bozulur; bu noktaları tek tek incelemek yerine g'yi sürekli fonksiyonlardan kuralım.
Yardımcı fonksiyon. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \neq 0$ için $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ ve $\varphi(0) = 1$ olsun. $t_0 \neq 0$ ise $(t_0 - |\ t_0\ |, t_0 + |\ t_0\ |)$ aralığında $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$'dir ve bu bölüm iki sürekli fonksiyonun bölümü olarak orada süreklidir; süreklilik yerel olduğundan φ, t_0'da süreklidir (bkz. Analiz 1). 0'da ise $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1 = \varphi(0)$ olduğundan (bkz. Analiz 1) süreklidir. φ, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.
***g*'yi φ ile yazma.** Her (x,y) için $g(x,y) = x\,\varphi(xy)$ olduğunu gösterelim.

- $y \neq 0$, $x \neq 0$ ise $xy \neq 0$'dır ve $x\,\varphi(xy) = x \cdot \dfrac{\sin(xy)}{xy} = \dfrac{\sin(xy)}{y}$ olur.
- $y \neq 0$, $x = 0$ ise $g(0,y) = \dfrac{\sin 0}{y} = 0$ ve $0 \cdot \varphi(0) = 0$'dır.
- $y = 0$ ise $g(x,0) = x$ ve $x\,\varphi(0) = x$'tir.

Süreklilik. $(x,y) \mapsto xy$ bir polinomdur; φ sürekli olduğundan Teorem 10.4 gereği $(x,y) \mapsto \varphi(xy)$ süreklidir. $(x,y) \mapsto x$ koordinat fonksiyonu da süreklidir. Teorem 10.2 teoreminin 2. maddesi ($m = 1$) gereği çarpımları olan g, $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir.
Özel olarak her $a \in \mathbb{R}$ için Önerme 10.3 gereği $\lim_{(x,y)\to(a,0)} g(x,y) = g(a,0) = a$'dır: formülün bozulduğu noktalarda fonksiyona verilen değer, tam da limitin değeridir. ■

Alıştırma 10.8 (Bir Doğru Boyunca Sürekli Genişleme). $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ üzerinde tanımlı $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$ fonksiyonunu $\mathbb{R}^2$'nin tamamında sürekli olacak biçimde genişletiniz.

Çözüm.
Sadeleştirme. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ özdeşliğinden D'nin her noktasında

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 = P(x,y)$$

olur. P bir polinomdur ve Teorem 10.3 gereği $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir.
Eksik noktalar. D'de olmayan noktalar $y = x$ doğrusunun (a,a) noktalarıdır. Her biri D'nin yığılma noktasıdır: $\left(a + \dfrac{1}{k}, a\right) \in D$ noktaları (a,a)'ya yakınsar. Terimleri D'de olan ve (a,a)'ya yakınsayan her (x_k, y_k) dizisi için P'nin sürekliliğinden (Teorem 10.1)

$$f(x_k,y_k) = P(x_k,y_k) \to P(a,a) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

olur; Teorem 8.2 gereği $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = 3a^2$'dir. Her (a,a) noktası bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.
Genişleme. $F(x,y) = x^2 + xy + y^2$ ile tanımlanan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu D üzerinde f ile çakışır, doğrunun noktalarında $F(a,a) = 3a^2$ değerini alır ve bir polinom olarak $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir. Genişleme tektir: $\mathbb{R}^2$'de sürekli ve D'de f ile çakışan her G fonksiyonu için Önerme 10.3

 CC BY-NC-SA 4.0

gereği $\lim_{(x,y)\to(a,a)} G(x,y) = G(a,a)$'dır. $(a,a) \in D'$ ve G'nin D'ye kısıtlanışı f olduğundan bu limit $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = 3a^2$'ye eşittir; limit tek olduğundan (Teorem 8.1) $G(a,a) = 3a^2$ olmak zorundadır. ■

Bu bölümde sürekliliği tek tek noktalarda inceledik: tanımı, limitle ve dizilerle ilişkisini, süreksizliğin iki türünü ve sürekliliği koruyan işlemleri gördük. Sürekli Fonksiyonların Global Özellikleri bölümünde sürekli fonksiyonların kümeler üzerindeki davranışına geçiyoruz: açık ve kapalı kümelerin ters görüntüleri, kompakt ve bağlantılı kümelerin görüntüleri, uç değer ve ara değer teoremleri ve düzgün süreklilik.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Sürekli Fonksiyonların Global Özellikleri

Süreklilik tanımı yereldir: f'nin bir a noktasında sürekli olup olmadığına yalnız a'nın çok yakınındaki değerlere bakarak karar verilir (Tanım 10.1). Oysa tek değişkenli analizin en çok kullanılan sonuçları bir fonksiyonun bütün bir küme üzerindeki davranışını anlatır: $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon en büyük ve en küçük değerini alır (bkz. Analiz 1), aldığı iki değer arasındaki her değeri alır (bkz. Analiz 1) ve düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1). Böyle sonuçlara sürekli fonksiyonların **global özellikleri** denir. Hepsi aynı kalıptadır: her noktadaki süreklilik, tanım kümesinin iyi bir özelliğiyle birleşince fonksiyonun bütünü hakkında bir sonuç verir.
Bu bölümde önce sürekliliği tek bir noktaya bakmadan, açık ve kapalı kümelerin ters görüntüleriyle ifade ediyoruz. Ardından Kompakt ve Bağlantılı Kümeler bölümündeki iki kavramın sürekli fonksiyonlarca korunduğunu gösteriyoruz. $[a,b]$ aralığının rolünü kompakt kümeler, "tek parça olma" özelliğinin rolünü bağlantılı kümeler üstlenecek; böylece uç değer ve ara değer teoremleri $\mathbb{R}^n$'ye taşınacak. Bölüm, düzgün süreklilik kavramı ve kompakt kümelerde her sürekli fonksiyonun düzgün sürekli olduğunu söyleyen Heine–Cantor teoremiyle bitiyor.
Bölüm boyunca $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ yazacağız; f'nin D'de sürekli olması, D'nin her noktasında sürekli olması demektir (Tanım 10.2).

11.1 Görüntü ve Ters Görüntü

Global özellikler bir fonksiyonun kümeleri nereye götürdüğü sorusuyla ifade edilir; bu yüzden işe görüntü ve ters görüntü kavramlarını çok boyutlu durumda hatırlayarak başlıyoruz.
Bu iki kavramı Analiz 1'de keyfi fonksiyonlar için tanımlamıştık (bkz. Analiz 1). $A \subseteq D$ kümesinin f altındaki **görüntüsü** ve $B \subseteq \mathbb{R}^m$ kümesinin f altındaki **ters görüntüsü**

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^m,$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in D : f(x) \in B\} \subseteq D$$

kümeleridir. $f(D)$ kümesine f'nin **görüntü kümesi** denir. İki noktaya dikkat edelim. Ters görüntü, fonksiyonun tersi olsun olmasın her fonksiyon için tanımlıdır; $f^{-1}(B)$ yazımındaki f^{-1} bir ters fonksiyon anlamına gelmez. Ayrıca ters görüntü her zaman tanım kümesinin içindedir: B ne kadar büyük olursa olsun $f^{-1}(B) \subseteq D$ olur ve B, f'nin değerlerinden hiçbirini içermiyorsa $f^{-1}(B) = \varnothing$'dir.
Ters görüntü küme işlemleriyle tam uyumludur (bkz. Analiz 1 ve Analiz 1). $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathbb{R}^m$'nin alt kümelerinden oluşan bir aile ve $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ise

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus B) = D \setminus f^{-1}(B)$$

olur. Son eşitlikte tümleyenin $\mathbb{R}^n$'ye göre değil D'ye göre alındığına dikkat edelim: $f(x) \notin B$ koşulunu sağlayan noktalar yalnız D'nin noktaları arasından seçilir. Görüntü ise yalnız birleşimle uyumludur; genel olarak yalnız $f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$ ve $A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right)$ kapsamaları vardır.
Tek değişkenli bir örnekle başlayalım. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olsun. $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ise $0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$'tür; tersine her $y \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ için $x = \sqrt{y}$ noktası $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığındadır ve $f(x) = y$ olur. Dolayısıyla $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$'tür. Aynı gerekçeyle görüntü kümesi $f([-1,1]) = [0,1]$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

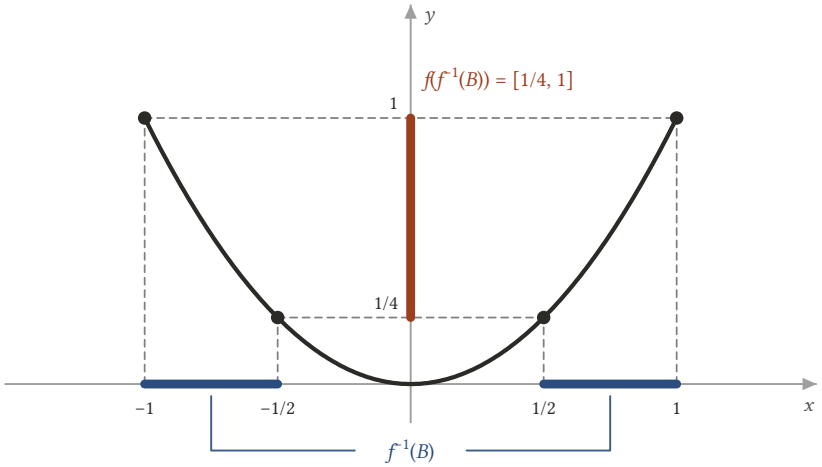
Örnek 11.1 (Kare Fonksiyonunda Ters Görüntü). $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olsun. $B = \left[\frac{1}{4}, 3\right]$ kümesinin f altındaki ters görüntüsünü bulunuz.

Çözüm.
Tanım gereği

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in [-1,1] : \frac{1}{4} \leq x^2 \leq 3 \right\}$$

olur. $x \in [-1,1]$ için $x^2 \leq 1 < 3$ olduğundan sağdaki eşitsizlik kendiliğinden sağlanır. Geriye $x^2 \geq \frac{1}{4}$, yani $|\, x \,| \geq \frac{1}{2}$ koşulu kalır. Dolayısıyla

$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, 3\right]\right) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$



Şekil 11.1: $f(x) = x^2$, $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $B = [1/4, 3]$. Ters görüntü $f^{-1}(B) = [-1, -1/2]$ ile $[1/2, 1]$ aralıklarından oluşur (mavi); bu noktaların görüntüleri $f(f^{-1}(B)) = [1/4, 1]$ aralığını doldurur (turuncu). B'nin $(1, 3]$ kısmına hiçbir nokta gitmez.

B'nin $(1,3]$ parçasına hiçbir nokta gitmez, çünkü f bu değerleri almaz. Bu yüzden $f\left(\, f^{-1}(B)\,\right) = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ olur ve B'den küçüktür. Ayrıca B bir aralık, yani tek parça olduğu hâlde ters görüntüsü iki ayrık parçadan oluşur; bu gözleme bölümün ilerisinde döneceğiz. ■

Çok değişkenli fonksiyonlarda tek noktalı bir kümenin ters görüntüsü, fonksiyonun sabit bir değer aldığı noktaların kümesidir; iki değişkende bu küme çoğunlukla bir eğridir.

Örnek 11.2 (Bir Elipsi Veren Ters Görüntü). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2$ olsun. Her $c \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(\{c\})$ kümesini bulunuz.

Çözüm.
Tanım gereği

$$f^{-1}(\{c\}) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = c \right\}$$

olur. Kareler negatif olmadığından her noktada $f(x,y) \geq 0$'dır. Üç durum vardır.
$c < 0$. Denklemin çözümü yoktur; $f^{-1}(\{c\}) = \varnothing$.

 CC BY-NC-SA 4.0

$c = 0$. İki negatif olmayan terimin toplamı ancak ikisi de sıfırsa sıfırdır: $x = y = 0$. Yani $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}$.
$c > 0$. Denklemi c'ye bölersek

$$\frac{x^2}{4c} + \frac{y^2}{c} = 1$$

bulunur. Bu, merkezi orijin, yarı eksenleri x doğrultusunda $2\sqrt{c}$ ve y doğrultusunda $\sqrt{c}$ olan bir elipstir; tepe noktaları $(\pm 2\sqrt{c}, 0)$ ve $(0, \pm\sqrt{c})$'dir.
Demek ki $f^{-1}(\{c\})$ kümesi ancak $c \geq 0$ iken boş değildir. Bu, f'nin tam olarak negatif olmayan değerleri aldığını söyler: $f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty)$. ■

Örnek 11.3 (Bir Yarım Kürenin Düzlemle Kesiti). $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ kapalı diskidir. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ olmak üzere $f(A \cap D)$ kümesini bulunuz.

Çözüm.
Görüntü kümesi. Önce $f(D)$'yi bulalım. $(x,y) \in D$ ise $0 \leq 9 - x^2 - y^2 \leq 9$, dolayısıyla $0 \leq f(x,y) \leq 3$ olur. Tersine $z \in [0,3]$ verilsin; $9 - z^2 \in [0,9]$ olduğundan $\left(\sqrt{9 - z^2}, 0\right)$ noktası D'dedir ve bu noktada f'nin değeri $\sqrt{9 - (9 - z^2)} = z$'dir. Dolayısıyla $f(D) = [0,3]$.
Kesişim. $A \cap D$ kümesi $x = 1$ ve $1 + y^2 \leq 9$ koşullarını sağlayan noktalardan oluşur:

$$A \cap D = \{(1,y) : y^2 \leq 8\} = \left\{(1,y) : |\, y \,| \leq 2\sqrt{2}\right\}.$$

Görüntü. Bu noktalarda $f(1,y) = \sqrt{8 - y^2}$'dir. $|\, y \,| \leq 2\sqrt{2}$ ise $0 \leq 8 - y^2 \leq 8$, yani $0 \leq f(1,y) \leq 2\sqrt{2}$ olur. Tersine $z \in [0, 2\sqrt{2}]$ verilsin ve $y = \sqrt{8 - z^2}$ alalım. $0 \leq 8 - z^2 \leq 8$ olduğundan $|\, y \,| \leq 2\sqrt{2}$, yani $(1,y) \in A \cap D$'dir ve $f(1,y) = \sqrt{8 - (8 - z^2)} = z$ olur. Dolayısıyla

$$f(A \cap D) = [0, 2\sqrt{2}].$$

Geometrik olarak f'nin grafiği 3 yarıçaplı üst yarım küredir. $x = 1$ düzlemi bu yarım küreyi, merkezi $(1,0,0)$ ve yarıçapı $2\sqrt{2}$ olan bir yarım çember boyunca keser; $f(A \cap D)$ bu yarım çemberin aldığı yüksekliklerin kümesidir. ■

Sürekli bir fonksiyonun bile kümelerin bazı özelliklerini korumadığını ilk iki tek değişkenli örnekte görelim.

Örnek 11.4 (Sinüs Fonksiyonunda Görüntüler). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ olsun. $E_1 = (0, \pi)$, $E_2 = [0, \pi]$, $E_3 = (-1, 1)$ ve $E_4 = [-1, 1]$ kümelerinin f altındaki görüntülerini bulunuz.

Çözüm.
E_1 ve E_2. $x \in (0, \pi)$ ise $0 < \sin x \leq 1$ olduğundan $f(E_1) \subseteq (0, 1]$'dir. Tersine $y \in (0, 1]$ verilsin. Sinüs $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında süreklidir (bkz. Analiz 1) ve $\sin 0 = 0 < y \leq 1 = \sin \frac{\pi}{2}$'dir. Ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $\sin c = y$ olan bir $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vardır; $y \neq 0$ olduğundan $c \neq 0$, yani $c \in E_1$'dir. Dolayısıyla $f(E_1) = (0, 1]$. E_2 kümesi buna 0 ve π uç noktalarını ekler ve $\sin 0 = \sin \pi = 0$ olduğundan $f(E_2) = [0, 1]$ olur.
E_3 ve E_4. $1 < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $[-1, 1] \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$'dir ve sinüs bu aralıkta kesin artandır. Sinüs tek fonksiyon olduğundan $\sin(-1) = -\sin 1$'dir. O hâlde $x \in (-1, 1)$ ise $-\sin 1 < \sin x < \sin 1$ olur. Tersine $-\sin 1 < y < \sin 1$ ise ara değer teoremi $[-1, 1]$ üzerinde $\sin c = y$ olan bir c verir ve $\sin(\pm 1) \neq y$ olduğundan $c \neq \pm 1$'dir. Dolayısıyla

$$f(E_3) = (-\sin 1, \sin 1)$$

olur ve uç noktalar eklenince $f(E_4) = [-\sin 1, \sin 1]$ bulunur.
E_1 ve E_3 açık aralıklardır. $f(E_3)$ açıktır ama $f(E_1) = (0, 1]$ açık değildir: sürekli bir fonksiyon açık bir kümeyi açık bir kümeye götürmek zorunda değildir. Buna karşılık kapalı ve sınırlı E_2, E_4 aralıklarının görüntüleri yine kapalı ve sınırlıdır; bunun bir rastlantı olmadığını Teorem 11.2 gösterecek. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 11.5 (İşaret Fonksiyonunda Görüntüler). $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \neq 0$ için $g(x) = \dfrac{x}{|\ x\ |}$ ve $g(0) = 0$ olsun. $E_1 = (0, \pi)$, $E_2 = [0, \pi]$, $E_3 = (-1, 1)$ ve $E_4 = [-1, 1]$ kümelerinin g altındaki görüntülerini bulunuz.

Çözüm.
$x > 0$ ise $|\ x\ | = x$ olduğundan $g(x) = 1$; $x < 0$ ise $|\ x\ | = -x$ olduğundan $g(x) = -1$'dir. Buna göre:

- E_1'in bütün elemanları pozitif olduğundan $g(E_1) = \{1\}$;
- $E_2 = \{0\} \cup (0, \pi]$ olduğundan $g(E_2) = \{0, 1\}$;
- $E_3 = (-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1)$ olduğundan $g(E_3) = \{-1, 0, 1\}$;
- E_4 de negatif, sıfır ve pozitif sayılar içerdiğinden $g(E_4) = \{-1, 0, 1\}$.

E_3 bir aralıktır, dolayısıyla bağlantılıdır (Teorem 5.6). Oysa $g(E_3) = \{-1, 0, 1\}$ bağlantısızdır: 0 ile 1 arasındaki $\frac{1}{2}$ sayısı bu kümeye ait değildir (Alıştırma 5.7). g fonksiyonu 0 noktasında sürekli değildir; sürekli fonksiyonların bağlantılı kümeleri parçalayamayacağını Teorem 11.5 teoreminde göreceğiz. ■

11.2 Bağıl Açık Kümeler

Tanım kümesi açık olmayan bir fonksiyonda açık bir kümenin ters görüntüsü açık olmayabilir; bu yüzden açıklığı tanım kümesine göre ölçen bir kavrama ihtiyacımız var.
$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonunu ele alalım; f süreklidir. $U = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ açık kümesinin ters görüntüsü $f^{-1}(U) = \left[0, \frac{1}{2}\right)$'dir ve bu küme $\mathbb{R}$'de açık değildir: 0 kümededir ama hiçbir $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığı kümenin içinde kalmaz. Hatta $f^{-1}(\mathbb{R}) = [0, 1]$ bile açık değildir. Sorun f'de değil, ters görüntünün $[0, 1]$'in dışına çıkamamasındadır. $[0, 1]$'in içinden bakan biri için $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ kümesi "açıktır": bu küme, açık U kümesinin $[0, 1]$'e düşen parçasıdır, yani $U \cap [0, 1]$'dir.

Tanım 11.1 (Bağıl Açık ve Bağıl Kapalı Küme). $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $S \subseteq D$ olsun.

- $S = V \cap D$ olacak biçimde açık bir $V \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi varsa S'ye D'de **bağıl açık** (D'ye göre açık) küme denir.
- $S = G \cap D$ olacak biçimde kapalı bir $G \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi varsa S'ye D'de **bağıl kapalı** (D'ye göre kapalı) küme denir.

Yani bağıl açık bir küme, $\mathbb{R}^n$'deki bir açık kümenin D'ye düşen parçasıdır; V'nin D'nin dışında nasıl davrandığı önemli değildir. Her açık $S \subseteq D$ kümesi D'de bağıl açıktır ($V = S$ alınır). D ve $\varnothing$ kümeleri ise D'de hem bağıl açık hem bağıl kapalıdır: $V = G = \mathbb{R}^n$ ve $V = G = \varnothing$ alınır. Yukarıdaki $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ kümesi $[0, 1]$'de bağıl açıktır ama $\mathbb{R}$'de açık değildir. Bağlantılılık tanımındaki (Tanım 5.3) $U \cap S$ ve $V \cap S$ parçaları da tam olarak S'de bağıl açık kümelerdir.
Bağıl açıklık da açıklık gibi yuvarlarla ifade edilebilir; tek fark, yuvarın yalnız D'ye düşen kısmına bakılmasıdır.

Önerme 11.1 (Bağıl Açıklığın Özellikleri). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $S \subseteq D$ olsun.*
(a) *S'nin D'de bağıl açık olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in S$ için $B(x, \varepsilon) \cap D \subseteq S$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ bulunmasıdır.*
(b) *D açıksa S'nin D'de bağıl açık olması için gerek ve yeter koşul S'nin açık olmasıdır.*
(c) *S'nin D'de bağıl kapalı olması için gerek ve yeter koşul $D \setminus S$ kümesinin D'de bağıl açık olmasıdır.*

İspat.
(a) *($\Rightarrow$) $S = V \cap D$ ve V açık olsun. $x \in S$ ise $x \in V$'dir ve V açık olduğundan $B(x, \varepsilon) \subseteq V$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır. O zaman*

$$B(x, \varepsilon) \cap D \subseteq V \cap D = S$$

olur.
($\Leftarrow$) Her $x \in S$ için koşuldaki sayılardan birini seçip ε_x diyelim ve

$$V = \bigcup_{x \in S} B(x, \varepsilon_x)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

kümesini tanımlayalım ($S = \varnothing$ ise $V = \varnothing$). Açık yuvarlar açık olduğundan (Teorem 3.1) ve açık kümelerin birleşimi açık olduğundan (Teorem 3.3) V açıktır. $V \cap D = S$ olduğunu gösterelim. Birleşimin her parçası için $B(x, \varepsilon_x) \cap D \subseteq S$ olduğundan $V \cap D \subseteq S$'dir. Tersine $x \in S$ ise $x \in B(x, \varepsilon_x) \subseteq V$ ve $x \in D$ olduğundan $x \in V \cap D$'dir. Demek ki $S = V \cap D$ ve S, D'de bağıl açıktır.
(b) *D açık olsun. $S = V \cap D$ ve V açıksa S iki açık kümenin kesişimi olarak açıktır (Teorem 3.3). Tersine S açıksa $S \subseteq D$ olduğundan $S = S \cap D$ yazılır; $V = S$ alınır.*
(c) *($\Rightarrow$) $S = G \cap D$ ve G kapalı olsun. D'nin bir noktası S'de değilse G'de değildir; tersine D'nin G'de olmayan bir noktası S'de değildir. Dolayısıyla*

$$D \setminus S = D \cap (\mathbb{R}^n \setminus G)$$

olur. G kapalı olduğundan $\mathbb{R}^n \setminus G$ açıktır (Tanım 3.3); $D \setminus S$ bağıl açıktır.
($\Leftarrow$) $D \setminus S = V \cap D$ ve V açık olsun. Aynı akıl yürütmeyle $S = D \setminus (D \setminus S) = D \cap (\mathbb{R}^n \setminus V)$ bulunur. $\mathbb{R}^n \setminus V$ kapalıdır; S bağıl kapalıdır. ■

Önermenin (b) maddesinin kapalı kümeler için karşılığı da aynı yolla görülür: D kapalıysa $S \subseteq D$ kümesinin D'de bağıl kapalı olması için gerek ve yeter koşul S'nin kapalı olmasıdır. Gerçekten $S = G \cap D$ iki kapalı kümenin kesişimi olarak kapalıdır (Teorem 3.4); tersine S kapalıysa $S = S \cap D$'dir.

11.3 Sürekliliğin Açık ve Kapalı Kümelerle Belirlenmesi

Artık sürekliliği tek bir noktaya bakmadan ifade edebiliriz: sürekli fonksiyonlar, açık kümelerin ters görüntülerini bağıl açık kümelere götüren fonksiyonlardır.

Teorem 11.1 (Sürekliliğin Açık Kümelerle Belirlenmesi). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. f'nin D'de sürekli olması için gerek ve yeter koşul şudur: her açık $U \subseteq \mathbb{R}^m$ kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi D'de bağıl açıktır, yani*

$$f^{-1}(U) = V \cap D$$

olacak biçimde açık bir $V \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi vardır.

İspat.
($\Rightarrow$) *f, D'de sürekli ve $U \subseteq \mathbb{R}^m$ açık olsun. Önerme 11.1 (a) gereği her $a \in f^{-1}(U)$ için $B(a, \delta) \cap D \subseteq f^{-1}(U)$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ bulmak yeter.*
$a \in f^{-1}(U)$ olsun. O zaman $a \in D$ ve $f(a) \in U$'dur. U açık olduğundan

$$B\left(\, f(a), \varepsilon_a \,\right) \subseteq U$$

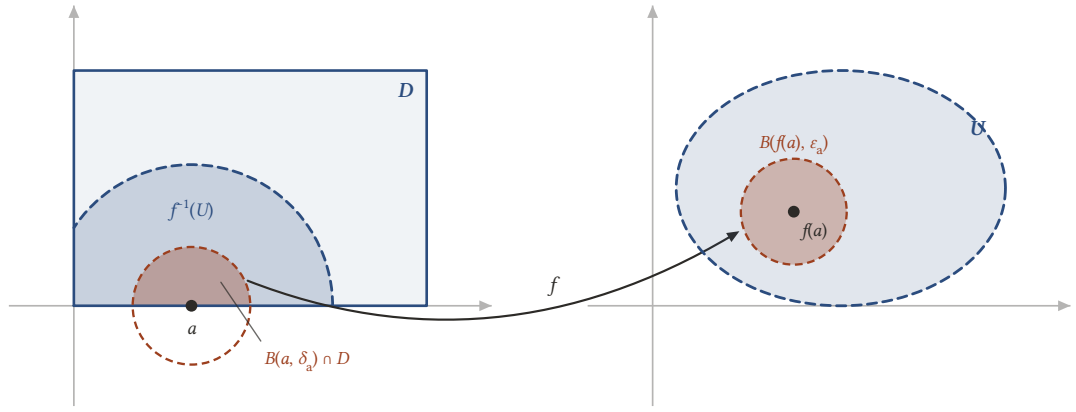
olacak biçimde bir $\varepsilon_a > 0$ vardır. f, a noktasında sürekli olduğundan bu ε_a için öyle bir $\delta_a > 0$ vardır ki $x \in D$ ve $\| x - a \| < \delta_a$ iken $\| f(x) - f(a) \| < \varepsilon_a$ olur (Tanım 10.1). Yuvarlarla yazarsak (Önerme 10.1)

$$x \in B(a, \delta_a) \cap D \Longrightarrow f(x) \in B\left(\, f(a), \varepsilon_a \,\right) \subseteq U.$$

$f(x) \in U$ olması $x \in f^{-1}(U)$ demektir. Dolayısıyla $B(a, \delta_a) \cap D \subseteq f^{-1}(U)$ olur ve $f^{-1}(U)$, D'de bağıl açıktır. Önerme 11.1 ispatındaki gibi aranan açık küme açıkça da yazılabilir:

$$V = \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} B(a, \delta_a).$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.2: D = [0, 3] × [0, 2] *ve* a = (1, 0). U *açık olduğundan* f(a) *merkezli* B(f(a), ε_a) *yuvarı* U*'nun içinde kalır; süreklilik,* D*'nin* B(a, δ_a) *içindeki parçasını (turuncu yarım disk) bu yuvara götürür. Dolayısıyla bu parça* f^{-1}(U) *içindedir; yuvarın* D *dışında kalan alt yarısı hakkında bir şey söylenmez.*

Tanım kümesi D açık değilse $B(a, \delta_a)$ yuvarının D'nin dışına taşan kısmı hakkında hiçbir şey bilmeyiz; bu yüzden sonuç "açık" değil "bağıl açık"tır.
(⇐) *Koşul sağlansın; $a \in D$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $U = B\left(f(a), \varepsilon\right)$ açık yuvarı $\mathbb{R}^m$'de açıktır (Teorem 3.1). Varsayım gereği $f^{-1}(U) = V \cap D$ olacak biçimde açık bir $V \subseteq \mathbb{R}^n$ vardır. $f(a) \in U$ olduğundan $a \in f^{-1}(U) \subseteq V$'dir. V açık olduğundan $B(a, \delta) \subseteq V$ olan bir $\delta > 0$ vardır. Şimdi $x \in D$ ve $\| x - a \| < \delta$ olsun. O zaman $x \in B(a, \delta) \cap D \subseteq V \cap D = f^{-1}(U)$, yani $f(x) \in B\left(f(a), \varepsilon\right)$ olur:*

$$\| f(x) - f(a) \| < \varepsilon.$$

Bu, f'nin a noktasında sürekli olduğunu gösterir. $a \in D$ keyfi olduğundan f, D'de süreklidir. ■

Tanım kümesi açıksa "bağıl" sözcüğü düşer.

Sonuç 11.1 (Açık Tanım Kümesinde Süreklilik). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$ boş olmayan açık bir küme ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. f'nin D'de sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her açık $U \subseteq \mathbb{R}^m$ kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesinin $\mathbb{R}^n$'de açık olmasıdır. Özel olarak $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sürekliyse açık kümelerin ters görüntüleri açıktır.*

İspat.
$f^{-1}(U) \subseteq D$ ve D açık olduğundan Önerme 11.1 (b) gereği $f^{-1}(U)$'nun D'de bağıl açık olması, açık olmasıyla aynı şeydir. Sonuç, Teorem 11.1 ile elde edilir. $\mathbb{R}^n$ açık olduğundan (Teorem 3.3) son cümle bunun özel hâlidir. ■

Açık kümeler yerine kapalı kümelerle de aynı betimleme yapılabilir; köprü, ters görüntünün tümleyenle uyumlu olmasıdır.

Sonuç 11.2 (Sürekliliğin Kapalı Kümelerle Belirlenmesi). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. f'nin D'de sürekli olması için gerek ve yeter koşul şudur: her kapalı $F \subseteq \mathbb{R}^m$ kümesi için $f^{-1}(F)$ kümesi D'de bağıl kapalıdır, yani*

$$f^{-1}(F) = G \cap D$$

olacak biçimde kapalı bir $G \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi vardır. Özel olarak D kapalıysa, örneğin $D = \mathbb{R}^n$ ise, sürekli bir fonksiyon altında kapalı kümelerin ters görüntüleri kapalıdır.

İspat.
Her $B \subseteq \mathbb{R}^m$ için $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus B) = D \setminus f^{-1}(B)$ eşitliğini kullanacağız.
(⇒) *f sürekli ve $F \subseteq \mathbb{R}^m$ kapalı olsun. $\mathbb{R}^m \setminus F$ açık olduğundan Teorem 11.1 gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F) = D \setminus f^{-1}(F)$$

kümesi D'de bağıl açıktır. Önerme 11.1 (c) gereği $f^{-1}(F)$, D'de bağıl kapalıdır.
($\Leftarrow$) Koşul sağlansın ve $U \subseteq \mathbb{R}^m$ açık olsun. $F = \mathbb{R}^m \setminus U$ kapalıdır; varsayım gereği $f^{-1}(F) = D \setminus f^{-1}(U)$ kümesi D'de bağıl kapalıdır. Önerme 11.1 (c) bu kez $S = D \setminus f^{-1}(U)$ kümesine uygulanırsa $D \setminus S = f^{-1}(U)$ kümesinin bağıl açık olduğu çıkar. U keyfi olduğundan Teorem 11.1 gereği f süreklidir.
D kapalıysa $G \cap D$ iki kapalı kümenin kesişimi olarak kapalıdır (Teorem 3.4); $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir kümedir. ■

Bu iki sonuç, bir kümenin açık ya da kapalı olduğunu göstermenin en kısa yoludur. Örneğin $f(x, y) = xy$ polinomu $\mathbb{R}^2$'de süreklidir (Teorem 10.3) ve tek noktalı $\{1\}$ kümesi kapalıdır (Örnek 3.11). Dolayısıyla

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

hiperbolü kapalıdır. Alıştırma 5.5 alıştırmasında bu kümenin sınırlı olmadığını, dolayısıyla kapalı olduğu hâlde kompakt olmadığını görmüştük.

Üç adımda ters görüntüyle açıklık ve kapalılık

1. **Kümeyi ters görüntü olarak yaz.** Kümeyi tanımlayan koşullar $f(x) \in B$ biçiminde yazılır; f, koşullarda geçen ifadelerden kurulan (gerekirse vektör değerli) bir fonksiyondur.
2. **Sürekliliği ve B'yi denetle.** f'nin sürekliliği polinomlar, cebirsel işlemler, bileşke ve bileşenler yardımıyla gösterilir; B'nin açık ya da kapalı olduğu belirlenir. $<$ ve $>$ gibi kesin eşitsizlikler açık, $\leq$, $\geq$ ve $=$ ise kapalı kümeler verir.
3. **Karar ver.** Tanım kümesi $\mathbb{R}^n$ ise B açıkken $f^{-1}(B)$ açık (Sonuç 11.1), B kapalıyken kapalıdır (Sonuç 11.2). Koşullar birden çoksa her birinin ters görüntüsü ayrı ayrı incelenip kesişim alınabilir.

Örnek 11.6 (Bir Eşitsizlik Kümesi Açıktır). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Ters görüntü. $U = (-\infty, \alpha)$ diyelim. $x \in E$ olması $f(x) < \alpha$, yani $f(x) \in U$ demektir; dolayısıyla $E = f^{-1}(U)$'dur.
U açıktır. $y \in U$ ise $\varepsilon = \alpha - y > 0$ için

$$B(y, \varepsilon) = (y - \varepsilon, y + \varepsilon) = (2y - \alpha, \alpha) \subseteq U$$

olur.
Karar. f, açık $\mathbb{R}^n$ kümesinde sürekli ve U açık olduğundan Sonuç 11.1 gereği $E = f^{-1}(U)$ açıktır. ■

Aynı yolla $(\alpha, +\infty)$ açık olduğundan $\{x : f(x) > \alpha\}$ kümesi de açıktır. $(-\infty, \alpha]$, $[\alpha, +\infty)$ ve $\{\alpha\}$ kümeleri $\mathbb{R}$'de kapalıdır (tümleyenleri açıktır); dolayısıyla $\{x : f(x) \leq \alpha\}$, $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ ve $\{x : f(x) = \alpha\}$ kümeleri kapalıdır (Sonuç 11.2). Örneğin $x \mapsto \| x - x_0 \|$ uzaklık fonksiyonu süreklidir (Sonuç 10.2); $B[x_0, r]$ ve $S(x_0, r)$ kümelerinin kapalı olduğu buradan tek satırda çıkar. Bunu Açık ve Kapalı Kümeler bölümünde tümleyenin açıklığını göstererek elde etmiştik. Örnek 11.2 örneğindeki elipsler de $\{x : f(x) = c\}$ biçiminde oldukları için kapalıdır.

Örnek 11.7 (Dört Boyutta Kapalı Bir Küme).

$$F = \Big\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : e^{x+y}\cos(zu^3) \in [0, 2], \\ x - y^2 + z^4 + u^5 \in [-\pi, 2025] \Big\}$$

kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Ters görüntü. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ fonksiyonunu

$$f_1(x, y, z, u) = e^{x+y}\cos(zu^3),$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_2(x,y,z,u) = x - y^2 + z^4 + u^5$$

bileşenleriyle tanımlayalım ve $I = [0,2] \times [-\pi, 2025]$ diyelim. Bir noktanın F'de olması, f_1 değerinin $[0,2]$'de ve f_2 değerinin $[-\pi, 2025]$'te olması, yani f'nin değerinin I'da olması demektir. Dolayısıyla $F = f^{-1}(I)$'dır.
Süreklilik. $(x,y,z,u) \mapsto x+y$ ve $(x,y,z,u) \mapsto zu^3$ polinomdur, dolayısıyla süreklidir (Teorem 10.3). Üstel fonksiyon ve kosinüs $\mathbb{R}$'de süreklidir; bileşkeleri olan e^{x+y} ve $\cos(zu^3)$ süreklidir (Teorem 10.4) ve çarpımları f_1 de süreklidir (Teorem 10.2). f_2 bir polinomdur. İki bileşeni sürekli olduğundan f süreklidir (Teorem 10.5).
***I* kapalıdır.** I bir kapalı 2-hücredir; kompakttır (Teorem 5.4), dolayısıyla kapalıdır (Teorem 5.2).
Karar. f, kapalı $\mathbb{R}^4$ kümesinde sürekli ve I kapalı olduğundan Sonuç 11.2 gereği $F = f^{-1}(I)$ kapalıdır. Vektör değerli bir fonksiyon kurmadan da sonuca varılabilir:

$$F = f_1^{-1}([0,2]) \cap f_2^{-1}([-\pi, 2025])$$

kümesi iki kapalı kümenin kesişimidir. ■

Ters görüntü açıklığı ve kapalılığı (bağıl anlamda) korur. Aynı şeyi sınırlılık ya da bağlantılılık için bekleyemeyiz; bunu tek değişkenli fonksiyonlar bile gösterir.

Örnek 11.8 (Sınırlı Kümenin Ters Görüntüsü Sınırsız Olabilir). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ olsun. $f^{-1}\left(\ (0,1]\ \right)$ kümesini bulunuz.

Çözüm.
f paydası hiç sıfır olmayan bir rasyonel fonksiyon olarak süreklidir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $1 + x^2 \geq 1 > 0$ olduğundan

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

olur; yani her x ters görüntüdedir:

$$f^{-1}\left(\ (0,1]\ \right) = \mathbb{R}.$$

$(0,1]$ sınırlıdır ama ters görüntüsü sınırlı değildir. Aynı fonksiyon görüntü tarafında da bir uyarı verir: her $y \in (0,1]$ değeri $x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ noktasında alındığından $f(\mathbb{R}) = (0,1]$'dir. Kapalı $\mathbb{R}$ kümesinin sürekli görüntüsü kapalı değildir. ■

Örnek 11.9 (Bağlantılı Kümenin Ters Görüntüsü Bağlantısız Olabilir). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olsun. $E = (1,4)$ kümesinin ters görüntüsünü bulunuz.

Çözüm.
$1 < x^2 < 4$ koşulu $1 < |\,x\,| < 2$ demektir. Dolayısıyla

$$f^{-1}\left(\ (1,4)\ \right) = (-2,-1) \cup (1,2)$$

olur. E bir aralıktır ve bağlantılıdır (Teorem 5.6). Ters görüntü ise bağlantısızdır: $-\frac{3}{2}$ ile $\frac{3}{2}$ kümenin elemanlarıdır ama aralarındaki 0 değildir (Alıştırma 5.7).
Aynı fonksiyon açık $(-1,1)$ aralığını $[0,1)$ aralığına götürür; bu küme açık değildir. Sürekli görüntü açıklığı da korumaz. ■

11.4 Kompakt Kümelerin Görüntüsü

Görüntü, ters görüntünün aksine açıklığı ve kapalılığı korumuyordu; kompaktlık ise görüntü altında korunur ve bu, bölümün ilk büyük global sonucudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kullanacağımız basit bir gözlem şudur: f, D'de sürekliyse ve $K \subseteq D$ ise f'nin K'ye kısıtlaması da K'de süreklidir. Gerçekten süreklilik tanımındaki koşulun $x \in K$ noktaları için sağlanması, $x \in D$ noktaları için sağlanmasının bir parçasıdır.

Teorem 11.2 (Kompakt Kümenin Sürekli Görüntüsü Kompakttır). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ sürekli ve $K \subseteq D$ kompakt olsun. O zaman $f(K)$ kümesi $\mathbb{R}^m$'de kompakttır.*

> ***İspat.***
> *$K = \varnothing$ ise $f(K) = \varnothing$ kompakttır; $K \neq \varnothing$ olsun. $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $f(K)$'nin keyfi bir açık örtüsü olsun (Tanım 5.1).*
> ***Ters görüntüler K'yi örter.*** *f'nin K'ye kısıtlaması süreklidir. Bu kısıtlamaya Teorem 11.1 uygulanırsa her $\alpha \in \Lambda$ için*
>
> $$\{x \in K : f(x) \in V_\alpha\} = W_\alpha \cap K$$
>
> *olacak biçimde açık bir $W_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ bulunur. $x \in K$ ise $f(x) \in f(K)$ bir V_α kümesindedir; o zaman $x \in W_\alpha \cap K \subseteq W_\alpha$ olur. Demek ki $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi K'nin bir açık örtüsüdür.*
> ***Sonlu alt örtü.*** *K kompakt olduğundan öyle $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Lambda$ vardır ki*
>
> $$K \subseteq W_{\alpha_1} \cup ... \cup W_{\alpha_k}$$
>
> *olur. Şimdi $y \in f(K)$ olsun; $y = f(x)$ olan bir $x \in K$ vardır. Bu x bir W_{α_i} kümesindedir, yani $x \in W_{\alpha_i} \cap K$ ve dolayısıyla $f(x) \in V_{\alpha_i}$'dir. Sonuç olarak*
>
> $$f(K) \subseteq V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_k}$$
>
> *bulunur. Verilen örtünün sonlu bir alt örtüsünü bulduk; örtü keyfi olduğundan $f(K)$ kompakttır.* ■

> ***Dizilerle ikinci ispat.***
> *Dizisel kompaktlık teoremi (Teorem 7.4) gereği, terimleri $f(K)$'de olan her dizinin limiti $f(K)$'de olan yakınsak bir alt dizisi bulunduğunu göstermek yeter.*
> *(y_k), terimleri $f(K)$'de olan bir dizi olsun. Her k için $f(x_k) = y_k$ olan bir $x_k \in K$ seçelim. K kompakt olduğundan aynı teorem gereği (x_k) dizisinin bir $x \in K$ noktasına yakınsayan bir (x_{k_j}) alt dizisi vardır. f, x noktasında sürekli olduğundan dizisel süreklilik (Teorem 10.1) gereği*
>
> $$y_{k_j} = f(x_{k_j}) \to f(x) \in f(K)$$
>
> *olur. (y_k) dizisinin limiti $f(K)$'de olan yakınsak bir alt dizisini bulduk; $f(K)$ kompakttır.* ■

$n = m = 1$ için teorem Analiz 1'deki sonucun kendisidir (bkz. Analiz 1). Örnek 11.4 örneğindeki $[0, \pi]$ ve $[-1, 1]$ aralıklarının görüntülerinin kapalı ve sınırlı çıkması bu teoremin sonucudur. Heine–Borel teoremiyle birlikte teorem şöyle okunur: kapalı ve sınırlı bir kümenin sürekli görüntüsü kapalı ve sınırlıdır. Kümenin kendisi yalnız kapalı ya da yalnız sınırlı ise bu doğru değildir: kapalı $\mathbb{R}$ kümesinin $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ altındaki görüntüsü kapalı olmayan $(0, 1]$'dir (Örnek 11.8); sınırlı $(0, 1)$ aralığının $x \mapsto \frac{1}{x}$ altındaki görüntüsü sınırsız $(1, +\infty)$'dur.

Sonuç 11.3 (Kompakt Kümede Sürekli Fonksiyon Sınırlıdır). *$\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $f : K \to \mathbb{R}^m$ sürekli olsun. O zaman f, K üzerinde sınırlıdır: her $x \in K$ için $\| f(x) \| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır.*

> ***İspat.***
> *Teorem 11.2 ($D = K$ alınarak) gereği $f(K)$ kompakttır; Teorem 5.1 gereği sınırlıdır. Tanım 3.5 gereği $f(K) \subseteq B[0, M]$ olan bir $M > 0$ vardır; bu, her $x \in K$ için $\| f(x) \| \leq M$ demektir.* ■

Reel değerli fonksiyonlarda bundan daha fazlası doğrudur: sınırlar yalnız var olmakla kalmaz, fonksiyon tarafından alınır.

Teorem 11.3 (Uç Değer Teoremi). *$\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Öyle $x_m, x_M \in K$ noktaları vardır ki her $x \in K$ için*

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$

olur. Yani f, K üzerinde en küçük ve en büyük değerini alır.

> ***İspat.***
> *Teorem 11.2 gereği $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakttır; dolayısıyla sınırlı (Teorem 5.1) ve kapalıdır (Teorem 5.2). $K \neq \varnothing$ olduğundan $f(K) \neq \varnothing$'dir.*
> ***En büyük değer.*** *$f(K)$ boş olmayan ve üstten sınırlı bir reel sayı kümesi olduğundan tamlık aksiyomu gereği (bkz. Analiz 1) $M = \sup f(K)$ vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $M - \frac{1}{k}$ sayısı $f(K)$'nin bir üst sınırı değildir, çünkü M en küçük üst sınırdır. Dolayısıyla*
>
> $$M - \frac{1}{k} < y_k \le M$$
>
> *olan bir $y_k \in f(K)$ vardır (bkz. Analiz 1). $\mid y_k - M \mid < \frac{1}{k}$ olduğundan $y_k \to M$ olur. Terimleri kapalı $f(K)$ kümesinde olan yakınsak bir dizinin limiti bu kümededir (Teorem 7.3); yani $M \in f(K)$. Demek ki $f(x_M) = M$ olan bir $x_M \in K$ vardır ve her $x \in K$ için $f(x) \le M = f(x_M)$ olur.*
> ***En küçük değer.*** *$-f$ fonksiyonu da K'de süreklidir (Teorem 10.2). Az önceki adımı $-f$'ye uygularsak, her $x \in K$ için $-f(x) \le -f(x_m)$ olacak biçimde bir $x_m \in K$ buluruz; bu, $f(x_m) \le f(x)$ demektir.* ■

$n = 1$ ve $K = [a, b]$ için teorem Weierstrass ekstremum teoremidir (bkz. Analiz 1). $f(x_M)$ sayısına f'nin K üzerindeki **en büyük değeri** (maksimumu), $f(x_m)$ sayısına **en küçük değeri** (minimumu) denir. Teorem bu değerlerin var olduğunu garanti eder ama onları bulmanın yolunu göstermez; en büyük ve en küçük değeri hesaplama yöntemlerini Mutlak ve Bağlı Ekstremumlar bölümünde kuracağız. Şimdilik değerleri eşitsizliklerle bulabildiğimiz bir örnek verelim.

Örnek 11.10 (Kapalı Diskte Doğrusal Bir Fonksiyon). $K = B[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ kapalı birim diski üzerinde $f(x, y) = x + y$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Varlık.** K kompakttır (Örnek 5.4) ve f bir polinom olarak süreklidir (Teorem 10.3). Teorem 11.3 gereği en büyük ve en küçük değer vardır.
> **Sınır.** Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) gereği her $(x, y) \in K$ için
>
> $$\mid x + y \mid = \mid \langle (1,1), (x,y) \rangle \mid \le \| (1,1) \| \, \| (x,y) \| \le \sqrt{2}$$
>
> olur; yani $-\sqrt{2} \le f(x,y) \le \sqrt{2}$.
> **Sınırlar alınır.** $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ için $\| p \| = 1$, yani $p \in K$'dir ve $f(p) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ olur. Aynı biçimde $-p \in K$ ve $f(-p) = -\sqrt{2}$'dir. Dolayısıyla f'nin K üzerindeki en büyük değeri $\sqrt{2}$, en küçük değeri $-\sqrt{2}$'dir. ■

Kompaktlık koşulu atılamaz. Aynı $f(x, y) = x + y$ fonksiyonunu açık $B(0,1)$ diskinde düşünelim. Bu diskte $\| (x,y) \| < 1$ olduğundan yukarıdaki hesap $f(x,y) < \sqrt{2}$ verir; öte yandan $t \in (0,1)$ için $tp \in B(0,1)$ ve $f(tp) = t\sqrt{2}$ olduğundan f'nin değerleri $\sqrt{2}$'ye istenildiği kadar yaklaşır. Supremum $\sqrt{2}$'dir ama hiçbir noktada alınmaz; açık disk kapalı olmadığından kompakt değildir. Sınırlılık da kendiliğinden gelmez: $K = B[0,1] \setminus \{0\}$ kümesinde sürekli olan $f(x) = \dfrac{1}{\| x \|}$ fonksiyonu $x = \frac{1}{k} e_1$ noktalarında k değerini alır ve sınırsızdır; bu K kümesi de 0 yığılma noktasını içermediğinden kapalı değildir.

11.5 Kompakt Kümede Ters Fonksiyon

Birebir ve sürekli bir fonksiyonun tersi sürekli olmak zorunda değildir; tanım kümesi kompaktsa ise tersi de süreklidir ve ispat, kapalı kümelerle süreklilik ölçütünü (Sonuç 11.2) ters fonksiyona uygular.
$f : K \to \mathbb{R}^m$ birebir ise (bkz. Analiz 1) f, K'den $f(K)$'ye birebir ve örten bir fonksiyondur. Tersi olan $f^{-1} : f(K) \to K$ fonksiyonu, her $y \in f(K)$ noktasına $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan tek $x \in K$ noktasını karşılık getirir (bkz. Analiz 1). Tanım kümesi $\mathbb{R}^m$'nin, değerleri $\mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesinde olduğundan bu fonksiyon için n ile m'nin rolleri yer değiştirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 11.4 (Kompakt Kümede Ters Fonksiyonun Sürekliliği). *$\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $f : K \to \mathbb{R}^m$ birebir ve sürekli olsun. O zaman $f^{-1} : f(K) \to \mathbb{R}^n$ ters fonksiyonu $f(K)$ üzerinde süreklidir.*

İspat.
Ters görüntüyle karışmaması için $g = f^{-1} : f(K) \to \mathbb{R}^n$ diyelim. Sonuç 11.2 gereği, her kapalı $G \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için $g^{-1}(G)$ kümesinin $f(K)$'de bağıl kapalı olduğunu göstermek yeter.
Ters görüntüyü hesaplayalım. *$G \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı olsun. Tanım gereği*

$$g^{-1}(G) = \{y \in f(K) : g(y) \in G\}$$

olur. Bu kümenin $f(G \cap K)$ olduğunu gösterelim. $y \in g^{-1}(G)$ ise $x = g(y)$ noktası hem K'de hem G'dedir ve $f(x) = y$'dir; yani $y \in f(G \cap K)$. Tersine $y = f(x)$ ve $x \in G \cap K$ ise $y \in f(K)$'dir ve f birebir olduğundan $g(y) = x \in G$ olur; yani $y \in g^{-1}(G)$. Dolayısıyla

$$g^{-1}(G) = f(G \cap K).$$

Bu küme kapalıdır. *K kompakt olduğundan kapalıdır (Teorem 5.2); $G \cap K$ iki kapalı kümenin kesişimi olarak kapalıdır (Teorem 3.4). Kompakt K kümesinin kapalı bir alt kümesi olduğundan $G \cap K$ kompakttır (Teorem 5.3). f sürekli olduğundan $f(G \cap K)$ kompakttır (Teorem 11.2), dolayısıyla kapalıdır (Teorem 5.2).*
Sonuç. *$f(G \cap K) \subseteq f(K)$ olduğundan*

$$g^{-1}(G) = f(G \cap K) \cap f(K)$$

yazılır; $g^{-1}(G)$, kapalı bir kümenin $f(K)$ ile kesişimidir, yani $f(K)$'de bağıl kapalıdır. G keyfi olduğundan Sonuç 11.2 gereği $g = f^{-1}$, $f(K)$ üzerinde süreklidir. ■

Tanım kümesinin kompakt olması vazgeçilmezdir; aşağıdaki örnekte tek bir eksik nokta sonucu bozar.

Örnek 11.11 (Kompaktlık Olmadan Tersi Süreksiz Olabilir). $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ fonksiyonunun birebir ve sürekli olduğunu, ama ters fonksiyonunun $(1, 0)$ noktasında sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Süreklilik. Bileşenler olan kosinüs ve sinüs süreklidir (bkz. Analiz 1); Teorem 10.5 gereği f süreklidir.
Birebirlik. $t, s \in [0, 2\pi)$ için $f(t) = f(s)$ olsun: $\cos t = \cos s$ ve $\sin t = \sin s$. O zaman

$$\cos(t - s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

olur ve bu, $t - s$ farkının 2π'nin bir tam katı olması demektir. $\mid t - s \mid < 2\pi$ olduğundan bu kat 0'dır: $t = s$.
Tersin süreksizliği. $g = f^{-1}$ diyelim; $f(0) = (1, 0)$ olduğundan $g(1, 0) = 0$'dır. $k \in \mathbb{N}$ için $t_k = 2\pi - \frac{1}{k}$ alalım; $\frac{1}{k} \leq 1 < 2\pi$ olduğundan $t_k \in [0, 2\pi)$'dir. $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ ve $\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$ olduğundan

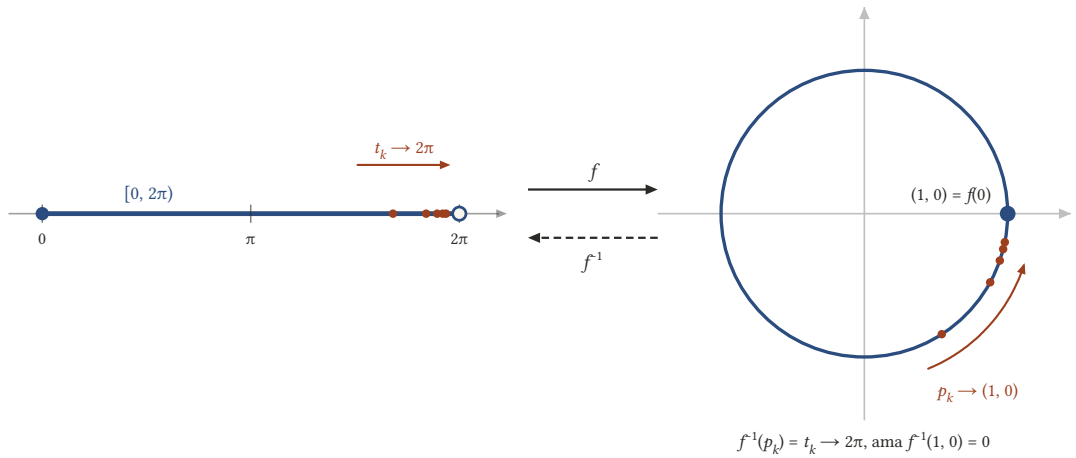
$$p_k = f(t_k) = \left(\cos\frac{1}{k}, -\sin\frac{1}{k}\right)$$

olur. Kosinüs ve sinüs 0'da sürekli olduğundan bileşenler 1'e ve 0'a yakınsar; Teorem 6.3 gereği $p_k \to (1, 0)$'dır. Oysa

$$g(p_k) = t_k = 2\pi - \frac{1}{k} \to 2\pi \neq 0 = g(1, 0)$$

olur. Dizisel süreklilik (Teorem 10.1) gereği g, $(1, 0)$ noktasında sürekli değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.3: $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$. $t_k = 2\pi - 1/k$ noktaları ($k = 1, \ldots, 5$) 2π'ye yaklaşır; görüntüleri $p_k = (\cos(1/k), -\sin(1/k))$ ise çember üzerinde alttan $(1, 0) = f(0)$ noktasına yaklaşır. Ters fonksiyon p_k'yı t_k'ya götürdüğünden $(1, 0)$'da sürekli değildir.

Teorem burada uygulanamaz, çünkü $[0, 2\pi)$ kapalı değildir (2π bir yığılma noktasıdır ama kümeye ait değildir) ve dolayısıyla kompakt değildir. Eksik noktayı eklersek bu kez $f(0) = f(2\pi)$ olur ve f birebirliğini yitirir. Çember üzerinde $(1, 0)$'a alttan yaklaşan noktaların açıları 2π'ye, üstten yaklaşanlarınki 0'a gider; ters fonksiyon çemberi $(1, 0)$ noktasında "yırtar". ■

11.6 Bağlantılı Kümelerin Görüntüsü ve Ara Değer Teoremi

Kompaktlık gibi bağlantılılık da sürekli görüntü altında korunur; bu sonuç, ara değer teoremini bağlantılı kümelere taşımanın anahtarıdır.

Teorem 11.5 (Bağlantılı Kümenin Sürekli Görüntüsü Bağlantılıdır). *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bağlantılı bir küme ve $f : E \to \mathbb{R}^m$ sürekli olsun. O zaman $f(E)$ kümesi $\mathbb{R}^m$'de bağlantılıdır.*

İspat.
$f(E)$'nin bağlantısız olduğunu varsayalım. Tanım 5.3 gereği öyle $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ açık kümeleri vardır ki
(i) $U \cap f(E) \neq \varnothing$ ve $V \cap f(E) \neq \varnothing$;
(ii) $\big(U \cap f(E) \big) \cap \big(V \cap f(E) \big) = \varnothing$;
(iii) $f(E) \subseteq U \cup V$
olur. (i) gereği $f(E) \neq \varnothing$, dolayısıyla $E \neq \varnothing$'dir. f sürekli olduğundan Teorem 11.1 gereği

$$f^{-1}(U) = U_1 \cap E,$$

$$f^{-1}(V) = V_1 \cap E$$

olacak biçimde açık $U_1, V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri vardır. Bu iki kümenin E için aynı üç koşulu sağladığını gösterelim.
(i) $y \in U \cap f(E)$ olsun. $y = f(x)$ olan bir $x \in E$ vardır ve $f(x) \in U$ olduğundan $x \in f^{-1}(U) = U_1 \cap E$'dir. Demek ki $U_1 \cap E \neq \varnothing$. Aynı gerekçeyle $V_1 \cap E \neq \varnothing$.
(ii) $x \in (U_1 \cap E) \cap (V_1 \cap E)$ olsaydı $x \in f^{-1}(U)$ ve $x \in f^{-1}(V)$ olurdu; o zaman $f(x)$ hem $U \cap f(E)$ hem $V \cap f(E)$ kümesinde olurdu. Bu, $f(E)$ için (ii) ile çelişir. Demek ki $(U_1 \cap E) \cap (V_1 \cap E) = \varnothing$.
(iii) $x \in E$ ise $f(x) \in f(E) \subseteq U \cup V$'dir; dolayısıyla $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup V_1$. Demek ki $E \subseteq U_1 \cup V_1$.
U_1 ve V_1 açık kümeleri E için üç koşulu sağladığından E bağlantısızdır. Bu, varsayımla çelişir; $f(E)$ bağlantılıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem, bağlantılılığı göstermek için konvekslikten çok daha esnek bir araç verir: bağlantılı olduğu bilinen bir kümenin sürekli görüntüsü olarak yazılabilen her küme bağlantılıdır.

Örnek 11.12 (Çember Bağlantılıdır). $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberinin bağlantılı olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ fonksiyonu süreklidir (bileşenleri süreklidir, Teorem 10.5). $f(\mathbb{R}) = S$ olduğunu gösterelim.
> $\boldsymbol{f(\mathbb{R}) \subseteq S}$**.** Her t için $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$'dir.
> $\boldsymbol{S \subseteq f(\mathbb{R})}$**.** $(x,y) \in S$ olsun. $x^2 \leq 1$ olduğundan $-1 \leq x \leq 1$'dir. Kosinüs $[0,\pi]$ aralığında süreklidir ve $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$'dir; ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $\cos t_0 = x$ olan bir $t_0 \in [0,\pi]$ vardır. Bu aralıkta $\sin t_0 \geq 0$'dır ve $\sin^2 t_0 = 1 - x^2 = y^2$ olduğundan $\sin t_0 = |\, y \,|$ olur. $y \geq 0$ ise $f(t_0) = (x,y)$'dir. $y < 0$ ise $\cos(-t_0) = x$ ve $\sin(-t_0) = -|\, y \,| = y$ olduğundan $f(-t_0) = (x,y)$'dir.
> **Sonuç.** $\mathbb{R}$ bağlantılıdır (Teorem 5.6). Teorem 11.5 gereği $S = f(\mathbb{R})$ bağlantılıdır.
> S konveks değildir: $(1,0)$ ile $(-1,0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası olan $(0,0)$ çemberde değildir. Bu yüzden Teorem 5.7 burada işe yaramazdı. ■

Reel değerli fonksiyonlarda teorem, tanıdık ara değer teoremine dönüşür.

Teorem 11.6 (Ara Değer Teoremi). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ bağlantılı bir küme ve $f : D \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $x_1, x_2 \in D$ ve $f(x_1) < f(x_2)$ ise her $y_0 \in \big(\, f(x_1), f(x_2) \,\big)$ için $f(x) = y_0$ olacak biçimde bir $x \in D$ vardır.*

> ***İspat.***
> *Tersine, bir $y_0 \in \big(\, f(x_1), f(x_2) \,\big)$ değerinin hiç alınmadığını, yani $y_0 \notin f(D)$ olduğunu varsayalım. $U = (-\infty, y_0)$ ve $V = (y_0, +\infty)$ açık kümelerini alalım (Örnek 11.6 çözümündeki gerekçeyle ikisi de açıktır). Bu kümeler $f(D)$ için bağlantısızlık koşullarını sağlar:*
> *(i) $f(x_1) < y_0$ olduğundan $f(x_1) \in U \cap f(D)$; $f(x_2) > y_0$ olduğundan $f(x_2) \in V \cap f(D)$.*
> *(ii) $U \cap V = \varnothing$.*
> *(iii) $y_0 \notin f(D)$ olduğundan $f(D) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{y_0\} = U \cup V$.*
> *Demek ki $f(D)$ bağlantısızdır. Oysa D bağlantılı ve f sürekli olduğundan Teorem 11.5 gereği $f(D)$ bağlantılıdır. Bu çelişki, her y_0 değerinin alındığını gösterir.* ■

$n = 1$ ve $D = [a,b]$ için bu, Analiz 1'deki ara değer teoremidir (bkz. Analiz 1). Aynı sonucu şöyle de okuyabiliriz: $f(D)$, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan bağlantılı bir alt kümesidir, dolayısıyla bir aralıktır (Alıştırma 5.7). Uç değer teoremiyle birleşince görüntü tam olarak belirlenir.

Sonuç 11.4 (Kompakt ve Bağlantılı Kümenin Görüntüsü). *$\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve bağlantılı, $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. m ve M, f'nin K üzerindeki en küçük ve en büyük değerleri ise $f(K) = [m, M]$'dir.*

> ***İspat.***
> *Teorem 11.3 gereği $m = f(x_m)$ ve $M = f(x_M)$ olan $x_m, x_M \in K$ vardır ve her $x \in K$ için $m \leq f(x) \leq M$'dir; yani $f(K) \subseteq [m, M]$ ve $m, M \in f(K)$. $m = M$ ise iş biter. $m < M$ ise her $y \in (m, M)$ için Teorem 11.6 ($x_1 = x_m$, $x_2 = x_M$ ile) $f(x) = y$ olan bir $x \in K$ verir. Dolayısıyla $[m, M] \subseteq f(K)$ ve $f(K) = [m, M]$.* ■

Bu, $f([a,b]) = [m,M]$ sonucunun (bkz. Analiz 1) çok boyutlu karşılığıdır. Ara değer teoreminin klasik bir uygulamasıyla bitirelim.

Örnek 11.13 (Çemberde Karşıt Noktalar). $S \subseteq \mathbb{R}^2$ birim çember ve $f : S \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $f(p) = f(-p)$ olacak biçimde bir $p \in S$ bulunduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Yardımcı fonksiyon.** $p = (x,y) \in S$ ise $-p = (-x,-y)$ de S'dedir. $h(p) = -p$ fonksiyonunun bileşenleri $-x$ ve $-y$ polinomlarıdır; h süreklidir ve S'yi S'ye götürür. Bileşke $f \circ h$ süreklidir (Teorem 10.4) ve
>
> $$g(p) = f(p) - f(-p)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonu S'de süreklidir (Teorem 10.2). Ayrıca her $p \in S$ için

$$g(-p) = f(-p) - f(p) = -g(p)$$

olur.
Ara değer. $p_0 = (1, 0)$ alalım. $g(p_0) = 0$ ise $p = p_0$ istenen noktadır. $g(p_0) \neq 0$ ise $g(p_0)$ ile $g(-p_0) = -g(p_0)$ sıfırdan farklı ve zıt işaretlidir; 0 bu iki değerin arasındadır. S bağlantılıdır (Örnek 11.12). Teorem 11.6 (daha küçük değeri veren noktayı x_1, öbürünü x_2 alarak) $g(p) = 0$ olan bir $p \in S$ verir. Bu, $f(p) = f(-p)$ demektir.
Örneğin f ekvator boyunca sıcaklığı gösteriyorsa, ekvatorun tam karşıt iki noktasında sıcaklık aynıdır.
■

Bölümün şimdiye kadarki sonuçlarını ve uyarı örneklerini bir tabloda toplayalım.

Tablo 11.1: Sürekli fonksiyonların koruduğu ve korumadığı özellikler

Özellik	Sürekli görüntü altında	Sürekli ters görüntü altında
açık	korunmaz: x^2 için $(-1, 1) \mapsto [0, 1)$	bağıl olarak korunur (Teorem 11.1)
kapalı	korunmaz: $\frac{1}{1+x^2}$ için $\mathbb{R} \mapsto (0, 1]$	bağıl olarak korunur (Sonuç 11.2)
sınırlı	korunmaz: $\frac{1}{x}$ için $(0, 1) \mapsto (1, +\infty)$	korunmaz (Örnek 11.8)
kompakt	korunur (Teorem 11.2)	korunmaz: $f^{-1}([0, 1]) = \mathbb{R}$, $f = \frac{1}{1+x^2}$
bağlantılı	korunur (Teorem 11.5)	korunmaz (Örnek 11.9)

Tablodaki "korunur" sonuçları tek yönlüdür. Sabit bir fonksiyon her kümeyi tek bir noktaya götürür; bu yüzden sınırsız, kompakt olmayan ya da bağlantısız bir kümenin sürekli görüntüsü sınırlı, kompakt ve bağlantılı olabilir.

11.7 Düzgün Süreklilik

Süreklilik tanımında δ sayısı hem ε'a hem de noktaya bağlıdır; bütün noktalarda aynı anda işleyen bir δ bulunabiliyorsa daha güçlü bir özellik elde ederiz.

Tanım 11.2 (Düzgün Süreklilik). $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa ki $\| x - s \| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, s \in D$ için

$$\| f(x) - f(s) \| < \varepsilon$$

olsun, f'ye D üzerinde **düzgün sürekli** denir.

Yani düzgün süreklilikte δ yalnız ε'a bağlıdır: birbirine δ'dan yakın olan **her** nokta çiftinin değerleri birbirine ε'dan yakındır; çiftin tanım kümesinin neresinde olduğu önemli değildir. $n = m = 1$ için tanım Analiz 1'deki düzgün süreklilik tanımıdır (bkz. Analiz 1). Tanımda $s = a$ sabitlenirse a noktasındaki süreklilik tanımı elde edilir; dolayısıyla düzgün sürekli bir fonksiyon süreklidir (bkz. Analiz 1). f, D üzerinde düzgün sürekliyse D'nin her alt kümesi üzerinde de düzgün süreklidir, çünkü koşulun daha az nokta çifti için sağlanması gerekir.
Tanımın olumsuzu, düzgün sürekli olmamayı göstermek için kullanılır: f, D üzerinde düzgün sürekli değildir ancak ve ancak öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için

$$\| x_\delta - s_\delta \| < \delta,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| f(x_\delta) - f(s_\delta) \| \geq \varepsilon_0$$

koşullarını sağlayan $x_\delta, s_\delta \in D$ noktaları bulunur.

Örnek 11.14 (Norm Fonksiyonu Düzgün Süreklidir). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \| x \|$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 1.2) gereği her $x, s \in \mathbb{R}^n$ için
>
> $$| f(x) - f(s) | = | \| x \| - \| s \| | \leq \| x - s \|$$
>
> olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \varepsilon$ alalım. $\| x - s \| < \delta$ ise $| f(x) - f(s) | \leq \| x - s \| < \varepsilon$'dur. δ yalnız ε'a bağlı olduğundan f düzgün süreklidir.
> Aynı akıl yürütme, bir $L > 0$ için her $x, s \in D$ noktasında $\| f(x) - f(s) \| \leq L \| x - s \|$ eşitsizliğini sağlayan her fonksiyona uygulanır: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$ seçilir. Bu koşula Lipschitz koşulu denir (bkz. Analiz 1). ■

Aşağıdaki iki örnek aynı fonksiyonun bir kümede düzgün sürekli olup başka bir kümede olmadığını gösterir; fark, tanım kümesinin fonksiyonun patladığı noktalara yaklaşıp yaklaşmamasıdır.

Örnek 11.15 (Eksenlerden Uzak Bir Dikdörtgende Düzgün Süreklilik). $0 < a < b$ ve $0 < c < d$ olsun. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ fonksiyonunun

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

kümesinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $\varepsilon > 0$ verilsin ve
>
> $$\delta = \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2}\, \varepsilon > 0$$
>
> alalım. $p_1 = (x_1, y_1)$ ve $p_2 = (x_2, y_2)$, D_1'de iki nokta ve $\| p_1 - p_2 \| < \delta$ olsun. Her bileşen farkı normu aşmadığından $| x_1 - x_2 | < \delta$ ve $| y_1 - y_2 | < \delta$'dır. Ayrıca $x_1, x_2 > a > 0$ ve $y_1, y_2 > c > 0$ olduğundan $x_1 x_2 > a^2$ ve $y_1 y_2 > c^2$'dir. Buna göre
>
> $$\begin{aligned} | f(p_1) - f(p_2) | &= \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} + \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2} \right| \\ &\leq \frac{| x_2 - x_1 |}{x_1 x_2} + \frac{| y_2 - y_1 |}{y_1 y_2} \\ &< \frac{\delta}{a^2} + \frac{\delta}{c^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 c^2}\, \delta = \varepsilon \end{aligned}$$
>
> bulunur. δ yalnız ε'a (ve sabit a, c sayılarına) bağlı olduğundan f, D_1 üzerinde düzgün süreklidir. Hesapta b ve d hiç kullanılmadı: aynı δ, $\{x > a, y > c\}$ bölgesinin tamamında işler. ■

> **İki adımda düzgün sürekli olmadığını gösterme**
>
> 1. **Sorunlu bölgeyi bul.** Fonksiyonun çok hızlı değiştiği yer aranır: tanım kümesine ait olmayan bir sınır noktasının yakını ya da sonsuz. Bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı seçilir.
> 2. **Nokta çiftlerini kur.** Her $\delta > 0$ için Arşimet özelliğiyle $N > \frac{1}{\delta}$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ alınır ve bu bölgede birbirine uzaklığı en çok $\frac{1}{N}$ (dolayısıyla δ'dan küçük), değerleri arasındaki fark ise en az ε_0 olan iki nokta $x_\delta, s_\delta \in D$ yazılır. Bu, tanımın olumsuzudur.

Örnek 11.16 (Açık Birim Karede Düzgün Süreklilik Bozulur). $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ fonksiyonunun

 CC BY-NC-SA 4.0

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

açık birim karesinde düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Sorunlu bölge. f, orijine yaklaşırken sınırsız büyür. $\varepsilon_0 = 1$ alalım.
Nokta çiftleri. $\delta > 0$ verilsin. Arşimet özelliği gereği $N > \max\left\{1, \frac{1}{\delta}\right\}$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ vardır; $N \geq 2$'dir. Noktaları

$$x_\delta = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right),$$

$$s_\delta = \left(\frac{1}{2N}, \frac{1}{3N}\right)$$

olarak seçelim. $N \geq 2$ olduğundan bütün bileşenler $(0,1)$ aralığındadır; iki nokta da D_2'dedir. Uzaklıkları

$$\begin{aligned} \| x_\delta - s_\delta \| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2N}\right)^2 + \left(\frac{2}{3N}\right)^2} \\ &= \frac{1}{N}\sqrt{\frac{9+16}{36}} = \frac{5}{6N} < \frac{1}{N} < \delta \end{aligned}$$

olur. Öte yandan $f(x_\delta) = N + N = 2N$ ve $f(s_\delta) = 2N + 3N = 5N$ olduğundan

$$| f(x_\delta) - f(s_\delta) | = 3N \geq 6 > 1 = \varepsilon_0$$

bulunur. Her $\delta > 0$ için böyle bir çift bulunduğundan f, D_2 üzerinde düzgün sürekli değildir. ■

İki örnek arasındaki fark tanım kümesinin yapısındadır. D_1 kümesi, f'nin sürekli olduğu kompakt $[a,b] \times [c,d]$ dikdörtgeninin içindedir; D_2 ise sınırlıdır ama kapalı değildir ve f'nin tanımlı olmadığı orijine istenildiği kadar yaklaşır. Aşağıdaki teorem bu farkın tesadüf olmadığını söyler.

Teorem 11.7 (Heine–Cantor Teoremi). *$\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $f : K \to \mathbb{R}^m$ sürekli olsun. O zaman f, K üzerinde düzgün süreklidir.*

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin.
Her noktada bir yarıçap. *f her $a \in K$ noktasında sürekli olduğundan öyle bir $\delta(a) > 0$ vardır ki*

$$x \in K, \| x - a \| < \delta(a) \Longrightarrow \| f(x) - f(a) \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.
Sonlu örtü. *$a \in B\left(a, \frac{\delta(a)}{2}\right)$ olduğundan $\left\{B\left(a, \frac{\delta(a)}{2}\right)\right\}_{a \in K}$ ailesi K'nin bir açık örtüsüdür. K kompakt olduğundan öyle $a_1, \ldots, a_k \in K$ vardır ki $\delta_j = \dfrac{\delta(a_j)}{2}$ olmak üzere*

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, \delta_j)$$

olur.
Ortak δ. *$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ diyelim; sonlu tane pozitif sayının en küçüğü olarak $\delta > 0$'dır. $x, s \in K$ ve $\| x - s \| < \delta$ olsun. x, örtünün bir $B(a_j, \delta_j)$ yuvarındadır. O zaman*

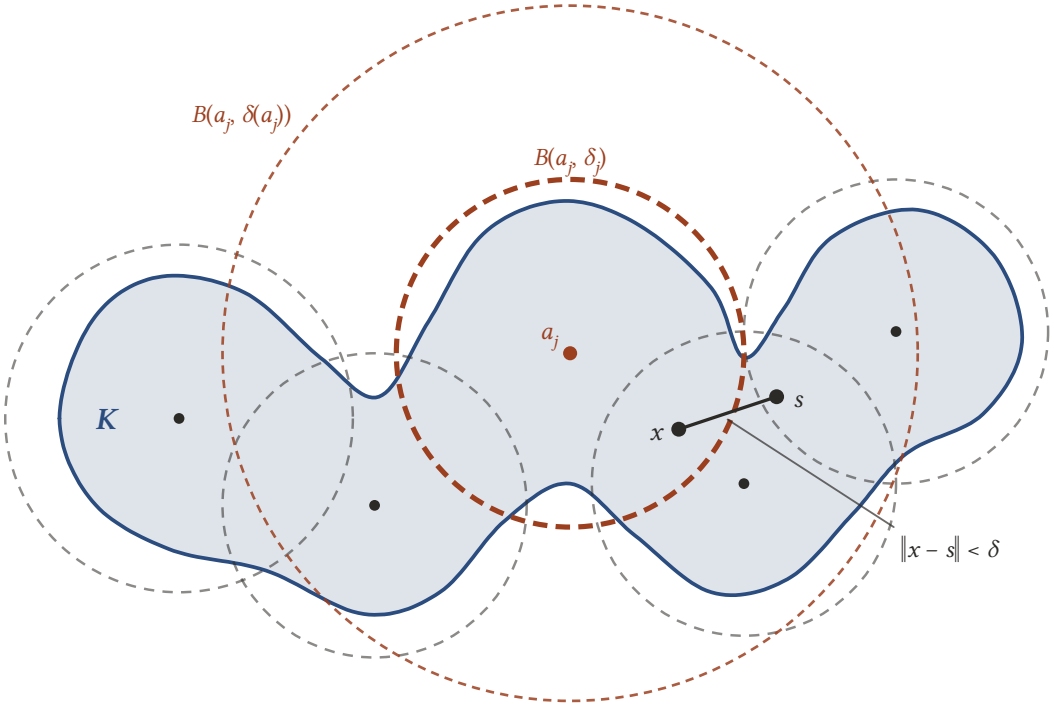
$$\| x - a_j \| < \delta_j < \delta(a_j)$$

ve üçgen eşitsizliği gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| s - a_j \| \leq \| s - x \| + \| x - a_j \| < \delta + \delta_j \leq 2\delta_j = \delta(a_j)$$

olur. İki nokta da a_j'ye $\delta(a_j)$'den yakın olduğundan $\| f(x) - f(a_j) \| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\| f(s) - f(a_j) \| < \frac{\varepsilon}{2}$'dir.



Şekil 11.4: Kompakt K *kümesi beş yuvarla örtülür:* $B(a_j, \delta_j)$, $\delta_j = \delta(a_j)/2$. *Kalın kesikli yuvarın içindeki* x *ile* $\|x - s\| < \delta = \min \delta_j$ *koşulunu sağlayan* s *bu yuvarın dışına çıkabilir, ama ikisi de* a_j*'ye* $\delta(a_j)$*'den yakındır: ince kesikli çemberin içindedir.*

Sonuç. *Üçgen eşitsizliğiyle*

$$\| f(x) - f(s) \| \leq \| f(x) - f(a_j) \| + \| f(a_j) - f(s) \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. δ yalnız ε'a bağlıdır; f, K üzerinde düzgün süreklidir. ■

Dizilerle ikinci ispat.
f'nin K üzerinde düzgün sürekli olmadığını varsayalım. Tanımın olumsuzu gereği öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $\delta > 0$ için $\| x - s \| < \delta$ ve $\| f(x) - f(s) \| \geq \varepsilon_0$ olan $x, s \in K$ bulunur. Bunu her $k \in \mathbb{N}$ için $\delta = \frac{1}{k}$ ile uygulayalım: öyle $x_k, s_k \in K$ vardır ki

$$\| x_k - s_k \| < \frac{1}{k},$$

$$\| f(x_k) - f(s_k) \| \geq \varepsilon_0$$

olur. K kompakt olduğundan dizisel kompaktlık teoremi (Teorem 7.4) gereği (x_k) dizisinin bir $x \in K$ noktasına yakınsayan bir (x_{k_j}) alt dizisi vardır. Aynı indislerle alınan (s_{k_j}) alt dizisi de x'e yakınsar, çünkü

$$\| s_{k_j} - x \| \leq \| s_{k_j} - x_{k_j} \| + \| x_{k_j} - x \| < \frac{1}{k_j} + \| x_{k_j} - x \|$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve sağdaki iki terim 0'a gider ($k_j \geq j$ olduğundan $\frac{1}{k_j} \leq \frac{1}{j}$). f, x noktasında sürekli olduğundan dizisel süreklilik (Teorem 10.1) gereği $f(x_{k_j}) \to f(x)$ ve $f(s_{k_j}) \to f(x)$ olur. Buradan

$$\| f(x_{k_j}) - f(s_{k_j}) \| \leq \| f(x_{k_j}) - f(x) \| + \| f(x) - f(s_{k_j}) \| \to 0$$

çıkar. Oysa her j için bu fark en az $\varepsilon_0 > 0$'dır. Bu çelişki f'nin düzgün sürekli olduğunu gösterir. ■

$n = m = 1$ için teorem Analiz 1'deki Cantor teoremidir (bkz. Analiz 1). Örnek 11.15 sonucu bu teoremden hesap yapmadan da çıkar: $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ fonksiyonu $[a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeninde süreklidir, çünkü orada paydalar sıfırdan farklıdır. Bu dikdörtgen kompakt olduğundan (Teorem 5.4) f orada düzgün süreklidir; alt kümesi olan D_1 üzerinde de düzgün süreklidir. Kompaktlığın iki bileşeni de gereklidir: D_2 sınırlıdır ama kapalı değildir ve Örnek 11.16 örneğinde düzgün süreklilik bozulur; $\mathbb{R}^2$ kapalıdır ama sınırlı değildir ve $f(x, y) = xy$ polinomu orada düzgün sürekli değildir (Alıştırma 11.9).

11.8 Alıştırmalar

Alıştırma 11.1 (Karekök Fonksiyonunda Görüntüler). $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ olsun. $E_1 = (0, 1)$, $E_2 = [0, 1)$ ve $E_3 = [0, 1]$ kümelerinin f altındaki görüntülerini bulunuz.

Çözüm.
Karekök fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde kesin artandır: $0 \leq u < v$ ise $\sqrt{u} < \sqrt{v}$'dir. Ayrıca her $y \geq 0$ için $x = y^2$ noktasında $\sqrt{x} = y$ olur.
E_1. $x \in (0, 1)$ ise $0 = \sqrt{0} < \sqrt{x} < \sqrt{1} = 1$'dir. Tersine $y \in (0, 1)$ ise $x = y^2 \in (0, 1)$ ve $\sqrt{x} = y$'dir. Dolayısıyla $f(E_1) = (0, 1)$.
E_2 ve E_3. $E_2 = \{0\} \cup E_1$ ve $\sqrt{0} = 0$ olduğundan $f(E_2) = [0, 1)$. $E_3 = E_2 \cup \{1\}$ ve $\sqrt{1} = 1$ olduğundan $f(E_3) = [0, 1]$.
f süreklidir ve kompakt E_3 kümesinin görüntüsü kompakttır (Teorem 11.2); bağlantılı üç aralığın görüntüleri de aralıktır (Teorem 11.5). ■

Alıştırma 11.2 (Bir Bölü x Fonksiyonunda Görüntüler). $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \neq 0$ için $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ve $g(0) = 0$ olsun. $E_1 = (0, 1)$, $E_2 = [0, 1)$ ve $E_3 = [0, 1]$ kümelerinin g altındaki görüntülerini bulunuz.

Çözüm.
E_1. $x \in (0, 1)$ ise $\dfrac{1}{x} > 1$'dir. Tersine $y > 1$ ise $x = \dfrac{1}{y} \in (0, 1)$ ve $g(x) = y$'dir. Dolayısıyla $g(E_1) = (1, +\infty)$.
E_2. $E_2 = \{0\} \cup E_1$ ve $g(0) = 0$ olduğundan $g(E_2) = \{0\} \cup (1, +\infty)$.
E_3. $E_3 = E_2 \cup \{1\}$ ve $g(1) = 1$ olduğundan $g(E_3) = \{0\} \cup [1, +\infty)$.
E_3 kompakttır ama $g(E_3)$ sınırlı değildir. Bu Teorem 11.2 ile çelişmez, çünkü g sıfırda sürekli değildir: $x_k = \frac{1}{k} \to 0$ iken $g(x_k) = k$ dizisi $g(0) = 0$'a yakınsamaz (Teorem 10.1). Ayrıca $g(E_3)$ bağlantılı da değildir; teorem burada da uygulanamaz. ■

Alıştırma 11.3 (Karekök Fonksiyonunda Ters Görüntüler). $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ olsun. $f^{-1}\left(\ (-1, 1)\ \right)$ ve $f^{-1}\left(\ [-1, 1]\ \right)$ kümelerini bulunuz.

Çözüm.
Ters görüntüler tanım kümesinin, yani $[0, +\infty)$'un içindedir. Her $x \geq 0$ için $\sqrt{x} \geq 0 > -1$ olduğundan alt sınır koşulu kendiliğinden sağlanır. $\sqrt{x} < 1$ koşulu $x < 1$, $\sqrt{x} \leq 1$ koşulu $x \leq 1$ demektir. Dolayısıyla

$$f^{-1}\left(\ (-1, 1)\ \right) = [0, 1),$$

$$f^{-1}\left(\ [-1, 1]\ \right) = [0, 1].$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$(-1,1)$ açıktır ama $[0,1)$ kümesi $\mathbb{R}$'de açık değildir: 0 kümededir, oysa 0'a istenildiği kadar yakın negatif sayılar kümede değildir. Bu Teorem 11.1 ile çelişmez; teorem yalnız bağıl açıklık ister ve gerçekten

$$[0,1) = (-1,1) \cap [0,+\infty)$$

olduğundan $[0,1)$, tanım kümesinde bağıl açıktır. Tanım kümesi kapalı olduğundan kapalı $[-1,1]$ kümesinin ters görüntüsü kapalıdır (Sonuç 11.2). ■

Alıştırma 11.4 (Bir Bölü x Fonksiyonunda Ters Görüntüler). $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\neq 0$ için $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ve $g(0)=0$ olsun. $g^{-1}\left(\ (-1,1)\ \right)$ ve $g^{-1}\left(\ [-1,1]\ \right)$ kümelerini bulunuz.

Çözüm.
Sıfır noktası. $g(0)=0$ iki kümede de olduğundan 0 iki ters görüntüye de aittir.
Sıfırdan farklı noktalar. $x\neq 0$ için $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ koşulu $\mid x\mid>1$, $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leq 1$ koşulu $\mid x\mid\geq 1$ demektir. Dolayısıyla

$$g^{-1}\left(\ (-1,1)\ \right)=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,+\infty),$$

$$g^{-1}\left(\ [-1,1]\ \right)=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty).$$

Yorum. $(-1,1)$ sınırlı ve açıktır; ters görüntüsü sınırsızdır ve açık değildir. Açık olmadığını görmek için $\varepsilon>0$ verilsin ve $x=\frac{1}{2}\min\{\varepsilon,1\}$ alalım. $x\in B(0,\varepsilon)$ ve $0<x<1$'dir; dolayısıyla x ters görüntüde değildir. 0 noktasının hiçbir yuvarı kümenin içinde kalmaz. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ açık olduğundan Sonuç 11.1 gereği g, $\mathbb{R}$'de sürekli olamaz; nitekim g sıfırda sürekli değildir. ■

Alıştırma 11.5 (Bir Paraboloit Parçası Kompakttır).

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 1\}$$

kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kapalılık. $h_1(x,y,z)=x^2+y^2-z$ ve $h_2(x,y,z)=z$ polinomları $\mathbb{R}^3$'te süreklidir (Teorem 10.3). Kümenin iki koşulu $h_1\leq 0$ ve $h_2\leq 1$ olduğundan

$$K=h_1^{-1}\left(\ (-\infty,0]\ \right)\cap h_2^{-1}\left(\ (-\infty,1]\ \right)$$

olur. $(-\infty,0]$ ve $(-\infty,1]$ kümeleri $\mathbb{R}$'de kapalıdır. Sonuç 11.2 gereği iki ters görüntü de kapalıdır ve kapalı kümelerin kesişimi kapalıdır (Teorem 3.4).
Sınırlılık. $(x,y,z)\in K$ ise $0\leq x^2+y^2\leq z\leq 1$ olduğundan hem $x^2+y^2\leq 1$ hem $0\leq z\leq 1$'dir. Dolayısıyla

$$\parallel (x,y,z)\parallel^2=(x^2+y^2)+z^2\leq 1+1=2$$

ve $K\subseteq B[0,\sqrt{2}]$ olur.
Karar. K kapalı ve sınırlı olduğundan Heine–Borel teoremi (Teorem 5.5) gereği kompakttır. Dolayısıyla K üzerinde sürekli her reel değerli fonksiyon en büyük ve en küçük değerini alır (Teorem 11.3). ■

Alıştırma 11.6 (Vektör Değerli Bir Fonksiyonla Kompakt Görüntü).

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2},\,x^2+y^2\right), & (x,y)\neq(0,0),\\ (0,0), & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

olsun. $f\left(\ B[0,1]\ \right)$ kümesinin $\mathbb{R}^2$'de kompakt olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Teorem 11.2 gereği f'nin $\mathbb{R}^2$'de sürekli olduğunu göstermek yeter, çünkü $B[0,1]$ kompakttır (Örnek 5.4). Bileşenleri f_1 ve f_2 ile gösterelim; Teorem 10.5 gereği ikisinin sürekliliği yeter.
İkinci bileşen. $f_2(x,y) = x^2 + y^2$ her noktada (orijinde de) bu formülle verilir ve bir polinomdur; süreklidir (Teorem 10.3).
Orijin dışında birinci bileşen. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kümesinde

$$R(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

fonksiyonu, sürekli $\sin(x^3+y^3)$ fonksiyonunun (Teorem 10.4) sıfır olmayan x^2+y^2 polinomuna bölümüdür; süreklidir (Teorem 10.2). $(a,b) \neq (0,0)$ ise $r = \| (a,b) \|$ yarıçaplı $B\left((a,b), r \right)$ yuvarı orijini içermez ve bu yuvarda $f_1 = R$'dir. Lemma 10.1 gereği f_1, (a,b) noktasında süreklidir.
Orijinde birinci bileşen. $|\sin t| \leq |t|$ eşitsizliği (bkz. Analiz 1) ve $|x|^3 \leq |x|\,(x^2+y^2)$, $|y|^3 \leq |y|\,(x^2+y^2)$ eşitsizlikleri gereği $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$\begin{aligned} |f_1(x,y) - 0| &\leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} \\ &\leq |x| + |y| \leq 2\,\|(x,y)\| \end{aligned}$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alalım. $\|(x,y)\| < \delta$ ise $|f_1(x,y) - f_1(0,0)| < \varepsilon$'dur; bu eşitsizlik orijinin kendisinde de sağlanır. Demek ki f_1 orijinde süreklidir.
Sonuç. f, $\mathbb{R}^2$'de süreklidir ve Teorem 11.2 gereği $f\left(B[0,1] \right)$ kompakttır. Özel olarak bu küme kapalı ve sınırlıdır. ■

Alıştırma 11.7 (Kompakt Kümenin En Yakın Noktası). $\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $p \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $x \in K$ için $\|p-q\| \leq \|p-x\|$ olacak biçimde bir $q \in K$ bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Süreklilik. $h(x) = \|p-x\|$ diyelim. Ters üçgen eşitsizliği (Sonuç 1.2) gereği her $x, a \in \mathbb{R}^n$ için

$$|h(x) - h(a)| = \big|\, \|p-x\| - \|p-a\| \,\big| \leq \|(p-x)-(p-a)\| = \|x-a\|$$

olur. $\delta = \varepsilon$ seçilirse $\|x-a\| < \delta$ iken $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$'dur; h süreklidir, hatta Örnek 11.14 örneğindeki gibi düzgün süreklidir.
En küçük değer. K kompakt ve boş olmadığından Teorem 11.3 gereği h, K üzerinde en küçük değerini bir $q \in K$ noktasında alır: her $x \in K$ için $\|p-q\| \leq \|p-x\|$.
q, K'nin p'ye en yakın noktasıdır. Kompaktlık gereklidir: $K = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $p = (2,0)$ olsun. Her $x \in K$ için

$$\|p-x\| \geq \|p\| - \|x\| > 2 - 1 = 1$$

olur; öte yandan $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}, 0\right) \in K$ için $\|p - x_k\| = 1 + \frac{1}{k} \to 1$ olur. En küçük uzaklık 1'e istenildiği kadar yaklaşılır ama hiçbir noktada alınmaz. ■

Alıştırma 11.8 (Kapalı Diskin Görüntüsü Bir Aralıktır). $K = B[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $f(x,y) = x + 2y$ olsun. $f(K)$ kümesini bulunuz.

Çözüm.
Görüntü bir kapalı aralıktır. K kompakttır (Örnek 5.4) ve bir yuvar olarak bağlantılıdır (Sonuç 5.2); f bir polinom olarak süreklidir. Sonuç 11.4 gereği $f(K) = [m, M]$'dir; m ve M, f'nin K üzerindeki en küçük ve en büyük değerleridir.
Sınırlar. Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) gereği $(x,y) \in K$ için

$$|x+2y| = \big|\, \langle (1,2), (x,y) \rangle \,\big| \leq \|(1,2)\|\,\|(x,y)\| \leq \sqrt{5}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sınırlar alınır. $p = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ için $\| p \|^2 = \frac{1+4}{5} = 1$, yani $p \in K$'dir ve $f(p) = \frac{1+4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ olur. Aynı biçimde $f(-p) = -\sqrt{5}$'tir. Dolayısıyla $M = \sqrt{5}$, $m = -\sqrt{5}$ ve

$$f(K) = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}].$$

■

Alıştırma 11.9 (Çarpım Fonksiyonu Düzlemde Düzgün Sürekli Değildir). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Sorunlu bölge. Sonsuza giderken x'teki küçük bir değişim y ile çarpılarak büyür. $\varepsilon_0 = 1$ alalım.
Nokta çiftleri. $\delta > 0$ verilsin ve $N > \frac{1}{\delta}$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ seçelim.

$$x_\delta = \left(N + \frac{1}{N}, N\right),$$

$$s_\delta = (N, N)$$

noktaları için $\| x_\delta - s_\delta \| = \frac{1}{N} < \delta$'dır. Öte yandan

$$f(x_\delta) - f(s_\delta) = \left(N + \frac{1}{N}\right) N - N^2 = 1 \geq \varepsilon_0$$

olur. Her $\delta > 0$ için böyle bir çift bulunduğundan f, $\mathbb{R}^2$ üzerinde düzgün sürekli değildir.
Buna karşılık her $R > 0$ için f, kompakt $B[0, R]$ yuvarı üzerinde düzgün süreklidir (Teorem 11.7). Düzgün sürekliliği bozan, $\mathbb{R}^2$'nin sınırsız olmasıdır. ■

Bu bölümde sürekliliğin açık ve kapalı kümelerin ters görüntüleriyle tek bir noktaya bakmadan ifade edilebildiğini, kompaktlığın ve bağlantılılığın sürekli görüntü altında korunduğunu gördük. Bu iki gözlemden uç değer teoremi, ara değer teoremi, kompakt kümede ters fonksiyonun sürekliliği ve Heine–Cantor teoremi çıktı; hepsi Analiz 1′de $[a, b]$ aralığı için bildiğimiz sonuçların çok boyutlu karşılıklarıdır. Sıradaki adım türevi çok değişkenli fonksiyonlara taşımaktır. İlk ve en basit araç, bir değişken dışındakileri sabit tutarak alınan türevdir: Kısmi Türevler.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Kısmi Türevler

Analiz 2'de bir $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlı f fonksiyonunun $x_0 \in I$ noktasındaki türevini fark oranının limiti olarak tanımladık (bkz. Analiz 2):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bu limit varsa f, x_0'da türevlenebilirdir ve türev $f'(x_0)$ ya da $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ ile gösterilir. Tanım $\mathbb{R}^n$'ye olduğu gibi taşınamaz. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ iken $f(a + h)$ yazıldığında h artımı artık bir vektördür ve bir sayıyı bir vektöre bölmenin anlamı yoktur.

Bu engeli aşmanın iki yolu var. Birincisi artımı bir doğru üzerinde tutmaktır: h yerine sabit bir vektörün reel katını, örneğin he_j ya da hu ($h \in \mathbb{R}$) almak. O zaman fark oranındaki bölme yine bir reel sayıya bölmedir ve Analiz 2'nin bütün araçları kullanılabilir. İkincisi türevi bir bölüm olarak değil, fonksiyona en iyi yaklaşan lineer dönüşüm olarak görmektir. Birinci yol kısmi ve yönlü türevleri, ikinci yol tam türevi verir.

Bu bölümde en basitiyle, kısmi türevle başlıyoruz: bir değişken dışındaki bütün değişkenleri dondurup geriye kalan tek değişkenli fonksiyonun türevini alacağız. Tanımı ve gösterimleri, hesap kuralını, parçalı tanımlı fonksiyonlarda tanımla hesabı, geometrik yorumu, kısmi türevle süreklilik arasındaki ilişkiyi, kısmi türev kurallarını, gradyan vektörünü ve vektör değerli fonksiyonların kısmi türevlerini göreceğiz.

12.1 Türevin Üç Türü

$\mathbb{R}^n$'de türev dendiğinde üç kavram akla gelir; bunları tek tek işlemeden önce aralarındaki ilişkiye kısaca bakalım. $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve a, D'nin bir iç noktası olsun.

Tablo 12.1: Çok değişkenli fonksiyonlarda türevin üç türü

Türev	Artım	Yanıtladığı soru	Ayrıntı
Kısmi türev	$a + he_j$, $h \in \mathbb{R}$	Yalnız x_j değişirken f ne hızla değişir?	Bu bölüm
Yönlü türev	$a + hu$, $h \in \mathbb{R}$, u birim vektör	u doğrultusunda ilerlerken f ne hızla değişir?	Yönlü Türev ve Ortalama Değer Teoremi
Tam türev	$a + h$, $h \in \mathbb{R}^n$	$f(a + h) - f(a)$ farkına h'nin lineer bir ifadesiyle yaklaşılabilir mi?	Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel

Kısmi türevde artım yalnız j-inci koordinat ekseni doğrultusundadır:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}.$$

Yönlü türevde artım, herhangi bir u birim vektörünün (Tanım 1.10) doğrultusundadır:

$$D_u f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tam türevde ise $h \in \mathbb{R}^n$ serbestçe değişir ve bölme yerine bir lineer yaklaşım istenir: öyle bir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü aranır ki

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - T(h) \|}{\| h \|} = 0$$

olsun. Hatırlatalım: T'nin lineer olması, her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ olması demektir; $m = 1$ iken böyle bir dönüşüme lineer fonksiyonel de denir. Uygun bir T varsa tektir ve $Df(a)$ ile gösterilir. $n = m = 1$ iken $T(h) = f'(a)\,h$ olur ve tanım Analiz 2'deki türeve döner.
Üç kavram güçlerine göre sıralanır. Kısmi türev en zayıfıdır: fonksiyonun a çevresindeki davranışının yalnız a'dan geçen ve eksenlere paralel olan n doğru üzerindeki izini görür. Yönlü türev a'dan geçen bütün doğruları görür; kısmi türev, yönlü türevin $u = e_j$ özel durumudur. Tam türev en güçlüsüdür: h hangi yoldan sıfıra giderse gitsin $f(a+h)$ değerine lineer bir ifadeyle yaklaşır. İleride tam türevi olan bir fonksiyonun bütün yönlü türevlerinin, dolayısıyla bütün kısmi türevlerinin var olduğunu göreceğiz. Ters yönler doğru değildir; bunun ilk örneğini bu bölümde, bütün kısmi türevleri olduğu hâlde sürekli bile olmayan bir fonksiyonla göreceğiz.

12.2 Kısmi Türevin Tanımı

Kısmi türevin fikri, bir değişken dışındakileri sabit tutarak çok değişkenli fonksiyonu tek değişkenli bir fonksiyona çevirmektir.

Tanım 12.1 (Kısmi Türev). $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a = (a_1, \ldots, a_n)$, D kümesinin bir iç noktası olsun. $j \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

limiti bir reel sayı olarak varsa bu sayıya f'nin a noktasında ***x_j*'ye göre kısmi türevi** (x_j doğrultusundaki kısmi türevi ya da parçalı türevi) denir ve $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $D_j f(a)$ ya da $f_{x_j}(a)$ ile gösterilir. Burada h reel bir değişkendir ve e_j, doğal tabanın j-inci vektörüdür (Tanım 1.4).

Yani artım yalnız j-inci bileşene eklenir:

$$a + he_j = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Açık yazılışla ve $x_j = a_j + h$ değişken değiştirmesiyle

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{x_j \to a_j} \frac{f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n) - f(a)}{x_j - a_j}\end{aligned}$$

olur. Öbür bileşenler a'daki değerlerinde dondurulmuştur; değişen tek şey j-inci bileşendir. a noktasının iç nokta olması tanımın anlamlı olması içindir: Tanım 4.4 gereği $B(a, r) \subseteq D$ olacak bir $r > 0$ vardır ve $0 < |\, h \,| < r$ için $\| (a + he_j) - a \| = |\, h \,| \, \| e_j \| = |\, h \,| < r$ olduğundan $a + he_j \in D$'dir. Demek ki fark oranı 0'ın bir delinmiş komşuluğunda tanımlıdır ve $h \to 0$ limiti anlamlıdır.

Tanım 12.2 (Kısmi Türevlenebilir Fonksiyon ve Kısmi Türev Fonksiyonu). $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. Her $j = 1, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ kısmi türevi varsa f'ye a noktasında **kısmi türevlenebilir** (parçalı türevlenebilir) denir.
$U \subseteq D$ açık bir küme olsun. x_j'ye göre kısmi türev U'nun her noktasında varsa

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonuna f'nin U üzerinde **x_j'ye göre kısmi türev fonksiyonu** denir; bu fonksiyon $D_j f$ ya da f_{x_j} ile de gösterilir. f, U'nun her noktasında kısmi türevlenebilirse f'ye U üzerinde kısmi türevlenebilir denir.

Yani kısmi türevlenebilirlik, n limitin hepsinin birden var olmasıdır; kısmi türev fonksiyonu da her noktaya o noktadaki kısmi türevi karşılık getirir. U'nun açık seçilmesi, her noktasının bir iç nokta olması ve kısmi türevin her yerde tanımlanabilmesi içindir (Tanım 3.2). Kısmi türev fonksiyonu yeni bir çok değişkenli fonksiyondur; onun da kısmi türevleri sorulabilir.
İki değişkenli fonksiyonlarda değişkenler x, y ile, doğal taban $e_1 = (1,0)$ ve $e_2 = (0,1)$ ile yazılır. (x_0, y_0), $D \subseteq \mathbb{R}^2$'nin bir iç noktası ise tanım şu iki limite dönüşür:

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$
$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}.$$

Bunlar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ biçiminde de yazılır; $P=(x_0,y_0)$ denirse kısaca $f_x(P)$ ve $f_y(P)$ yazılır. Kısmi türev fonksiyonları f_x, f_y ya da $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ile gösterilir. Fonksiyon $z=f(x,y)$ biçiminde verilmişse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yazımı da kullanılır. Üç değişkende (x,y,z) ve f_x, f_y, f_z yazılır. $D_j f(a)$ gösterimindeki alt indis bir sayıdır; yönlü türevdeki $D_u f(a)$ gösteriminde ise alt indis bir vektördür ve $D_{e_j} f(a) = D_j f(a)$ olur.
Kısmi türevin tek değişkenli bir türev olduğunu şimdi kesin olarak ifade edelim; bütün hesaplar bu gözleme dayanır.

Önerme 12.1 (Kısmi Türev Tek Değişkenli Bir Türevdir). *$f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D^\circ$ ve $B(a,r) \subseteq D$ olsun. $j \in \{1,\dots,n\}$ sabit olmak üzere, $t \in (a_j - r, a_j + r)$ için*

$$\varphi_j(t) = f(a_1,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ kısmi türevinin var olması için gerek ve yeter koşul, φ_j'nin a_j noktasında türevlenebilir olmasıdır. Bu durumda

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \varphi_j'(a_j)$$

olur.

> ***İspat.***
> ***φ_j iyi tanımlıdır.*** *$|\, t-a_j \,| < r$ ise $(a_1,\dots,t,\dots,a_n) = a + (t-a_j)e_j$ noktasının a'ya uzaklığı $|\, t-a_j \,| < r$ olduğundan bu nokta $B(a,r) \subseteq D$ içindedir.*
> ***Fark oranları aynıdır.*** *$0 < |\, h \,| < r$ için $\varphi_j(a_j+h) = f(a+he_j)$ ve $\varphi_j(a_j) = f(a)$ olduğundan*
>
> $$\frac{\varphi_j(a_j+h)-\varphi_j(a_j)}{h} = \frac{f(a+he_j)-f(a)}{h}$$
>
> *olur. İki yandaki fark oranları 0'ın aynı delinmiş komşuluğunda özdeş fonksiyonlardır; dolayısıyla biri $h\to 0$ iken bir limite sahipse öbürü de aynı limite sahiptir. Sol yanın limiti, varsa, $\varphi_j'(a_j)$'dir (bkz. Analiz 2); sağ yanınki, varsa, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$'dır.* ■

Önermenin pratikteki anlamı açıktır: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ hesaplanırken x_j dışındaki bütün değişkenler sabit sayı gibi düşünülür ve x_j'ye göre Analiz 2'deki gibi türev alınır. Aynı hesap $t \mapsto f(a+te_j)$ fonksiyonunun 0'daki türevi olarak da yazılabilir, çünkü bu fonksiyon φ_j'nin a_j kadar kaydırılmışıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda kısmi türev hesabı

1. **Değişkeni seç.** Hangi değişkene göre türev alınacağı belirlenir; öbür bütün değişkenler sabit sayı gibi düşünülür.
2. **Tek değişkenli kuralları uygula.** Sabitlerin türevi 0'dır ve sabit çarpanlar türevin dışına çıkar; toplam, çarpım, bölüm ve zincir kuralları Analiz 2'deki gibi kullanılır.
3. **Noktayı yerine koy.** Bulunan ifadede noktanın koordinatları yerine yazılır. Bu adım, formülün noktanın bir komşuluğunda geçerli olmasını gerektirir; fonksiyon o noktada ayrı bir formülle tanımlıysa tanıma dönülür.

Örnek 12.1 (Bir Polinomun Kısmi Türevleri). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ fonksiyonunun kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
x'e göre. y sabit sayılır. $3xy$ teriminde $3y$ sabit bir katsayıdır ve türevi $3y$'dir; x^3 teriminin türevi $3x^2$'dir; y^3 sabittir ve türevi 0'dır. Dolayısıyla

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y - 3x^2.$$

y'ye göre. Bu kez x sabit sayılır: $3xy$'nin türevi $3x$, x^3'ün türevi 0, y^3'ün türevi $3y^2$'dir.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - 3y^2.$$

$f(x,y) = f(y,x)$ olduğundan iki sonucun birbirinden x ile y'nin yer değiştirmesiyle elde edilmesi şaşırtıcı değildir: $f_y(x,y) = f_x(y,x)$. ■

Örnek 12.2 (Tabanı ve Üssü Değişken Olan Fonksiyon). $D = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$ fonksiyonunun kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
D açıktır: $(x_0,y_0) \in D$ ise $B\big((x_0,y_0), x_0\big)$ yuvarındaki her (x,y) noktası için $|x - x_0| < x_0$, yani $x > 0$ olur. Her nokta bir iç noktadır.
x'e göre. y sabit sayılınca $x \mapsto x^y$ bir genel kuvvet fonksiyonudur ve türevi $y\,x^{y-1}$'dir (bkz. Analiz 2):

$$f_x(x,y) = y\,x^{y-1}.$$

y'ye göre. $x > 0$ sabit sayılınca $y \mapsto x^y$ bir üstel fonksiyondur. $x \neq 1$ ise türevi $x^y \ln x$'tir (bkz. Analiz 2); $x = 1$ ise $y \mapsto 1^y = 1$ sabittir ve türevi $0 = 1^y \ln 1$'dir. Her iki durumda

$$f_y(x,y) = x^y \ln x.$$

Aynı ifadenin iki değişkene göre türevleri bambaşka kurallarla bulunur: x'e göre kuvvet kuralı, y'ye göre üstel fonksiyonun kuralı. $x \mapsto x^x$ fonksiyonunun türevinin $x^x + x^x \ln x$ olduğunu hatırlayalım (bkz. Analiz 2); bu toplamın iki terimi, tam da f_x ve f_y'nin (x,x) noktasındaki değerleridir. Bu bir rastlantı değildir; nedenini Jacobi Matrisi ve Zincir Kuralı bölümünde göreceğiz. ■

Örnek 12.3 (Bir Noktada Kısmi Türevler). $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$ ise $f_x(1,1)$ ve $f_y(1,1)$ kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
y sabitken $f_x(x,y) = -2x$, x sabitken $f_y(x,y) = -4y$ olur. Bu formüller bütün $\mathbb{R}^2$'de geçerli olduğundan noktayı yerine koyabiliriz:

$$f_x(1,1) = -2 \cdot 1 = -2,$$
$$f_y(1,1) = -4 \cdot 1 = -4.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 12.4 (Trigonometrik Terimli Bir Fonksiyon). Aşağıdaki fonksiyonun kısmi türevlerini bulunuz:

$$f(x,y) = x^3y^2 + x^4\sin y + \cos(xy).$$

Çözüm.
***x*'e göre.** y^2 ve $\sin y$ sabit katsayılardır. $\cos(xy)$ teriminde iç fonksiyon $x \mapsto xy$'dir ve türevi y'dir; zincir kuralıyla (bkz. Analiz 2) $\big(\cos(xy)\big)' = -y\sin(xy)$ olur. Dolayısıyla

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 + 4x^3\sin y - y\sin(xy).$$

***y*'ye göre.** x^3 ve x^4 sabit katsayılardır; $\cos(xy)$'nin y'ye göre türevinde iç türev x'tir:

$$f_y(x,y) = 2x^3y + x^4\cos y - x\sin(xy).$$

■

Örnek 12.5 (Çarpım Kuralıyla Kısmi Türev). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{2x} + x\sin(xy)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
***x*'e göre.** e^{2x}'in türevi $2e^{2x}$'tir. $x\sin(xy)$ teriminde x iki çarpanda birden geçer; çarpım kuralıyla

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\big(\; x\sin(xy)\;\big) = 1\cdot\sin(xy) + x\cdot y\cos(xy)$$

olur. Sonuç olarak

$$f_x(x,y) = 2e^{2x} + \sin(xy) + xy\cos(xy).$$

***y*'ye göre.** e^{2x} sabittir; $x\sin(xy)$ teriminde x sabit bir katsayıdır ve $\sin(xy)$'nin y'ye göre türevi $x\cos(xy)$'dir:

$$f_y(x,y) = x\cdot x\cos(xy) = x^2\cos(xy).$$

x'e göre türev alırken çarpım kuralı gerekti, y'ye göre gerekmedi: hangi kuralın kullanılacağı, değişkenin ifadenin hangi parçalarında geçtiğine bağlıdır. ■

Örnek 12.6 (Üç Değişkenli Karekök). $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$ fonksiyonunun kısmi türevlerini, tanım kümesinin iç noktalarında bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi ve iç noktalar. $D = \{(x,y,z) : xyz \geq 0\}$'dır. $xyz > 0$ olan her nokta bir iç noktadır. Bu durumda üç bileşen de sıfırdan farklıdır; $\varepsilon = \min\{|\,x\,|, |\,y\,|, |\,z\,|\}$ alalım. $(u,v,w)\in B\,\big(\,(x,y,z),\varepsilon\,\big)$ ise $|\,u-x\,| < |\,x\,|$ olduğundan u ile x aynı işaretlidir; aynı biçimde v ile y, w ile z aynı işaretlidir ve $uvw > 0$ olur. Öte yandan $xyz = 0$ olan bir noktanın sıfır olan bileşenlerine küçük $\pm\varepsilon$ değerleri verip işaretleri uygun seçerek, noktaya istenildiği kadar yakın ve $uvw < 0$ olan bir nokta bulunur; bu noktalar iç nokta değildir. Demek ki $D^\circ = \{xyz > 0\}$'dır.
Kısmi türevler. $xyz > 0$ iken $\sqrt{u}$'nun türevi $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ ve iç fonksiyon $x\mapsto xyz$'nin x'e göre türevi yz olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{2\sqrt{xyz}}.$$

Aynı biçimde iç türevler xz ve xy olur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz}{2\sqrt{xyz}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{2\sqrt{xyz}}.$$

■

Örnek 12.7 (Logaritmalı Üç Değişkenli Fonksiyon). $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi. $D = \left\{(x,y,z) : z \neq 0,\ \frac{xy}{z} > 0\right\}$'dır. D'nin her noktasında üç bileşen de sıfırdan farklıdır ve Örnek 12.6 içindeki işaret gözlemi, yeterince yakın noktalarda bileşenlerin işaretinin, dolayısıyla $\frac{xy}{z}$'nin işaretinin değişmediğini gösterir. D açıktır.
Kısmi türevler. $\ln u$'nun türevi $\frac{1}{u}$'dur; zincir kuralıyla sonuç "iç fonksiyonun türevi bölü kendisi" olur (bkz. Analiz 2).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y/z}{xy/z} = \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x/z}{xy/z} = \frac{1}{y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-xy/z^2}{xy/z} = -\frac{1}{z}.$$

Denetim. D üzerinde $\frac{xy}{z} = \frac{|\,x\,||\,y\,|}{|\,z\,|}$ olduğundan $f(x,y,z) = \ln|\,x\,| + \ln|\,y\,| - \ln|\,z\,|$ yazılabilir. $\ln|\,t\,|$'nin türevi $\frac{1}{t}$ olduğundan (bkz. Analiz 2) aynı sonuçlar hemen okunur. ■

12.3 Tanımla Hesap

Hesap kuralı, fonksiyon noktanın bir komşuluğunda tek bir formülle verildiğinde çalışır. Parçalı tanımlı fonksiyonlarda formülün değiştiği noktada kısmi türev ancak tanımla bulunur; tanımla hesap, kuralla bulunan sonucu denetlemenin de iyi bir yoludur.

Üç adımda tanımla kısmi türev

1. **Artımı yerleştir.** $f(a)$ ve $f(a + he_j)$ yazılır; $h \neq 0$ iken $a + he_j$ noktasında hangi formülün geçerli olduğuna dikkat edilir.
2. **Fark oranını sadeleştir.** $\frac{f(a+he_j) - f(a)}{h}$ ifadesi h cinsinden sadeleştirilir.
3. **Limiti al.** $h \to 0$ limiti hesaplanır; mutlak değer ya da kök içeren ifadelerde sağdan ve soldan limitlere ayrı ayrı bakılır. Limit varsa kısmi türev odur; yoksa kısmi türev yoktur.

Örnek 12.8 (Tanımla Hesap ve Kuralla Denetim). $f(x,y) = 3x^2y + x^2 + y^3$ fonksiyonunun $(2,1)$ noktasındaki kısmi türevlerini tanımla bulunuz.

Çözüm.
$f(2,1) = 12 + 4 + 1 = 17$'dir.
***x*'e göre ($e_1 = (1,0)$).** $(2,1) + h(1,0) = (2+h,1)$ ve

$$f(2+h,1) = 3(2+h)^2 + (2+h)^2 + 1 = 4(2+h)^2 + 1 = 17 + 16h + 4h^2$$

olduğundan

$$f_x(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{16h + 4h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(16 + 4h) = 16.$$

y'ye göre ($e_2 = (0,1)$). $(2,1) + h(0,1) = (2, 1+h)$ ve

$$f(2, 1+h) = 12(1+h) + 4 + (1+h)^3 = 17 + 15h + 3h^2 + h^3$$

olduğundan

$$f_y(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{15h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(15 + 3h + h^2) = 15.$$

Kuralla denetim. $f_x(x,y) = 6xy + 2x$ ve $f_y(x,y) = 3x^2 + 3y^2$ olduğundan $f_x(2,1) = 12 + 4 = 16$ ve $f_y(2,1) = 12 + 3 = 15$ bulunur; iki yol aynı sonucu verir. ■

Örnek 12.9 (Parçalı Tanımlı Rasyonel Fonksiyon). Aşağıdaki fonksiyonun $(0,0)$ noktasındaki kısmi türevlerini bulunuz:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Çözüm.
Orijinde fonksiyon ayrı bir değerle tanımlandığından tanıma dönmek zorundayız. $f(0,0) = 0$'dır.
x'e göre. $h \neq 0$ için $(h,0) \neq (0,0)$ ve $f(h,0) = \dfrac{h^2 \cdot 0}{h^2} = 0$ olduğundan

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

y'ye göre. $h \neq 0$ için $f(0,h) = \dfrac{0 \cdot h}{h^2} = 0$ olduğundan aynı biçimde $f_y(0,0) = 0$'dır.
Orijin dışında. $(x,y) \neq (0,0)$ iken payda sıfırdan farklıdır ve bölüm kuralı

$$f_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2 y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2 y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

verir. Bu formüllerde $(0,0)$ yazılırsa $\dfrac{0}{0}$ çıkar; orijindeki değerler formülden okunamaz, yalnız tanımdan bulunur. ■

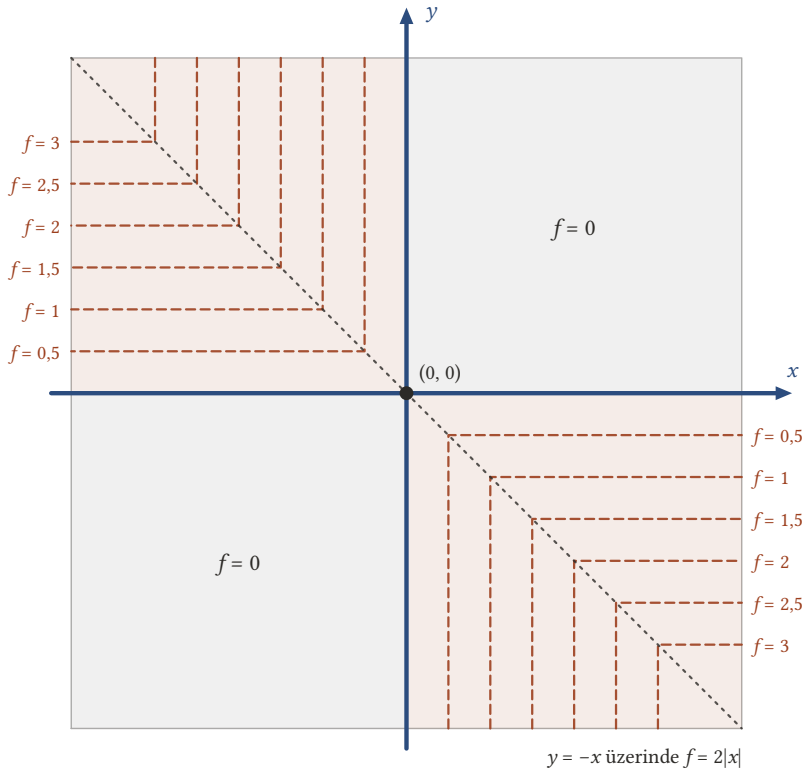
Örnek 12.10 (Mutlak Değerli Bir Fonksiyon). $f(x,y) = |\,x\,| + |\,y\,| - |\,x+y\,|$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
$f(0,0) = 0$'dır. Mutlak değer fonksiyonu 0'da türevlenebilir olmadığından (bkz. Analiz 2) terimleri ayrı ayrı türetmeye çalışmak işe yaramaz: $|\,x\,|$ teriminin orijinde x'e göre kısmi türevi yoktur ve toplam kuralı uygulanamaz. Tanıma dönelim.
x'e göre. $f(h,0) = |\,h\,| + 0 - |\,h\,| = 0$ olduğundan fark oranı özdeş olarak 0'dır ve $f_x(0,0) = 0$'dır.
y'ye göre. $f(0,h) = 0 + |\,h\,| - |\,h\,| = 0$ olduğundan $f_y(0,0) = 0$'dır.
İki kısmi türev de vardır ve sıfırdır, oysa f özdeş olarak sıfır değildir. x ile y aynı işaretliyse $|\,x+y\,| = |\,x\,| + |\,y\,|$ ve $f(x,y) = 0$ olur. x ile y zıt işaretliyse, örneğin $x > 0 > y$ ise, $x + y \geq 0$ durumunda $f(x,y) = -2y$, $x + y < 0$ durumunda $f(x,y) = 2x$ olur; yani

$$f(x,y) = 2\min\{|\,x\,|, |\,y\,|\} \qquad (xy < 0).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneğin $y = -x$ doğrusu üzerinde $f(t, -t) = 2 \mid t \mid$'dir ve fonksiyonun orada bir kırığı vardır. Kısmi türevler bu kırığı görmez, çünkü yalnız iki koordinat ekseni üzerindeki değerlere bakarlar ve eksenlerde f sıfırdır.



Şekil 12.1: $f(x, y) = |x| + |y| - |x + y|$ fonksiyonu birinci ve üçüncü bölgede (gri) sıfırdır; ikinci ve dördüncü bölgede $f = 2 \cdot \min\{|x|, |y|\} > 0$ olur ve kesikli çizgiler $f = 0{,}5;\ 1;\ \ldots;\ 3$ seviye eğrileridir. Kısmi türevlerin baktığı kalın eksenler üzerinde $f = 0$'dır; $y = -x$ doğrusu boyunca ise $f = 2|x|$ bir kırık yapar.

■

Örnek 12.11 (Kök ve Mutlak Değer). $f(x, y) = \sqrt{\mid xy \mid}$ fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasındaki kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
$f(0, 0) = 0$'dır. $h \neq 0$ için $f(h, 0) = \sqrt{\mid h \cdot 0 \mid} = 0$ ve $f(0, h) = 0$ olduğundan iki fark oranı da özdeş olarak 0'dır. Dolayısıyla $f_x(0, 0) = 0$ ve $f_y(0, 0) = 0$'dır.
Burada da kısmi türevler fonksiyonun yalnız eksenler üzerindeki değerlerini görür. Köşegen üzerinde ise $f(t, t) = \sqrt{t^2} = \mid t \mid$'dir; fonksiyonun grafiği orijinden geçen bu doğru boyunca sivri bir kırık yapar. Kısmi türevlerin var olup sıfır çıkması, fonksiyonun orijin çevresinde "düzgün" olduğunu söylemez. ■

12.4 Geometrik Yorum

İki değişkenli bir fonksiyonun kısmi türevleri, grafiği üzerinde çizilen iki eğrinin eğimleridir. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun grafiği $\mathbb{R}^3$'te $z = f(x, y)$ denklemiyle verilen S yüzeyidir (Tanım 8.5).

Önerme 12.2 (Kısmi Türevlerin Geometrik Anlamı). *$f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D^\circ$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ ve $P = (x_0, y_0, z_0)$ olsun; P, f'nin grafiği olan S yüzeyinin bir noktasıdır.*

1. *$f_x(x_0, y_0)$ varsa $y = y_0$ düşey düzlemi S'yi P yakınında, bu düzlemde $x \mapsto f(x, y_0)$ fonksiyonunun grafiği olan bir C_1 eğrisi boyunca keser; C_1'in P'deki teğetinin eğimi $f_x(x_0, y_0)$'dır. Bu teğet doğru*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T_1: \quad z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0), \quad y = y_0$$

olur.

2. $f_y(x_0, y_0)$ *varsa* $x = x_0$ *düşey düzlemi* S*'yi, bu düzlemde* $y \mapsto f(x_0, y)$ *fonksiyonunun grafiği olan bir* C_2 *eğrisi boyunca keser;* C_2*'nin* P*'deki teğetinin eğimi* $f_y(x_0, y_0)$*'dır ve teğet doğru*

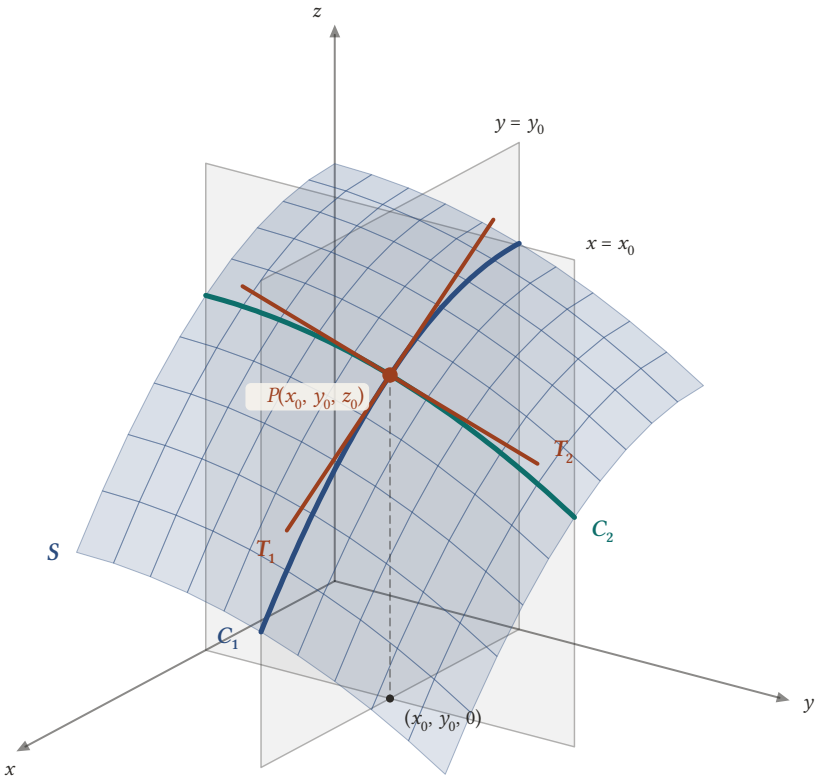
$$T_2: \quad z - z_0 = f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0), \quad x = x_0$$

olur.

İspat.
$B\,(\,(x_0, y_0), r\,) \subseteq D$ *olsun ve* $|\,x - x_0\,| < r$ *için* $g(x) = f(x, y_0)$ *diyelim.*
Kesit eğrisi. $y = y_0$ *düzleminin noktaları* (x, y_0, z) *biçimindedir. Böyle bir nokta* S *üzerindeyse* $z = f(x, y_0) = g(x)$ *olur. Demek ki kesişimin* P *yakınındaki parçası*

$$C_1 = \{(x, y_0, g(x)) : |\,x - x_0\,| < r\}$$

kümesidir. $y = y_0$ *düzleminde* (x, z) *koordinatları kullanılırsa* C_1*,* g*'nin grafiğidir.*
Teğet. *Önerme 12.1 gereği* g*,* x_0*'da türevlenebilirdir ve* $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$*'dır.* g*'nin grafiğinin* $(x_0, g(x_0)) = (x_0, z_0)$ *noktasındaki teğet doğrusu* $z - z_0 = g'(x_0)(x - x_0)$ *doğrusudur (bkz. Analiz 2). Bu doğru* $y = y_0$ *düzleminde yattığından uzaydaki denklemi,* $y = y_0$ *koşulunun eklenmesiyle 1'deki* T_1 *olur.*
İkinci kesit. $G(y) = f(x_0, y)$ *alınarak aynı akıl yürütme* $x = x_0$ *düzlemine uygulanır:* C_2*,* G*'nin grafiğidir,* $G'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$*'dır ve teğet doğru* T_2*'dir.*



Şekil 12.2: $z = f(x, y)$ *grafiği olan* S *yüzeyi (burada* $f = 3 - 0{,}2x^2 - 0{,}1y^2$*,* $x_0 = y_0 = 1{,}5$*).* $y = y_0$ *düzlemi* S*'yi* C_1 *eğrisi,* $x = x_0$ *düzlemi* C_2 *eğrisi boyunca keser.* T_1 *ve* T_2 *teğetlerinin eğimleri* $f_x(x_0, y_0)$ *ve* $f_y(x_0, y_0)$*'dır.*

S yüzeyinin P noktasındaki iki teğeti, sırasıyla $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$ *ve* $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$ *doğrultu vektörleriyle P'den geçen doğrulardır.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Kısmi türevler değişim hızı olarak da okunur. $z = f(x,y)$ yazılırsa $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, y sabitken z'nin x'e göre değişim hızıdır; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ de x sabitken z'nin y'ye göre değişim hızıdır. Örneğin Örnek 12.3 fonksiyonunda $f_x(1,1) = -2$ olması, $(1,1)$ noktasından x ekseni doğrultusunda küçük bir Δx kadar ilerlendiğinde f'nin yaklaşık $2\,\Delta x$ kadar azaldığını söyler. T_1 ve T_2 doğrularının belirlediği düzlem, Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel bölümünde teğet düzlem adıyla karşımıza çıkacak.

Örnek 12.12 (Paraboloidin Kesitlerine Teğetler). $z = f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$ paraboloidinin $y = 1$ ve $x = 1$ düzlemleriyle kesit eğrilerini ve bu eğrilerin $P = (1,1,1)$ noktasındaki teğet doğrularını bulunuz.

Çözüm.
$f(1,1) = 4 - 1 - 2 = 1$ olduğundan P paraboloidin üzerindedir. Kısmi türevleri Örnek 12.3 içinde bulmuştuk: $f_x(1,1) = -2$, $f_y(1,1) = -4$.

$y = 1$ kesiti. $y = 1$ yazılırsa $z = 4 - x^2 - 2 = 2 - x^2$ olur; kesit eğrisi

$$C_1 : \quad z = 2 - x^2, \quad y = 1$$

parabolüdür. Parametrik olarak C_1, $t \mapsto (t, 1, 2 - t^2)$ eğrisidir. P'deki teğetin eğimi $f_x(1,1) = -2$'dir; gerçekten $(2 - x^2)' = -2x$ ifadesi $x = 1$'de -2 olur. Önerme 12.2 gereği

$$T_1 : \quad z - 1 = -2(x - 1), \quad y = 1,$$

yani $z = -2x + 3$, $y = 1$ doğrusudur. Parametrik olarak T_1, $t \mapsto (1 + t, 1, 1 - 2t)$ doğrusudur.

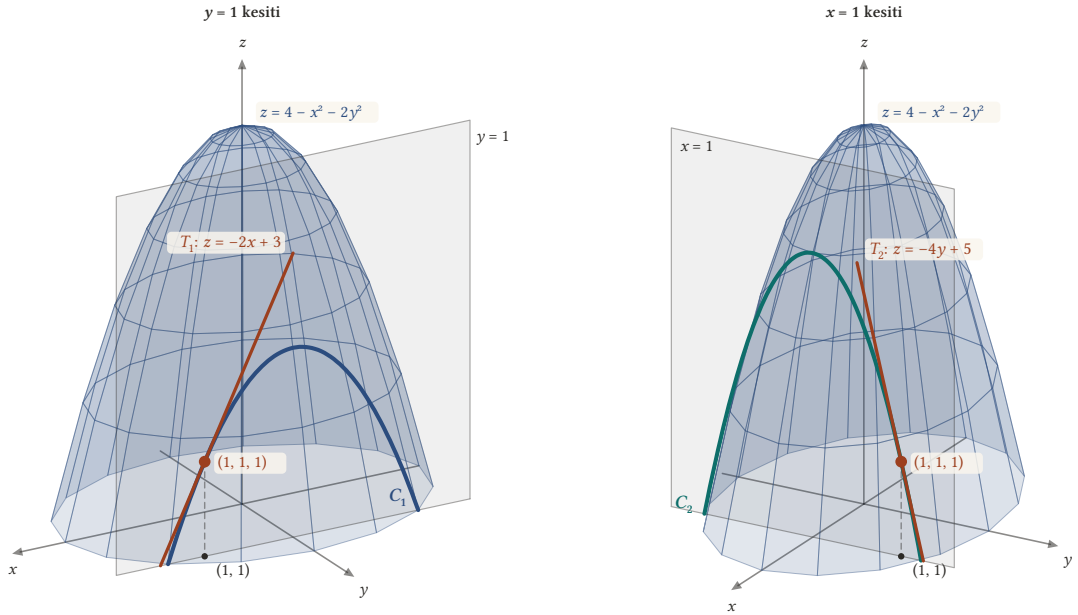
$x = 1$ kesiti. $x = 1$ yazılırsa $z = 4 - 1 - 2y^2 = 3 - 2y^2$ olur; kesit eğrisi

$$C_2 : \quad z = 3 - 2y^2, \quad x = 1$$

parabolüdür. P'deki teğetin eğimi $f_y(1,1) = -4$'tür ve

$$T_2 : \quad z - 1 = -4(y - 1), \quad x = 1,$$

yani $z = -4y + 5$, $x = 1$ doğrusudur.



Şekil 12.3: $z = 4 - x^2 - 2y^2$ paraboloidinin $z \geq 0$ kısmı. Solda $y = 1$ düzlemi yüzeyi C_1: $z = 2 - x^2$ parabolü boyunca keser; teğeti T_1'in eğimi $f_x(1,1) = -2$'dir. Sağda $x = 1$ düzlemi C_2: $z = 3 - 2y^2$ parabolünü verir; teğeti T_2'nin eğimi $f_y(1,1) = -4$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

T_2, T_1'den daha diktir: P'den y doğrultusunda ilerlerken yükseklik, x doğrultusunda ilerlerken olduğunun iki katı hızla azalır. ■

12.5 Kısmi Türev ve Süreklilik

Tek değişkenli fonksiyonlarda bir noktada türevlenebilen fonksiyon o noktada süreklidir (bkz. Analiz 2). Kısmi türev bu güvenceyi yalnız eksenlere paralel doğrular üzerinde verir.

Sonuç 12.1 (Kısmi Türev ve Eksen Doğrultusunda Süreklilik). *$f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D^\circ$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ var olsun. O zaman*

$$\lim_{t\to 0} f(a + te_j) = f(a)$$

olur.

> ***İspat.***
> *$B(a,r) \subseteq D$ olsun. Önerme 12.1 gereği $\varphi_j(s) = f(a_1, \ldots, s, \ldots, a_n)$ fonksiyonu a_j noktasında türevlenebilirdir; tek değişkenli türevlenebilir fonksiyon sürekli olduğundan φ_j, a_j'de süreklidir. $\varphi_j(a_j + t) = f(a + te_j)$ olduğundan bu süreklilik, istenen $\lim_{t\to 0} f(a + te_j) = f(a)$ eşitliğinin ta kendisidir.* ■

Yani x_j'ye göre kısmi türev, f'yi yalnız a'dan geçen ve j-inci eksene paralel olan doğru üzerinde sürekli kılar. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ eşitliği ise a'ya her yoldan yaklaşıldığında aynı davranışı ister (Tanım 8.7, Tanım 10.1). Bütün kısmi türevlerin var olması bile yalnız n doğruyu denetler; aşağıdaki örnek, bunun sürekliliğe yetmediğini gösterir.

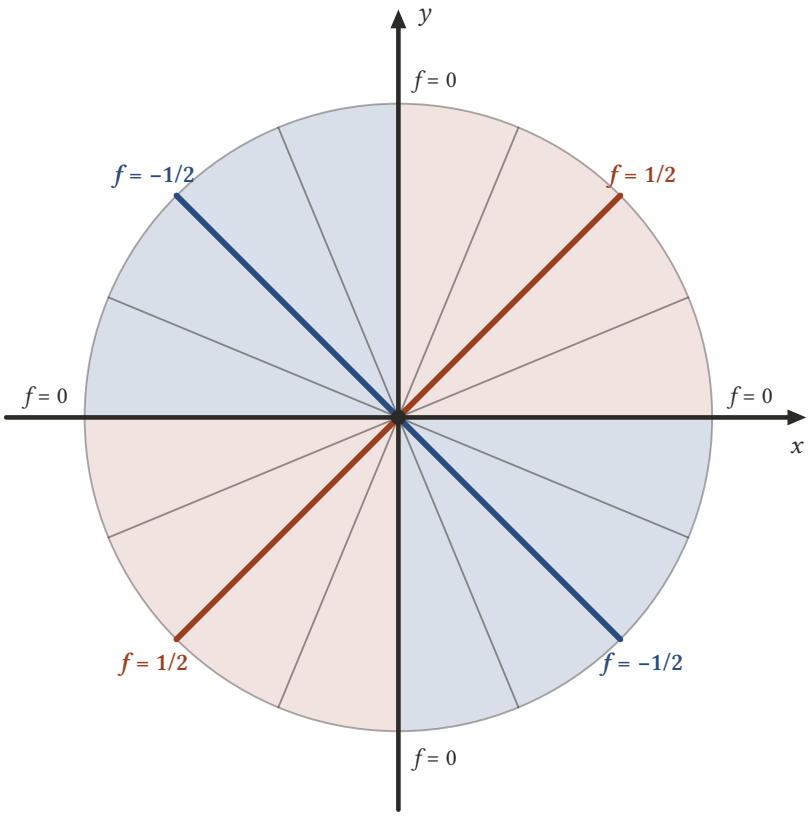
Örnek 12.13 (Kısmi Türevleri Olan Süreksiz Fonksiyon). Aşağıdaki fonksiyonun $(0,0)$ noktasında iki kısmi türevinin de var olduğunu, ama fonksiyonun bu noktada sürekli olmadığını gösteriniz:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

> **Çözüm.**
> **Kısmi türevler.** $h \neq 0$ için $f(h,0) = \dfrac{h\cdot 0}{h^2} = 0$ ve $f(0,h) = 0$'dır. Dolayısıyla
>
> $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
> $$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
>
> olur; f, orijinde kısmi türevlenebilirdir.
> **Süreksizlik.** Orijine iki farklı yoldan yaklaşalım. x ekseni üzerinde, $t \neq 0$ için $f(t,0) = 0$ olduğundan bu yol boyunca limit 0'dır. $y = x$ doğrusu üzerinde, $t \neq 0$ için
>
> $$f(t,t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$$
>
> olduğundan bu yol boyunca limit $\dfrac{1}{2}$'dir. İki yol boyunca limitler farklı olduğundan Sonuç 9.1 gereği $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti yoktur. Limit olmadığından f, orijinde sürekli değildir (Tanım 10.1).
> **Neden?** Kutupsal koordinatlarla $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ yazılırsa
>
> $$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. f, orijinden çıkan her ışın üzerinde sabittir ve orijinin her komşuluğunda $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ aralığındaki bütün değerleri alır. Kısmi türevler yalnız $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ışınlarını, yani eksenleri görür; f ise tam o ışınlarda sıfırdır.



orijinde $f(0, 0) = 0$
kalın eksenler: kısmi türevlerin gördüğü doğrular

Şekil 12.4: $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ orijinden çıkan her ışın üzerinde sabittir ve değeri $\sin 2\theta/2$'dir; ince ışınlar 22,5° aralıklıdır. Turuncu bölgelerde $f > 0$, mavi bölgelerde $f < 0$'dır. $y = x$ üzerinde $f = 1/2$, $y = -x$ üzerinde $f = -1/2$, eksenlerde ise $f = 0 = f(0, 0)$ olur.

■

Tek değişkende türevin sürekliliği gerektirmesinin nedeni, x_0'a yaklaşmanın yalnız iki yolu (sağdan ve soldan) olması ve fark oranının ikisini de denetlemesidir. $\mathbb{R}^2$'de ise orijine sonsuz çok doğrultudan ve eğriden yaklaşılabilir; kısmi türevler bunlardan yalnız dördünü denetler. Ters yön de doğru değildir: sürekli bir fonksiyonun kısmi türevleri olmayabilir.

Örnek 12.14 (Sürekli Ama Kısmi Türevi Olmayan Fonksiyon). $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$'de sürekli olduğunu, ama $(0, 0)$ noktasında kısmi türevlerinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Süreklilik. $f(x, y) = \| (x, y) \|$, Öklid normudur ve norm süreklidir (Sonuç 10.2).
Kısmi türevler. $h \neq 0$ için $f(h, 0) - f(0, 0) = \sqrt{h^2} = |\, h \,|$ olduğundan

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|\, h \,|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0, \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Sağdan limit 1, soldan limit -1 olduğundan $h \to 0$ limiti yoktur; $f_x(0,0)$ yoktur. $f(0,h) = \mid h \mid$ olduğundan aynı nedenle $f_y(0,0)$ da yoktur.
Grafik, tepesi orijinde olan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisidir. $y = 0$ düzlemiyle kesiti $z = \mid x \mid$ eğrisidir ve orijinde köşe yapar; köşede teğet olmadığından eğim de yoktur. ■

Demek ki bir noktada kısmi türevlerin var olması ile sürekliliğin arasında iki yönde de gerektirme yoktur. Tek değişkenli türevin çok değişkenli asıl karşılığı tam türevdir: Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel bölümünde tam türevi olan fonksiyonun sürekli olduğunu ve kısmi türevleri bir komşulukta var ve sürekli olan fonksiyonun tam türevinin bulunduğunu göreceğiz.

12.6 Kısmi Türev Kuralları

Önerme 12.1 sayesinde tek değişkenli türev kuralları kısmi türevlere olduğu gibi geçer.

Teorem 12.1 (Kısmi Türevin Cebirsel Kuralları). *$f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D^\circ$ ve $j \in \{1, \ldots, n\}$ olsun. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ve $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(a)$ kısmi türevleri var olsun. O zaman:*

1. ***Toplam ve fark.*** *$f \pm g$ fonksiyonunun x_j'ye göre kısmi türevi a'da vardır ve*
$$\frac{\partial (f \pm g)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \pm \frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$
2. ***Sabitle çarpım.*** *Her $c \in \mathbb{R}$ için*
$$\frac{\partial (cf)}{\partial x_j}(a) = c\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$
3. ***Çarpım.*** *fg fonksiyonunun x_j'ye göre kısmi türevi a'da vardır ve*
$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, g(a) + f(a)\,\frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$
4. ***Bölüm.*** *D'nin her noktasında $g \neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonunun x_j'ye göre kısmi türevi a'da vardır ve*
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, g(a) - f(a)\,\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)}{g(a)^2}.$$

İspat.
$B(a,r) \subseteq D$ olsun ve $t \in (a_j - r, a_j + r)$ için
$$\varphi(t) = f(a_1, \ldots, t, \ldots, a_n),$$
$$\psi(t) = g(a_1, \ldots, t, \ldots, a_n)$$
diyelim (t, j-inci bileşendedir). Önerme 12.1 gereği φ ve ψ, a_j'de türevlenebilirdir ve
$$\varphi'(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),$$
$$\psi'(a_j) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$$
olur. $f \pm g$, cf, fg ve f/g fonksiyonlarının aynı doğru üzerindeki kısıtlanışları sırasıyla $\varphi \pm \psi$, $c\varphi$, $\varphi\psi$ ve φ/ψ fonksiyonlarıdır; bölüm durumunda ψ hiç sıfır olmaz, çünkü g hiçbir yerde sıfır değildir. Tek değişkenli türevin aritmetiği (bkz. Analiz 2) bu dört fonksiyonun a_j'de türevlenebilir olduğunu ve örneğin
$$(\varphi\psi)'(a_j) = \varphi'(a_j)\,\psi(a_j) + \varphi(a_j)\,\psi'(a_j)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğunu söyler. $f \pm g$, cf, fg ve f/g fonksiyonları D üzerinde tanımlıdır ve a onların da iç noktasıdır; Önerme 12.1 bu kez ters yönde uygulanırsa kısmi türevlerin var olduğu ve tek değişkenli türevlere eşit olduğu çıkar. $\varphi(a_j) = f(a)$ ve $\psi(a_j) = g(a)$ yazılınca dört formül elde edilir. ■

Bölüm kuralındaki "D'nin her noktasında $g \neq 0$" varsayımı, f/g'nin a'nın bir komşuluğunda tanımlı olmasını güvenceye alır. Yalnız $g(a) \neq 0$ bilmek bunun için yetmez: kısmi türevleri olan bir fonksiyon a'da sürekli olmak zorunda olmadığından (Örnek 12.13) g, a'ya çok yakın noktalarda sıfır olabilir. Kısmi türev yalnız noktanın bir komşuluğundaki değerlere bağlı olduğundan, kuralı D yerine a'yı içeren ve g'nin sıfırlanmadığı açık bir kümede uygulamak da yeter.

Örnek 12.15 (Bölüm Kuralıyla Kısmi Türev Fonksiyonları). Örnek 12.13 içindeki f fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türev fonksiyonlarını bütün $\mathbb{R}^2$ üzerinde yazınız.

Çözüm.
Orijin dışında. $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ açıktır, çünkü tek noktalı küme kapalıdır (Sonuç 3.2). U üzerinde $f = \dfrac{p}{q}$, $p(x,y) = xy$, $q(x,y) = x^2 + y^2 \neq 0$'dır. $p_x = y$, $q_x = 2x$ olduğundan Teorem 12.1 gereği

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

olur. $p_y = x$, $q_y = 2y$ ile aynı biçimde

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Orijinde. Örnek 12.13 içinde tanımla $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ bulduk.
Sonuç.

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ve f_y de aynı biçimde, üst satırda $\dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ ile yazılır. Kısmi türev fonksiyonlarının kendileri orijinde çok kötü davranır: $y \neq 0$ için $f_x(0,y) = \dfrac{y^3}{y^4} = \dfrac{1}{y}$'dir ve $y \to 0$ iken sınırsız büyür. ■

Tek değişkenli ortalama değer teoremi ve analizin temel teoremleri de bir değişkene göre kısmi türevler için hemen yazılabilir. Aşağıda iki değişkenli fonksiyonlar ve x değişkeni için ifade ediyoruz; öbür değişkenler ve $\mathbb{R}^n$ için ifade ve ispat aynıdır.

Önerme 12.3 (Kısmi Türev için Ortalama Değer Teoremi). *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık, $a < b$ ve y_0 reel sayılar ve $\{(x, y_0) : a \leq x \leq b\} \subseteq U$ olsun. $f : U \to \mathbb{R}$ için $x \mapsto f(x, y_0)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve her $x \in (a,b)$ için $f_x(x, y_0)$ var olsun. O zaman öyle bir $c \in (a,b)$ vardır ki*

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b-a)\, f_x(c, y_0)$$

olur.

İspat.
$g(x) = f(x, y_0)$, $x \in [a,b]$ diyelim. Varsayım gereği g, $[a,b]$ üzerinde süreklidir. $x \in (a,b)$ ise (x, y_0), açık U kümesinin bir iç noktasıdır ve Önerme 12.1 gereği g, x'te türevlenebilirdir ve $g'(x) = f_x(x, y_0)$'dır. Lagrange ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) $g(b) - g(a) = (b-a)\, g'(c)$ olacak bir $c \in (a,b)$ verir; bu, istenen eşitliktir. ■

Buradaki c noktası a ve b'ye olduğu kadar y_0'a da bağlıdır. Sonuç 12.1 gereği $x \mapsto f(x, y_0)$ fonksiyonu (a,b)'nin her noktasında zaten süreklidir; süreklilik varsayımı yalnız a ve b uç noktaları için bir şey söyler.

Önerme 12.4 (Kısmi Türev ve İntegral). *$a < b$ reel sayılar olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. *$J \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık, $f : [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ ve her $y \in J$ için $t \mapsto f(t,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun. $(x,y) \in [a,b] \times J$ için*

$$F(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,dt$$

ile tanımlanan F fonksiyonunun her $(x,y) \in (a,b) \times J$ noktasında x'e göre kısmi türevi vardır ve $F_x(x,y) = f(x,y)$ olur.
2. *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık, $y_0 \in \mathbb{R}$ ve $\{(x,y_0) : a \le x \le b\} \subseteq U$ olsun. $f : U \to \mathbb{R}$ için her $x \in [a,b]$ noktasında $f_x(x,y_0)$ var ve $x \mapsto f_x(x,y_0)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O zaman*

$$\int_a^b f_x(x,y_0)\,dx = f(b,y_0) - f(a,y_0)$$

olur.

İspat.
1. *$(a,b) \times J$ kümesi açıktır ve F'nin tanım kümesinin içindedir; her noktası bir iç noktadır. $y \in J$ sabit olsun ve $\varphi(x) = F(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,dt$ diyelim. φ, sürekli $t \mapsto f(t,y)$ fonksiyonunun integral fonksiyonudur; ikinci temel teorem (bkz. Analiz 2) gereği her $x \in (a,b)$ için $\varphi'(x) = f(x,y)$'dir. Önerme 12.1 gereği $F_x(x,y) = \varphi'(x) = f(x,y)$ olur.*
2. *$g(x) = f(x,y_0)$ diyelim. Her $x \in [a,b]$ için (x,y_0), açık U'nun bir iç noktası olduğundan g, x'in bir komşuluğunda tanımlıdır ve Önerme 12.1 gereği x'te türevlenebilirdir; $g'(x) = f_x(x,y_0)$'dır. Demek ki g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir g' fonksiyonunun bir ilkelidir ve Newton–Leibniz formülü (bkz. Analiz 2)*

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

verir. Bu, istenen eşitliktir. ■

Örnek 12.16 (İntegralle Tanımlı Fonksiyonun Kısmi Türevi). $b > 0$ olmak üzere $(x,y) \in [0,b] \times \mathbb{R}$ için

$$F(x,y) = \int_0^x \frac{dt}{1+y^2t^2}$$

olsun. $0 < x < b$ için $F_x(x,y)$'yi bulunuz ve sonucu F'yi açıkça hesaplayarak denetleyiniz.

Çözüm.
Önermeyle. $f(t,y) = \dfrac{1}{1+y^2t^2}$ fonksiyonunun paydası 1'den küçük olmadığından her y için $t \mapsto f(t,y)$ süreklidir. $J = \mathbb{R}$ açık aralığıyla Önerme 12.4 gereği

$$F_x(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^2}$$

olur.
Denetim. $y \neq 0$ ise $u = yt$ değişken değiştirmesiyle ($du = y\,dt$)

$$F(x,y) = \frac{1}{y}\int_0^{xy} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\arctan(xy)}{y}$$

bulunur. y sabitken x'e göre türev alınırsa $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{y}{1+x^2y^2} = \dfrac{1}{1+x^2y^2}$ çıkar. $y = 0$ ise $F(x,0) = \int_0^x dt = x$ ve $F_x(x,0) = 1$'dir; bu da formülün $y = 0$ için verdiği değerdir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

12.7 Gradyan

Bir noktadaki n kısmi türevi tek bir vektörde toplamak, ileride hem yönlü türevi hem de ekstremum koşullarını kısaca yazmamızı sağlayacak.

Tanım 12.3 (Gradyan). $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D^\circ$ ve f, a noktasında kısmi türevlenebilir olsun.

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

vektörüne f'nin a noktasındaki **gradyan vektörü** ya da kısaca **gradyanı** denir; $(\text{grad } f)(a)$ ile de gösterilir. f, açık bir U kümesi üzerinde kısmi türevlenebilirse $x \mapsto \nabla f(x)$ fonksiyonu $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ ile gösterilir.

Yani gradyan, f'nin a'daki n eksen doğrultusundaki değişim hızlarını bir araya toplayan, $\mathbb{R}^n$'nin bir elemanıdır. İki değişkende $\nabla f = (f_x, f_y)$, üç değişkende $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ olur. ∇ simgesi "nabla" diye okunur. Gradyanı $1 \times n$ tipinde bir satır matrisi olarak düşünmek de ileride işe yarar. Gradyanın asıl anlamı sonraki bölümlerde ortaya çıkacak: türevlenebilir bir fonksiyonun yönlü türevleri gradyanla iç çarpım olarak hesaplanır ve gradyan fonksiyonun en hızlı arttığı doğrultuyu gösterir (Yönlü Türev ve Ortalama Değer Teoremi); bir iç noktadaki yerel ekstremumda gradyan sıfır vektörüdür (Yerel Ekstremumlar).

Örnek 12.17 (Gradyan ve Bir Noktadaki Değeri). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$ fonksiyonunun (x, y) noktasındaki ve $(-1, 1)$ noktasındaki gradyanını bulunuz.

> **Çözüm.**
> $f_x(x, y) = 3y - 2x$ ve $f_y(x, y) = 3x - 2y$ olduğundan
>
> $$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3y - 2x, 3x - 2y)$$
>
> olur. $(-1, 1)$ noktasında $3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 5$ ve $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -5$ bulunur:
>
> $$\nabla f(-1, 1) = (5, -5).$$
>
> ■

Örnek 12.18 (Üstel ve Trigonometrik Terimli Fonksiyonun Gradyanı). $f(x, y) = e^{2x} + x \sin(xy)$ fonksiyonunun gradyanını ve $\nabla f(1, \pi)$ vektörünü bulunuz.

> **Çözüm.**
> Kısmi türevleri Örnek 12.5 içinde bulmuştuk. Dolayısıyla
>
> $$\nabla f(x, y) = \left(\, 2e^{2x} + \sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy) \, \right)$$
>
> olur. $(1, \pi)$ noktasında $\sin \pi = 0$ ve $\cos \pi = -1$'dir:
>
> $$f_x(1, \pi) = 2e^2 + 0 + \pi \cdot (-1) = 2e^2 - \pi,$$
> $$f_y(1, \pi) = 1 \cdot (-1) = -1.$$
>
> Sonuç olarak $\nabla f(1, \pi) = (2e^2 - \pi, -1)$'dir. ■

Örnek 12.19 (Üç Değişkenli Fonksiyonun Gradyanı). $f(x, y, z) = x^3 y - xy^3 - yz^3$ fonksiyonunun $(1, 1, 1)$ noktasındaki gradyanını bulunuz.

> **Çözüm.**
> Her seferinde öbür iki değişkeni sabit tutarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_x(x,y,z) = 3x^2y - y^3,$$
$$f_y(x,y,z) = x^3 - 3xy^2 - z^3,$$
$$f_z(x,y,z) = -3yz^2$$

bulunur. $(1,1,1)$ noktasında $f_x = 3-1 = 2$, $f_y = 1-3-1 = -3$ ve $f_z = -3$ olur. Dolayısıyla

$$\nabla f(1,1,1) = (2,-3,-3).$$

■

12.8 Vektör Değerli Fonksiyonların Kısmi Türevleri

Değerleri $\mathbb{R}^m$'de olan bir fonksiyonun kısmi türevi aynı fark oranıyla tanımlanır; tek fark, payın artık bir vektör olmasıdır.

Tanım 12.4 (Vektör Değerli Fonksiyonun Kısmi Türevi). $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : D \to \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, ..., f_m)$ ve $a \in D^\circ$ olsun. $j \in \{1, ..., n\}$ için

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a + he_j) - F(a)}{h}$$

limiti $\mathbb{R}^m$'de varsa bu vektöre F'nin a noktasında **x_j'ye göre kısmi türevi** denir; $F_{x_j}(a)$ ya da $D_jF(a)$ ile de gösterilir. Her $j = 1, ..., n$ için $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(a)$ varsa F'ye a'da **kısmi türevlenebilir** denir.

Yani pay, $\mathbb{R}^m$'de iki vektörün farkıdır ve $\dfrac{1}{h}$ reel sayısıyla çarpılır; sonuç, 0'ın delinmiş bir komşuluğunda tanımlı ve değerleri $\mathbb{R}^m$'de olan bir fonksiyondur. Limit, Tanım 8.7 anlamında, tanım kümesi $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olan bir fonksiyonun limitidir. Açık yazılışla

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a_1, ..., a_j + h, ..., a_n) - F(a)}{h}$$

olur. $m = 1$ iken tanım, Tanım 12.1 tanımının kendisidir. $n = 1$ iken F, bir aralıkta tanımlı ve değerleri $\mathbb{R}^m$'de olan bir eğridir ve tek kısmi türev, eğrinin hız vektörü $F'(t)$'dir.

Teorem 12.2 (Kısmi Türevin Bileşenlerle Hesabı). *$F : D \to \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, ..., f_m)$, $a \in D^\circ$ ve $j \in \{1, ..., n\}$ olsun. $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(a)$ kısmi türevinin var olması için gerek ve yeter koşul, her $i = 1, ..., m$ için $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ kısmi türevinin var olmasıdır. Bu durumda*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right)$$

olur.

İspat.
$B(a,r) \subseteq D$ olsun ve $0 < |\, h \,| < r$ için

$$q(h) = \frac{F(a + he_j) - F(a)}{h}$$

diyelim. Vektörlerin farkı ve bir vektörün bir sayıyla çarpımı bileşen bileşen yapıldığından (Tanım 1.3) $q(h)$'nin i-inci bileşeni

$$q_i(h) = \frac{f_i(a + he_j) - f_i(a)}{h}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $q, (-r, r) \setminus \{0\}$ *üzerinde tanımlı, değerleri* $\mathbb{R}^m$*'de olan bir fonksiyondur ve* 0 *bu kümenin bir yığılma noktasıdır. Bileşenlerle limit teoremi (Teorem 8.6) gereği* $\lim_{h\to 0} q(h)$ *limitinin var olması için gerek ve yeter koşul her* $\lim_{h\to 0} q_i(h)$ *limitinin var olmasıdır ve bu durumda*

$$\lim_{h\to 0} q(h) = \Big(\lim_{h\to 0} q_1(h), \ldots, \lim_{h\to 0} q_m(h) \Big)$$

olur. Tanım gereği $\lim_{h\to 0} q(h) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(a)$ *ve* $\lim_{h\to 0} q_i(h) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$*'dır.* ■

Yani vektör değerli bir fonksiyonun kısmi türevi bileşen bileşen alınır; F'nin a'da kısmi türevlenebilir olması, her f_i bileşeninin a'da kısmi türevlenebilir olması demektir. Bir noktadaki bütün kısmi türevler n tane vektördür: $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(a) \in \mathbb{R}^m$. Bu vektörler sütun olarak yan yana dizilince i-inci satırı $\nabla f_i(a)$ olan $m \times n$ tipinde bir matris oluşur; bu matris Jacobi Matrisi ve Zincir Kuralı bölümünün konusudur.

Örnek 12.20 (İki Bileşenli Fonksiyonun Kısmi Türevleri). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \big(\, 3xy - x^3 - y^3,\, e^{2x} + x\sin(xy) \, \big)$$

fonksiyonunun kısmi türevlerini ve $(1, 0)$ noktasındaki değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Bileşenler $f_1(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ ve $f_2(x, y) = e^{2x} + x\sin(xy)$'dir; kısmi türevlerini Örnek 12.1 ve Örnek 12.5 içinde bulmuştuk. Teorem 12.2 gereği

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = \big(\, 3y - 3x^2,\, 2e^{2x} + \sin(xy) + xy\cos(xy) \, \big),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = \big(\, 3x - 3y^2,\, x^2\cos(xy) \, \big)$$

olur. $(1, 0)$ noktasında $\sin 0 = 0$ ve $\cos 0 = 1$ olduğundan

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) = \big(\, 0 - 3,\, 2e^2 + 0 + 0 \, \big) = (-3, 2e^2),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = \big(\, 3 - 0,\, 1 \cdot 1 \, \big) = (3, 1)$$

bulunur. ■

Örnek 12.21 (Dört Değişkenli ve Üç Bileşenli Fonksiyon). $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z, w) = \big(\, x^2 y,\, zy\sin w,\, xzw \, \big)$$

fonksiyonunun bütün birinci kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
Her bileşeni, seçilen değişken dışındaki üç değişkeni sabit tutarak türetiriz. Bir bileşen seçilen değişkeni içermiyorsa o bileşenin kısmi türevi 0'dır.

$$F_x = (2xy,\, 0,\, zw),$$
$$F_y = (x^2,\, z\sin w,\, 0),$$
$$F_z = (0,\, y\sin w,\, xw),$$
$$F_w = (0,\, zy\cos w,\, xz).$$

Örneğin F_w'nin ikinci bileşeninde zy sabit bir katsayıdır ve $\sin w$'nin türevi $\cos w$'dir; üçüncü bileşende xz sabit katsayı, w'nin türevi 1'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 12.22 (Bir Bileşeni Engel Olan Fonksiyon). $F(x,y) = (\, x+y, \mid x \mid \,)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında hangi kısmi türevlerinin var olduğunu belirleyiniz.

> **Çözüm.**
> Teorem 12.2 gereği bileşenlere bakmak yeter: $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = \mid x \mid$.
> ***x*'e göre.** $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 1$'dir. f_2 için $h \neq 0$ iken
>
> $$\frac{f_2(h,0) - f_2(0,0)}{h} = \frac{\mid h \mid}{h}$$
>
> olur ve bu oranın sağdan limiti 1, soldan limiti -1'dir; $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)$ yoktur. Bir bileşenin kısmi türevi olmadığından $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ yoktur.
> ***y*'ye göre.** $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 1$'dir. $f_2(0,h) = 0$ olduğundan $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 0$'dır. Dolayısıyla
>
> $$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = (1,0).$$
>
> F'nin orijinde bir kısmi türevi vardır, öbürü yoktur; F orijinde kısmi türevlenebilir değildir. ■

12.9 Alıştırmalar

Alıştırmalarda tanımla hesap, hesap kuralı, geometrik yorum, gradyan ve bileşenlerle hesap birlikte kullanılır.

Alıştırma 12.1 (Logaritmalı Fonksiyonda Tanımla Hesap). $f(x,y,z) = \ln\left(\dfrac{xy}{z}\right)$ fonksiyonunun $(1,1,1)$ noktasındaki kısmi türevlerini tanımla bulunuz ve Örnek 12.7 sonuçlarıyla karşılaştırınız.

> **Çözüm.**
> $f(1,1,1) = \ln 1 = 0$'dır. $\mid h \mid < 1$ için aşağıdaki noktaların hepsi tanım kümesindedir. Kullanacağımız limit
>
> $$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$
>
> limitidir; bu oran ln fonksiyonunun 1 noktasındaki fark oranıdır ve $\ln'(1) = 1$'dir (bkz. Analiz 2).
> ***x*'e göre.** $f(1+h,1,1) = \ln(1+h)$ olduğundan
>
> $$f_x(1,1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - 0}{h} = 1.$$
>
> ***y*'ye göre.** $f(1,1+h,1) = \ln(1+h)$ olduğundan aynı biçimde $f_y(1,1,1) = 1$'dir.
> ***z*'ye göre.** $\ln \dfrac{1}{1+h} = -\ln(1+h)$ olduğundan $f(1,1,1+h) = -\ln(1+h)$ ve
>
> $$f_z(1,1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1.$$
>
> **Karşılaştırma.** Örnek 12.7 içindeki $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $-\dfrac{1}{z}$ formülleri $(1,1,1)$'de sırasıyla 1, 1, -1 verir; iki yol uyuşur. ■

Alıştırma 12.2 (Düşey Kesitte Teğet Eğimi: x = 2 Düzlemi). $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ fonksiyonunun grafiği ile $x = 2$ düzleminin kesit eğrisine $(2,1,4)$ noktasında çizilen teğet doğrusunun eğimini ve denklemini bulunuz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(2,1) = 9 - 4 - 1 = 4$ olduğundan $(2,1,4)$ noktası grafiğin üzerindedir. $x = 2$ düzleminde x sabittir ve kesit eğrisi $y \mapsto f(2,y) = 5 - y^2$ fonksiyonunun grafiğidir. Önerme 12.2 gereği teğetin eğimi $f_y(2,1)$'dir. x sabitken $f_y(x,y) = -2y$ olduğundan

$$f_y(2,1) = -2.$$

Teğet doğrusu $z - 4 = -2(y-1)$, $x = 2$; yani $z = -2y + 6$, $x = 2$ doğrusudur. ■

Alıştırma 12.3 (Düşey Kesitte Teğet Eğimi: y = 1 Düzlemi). $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ fonksiyonunun grafiği ile $y = 1$ düzleminin kesit eğrisine $(2,1,4)$ noktasında çizilen teğet doğrusunun eğimini ve denklemini bulunuz.

Çözüm.
$f(2,1) = 4$ olduğundan nokta grafiğin üzerindedir. $y = 1$ düzleminde y sabittir ve kesit eğrisi $x \mapsto f(x,1) = 8 - x^2$ fonksiyonunun grafiğidir. Teğetin eğimi $f_x(2,1)$'dir. y sabitken $f_x(x,y) = -2x$ olduğundan

$$f_x(2,1) = -4.$$

Teğet doğrusu $z - 4 = -4(x-2)$, $y = 1$; yani $z = -4x + 12$, $y = 1$ doğrusudur. ■

Alıştırma 12.4 (Eksen Üzerinde Olmayan Kısmi Türev). $f(x,y) = \sqrt{|\,xy\,|}$ olsun. $y_0 \neq 0$ ise $f_x(0,y_0)$ kısmi türevinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$f(0,y_0) = 0$ ve $h \neq 0$ için $f(h,y_0) = \sqrt{|\,h\,||\,y_0\,|} = \sqrt{|\,y_0\,|}\,\sqrt{|\,h\,|}$'dir. Fark oranı

$$\frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \sqrt{|\,y_0\,|}\,\frac{\sqrt{|\,h\,|}}{h}$$

olur. $h > 0$ ise $\dfrac{\sqrt{|\,h\,|}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ ve $h \to 0^+$ iken fark oranı $+\infty$'a gider. $h < 0$ ise $\dfrac{\sqrt{|\,h\,|}}{h} = -\dfrac{1}{\sqrt{|\,h\,|}}$ ve $h \to 0^-$ iken fark oranı $-\infty$'a gider. Fark oranının sonlu bir limiti yoktur; $f_x(0,y_0)$ yoktur.
Örnek 12.11 ile karşılaştıralım: $f_x(0,0) = 0$ vardır, ama y ekseninin öbür noktalarında f_x yoktur. Bir noktada kısmi türevin var olması, yakındaki noktalar hakkında bir şey söylemez. Aynı hesap $x_0 \neq 0$ için $f_y(x_0,0)$'ın da olmadığını gösterir. ■

Alıştırma 12.5 (Tanımla Gradyan). $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasındaki gradyanını tanımla bulunuz.

Çözüm.
$f(1,2) = 1 - 6 + 4 = -1$'dir.
***x*'e göre.**

$$f(1+h,2) = (1+h)^2 - 6(1+h) + 4 = -1 - 4h + h^2$$

olduğundan

$$f_x(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(h - 4) = -4.$$

***y*'ye göre.**

$$f(1,2+h) = 1 - 3(2+h) + (2+h)^2 = -1 + h + h^2$$

olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_y(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(1+h) = 1.$$

Sonuç. $\nabla f(1,2) = (-4, 1)$'dir. Kuralla denetim: $f_x = 2x - 3y$ ve $f_y = -3x + 2y$ ifadeleri $(1,2)$'de -4 ve 1 verir. ■

Alıştırma 12.6 (Orijinde Gradyan). Aşağıdaki fonksiyonun $\nabla f(0,0)$ gradyanını bulunuz:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Çözüm.
$(x,y) \neq (0,0)$ iken $x^2 + y^4 > 0$ olduğundan fonksiyon iyi tanımlıdır. Orijinde tanıma dönelim; $f(0,0) = 0$'dır.
***x*'e göre.** $h \neq 0$ için $f(h,0) = \dfrac{h^2 \cdot 0}{h^2} = 0$ olduğundan fark oranı 0'dır ve $f_x(0,0) = 0$'dır.
***y*'ye göre.** $h \neq 0$ için $f(0,h) = \dfrac{0 \cdot h^3}{h^4} = 0$ olduğundan $f_y(0,0) = 0$'dır.
Sonuç. $\nabla f(0,0) = (0,0)$'dır. Bu fonksiyon orijinde süreklidir de: $x^2 \le x^2 + y^4$ olduğundan $\mid f(x,y) \mid \le \mid y \mid^3$ olur ve sıkıştırma teoremiyle (Teorem 8.5) $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ bulunur. ■

Alıştırma 12.7 (Uzaklığa Bağlı Bir Fonksiyonun Gradyanı). $f(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasındaki gradyanını bulunuz.

Çözüm.
f, açık $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kümesinde tanımlıdır. y sabitken zincir kuralıyla

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

olur; aynı biçimde

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$(1,2)$ noktasında $x^2 + y^2 = 5$'tir:

$$f_x(1,2) = \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$f_y(1,2) = \frac{4}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Dolayısıyla

$$\nabla f(1,2) = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(1,2).$$

Gözlem. Gradyan, $(1,2)$ konum vektörüne paraleldir. Bu rastlantı değildir: f yalnız $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ uzaklığına bağlıdır, $f = g(\rho)$ ve $g(\rho) = 2\ln\rho + \rho$'dur. Tek değişkenli zincir kuralı $f_x = g'(\rho)\,\dfrac{x}{\rho}$ ve $f_y = g'(\rho)\,\dfrac{y}{\rho}$ verir; yani $\nabla f = \dfrac{g'(\rho)}{\rho}\,(x,y)$'dir. $g'(\rho) = \dfrac{2}{\rho} + 1$ olduğundan $\rho = \sqrt{5}$ için

$$\frac{g'(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

çıkar. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 12.8 (Kutupsal Koordinat Dönüşümünün Kısmi Türevleri). $F : (0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $F(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ olsun. $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ ve $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$ kısmi türevlerini bulunuz ve bu iki vektörün her noktada birbirine dik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kısmi türevler. Teorem 12.2 gereği bileşen bileşen türev alırız. θ sabitken $r\cos\theta$ ve $r\sin\theta$'nın r'ye göre türevleri $\cos\theta$ ve $\sin\theta$'dır; r sabitken θ'ya göre türevleri $-r\sin\theta$ ve $r\cos\theta$'dır:

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=(\cos\theta,\sin\theta),$$
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)=(-r\sin\theta, r\cos\theta).$$

Diklik. Standart iç çarpımla (Tanım 1.6)

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}\right\rangle = -r\cos\theta\sin\theta + r\sin\theta\cos\theta = 0$$

olur; iki vektör diktir.
Geometrik anlam. θ sabit tutulup r değiştirilince $F(r,\theta)$ noktası orijinden çıkan bir ışın üzerinde ilerler ve $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ bu ışının birim doğrultu vektörüdür: $\left\|\dfrac{\partial F}{\partial r}\right\|=1$. r sabit tutulup θ değiştirilince nokta r yarıçaplı çember üzerinde döner ve $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$ bu çembere teğettir; uzunluğu $\left\|\dfrac{\partial F}{\partial \theta}\right\|=r$'dir, çünkü büyük çember üzerinde aynı açısal hızla dönen nokta daha hızlı yol alır. Işın ile çember birbirini dik keser. ■

Bu bölümde kısmi türevin, bir değişken dışındaki bütün değişkenleri dondurarak elde edilen tek değişkenli türev olduğunu gördük; bu yüzden hesap kuralları Analiz 2'den olduğu gibi geçer, ama kısmi türevler fonksiyonun bir nokta çevresindeki davranışını yalnız eksenlere paralel doğrular üzerinden görür ve sürekliliği bile güvenceye almaz. Kısmi türev fonksiyonları da çok değişkenli fonksiyonlar olduğundan onların da kısmi türevleri alınabilir. Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler bölümünde ikinci ve daha yüksek mertebeden kısmi türevleri, C^k sınıflarını ve karışık kısmi türevlerin ne zaman eşit olduğunu söyleyen Clairaut teoremini inceliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler

Analiz 2'de türevlenebilen bir fonksiyonun türev fonksiyonunun da türevini alarak ikinci, üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevleri tanımladık (bkz. Analiz 2). Tek değişkende bu zincir tek bir yol izler: f'den f''ye, oradan f'''ye. Çok değişkende durum daha zengindir. Kısmi Türevler bölümünde tanımladığımız her $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ kısmi türevi yine n değişkenli bir fonksiyondur ve onun da n değişkenin her birine göre kısmi türevi alınabilir. Böylece n değişkenli bir fonksiyonun n^2 tane ikinci mertebeden kısmi türevi ortaya çıkar; üçüncü mertebede bu sayı n^3 olur.
Bu çokluk doğal bir soru doğurur: önce x'e, sonra y'ye göre türev almak ile önce y'ye, sonra x'e göre türev almak aynı sonucu verir mi? Hesaplarda karşılaşılan fonksiyonların hemen hepsinde yanıt evettir, ama yanıtın hayır olduğu basit bir örnek de vardır. Bölümün merkezindeki Clairaut teoremi, karışık kısmi türevler sürekli olduğunda türev alma sırasının önemsiz olduğunu söyler; ispatı, tek değişkenli ortalama değer teoreminin iki kez uygulanmasına dayanır. Bölümü, ikinci mertebeden kısmi türevlerle yazılan en ünlü denklem olan Laplace denklemiyle bitiriyoruz.

13.1 İkinci Mertebeden Kısmi Türevler

Bir kısmi türev fonksiyonunun yeniden kısmi türevini almak, ikinci mertebeden kısmi türevi verir.

Tanım 13.1 (İkinci Mertebeden Kısmi Türev). $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : U \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $j \in \{1, \ldots, n\}$ için $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ kısmi türevi (Tanım 12.1) U'nun her noktasında var olsun; böylece

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyondur. $k \in \{1, \ldots, n\}$ ve $a \in U$ için bu fonksiyonun a noktasında x_k'ya göre kısmi türevi varsa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$

sayısına f'nin a noktasında önce x_j'ye, sonra x_k'ya göre alınmış **ikinci mertebeden kısmi türevi** denir. $k = j$ olduğunda $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ yazılır. $k \neq j$ olduğunda $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}$ türevine **karışık kısmi türev** denir.

Yani ikinci mertebeden kısmi türev, bir kısmi türev fonksiyonunun kısmi türevidir. Türevi alınacak $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ fonksiyonunun yalnız a noktasında değil, a'nın bir komşuluğunda tanımlı olması gerekir, çünkü kısmi türev bir limittir ve fark oranı a'nın yakınındaki noktaları kullanır. Tanımı bu yüzden açık bir U kümesi üzerinde kuruyoruz. j ve k indislerinin her seçimi bir ikinci mertebe kısmi türev verir; toplam n^2 tane. Bunların n tanesinde ($k = j$) aynı değişkene göre iki kez türev alınır, geri kalan $n^2 - n$ tanesi karışıktır. Gösterimde türev alma sırası önemlidir; kitap boyunca kullandığımız kuralı açıkça koyalım. ∂ gösteriminde türevler **sağdan sola** alınır: paydada f'ye en yakın olan, yani en sağdaki değişken ilk türevin değişkenidir. İki ve üç değişkende kullandığımız alt indis gösteriminde ise türevler **soldan sağa** alınır: $f_{xy} = (f_x)_y$, önce x'e sonra y'ye göre türev demektir. İki gösterim birbirinin aynasıdır:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}.$$

İki değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun dört ikinci mertebe kısmi türevi şunlardır:

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 13.1: İki değişkenli fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevleri

Alt indis	Tanımı	∂ gösterimi	Türev sırası
f_{xx}	$(f_x)_x$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	önce x, sonra x
f_{xy}	$(f_x)_y$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$	önce x, sonra y
f_{yx}	$(f_y)_x$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$	önce y, sonra x
f_{yy}	$(f_y)_y$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	önce y, sonra y

f_{xy} ve f_{yx} karışık kısmi türevlerdir. Bazı kitaplar alt indisleri ters sırayla okur; başka bir kitaba bakarken kuralı denetlemek gerekir. Birazdan göreceğimiz gibi alışılmış fonksiyonlarda iki karışık türev eşittir ve sıra fark etmez; ama eşit olmadıkları örnekte (Örnek 13.6) gösterimi doğru okumak sonucun işaretini belirler.

Üç adımda ikinci mertebeden kısmi türevler

1. **Birinci türevler.** Her değişken için öbür değişkenler sabit tutularak birinci mertebe kısmi türev hesaplanır ve sadeleştirilir.
2. **Yeniden türev.** Her birinci türev, her değişkene göre bir kez daha türetilir; öbür değişkenler yine sabittir.
3. **Sıra.** Sonuç türev alma sırasıyla adlandırılır: $(f_x)_y = f_{xy}$, $(f_y)_x = f_{yx}$. Fonksiyon yeterince düzgünse iki karışık türev eşit çıkar (Teorem 13.1); bu, hesap için iyi bir denetimdir.

Örnek 13.1 (Bir Polinomun İkinci Mertebeden Kısmi Türevleri). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+3y^2+2xy$ fonksiyonunun bütün ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
Birinci türevler. y sabit tutulup x'e göre, sonra x sabit tutulup y'ye göre türev alınırsa

$$f_x(x,y)=3x^2+2y,$$
$$f_y(x,y)=6y+2x$$

olur.
Yeniden türev. f_x fonksiyonunu x'e ve y'ye göre, f_y fonksiyonunu da x'e ve y'ye göre türetelim:

$$f_{xx}(x,y)=6x,$$
$$f_{xy}(x,y)=2,$$
$$f_{yx}(x,y)=2,$$
$$f_{yy}(x,y)=6.$$

Sıra. İki karışık türev eşit çıktı: $f_{xy}=f_{yx}=2$. Karışık türevlere yalnız $2xy$ terimi katkı verir; x^3 yalnız x'e, $3y^2$ yalnız y'ye bağlı olduğundan öbür değişkene göre türevleri sıfırdır. ■

Örnek 13.2 (Trigonometrik Terimli Bir Fonksiyon). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3y^2+x^4\sin y+\cos(xy)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
Birinci türevler. y sabitken $\cos(xy)$ ifadesinin x'e göre türevi, tek değişkenli zincir kuralıyla $-y\sin(xy)$'dir; x sabitken y'ye göre türevi $-x\sin(xy)$'dir. Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 + 4x^3\sin y - y\sin(xy),$$
$$f_y(x,y) = 2x^3y + x^4\cos y - x\sin(xy).$$

Yeniden türev. f_x'in x'e göre türevinde son terimden $\big(\, y\sin(xy)\big)_x = y^2\cos(xy)$ gelir:

$$f_{xx}(x,y) = 6xy^2 + 12x^2\sin y - y^2\cos(xy).$$

f_x'in y'ye göre türevinde son terim bir çarpımdır:

$$\big(\, y\sin(xy)\big)_y = \sin(xy) + xy\cos(xy).$$

Dolayısıyla

$$f_{xy}(x,y) = 6x^2y + 4x^3\cos y - \sin(xy) - xy\cos(xy).$$

f_y'nin x'e göre türevinde de son terim bir çarpımdır:

$$\big(\, x\sin(xy)\big)_x = \sin(xy) + xy\cos(xy).$$

Buradan

$$f_{yx}(x,y) = 6x^2y + 4x^3\cos y - \sin(xy) - xy\cos(xy)$$

bulunur. Son olarak $\big(\, x\sin(xy)\big)_y = x^2\cos(xy)$ olduğundan

$$f_{yy}(x,y) = 2x^3 - x^4\sin y - x^2\cos(xy)$$

olur.
Sıra. İki karışık türev farklı yollardan hesaplandığı hâlde aynı çıktı: $f_{xy} = f_{yx}$. Dört ikinci mertebe türev de polinomların, sinüsün ve kosinüsün toplam, çarpım ve bileşkeleri olduğundan $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında süreklidir. ■

Örnek 13.3 (Üstel Bir Fonksiyon). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy^2}$ fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
Birinci türevler. Üstel fonksiyonun türevi kendisidir; zincir kuralıyla üsteki xy^2 ifadesinin kısmi türevi çarpan olarak gelir:

$$f_x(x,y) = y^2 e^{xy^2},$$
$$f_y(x,y) = 2xy\, e^{xy^2}.$$

Yeniden türev. x'e göre ikinci kez türev alınırsa y^2 çarpanı bir kez daha gelir:

$$f_{xx}(x,y) = y^2\cdot y^2 e^{xy^2} = y^4 e^{xy^2}.$$

Karışık türevlerde çarpım kuralı gerekir:

$$f_{xy}(x,y) = 2y\, e^{xy^2} + y^2\cdot 2xy\, e^{xy^2} = 2y\,(1+xy^2)\, e^{xy^2},$$
$$f_{yx}(x,y) = 2y\, e^{xy^2} + 2xy\cdot y^2 e^{xy^2} = 2y\,(1+xy^2)\, e^{xy^2}.$$

Son olarak

$$f_{yy}(x,y) = 2x\, e^{xy^2} + 2xy\cdot 2xy\, e^{xy^2} = 2x\,(1+2xy^2)\, e^{xy^2}.$$

Sıra. Yine $f_{xy} = f_{yx}$ çıktı. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Daha Yüksek Mertebeler

İkinci mertebeden kısmi türevler de U üzerinde birer fonksiyon olduğunda işlem sürdürülebilir.

Tanım 13.2 (Yüksek Mertebeden Kısmi Türev). $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık, $f : U \to \mathbb{R}$ ve $p \geq 2$ bir doğal sayı olsun. $i_1, i_2, ..., i_p \in \{1, ..., n\}$ indisleri verilsin ve $(p-1)$. mertebeden

$$g = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_1}}$$

kısmi türevi U'nun her noktasında var olsun. g'nin $a \in U$ noktasında x_{i_p} değişkenine göre kısmi türevi varsa

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p}\, \partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(a) := \frac{\partial g}{\partial x_{i_p}}(a)$$

sayısına f'nin a noktasındaki bir ***p.* mertebeden kısmi türevi** denir. Bu türevde f, sırasıyla $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_p}$ değişkenlerine göre türetilmiştir. f'nin kendisine **sıfırıncı mertebeden**, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ türevlerine **birinci mertebeden** kısmi türev denir.

Yani p. mertebeden kısmi türev, art arda p kez kısmi türev almaktır ve her adımda türevi alınan fonksiyonun U'nun her noktasında var olması gerekir. $(i_1, ..., i_p)$ indis dizisi için n^p seçenek olduğundan f'nin en çok n^p tane p. mertebe kısmi türevi vardır. Alt indis gösteriminde yine soldan sağa okuruz. Örneğin iki değişkende, x'e göre iki ve y'ye göre bir kez türev alınan üç tane üçüncü mertebe kısmi türev vardır:

$$f_{xxy} = \big((f_x)_x \big)_y = \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2},$$
$$f_{xyx} = \big((f_x)_y \big)_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x},$$
$$f_{yxx} = \big((f_y)_x \big)_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}.$$

∂ gösteriminde art arda gelen aynı değişkenler üsle birleştirilir: $\partial x\, \partial x$ yerine ∂x^2 yazılır. Bu kısaltmayı genelleştirelim. $p_1, ..., p_n$ negatif olmayan tam sayılar ve $p = p_1 + ... + p_n$ olsun.

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1}\, \partial x_2^{p_2} \cdots \partial x_n^{p_n}}$$

yazımı, f'nin önce x_n değişkenine göre p_n kez, sonra x_{n-1} değişkenine göre p_{n-1} kez türetildiğini ve en son x_1 değişkenine göre p_1 kez türetildiğini gösterir; $p_j = 0$ ise ∂x_j hiç yazılmaz. $(p_1, ..., p_n)$ sıralı n-lisine **çoklu indis**, p sayısına da türevin **mertebesi** denir. Örneğin $n = 3$ için $(2, 0, 1)$ çoklu indisi $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\, \partial x_3}$ türevine karşılık gelir.

Bu gösterim her p. mertebe türevi kapsamaz: f_{xyx} türevinde x'e göre iki türev art arda gelmediğinden onu bu biçimde yazamayız. Ama Sonuç 13.2 gösterecek ki f yeterince düzgünse türev alma sırası önemsizdir; o zaman her p. mertebe kısmi türev yalnız çoklu indise bağlıdır ve bu gösterim hepsini kapsar.

Örnek 13.4 (Üçüncü Mertebeden Kısmi Türevler). $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$ fonksiyonunun f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx} ve f_{yxx} üçüncü mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

> **Çözüm.**
> İkinci mertebe türevleri Örnek 13.2 içinde bulmuştuk:
>
> $$f_{xx}(x, y) = 6xy^2 + 12x^2 \sin y - y^2 \cos(xy),$$
> $$f_{xy}(x, y) = 6x^2y + 4x^3 \cos y - \sin(xy) - xy \cos(xy).$$
>
> ***f*$_{xxx}$.** f_{xx} fonksiyonunu x'e göre türetelim. Son terimden $\big(-y^2 \cos(xy) \big)_x = y^3 \sin(xy)$ gelir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_{xxx}(x,y) = 6y^2 + 24x\sin y + y^3\sin(xy).$$

f_{xxy}. f_{xx} fonksiyonunu y'ye göre türetelim. Son terim bir çarpımdır:

$$\big(-y^2\cos(xy)\big)_y = -2y\cos(xy) + xy^2\sin(xy).$$

Buradan

$$f_{xxy}(x,y) = 12xy + 12x^2\cos y - 2y\cos(xy) + xy^2\sin(xy).$$

f_{xyx}. f_{xy} fonksiyonunu x'e göre türetelim. Son iki terimden $\big(-\sin(xy)\big)_x = -y\cos(xy)$ ve

$$\big(-xy\cos(xy)\big)_x = -y\cos(xy) + xy^2\sin(xy)$$

gelir. Toplarsak

$$f_{xyx}(x,y) = 12xy + 12x^2\cos y - 2y\cos(xy) + xy^2\sin(xy).$$

f_{yxx}. Örnek 13.2 içinde $f_{yx} = f_{xy}$ bulduk; eşit fonksiyonların x'e göre türevleri de eşittir, dolayısıyla $f_{yxx} = (f_{yx})_x = (f_{xy})_x = f_{xyx}$.
x'e göre iki, y'ye göre bir kez türev alınan üç türev aynı çıktı: $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$. Bu rastlantı değildir; Sonuç 13.2 bunu açıklar. Geriye kalan dört üçüncü mertebe türev Alıştırma 13.1 konusudur. ■

13.3 C^k Sınıfları

Tek değişkende C^n sınıflarını türevlerin varlığı ve sürekliliğiyle tanımlamıştık (bkz. Analiz 2). Çok değişkende bu rolü kısmi türevler üstlenir.

Tanım 13.3 (C üssü k Sınıfı). $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $k \geq 0$ bir tam sayı olsun.

1. $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun mertebesi en çok k olan bütün kısmi türevleri U'nun her noktasında var ve U üzerinde sürekliyse f'ye ***U* üzerinde *k* kez sürekli türevlenebilir** denir ve $f \in C^k(U)$ yazılır. Özel olarak $C^0(U)$, U üzerinde sürekli fonksiyonların kümesidir.
2. Her $k \geq 0$ için $f \in C^k(U)$ ise $f \in C^\infty(U)$ yazılır ve f'ye **düzgün** (pürüzsüz) fonksiyon denir:
$$C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U).$$
3. $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ vektör değerli bir fonksiyonsa, kısmi türevler bileşen bileşen alındığından (Tanım 12.4) her f_i bileşeni $C^k(U)$ sınıfında olduğunda $f \in C^k(U)$ yazılır.

Yani $f \in C^k(U)$ demek, f'yi hangi sırayla olursa olsun en çok k kez kısmi türetebilmek ve bu sırada karşılaşılan her fonksiyonun U üzerinde sürekli olması demektir. Tanımda sıfırıncı mertebe olarak f'nin kendisinin sürekliliği de istenir. Aslında $k \geq 1$ olduğunda bu koşul birinci mertebe kısmi türevlerin sürekliliğinden kendiliğinden çıkar: sürekli kısmi türevli fonksiyonların türevlenebilir (Teorem 14.3), türevlenebilir fonksiyonların da sürekli olduğunu (Teorem 14.1) Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel bölümünde göreceğiz. $C^1(U)$ sınıfındaki fonksiyonlara kısaca **sürekli türevlenebilir** fonksiyonlar da denir; adın gerekçesi o bölümde ortaya çıkacak. "Düzgün" sözcüğünü düzgün süreklilikle (Tanım 11.2) karıştırmamak gerekir; bu bağlamda "her mertebeden sürekli kısmi türevleri olan" anlamına gelir.
Tanımdan doğrudan bir kapsama zinciri çıkar, çünkü mertebesi en çok $k+1$ olan kısmi türevler arasında mertebesi en çok k olanlar da vardır:

$$C^\infty(U) \subseteq \cdots \subseteq C^{k+1}(U) \subseteq C^k(U) \subseteq \cdots \subseteq C^1(U) \subseteq C^0(U).$$

Kapsamalar kesindir. Örneğin $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k \mid x_1 \mid$ fonksiyonu yalnız x_1'e bağlıdır: x_1 dışındaki bir değişkene göre alınan her kısmi türevi sıfırdır, x_1'e göre art arda alınan kısmi türevleri ise $t \mapsto t^k \mid t \mid$ fonksiyonunun türevleridir. Tek değişkenli örnek (bkz. Analiz 2) gereği bu fonksiyon $C^k(\mathbb{R}^n)$ sınıfındadır ama $C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ sınıfında değildir. C^1 olup C^2 olmayan, karışık türevlerle ilgili daha ilginç bir örneği Örnek 13.7 içinde göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Öte yandan zincirin tepesi kalabalıktır. Bir polinomun (Tanım 8.9) herhangi bir değişkene göre kısmi türevi yine bir polinomdur ve polinomlar $\mathbb{R}^n$'de süreklidir (Teorem 10.3). Dolayısıyla polinomların bütün mertebelerden kısmi türevleri var ve süreklidir: polinomlar $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sınıfındadır. Aynı gerekçeyle e^t, $\sin t$, $\cos t$ gibi tek değişkenli düzgün fonksiyonların polinomlarla bileşkeleri ve bunların toplam ve çarpımları $\mathbb{R}^n$'de, rasyonel fonksiyonlar da paydanın sıfır olmadığı açık kümede C^∞ sınıfındadır. Önceki örneklerin hepsi bu türdendir.
Tek değişkende türevlenebilen fonksiyonun sürekli olduğunu biliyoruz (bkz. Analiz 2). Kısmi türevler için bunun karşılığı yoktur; bu yüzden sınıfları kısmi türevlerin varlığıyla değil sürekliliğiyle tanımladık.

Örnek 13.5 (Kısmi Türevleri Her Yerde Olan Süreksiz Fonksiyon).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerinin $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında var olduğunu, ama f'nin $C^1(\mathbb{R}^2)$ sınıfında olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Başlangıç noktası. Örnek 12.13 çözümünde $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ olduğunu ve f'nin başlangıç noktasında sürekli olmadığını gördük ($y = x$ doğrusu boyunca $f = \frac{1}{2}$).
Öbür noktalar. $(x,y) \neq (0,0)$ ise f bu noktanın bir komşuluğunda formülle verilir ve bölüm kuralıyla

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

olur. Böylece f_x ve f_y, $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında vardır.
Süreklilik. f başlangıç noktasında sürekli bile olmadığından $f \notin C^0(\mathbb{R}^2)$ ve $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. Birinci mertebe türevler de süreksizdir: $y \neq 0$ için

$$f_x(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$$

olur ve $y \to 0$ iken sınırsız büyür, oysa $f_x(0,0) = 0$'dır.
Kısmi türevler f'yi yalnız eksenlere paralel doğrular boyunca yoklar; bu fonksiyonun süreksizliği ise $y = x$ doğrusu boyunca ortaya çıkar ve kısmi türevler onu göremez. ■

13.4 Karışık Türevler Eşit Olmayabilir

Şimdiye kadarki bütün örneklerde iki karışık türev eşit çıktı. Bu bir kural değildir: aşağıdaki fonksiyonun başlangıç noktasındaki karışık türevleri farklıdır. Parçalı tanımlı fonksiyonlarda özel noktadaki türevler formülden okunamaz; tanıma dönmek gerekir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda tanımla karışık türev

Özel nokta başlangıç noktası olsun.

1. **Başlangıç noktasında birinci türevler.** $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$, Tanım 12.1 ile fark oranlarının limiti olarak hesaplanır.
2. **Eksenler üzerinde birinci türevler.** $k \neq 0$ için $f_x(0,k)$ ve $h \neq 0$ için $f_y(h,0)$ bulunur. Bu noktalar özel nokta olmadığından formülün türevi kullanılabilir.
3. **Fark oranlarının limiti.** Karışık türevler, birinci türevlerin fark oranlarının limitidir:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k},$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}.$$

Örnek 13.6 (Karışık Türevleri Farklı Olan Fonksiyon).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu için $f_{xy}(0,0) = -1$ ve $f_{yx}(0,0) = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Başlangıç noktasında birinci türevler. Her $h \neq 0$ için $f(h,0) = 0$ ve $f(0,h) = 0$'dır. Dolayısıyla

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

ve aynı biçimde $f_y(0,0) = 0$ olur.
Eksenler üzerinde birinci türevler. $(x,y) \neq (0,0)$ için $f = xy \cdot q$, $q = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ yazalım. Bölüm kuralıyla

$$q_x = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$q_y = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

olur. Çarpım kuralı $f_x = y\,q + xy\,q_x$ ve $f_y = x\,q + xy\,q_y$ verir:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Bu formüllerde $x = 0$ ve $y = 0$ koyalım. $k \neq 0$ için

$$f_x(0,k) = \frac{-k^5}{k^4} = -k$$

ve $h \neq 0$ için

$$f_y(h,0) = \frac{h^5}{h^4} = h$$

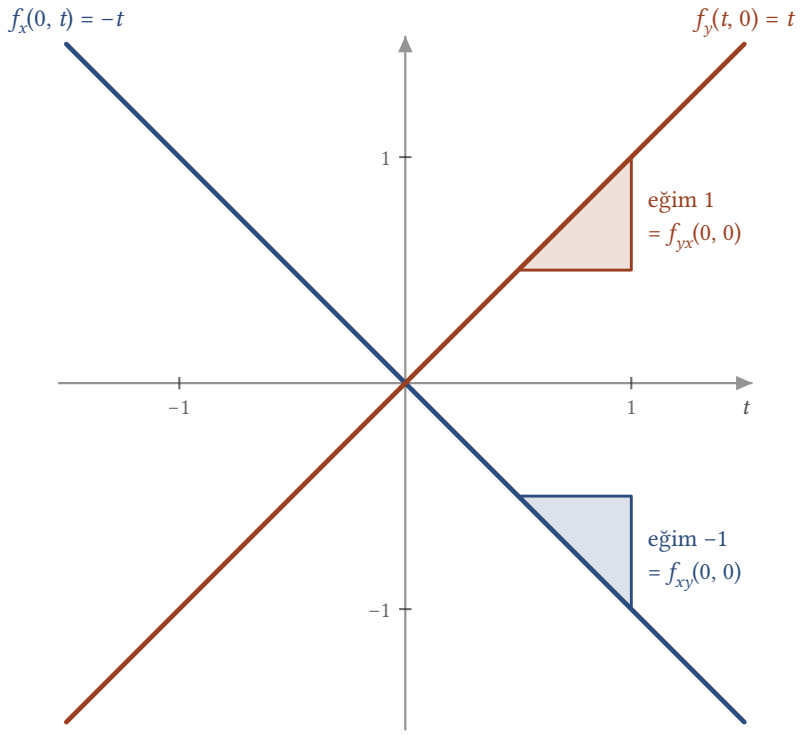
olur. $f_x(0,0) = 0$ ve $f_y(0,0) = 0$ olduğundan bu eşitlikler $k = 0$ ve $h = 0$ için de doğrudur: her k için $f_x(0,k) = -k$, her h için $f_y(h,0) = h$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Fark oranlarının limiti.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k}{k} = -1,$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Dolayısıyla $f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$. Sonucun geometrik anlamı basittir: $f_{xy}(0,0)$, $k \mapsto f_x(0,k) = -k$ fonksiyonunun 0'daki eğimi; $f_{yx}(0,0)$ ise $h \mapsto f_y(h,0) = h$ fonksiyonunun 0'daki eğimidir.



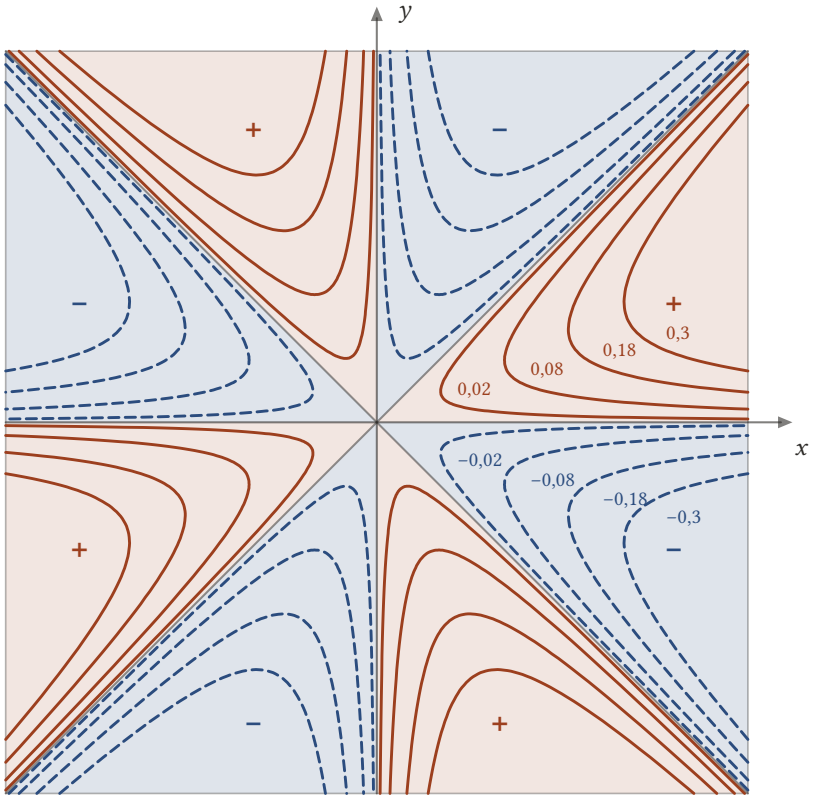
Şekil 13.1: Eksenler üzerindeki birinci türevler: $f_x(0,\,t) = -t$ ve $f_y(t,\,0) = t$. Karışık türevler bu iki doğrunun orijindeki eğimleridir: $f_{xy}(0,\,0) = -1$, $f_{yx}(0,\,0) = 1$.

Fonksiyonun biçimi de öğreticidir. Kutupsal koordinatlarda $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazılırsa $\cos\theta\sin\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$ ve $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ olduğundan

$$f = \frac{r^4 \cos\theta \sin\theta\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} = \frac{r^2}{4}\sin 4\theta$$

bulunur. f eksenler ve $y = \pm x$ doğruları üzerinde sıfırdır ve bu dört doğrunun her birini geçerken işaret değiştirir. Başlangıç noktası çevresinde işaretleri sırayla değişen sekiz bölge vardır. y ekseni boyunca yukarı çıktıkça x yönündeki eğim $(-y)$ azalır, x ekseni boyunca sağa gittikçe y yönündeki eğim (x) artar; iki karışık türev tam bu iki değişme hızıdır ve işaretleri zıttır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.2: $f = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) = (r^2/4)\sin 4\theta$ fonksiyonunun seviye eğrileri: düz çizgiler $f = 0{,}02$; 0,08; 0,18; 0,3, kesikli çizgiler aynı değerlerin negatifleri. f, eksenler ve $y = \pm x$ doğruları üzerinde sıfırdır; orijin çevresindeki sekiz bölgede işaret sırayla değişir.

■

Bu örnekte türev alma sırasının gerçekten fark ettiğini gördük. Sıradaki soru, sıranın hangi koşulda önemsiz olduğudur.

13.5 Clairaut Teoremi

Karışık türevlerin ne zaman eşit olduğunu anlamak için bir dikdörtgenin dört köşesindeki değerleri birleştiren bir ifadeye bakacağız. f, (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve h, k küçük sayılar olsun.

$$F(h,k) = \big[\, f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) \,\big] \\ - \big[\, f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) \,\big]$$

sayısına f'nin (x_0, y_0) noktasındaki **ikinci farkı** diyelim. $F(h,k)$, köşeleri (x_0, y_0), (x_0+h, y_0), (x_0, y_0+k) ve (x_0+h, y_0+k) olan dikdörtgenin köşelerindeki değerleri $+, -, -, +$ işaretleriyle toplar ve iki biçimde okunabilir. Önce x yönündeki farkları, sonra bunların y yönündeki farkını alırsak $F(h,k) \approx hk\, f_{xy}$; önce y yönündeki farkları, sonra bunların x yönündeki farkını alırsak $F(h,k) \approx hk\, f_{yx}$ bekleriz. Aynı sayı iki karışık türevin de yaklaşığı olduğundan onların eşit olmasını bekleriz. Bu sezgiyi kesinleştiren araç ortalama değer teoremidir.

Lemma 13.1 (İkinci Fark Lemması). *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık, $f : U \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in U$ ve $r > 0$ için $B\big((x_0, y_0), r\big) \subseteq U$ olsun. $0 < |h| < \dfrac{r}{2}$ ve $0 < |k| < \dfrac{r}{2}$ olsun ve $F(h,k)$, f'nin (x_0, y_0) noktasındaki ikinci farkı olsun.*

1. *f_x ve f_{xy} kısmi türevleri U'nun her noktasında varsa öyle $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ sayıları vardır ki*

$$F(h,k) = hk\, f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

olur.

2. *f_y ve f_{yx} kısmi türevleri U'nun her noktasında varsa öyle $\theta_3, \theta_4 \in (0,1)$ sayıları vardır ki*

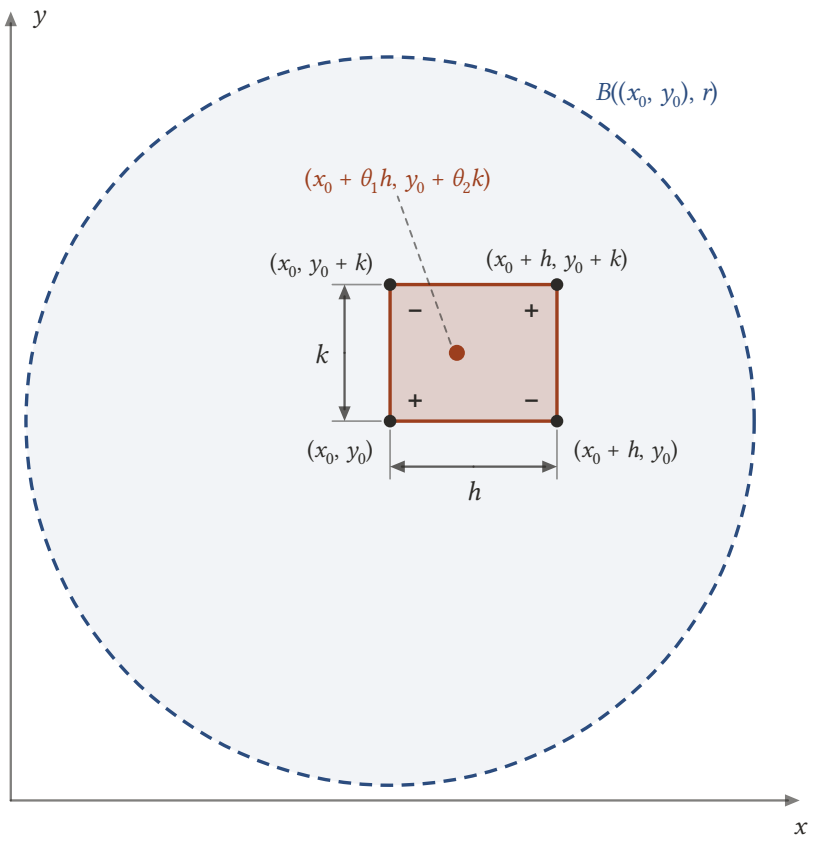
$$F(h,k) = hk\, f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)$$

olur.

İspat.
Dikdörtgen U'nun içindedir. *s sayısı x_0 ile $x_0 + h$ arasında, t sayısı y_0 ile $y_0 + k$ arasında (uçlar dahil) olsun. $\mid s - x_0 \mid \leq \mid h \mid$ ve $\mid t - y_0 \mid \leq \mid k \mid$ olduğundan*

$$\text{parallel}(s,t) - (x_0, y_0)\text{parallel} \leq \sqrt{h^2 + k^2} < \frac{r}{\sqrt{2}} < r$$

olur. Yani köşeleri (x_0, y_0) ve $(x_0 + h, y_0 + k)$ olan kapalı dikdörtgenin her noktası $B\big((x_0, y_0), r\big)$ yuvarının, dolayısıyla U'nun içindedir. Aşağıda I ile uçları x_0 ve $x_0 + h$ olan kapalı aralığı, J ile uçları y_0 ve $y_0 + k$ olan kapalı aralığı gösteriyoruz.



Şekil 13.3: İkinci fark F(h, k)*, dikdörtgenin köşelerindeki değerleri gösterilen işaretlerle toplar.* |h|, |k| < r/2 *olduğundan kapalı dikdörtgen* B((x₀, y₀), r) *yuvarının içindedir; lemmanın verdiği ara nokta* (x₀ + θ₁h, y₀ + θ₂k) *dikdörtgenin içinde kalır.*

1. Birinci ortalama değer adımı. *$\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $s \in I$ için $(s, y_0 + k)$ ve (s, y_0) noktaları U'dadır ve f_x bu noktalarda vardır; dolayısıyla φ, I'nın her noktasında türevlenebilir ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\varphi'(s) = f_x(s, y_0 + k) - f_x(s, y_0)$$

olur. Türevlenebilen fonksiyon sürekli olduğundan (bkz. Analiz 2) φ, ortalama değer teoreminin (bkz. Analiz 2) koşullarını I üzerinde sağlar. Teorem, x_0 ile $x_0 + h$ arasında kesin olarak kalan bir s_1 noktası verir ($h < 0$ ise teorem $[x_0 + h, x_0]$ aralığına uygulanır, sonuç aynıdır). Bu noktayı $s_1 = x_0 + \theta_1 h$, $\theta_1 \in (0,1)$ biçiminde yazabiliriz. $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = F(h,k)$ olduğundan

$$F(h,k) = h\,\varphi'(s_1) = h\,\left[\, f_x(s_1, y_0 + k) - f_x(s_1, y_0) \,\right]$$

bulunur.
İkinci ortalama değer adımı. *$\psi : J \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = f_x(s_1, t)$ olsun. $t \in J$ için $(s_1, t) \in U$ ve f_{xy} bu noktada vardır; yani ψ, J'nin her noktasında türevlenebilir ve $\psi'(t) = f_{xy}(s_1, t)$'dir. Ortalama değer teoremi bu kez bir $\theta_2 \in (0,1)$ verir:*

$$\begin{aligned} f_x(s_1, y_0 + k) - f_x(s_1, y_0) &= \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \\ &= k\, f_{xy}(s_1, y_0 + \theta_2 k). \end{aligned}$$

Bunu bir önceki eşitlikte yerine koyarsak

$$F(h,k) = hk\, f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

olur.
2. Değişkenlerin rolü değişir. *$\tilde{\varphi} : J \to \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$ olsun. f_y gerekli noktalarda var olduğundan $\tilde{\varphi}$, J üzerinde türevlenebilir ve*

$$\tilde{\varphi}'(t) = f_y(x_0 + h, t) - f_y(x_0, t)$$

olur. Terimleri yeniden sıralayınca $\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0) = F(h,k)$ olduğu görülür. Ortalama değer teoremi bir $\theta_4 \in (0,1)$ verir; $t_1 = y_0 + \theta_4 k$ yazarsak

$$F(h,k) = k\,\left[\, f_y(x_0 + h, t_1) - f_y(x_0, t_1) \,\right]$$

olur. Şimdi $\tilde{\psi} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\psi}(s) = f_y(s, t_1)$ fonksiyonu, f_{yx} var olduğundan I üzerinde türevlenebilir ve $\tilde{\psi}'(s) = f_{yx}(s, t_1)$'dir. Ortalama değer teoremi bir $\theta_3 \in (0,1)$ verir:

$$f_y(x_0 + h, t_1) - f_y(x_0, t_1) = h\, f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, t_1).$$

İki eşitlik birlikte

$$F(h,k) = hk\, f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)$$

verir. ■

Lemmadaki ara noktaların yeri bilinmez, ama ikisi de dikdörtgenin içindedir ve $h, k \to 0$ iken (x_0, y_0) noktasına yaklaşır. Karışık türevlerin sürekliliği tam bu noktada devreye girer.

Teorem 13.1 (Clairaut Teoremi). *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $f : U \to \mathbb{R}$ ve $(x_0, y_0) \in U$ olsun. f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} kısmi türevleri U'nun her noktasında var olsun ve f_{xy} ile f_{yx} fonksiyonları (x_0, y_0) noktasında sürekli olsun. O zaman*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

olur. Özel olarak $f \in C^2(U)$ ise U'nun her noktasında $f_{xy} = f_{yx}$'tir.

İspat.
U açık olduğundan $B\,\big(\,(x_0, y_0), r\,\big) \subseteq U$ olacak bir $r > 0$ vardır. Her $m \in \mathbb{N}$ için $t_m = \dfrac{r}{4m}$ alalım; $0 < t_m < \dfrac{r}{2}$'dir. Lemma 13.1 iki kısmıyla birlikte $h = k = t_m$ için uygulanabilir: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in (0,1)$ sayıları (m'ye bağlı olarak) vardır ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P_m = (x_0 + \theta_1 t_m, y_0 + \theta_2 t_m),$$
$$Q_m = (x_0 + \theta_3 t_m, y_0 + \theta_4 t_m)$$

noktaları için

$$t_m^2 \, f_{xy}(P_m) = F(t_m, t_m) = t_m^2 \, f_{yx}(Q_m)$$

olur. $t_m^2 \neq 0$ *ile bölersek her* m *için* $f_{xy}(P_m) = f_{yx}(Q_m)$ *bulunur.*
Öte yandan

$$\text{parallel} P_m - (x_0, y_0) \text{parallel} = t_m \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} < \sqrt{2}\, t_m \to 0$$

olduğundan $P_m \to (x_0, y_0)$*; aynı gerekçeyle* $Q_m \to (x_0, y_0)$*.* f_{xy} *ve* f_{yx}*,* (x_0, y_0)*'da sürekli olduğundan Teorem 10.1 gereği*

$$f_{xy}(P_m) \to f_{xy}(x_0, y_0),$$
$$f_{yx}(Q_m) \to f_{yx}(x_0, y_0)$$

olur. Bu iki reel dizi terim terim eşittir; limitin tekliği (Teorem 6.1) gereği limitleri de eşittir: $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$*.*
$f \in C^2(U)$ *ise dört kısmi türev* U*'nun her noktasında vardır ve* f_{xy}*,* f_{yx} *her noktada süreklidir; dolayısıyla eşitlik* U*'nun her noktasında geçerlidir.* ■

Teorem Schwarz teoremi adıyla da bilinir. Karışık türevleri farklı olan fonksiyonda (Örnek 13.6) teoremin hangi koşulunun bozulduğunu görelim; bu, süreklilik koşulunun atılamayacağını da gösterir.

Örnek 13.7 (Karışık Türevi Süreksiz Olan Fonksiyon). Örnek 13.6 içindeki

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu için f_{xy} ve f_{yx} kısmi türevlerinin başlangıç noktasında sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Başlangıç noktası dışında f_{xy}. $(x,y) \neq (0,0)$ için $f_x = \dfrac{N}{(x^2+y^2)^2}$ ve $N = x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5$ yazalım (Örnek 13.6). $N_y = x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4$'tür ve paydanın y'ye göre türevi $4y(x^2+y^2)$ olduğundan, bölüm kuralı ve ortak (x^2+y^2) çarpanının sadeleştirilmesiyle

$$f_{xy} = \frac{N_y(x^2+y^2) - 4yN}{(x^2+y^2)^3}$$

bulunur. Payın iki parçası

$$N_y(x^2+y^2) = x^6 + 13x^4y^2 + 7x^2y^4 - 5y^6,$$
$$4yN = 4x^4y^2 + 16x^2y^4 - 4y^6$$

olduğundan, her $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$f_{xy}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

İki yol. x ekseni üzerinde $(y=0,\ x \neq 0)$ $f_{xy}(x,0) = \dfrac{x^6}{x^6} = 1$; y ekseni üzerinde $(x=0,\ y \neq 0)$ $f_{xy}(0,y) = \dfrac{-y^6}{y^6} = -1$ olur. İki yol boyunca limitler farklı olduğundan (Sonuç 9.1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$ yoktur; f_{xy}, başlangıç noktasında sürekli değildir.
f_{yx} için. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ açık kümesinde f, paydası sıfır olmayan bir rasyonel fonksiyondur ve bütün kısmi türevleri de öyledir; yani f bu kümede C^2 sınıfındadır. Clairaut teoremi (Teorem 13.1) gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

orada $f_{yx} = f_{xy}$ olur. Dolayısıyla f_{yx}'in de başlangıç noktasında limiti yoktur ve f_{yx} orada sürekli değildir.
Böylece f'nin karışık türevleri $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında vardır ama $(0,0)$'da süreksizdir; teoremin süreklilik koşulu tam bu noktada bozulur ve sonucu da bozulur. Birinci mertebe kısmi türevler ise $\mathbb{R}^2$'de süreklidir (Alıştırma 13.2); yani $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ama $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$. ■

Clairaut teoreminde iki karışık türevin de var ve sürekli olduğunu varsaydık. Aslında birinin sürekliliği, öbürünün varlığını ve eşitliği birlikte verir.

Teorem 13.2 (Clairaut Teoreminin Güçlü Biçimi). *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $f : U \to \mathbb{R}$ ve $(x_0, y_0) \in U$ olsun. f_x, f_y ve f_{xy} kısmi türevleri U'nun her noktasında var olsun ve f_{xy}, (x_0, y_0) noktasında sürekli olsun. O zaman $f_{yx}(x_0, y_0)$ vardır ve*

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

olur.

İspat.
$B\big((x_0, y_0), r\big) \subseteq U$ olacak bir $r > 0$ seçelim ve $c = f_{xy}(x_0, y_0)$ yazalım. $\varepsilon > 0$ verilsin.
Karışık türev yakında c'ye yakın. *f_{xy}, (x_0, y_0)'da sürekli olduğundan öyle bir $\eta \in (0, r]$ vardır ki $\text{parallel}(s,t) - (x_0, y_0)\text{parallel} < \eta$ olan her $(s,t) \in U$ için $| f_{xy}(s,t) - c | < \varepsilon$ olur. $\delta = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{\eta}{2}\right\}$ alalım. $0 < | h | < \delta$ ve $0 < | k | < \delta$ olsun. Lemma 13.1 ilk kısmı $F(h,k) = hk\, f_{xy}(s_1, t_1)$ olacak biçimde dikdörtgenin içinde bir (s_1, t_1) noktası verir ve*

$$\text{parallel}(s_1, t_1) - (x_0, y_0)\text{parallel} \leq \sqrt{h^2 + k^2} < \sqrt{2}\,\delta < \eta$$

olduğundan

$$\left| \frac{F(h,k)}{hk} - c \right| = | f_{xy}(s_1, t_1) - c | < \varepsilon$$

bulunur.
$k \to 0$ limiti. *h sayısını sabit tutalım. İkinci farkı*

$$\frac{F(h,k)}{k} = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

biçiminde yazalım. f_y, $(x_0 + h, y_0)$ ve (x_0, y_0) noktalarında var olduğundan $k \to 0$ iken sağdaki iki fark oranı sırasıyla $f_y(x_0 + h, y_0)$ ve $f_y(x_0, y_0)$ sayılarına yakınsar. Dolayısıyla

$$\lim_{k \to 0} \frac{F(h,k)}{hk} = \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h}$$

olur. Bir önceki adımdaki eşitsizlik $0 < | k | < \delta$ olan her k için geçerlidir; limite geçildiğinde kesin eşitsizlik $\leq$'ye dönüşebilir ama korunur. Böylece $0 < | h | < \delta$ olan her h için

$$\left| \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} - c \right| \leq \varepsilon.$$

Sonuç. *$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan bu, $\dfrac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h}$ fark oranının $h \to 0$ iken c'ye yakınsaması demektir (ε yerine $\dfrac{\varepsilon}{2}$ alınırsa kesin eşitsizlik elde edilir). Bu limit tanım gereği $f_{yx}(x_0, y_0)$'dır. Yani $f_{yx}(x_0, y_0)$ vardır ve $c = f_{xy}(x_0, y_0)$'a eşittir.* ■

x ile y'nin rolleri değiştirilirse aynı sonuç öbür yönde de geçerlidir: f_x, f_y ve f_{yx} bir komşulukta var ve f_{yx} noktada sürekliyse f_{xy} o noktada vardır ve f_{yx}'e eşittir. Kısacası f_x ve f_y bir komşulukta varsa, iki karışık türevden biri o komşulukta var ve noktada sürekli olduğunda öbürü de o noktada vardır ve ona

 CC BY-NC-SA 4.0

eşittir. Örnek 13.7 bu açıdan da tutarlıdır: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ olduğundan güçlü biçim gereği ne f_{xy} ne de f_{yx} başlangıç noktasında sürekli olabilir.

13.6 Çok Değişken ve Yüksek Mertebe

Clairaut teoremi iki değişkenli bir sonuçtur; ama bir karışık türevde yalnız iki değişken rol oynadığından teorem hemen n değişkene ve yüksek mertebelere yayılır.

Sonuç 13.1 (n Değişkenli Clairaut Teoremi). *$\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve $f \in C^2(U)$ olsun. Her $j,k \in \{1,\ldots,n\}$ ve her $a \in U$ için*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}(a)$$

olur.

> ***İspat.***
> *$j = k$ ise söylenecek bir şey yoktur; $j \neq k$ olsun. $a \in U$ sabit olsun ve $B(a,r) \subseteq U$ olacak bir $r > 0$ seçelim. $V = B\big((0,0), r\big) \subseteq \mathbb{R}^2$ üzerinde*
>
> $$g(s,t) = f(a + se_j + te_k)$$
>
> *fonksiyonunu tanımlayalım. e_j ve e_k birbirine dik birim vektörler olduğundan $\| se_j + te_k \| = \sqrt{s^2+t^2} < r$ olur; yani $a + se_j + te_k \in B(a,r) \subseteq U$ ve g iyi tanımlıdır.*
> ***Kısmi türevlerin aktarılması.*** *$(s,t) \in V$ ve $b = a + se_j + te_k$ olsun. Küçük h için*
>
> $$g(s+h,t) - g(s,t) = f(b + he_j) - f(b)$$
>
> *olduğundan, h ile bölüp limit alınca $g_s(s,t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(b)$ bulunur; aynı biçimde $g_t(s,t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(b)$. Aynı akıl yürütmeyi g_s fonksiyonuna, yani $(s,t) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a + se_j + te_k)$ fonksiyonuna uygularsak*
>
> $$g_s(s,t+h) - g_s(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(b + he_k) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(b)$$
>
> *olur ve*
>
> $$g_{st}(s,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}(b)$$
>
> *bulunur. g_t ile başlayan aynı hesap*
>
> $$g_{ts}(s,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}(b)$$
>
> *verir. Dört kısmi türev V'nin her noktasında vardır.*
> ***Süreklilik.*** *$\Phi(s,t) = a + se_j + te_k$ dönüşümünün bileşenleri birinci dereceden polinomlar olduğundan Φ süreklidir (Teorem 10.3, Teorem 10.5). $g_{st} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j} \circ \Phi$ ve $g_{ts} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k} \circ \Phi$ sürekli fonksiyonların bileşkesi olduğundan süreklidir (Teorem 10.4).*
> ***Sonuç.*** *g, $(0,0)$ noktasında Teorem 13.1 koşullarını sağlar: $g_{st}(0,0) = g_{ts}(0,0)$. $\Phi(0,0) = a$ olduğundan bu, istenen eşitliğin a noktasındaki hâlidir.* ■

İspatta $f \in C^2(U)$ yerine daha azı da yeterdi: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}$ ve $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}$ türevleri U'da var ve a noktasında sürekliyse eşitlik a'da geçerlidir. n değişkenli bir f fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevleri $n \times n$ bir matrise dizilebilir; bu matris Taylor Formülü bölümünde Hessian matrisi adıyla (Tanım 17.1) karşımıza çıkacak ve Sonuç 13.1 gereği C^2 fonksiyonlarda simetrik olacak.

Sonuç 13.2 (Yüksek Mertebede Sıranın Önemsizliği). *$\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık, $k \geq 2$, $f \in C^k(U)$ ve $2 \leq p \leq k$ olsun. $(i_1, \ldots, i_p)$ indis dizilerinden biri öbürünün yeniden sıralanışı olan iki p. mertebe kısmi türev U üzerinde eşittir. Dolayısıyla f'nin her p. mertebe kısmi türevi yalnız her x_j değişkenine göre kaç kez (p_j kez) türev alındığına bağlıdır ve*

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1}\, \partial x_2^{p_2} \cdots \partial x_n^{p_n}}$$

biçiminde yazılabilir; burada $p_1 + \ldots + p_n = p$'dir.

> ***İspat.***
> *Kısalık için $\partial_j g = \dfrac{\partial g}{\partial x_j}$ yazalım; $(i_1, \ldots, i_p)$ dizisine karşılık gelen türev $\partial_{i_p} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f$ olur (önce ∂_{i_1} uygulanır).*
> ***Komşu iki indisin yer değiştirmesi.*** *$1 \leq q < p$ olsun ve i_q ile i_{q+1} indislerinin yerini değiştirelim. $g = \partial_{i_{q-1}} \cdots \partial_{i_1} f$ olsun ($q = 1$ ise $g = f$). g, f'nin $q-1$ mertebeli bir kısmi türevidir; g'nin mertebesi en çok 2 olan kısmi türevleri f'nin mertebesi en çok $q+1 \leq p \leq k$ olan kısmi türevleridir ve $f \in C^k(U)$ olduğundan U üzerinde var ve süreklidir. Yani $g \in C^2(U)$'dur ve Sonuç 13.1 gereği*
>
> $$\partial_{i_{q+1}} \partial_{i_q} g = \partial_{i_q} \partial_{i_{q+1}} g$$
>
> *olur. Bu iki taraf U üzerinde aynı fonksiyon olduğundan, ikisine de $\partial_{i_{q+2}}, \ldots, \partial_{i_p}$ türevleri sırayla uygulanınca aynı sonuç çıkar. Demek ki komşu iki türevin yerini değiştirmek sonucu değiştirmez.*
> ***Keyfi yeniden sıralama.*** *Bir dizinin her yeniden sıralanışına sonlu sayıda komşu yer değiştirmeyle ulaşılabilir: önce ilk sıraya gelmesi gereken indis, komşularıyla art arda yer değiştirerek başa taşınır; sonra ikinci sıraya gelmesi gereken indis ikinci sıraya taşınır ve bu böyle sürer. Her adımda türev değişmediğinden iki türev eşittir. Sonuç olarak türev yalnız her j indisinin dizide kaç kez geçtiğine, yani $(p_1, \ldots, p_n)$ çoklu indisine bağlıdır.* ■

Örneğin iki değişkenli bir f fonksiyonu $C^3(U)$ sınıfındaysa sekiz üçüncü mertebe kısmi türevden yalnız dördü farklı olabilir:

$$\begin{aligned} &f_{xxx}, \\ &f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \\ &f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}, \\ &f_{yyy}. \end{aligned}$$

Örnek 13.4 içindeki eşitliklerin nedeni budur. Genel olarak iki değişkende C^p sınıfından bir fonksiyonun 2^p tane p. mertebe kısmi türevinden en çok $p+1$ tanesi farklıdır ($p_1 = 0, 1, \ldots, p$); üç değişkende C^2 sınıfından bir fonksiyonun dokuz ikinci mertebe türevinden en çok altısı farklıdır. Teoremi yüksek mertebeye taşımanın yolu, onu bir kısmi türeve uygulamaktır. Örneğin $f_y \in C^2(U)$ ise Clairaut teoremi f_y fonksiyonuna uygulanınca $(f_y)_{xy} = (f_y)_{yx}$, yani $f_{yxy} = f_{yyx}$ çıkar; $f \in C^2(U)$ ise f_{xy} ile f_{yx} aynı fonksiyondur ve y'ye göre türevleri (varsa) de aynıdır: $f_{xyy} = f_{yxy}$.

13.7 Laplace Denklemi

İkinci mertebeden kısmi türevlerin en önemli uygulamalarından biri, durağan sıcaklık dağılımı, elektrostatik ve kütle çekim potansiyeli gibi denge durumlarını betimleyen Laplace denklemidir.

Tanım 13.4 (Laplace Operatörü ve Laplace Denklemi). *$\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve $f \in C^2(U)$ olsun.*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

fonksiyonuna f'nin **Laplasyeni**, $f \mapsto \Delta f$ işlemine **Laplace operatörü** denir. $\Delta f = 0$ denklemine **Laplace denklemi** denir. İki ve üç değişkende Laplace denklemi sırasıyla

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

biçimini alır.

Yani Laplasyen, bütün değişkenlere göre ikinci mertebe saf kısmi türevlerin toplamıdır; karışık türevler ona girmez.

Tanım 13.5 (Harmonik Fonksiyon). $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık olsun. $f \in C^2(U)$ ve U'nun her noktasında $\Delta f = 0$ ise f'ye U **üzerinde harmonik** fonksiyon denir.

Yani harmonik fonksiyon, Laplace denkleminin C^2 sınıfından bir çözümüdür. Laplace denklemi lineerdir: f ve g harmonikse ve $c \in \mathbb{R}$ ise $f + g$ ve cf de harmoniktir, çünkü kısmi türev almak toplamı ve sabitle çarpımı korur. Sabit fonksiyonlar ve $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b$ biçimindeki fonksiyonlar harmoniktir, çünkü ikinci mertebe kısmi türevlerinin hepsi sıfırdır. Düzlemde $x^2 - y^2$ ve xy harmoniktir ($2 - 2 = 0$ ve $0 + 0 = 0$), ama $x^2 + y^2$ değildir ($2 + 2 = 4$).

Örnek 13.8 (Üstel ve Trigonometrik Bir Harmonik Fonksiyon). $f(x, y) = e^x \cos y$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde harmonik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
f, düzgün fonksiyonların çarpımı olduğundan $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dolayısıyla $C^2(\mathbb{R}^2)$ sınıfındadır. Kısmi türevler:

$$\begin{aligned} f_x &= e^x \cos y, \\ f_{xx} &= e^x \cos y, \\ f_y &= -e^x \sin y, \\ f_{yy} &= -e^x \cos y. \end{aligned}$$

Toplarsak her (x, y) için $f_{xx} + f_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$; f harmoniktir. Aynı hesap $e^x \sin y$ için de $f_{xx} = e^x \sin y$ ve $f_{yy} = -e^x \sin y$ verir; o da harmoniktir. ■

Örnek 13.9 (Logaritmik Bir Harmonik Fonksiyon). $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ fonksiyonunun $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ üzerinde harmonik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
U açıktır ve U üzerinde $x^2 + y^2 > 0$ olduğundan f tanımlıdır. Zincir kuralıyla

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

olur. Bölüm kuralıyla

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

f, x ile y'nin yer değiştirmesiyle değişmediğinden aynı hesap

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{2y}{x^2 + y^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

verir. Bütün ikinci mertebe kısmi türevler U üzerinde paydası sıfır olmayan rasyonel fonksiyonlardır, dolayısıyla süreklidir ve $f \in C^2(U)$'dur. Toplarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_{xx} + f_{yy} = \frac{2(y^2 - x^2) + 2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

f, U üzerinde harmoniktir. $f = 2\ln \| (x,y) \|$ olduğundan bu fonksiyon yalnız başlangıç noktasına uzaklığa bağlıdır. ■

Uzayda uzaklığa bağlı harmonik fonksiyonlar logaritma değil, bir kuvvet biçimindedir.

Örnek 13.10 (Uzaklığın Kuvveti ve Laplace Denklemi). $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}$ fonksiyonu hangi α değerleri için U üzerinde $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ Laplace denklemini sağlar?

Çözüm.
Kısalık için $u = x^2 + y^2 + z^2$ yazalım; U üzerinde $u > 0$'dır.
Birinci türev. $t \mapsto t^{\alpha}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilir ve türevi $\alpha t^{\alpha-1}$'dir. $u_x = 2x$ olduğundan zincir kuralıyla

$$f_x = \alpha\, u^{\alpha-1} \cdot 2x = 2\alpha x\, u^{\alpha-1}.$$

İkinci türev. Çarpım kuralı ve aynı zincir kuralıyla

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\alpha\, u^{\alpha-1} + 2\alpha x \cdot (\alpha-1)\, u^{\alpha-2} \cdot 2x \\ &= 2\alpha\, u^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\, x^2 u^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Simetri. f, değişkenlerin her yer değiştirmesinde aynı kaldığından

$$\begin{aligned} f_{yy} &= 2\alpha\, u^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\, y^2 u^{\alpha-2}, \\ f_{zz} &= 2\alpha\, u^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\, z^2 u^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Toplam. $x^2+y^2+z^2 = u$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta f &= 6\alpha\, u^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\, u \cdot u^{\alpha-2} \\ &= \big(\,6\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha \,\big)\, u^{\alpha-1} = 2\alpha(2\alpha+1)\, u^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Karar. U üzerinde $u^{\alpha-1} > 0$ olduğundan $\Delta f = 0$ ancak ve ancak $\alpha(2\alpha+1) = 0$, yani $\alpha = 0$ ya da $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ olduğunda sağlanır. $\alpha = 0$ için $f = 1$ sabit fonksiyondur. $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ için

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\| (x,y,z) \|}$$

başlangıç noktasına uzaklığın tersidir; bu fonksiyon bir noktasal kütlenin çekim potansiyelinin ya da bir noktasal yükün elektrostatik potansiyelinin biçimidir. İki durumda da ikinci mertebe kısmi türevler U üzerinde süreklidir (polinomların ve u'nun kuvvetlerinin çarpımları), yani $f \in C^2(U)$ ve f harmoniktir. ■

13.8 Alıştırmalar

Alıştırma 13.1 (Kalan Üçüncü Mertebe Türevler). $f(x,y) = x^3y^2 + x^4\sin y + \cos(xy)$ fonksiyonunun f_{xyy}, f_{yxy}, f_{yyx} ve f_{yyy} üçüncü mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız ve ilk üçünün eşit olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.
Örnek 13.2 içinde bulduğumuz

$$\begin{aligned} f_{xy} = f_{yx} &= 6x^2y + 4x^3\cos y - \sin(xy) - xy\cos(xy), \\ f_{yy} &= 2x^3 - x^4\sin y - x^2\cos(xy) \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

türevlerinden başlayalım.
f_{xyy}. f_{xy}'yi y'ye göre türetelim. Son iki terimden $\big(-\sin(xy)\big)_y = -x\cos(xy)$ ve

$$\big(-xy\cos(xy)\big)_y = -x\cos(xy) + x^2 y\sin(xy)$$

gelir. Buradan

$$f_{xyy}(x,y) = 6x^2 - 4x^3\sin y - 2x\cos(xy) + x^2 y\sin(xy).$$

f_{yxy}. $f_{yx} = f_{xy}$ olduğundan $f_{yxy} = (f_{yx})_y = (f_{xy})_y = f_{xyy}$.
f_{yyx}. f_{yy}'yi x'e göre türetelim. Son terim bir çarpımdır:

$$\big(-x^2\cos(xy)\big)_x = -2x\cos(xy) + x^2 y\sin(xy).$$

Buradan

$$f_{yyx}(x,y) = 6x^2 - 4x^3\sin y - 2x\cos(xy) + x^2 y\sin(xy)$$

bulunur ve f_{xyy} ile aynıdır.
f_{yyy}. f_{yy}'yi y'ye göre türetelim; $\big(-x^2\cos(xy)\big)_y = x^3\sin(xy)$ olduğundan

$$f_{yyy}(x,y) = -x^4\cos y + x^3\sin(xy).$$

Üç türevin eşitliği, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ olduğundan Sonuç 13.2 ile de beklenen sonuçtur. ■

Alıştırma 13.2 (Birinci Mertebe Türevlerin Sürekliliği). Örnek 13.6 içindeki f fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevlerinin $\mathbb{R}^2$'de sürekli olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz ve $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ olduğu sonucunu çıkarınız.

Çözüm.
Başlangıç noktası dışında. $(x,y) \neq (0,0)$ noktalarında f, f_x ve f_y paydası sıfır olmayan rasyonel fonksiyonlardır; polinomların sürekliliği (Teorem 10.3) ve bölümün sürekliliği (Teorem 10.2) gereği bu noktalarda süreklidirler.
İki eşitsizlik. $(x-y)^2 \geq 0$ ve $(x+y)^2 \geq 0$ eşitsizliklerinden $2 \mid xy \mid \leq x^2 + y^2$, dolayısıyla $4x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2$ çıkar. Ayrıca $\mid x^2 - y^2 \mid \leq x^2 + y^2$'dir. $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$\frac{\mid x^2 - y^2 \mid}{x^2 + y^2} \leq 1$$

ve

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \leq 1$$

olur.
f_x başlangıç noktasında. Örnek 13.6 içindeki ilk formülü

$$f_x(x,y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

biçiminde yazalım. İki eşitsizlik gereği $(x,y) \neq (0,0)$ için $\mid f_x(x,y) \mid \leq 2 \mid y \mid \leq 2 \parallel (x,y) \parallel$ olur. $f_x(0,0) = 0$'dır. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ alalım. $\parallel (x,y) \parallel < \delta$ ise

$$\mid f_x(x,y) - f_x(0,0) \mid \leq 2 \parallel (x,y) \parallel < 2\delta = \varepsilon$$

olur (başlangıç noktasında fark sıfırdır). Tanım 10.1 gereği f_x, $(0,0)$'da süreklidir.
f_y başlangıç noktasında. Aynı biçimde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_y(x,y) = x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

olduğundan $\mid f_y(x,y) \mid \leq 2 \mid x \mid \leq 2 \parallel (x,y) \parallel$ ve aynı $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ seçimi f_y'nin $(0,0)$'da sürekli olduğunu verir.
***f*'nin kendisi.** $(x,y) \neq (0,0)$ için ilk eşitsizlik ve $2 \mid xy \mid \leq x^2+y^2$ gereği

$$\mid f(x,y) \mid = \mid xy \mid \frac{\mid x^2-y^2 \mid}{x^2+y^2} \leq \mid xy \mid \leq \frac{\parallel (x,y) \parallel^2}{2}$$

olur; $\parallel (x,y) \parallel < \sqrt{2\varepsilon}$ için $\mid f(x,y) - f(0,0) \mid < \varepsilon$ olduğundan f de başlangıç noktasında süreklidir. Mertebesi en çok 1 olan bütün kısmi türevler $\mathbb{R}^2$'de var ve sürekli olduğundan $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$'dir. ■

Alıştırma 13.3 (Saf İkinci Mertebe Türevler). Örnek 13.6 içindeki f fonksiyonu için $f_{xx}(0,0)$ ve $f_{yy}(0,0)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.
$f_{xx}(0,0)$. f_x formülünde $y=0$ koyarsak $h \neq 0$ için

$$f_x(h,0) = \frac{h^4 \cdot 0 + 0 - 0}{h^4} = 0$$

olur; $f_x(0,0) = 0$ olduğundan her h için $f_x(h,0) = 0$'dır. Tanımdan

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$f_{yy}(0,0)$. f_y formülünde $x=0$ koyarsak $k \neq 0$ için $f_y(0,k) = \dfrac{0}{k^4} = 0$ olur; $f_y(0,0) = 0$ ile birlikte her k için $f_y(0,k) = 0$'dır. Tanımdan

$$f_{yy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_y(0,k) - f_y(0,0)}{k} = 0.$$

Saf türevler başlangıç noktasında sıfırdır; karışık türevler ise -1 ve 1 çıkmıştı. ■

Alıştırma 13.4 (Sinüslü Bir Karışık Türev Örneği).

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\!\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x+y}{x-y}\right), & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

fonksiyonu için $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Başlangıç noktasında birinci türevler. $h \neq 0$ için $(h,0)$ noktasında $x \neq y$'dir ve $f(h,0) = h \cdot 0 \cdot \sin(\ldots) = 0$; aynı biçimde $f(0,h) = 0$. Dolayısıyla

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

ve aynı biçimde $f_y(0,0) = 0$ olur.
Eksenler üzerinde birinci türevler. $k \neq 0$ olsun; $f(0,k) = 0$'dır. $0 < \mid h \mid < \mid k \mid$ için $h \neq k$ olduğundan

$$\frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = k\sin\!\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{h+k}{h-k}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $h \to 0$ iken $\dfrac{h+k}{h-k} \to \dfrac{k}{-k} = -1$ ve sinüs sürekli olduğundan fark oranı $k\sin\!\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -k$ sayısına yakınsar. Yani $f_x(0,k) = -k$; bu, $f_x(0,0) = 0$ ile birlikte her k için geçerlidir. Aynı biçimde $h \neq 0,\ 0 < |\,k\,| < |\,h\,|$ için

$$\frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = h\sin\!\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{h+k}{h-k}\right) \underset{k\to 0}{\to} h\sin\frac{\pi}{2} = h$$

olduğundan her h için $f_y(h,0) = h$'dir.
Fark oranlarının limiti.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-k}{k} = -1,$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1.$$

Karışık türevler yine farklıdır. Bu, Clairaut teoremiyle çelişmez; çünkü başlangıç noktasının hiçbir komşuluğunda teoremin koşulları sağlanmaz. Örneğin $a \neq 0$ için $f(a,a) = 0$ ve

$$f(a+h,a) = a(a+h)\cos\frac{\pi a}{h}$$

olduğundan $h_m = \dfrac{a}{2m}$ alınınca

$$\frac{f(a+h_m,a) - f(a,a)}{h_m} = (2m+1)\,a$$

sınırsız büyür ve $f_x(a,a)$ yoktur. (a,a) biçimindeki noktalar başlangıç noktasının her komşuluğunda bulunur. ■

Alıştırma 13.5 (Başlangıç Noktasında Karışık Türevin Olmaması). Örnek 13.5 içindeki $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $(f(0,0) = 0)$ fonksiyonu için $(x,y) \neq (0,0)$ noktalarında $f_{xy} = f_{yx}$ olduğunu gösteriniz ve $f_{xy}(0,0)$ ile $f_{yx}(0,0)$ türevlerinin var olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Başlangıç noktası dışında. Örnek 13.5 içinde $f_x = \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ ve $f_y = \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ bulmuştuk. Paydanın y'ye göre türevi $4y(x^2+y^2)$'dir; bölüm kuralı ve ortak çarpanın sadeleştirilmesiyle

$$f_{xy} = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - 4y(y^3 - x^2y)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$= \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

olur. Aynı biçimde x'e göre türev alınarak

$$f_{yx} = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2+y^2) - 4x(x^3 - xy^2)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$= \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

bulunur. Başlangıç noktası dışında $f_{xy} = f_{yx}$'tir.
Başlangıç noktasında. $f_x(0,0) = 0$ ve $k \neq 0$ için $f_x(0,k) = \dfrac{k^3}{k^4} = \dfrac{1}{k}$'dir. Fark oranı

$$\frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \frac{1}{k^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$k \to 0$ iken $+\infty$'a gider; sonlu bir limiti yoktur ve $f_{xy}(0,0)$ yoktur. Aynı biçimde $f_y(h,0) = \dfrac{h^3}{h^4} = \dfrac{1}{h}$ olduğundan $\dfrac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \dfrac{1}{h^2} \to +\infty$ ve $f_{yx}(0,0)$ da yoktur. ■

Alıştırma 13.6 (Üç Değişkende Üçüncü Mertebe). $f(x,y,z) = e^{xyz}$ fonksiyonu için f_{xyz} ve f_{zyx} türevlerini ayrı ayrı hesaplayarak eşit olduklarını doğrulayınız.

Çözüm.
f_{xyz}. $f_x = yz\,e^{xyz}$. y'ye göre çarpım kuralıyla

$$f_{xy} = z\,e^{xyz} + yz \cdot xz\,e^{xyz} = (z + xyz^2)\,e^{xyz}.$$

z'ye göre yine çarpım kuralıyla

$$\begin{aligned} f_{xyz} &= (1 + 2xyz)\,e^{xyz} + (z + xyz^2) \cdot xy\,e^{xyz} \\ &= (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\,e^{xyz}. \end{aligned}$$

f_{zyx}. $f_z = xy\,e^{xyz}$ ve

$$f_{zy} = x\,e^{xyz} + xy \cdot xz\,e^{xyz} = (x + x^2yz)\,e^{xyz}$$

olur. x'e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} f_{zyx} &= (1 + 2xyz)\,e^{xyz} + (x + x^2yz) \cdot yz\,e^{xyz} \\ &= (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\,e^{xyz}. \end{aligned}$$

İki türev eşittir. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ olduğundan bu, Sonuç 13.2 ile de beklenen sonuçtur: iki türevde de her değişkene göre birer kez türev alınmıştır. ■

Alıştırma 13.7 (Düzlemde Uzaklığın Kuvveti). $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x,y) = (x^2 + y^2)^\alpha$ fonksiyonu hangi α değerleri için U üzerinde harmoniktir?

Çözüm.
$u = x^2 + y^2 > 0$ yazalım. Örnek 13.10 içindeki hesap değişmeden

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\alpha\,u^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\,x^2u^{\alpha-2}, \\ f_{yy} &= 2\alpha\,u^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\,y^2u^{\alpha-2} \end{aligned}$$

verir. Bu kez yalnız iki terim toplanır ve $x^2 + y^2 = u$ olduğundan

$$\Delta f = 4\alpha\,u^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\,u^{\alpha-1} = 4\alpha^2\,u^{\alpha-1}$$

olur. $u^{\alpha-1} > 0$ olduğundan $\Delta f = 0$ ancak ve ancak $\alpha = 0$ ise sağlanır. Düzlemde uzaklığın sabit olmayan hiçbir kuvveti harmonik değildir; uzaydaki $\dfrac{1}{\|\,(x,y,z)\,\|}$ fonksiyonunun rolünü düzlemde $\ln(x^2+y^2)$ fonksiyonu (Örnek 13.9) üstlenir. ■

Alıştırma 13.8 (Açı Fonksiyonu Harmoniktir). $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ fonksiyonunun $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ açık yarı düzleminde harmonik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Birinci türevler. $(\arctan t)' = \dfrac{1}{1+t^2}$ ve zincir kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$f_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

İkinci türevler. Bölüm kuralıyla

$$f_{xx} = \frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_{yy} = -\frac{x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Sonuç. İkinci mertebe kısmi türevler U üzerinde paydası sıfır olmayan rasyonel fonksiyonlardır, dolayısıyla süreklidir ve $f \in C^2(U)$'dur. $f_{xx} + f_{yy} = 0$ olduğundan f, U üzerinde harmoniktir. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazılırsa U üzerinde $f = \theta$ olur; yani kutupsal açı da harmonik bir fonksiyondur. ■

Bu bölümde kısmi türevleri art arda alarak yüksek mertebeden kısmi türevleri ve C^k sınıflarını kurduk; Clairaut teoremiyle de karışık kısmi türevler sürekli olduğunda türev alma sırasının önemsiz olduğunu gördük. Yine de Örnek 13.5 rahatsız edici bir gerçeği ortaya koydu: bütün kısmi türevleri var olan bir fonksiyon sürekli bile olmayabilir. Demek ki kısmi türevler, tek değişkenli türevin çok değişkendeki tam karşılığı değildir. Bu karşılık, fonksiyonu bir noktanın yakınında bir lineer dönüşümle yaklaşık olarak ifade etme fikrine dayanır: Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel

Kısmi Türevler bölümünde bir fonksiyonun her değişkene göre ayrı ayrı türevini aldık. Kısmi türev, fonksiyonu yalnız koordinat eksenlerine paralel doğrular üzerinde inceler ve bu doğruların dışında olup bitene kördür. Bu yüzden kısmi türevleri olan bir fonksiyon süreksiz bile olabilir: $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun (orijinde 0 tanımlanarak) orijinde iki kısmi türevi de vardır ve sıfırdır, oysa fonksiyon $y = x$ doğrusu üzerinde hep $\dfrac{1}{2}$ değerini alır ve orijinde sürekli değildir (Örnek 12.13). Tek değişkende böyle bir şey olamazdı: türevlenebilen fonksiyon süreklidir (bkz. Analiz 2). Demek ki kısmi türevlerin varlığı, tek değişkenli türevin çok değişkenli karşılığı olmaya yetmez; daha güçlü bir kavram gerekir.
Bu kavramı bulmak için tek değişkenli türeve farklı bir gözle bakacağız. Türevi bir fark oranının limiti olarak değil, fonksiyona bir nokta yakınında bir lineer fonksiyonla iyi yaklaşılabilmesi olarak okuyacağız. Bu okuma bölme işlemine ihtiyaç duymadığı için $\mathbb{R}^n$'ye olduğu gibi taşınır ve aradığımız kavramı verir: türevlenebilir fonksiyon süreklidir, bütün kısmi türevlere sahiptir ve grafiğinin bir teğet düzlemi vardır.
Bu bölümde yalnız reel değerli $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını ele alıyoruz. Vektör değerli fonksiyonların türevi, Jacobi matrisi ve zincir kuralı Jacobi Matrisi ve Zincir Kuralı bölümünün konusudur.

14.1 Tek Değişkende Türev: Doğrusal Yaklaşım

Analiz 2'de fark oranının limiti olarak tanımlanan türevi, bölme içermeyen bir biçimde yeniden yazalım. f, a noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı ve a'da türevlenebilir olsun. Türevin ε–δ betimlemesi (bkz. Analiz 2) bunu şöyle ifade eder:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)\,h}{h} = 0.$$

Paydada h yerine $\mid h \mid$ yazmak hiçbir şeyi değiştirmez, çünkü iki kesrin mutlak değerleri aynıdır. $h \neq 0$ için kesrin kendisine $\varepsilon(h)$ der ve $\varepsilon(0) = 0$ koyarsak

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)\,h + \varepsilon(h)\,h$$

ve $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ olur. Yani $\Delta f = f(a+h) - f(a)$ artımı iki parçaya ayrılır: h'ye göre lineer olan $f'(a)\,h$ ana kısmı ve h'den daha hızlı sıfıra giden $\varepsilon(h)\,h$ hata kısmı. Ana kısma f'nin a'daki **diferansiyeli** denir; $h = dx$ yazılarak $dy = f'(a)\,dx$ biçiminde gösterilir. h küçükken $\Delta f \approx dy$ yaklaşımı kullanılır.
Ana kısım, $T(u) = f'(a)\,u$ kuralıyla verilen $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonunun h'deki değeridir. Tersine, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye her lineer T fonksiyonu bir sabitle çarpmadır: $T(u) = T(u \cdot 1) = u\,T(1)$. Böylece f'nin a'da türevlenebilir olması, öyle bir $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonunun var olmasıdır ki

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mid f(a+h) - f(a) - T(h) \mid}{\mid h \mid} = 0$$

olsun; bu durumda $T(u) = f'(a)\,u$'dur. Gerçekten, $T(u) = cu$ bu koşulu sağlıyorsa

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c \right| = \frac{\mid f(a+h) - f(a) - ch \mid}{\mid h \mid} \to 0$$

olduğundan $f'(a)$ vardır ve c'ye eşittir. $y = f(a) + T(x-a)$ doğrusu grafiğin teğetidir ve $x \mapsto f(a) + T(x-a)$ fonksiyonu f'nin a'daki doğrusallaştırmasıdır (bkz. Analiz 2). Türev, $f(a+h) - f(a)$ artımına en iyi uyan lineer fonksiyonu belirleyen sayıdır.

Örnek 14.1 (Küp Fonksiyonunun Doğrusal Yaklaşımı). $f(x) = x^3$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $T(u) = 3a^2 u$ lineer fonksiyonu için

$$\lim_{x\to a} \frac{\mid f(x) - f(a) - T(x-a) \mid}{\mid x - a \mid} = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Payı çarpanlarına ayıralım. $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+xa+a^2)$ olduğundan

$$\begin{aligned} x^3 - a^3 - 3a^2(x-a) &= (x-a)\,\big(\, x^2 + xa + a^2 - 3a^2 \,\big) \\ &= (x-a)\,\big(\, x^2 + xa - 2a^2 \,\big) = (x-a)^2(x+2a) \end{aligned}$$

olur; son adımda $x^2 + xa - 2a^2 = (x-a)(x+2a)$ çarpanlaması kullanıldı. $x \neq a$ için

$$\frac{\mid f(x) - f(a) - T(x-a) \mid}{\mid x - a \mid} = \mid x - a \mid \mid x + 2a \mid \to 0 \cdot \mid 3a \mid = 0$$

bulunur. Demek ki x^3 fonksiyonu her a'da türevlenebilir ve $f'(a) = 3a^2$'dir. Hata $(x-a)^2(x+2a)$, a yakınında $\mid x - a \mid$'nın karesi mertebesindedir; oran bu yüzden sıfıra gider. ■

Bu biçimin $\mathbb{R}^n$'ye taşınmasının önünde engel yoktur: h artık bir vektör, $\mid h \mid$ yerine $\parallel h \parallel$, T de $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye lineer bir fonksiyon olur. Fark oranı ise taşınamaz, çünkü bir vektöre bölmek anlamsızdır. Kısmi türev bu engeli h'yi bir eksen üzerinde tutarak aşıyordu; türevlenebilme ise h'nin 0'a yaklaşabileceği bütün yolları aynı anda hesaba katar.

14.2 Türevlenebilmenin Tanımı

Tek değişkendeki biçimi, mutlak değerin yerine normu koyarak $\mathbb{R}^n$'ye taşıyoruz. Önce $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye lineer fonksiyonların neye benzediğini hatırlayalım.
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineer olsun. Her $h \in \mathbb{R}^n$ doğal tabanla (Tanım 1.4) $h = h_1 e_1 + \ldots + h_n e_n$ biçiminde yazılır ve lineerlik

$$T(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j\, T(e_j) = \langle A, h \rangle$$

verir; burada $A = \big(\, T(e_1), \ldots, T(e_n) \,\big)$'dir. Tersine, her $A \in \mathbb{R}^n$ için $h \mapsto \langle A, h \rangle$ fonksiyonu iç çarpımın özellikleri (Önerme 1.2) gereği lineerdir. Demek ki $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye lineer fonksiyonlar, sabit bir vektörle iç çarpımdan ibarettir. Bu yüzden tanımı bir lineer T yerine bir A vektörüyle yazabiliriz.

Tanım 14.1 (Türevlenebilme). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. Öyle bir $A \in \mathbb{R}^n$ vektörü varsa ki

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \langle A, h \rangle}{\parallel h \parallel} = 0$$

olsun, f'ye a noktasında **türevlenebilir** (diferansiyellenebilir) denir. Eşdeğer olarak, öyle bir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu vardır ki yukarıdaki limit $\langle A, h \rangle$ yerine $T(h)$ ile sıfırdır. $x = a + h$ yazılırsa koşul

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \langle A, x - a \rangle}{\parallel x - a \parallel} = 0$$

biçimini alır. Bu durumda $h \mapsto \langle A, h \rangle$ lineer fonksiyonuna f'nin a noktasındaki **türevi** denir ve $Df(a)$ ile gösterilir. (A vektörünün tek olduğunu Teorem 14.2 gösterecek.)
f, bir $U \subseteq D$ açık kümesinin her noktasında türevlenebiliyorsa f'ye $\boldsymbol{U}$ **üzerinde türevlenebilir** denir.

Yani $f(a+h)$ değerine $f(a) + \langle A, h \rangle$ ile yaklaşıyoruz ve bu yaklaşımın hatası $\parallel h \parallel$'den daha hızlı sıfıra gidiyor: hatanın a'ya olan uzaklığa oranı, h hangi yoldan 0'a giderse gitsin 0'a yakınsar. A vektörü a noktasına bağlıdır ama h'ye bağlı değildir.
Birkaç ayrıntı:

- $a \in D^\circ$ koşulu, $B(a, r) \subseteq D$ olacak bir $r > 0$ bulunmasını sağlar. O zaman $0 < \parallel h \parallel < r$ olan her h için kesir tanımlıdır ve 0, kesrin tanım kümesinin bir yığılma noktasıdır; limit (Tanım 8.7) anlamlıdır.
- $n = 1$ iken A bir sayı, $\langle A, h \rangle = Ah$ ve $\parallel h \parallel = \mid h \mid$ olur; tanım önceki kısımdaki betimlemenin kendisidir ve $A = f'(a)$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

- Kısmi türevlenebilmeden ayırt etmek için bu kavrama bazı kitaplarda **tam türevlenebilme** denir; türeve de **tam türev** ya da **diferansiyel** denir. Biz kısaca "türevlenebilir" ve "türev" diyeceğiz.

Tanımdaki limiti, fonksiyonun artımını açıkça gösteren biçimlerde yazmak işimizi kolaylaştırır.

Önerme 14.1 (Türevlenebilmenin Eşdeğer Biçimleri). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D^\circ$, $B(a,r) \subseteq D$ ve $A = (A_1, ..., A_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

1. *f, a'da türevlenebilirdir ve tanımdaki vektör A'dır.*
2. *$B(0,r)$ üzerinde tanımlı ve $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ olan bir η fonksiyonu vardır ki her $h \in B(0,r)$ için*
$$f(a+h) - f(a) = \langle A, h\rangle + \eta(h) \parallel h \parallel$$
olur.
3. *$B(0,r)$ üzerinde tanımlı ve her biri $h \to 0$ iken 0'a giden $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ fonksiyonları vardır ki her $h \in B(0,r)$ için*
$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} A_j h_j + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(h)\, h_j$$
olur.

İspat.
1'den 2'ye. *$0 <\parallel h \parallel< r$ için*
$$\eta(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - \langle A, h\rangle}{\parallel h \parallel}$$
ve $\eta(0) = 0$ tanımlayalım. $h \neq 0$ için eşitliği $\parallel h \parallel$ ile çarpmak 2'deki bağıntıyı verir; $h = 0$ iken iki yan da 0'dır. $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ koşulu 1'in kendisidir, çünkü limit $h = 0$ noktasındaki değere bakmaz.
2'den 1'e. *$0 <\parallel h \parallel< r$ için 2'deki bağıntıyı $\parallel h \parallel$'ye bölersek tanımdaki kesir $\eta(h)$'ye eşit çıkar ve 0'a gider.*
2'den 3'e. *$h \neq 0$ için $\varepsilon_j(h) = \eta(h)\, \dfrac{h_j}{\parallel h \parallel}$, $h = 0$ için $\varepsilon_j(0) = 0$ tanımlayalım. $h \neq 0$ iken*
$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(h)\, h_j = \frac{\eta(h)}{\parallel h \parallel} \sum_{j=1}^{n} h_j^2 = \frac{\eta(h)}{\parallel h \parallel} \parallel h \parallel^2 = \eta(h) \parallel h \parallel$$
olur; $h = 0$ iken iki yan da 0'dır. Böylece 2'deki bağıntı 3'teki biçime dönüşür. Ayrıca $h_j^2 \leq h_1^2 + ... + h_n^2$ olduğundan $\mid h_j \mid \leq \parallel h \parallel$'dir; buradan $\mid \varepsilon_j(h) \mid \leq \mid \eta(h) \mid$ çıkar ve sıkıştırma (Teorem 8.5) gereği $\varepsilon_j(h) \to 0$ olur.
3'ten 2'ye. *$h \neq 0$ için $\eta(h) = \dfrac{1}{\parallel h \parallel} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(h)\, h_j$, $h = 0$ için $\eta(0) = 0$ tanımlayalım. 2'deki bağıntı hemen sağlanır. $\mid h_j \mid \leq \parallel h \parallel$ olduğundan*
$$\mid \eta(h) \mid \leq \sum_{j=1}^{n} \mid \varepsilon_j(h) \mid \frac{\mid h_j \mid}{\parallel h \parallel} \leq \sum_{j=1}^{n} \mid \varepsilon_j(h) \mid \to 0$$
olur ve sıkıştırmayla $\eta(h) \to 0$ elde edilir. ■

İki değişkende nokta (x_0, y_0), artım (h, k) ile gösterilir ve tanımdaki vektörün bileşenlerine A ve B denir. O zaman 2. biçim
$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \eta\sqrt{h^2+k^2},$$
3. biçim ise
$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; burada η, ε_1 ve ε_2, (h,k)'ye bağlıdır ve $(h,k)\to(0,0)$ iken 0'a gider. Artımın ana kısmı $Ah+Bk$, (h,k)'ye göre lineerdir; geri kalan kısım $\sqrt{h^2+k^2}$'den hızlı söner. ε_1 ve ε_2 fonksiyonları tek türlü belirli değildir; önemli olan yalnız 0'a gitmeleridir.

Örnek 14.2 (Sabit ve Lineer Fonksiyonlar). $c\in\mathbb{R}$ ve $C\in\mathbb{R}^n$ olsun. $f(x)=c+\langle C,x\rangle$ fonksiyonunun her $a\in\mathbb{R}^n$ noktasında türevlenebilir olduğunu ve tanımdaki vektörün C olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İç çarpımın lineerliği gereği her h için

$$f(a+h)-f(a)=\langle C,a+h\rangle-\langle C,a\rangle=\langle C,h\rangle$$

olur. $A=C$ seçilirse tanımdaki kesrin payı özdeş olarak 0'dır; limit de 0'dır. Demek ki f her noktada türevlenebilir ve $Df(a)(h)=\langle C,h\rangle$'dir.
İki özel durum: $C=0$ iken f sabittir ve türevi her noktada sıfır fonksiyonudur. $c=0$ iken f lineer bir fonksiyondur ve her noktadaki türevi kendisidir: lineer bir fonksiyona en iyi uyan lineer fonksiyon kendisidir. ■

Örnek 14.3 (Bir Polinomun Türevlenebilirliği). $f(x,y)=x^2-xy$ fonksiyonunun her $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ noktasında türevlenebilir olduğunu tanımla gösteriniz.

Çözüm.
Artım. $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ için artımı açalım:

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)-f(a,b)&=(a+h)^2-(a+h)(b+k)-a^2+ab\\&=(2a-b)\,h-a\,k+h^2-hk.\end{aligned}$$

Ana kısım (h,k)'ye göre lineer olan $(2a-b)h-ak$'dır. Bu yüzden $A=(2a-b,-a)$ adayını seçiyoruz.
Kalan. Kalan h^2-hk'dır. $h^2\le h^2+k^2$ ve $|\,h\,||\,k\,|\le\dfrac{h^2+k^2}{2}$ olduğundan

$$\frac{|\,h^2-hk\,|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le\frac{2(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}=2\sqrt{h^2+k^2}\to0$$

olur. Sıkıştırmayla (Teorem 8.5) tanımdaki limit 0'dır; f, (a,b)'de türevlenebilirdir.
Eşdeğer biçim. Kalan $h^2-hk=(h-k)\,h+0\cdot k$ biçiminde de yazılabilir. $\varepsilon_1=h-k$ ve $\varepsilon_2=0$ alınırsa

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=(2a-b)\,h-a\,k+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k$$

olur ve $\varepsilon_1,\varepsilon_2,(h,k)\to(0,0)$ iken 0'a gider; eşdeğer biçimlerin 3. maddesi (Önerme 14.1) aynı sonucu verir.
Bulunan vektörün bileşenleri $f_x(a,b)=2a-b$ ve $f_y(a,b)=-a$ kısmi türevleridir. Bu bir rastlantı değildir; birazdan kanıtlayacağız. ■

Örnek 14.4 (Norm Karesinin Türevlenebilirliği). $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\|\,x\,\|^2$ fonksiyonunun her $a\in\mathbb{R}^n$ noktasında türevlenebilir olduğunu ve tanımdaki vektörün $2a$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Toplamın normunun karesi (Lemma 1.1) gereği

$$f(a+h)-f(a)=\|\,a\,\|^2+2\langle a,h\rangle+\|\,h\,\|^2-\|\,a\,\|^2=\langle 2a,h\rangle+\|\,h\,\|^2$$

olur. $A=2a$ seçilirse $h\neq0$ için

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\langle 2a,h\rangle}{\|\,h\,\|}=\frac{\|\,h\,\|^2}{\|\,h\,\|}=\|\,h\,\|\to0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. f her noktada türevlenebilir ve $Df(a)(h) = 2\langle a, h\rangle$'dir. $n = 1$ için bu, $(x^2)' = 2x$ formülüdür. ■

14.3 Türevlenebilmenin Sonuçları

Tanımın gücü, iki temel sonucu hemen vermesinden gelir: türevlenebilir fonksiyon süreklidir ve bütün kısmi türevlere sahiptir.

Teorem 14.1 (Türevlenebilir Fonksiyon Süreklidir). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. f, a'da türevlenebilirse a'da süreklidir.*

İspat.
A tanımdaki vektör ve $B(a, r) \subseteq D$ olsun. Önerme 14.1 gereği, $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ olan bir η fonksiyonuyla her $h \in B(0, r)$ için

$$f(a + h) - f(a) = \langle A, h\rangle + \eta(h) \parallel h \parallel$$

yazılır. Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) $\mid \langle A, h\rangle \mid \leq \parallel A \parallel \parallel h \parallel$ verdiğinden

$$\mid f(a + h) - f(a) \mid \leq \big(\parallel A \parallel + \mid \eta(h) \mid \big) \parallel h \parallel$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\eta(h) \to 0$ olduğundan öyle bir $\delta_1 \in (0, r]$ vardır ki $\parallel h \parallel < \delta_1$ iken $\mid \eta(h) \mid < 1$ olur.

$$\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{\parallel A \parallel + 1}\right\}$$

alalım. $x \in D$ ve $\parallel x - a \parallel < \delta$ ise $h = x - a$ için $\mid \eta(h) \mid < 1$ ve

$$\mid f(x) - f(a) \mid \leq \big(\parallel A \parallel + 1 \big) \parallel x - a \parallel < \big(\parallel A \parallel + 1 \big)\, \delta \leq \varepsilon$$

olur. Bu, f'nin a'da sürekli olmasıdır (Tanım 10.1). ■

İspatın fikri kısaca şudur: $f(a + h) - f(a)$ artımı, $\parallel h \parallel$ ile orantılı olarak küçülen $\langle A, h\rangle$ terimi ile $\parallel h \parallel$'den de hızlı küçülen bir hata teriminin toplamıdır; ikisi de $h \to 0$ iken sıfıra gider. Teoremin karşıt tersi, türevlenemezliği göstermenin en kısa yoludur.

Sonuç 14.1 (Süreksiz Fonksiyon Türevlenemez). *$f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. f, a'da sürekli değilse a'da türevlenemez.*

İspat.
f, a'da türevlenebilseydi Teorem 14.1 gereği a'da sürekli olurdu. ■

İkinci sonuç, tanımdaki A vektörünün ne olması gerektiğini söyler.

Teorem 14.2 (Türevlenebilir Fonksiyonun Kısmi Türevleri). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. f, a'da türevlenebilir ve tanımdaki vektör $A = (A_1, \ldots, A_n)$ ise f'nin a'da bütün birinci kısmi türevleri vardır ve*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = A_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

yani $A = \nabla f(a)$ olur. Özel olarak tanımdaki vektör tektir.

İspat.
$B(a, r) \subseteq D$ olsun ve $j \in \{1, \ldots, n\}$ sabitlensin. Tanımdaki kesre

$$g(h) = \frac{f(a + h) - f(a) - \langle A, h\rangle}{\parallel h \parallel}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

diyelim; varsayım gereği $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$*'dır.* $0 < |\, t\,| < r$ *için* $h = te_j$ *alırsak* $\|\, te_j\,\| = |\, t\,|$ *ve* $\langle A, te_j\rangle = tA_j$ *olur. Dolayısıyla*

$$\left|\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t} - A_j\right| = \frac{|\, f(a+te_j)-f(a)-tA_j\,|}{|\, t\,|} = |\, g(te_j)\,|$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ *verilsin ve* $0 < \|\, h\,\| < \delta$ *iken* $|\, g(h)\,| < \varepsilon$ *olacak bir* $\delta \in (0, r]$ *seçilsin.* $0 < |\, t\,| < \delta$ *ise* $0 < \|\, te_j\,\| < \delta$ *olduğundan* $|\, g(te_j)\,| < \varepsilon$ *olur. Demek ki*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t} = A_j$$

dir. Soldaki limit $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *kısmi türevinin tanımıdır (Tanım 12.1); kısmi türev vardır ve* A_j*'ye eşittir. Her bileşeni kısmi türevlerle belirlendiğinden* $A = \nabla f(a)$ *(Tanım 12.3) tek türlü belirlidir.* ■

Böylece reel değerli bir fonksiyonun türevi

$$Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_j$$

lineer fonksiyonudur: türev, gradyanla iç çarpım olarak temsil edilen bir lineer fonksiyoneldir. Bu yüzden reel değerli fonksiyonlar için "türev" ile "gradyan" çoğu zaman aynı nesnenin iki adı gibi kullanılır. Vektör değerli bir $f = (f_1, \ldots, f_m)$ fonksiyonunda türev $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir lineer dönüşüm olur ve bu dönüşümün matrisi, satırları $\nabla f_1(a), \ldots, \nabla f_m(a)$ olan Jacobi matrisidir; bunu Jacobi Matrisi ve Zincir Kuralı bölümünde kuracağız.
Teoremden, türevlenebilirliği sınarken aday vektörü aramaya gerek olmadığı sonucu çıkar: tek aday gradyandır.

Sonuç 14.2 (Gradyanla Türevlenebilme Ölçütü). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. f'nin a'da türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul, f'nin a'da kısmi türevlenebilir olması (Tanım 12.2) ve*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-\langle \nabla f(a), h\rangle}{\|\, h\,\|} = 0$$

olmasıdır.

İspat.
Koşul gerekli: f türevlenebilirse Teorem 14.2 gereği kısmi türevler vardır ve tanımdaki vektör $\nabla f(a)$'dır; limit, tanımdaki limittir. Koşul yeterli: kısmi türevler varsa $\nabla f(a)$ bir vektördür ve limitin sıfır olması, tanımın $A = \nabla f(a)$ ile sağlanmasıdır. ■

Buna göre bir kısmi türevin olmadığı noktada fonksiyon türevlenemez. Bir noktada bütün kısmi türevler var olsa bile türevlenebilirlik için ölçütteki limitin ayrıca incelenmesi gerekir.

14.4 Kısmi Türevler Yetmez

Kısmi türevlerle ilgili teoremin (Teorem 14.2) tersi doğru değildir. İlk örneği biliyoruz: orijinde 0 tanımlanan $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orijinde iki kısmi türevi de vardır, ama fonksiyon orada sürekli değildir (Örnek 12.13). Sonuç 14.1 gereği bu fonksiyon orijinde türevlenemez. Kısmi türevler yalnız eksenler üzerindeki değerlere bakar ve orada fonksiyon özdeş olarak sıfırdır; köşegen üzerindeki $\dfrac{1}{2}$ değerleri kısmi türevlere görünmez. Aşağıdaki ilk örnekte de kısmi türevler vardır ama fonksiyon süreksiz olduğu için türevlenemez; ardından sürekli olduğu hâlde türevlenemeyen bir fonksiyon göreceğiz.

Örnek 14.5 (Eksenlerde Ayrı Tanımlanan Fonksiyon).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x,y)=\begin{cases}x, y=0,\\ y, x=0,\\ 1, \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$'da iki kısmi türevinin de 1 olduğunu ve fonksiyonun $(0,0)$'da türevlenemediğini gösteriniz.

Çözüm.
Önce tanımın tutarlı olduğuna bakalım: $(0,0)$ noktası hem $y=0$ hem $x=0$ durumuna girer ve iki kural da $f(0,0)=0$ verir.
Kısmi türevler. x ekseni üzerinde $f(t,0)=t$ olduğundan

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$$

olur. y ekseni üzerinde $f(0,t)=t$ olduğundan aynı hesapla $f_y(0,0)=1$ bulunur.
Süreklilik. $t\neq 0$ için (t,t) noktası iki eksenin de dışındadır ve $f(t,t)=1$'dir. $(t,t)\to(0,0)$ iken $f(t,t)\to 1\neq 0=f(0,0)$ olduğundan f, $(0,0)$'da sürekli değildir. Sonuç 14.1 gereği türevlenemez.
Eksenler üzerinde f, türevlenebilir bir fonksiyon gibi davranır; eksenlerin dışındaki her şey kısmi türevler için görünmezdir. ■

İki örnekte de türevlenemezliğin nedeni süreksizlikti. Sürekli ve kısmi türevleri olan bir fonksiyon da türevlenemeyebilir. $f(x,y)=\sqrt{|\,xy\,|}$ fonksiyonunun orijinde iki kısmi türevi de vardır ve sıfırdır (Örnek 12.11); aşağıda önce sürekliliğini, sonra türevlenemezliğini gösteriyoruz.

Örnek 14.6 (Mutlak Çarpımın Karekökü: Süreklilik). $f(x,y)=\sqrt{|\,xy\,|}$ fonksiyonunun $(0,0)$'da sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\varepsilon>0$ verilsin ve $\delta=\varepsilon$ alalım. $\|\,(x,y)\,\|<\delta$ ise $x^2\le x^2+y^2<\delta^2$ olduğundan $|\,x\,|<\delta$, aynı biçimde $|\,y\,|<\delta$ olur. Dolayısıyla

$$|\,f(x,y)-f(0,0)\,|=\sqrt{|\,x\,|}\,\sqrt{|\,y\,|}<\sqrt{\delta}\,\sqrt{\delta}=\delta=\varepsilon$$

bulunur; f, $(0,0)$'da süreklidir (Tanım 10.1). ■

Örnek 14.7 (Mutlak Çarpımın Karekökü: Türevlenemezlik). $f(x,y)=\sqrt{|\,xy\,|}$ fonksiyonunun $(0,0)$'da türevlenemediğini gösteriniz.

Çözüm.
Eksenler üzerinde $f(t,0)=f(0,t)=0$ olduğundan $\nabla f(0,0)=(0,0)$'dır (Örnek 12.11). Sonuç 14.2 gereği incelenmesi gereken tek oran

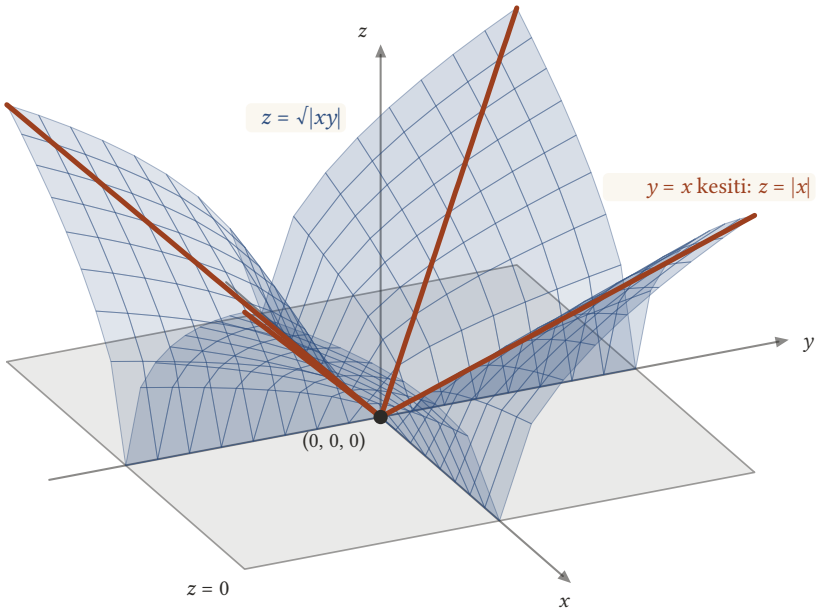
$$R(h,k)=\frac{f(h,k)-f(0,0)-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\sqrt{|\,hk\,|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

dir. $k=0$ doğrusu boyunca $R(h,0)=0$ olur. $k=h$ doğrusu boyunca, $h\neq 0$ için

$$R(h,h)=\frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{2h^2}}=\frac{|\,h\,|}{\sqrt{2}\,|\,h\,|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur. İki yol boyunca farklı limitler bulunduğundan (Sonuç 9.1) R'nin $(0,0)$'da limiti yoktur, özel olarak limit 0 değildir. f, $(0,0)$'da türevlenemez.
Geometrik olarak: köşegen üzerinde $f(t,t)=|\,t\,|$ olur ve grafik bu doğrultuda $|\,t\,|$ fonksiyonu gibi kırılır. Eksenler boyunca grafik $z=0$ düzlemindedir; kısmi türevlerin önerdiği tek aday $z=0$ düzlemidir ama grafik köşegen doğrultularında bu düzlemden $|\,t\,|$ kadar, yani uzaklıkla aynı mertebede ayrılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.1: $z = \sqrt{|xy|}$ yüzeyi eksenler üzerinde $z = 0$ düzlemine (gri) yapışıktır; kısmi türevlerin önerdiği tek aday teğet düzlem budur. Köşegenler boyunca ise $z = |x|$ olur ve grafik orijinde V biçiminde kırılır, düzlemden uzaklıkla aynı mertebede ayrılır.

■

Sonuç olarak süreklilik ve kısmi türevlerin varlığı, ikisi birlikte bile türevlenebilirliği güvence altına almaz.

14.5 Toplam Diferansiyel

Tek değişkendeki $dy = f'(a)\,dx$ diferansiyelinin çok değişkenli karşılığı, türevin artıma uygulanmasıdır.

Tanım 14.2 (Toplam Diferansiyel). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve f, $a \in D^\circ$ noktasında türevlenebilir olsun. $dx = (dx_1, \ldots, dx_n) \in \mathbb{R}^n$ bağımsız artımlar olmak üzere

$$df(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,dx_j = \langle \nabla f(a), dx \rangle$$

ifadesine f'nin a noktasındaki **toplam diferansiyeli** (kısaca diferansiyeli) denir. İki değişkende $z = f(x, y)$ için

$$df = dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

üç değişkende $df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$ yazılır.

Yani toplam diferansiyel, $Df(a)$ türevinin dx artımındaki değeridir: $df(a) = Df(a)(dx)$. dx_j'ler, x_j değişkenlerinin bağımsız artımlarıdır ($dx_j = h_j$); df ise f'nin artımının lineer ana kısmıdır. Önerme 14.1 gereği

$$\Delta f = f(a + dx) - f(a) = df(a) + \eta(dx) \parallel dx \parallel$$

ve $dx \to 0$ iken $\eta(dx) \to 0$ olduğundan, küçük artımlar için $\Delta f \approx df$ yaklaşımı kullanılır ve yapılan hata $\parallel dx \parallel$'den daha hızlı sıfıra gider. Kısmi türevleri bir noktada sabitlemeyip x'e bağlı bırakırsak df, her noktada türevlenebilen bir fonksiyon için x'e ve dx'e bağlı bir ifade olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 14.8 (Bir Polinomun Toplam Diferansiyeli). $f(x,y) = x^2 - xy$ fonksiyonunun toplam diferansiyelini bulunuz. $(2,1)$ noktasında $dx = 0{,}1$ ve $dy = -0{,}2$ için Δf ile df değerlerini karşılaştırınız.

Çözüm.
Diferansiyel. Örnek 14.3 gereği f her noktada türevlenebilirdir. Kısmi türevler $f_x = 2x - y$ ve $f_y = -x$ olduğundan

$$df = (2x - y)\,dx - x\,dy$$

bulunur.
Karşılaştırma. $(2,1)$ noktasında $df = 3\,dx - 2\,dy$ olduğundan

$$df = 3(0{,}1) - 2(-0{,}2) = 0{,}7$$

olur. Öte yandan $f(2,1) = 2$ ve

$$f(2{,}1;\,0{,}8) = 4{,}41 - 1{,}68 = 2{,}73$$

olduğundan $\Delta f = 0{,}73$'tür. Fark $0{,}03$'tür ve polinom örneğindeki (Örnek 14.3) kalan $h^2 - hk$ ifadesinin $h = 0{,}1$, $k = -0{,}2$ için değerine eşittir: $0{,}01 + 0{,}02 = 0{,}03$. Artımlar $0{,}1$ mertebesindeyken hata $0{,}01$ mertebesindedir. ■

14.6 Türevlenebilme için Yeter Koşul

Türevlenebilirliği her seferinde tanımla göstermek zahmetlidir. Uygulamada karşılaşılan fonksiyonların çoğunda kısmi türevler süreklidir ve bu, türevlenebilirlik için yeter.

Teorem 14.3 (Sürekli Kısmi Türevler Türevlenebilirlik Verir). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. f'nin bütün birinci kısmi türevleri bir $B(a,r) \subseteq D$ yuvarının her noktasında var ve*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

fonksiyonları a noktasında sürekli ise f, a'da türevlenebilirdir.

İspat.
$h = (h_1, \ldots, h_n)$ ve $0 < \| h \| < r$ olsun. a'dan $a + h$'ye eksenlere paralel adımlarla gidelim:
$p_0 = a$ ve $k = 1, \ldots, n$ için

$$p_k = a + \sum_{j=1}^{k} h_j e_j$$

olsun. $p_n = a + h$'dir ve $p_k = p_{k-1} + h_k e_k$ olduğundan ardışık iki nokta yalnız k-inci bileşende ayrılır. Artımı ardışık farkların toplamı olarak yazalım:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(p_k) - f(p_{k-1}) \big) .$$

Her adımda ortalama değer teoremi. *k sabit olsun. $| t | \le | h_k |$ için*

$$\| p_{k-1} + te_k - a \|^2 = h_1^2 + \ldots + h_{k-1}^2 + t^2 \le \| h \|^2 < r^2$$

olduğundan $p_{k-1} + te_k$ noktaları $B(a,r)$ içindedir. $g_k(t) = f(p_{k-1} + te_k)$ tanımlayalım. Kısmi türevin tanımı (Tanım 12.1) gereği

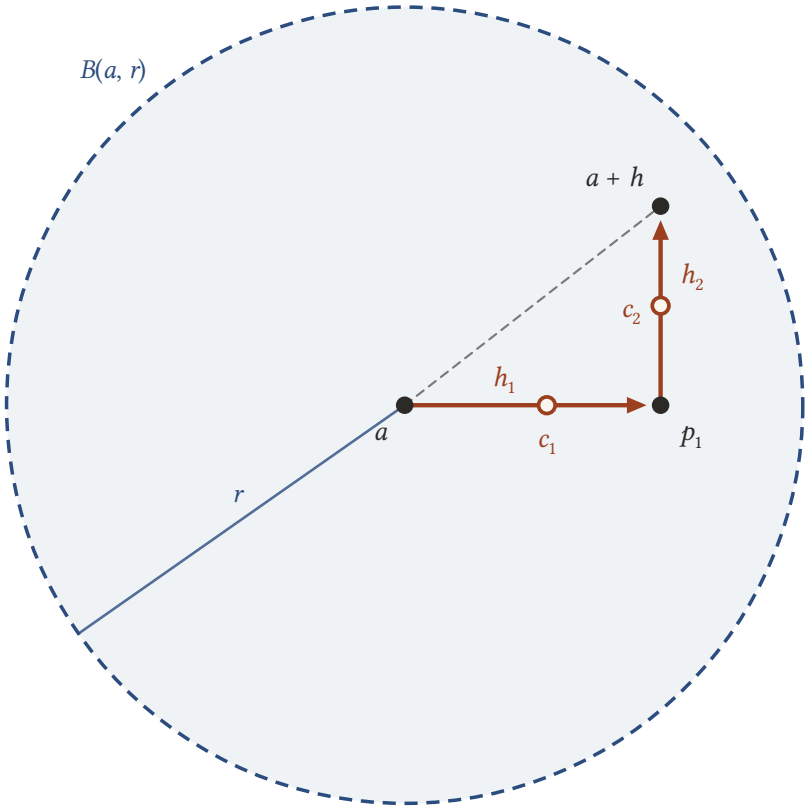
$$g_k'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{f(p_{k-1} + te_k + se_k) - f(p_{k-1} + te_k)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_{k-1} + te_k)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur ve varsayım gereği bu kısmi türev vardır. Demek ki g_k, 0 ile h_k arasındaki kapalı aralıkta türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir (bkz. Analiz 2). $h_k \neq 0$ ise ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) 0 ile h_k arasında bir ξ_k verir ve $c_k = p_{k-1} + \xi_k e_k$ ile

$$f(p_k) - f(p_{k-1}) = g_k(h_k) - g_k(0) = g_k'(\xi_k)\, h_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k)\, h_k$$

olur. $h_k = 0$ ise iki yan da 0'dır ve $c_k = p_{k-1}$ alınabilir. Her iki durumda c_k, $B(a,r)$'deki yukarıdaki doğru parçası üzerindedir ve $\| c_k - a \| \leq \| h \|$'dir.



Şekil 14.2: a*'dan* a + h*'ye eksenlere paralel adımlarla gidilir: önce* $h_1 e_1$ *ile* p_1*'e, sonra* $h_2 e_2$ *ile* $p_2 = a + h$*'ye. Her adımda ortalama değer teoremi, o adımın doğru parçası üzerinde bir* c_k *noktası verir; bütün parçalar* B(a, r) *yuvarının içindedir.*

Kalanın tahmini. *Bulunan eşitlikleri toplarsak, her k için*

$$\varepsilon_k(h) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

olmak üzere

$$f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(h)\, h_k$$

elde edilir. $| h_k | \leq \| h \|$ olduğundan

$$\frac{| f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h \rangle |}{\| h \|} \leq \sum_{k=1}^{n} | \varepsilon_k(h) |$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. Kısmi türevler a'da sürekli olduğundan her k için öyle bir $\delta_k > 0$ vardır ki $c \in B(a,r)$ ve $\| c - a \| < \delta_k$ iken

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(c) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

olur. $\delta = \min\{r, \delta_1, \ldots, \delta_n\}$ alalım. $0 < \| h \| < \delta$ ise c_k noktaları h'ye bağlı olsa da $\| c_k - a \| \le \| h \| < \delta_k$ olduğundan her k için $| \varepsilon_k(h) | < \dfrac{\varepsilon}{n}$ ve yukarıdaki oran ε'dan küçüktür. Oran 0'a gider; Sonuç 14.2 gereği f, a'da türevlenebilirdir. ■

İki değişkende ispat şöyle okunur. $a = (x_0, y_0)$ ve artım (h, k) olsun. Önce yatay, sonra düşey adım atarak

$$\begin{aligned} \Delta f = {} & \big[\, f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \,\big] \\ & + \big[\, f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \,\big] \end{aligned}$$

yazılır. Her köşeli ayraçta tek değişkenli ortalama değer teoremi uygulanırsa, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ olan sayılarla

$$\Delta f = f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)\, h + f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k)\, k$$

bulunur. f_x ve f_y, (x_0, y_0)'da sürekli olduğundan $f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1$ ve $f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k) = f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2$ yazıldığında $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ olur. Sonuç

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\, h + f_y(x_0, y_0)\, k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

eşitliğidir; bu, eşdeğer biçimlerin 3. maddesidir (Önerme 14.1).
Teorem en çok, kısmi türevleri bütün bir açık kümede sürekli olan fonksiyonlara uygulanır. C^1 sınıfını Tanım 13.3 ile tanımlamıştık.

Sonuç 14.3 (Sürekli Türevlenebilir Fonksiyonlar). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve $f \in C^1(U)$ ise f, U'nun her noktasında türevlenebilir ve süreklidir.*

İspat.
$a \in U$ olsun. U açık olduğundan $B(a,r) \subseteq U$ olacak bir $r > 0$ vardır. $f \in C^1(U)$ olduğundan bütün birinci kısmi türevler $B(a,r)$'nin her noktasında vardır ve a'da süreklidir. Teorem 14.3 gereği f, a'da türevlenebilirdir; Teorem 14.1 gereği de a'da süreklidir. ■

C^1 sınıfındaki fonksiyonlara **sürekli türevlenebilir** fonksiyonlar denmesinin gerekçesi bu sonuçtur: kısmi türevleri sürekli olan fonksiyon türevlenebilirdir. Polinomlar $\mathbb{R}^n$ üzerinde, rasyonel fonksiyonlar paydalarının sıfır olmadığı açık kümede C^∞, dolayısıyla C^1 sınıfındadır (Tanım 13.3 ardından gördüğümüz gibi); bu yüzden tanımlı oldukları her noktada türevlenebilirler. Üstel, logaritma, trigonometrik fonksiyonlar ve kökler gibi temel fonksiyonlardan toplama, çarpma, bölme ve bileşke ile kurulan fonksiyonlar da, kısmi türev formüllerinin tanımlı ve sürekli olduğu açık kümelerde türevlenebilirdir.

Örnek 14.9 (Sürekli Kısmi Türevlerle Türevlenebilirlik). $f(x,y) = \cos(xy) + \ln x - e^y$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasında türevlenebilir olduğunu gösteriniz ve bu noktadaki toplam diferansiyelini yazınız.

Çözüm.
Tanım kümesi. $\ln x$ yalnız $x > 0$ için tanımlı olduğundan f'nin tanım kümesi $U = \{(x,y) : x > 0\}$ açık yarı düzlemidir ve $(1,1) \in U$'dur.
Kısmi türevler. U'nun her noktasında

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -y \sin(xy) + \frac{1}{x}, \\ f_y(x,y) &= -x \sin(xy) - e^y \end{aligned}$$

olur. İki fonksiyon da sürekli fonksiyonların toplamı, çarpımı, bölümü ve bileşkesi olarak U üzerinde süreklidir (Teorem 10.2, Teorem 10.4); $x > 0$ olduğundan $\dfrac{1}{x}$ sorun çıkarmaz. Demek ki $f \in C^1(U)$'dur ve Sonuç 14.3 gereği f, $(1,1)$'de (üstelik U'nun her noktasında) türevlenebilirdir.
Diferansiyel. $\nabla f(1,1) = (1-\sin 1, -\sin 1 - e)$ olduğundan

$$df(1,1) = (1-\sin 1)\,dx - (\sin 1 + e)\,dy$$

bulunur. ■

14.7 Türevlenebilirliği Tanımla İncelemek

Kısmi türevler noktanın bir komşuluğunda sürekliyse iş Teorem 14.3 ile biter. Kısmi türevlerden biri süreksizse ya da formülü o noktada geçerli değilse (tipik olarak parçalı tanımlı fonksiyonlarda) tanıma dönmek gerekir.

Dört adımda türevlenebilirlik incelemesi

1. **Süreklilik.** f'nin a'da sürekli olup olmadığına bakılır. Sürekli değilse f, a'da türevlenemez (Sonuç 14.1) ve inceleme biter.
2. **Kısmi türevler.** $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ değerleri tanımla hesaplanır. Biri yoksa f türevlenemez (Teorem 14.2). Kısmi türevler a'nın bir komşuluğunda var ve a'da sürekliyse f türevlenebilirdir (Teorem 14.3).
3. **Kalan.** Tek aday $\nabla f(a)$'dır. Kalan oranı yazılır:
$$R(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h\rangle}{\| h \|}.$$
4. **Limit.** $R(h) \to 0$ gösterilirse (çoğunlukla sıkıştırmayla) f türevlenebilirdir. h, iki farklı yol boyunca 0'a götürüldüğünde R farklı sayılara gidiyorsa ya da bir yol boyunca limiti yoksa f türevlenemez.

Aday lineer fonksiyon $h \mapsto \langle \nabla f(a), h\rangle$ iç çarpımla verildiği için lineerliğini ayrıca denetlemeye gerek yoktur.

Örnek 14.10 (Sürekli ama Türevlenemeyen Rasyonel Fonksiyon).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu $(0,0)$'da türevlenebilir midir?

Çözüm.
Süreklilik. $x^2 \le x^2 + y^2$ olduğundan $(x,y) \neq (0,0)$ için $| f(x,y) | \le | y |$'dir. Sıkıştırmayla (Teorem 8.5) $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ olur; f süreklidir ve bu adım bir karar vermez.
Kısmi türevler. Eksenler üzerinde $f(t,0) = f(0,t) = 0$ olduğundan $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ve $\nabla f(0,0) = (0,0)$'dır (Örnek 12.9). Aynı örnekteki formüle göre $x \neq 0$ için $f_y(x,0) = 1$'dir; f_y orijinde sürekli olmadığından yeter koşul uygulanamaz ve ikinci adım karar vermez.
Kalan. $(h,k) \neq (0,0)$ için

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2 k}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Limit. $k = 0$ doğrusu boyunca $R(h,0) = 0$'dır. $k = h$ doğrusu boyunca, $h > 0$ için

$$R(h,h) = \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{h^3}{2\sqrt{2}\,h^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

olur. İki yol farklı limit verdiğinden (Sonuç 9.1) R'nin limiti yoktur; f, $(0,0)$'da türevlenemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Grafiğin yapısı da bunu gösterir. Orijinden geçen her doğru boyunca f doğrusaldır: $f(t\cos\theta, t\sin\theta) = t\cos^2\theta\sin\theta$. Grafiğin orijinden geçen her düşey kesiti bir doğrudur, ama bu doğrular tek bir düzlem oluşturmaz. Bir düzlem oluştursalardı o düzlem $\nabla f(0,0) = (0,0)$ gereği $z = 0$ olurdu; oysa kesitlerin eğimi $\cos^2\theta\sin\theta$ çoğu doğrultuda sıfır değildir. ■

Örnek 14.11 (Küplerin Toplamının Kareler Toplamına Oranı).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu $(0,0)$'da türevlenebilir midir?

Çözüm.
Süreklilik. $\mid x \mid^3 = \mid x \mid x^2 \leq \mid x \mid (x^2+y^2)$ ve aynı biçimde $\mid y \mid^3 \leq \mid y \mid (x^2+y^2)$ olduğundan

$$\mid f(x,y) \mid \leq \frac{\mid x \mid^3 + \mid y \mid^3}{x^2+y^2} \leq \mid x \mid + \mid y \mid \to 0$$

olur; f, $(0,0)$'da süreklidir.
Kısmi türevler. $t \neq 0$ için $f(t,0) = \dfrac{t^3}{t^2} = t$ olduğundan

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = 1$$

ve simetriyle $f_y(0,0) = 1$ olur. $\nabla f(0,0) = (1,1)$ ve aday lineer fonksiyon $T(u,v) = u + v$'dir.
Kalan. Payı ortak paydada toplayalım:

$$h^3 + k^3 - (h+k)(h^2+k^2) = -hk^2 - h^2k = -hk(h+k).$$

Dolayısıyla

$$R(h,k) = \frac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-hk(h+k)}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

olur.
Limit. $k = 0$ boyunca $R(h,0) = 0$'dır. $k = h$ boyunca, $h > 0$ için

$$R(h,h) = \frac{-2h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}\,h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur. İki yol farklı limit verir; R'nin limiti yoktur ve f, $(0,0)$'da türevlenemez. ■

Örnek 14.12 (İlk Adımda Biten İnceleme).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu $(0,0)$'da türevlenebilir midir?

Çözüm.
Süreklilik. x ekseni üzerinde $(x \neq 0)$ $f(x,0) = 0$, y ekseni üzerinde $(y \neq 0)$ $f(0,y) = 1$'dir. İki yol farklı limit verdiğinden (Sonuç 9.1) $(0,0)$'da limit yoktur; f orada sürekli değildir. Sonuç 14.1 gereği f, $(0,0)$'da türevlenemez.
İkinci adım da aynı sonuca götürürdü. $f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$ vardır, ama

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}$$

oranının $t \to 0$ iken sonlu bir limiti yoktur; $f_y(0,0)$ mevcut değildir ve Teorem 14.2 gereği f türevlenemez. ■

Şimdiye kadarki türevlenemez örneklerin tersine, aşağıdaki fonksiyonun kısmi türevleri orijinde süreksizdir ama fonksiyon türevlenebilir. Yani yeter koşuldaki (Teorem 14.3) süreklilik varsayımı gerekli değildir.

Örnek 14.13 (Salınan Fonksiyonun Türevlenebilirliği).

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$'da türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

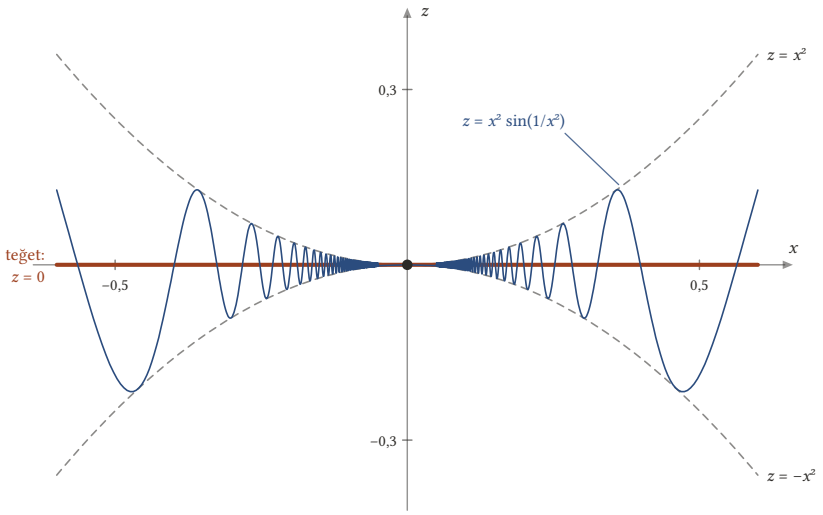
Çözüm.
Süreklilik. $|\sin u| \leq 1$ olduğundan $|f(x,y)| \leq x^2+y^2 \to 0$; f süreklidir.
Kısmi türevler. $t \neq 0$ için $f(t,0) = t^2 \sin\dfrac{1}{t^2}$ ve

$$\left|\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\right| = \left|t\sin\frac{1}{t^2}\right| \leq |t| \to 0$$

olduğundan $f_x(0,0) = 0$'dır. $f(x,y) = f(y,x)$ simetrisinden $f_y(0,0) = 0$ bulunur.
Kalan. $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$ yazalım. $(h,k) \neq (0,0)$ için

$$R(h,k) = \frac{\rho^2 \sin(1/\rho^2)}{\rho} = \rho \sin\frac{1}{\rho^2}.$$

Limit. $|R(h,k)| \leq \rho = \sqrt{h^2+k^2} \to 0$ olduğundan sıkıştırmayla $R(h,k) \to 0$ olur. f, $(0,0)$'da türevlenebilirdir, $\nabla f(0,0) = (0,0)$ ve $Df(0,0)$ sıfır fonksiyonudur.
Grafik, $z = x^2+y^2$ ve $z = -(x^2+y^2)$ paraboloitlerinin arasında sonsuz kez salınır; ama bu paraboloitler orijinde $z = 0$ düzlemine teğettir ve grafiği de bu düzleme yapıştırır.



Şekil 14.3: $y = 0$ kesiti: $z = x^2\sin(1/x^2)$ eğrisi $z = \pm x^2$ parabollerinin arasında kalır ve orijine yaklaştıkça giderek sıklaşan salınımlar yapar. Paraboller orijinde $z = 0$ doğrusuna teğettir ve eğriyi de bu teğete yapıştırır.

■

Örnek 14.14 (Salınan Fonksiyonun Süreksiz Kısmi Türevi).

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun (Örnek 14.13) f_x kısmi türevinin $(0,0)$'da sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Formül. $(x,y) \neq (0,0)$ için tek değişkenli çarpım ve zincir kurallarıyla

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

olur. x ekseni üzerinde, $x \neq 0$ için

$$f_x(x,0) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

Bir dizi. $x_k = \dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}$ alalım. $\dfrac{1}{x_k^2} = 2k\pi$ olduğundan $\sin\dfrac{1}{x_k^2} = 0$ ve $\cos\dfrac{1}{x_k^2} = 1$, dolayısıyla

$$f_x(x_k,0) = -\frac{2}{x_k} = -2\sqrt{2k\pi} \to -\infty$$

olur. $(x_k,0) \to (0,0)$ olduğu hâlde $f_x(x_k,0)$ dizisi $f_x(0,0) = 0$'a yakınsamaz; üstelik sınırsızdır. Dizisel ölçüt (Teorem 10.1) gereği f_x, $(0,0)$'da sürekli değildir. Simetriyle aynı şey f_y için de doğrudur. Demek ki f, $(0,0)$'ı içeren hiçbir açık kümede C^1 sınıfından değildir; yine de Örnek 14.13 gereği $(0,0)$'da türevlenebilirdir. Bu örnek, $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun (bkz. Analiz 2) iki değişkenli karşılığıdır.
■

Bu bölümde kurulan ilişkileri bir tabloda toplayalım. Her satırda a bir iç noktadır ve "C^1" koşulu, f'nin a'nın bir açık komşuluğunda C^1 sınıfından olması anlamındadır.

Tablo 14.1: Türevlenebilme ile komşu kavramlar

Varsayım	Sonuç	Tersi doğru mu?
f, a civarında C^1	f, a'da türevlenebilir (Sonuç 14.3)	Hayır (Örnek 14.14)
f, a'da türevlenebilir	f, a'da sürekli (Teorem 14.1)	Hayır (Örnek 14.7)
f, a'da türevlenebilir	bütün kısmi türevler var (Teorem 14.2)	Hayır (Örnek 14.5)

14.8 Doğrusallaştırma ve Yaklaşık Hesap

Türevlenebilir bir fonksiyona, noktanın yakınında sabit ile lineer bir fonksiyonun toplamıyla yaklaşılabilir. Bu yaklaşımı adlandıralım.

Tanım 14.3 (Doğrusallaştırma). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve f, $a \in D^\circ$ noktasında türevlenebilir olsun.

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle \\ &= f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,(x_j - a_j) \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

kuralıyla tanımlanan $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f'nin a noktasındaki **doğrusallaştırması** (lineerizasyonu) denir. x, a'ya yakınken kullanılan $f(x)\approx L(x)$ yaklaşımına f'nin a'daki **doğrusal yaklaşımı** denir; iki değişkende bu yaklaşım **teğet düzlem yaklaşımı** adını da alır.

Yani L, bir sabit ile bir lineer fonksiyonun toplamıdır; böyle fonksiyonlara **afin** fonksiyon denir. İki değişkende

$$L(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)\,(x-a)+f_y(a,b)\,(y-b)$$

olur. Toplam diferansiyel diliyle $f(a+dx)\approx f(a)+df(a)$ yazılır. Lineer kısım $h\mapsto\langle\nabla f(a),h\rangle$, $f(a+h)-f(a)$ artımına en iyi uyan lineer fonksiyondur; L ise f'ye a yakınında en iyi uyan afin fonksiyondur. "En iyi" sözünün anlamı şudur.

Önerme 14.2 (Doğrusallaştırma En İyi Afin Yaklaşımdır). *$f:D\to\mathbb{R}$, $a\in D^\circ$ noktasında türevlenebilir ve L, f'nin a'daki doğrusallaştırması olsun. $c\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}^n$ ve $\ell(x)=c+\langle B,x-a\rangle$ olsun. O zaman*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\ell(x)}{\|\,x-a\,\|}=0$$

olması için gerek ve yeter koşul $c=f(a)$ ve $B=\nabla f(a)$, yani $\ell=L$ olmasıdır.

> ***İspat.***
> ***Yeterlik.*** *$\ell=L$ ise kesrin payı $f(x)-f(a)-\langle\nabla f(a),x-a\rangle$ olur ve limit, Sonuç 14.2 gereği 0'dır.*
> ***Gereklik.*** *Limit 0 olsun. $x\neq a$ için $f(x)-\ell(x)$, kesir ile $\|\,x-a\,\|$'nın çarpımıdır ve iki çarpan da $x\to a$ iken 0'a gider; limitin cebirsel özellikleri (Teorem 8.4) gereği $f(x)-\ell(x)\to 0$ olur. Öte yandan f, a'da süreklidir (Teorem 14.1) ve $|\,\langle B,x-a\rangle\,|\le\|\,B\,\|\,\|\,x-a\,\|$ olduğundan $\ell(x)\to c$'dir; yani $f(x)-\ell(x)\to f(a)-c$ olur. Limitin tekliği (Teorem 8.1) $c=f(a)$ verir. Bu durumda hipotez*
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-\langle B,x-a\rangle}{\|\,x-a\,\|}=0$$
>
> *der; yani f, a'da tanımdaki vektör B olacak biçimde türevlenebilirdir. Teorem 14.2 gereği $B=\nabla f(a)$'dır.*
> ■

Önerme, tek değişkende teğetin "grafiğe birinci mertebeden uyan tek doğru" olmasının karşılığıdır: a'dan geçen öbür afin fonksiyonların hatası $\|\,x-a\,\|$ ile aynı mertebededir, yalnız L'nin hatası daha hızlı söner.

Örnek 14.15 (Doğrusal Yaklaşımla Yaklaşık Değer). $\sqrt{(3{,}02)^2+(3{,}97)^2}$ sayısının yaklaşık değerini doğrusal yaklaşımla bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Fonksiyon ve nokta.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ve $a=(3,4)$ alalım; $(3{,}02;\,3{,}97)$ noktası a'ya yakındır ve $f(3,4)=5$'tir.
> **Türevlenebilirlik.** $(x,y)\neq(0,0)$ için
>
> $$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
>
> olur. Bunlar $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ açık kümesinde süreklidir; Sonuç 14.3 gereği f, $(3,4)$'te türevlenebilirdir ve $\nabla f(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$'tir.
> **Yaklaşım.** $dx=0{,}02$ ve $dy=-0{,}03$ ile
>
> $$\begin{aligned}L(3{,}02;\,3{,}97)&=5+\frac{3}{5}(0{,}02)+\frac{4}{5}(-0{,}03)\\&=5+0{,}012-0{,}024=4{,}988\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Gerçek değer $\sqrt{24{,}8813} \approx 4{,}98812$'dir; yaklaşımın hatası yaklaşık $0{,}00012$'dir ve $0{,}02$ ile $0{,}03$ artımlarından çok küçüktür. ■

14.9 Teğet Düzlem ve Normal Doğru

Tek değişkende doğrusallaştırmanın grafiği teğet doğrusuydu (bkz. Analiz 2). İki değişkende doğrusallaştırmanın grafiği bir düzlemdir ve fonksiyonun grafiğine dokunur.
İki değişkenli bir f fonksiyonunun grafiği (Tanım 8.5), $z = f(x,y)$ denklemiyle verilen ve D tanım kümesinin tam üstünde ya da altında duran bir yüzeydir.

Tanım 14.4 (Teğet Düzlem). $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve f, $(a,b) \in D^\circ$ noktasında türevlenebilir olsun. $P = \big(\, a, b, f(a,b) \,\big)$ olmak üzere

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b)$$

denklemiyle verilen düzleme, f'nin grafiğinin P noktasındaki **teğet düzlemi** denir.
Genel olarak $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D^\circ$ noktasında türevlenebilirse $\mathbb{R}^{n+1}$'de

$$z = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle$$

denklemiyle verilen kümeye grafiğin $\big(\, a, f(a) \,\big)$ noktasındaki **teğet hiperdüzlemi** denir.

Yani teğet düzlem, doğrusallaştırmanın grafiğidir: $z = L(x,y)$. $z_0 = f(a,b)$ yazılırsa denklem

$$f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b) - (z - z_0) = 0$$

biçimini alır ve buradan düzlemin normal vektörü $\big(\, f_x(a,b), f_y(a,b), -1 \,\big)$ okunur. n değişkende teğet hiperdüzlemin normali $\big(\, \nabla f(a), -1 \,\big) \in \mathbb{R}^{n+1}$'dir.

Tanım 14.5 (Normal Doğru). $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in D^\circ$ noktasında türevlenebilir ve $P = \big(\, a, b, f(a,b) \,\big)$ olsun. $\big(\, f_x(a,b), f_y(a,b), -1 \,\big)$ vektörüne grafiğin P'deki **normal vektörü** denir. P noktasından geçen ve bu vektöre paralel olan

$$(x,y,z) = \big(\, a, b, f(a,b) \,\big) + t\,\big(\, f_x(a,b), f_y(a,b), -1 \,\big)$$

($t \in \mathbb{R}$) doğrusuna grafiğin P noktasındaki **normal doğrusu** denir.

Yani normal doğru, teğet düzleme P'de dik olan tek doğrudur. Teğet düzlemin neden bu düzlem olduğunu üç açıdan görebiliriz.

- **En iyi yaklaşım.** P'den geçen ve düşey olmayan her düzlem $z = c + p(x-a) + q(y-b)$ biçimindedir. Önerme 14.2 gereği grafik ile düzlem arasındaki düşey uzaklık $(x,y) \to (a,b)$ iken $\| (x-a, y-b) \|$'den hızlı sıfıra gidiyorsa $p = f_x(a,b)$ ve $q = f_y(a,b)$ olmak zorundadır. Grafiğe bu anlamda dokunan tek düzlem teğet düzlemdir.
- **Koordinat eğrileri.** $y = b$ ve $x = a$ düşey düzlemleri grafiği iki kesit eğrisi boyunca keser; kısmi türevlerin geometrik anlamı (Önerme 12.2) gereği bu eğrilerin P'deki teğetlerinin doğrultuları $(1, 0, f_x(a,b))$ ve $(0, 1, f_y(a,b))$'dir. İki teğet de teğet düzlemin içindedir; örneğin $(a+t, b, f(a,b) + t f_x(a,b))$ noktaları denklemi sağlar. Vektörel çarpım (Tanım 2.10)

  $$(1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1)$$

  verir ve bu vektör normal vektörün -1 katıdır. Teğet düzlem, iki koordinat eğrisinin teğetlerinin gerdiği düzlemdir.
- **Türevlenebilirliğin gerekliliği.** Tanımda yalnız kısmi türevlerin varlığı yetmez. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun (Örnek 12.13) orijinde kısmi türevleri sıfırdır ve formül $z = 0$ düzlemini verir, ama grafik orijine istenildiği kadar yakın köşegen noktalarında $\dfrac{1}{2}$ yüksekliğindedir. Bu düzlem grafiğe hiçbir anlamda dokunmaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Normal vektörün bir yorumu daha vardır. $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ yazılırsa grafik, $F = 0$ denklemiyle verilen kümedir ve F'nin gradyanı $\nabla F = (f_x, f_y, -1)$ tam olarak normal vektördür. Üç değişkenli bir f fonksiyonunun grafiği $\mathbb{R}^4$'te yer aldığı için çizilemez; böyle fonksiyonlar $f(x,y,z) = k$ denklemleriyle verilen **düzey yüzeyleri** (kesit yüzeyleri) aracılığıyla incelenir. Gradyanın düzey eğrilerine ve düzey yüzeylerine dik olduğunu zincir kuralı yardımıyla Yönlü Türev ve Ortalama Değer Teoremi bölümünde göreceğiz.

Örnek 14.16 (Eliptik Paraboloidin Teğet Düzlemi). $z = 2x^2 + y^2$ eliptik paraboloidinin $(1,1,3)$ noktasındaki teğet düzlemini ve normal doğrusunu bulunuz.

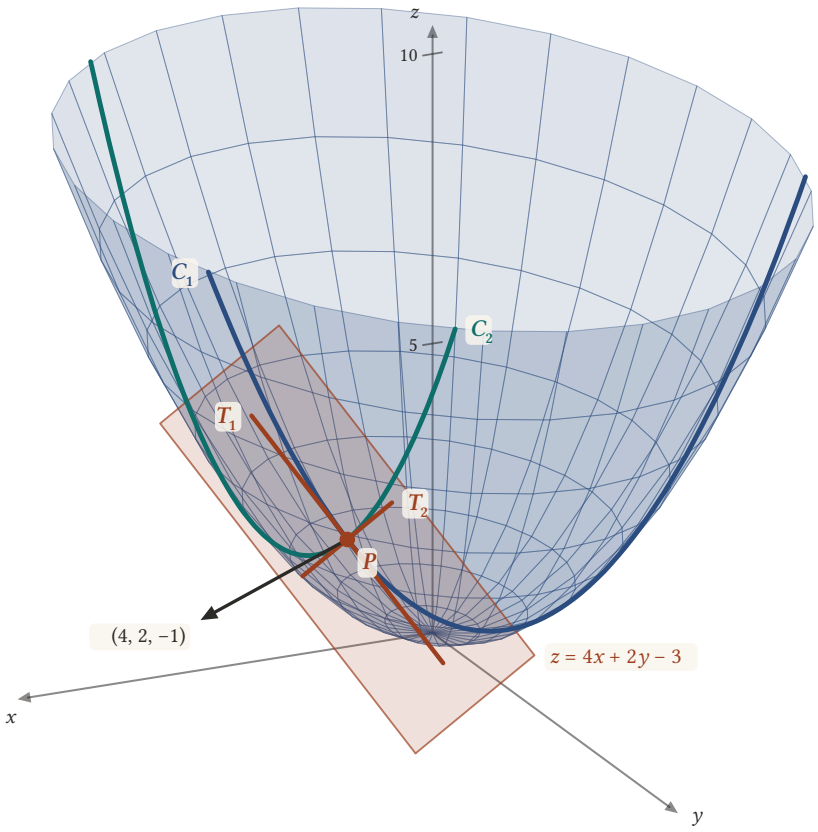
Çözüm.
Türevlenebilirlik. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ bir polinomdur; $f_x = 4x$ ve $f_y = 2y$ süreklidir ve Sonuç 14.3 gereği f her noktada türevlenebilirdir. $f(1,1) = 3$ olduğundan $(1,1,3)$ grafiğin üzerindedir.
Teğet düzlem. $f_x(1,1) = 4$ ve $f_y(1,1) = 2$ olduğundan

$$z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1)$$

yani $z = 4x + 2y - 3$ bulunur.
Normal doğru. Normal vektör $(4,2,-1)$'dir; normal doğru ($t \in \mathbb{R}$)

$$(x,y,z) = (1,1,3) + t\,(4,2,-1)$$

olur.



Şekil 14.4: $z = 2x^2 + y^2$ paraboloidi ve $P = (1, 1, 3)$ noktasındaki teğet düzlemi $z = 4x + 2y - 3$. Düzlem, C_1 ($y = 1$) ve C_2 ($x = 1$) kesit eğrilerinin T_1, T_2 teğetlerini içerir; ok, $(4, 2, -1)$ normal vektörünün 0,3 katıdır. Düşey eksen kısaltılmıştır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 14.17 (Bir Grafiğin Teğet Düzlemi). $f(x,y) = x^2 + y$ fonksiyonunun grafiğine $x = 1, y = 2$ noktasında teğet olan düzlemi bulunuz.

Çözüm.
f polinom olduğundan her noktada türevlenebilirdir. $f(1,2) = 3$ ve $\nabla f(x,y) = (2x, 1)$ olduğundan $\nabla f(1,2) = (2,1)$'dir. Teğet düzlem

$$z = 3 + \langle (2,1), (x-1, y-2) \rangle = 3 + 2(x-1) + (y-2)$$

olur. Düzenlersek $2x + y - z = 1$ bulunur. Normal vektör $(2, 1, -1)$'dir. ■

Örnek 14.18 (Dördüncü Dereceden Terimli Grafik). $f(x,y) = 3x^4 + 5y^2$ fonksiyonunun grafiğine $x = -1, y = 1$ noktasında teğet olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm.
f polinomdur ve her noktada türevlenebilirdir. $f(-1,1) = 3 + 5 = 8$'dir. Kısmi türevler $f_x = 12x^3$ ve $f_y = 10y$ olduğundan $\nabla f(-1,1) = (-12, 10)$ olur. Teğet düzlem

$$z = 8 - 12(x+1) + 10(y-1) = -12x + 10y - 14$$

bulunur. Denetim: $x = -1$, $y = 1$ için $z = 12 + 10 - 14 = 8$. ■

Örnek 14.19 (Yarım Kürenin Teğet Düzlemi). $F(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ yüzeyinin $P = \big(1, -2, F(1,-2)\big)$ noktasındaki gradyan vektörünü bulunuz ve P'deki teğet düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm.
Nokta. $F(1,-2) = \sqrt{9 - 1 - 4} = 2$ olduğundan $P = (1, -2, 2)$'dir.
Türevlenebilirlik. F, $x^2 + y^2 \le 9$ kapalı dairesinde tanımlıdır. İç bölge $x^2 + y^2 < 9$ açıktır ve orada

$$F_x = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}},$$
$$F_y = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

kısmi türevleri süreklidir. $1 + 4 = 5 < 9$ olduğundan $(1,-2)$ iç bölgededir ve Sonuç 14.3 gereği F orada türevlenebilirdir.
Gradyan. $(1,-2)$ noktasında kökün değeri 2 olduğundan

$$\nabla F(1,-2) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

bulunur.
Teğet düzlem.

$$z = 2 - \frac{1}{2}(x-1) + (y+2)$$

olur. İki yanı 2 ile çarpıp düzenlersek

$$x - 2y + 2z = 9$$

bulunur; P bu denklemi sağlar: $1 + 4 + 4 = 9$.
Geometrik denetim. $z = F(x,y)$ yüzeyi, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin $z \ge 0$ yarısıdır. Teğet düzlemin normali $(1, -2, 2)$, yani merkezden P'ye giden yarıçap vektörüdür; kürenin teğet düzlemi yarıçapa dik olmalıdır ve öyledir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

14.10 Alıştırmalar

Alıştırma 14.1 (Karekökle Salınan Fonksiyon: Türevlenebilirlik).

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ yazalım.
Orijin dışında. $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ kümesi açıktır (Sonuç 3.2). U üzerinde $\rho_x=\dfrac{x}{\rho}$ olduğundan çarpım ve zincir kurallarıyla

$$f_x=2x\sin\frac{1}{\rho}+\rho^2\cos\frac{1}{\rho}\cdot\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{x}{\rho}=2x\sin\frac{1}{\rho}-\frac{x}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}$$

ve aynı biçimde $f_y=2y\sin\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{y}{\rho}\cos\dfrac{1}{\rho}$ bulunur. $\rho\neq0$ olduğundan bunlar U üzerinde süreklidir; $f\in C^1(U)$ ve Sonuç 14.3 gereği f, U'nun her noktasında türevlenebilirdir.
Orijinde. Dört adımı uygulayalım.

- Süreklilik: $\mid f(x,y)\mid\le\rho^2\to0$.
- Kısmi türevler: $t\neq0$ için $\left|\dfrac{f(t,0)-0}{t}\right|=\left|t\sin\dfrac{1}{\mid t\mid}\right|\le\mid t\mid\to0$, yani $f_x(0,0)=0$; simetriyle $f_y(0,0)=0$.
- Kalan: $R(h,k)=\dfrac{\rho^2\sin(1/\rho)}{\rho}=\rho\sin\dfrac{1}{\rho}$, burada $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.
- Limit: $\mid R(h,k)\mid\le\rho\to0$.

f, $(0,0)$'da da türevlenebilirdir ve $\nabla f(0,0)=(0,0)$'dır. ■

Alıştırma 14.2 (Karekökle Salınan Fonksiyon: Kısmi Türevin Süreksizliği).

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonunun (Alıştırma 14.1) f_x kısmi türevinin $(0,0)$'da sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Önceki alıştırmada (Alıştırma 14.1) bulunan formülde $y=0$ ve $x>0$ alırsak $\rho=x$ ve

$$f_x(x,0)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

olur. İki dizi seçelim:

- $x_k=\dfrac{1}{2k\pi}$ için $\sin\dfrac{1}{x_k}=0$, $\cos\dfrac{1}{x_k}=1$ ve $f_x(x_k,0)=-1$;
- $x'_k=\dfrac{1}{(2k+1)\pi}$ için $\sin\dfrac{1}{x'_k}=0$, $\cos\dfrac{1}{x'_k}=-1$ ve $f_x(x'_k,0)=1$.

$(x_k,0)$ ve $(x'_k,0)$ dizilerinin ikisi de $(0,0)$'a yakınsar, ama f_x'in bu diziler üzerindeki değerleri farklı sayılara (-1 ve 1'e) yakınsar. Dizisel ölçüt (Sonuç 8.1) gereği f_x'in $(0,0)$'da limiti yoktur; özel olarak f_x orada sürekli değildir.
Böylece f, $\mathbb{R}^2$'nin her noktasında türevlenebilir olduğu hâlde $(0,0)$'ı içeren hiçbir açık kümede C^1 sınıfından değildir; yani $(0,0)$'da sürekli türevlenebilir değildir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 14.3 (Küplerin Toplamının Küpkökü). $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ (reel küpkök) fonksiyonu $(0,0)$'da türevlenebilir midir?

Çözüm.
Süreklilik. $\mid x \mid, \mid y \mid \leq \| (x,y) \|$ olduğundan $\mid x^3+y^3 \mid \leq 2 \| (x,y) \|^3$ ve $\mid f(x,y) \mid \leq \sqrt[3]{2}\, \| (x,y) \| \to 0$ olur; f süreklidir.
Kısmi türevler. $f(t,0)=\sqrt[3]{t^3}=t$ olduğundan $f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{t}{t}=1$; simetriyle $f_y(0,0)=1$.
Kalan.

$$R(h,k)=\frac{\sqrt[3]{h^3+k^3}-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Limit. $k=0$ boyunca $R(h,0)=\dfrac{h-h}{\mid h \mid}=0$. $k=h$ boyunca, $h>0$ için

$$R(h,h)=\frac{\sqrt[3]{2}\,h-2h}{\sqrt{2}\,h}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\approx -0{,}523$$

olur. İki yol farklı limit verir; f, $(0,0)$'da türevlenemez. ■

Alıştırma 14.4 (Kareler Çarpımının Kareler Toplamına Oranı).

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonu $(0,0)$'da türevlenebilir midir?

Çözüm.
Süreklilik. $x^2\leq x^2+y^2$ olduğundan $\mid f(x,y) \mid \leq y^2 \to 0$; f süreklidir.
Kısmi türevler. Eksenler üzerinde $f=0$ olduğundan $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.
Kalan. $R(h,k)=\dfrac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$.
Limit.

$$(h^2+k^2)^2-4h^2k^2=(h^2-k^2)^2\geq 0$$

olduğundan $h^2k^2\leq\dfrac{(h^2+k^2)^2}{4}$ ve

$$0\leq R(h,k)\leq\frac{(h^2+k^2)^2}{4\,(h^2+k^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{4}\to 0$$

olur. f, $(0,0)$'da türevlenebilirdir; türevi sıfırdır ve teğet düzlem $z=0$'dır. ■

Alıştırma 14.5 (Hiperbol Üzerinde Tanımlanan Fonksiyon).

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{xy-1}, & xy\neq 1,\\ 1, & xy=1\end{cases}$$

fonksiyonunun $f_x(1,1)$ ve $f_y(1,1)$ kısmi türevlerinin var olup olmadığını inceleyerek f'nin $(1,1)$ noktasında türevlenebilir olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
Değer. $1\cdot 1=1$ olduğundan $f(1,1)=1$'dir. Kısmi türevler bu noktada formülle değil, tanımla hesaplanmalıdır: $(1,1)$'de formülün paydası sıfırdır ve formül orada geçerli değildir.
Süreklilik. Küçük $t\neq 0$ için $(1+t)\cdot 1\neq 1$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(1+t,1)=\frac{(1+t)^2+1}{t}=\frac{2+2t+t^2}{t}$$

olur. Pay 2'ye, payda 0'a gittiğinden $t\to 0^+$ iken $f(1+t,1)\to+\infty$, $t\to 0^-$ iken $-\infty$ olur. f, $(1,1)$ yakınında sınırlı bile değildir; $(1,1)$'de sürekli olamaz. Sonuç 14.1 gereği f, $(1,1)$'de türevlenemez.
Kısmi türevler. Aynı hesapla

$$\frac{f(1+t,1)-f(1,1)}{t}=\frac{2+t+t^2}{t^2}$$

olur. $t\to 0$ iken pay 2'ye, payda pozitif kalarak 0'a gider; oran $+\infty$'a ıraksar. Dolayısıyla $f_x(1,1)$ yoktur. $f(x,y)=f(y,x)$ olduğundan $f_y(1,1)$ de yoktur.
Aslında f, $xy=1$ hiperbolünün hiçbir noktasında sürekli değildir: hiperbolün bir noktasına yaklaşılırken $xy\to 1$ olur, pay $x^2+y^2\geq 2\mid xy\mid$ eşitsizliği gereği 2'ye yakın ya da daha büyük kalır, payda ise sıfıra gider. ■

Alıştırma 14.6 (Öklid Normunun Türevlenebilirliği). $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\| x \|$ fonksiyonunun hangi noktalarda türevlenebilir olduğunu bulunuz ve türevlenebildiği noktalarda gradyanını hesaplayınız.

Çözüm.
Orijin. $t\neq 0$ için

$$\frac{f(te_j)-f(0)}{t}=\frac{\mid t\mid}{t}=\begin{cases}1, & t>0,\\ -1, & t<0\end{cases}$$

olur ve $t\to 0$ iken limit yoktur. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ mevcut olmadığından Teorem 14.2 gereği f, 0'da türevlenemez. (f orada süreklidir (Sonuç 10.2); türevlenemezliğin nedeni süreksizlik değildir. $n=2$ için aynı hesabı koni örneğinde (Örnek 12.14) yapmıştık.)
Öbür noktalar. $U=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ açıktır (Sonuç 3.2). U üzerinde $f(x)=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ ve kökün içi pozitif olduğundan zincir kuralıyla

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}}=\frac{x_j}{\| x \|}$$

bulunur. Bu fonksiyonlar U üzerinde süreklidir; $f\in C^1(U)$ ve Sonuç 14.3 gereği f, her $a\neq 0$ noktasında türevlenebilirdir:

$$\nabla f(a)=\frac{a}{\| a \|}.$$

Gradyan, a doğrultusundaki birim vektördür. $n=1$ için bu, $\mid x\mid$ fonksiyonunun $x\neq 0$'da türevinin $\dfrac{x}{\mid x\mid}$ olmasıdır. ■

Alıştırma 14.7 (Kuvvetin Yaklaşık Değeri). $(1{,}02)^{3{,}01}$ sayısının yaklaşık değerini toplam diferansiyelle bulunuz.

Çözüm.
Fonksiyon. $f(x,y)=x^y=e^{y\ln x}$ fonksiyonunu $U=\{(x,y):x>0\}$ açık yarı düzleminde düşünelim ve $a=(1,3)$ alalım; $f(1,3)=1$'dir.
Türevlenebilirlik. U üzerinde

$$f_x=y\,x^{y-1},$$
$$f_y=x^y\ln x$$

olur ve bunlar süreklidir; Sonuç 14.3 gereği f, $(1,3)$'te türevlenebilirdir. $f_x(1,3)=3$ ve $f_y(1,3)=1\cdot\ln 1=0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yaklaşım. $dx = 0{,}02$ ve $dy = 0{,}01$ ile

$$df(1,3) = 3(0{,}02) + 0\,(0{,}01) = 0{,}06$$

olur; dolayısıyla $(1{,}02)^{3{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$'dır. Gerçek değer yaklaşık $1{,}06142$'dir. y'deki değişim birinci mertebede sonuca katkı vermez, çünkü $\ln 1 = 0$'dır. ■

Alıştırma 14.8 (Ölçüm Hatasının Hacme Yansıması). Dik dairesel bir silindirin yarıçapı en çok $\%1$, yüksekliği en çok $\%2$ bağıl hatayla ölçülüyor. Hacimdeki bağıl hatayı toplam diferansiyelle yaklaşık olarak kestiriniz.

Çözüm.
Diferansiyel. Yarıçap r, yükseklik H olmak üzere hacim $V(r,H) = \pi r^2 H$'dir. V polinom olduğundan türevlenebilirdir ve

$$dV = V_r\,dr + V_H\,dH = 2\pi r H\,dr + \pi r^2\,dH$$

olur.
Bağıl hata. İki yanı $V = \pi r^2 H$'ye bölersek

$$\frac{dV}{V} = 2\,\frac{dr}{r} + \frac{dH}{H}$$

bulunur. $\left|\dfrac{dr}{r}\right| \le 0{,}01$ ve $\left|\dfrac{dH}{H}\right| \le 0{,}02$ olduğundan

$$\left|\frac{dV}{V}\right| \le 2(0{,}01) + 0{,}02 = 0{,}04$$

olur. Hacimdeki bağıl hata yaklaşık en çok $\%4$'tür. Yarıçap formülde karesiyle geçtiği için onun bağıl hatası iki kez sayılır. ■

Alıştırma 14.9 (Üstel Çarpımın Teğet Düzlemi). $f(x,y) = xe^{xy}$ fonksiyonunun grafiğine $(1,0,1)$ noktasında teğet olan düzlemin ve bu noktadaki normal doğrunun denklemlerini yazınız.

Çözüm.
Nokta ve türevlenebilirlik. $f(1,0) = 1 \cdot e^0 = 1$ olduğundan nokta grafiğin üzerindedir.

$$f_x = e^{xy} + xy\,e^{xy} = (1+xy)\,e^{xy},$$
$$f_y = x^2 e^{xy}$$

kısmi türevleri $\mathbb{R}^2$'de süreklidir; Sonuç 14.3 gereği f türevlenebilirdir. $f_x(1,0) = 1$ ve $f_y(1,0) = 1$'dir.
Teğet düzlem. $z = 1 + 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-0)$, yani $z = x + y$.
Normal doğru. Normal vektör $(1,1,-1)$ olduğundan normal doğru ($t \in \mathbb{R}$)

$$(x,y,z) = (1,0,1) + t\,(1,1,-1)$$

olur. ■

Bu bölümde reel değerli bir fonksiyonun türevini, gradyanla iç çarpım olarak temsil edilen bir lineer fonksiyon olarak kurduk ve türevlenebilirliğin sürekliliği, kısmi türevleri ve teğet düzlemi nasıl güvenceye aldığını gördük. Vektör değerli bir $f = (f_1, \dots, f_m)$ fonksiyonu için aynı fikir, türevi $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir lineer dönüşüm yapar; bu dönüşümün matrisi Jacobi matrisidir. Bu genellemeyi ve bileşke fonksiyonların türevini veren zincir kuralını Jacobi Matrisi ve Zincir Kuralı bölümünde kuruyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Jacobi Matrisi ve Zincir Kuralı

Tek değişkenli bir fonksiyonun türevi bir sayıdır, ama bu sayının asıl işi bir yaklaşım kurmaktır: f, a noktasında türevlenebilirse a yakınında $f(a+h)-f(a) \approx f'(a)\,h$ olur ve $h \mapsto f'(a)\,h$ lineer fonksiyonu artıma en iyi uyan doğrusal yaklaşımdır (bkz. Analiz 2). Türevlenebilme ve Toplam Diferansiyel bölümünde bu fikri reel değerli çok değişkenli fonksiyonlara taşıdık: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ için artıma yaklaşan lineer fonksiyon $h \mapsto \langle \nabla f(a), h\rangle$ oldu.
Bu bölümde değer uzayını da büyütüyor ve $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlarını ele alıyoruz. Artık $f(a+h)-f(a)$ artımı $\mathbb{R}^m$'de bir vektördür; ona yaklaşan nesne $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir lineer dönüşüm, yani $m \times n$ tipinde bir matris olacak. Bu matrisin satırları bileşen fonksiyonların gradyanlarıdır ve ona **Jacobi matrisi** denir. Türevi bir lineer dönüşüm olarak görmenin karşılığını bileşke fonksiyonlarda alacağız: bileşkenin türevi türevlerin bileşkesidir, matris diliyle Jacobi matrisleri çarpılır. **Zincir kuralı** adını taşıyan bu sonuç, tek değişkenli $(f\circ g)'(a) = f'\left(\,g(a)\,\right)g'(a)$ formülünün doğal genellemesidir ve çok değişkenli hesabın en sık kullanılan aracıdır.
Matris çarpımı içeren her formülde $\mathbb{R}^n$'nin elemanlarını sütun vektörü olarak düşüneceğiz: $h = (h_1, \ldots, h_n)$ vektörü bir matrisle çarpılırken $n \times 1$ tipinde bir matristir.

15.1 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Türevlenebilme

Tanıma, reel değerli durumdaki yaklaşımı bileşen bileşen yazarak ulaşalım.
$f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$, $a \in D^\circ$ olsun ve her f_i bileşeni a noktasında türevlenebilsin. Önerme 14.1 ve Teorem 14.2 gereği her $i = 1, \ldots, m$ için

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle \nabla f_i(a), h\rangle + \| h \|\, \eta_i(h)$$

yazılabilir; burada $h \to 0$ iken $\eta_i(h) \to 0$ olur. Bu m eşitliği alt alta yazıp $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ dersek

$$f(a+h) - f(a) = J\,h + \| h \|\, \eta(h)$$

elde edilir. Burada J, i-inci satırı $\nabla f_i(a)$ olan $m \times n$ tipindeki matristir:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

$h \mapsto Jh$ bir lineer dönüşümdür ve bileşenlerle limit teoremi (Teorem 8.6) gereği $h \to 0$ iken $\eta(h) \to 0$ olur. Demek ki vektör değerli bir fonksiyonun artımı da bir lineer dönüşümle yaklaşılır ve yapılan hata $\| h \|$ ile kıyaslanınca küçüktür. Tanım, kısmi türevlere hiç başvurmadan bu özelliği esas alır.
Lineer cebirden hatırlayalım: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ koşulunu sağlıyorsa bir **lineer dönüşümdür**. Her lineer dönüşüm tek bir $m \times n$ matrisle $T(h) = Ah$ biçiminde yazılır; A matrisinin j-inci sütunu $T(e_j)$ vektörüdür (Tanım 1.4). Özel olarak $T(0) = 0$'dır.

Tanım 15.1 (Vektör Değerli Fonksiyonun Türevi). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $a \in D^\circ$ olsun. Öyle bir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü varsa ki

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - T(h) \|}{\| h \|} = 0$$

olsun, f'ye a noktasında **türevlenebilir** (diferansiyellenebilir) denir. Bu durumda T dönüşümüne f'nin a noktasındaki **türevi** denir ve $Df(a)$ ya da $f'(a)$ ile gösterilir. $x = a + h$ yazılırsa koşul

$$\lim_{x\to a} \frac{\| f(x) - f(a) - T(x-a) \|}{\| x - a \|} = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçimini alır. f, bir $U \subseteq D$ açık kümesinin her noktasında türevlenebiliyorsa f'ye $\boldsymbol{U}$ **üzerinde türevlenebilir** denir.

Yani $f(a+h)-f(a)$ artımına $T(h)$ ile yaklaşıyoruz ve yaklaşımın hatası, h hangi yoldan 0'a giderse gitsin, h vektörünün uzunluğundan daha hızlı sıfıra gidiyor. Paydaki norm $\mathbb{R}^m$'nin, paydadaki norm $\mathbb{R}^n$'nin Öklid normudur. Türev bir sayı ya da vektör değil, bir lineer dönüşümdür; $Df(a)$ dönüşümünün h'deki değerini $Df(a)(h)$ ya da kısaca $Df(a)h$ ile yazacağız. T'nin tek olduğunu Teorem 15.1 ile göreceğiz.
Birkaç ayrıntı:

- $a \in D^\circ$ olduğundan $B(a,r) \subseteq D$ olacak bir $r>0$ vardır ve kesir $0 < \| h \| < r$ olan her h için tanımlıdır.
- $h \neq 0$ için normun içindeki vektörü $\| h \|$'ye bölerek $\eta(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{\| h \|}$ tanımlayalım ve $\eta(0)=0$ diyelim. O zaman koşul, $h \to 0$ iken $\eta(h) \to 0$ olmak üzere
$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \| h \| \eta(h)$$
biçiminde yazılır. Kalan terim $\| h \| \eta(h)$, $\mathbb{R}^m$'de bir vektördür.
- Kısmi türevlenebilmeden ayırt etmek için bu kavrama **tam türevlenebilme** de denir. Tanımın gücü, yaklaşımın bütün doğrultularda aynı anda iyi olmasını istemesindedir; bu yüzden kısmi türevlerin var olması türevlenebilme için yetmez.

Tanım, önceki bölümdeki türevi özel hâl olarak içerir.

- $\boldsymbol{m=1}$. $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye her lineer dönüşüm $T(h) = \langle A, h\rangle$ biçimindedir ve $\mathbb{R}$'de norm mutlak değerdir. Bir reel sayının mutlak değeri 0'a gittiğinde sayının kendisi de 0'a gider; dolayısıyla $m=1$ iken Tanım 15.1 ile Tanım 14.1 aynı şeyi söyler ve Teorem 14.2 gereği $Df(a)h = \langle \nabla f(a), h\rangle$ olur.
- $\boldsymbol{n=1}$. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^m$'ye her lineer dönüşüm $T(h) = hT(1) = hc$ biçimindedir; burada $c = T(1) \in \mathbb{R}^m$'dir. $h \neq 0$ için
$$\left\| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - c \right\| = \frac{\| f(a+h)-f(a)-hc \|}{| h |}$$
olduğundan f'nin a'da türevlenebilmesi, fark oranının $\mathbb{R}^m$'de c limitine sahip olmasıdır. Bu limit, f'nin tek kısmi türevi olan hız vektörüdür (Tanım 12.4, Teorem 12.2): $c = f'(a) = \left(f_1'(a), \ldots, f_m'(a) \right)$. Böylece $Df(a)h = h\,f'(a)$ olur.
- $\boldsymbol{n=m=1}$. $Df(a)h = f'(a)\,h$; türev, Analiz 2'deki türev sayısıyla çarpma dönüşümüdür (bkz. Analiz 2).

Örnek 15.1 (Tanımla Türev Hesabı). $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2, xy)$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasında türevlenebilir olduğunu tanımla gösteriniz ve $Df(1,2)$ dönüşümünü bulunuz.

Çözüm.
Artım. $h = (h_1, h_2)$ için
$$\begin{aligned} f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) &= \left((1+h_1)^2 - 1, (1+h_1)(2+h_2) - 2 \right) \\ &= \left(2h_1 + h_1^2, 2h_1 + h_2 + h_1 h_2 \right) \end{aligned}$$
olur.
Aday. Her bileşenin h'ye göre lineer kısmını ayıralım: $T(h_1,h_2) = (2h_1, 2h_1+h_2)$. Bu dönüşüm lineerdir; h sütun vektörünü
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
matrisiyle çarpar. Geriye kalan terim (h_1^2, h_1h_2) vektörüdür.
Kalan.
$$\| (h_1^2, h_1h_2) \| = \sqrt{h_1^4 + h_1^2 h_2^2} = | h_1 | \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = | h_1 | \| h \|$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan $h \neq 0$ için

$$\frac{\| f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) - T(h) \|}{\| h \|} = |\, h_1 \,| \leq \| h \|$$

olur ve sıkıştırmayla (Teorem 8.5) oran 0'a gider. f, $(1,2)$'de türevlenebilirdir ve

$$Df(1,2)(h_1, h_2) = (2h_1, 2h_1 + h_2).$$

Matrisin satırları, $\nabla(x^2) = (2x, 0)$ ve $\nabla(xy) = (y, x)$ gradyanlarının $(1,2)$ noktasındaki değerleri olan $(2,0)$ ve $(2,1)$ vektörleridir. Bunun rastlantı olmadığını Teorem 15.3 gösterecek. ■

Örnek 15.2 (Afin Fonksiyonların Türevi). $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer bir dönüşüm, $b \in \mathbb{R}^m$ ve $f(x) = L(x) + b$ olsun. f'nin her $a \in \mathbb{R}^n$ noktasında türevlenebilir olduğunu ve $Df(a) = L$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
L lineer olduğundan her h için

$$f(a+h) - f(a) = L(a+h) + b - L(a) - b = L(h)$$

olur. $T = L$ seçilirse tanımdaki kesrin payı özdeş olarak 0'dır; limit de 0'dır. Demek ki $Df(a) = L$'dir ve türev a noktasına bağlı değildir.
İki özel durum önemlidir. $L = 0$ ise f sabit fonksiyondur ve türevi her noktada sıfır dönüşümdür; matrisi $m \times n$ tipindeki sıfır matristir. $b = 0$ ise $f = L$ lineerdir ve her noktadaki türevi kendisidir: bir lineer dönüşüme en iyi uyan lineer dönüşüm kendisidir. $m = 1$ için bu, Örnek 14.2 sonucudur. ■

15.2 Türevin Tekliği ve Süreklilik

Tanımda "bir T varsa" dedik. Türevden söz edebilmek için bu dönüşümün tek olması gerekir.

Teorem 15.1 (Türevin Tekliği). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. f, a noktasında türevlenebilirse Tanım 15.1 koşulunu sağlayan T lineer dönüşümü tektir.*

İspat.
a iç nokta olduğundan $B(a,r) \subseteq D$ olacak bir $r > 0$ vardır. T_1 ve T_2 lineer dönüşümlerinin ikisi de koşulu sağlasın. $i = 1, 2$ ve $0 < \| h \| < r$ için

$$q_i(h) = \frac{\| f(a+h) - f(a) - T_i(h) \|}{\| h \|}$$

diyelim; varsayım gereği $h \to 0$ iken $q_1(h) \to 0$ ve $q_2(h) \to 0$ olur.
Bir doğrultuda karşılaştırma. *$\| e \| = 1$ olan bir $e \in \mathbb{R}^n$ vektörü sabitleyelim ve $0 < |\, \lambda \,| < r$ olsun. T_1, T_2 lineer olduğundan $T_1(\lambda e) - T_2(\lambda e)$ farkı $\lambda \left(T_1(e) - T_2(e) \right)$ vektörüne eşittir; ayrıca $\| \lambda e \| = |\, \lambda \,|$'dır. Öte yandan*

$$\begin{aligned} T_1(\lambda e) - T_2(\lambda e) = &\left[f(a+\lambda e) - f(a) - T_2(\lambda e) \right] \\ &- \left[f(a+\lambda e) - f(a) - T_1(\lambda e) \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliği (Teorem 1.2) ile

$$\| T_1(e) - T_2(e) \| = \frac{\| T_1(\lambda e) - T_2(\lambda e) \|}{|\, \lambda \,|} \leq q_2(\lambda e) + q_1(\lambda e)$$

bulunur.
Limit. *$\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir $\delta \in (0, r]$ vardır ki $0 < \| h \| < \delta$ iken $q_1(h) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ve $q_2(h) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur. $\lambda = \dfrac{\delta}{2}$ seçersek $\| \lambda e \| < \delta$ olduğundan $\| T_1(e) - T_2(e) \| < \varepsilon$ bulunur. Sol taraf ε'a bağlı değildir ve $\varepsilon > 0$ keyfidir; öyleyse $T_1(e) = T_2(e)$'dir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Bütün vektörler. *$y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ ise $e = \dfrac{y}{\| y \|}$ birim vektördür ve lineerlikten*

$$T_1(y) = \| y \| T_1(e) = \| y \| T_2(e) = T_2(y)$$

olur; $y = 0$ için de $T_1(0) = 0 = T_2(0)$'dır. Öyleyse $T_1 = T_2$. ■

Teklik sayesinde "türev" demek anlamlıdır. İspatta a'nın iç nokta olması kilit rol oynadı: a'dan her e doğrultusunda küçük adımlar atabildik. $m = 1$ iken teklik Teorem 14.2 ile de görülmüştü; orada tek aday gradyandı.

Türevlenebilir fonksiyonların sürekli olduğunu ve zincir kuralını ispatlarken, bir lineer dönüşümün vektörlerin boyunu en çok sabit bir çarpan kadar büyüttüğünü kullanacağız.

Lemma 15.1 (Lineer Dönüşümün Sınırlılığı). *$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, matrisi $A = (a_{ij})$ olan bir lineer dönüşüm ve*

$$M_T = \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big)^{1/2}$$

olsun. Her $h \in \mathbb{R}^n$ için $\| T(h) \| \leq M_T \| h \|$ olur. Özel olarak $h \to 0$ iken $T(h) \to 0$'dır.

İspat.
A'nın i-inci satırını $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ ile gösterelim. $T(h) = Ah$ vektörünün i-inci bileşeni

$$a_{i1}h_1 + \ldots + a_{in}h_n = \langle a_i, h \rangle$$

sayısıdır. Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) gereği $| \langle a_i, h \rangle | \leq \| a_i \| \| h \|$ olduğundan

$$\| T(h) \|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i, h \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \| a_i \|^2 \| h \|^2 = M_T^2 \| h \|^2$$

olur; son adımda $\| a_1 \|^2 + \ldots + \| a_m \|^2$ toplamının bütün a_{ij}^2 sayılarının toplamı olduğunu kullandık. Karekök alınırsa istenen eşitsizlik çıkar. $h \to 0$ iken $0 \leq \| T(h) \| \leq M_T \| h \| \to 0$ olduğundan sıkıştırmayla (Teorem 8.5) $\| T(h) \| \to 0$, yani $T(h) \to 0$ olur. ■

Sonuç 15.1 (Türevlenebilen Fonksiyon Süreklidir). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f : D \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu a noktasında türevlenebilir olsun. O zaman f, a noktasında süreklidir.*

İspat.
$T = Df(a)$ olsun ve η, yukarıdaki ayrıntılarda tanımlanan kalan fonksiyonu olsun: $0 < \| h \| < r$ için

$$f(a + h) - f(a) = T(h) + \| h \| \eta(h)$$

ve $h \to 0$ iken $\eta(h) \to 0$. Üçgen eşitsizliği ve Lemma 15.1 ile

$$\| f(a + h) - f(a) \| \leq \| T(h) \| + \| h \| \| \eta(h) \| \leq \big(M_T + \| \eta(h) \| \big) \| h \|$$

bulunur. $h \to 0$ iken sağ taraftaki ilk çarpan M_T'ye, ikinci çarpan 0'a gider; sıkıştırmayla $\| f(a + h) - f(a) \| \to 0$ olur. Bu, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ demektir; f, a'da süreklidir (Tanım 10.1). ■

Sonucun karşıt tersi kullanışlıdır: a'da sürekli olmayan bir fonksiyon a'da türevlenemez. $m = 1$ için bu, Teorem 14.1 ve Sonuç 14.1 ile bildiğimiz şeydir. Tersi doğru değildir; tek değişkende bile $| x |$ fonksiyonu 0'da sürekli olduğu hâlde türevlenemez.

15.3 Bileşenlerle Türevlenebilme

Vektör değerli bir fonksiyonun türevlenebilirliği, bileşenlerininkine indirgenir. Böylece reel değerli fonksiyonlar için bildiğimiz her şey bileşen bileşen kullanılabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 15.2 (Bileşenlerle Türevlenebilme). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f = (f_1, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. f'nin a noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul, her f_i bileşeninin reel değerli bir fonksiyon olarak a noktasında türevlenebilir olmasıdır. Bu durumda her $h \in \mathbb{R}^n$ için*

$$Df(a)h = \left(\ Df_1(a)h, ..., Df_m(a)h \ \right)$$

olur.

İspat.
Hazırlık. *Her $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $T = (T_1, ..., T_m)$ bileşenleriyle yazılır. Vektörlerde toplama ve skalerle çarpma bileşen bileşen yapıldığından T'nin lineer olması, her $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bileşeninin lineer olmasıyla aynı şeydir.*
Ayrıca her $y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ için

$$\mid y_i \mid \leq \parallel y \parallel \leq \mid y_1 \mid + ... + \mid y_m \mid$$

olur: sol eşitsizlik $y_i^2 \leq y_1^2 + ... + y_m^2$ eşitsizliğinden, sağdaki ise $y = y_1 e_1 + ... + y_m e_m$ yazıp üçgen eşitsizliğini uygulamaktan gelir.
$T = (T_1, ..., T_m)$ lineer olsun ve $0 < \parallel h \parallel < r$ için

$$q(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\parallel h \parallel} \in \mathbb{R}^m$$

diyelim. $q(h)$ vektörünün i-inci bileşeni

$$q_i(h) = \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - T_i(h)}{\parallel h \parallel}$$

sayısıdır ve yukarıdaki eşitsizlik gereği

$$\mid q_i(h) \mid \leq \parallel q(h) \parallel \leq \mid q_1(h) \mid + ... + \mid q_m(h) \mid$$

olur.
($\Rightarrow$) *f, $T = Df(a)$ ile türevlenebilir olsun. $h \to 0$ iken $\parallel q(h) \parallel \to 0$ olduğundan soldaki eşitsizlik ve sıkıştırma gereği her i için $\mid q_i(h) \mid \to 0$ olur. Bu, f_i'nin a'da T_i lineer dönüşümüyle türevlenebilir olması demektir; teklik (Teorem 15.1) gereği $Df_i(a) = T_i$'dir.*
($\Leftarrow$) *Her f_i, a'da türevlenebilir olsun ve $T_i = Df_i(a)$ diyelim. $T = (T_1, ..., T_m)$ lineerdir. Her i için $\mid q_i(h) \mid \to 0$ olduğundan sağdaki eşitsizlik gereği $\parallel q(h) \parallel \to 0$ olur. Öyleyse f, a'da türevlenebilirdir ve $Df(a) = T$'dir; yani $Df(a)h = \left(\ Df_1(a)h, ..., Df_m(a)h \ \right)$.* ■

Yani vektör değerli durum yeni bir zorluk getirmez: f türevlenebilirse her bileşeni türevlenebilirdir, bir bileşeni bile türevlenemiyorsa f türevlenemez. $m = 1$ için $Df_i(a)h = \langle \nabla f_i(a), h \rangle$ olduğundan (Teorem 14.2) formül

$$Df(a)h = \left(\ \langle \nabla f_1(a), h \rangle, ..., \langle \nabla f_m(a), h \rangle \ \right)$$

biçimini alır. Teorem Sonuç 15.1 için ikinci bir yol da verir: türevlenebilir f'nin her bileşeni Teorem 14.1 gereği süreklidir, dolayısıyla Teorem 10.5 gereği f süreklidir.

15.4 Jacobi Matrisi

Türevin var olduğu biliniyorsa onu limit hesaplamadan, yalnız kısmi türevlerle bulabiliriz. Önce kısmi türevleri bir matriste toplayalım.

Tanım 15.2 (Jacobi Matrisi). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f = (f_1, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. Bütün $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ kısmi türevleri ($i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$) varsa

 CC BY-NC-SA 4.0

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

matrisine f'nin a noktasındaki **Jacobi matrisi** denir.

Yani Jacobi matrisinin i-inci satırında i-inci bileşenin bütün değişkenlere göre kısmi türevleri, j-inci sütununda bütün bileşenlerin j-inci değişkene göre kısmi türevleri durur. Satırlar bileşenlerin gradyanları (Tanım 12.3), sütunlar ise f'nin vektör değerli kısmi türevleridir (Tanım 12.4, Teorem 12.2):

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Bileşenler ve değişkenler adlarıyla yazıldığında da kural aynıdır. Örneğin $f(x,y) = \big(\ u(x,y), v(x,y), w(x,y)\ \big)$ için

$$J_f = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}$$

olur. Jacobi matrisinin tanımı yalnız kısmi türevlerin varlığını ister, türevlenebilirliği istemez.

Teorem 15.3 (Türevin Matris Temsili). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f = (f_1, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. f, a noktasında türevlenebilirse f'nin a'da bütün birinci kısmi türevleri vardır ve her $h \in \mathbb{R}^n$ için*

$$Df(a)h = J_f(a)\, h$$

olur; yani $Df(a)$ lineer dönüşümünün matrisi Jacobi matrisidir.

İspat.
$T = Df(a)$ ve $B(a,r) \subseteq D$ olsun; $j \in \{1, ..., n\}$ sabitlensin.
Bir sütun. *$0 < |\ t\ | < r$ için $h = te_j$ alalım. $\|\ te_j\ \| = |\ t\ |$ ve $T(te_j) = t\,T(e_j)$ olduğundan*

$$\left\|\ \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} - T(e_j)\ \right\| = \frac{\|\ f(a+te_j) - f(a) - T(te_j)\ \|}{\|\ te_j\ \|}$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $0 < \|\ h\ \| < \delta$ iken tanımdaki kesir ε'dan küçük olacak bir $\delta \in (0, r]$ seçilsin. $0 < |\ t\ | < \delta$ ise $0 < \|\ te_j\ \| < \delta$ olduğundan sağ taraf ε'dan küçüktür. Demek ki

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = T(e_j)$$

vardır. Soldaki limit f'nin x_j'ye göre kısmi türevidir (Tanım 12.4). Teorem 12.2 gereği her i için $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ vardır ve $T(e_j)$ vektörünün i-inci bileşenine eşittir:

$$T(e_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}.$$

Bu, $J_f(a)$ matrisinin j-inci sütunudur.
Bütün vektörler. *$h = h_1e_1 + ... + h_ne_n$ için T'nin lineerliğinden*

$$T(h) = h_1\,T(e_1) + ... + h_n\,T(e_n) = J_f(a)\, h$$

 CC BY-NC-SA 4.0

> *bulunur; çünkü bir matrisin bir sütun vektörüyle çarpımı, sütunlarının o vektörün bileşenleriyle kurulan toplamıdır.* ■

Yani türevlenebilir bir fonksiyonun türevini bulmak için limit hesaplamak gerekmez: kısmi türevler hesaplanır ve matrise dizilir. Bu yüzden $Df(a)$ lineer dönüşümü ile onun **matris temsili** olan $J_f(a)$ çoğu zaman özdeşleştirilir ve $Df(a) = J_f(a)$ ya da $f'(a) = J_f(a)$ yazılır. Özel durumlarda:

- $m = 1$ iken $J_f(a)$, $1 \times n$ tipindeki $\nabla f(a)$ satırıdır ve $J_f(a)\,h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ olur.
- $n = m = 1$ iken $J_f(a)$, tek girdisi $f'(a)$ olan 1×1 matristir.

Teoremin tersi doğru değildir. Jacobi matrisini kuran kısmi türevler, f türevlenebilir olmadığında da var olabilir. Örneğin Örnek 13.5 içindeki $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun (orijinde 0 tanımlanarak) orijinde iki kısmi türevi de vardır, ama fonksiyon orada süreksiz olduğundan türevlenemez (Sonuç 15.1). Örneğin $F(x,y) = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2},\, x+y \right)$ (orijinde ilk bileşen 0) fonksiyonunun orijinde Jacobi matrisi vardır, ama Teorem 15.2 gereği F orada türevlenemez. Türevlenebilme, $J_f(a)$'nın var olmasını değil, küçük h vektörleri için $J_f(a)\,h$ çarpımının $f(a+h) - f(a)$ artımına iyi bir yaklaşım olmasını ister. Teoremin söylediği şudur: türev varsa $J_f(a)$'dan başkası olamaz; $J_f(a)$ yalnız bir adaydır.
Reel değerli fonksiyonlar için toplam diferansiyeli $df(a) = \langle \nabla f(a), dx \rangle$ olarak tanımlamıştık (Tanım 14.2). Vektör değerli fonksiyonda gradyanın yerini Jacobi matrisi alır.

Tanım 15.3 (Vektör Değerli Fonksiyonun Toplam Diferansiyeli). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $a \in D^\circ$ noktasında türevlenebilir ve $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$ bağımsız artımlar olsun.

$$df(a) = Df(a)(dx) = J_f(a)\,dx$$

vektörüne f'nin a noktasındaki **toplam diferansiyeli** denir.

Yani toplam diferansiyel, türev dönüşümünün dx artımına uygulanmasıdır ve i-inci bileşeni, f_i'nin önceki bölümdeki toplam diferansiyeli $df_i(a)$'dır. Örneğin iki değişkenli ve üç bileşenli $f(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y) \big)$ fonksiyonu için

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dy \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}\,dy \end{pmatrix}$$

ve

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

olur; df, Jacobi matrisinin (dx, dy) sütunuyla çarpımıdır. $n = m = 1$ iken tanım $df = f'(x)\,dx$, $n = 1$ iken $df = f'(t)\,dt$ formülüne dönüşür. $w = f(x)$ yazılırsa $dw = f'(x)\,dx = J_f(x)\,dx$ biçimi de kullanılır.
Tanım ve değer uzaylarının boyutu aynıysa Jacobi matrisi karedir ve determinantı alınabilir.

Tanım 15.4 (Jacobi Determinantı). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun a'da bütün birinci kısmi türevleri bulunsun. $J_f(a)$ kare matrisinin determinantına f'nin a noktasındaki **Jacobi determinantı** denir ve

$$\det J_f(a) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a)$$

ile gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani Jacobi determinantı yalnız $m = n$ iken anlamlıdır. Bileşenler ve değişkenler adlarıyla yazıldığında, örneğin $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$ için

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

olur. Jacobi determinantının mutlak değeri, f'nin a yakınındaki küçük alan ve hacimleri yaklaşık kaç katına çıkardığını gösterir; sıfırdan farklı olması Ters ve Kapalı Fonksiyon Teoremleri bölümünde kilit koşul olacak.

Örnek 15.3 (Kutupsal Koordinatların Jacobi Determinantı). $g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ kutupsal koordinat dönüşümünün Jacobi matrisini ve Jacobi determinantını bulunuz.

Çözüm.

Jacobi matrisi. $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ bileşenlerdir. Sütunlar $\dfrac{\partial g}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta)$ ve $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$ vektörleridir (Alıştırma 12.8):

$$J_g(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Determinant.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\cos^2\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$$

bulunur. $r > 0$ iken determinant sıfırdan farklıdır. $r = 0$ iken sıfırdır; nitekim $r = 0$ doğrusunun bütün $(0, \theta)$ noktaları tek bir noktaya, orijine gider. ■

15.5 Sürekli Kısmi Türevlerle Yeter Koşul

Teorem 15.3 kısmi türevlerin varlığını gerek koşul olarak verir ama bu koşul yeter değildir. Reel değerli fonksiyonlarda en kullanışlı yeter koşul kısmi türevlerin sürekliliğiydi (Teorem 14.3); bileşenler yardımıyla bu koşul vektör değerli fonksiyonlara geçer.

Teorem 15.4 (Vektör Değerli Fonksiyonlar için Yeter Koşul). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ olsun. Bütün $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ kısmi türevleri bir $B(a, r) \subseteq D$ yuvarının her noktasında var ve a noktasında sürekliyse f, a'da türevlenebilirdir ve $Df(a) = J_f(a)$ olur. Özel olarak $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve $f \in C^1(U)$ ise f, U'nun her noktasında türevlenebilirdir.*

İspat.
Her i için f_i'nin birinci kısmi türevleri $B(a, r)$'de var ve a'da süreklidir; Teorem 14.3 gereği f_i, a'da türevlenebilirdir. Bütün bileşenler türevlenebilir olduğundan Teorem 15.2 gereği f de a'da türevlenebilirdir ve Teorem 15.3 gereği türevin matrisi $J_f(a)$'dır.
$f \in C^1(U)$ ise (Tanım 13.3) her f_i bileşeni $C^1(U)$ sınıfındadır. $a \in U$ için $B(a, r) \subseteq U$ olacak bir $r > 0$ vardır; kısmi türevler bu yuvarda var ve a'da süreklidir. İlk kısım gereği f, a'da türevlenebilirdir. ■

Yani somut fonksiyonların çoğunda türevi bulmak, kısmi türevleri hesaplayıp Jacobi matrisine dizmekten ibarettir. $f \in C^1(U)$ iken $x \mapsto J_f(x)$ matrisinin her girdisi U üzerinde süreklidir; türev noktadan noktaya sürekli değişir. C^1 sınıfındaki fonksiyonlara **sürekli türevlenebilir** denmesinin nedeni budur. Koşul yeterdir ama gerekli değildir: türevlenebilir olup kısmi türevleri sürekli olmayan fonksiyonlar vardır (Örnek 14.14) ve böyle bir fonksiyonu bileşen olarak alan, öbür bileşenleri türevlenebilir seçilmiş vektör değerli fonksiyon da aynı özelliği taşır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda türev hesabı

1. **Bileşenler.** $f = (f_1, \ldots, f_m)$ bileşenleri ayrı ayrı yazılır.
2. **Jacobi matrisi.** Bütün $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ kısmi türevleri hesaplanır ve i-inci satıra ∇f_i gelecek biçimde $m \times n$ tipindeki J_f matrisine dizilir. Bir kısmi türev yoksa f türevlenemez (Teorem 15.3).
3. **Karar.** Kısmi türevler noktanın bir yuvarında var ve noktada sürekliyse $Df(a) = J_f(a)$'dır (Teorem 15.4). Değilse tek aday $J_f(a)$'dır; kalan terimin $\| h \|$ ile bölümünün 0'a gidip gitmediği tanımla incelenir, gerekirse bileşen bileşen (Teorem 15.2).

Örnek 15.4 (Üç Bileşenli Bir Fonksiyonun Türevi). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = \left(x_1^2,\, x_1^3 x_2,\, x_1^4 x_2^2 \right)$ olsun. $Df(x_1, x_2)$ türevini bulunuz.

Çözüm.
Bileşenler. $f_1 = x_1^2$, $f_2 = x_1^3 x_2$, $f_3 = x_1^4 x_2^2$'dir. $n = 2$, $m = 3$ olduğundan türev 3×2 tipinde bir matrisle temsil edilir.
Jacobi matrisi.

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 3x_1^2 x_2 & x_1^3 \\ 4x_1^3 x_2^2 & 2x_1^4 x_2 \end{pmatrix}.$$

Karar. Bütün girdiler polinomdur, dolayısıyla $\mathbb{R}^2$'de süreklidir (Teorem 10.3). Teorem 15.4 gereği f her noktada türevlenebilirdir ve $Df(x_1, x_2) = J_f(x_1, x_2)$'dir. Örneğin $(1, -1)$ noktasında

$$Df(1, -1)(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h_1 \\ -3h_1 + h_2 \\ 4h_1 - 2h_2 \end{pmatrix}$$

olur. ■

Örnek 15.5 (Türev ve Toplam Diferansiyel). $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + 5xyz,\, 2x - 3z,\, 4y + 2z - z^2,\, y^2 + 6z \right)$$

olsun. f' türevini ve df toplam diferansiyelini bulunuz.

Çözüm.
Türev. Bileşenler polinom olduğundan kısmi türevleri de polinomdur ve süreklidir; Teorem 15.4 gereği türev Jacobi matrisidir. Her satır bir bileşenin (x, y, z)'ye göre kısmi türevlerinden oluşur:

$$f'(x, y, z) = J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + 5yz & 5xz & 5xy \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 - 2z \\ 0 & 2y & 6 \end{pmatrix}.$$

Toplam diferansiyel. Diferansiyel vektörü (dx, dy, dz) olmak üzere

$$df = \begin{pmatrix} 2x + 5yz & 5xz & 5xy \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 - 2z \\ 0 & 2y & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

olur ve matris çarpımı satır satır yapılınca

 CC BY-NC-SA 4.0

$$df = \begin{pmatrix} (2x+5yz)\,dx + 5xz\,dy + 5xy\,dz \\ 2\,dx - 3\,dz \\ 4\,dy + (2-2z)\,dz \\ 2y\,dy + 6\,dz \end{pmatrix}$$

bulunur. f' bir matrisle temsil edilen lineer dönüşümdür; df ise bu dönüşümün (dx, dy, dz) vektörüne uygulanmasıyla elde edilen vektördür. ■

Örnek 15.6 (Paraboloit Parametrizasyonunun Türevi). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu gösteriniz ve $Df(0,0)$, $Df(0,1)$, $Df(1,1)$ dönüşümlerini yazınız.

Çözüm.
Türevlenebilirlik. Bileşenler $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = x^2+y^2$ polinomlarıdır. Kısmi türevler

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1, 0, 2x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

olup bileşenleri süreklidir. Teorem 15.4 gereği f her noktada türevlenebilirdir, yani türevin bir matris temsili vardır:

$$Df(x,y) = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Üç noktada. $h = (h_1, h_2)$ için

$$Df(0,0)(h_1,h_2) = (h_1, h_2, 0),$$
$$Df(0,1)(h_1,h_2) = (h_1, h_2, 2h_2),$$
$$Df(1,1)(h_1,h_2) = (h_1, h_2, 2h_1 + 2h_2)$$

olur. Afin fonksiyonlardan (Örnek 15.2) farklı olarak bu fonksiyonun türevi noktadan noktaya değişir. ■

Örnek 15.7 (Matris Temsilini Tanımla Doğrulamak).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında türevlenebilir olduğunu gösteriniz ve $J_f(0,0)$ matrisini bulunuz.

Çözüm.
Kısmi türevler. Eksenler üzerinde $f(t,0) = f(0,t) = 0$ olduğundan fark oranları sıfırdır: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Tek aday, 1×2 tipindeki $J_f(0,0) = (0\ \ 0)$ matrisi, yani sıfır dönüşümüdür.
Kalan. $h = (h_1, h_2) \neq 0$ olsun. $(h_1^2 - h_2^2)^2 \geq 0$ eşitsizliği açılınca $4h_1^2h_2^2 \leq (h_1^2+h_2^2)^2$ verir. Dolayısıyla

$$\frac{|\ f(h_1,h_2) - 0 - 0\ |}{\|\ h\ \|} = \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \leq \frac{(h_1^2+h_2^2)^2}{4\,(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \frac{\|\ h\ \|}{4}$$

olur ve sıkıştırmayla oran 0'a gider.
Sonuç. f, $(0,0)$'da türevlenebilirdir, $Df(0,0)$ sıfır dönüşümüdür ve $J_f(0,0) = (0\ \ 0)$'dır. Kısmi türevlerin orijin yakınındaki davranışını incelemeden, doğrudan tanımla karar verdik. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

15.6 Afin Yaklaşım

Türevlenebilme, f'nin a yakınında bir sabit vektör ile bir lineer dönüşümün toplamına çok benzediğini söyler. Reel değerli fonksiyonlarda bu toplamı doğrusallaştırma adıyla tanımlamıştık (Tanım 14.3); aynı tanım vektör değerli fonksiyonlara geçer.

Tanım 15.5 (Afin Yaklaşım). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ ve $f, a \in D^\circ$ noktasında türevlenebilir olsun.

$$L_a(x) = f(a) + Df(a)(x-a) = f(a) + J_f(a)\,(x-a)$$

kuralıyla tanımlanan $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonuna f'nin a noktasındaki **afin yaklaşımı** (doğrusallaştırması) denir. x, a'ya yakınken kullanılan $f(x) \approx L_a(x)$ yaklaşımı, $h = x - a$ ile $f(a+h) \approx f(a) + Df(a)h$ biçiminde de yazılır.

Yani L_a, bir sabit vektör ile bir lineer dönüşümün toplamı olan afin bir fonksiyondur ve a noktasında f ile aynı değeri alır. Türevlenebilme tanımı, yaklaşımın hatasının a'ya uzaklıktan daha hızlı sıfıra gittiğini söyler:

$$\lim_{x \to a} \frac{\| f(x) - L_a(x) \|}{\| x - a \|} = 0.$$

a noktasında $f(a)$ değerini alan afin fonksiyonlar arasında bu özelliği taşıyan tek fonksiyon L_a'dır: $\ell(x) = f(a) + S(x-a)$ (S lineer) bu özelliği taşıyorsa S türevlenebilme koşulunu sağlar ve teklik (Teorem 15.1) gereği $S = Df(a)$ olur. $m = 1$ iken bu, Önerme 14.2 sonucudur. L_a'nın bileşenleri, f'nin bileşenlerinin doğrusallaştırmalarıdır. Geometrik olarak

$$f(a) + Df(a)(\mathbb{R}^n) = \{f(a) + Df(a)h : h \in \mathbb{R}^n\}$$

afin kümesi, f'nin görüntü kümesine $f(a)$ noktasında teğet olarak düşünülür.

Örnek 15.8 (Paraboloidin Teğet Düzlemleri). $f(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ olsun (Örnek 15.6). f'nin $(0,0)$ ve $(1,1)$ noktalarındaki afin yaklaşımlarını bulunuz ve bu yaklaşımların görüntü kümelerini betimleyiniz.

Çözüm.
Görüntü kümesi. $f(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$ noktaları tam olarak $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin noktalarıdır; f bu yüzeyi parametrize eder.
$(0,0)$ noktasında. $f(0,0) = (0,0,0)$ ve $Df(0,0)(h_1,h_2) = (h_1, h_2, 0)$ olduğundan

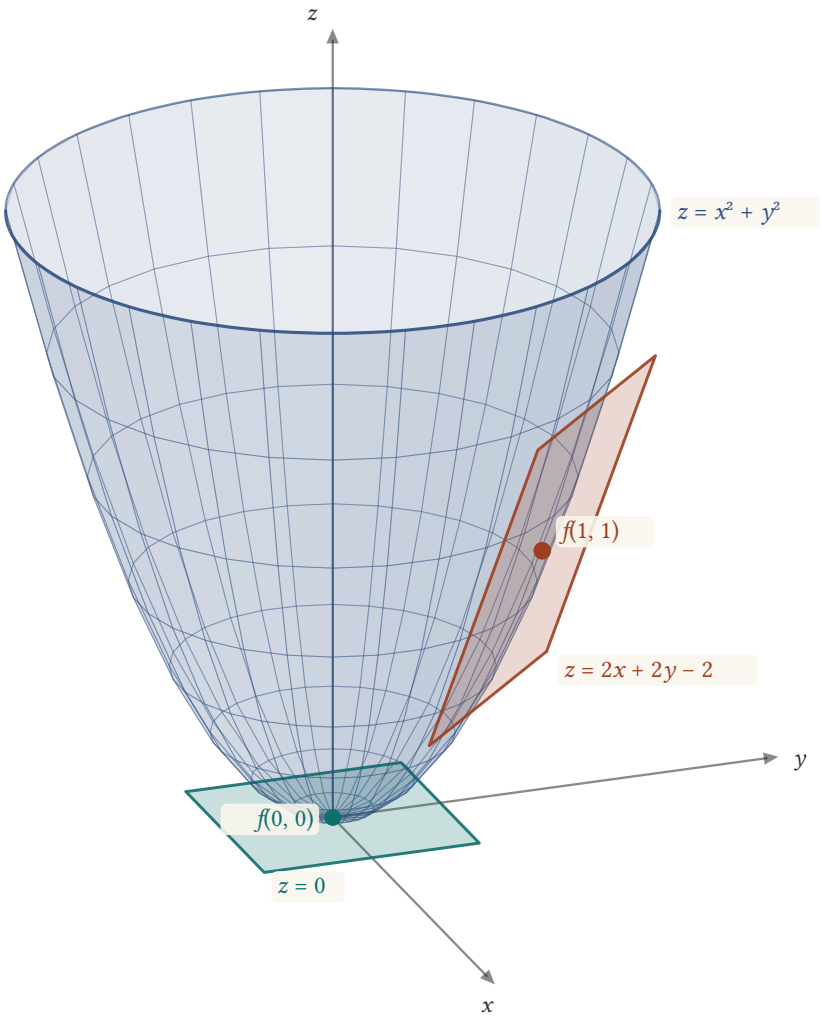
$$L_{(0,0)}(x,y) = (0,0,0) + (x,y,0) = (x,y,0)$$

bulunur. Görüntü kümesi $\{(h_1,h_2,0) : h_1,h_2 \in \mathbb{R}\}$, yani $z = 0$ düzlemidir: paraboloidin en alt noktasındaki teğet düzlem.
$(1,1)$ noktasında. $f(1,1) = (1,1,2)$ ve $Df(1,1)(h_1,h_2) = (h_1, h_2, 2h_1 + 2h_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned} L_{(1,1)}(x,y) &= \big(\, x, y, 2 + 2(x-1) + 2(y-1) \,\big) \\ &= (x, y, 2x + 2y - 2) \end{aligned}$$

olur. Görüntü kümesi $z = 2x + 2y - 2$ düzlemidir. Bu, $g(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiğinin $(1,1,2)$ noktasındaki teğet düzlemidir (Tanım 14.4): $g_x(1,1) = g_y(1,1) = 2$ olduğundan teğet düzlem $z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.1: $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ($x^2 + y^2 \le 4$ kısmı) ve afin yaklaşımların görüntü kümeleri. Tepedeki $f(0,0) = (0,0,0)$ noktasında teğet düzlem $z = 0$'dır (yeşil); $f(1,1) = (1,1,2)$ noktasında ise $z = 2x + 2y - 2$ düzlemidir (turuncu). İki düzlem yüzeye yalnız bu noktalarda değer ve yüzeyin altında kalır.

Hata. Üçüncü bileşenlerin farkı

$$(x^2 + y^2) - (2x + 2y - 2) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

olduğundan

$$\text{parallel} f(x,y) - L_{(1,1)}(x,y) \text{parallel} = \text{parallel}(x,y) - (1,1) \text{parallel}^2$$

olur; hatanın uzaklığa oranı uzaklığın kendisine eşittir ve 0'a gider. Örneğin $(1{,}1;\, 0{,}9)$ noktasında üçüncü bileşenler 2,02 ve 2'dir; hata 0,02'dir. ■

15.7 Cebirsel İşlemler

Tek değişkendeki türev kuralları (bkz. Analiz 2) vektör değerli fonksiyonlara taşınır. İki vektör çarpılıp yine bir vektör elde edilemediğinden çarpım kuralının iki biçimi vardır: reel değerli bir fonksiyonla çarpım ve iç çarpım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 15.5 (Türevin Cebirsel Özellikleri). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ ve $\varphi : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları a noktasında türevlenebilir olsun. O zaman aşağıdaki fonksiyonlar a noktasında türevlenebilirdir ve her $h \in \mathbb{R}^n$ için verilen eşitlikler sağlanır.*

1. ***Lineer birleşim.*** *$\alpha f + \beta g$ için*
$$D(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha\, Df(a) + \beta\, Dg(a).$$
2. ***Reel fonksiyonla çarpım.*** *$(\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x)$ ile tanımlanan $\varphi f : D \to \mathbb{R}^m$ için*
$$D(\varphi f)(a)h = \big(\, D\varphi(a)h \,\big) f(a) + \varphi(a)\, Df(a)h.$$
3. ***İç çarpım.*** *$x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle$ ile tanımlanan $\langle f, g\rangle : D \to \mathbb{R}$ için*
$$D\langle f, g\rangle(a)h = \langle Df(a)h, g(a)\rangle + \langle f(a), Dg(a)h\rangle.$$

İspat.
$B(a, r) \subseteq D$ olsun. Her fonksiyonun kalanını, türevin artımdan çıkarılmasıyla tanımlayalım: $0 <\| h \|< r$ için
$$\begin{aligned} r_f(h) &= f(a+h) - f(a) - Df(a)h, \\ r_g(h) &= g(a+h) - g(a) - Dg(a)h, \\ \rho(h) &= \varphi(a+h) - \varphi(a) - D\varphi(a)h. \end{aligned}$$
Varsayım gereği $h \to 0$ iken $\dfrac{\| r_f(h) \|}{\| h \|}$, $\dfrac{\| r_g(h) \|}{\| h \|}$ ve $\dfrac{| \rho(h) |}{\| h \|}$ oranları 0'a gider. Bunlar kalanların kendilerinin de 0'a gittiğini verir; örneğin
$$\| r_f(h) \| = \| h \| \cdot \frac{\| r_f(h) \|}{\| h \|} \to 0 \cdot 0 = 0.$$

1. *$\alpha\, Df(a) + \beta\, Dg(a)$ dönüşümü lineerdir ve*
$$\begin{aligned} &(\alpha f + \beta g)(a+h) - (\alpha f + \beta g)(a) - \big(\, \alpha\, Df(a) + \beta\, Dg(a) \,\big)\, h \\ &\quad = \alpha\, r_f(h) + \beta\, r_g(h) \end{aligned}$$
olur. Üçgen eşitsizliğiyle
$$\frac{\| \alpha\, r_f(h) + \beta\, r_g(h) \|}{\| h \|} \le | \alpha | \frac{\| r_f(h) \|}{\| h \|} + | \beta | \frac{\| r_g(h) \|}{\| h \|} \to 0$$
bulunur.
2. *$c(h) = D\varphi(a)h$ reel sayısını ve $T = Df(a)$ dönüşümünü kısaltma olarak kullanalım. $\varphi(a+h) = \varphi(a) + c(h) + \rho(h)$ ve $f(a+h) = f(a) + T(h) + r_f(h)$ eşitliklerini çarpıp $\varphi(a) f(a)$'yı çıkarırsak*
$$\varphi(a+h) f(a+h) - \varphi(a) f(a) = c(h)\, f(a) + \varphi(a)\, T(h) + R(h)$$
elde edilir; burada
$$R(h) = \rho(h)\, f(a) + \varphi(a)\, r_f(h) + \big(\, c(h) + \rho(h) \,\big)\, \big(\, T(h) + r_f(h) \,\big)$$
dir. $h \mapsto c(h)\, f(a) + \varphi(a)\, T(h)$ lineerdir, çünkü c ve T lineerdir. $R(h)$ teriminin üç parçasını ayrı ayrı inceleyelim:

- *İlk iki parça için*
$$\begin{aligned} \frac{\| \rho(h)\, f(a) \|}{\| h \|} &= \frac{| \rho(h) |}{\| h \|} \| f(a) \| \to 0, \\ \frac{\| \varphi(a)\, r_f(h) \|}{\| h \|} &= | \varphi(a) | \frac{\| r_f(h) \|}{\| h \|} \to 0 \end{aligned}$$

  olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

- *Üçüncü parça için Lemma 15.1 gereği* $\| T(h) \| \leq M_T \| h \|$ *olduğundan*

$$\frac{\text{parallel}(c(h)+\rho(h))\, (T(h)+r_f(h))\text{parallel}}{\| h \|} \leq | c(h)+\rho(h) | \left(M_T + \frac{\| r_f(h) \|}{\| h \|} \right)$$

olur. Parantez M_T*'ye gider, dolayısıyla* 0*'ın yakınında sınırlıdır.* c *lineer olduğundan Lemma 15.1 gereği* $c(h) \to 0$*, ayrıca* $\rho(h) \to 0$*'dır. Çarpım* 0*'a gider.*

Üçgen eşitsizliğiyle $\dfrac{\| R(h) \|}{\| h \|} \to 0$ *olur;* φf*,* a*'da türevlenebilirdir ve türevi* $h \mapsto c(h)\, f(a) + \varphi(a)\, T(h)$ *dönüşümüdür.*

3. *İç çarpımı bileşenlerle yazalım:*

$$\langle f, g \rangle(x) = f_1(x) g_1(x) + \ldots + f_m(x) g_m(x).$$

Teorem 15.2 gereği her f_i *ve* g_i*,* a*'da türevlenebilirdir. 2. madde* $m = 1$*,* $\varphi = f_i$ *ve* $f = g_i$ *ile uygulanırsa her* $f_i g_i$ *çarpımı* a*'da türevlenebilir ve*

$$D(f_i g_i)(a)h = \left(Df_i(a)h \right) g_i(a) + f_i(a) \left(Dg_i(a)h \right)$$

olur. 1. madde gereği bu çarpımların toplamı da türevlenebilirdir ve

$$D\langle f, g \rangle(a)h = \sum_{i=1}^{m} \left(Df_i(a)h \right) g_i(a) + \sum_{i=1}^{m} f_i(a) \left(Dg_i(a)h \right)$$

bulunur. Teorem 15.2 gereği $Df(a)h = \left(Df_1(a)h, \ldots, Df_m(a)h \right)$ *olduğundan birinci toplam* $\langle Df(a)h, g(a) \rangle$*, ikinci toplam* $\langle f(a), Dg(a)h \rangle$ *iç çarpımıdır.* ■

Yani türev lineerdir ve çarpımlar için tanıdık Leibniz kuralı geçerlidir: çarpanların türevi sırayla alınır, öbür çarpan a noktasındaki değerinde bırakılır. Jacobi matrisleriyle ilk iki madde

$$J_{\alpha f + \beta g}(a) = \alpha\, J_f(a) + \beta\, J_g(a),$$
$$J_{\varphi f}(a) = f(a)\, \nabla\varphi(a) + \varphi(a)\, J_f(a)$$

biçimini alır; ikinci satırdaki $f(a)\, \nabla\varphi(a)$, $m \times 1$ tipindeki bir sütun ile $1 \times n$ tipindeki bir satırın çarpımıdır. $m = 1$ iken 2. madde iki reel fonksiyonun çarpımı için $\nabla(\varphi\psi) = \psi\, \nabla\varphi + \varphi\, \nabla\psi$ formülünü, $n = m = 1$ iken Analiz 2'deki çarpım kuralını verir. 3. maddede $g = f$ alınırsa

$$D\left(\| f \|^2 \right)(a)h = 2\, \langle f(a), Df(a)h \rangle$$

bulunur.

Örnek 15.9 (Sabit Uzunluklu Vektör Fonksiyonu). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık, $f : U \to \mathbb{R}^m$ türevlenebilir ve her $x \in U$ için $\| f(x) \| = 1$ olsun. Her $a \in U$ ve her $h \in \mathbb{R}^n$ için $\langle f(a), Df(a)h \rangle = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Sabit fonksiyon. $\psi(x) = \langle f(x), f(x) \rangle = \| f(x) \|^2$ fonksiyonu U üzerinde sabit 1'dir. $a \in U$ ve $B(a, r) \subseteq U$ ise $\| h \| < r$ için $\psi(a + h) - \psi(a) - 0 = 0$ olur; $T = 0$ tanımdaki koşulu sağlar ve türevin tekliği gereği $D\psi(a) = 0$'dır (karşılaştırın: Örnek 15.2).

İç çarpım kuralı. Teorem 15.5 3. maddesi $g = f$ ile uygulanırsa

$$0 = D\psi(a)h = \langle Df(a)h, f(a) \rangle + \langle f(a), Df(a)h \rangle = 2\, \langle f(a), Df(a)h \rangle$$

bulunur; iç çarpımın simetrisi kullanıldı (Önerme 1.2). Demek ki $\langle f(a), Df(a)h \rangle = 0$'dır.

Yorum. $n = 1$, $m = 2$ ve $f(t) = (\cos t, \sin t)$ alalım; f birim çemberi dolaşır. $Df(t)h = h\, f'(t)$ ve $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ olduğundan

$$\langle f(t), f'(t) \rangle = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur: çember üzerinde hareket eden noktanın hız vektörü, konum vektörüne, yani yarıçapa diktir. Genel durumda da $Df(a)$ dönüşümünün bütün değerleri $f(a)$ vektörüne diktir. ■

15.8 Zincir Kuralı

Tek değişkende $(f \circ g)'(a) = f'\big(\,g(a)\,\big)\,g'(a)$ idi (bkz. Analiz 2). Türevleri lineer dönüşüm olarak gördüğümüzde bu formül kelimesi kelimesine genelleşir: sayıların çarpımının yerini lineer dönüşümlerin bileşkesi, yani matrislerin çarpımı alır.

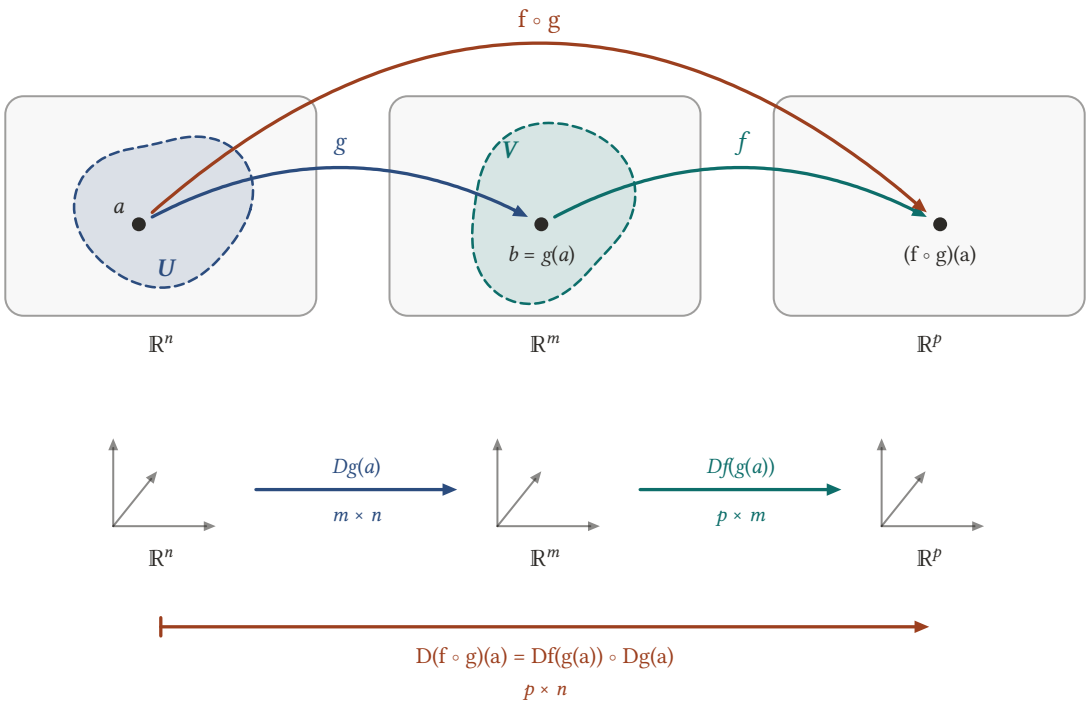
Teorem 15.6 (Zincir Kuralı). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $V \subseteq \mathbb{R}^m$ boş olmayan açık kümeler, $g : U \to \mathbb{R}^m$ ve $f : V \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonlar ve $g(U) \subseteq V$ olsun. g, $a \in U$ noktasında ve f, $b = g(a)$ noktasında türevlenebilirse $f \circ g : U \to \mathbb{R}^p$ bileşke fonksiyonu a noktasında türevlenebilirdir ve*

$$D(f \circ g)(a) = Df\,\big(\,g(a)\,\big) \circ Dg(a)$$

olur. Matris diliyle

$$J_{f\circ g}(a) = J_f\,\big(\,g(a)\,\big)\,J_g(a)$$

yazılır; sağdaki çarpım $p \times m$ ve $m \times n$ tipindeki iki matrisin çarpımıdır.



Şekil 15.2: Zincir kuralının şeması. Üstte g, a *noktasını* b = g(a) *noktasına,* f *de* b*'yi* (f ∘ g)(a) *noktasına götürür. Altta türevler aynı sırayla bileşir:* m × n *tipindeki* Dg(a) *ile* p × m *tipindeki* Df(g(a)) *matrislerinin çarpımı* p × n *tipindeki* D(f ∘ g)(a) *matrisidir.*

İspat.
$S = Dg(a)$ ve $T = Df(b)$ diyelim; $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ lineerdir. U açık olduğundan $0 <\| h \|$ küçükken $a + h \in U$ olur.
İki kalan. *$a + h \in U$ için*

$$r(h) = g(a + h) - g(a) - S(h)$$

diyelim; $h \to 0$ iken $\dfrac{\| r(h) \|}{\| h \|} \to 0$'dır. $b + w \in V$ olan $w \in \mathbb{R}^m$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\rho(w) = f(b+w) - f(b) - T(w)$$

ve $w \neq 0$ *iken* $\eta(w) = \dfrac{\rho(w)}{\| w \|}$, $w = 0$ *iken* $\eta(0) = 0$ *diyelim.* $\rho(0) = f(b) - f(b) - T(0) = 0$ *olduğundan her* w *için*

$$\rho(w) = \| w \| \eta(w)$$

olur ve f*'nin türevlenebilirliği gereği* $w \to 0$ *iken* $\eta(w) \to 0 = \eta(0)$*'dır; yani* η*,* 0 *noktasında süreklidir.*
Bileşkenin artımı. $w(h) = g(a+h) - g(a)$ *diyelim.* $b + w(h) = g(a+h) \in V$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a) &= f\left(b + w(h) \right) - f(b) \\ &= T\left(w(h) \right) + \| w(h) \| \eta\left(w(h) \right)\end{aligned}$$

yazılır. $w(h) = S(h) + r(h)$ *ve* T *lineer olduğundan* $T\left(w(h) \right) = T\left(S(h) \right) + T\left(r(h) \right)$*'dir. Dolayısıyla*

$$(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a) - (T \circ S)(h) = R(h)$$

olur; burada

$$R(h) = T\left(r(h) \right) + \| w(h) \| \eta\left(w(h) \right)$$

dir.
Kalanın tahmini. *Lemma 15.1 gereği* $\| S(h) \| \leq M_S \| h \|$ *ve* $\| T(w) \| \leq M_T \| w \|$ *olacak* M_S*,* M_T *sabitleri vardır.*

- *Birinci terim için* $\dfrac{\| T(r(h)) \|}{\| h \|} \leq M_T \dfrac{\| r(h) \|}{\| h \|} \to 0.$
- *İkinci terim için önce* $\| w(h) \| \leq \| S(h) \| + \| r(h) \|$ *eşitsizliğinden*

$$\frac{\| w(h) \| \| \eta(w(h)) \|}{\| h \|} \leq \left(M_S + \frac{\| r(h) \|}{\| h \|} \right) \| \eta(w(h)) \|$$

bulunur. g*,* a*'da türevlenebilir olduğundan süreklidir (Sonuç 15.1); bu yüzden* $h \mapsto w(h)$ *fonksiyonu* $h = 0$*'da süreklidir ve* $w(0) = 0$*'dır.* η *da* 0*'da sürekli olduğundan bileşkenin sürekliliği (Teorem 10.4) gereği* $h \to 0$ *iken* $\eta\left(w(h) \right) \to \eta(0) = 0$ *olur. Paranteze alınan çarpan* M_S*'ye gider, yani* 0*'ın yakınında sınırlıdır; çarpım* 0*'a gider.*

Üçgen eşitsizliğiyle $\dfrac{\| R(h) \|}{\| h \|} \to 0$ *bulunur.*
Sonuç. $T \circ S$ *iki lineer dönüşümün bileşkesi olarak lineerdir ve yukarıdaki limit,* $f \circ g$*'nin* a*'da* $T \circ S$ *ile türevlenebilir olduğunu söyler. Teklik (Teorem 15.1) gereği* $D(f \circ g)(a) = T \circ S = Df(b) \circ Dg(a)$*'dır. İki lineer dönüşümün bileşkesinin matrisi, matrislerinin çarpımıdır; Teorem 15.3 gereği bu matrisler* $J_f(b)$ *ve* $J_g(a)$*, bileşkeninki de* $J_{f \circ g}(a)$*'dır. Öyleyse* $J_{f \circ g}(a) = J_f(b)\, J_g(a)$*.* ■

Yani bileşkenin türevi, türevlerin bileşkesidir. İspatın fikri kısaca şudur: g küçük bir h artımını yaklaşık olarak $Dg(a)h$ artımına, f de bu artımı yaklaşık olarak $Df(b)\left(Dg(a)h \right)$ artımına götürür; iki yaklaşımın hataları üst üste binse de $\| h \|$'den hızlı sönmeye devam eder. $n = m = p$ ise determinantın çarpımsallığından

$$\det J_{f \circ g}(a) = \det J_f\left(g(a) \right) \cdot \det J_g(a)$$

olur; Jacobi determinantları da çarpılır.
Matris çarpımını girdi girdi yazmak, zincir kuralını kısmi türevlerle ifade eder.

Sonuç 15.2 (Zincir Kuralının Kısmi Türevlerle Yazılışı). *Teorem 15.6 koşulları altında* $f = (f_1, \ldots, f_p)$ *fonksiyonunun değişkenleri* $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *ile gösterilsin. Her* $i = 1, \ldots, p$ *ve* $j = 1, \ldots, n$ *için*

$$\frac{\partial (f_i \circ g)}{\partial x_j}(a) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_l}\left(g(a) \right) \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

> ***İspat.***
> *$f \circ g = (f_1 \circ g, \dots, f_p \circ g)$ fonksiyonu a'da türevlenebilir olduğundan Teorem 15.3 gereği sol taraf $J_{f\circ g}(a)$ matrisinin (i,j) girdisidir. Teorem 15.6 gereği bu girdi, $J_f\big(\,g(a)\,\big)$ matrisinin i-inci satırı ile $J_g(a)$ matrisinin j-inci sütununun çarpımıdır. Satırın l-inci girdisi $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_l}\big(\,g(a)\,\big)$, sütunun l-inci girdisi $\dfrac{\partial g_l}{\partial x_j}(a)$ olduğundan çarpım sağ taraftaki toplamdır.* ■

Uygulamada Leibniz yazımı kullanılır: $z = f(y)$ ve $y = g(x)$ ise

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_l}\,\frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$

yazılır. Solda z_i, x'in fonksiyonu olarak; sağda önce y'nin fonksiyonu olarak türetilir. Formül sözle şöyle okunur: x_j'deki küçük bir değişim her y_l ara değişkenini değiştirir, her y_l değişimi de z_i'yi değiştirir; bütün ara değişkenlerden gelen katkılar toplanır.

Örnek 15.10 (Matris Çarpımıyla Zincir Kuralı). $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(x+y,\,x-y)$ ve $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(u,v)=(uv,\,u^2,\,v^2)$ olsun. $J_{f\circ g}(1,0)$ matrisini zincir kuralıyla bulunuz ve sonucu doğrudan hesapla denetleyiniz.

> **Çözüm.**
> **Jacobi matrisleri.** f ve g polinom bileşenlidir, dolayısıyla her yerde türevlenebilir (Teorem 15.4). $g(1,0)=(1,1)$'dir ve
>
> $$J_g(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$
> $$J_f(u,v)=\begin{pmatrix}v & u\\ 2u & 0\\ 0 & 2v\end{pmatrix}$$
>
> olduğundan $J_f(1,1)$ matrisinin satırları $(1,1)$, $(2,0)$ ve $(0,2)$'dir.
> **Zincir kuralı.**
>
> $$\begin{aligned} J_{f\circ g}(1,0) &= J_f(1,1)\,J_g(1,0)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$
>
> **Denetim.** Bileşke açıkça
>
> $$(f\circ g)(x,y) = \big(\,x^2-y^2,\,(x+y)^2,\,(x-y)^2\,\big)$$
>
> olur ve Jacobi matrisi
>
> $$J_{f\circ g}(x,y)=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2(x+y) & 2(x+y)\\ 2(x-y) & -2(x-y)\end{pmatrix}$$
>
> matrisidir. $(1,0)$ noktasında satırlar $(2,0)$, $(2,2)$ ve $(2,-2)$'dir; iki yol uyuşur. ■

Örnek 15.11 (Dış Fonksiyonun Türevlenebilmesi Gereklidir).

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve $g(t) = (t, t)$ olsun. $(f \circ g)'(0)$ sayısının $J_f(0,0)\, J_g(0)$ çarpımına eşit olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Formülün önerdiği değer. Eksenler üzerinde $f(t,0) = f(0,t) = 0$ olduğundan $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ve $J_f(0,0) = (0\ \ 0)$'dır. $g'(t) = (1,1)$ olduğundan $J_g(0)$, girdileri 1 ve 1 olan sütundur. Çarpım

$$J_f(0,0)\, J_g(0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$

olur.
Gerçek değer. $t \neq 0$ için

$$(f \circ g)(t) = f(t,t) = \frac{t^2 \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{t}{2}$$

ve $(f \circ g)(0) = f(0,0) = 0$'dır. Demek ki her t için $(f \circ g)(t) = \dfrac{t}{2}$ ve $(f \circ g)'(0) = \dfrac{1}{2} \neq 0$'dır.
Yorum. g türevlenebilirdir ve f'nin orijinde kısmi türevleri vardır; üstelik f süreklidir. Yine de formül yanlış sonuç verdi, çünkü f orijinde türevlenemez (Örnek 14.10). Zincir kuralında dış fonksiyonun yalnız kısmi türevlerinin var olması yetmez, türevlenebilir olması gerekir. Bu hesap, f'nin türevlenemediğinin başka bir kanıtıdır: f türevlenebilseydi Teorem 15.6 eşitliği sağlanırdı. ■

15.9 Zincir Kuralının Özel Hâlleri

Boyutlar küçük seçildiğinde zincir kuralı tanıdık formüllere dönüşür; uygulamada en çok bu özel hâller kullanılır.
İlk özel hâl, çok değişkenli bir fonksiyonu bir eğri boyunca izlemektir ($n = 1$, $p = 1$).

Sonuç 15.3 (Bir Eğri Boyunca Değişim Hızı). *$I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ açık bir küme, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : I \to \mathbb{R}^m$ ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar ve $\gamma(I) \subseteq V$ olsun. γ, $t_0 \in I$ noktasında ve f, $\gamma(t_0)$ noktasında türevlenebilirse $F(t) = f\,(\,\gamma(t)\,)$ fonksiyonu t_0'da türevlenebilirdir ve*

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \text{chevron.l}\nabla f\,(\,\gamma(t_0)\,), \gamma'(t_0)\text{chevron.r} \\ &= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_l}\,(\,\gamma(t_0)\,)\,\gamma_l'(t_0) \end{aligned}$$

olur.

İspat.
Teorem 15.6 gereği F, t_0'da türevlenebilirdir ve $J_F(t_0) = J_f\,(\,\gamma(t_0)\,)\, J_\gamma(t_0)$'dır. $n = 1$ olduğundan $J_\gamma(t_0)$, girdileri $\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_m'(t_0)$ olan $m \times 1$ tipindeki sütundur; $J_f\,(\,\gamma(t_0)\,)$ ise $1 \times m$ tipindeki $\nabla f\,(\,\gamma(t_0)\,)$ satırıdır. Bir satır ile bir sütunun çarpımı iç çarpımdır ve 1×1 tipindeki $J_F(t_0)$ matrisinin tek girdisi $F'(t_0)$'dır. ■

Yani bir fonksiyonun bir eğri boyunca değişim hızı, gradyan ile eğrinin hız vektörünün iç çarpımıdır. İki değişkende, $F(t) = f\,(\,x(t), y(t)\,)$ için formül

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

biçimini alır. Solda adi türev durur, çünkü F tek değişkenlidir; sağda f'nin kısmi türevleri $(\,x(t), y(t)\,)$ noktasında hesaplanır. $m = 1$ alınırsa ($n = m = p = 1$) sonuç $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'\,(\,\gamma(t_0)\,)\,\gamma'(t_0)$ olur; bu, Analiz 2'deki zincir kuralıdır ve Leibniz yazımıyla $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ diye okunur.

Örnek 15.12 (Bir Eğri Boyunca Türev). $f(x,y) = x^2 y$, $x(t) = e^t$ ve $y(t) = t^2$ olsun. $F(t) = f\,(\,x(t), y(t)\,)$ için $F'(t)$ türevini zincir kuralıyla bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Zincir kuralı. f polinom olduğundan türevlenebilirdir; x ve y de türevlenebilirdir. $f_x = 2xy$, $f_y = x^2$, $x'(t) = e^t$, $y'(t) = 2t$ olduğundan Sonuç 15.3 gereği

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2xy \cdot e^t + x^2 \cdot 2t \\ &= 2e^t t^2 \cdot e^t + e^{2t} \cdot 2t = 2t(t+1)\, e^{2t} \end{aligned}$$

bulunur; ikinci adımda $x = e^t$ ve $y = t^2$ yerine konuldu.
Denetim. $F(t) = e^{2t}t^2$ olduğundan tek değişkenli çarpım kuralı

$$F'(t) = 2e^{2t}t^2 + 2t\, e^{2t} = 2t(t+1)\, e^{2t}$$

verir. ■

İkinci özel hâlde iki değişkenli bir fonksiyonun değişkenleri, iki değişkenli başka fonksiyonlarla değiştirilir ($n = m = 2, p = 1$).

Sonuç 15.4 (İki Ara Değişkenli Zincir Kuralı). *$U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ açık kümeler, $u, v : U \to \mathbb{R}$ ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olsun ve her $(x, y) \in U$ için $\big(\, u(x,y), v(x,y) \,\big) \in V$ olsun. u ve v, $(x_0, y_0) \in U$ noktasında, f de $(u_0, v_0) = \big(\, u(x_0,y_0), v(x_0,y_0) \,\big)$ noktasında türevlenebilirse*

$$F(x,y) = f\,\big(\, u(x,y), v(x,y) \,\big)$$

fonksiyonu (x_0, y_0)'da türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

olur; burada F, u ve v'nin kısmi türevleri (x_0, y_0)'da, f'ninkiler (u_0, v_0)'da hesaplanır.

İspat.
$g = (u, v) : U \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu, bileşenleri (x_0, y_0)'da türevlenebilir olduğundan orada türevlenebilirdir (Teorem 15.2) ve $F = f \circ g$'dir. Teorem 15.6 gereği F, (x_0, y_0)'da türevlenebilirdir ve $J_F = J_f\, J_g$ olur:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Satırın iki sütunla çarpımı iki formülü verir. ■

Kutupsal koordinatlar bu özel hâlin en sık karşılaşılan örneğidir.

Örnek 15.13 (Kutupsal Koordinatlarda Kısmi Türevler). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ olsun. $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ ve $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$ kısmi türevlerini f_x ve f_y cinsinden yazınız.

Çözüm.
Ara değişkenler. $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ ara değişkenlerdir; Örnek 15.3 gereği

$$\begin{aligned} x_r &= \cos\theta, \qquad y_r = \sin\theta, \\ x_\theta &= -r\sin\theta, y_\theta = r\cos\theta \end{aligned}$$

olur.
Formüller. Sonuç 15.4, u, v yerine x, y ve x, y yerine r, θ yazılarak uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= f_x\cos\theta + f_y\sin\theta, \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= -f_x\, r\sin\theta + f_y\, r\cos\theta \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur; f_x ve f_y, $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ noktasında hesaplanır.

Denetim. $f(x,y) = xy$ için $F(r,\theta) = r^2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{r^2}{2}\sin 2\theta$ olur; doğrudan türevle $F_r = r\sin 2\theta$ ve $F_\theta = r^2\cos 2\theta$'dır. Formüllerle, $f_x = y = r\sin\theta$ ve $f_y = x = r\cos\theta$ olduğundan

$$F_r = r\sin\theta\cos\theta + r\cos\theta\sin\theta = r\sin 2\theta,$$
$$F_\theta = -r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2\cos 2\theta$$

bulunur; iki yol uyuşur. ■

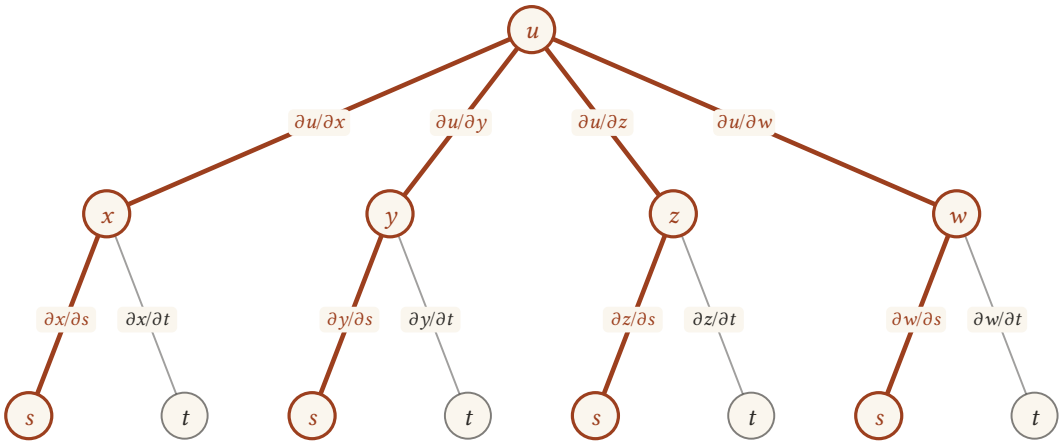
Ara değişken sayısı arttıkça Sonuç 15.2 içindeki toplamı doğrudan yazmak yerine değişkenlerin birbirine bağlılığını bir **ağaç diyagramıyla** göstermek işi kolaylaştırır. Leibniz yazımında toplamın her terimi, ağaçta tepeden aranan değişkene inen bir yola karşılık gelir.

Üç adımda ağaç diyagramıyla zincir kuralı

1. **Ağacı çiz.** En üste bağımlı değişken, ortaya ara değişkenler, en alta bağımsız değişkenler yazılır. Her değişken, doğrudan bağlı olduğu değişkenlere birer dalla bağlanır ve dalın üzerine ilgili kısmi türev yazılır.
2. **Yolları çarp.** Aranan kısmi türev için tepeden ilgili bağımsız değişkene inen bütün yollar bulunur; her yol boyunca dallardaki kısmi türevler çarpılır.
3. **Topla ve yerine koy.** Yolların katkıları toplanır. Değer bir noktada isteniyorsa önce ara değişkenlerin o noktadaki değerleri hesaplanır, sonra hepsi yerine konur.

Örnek 15.14 (Dört Ara Değişkenli Zincir Kuralı). $u = f(x,y,z,w)$ türevlenebilir bir fonksiyon, x, y, z, w de (s,t) değişkenlerinin türevlenebilir fonksiyonları olsun. $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ kısmi türevlerini zincir kuralıyla yazınız.

Çözüm.
Ağaç. En üstte u, ortada x, y, z, w ara değişkenleri, en altta her ara değişkenin altında s ve t durur. u'dan s'ye dört yol iner: $u \to x \to s$, $u \to y \to s$, $u \to z \to s$ ve $u \to w \to s$. t için de dört yol vardır.



Şekil 15.3: $u = f(x, y, z, w)$ için ağaç diyagramı: her dalın üzerinde ilgili kısmi türev yazılıdır. u'dan s yapraklarına inen dört yol (renkli) $\partial u/\partial s$ toplamının dört terimini verir; t yaprakları da $\partial u/\partial t$ için aynı işi görür.

Yolların toplamı. Her yol boyunca kısmi türevleri çarpıp toplarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}$$

bulunur. Bu, Sonuç 15.2 formülünün $n = 2$, $m = 4$, $p = 1$ hâlidir. Matris biçiminde

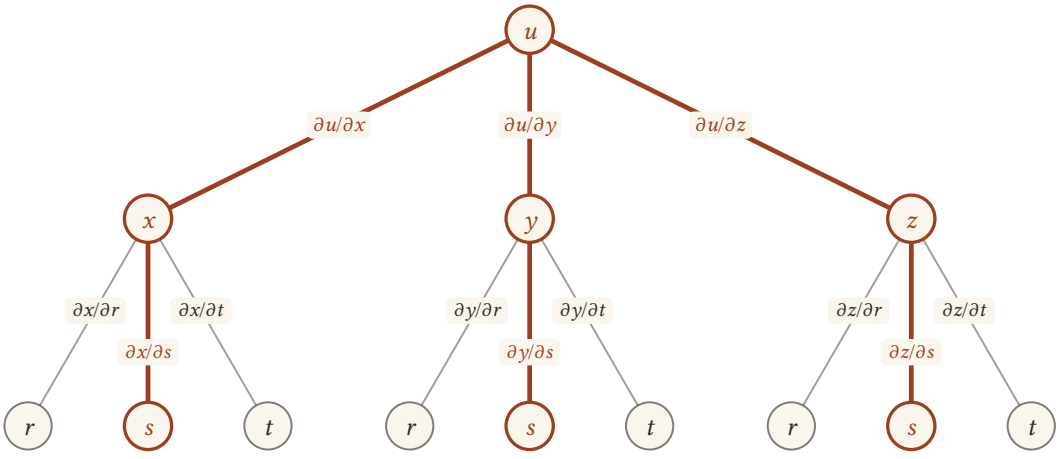
$$\begin{pmatrix} u_s & u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & u_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \\ w_s & w_t \end{pmatrix}$$

yazılır. ■

Örnek 15.15 (Üç Ara Değişkenli Bir Hesap). $x = rse^t$, $y = 2re^{st}$, $z = r^2\sin(st)$ ve $u = x^4y + y^2z^3$ olsun. $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ için $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Ağaç ve genel formüller. u, x, y, z ara değişkenlerine, bunların her biri de r, s, t bağımsız değişkenlerine bağlıdır. Bütün fonksiyonlar polinom, üstel ve sinüs fonksiyonlarından kurulduğu için C^1 sınıfındadır ve zincir kuralı uygulanabilir. Tepeden her bağımsız değişkene üç yol iner:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$



Şekil 15.4: u'nun x, y, z ara değişkenlerine, bunların da r, s, t bağımsız değişkenlerine bağlılığını gösteren ağaç. $\partial u/\partial s$ için $u \to x \to s$, $u \to y \to s$ ve $u \to z \to s$ yolları (renkli) izlenir.

Kısmi türevler. Dış ve iç türevler

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^4 + 2yz^3,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2z^2,$$
$$\frac{\partial x}{\partial s} = re^t,\quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2rt\,e^{st},\quad \frac{\partial z}{\partial s} = r^2t\cos(st)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 4x^3y \cdot re^t + \left(x^4 + 2yz^3 \right) \cdot 2rt\, e^{st} \\ +3y^2z^2 \cdot r^2 t\cos(st)$$

bulunur.
Nokta. $r=2,\ s=1,\ t=0$ için $x = 2\cdot 1\cdot e^0 = 2$, $y = 2\cdot 2\cdot e^0 = 4$ ve $z = 4\sin 0 = 0$ olur. $t=0$ olduğundan son iki terim sıfırdır ve

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 4\cdot 2^3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot e^0 = 256$$

bulunur. u'yu r, s, t cinsinden açıkça yazmaya gerek kalmadı; zincir kuralı yalnız ara değişkenlerin o noktadaki değerlerini istedi. ■

Örnek 15.16 (Üstel Koordinatlarda Logaritma). $x = e^u\cos v$, $y = e^u \sin v$ ve $z = \ln(x^2+y^2)$ olsun. $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.
Tanım ve türevlenebilirlik.

$$x^2 + y^2 = e^{2u}(\cos^2 v + \sin^2 v) = e^{2u} > 0$$

olduğundan z her (u,v) için tanımlıdır. x ve y, (u,v)'nin C^1 fonksiyonlarıdır. $\ln(x^2+y^2)$ fonksiyonunun kısmi türevleri $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ açık kümesinde süreklidir, dolayısıyla bu fonksiyon orada türevlenebilirdir (Sonuç 14.3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

İç türevler. $x_u = e^u\cos v = x$, $y_u = e^u \sin v = y$, $x_v = -e^u \sin v = -y$ ve $y_v = e^u\cos v = x$'tir.
Zincir kuralı. Sonuç 15.4 (harflerin rolleri değişmiş olarak) gereği

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2}\,x + \frac{2y}{x^2+y^2}\,y = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 2, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{x^2+y^2}\,(-y) + \frac{2y}{x^2+y^2}\,x = 0$$

bulunur.
Denetim. $x^2+y^2 = e^{2u}$ olduğundan $z = \ln e^{2u} = 2u$'dur; gerçekten $z_u = 2$ ve $z_v = 0$'dır. ■

15.10 Alıştırmalar

Alıştırmalarda tanımla türev, Jacobi matrisi ve determinantı, cebirsel kurallar ve zincir kuralının farklı biçimleri birlikte kullanılır.

Alıştırma 15.1 (Tanımla Türev: Toplam ve Çarpım). $f(x,y) = (x+y, xy)$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasında türevlenebilir olduğunu tanımla gösteriniz ve $Df(1,1)$ dönüşümünü yazınız.

Çözüm.
Artım. $h = (h_1, h_2)$ için

$$f(1+h_1, 1+h_2) - f(1,1) = \left(h_1 + h_2,\, h_1 + h_2 + h_1h_2 \right)$$

olur; ikinci bileşen $(1+h_1)(1+h_2) - 1$ çarpımı açılarak bulundu.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aday ve kalan. Lineer kısım $T(h_1,h_2)=(h_1+h_2,\,h_1+h_2)$, kalan $(0,h_1h_2)$'dir. $|\,h_1h_2\,|\le \dfrac{h_1^2+h_2^2}{2}$ olduğundan

$$\frac{\|\,(0,h_1h_2)\,\|}{\|\,h\,\|}=\frac{|\,h_1h_2\,|}{\|\,h\,\|}\le\frac{\|\,h\,\|^2}{2\,\|\,h\,\|}=\frac{\|\,h\,\|}{2}\to 0$$

bulunur.
Sonuç. f, $(1,1)$'de türevlenebilirdir ve

$$Df(1,1)(h_1,h_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=(h_1+h_2,\,h_1+h_2)$$

olur. Satırlar $\nabla(x+y)=(1,1)$ ve $\nabla(xy)=(y,x)$ gradyanlarının $(1,1)$'deki değerleridir. ■

Alıştırma 15.2 (Küresel Koordinatların Jacobi Determinantı). $g(\rho,\varphi,\theta)=(x,y,z)$ küresel koordinat dönüşümü

$$\begin{aligned}x&=\rho\sin\varphi\cos\theta,\\ y&=\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z&=\rho\cos\varphi\end{aligned}$$

ile verilsin. $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\rho^2\sin\varphi$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Jacobi matrisi. Her bileşeni sırayla ρ, φ ve θ'ya göre türetirsek

$$J_g=\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{pmatrix}$$

bulunur.
Üçüncü satıra göre açılım. Üçüncü satırın son girdisi 0 olduğundan iki terim kalır:

$$\begin{aligned}\det J_g=\cos\varphi&\begin{vmatrix}\rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\end{vmatrix}\\ &+\rho\sin\varphi\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

İkinci terimin işareti: $(3,2)$ girdisi $-\rho\sin\varphi$'dir ve kofaktör işareti $(-1)^{3+2}=-1$'dir; çarpımları $+\rho\sin\varphi$ verir.
Küçük determinantlar. Birincisi

$$\begin{aligned}&\rho\cos\varphi\cos\theta\cdot\rho\sin\varphi\cos\theta+\rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\rho\cos\varphi\sin\theta\\ &\quad=\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,\end{aligned}$$

ikincisi

$$\begin{aligned}&\sin\varphi\cos\theta\cdot\rho\sin\varphi\cos\theta+\rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\sin\varphi\sin\theta\\ &\quad=\rho\sin^2\varphi\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\rho\sin^2\varphi\end{aligned}$$

olur.
Sonuç.

$$\det J_g=\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi+\rho^2\sin^3\varphi=\rho^2\sin\varphi\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2\sin\varphi.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 15.3 (İç Çarpım Kuralıyla Türev). $f(x,y)=(x,y,1)$ ve $g(x,y)=(y,x^2,xy)$ olsun. $\langle f,g\rangle$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasındaki türevini Teorem 15.5 ile bulunuz ve sonucu doğrudan hesapla denetleyiniz.

Çözüm.
Değerler. $a=(1,2)$ için $f(a)=(1,2,1)$ ve $g(a)=(2,1,2)$'dir.
Türevler. Jacobi matrisleri

$$J_f=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad J_g(x,y)=\begin{pmatrix}0&1\\2x&0\\y&x\end{pmatrix}$$

olduğundan $h=(h_1,h_2)$ için $Df(a)h=(h_1,h_2,0)$ ve $Dg(a)h=(h_2,2h_1,2h_1+h_2)$'dir.
Kural. Teorem 15.5 3. maddesi gereği

$$\begin{aligned}D\langle f,g\rangle(a)h&=\langle(h_1,h_2,0),(2,1,2)\rangle\\&\quad+\langle(1,2,1),(h_2,2h_1,2h_1+h_2)\rangle\\&=(2h_1+h_2)+(6h_1+2h_2)=8h_1+3h_2\end{aligned}$$

bulunur; yani $\nabla\langle f,g\rangle(1,2)=(8,3)$'tür.
Denetim. $\langle f,g\rangle=xy+x^2y+xy$, yani x^2y+2xy olduğundan gradyan $(2xy+2y,\,x^2+2x)$'tir ve $(1,2)$'de $(8,3)$ olur. ■

Alıştırma 15.4 (Bölümün Türevi). $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $a\in D^\circ$, $\varphi:D\to\mathbb{R}$ fonksiyonu a'da türevlenebilir ve $\varphi(a)\neq 0$ olsun. $\dfrac{1}{\varphi}$ fonksiyonunun a'da türevlenebilir olduğunu ve her h için

$$D\left(\frac{1}{\varphi}\right)(a)h=-\frac{D\varphi(a)h}{\varphi(a)^2}$$

olduğunu zincir kuralıyla gösteriniz.

Çözüm.
Payda sıfırlanmaz. φ, a'da süreklidir (Sonuç 15.1). Süreklilik tanımı $\varepsilon=|\,\varphi(a)\,|>0$ ile uygulanırsa öyle bir $r>0$ bulunur ki $B(a,r)\subseteq D$ olur ve her $x\in B(a,r)$ için $|\,\varphi(x)-\varphi(a)\,|<|\,\varphi(a)\,|$ sağlanır. Ters üçgen eşitsizliğiyle

$$|\,\varphi(x)\,|\geq|\,\varphi(a)\,|-|\,\varphi(x)-\varphi(a)\,|>0$$

olur. $U=B(a,r)$ açık kümesinde $\dfrac{1}{\varphi}$ tanımlıdır ve $\varphi(U)\subseteq V=\mathbb{R}\setminus\{0\}$'dır.
Bileşke. $q:V\to\mathbb{R}$, $q(t)=\dfrac{1}{t}$ fonksiyonu V'nin her noktasında türevlenebilirdir ve bölüm kuralı gereği $q'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$'dir (bkz. Analiz 2). U üzerinde $\dfrac{1}{\varphi}=q\circ\varphi$'dir. Türevlenebilme yalnız a'nın yakınındaki değerlere bağlı olduğundan φ'nin U'ya kısıtlanışı a'da türevlenebilirdir.
Zincir kuralı. Teorem 15.6 ($m=1$, $p=1$) gereği $q\circ\varphi$, a'da türevlenebilirdir ve

$$D(q\circ\varphi)(a)h=q'\,(\,\varphi(a)\,)\,D\varphi(a)h=-\frac{D\varphi(a)h}{\varphi(a)^2}$$

olur. Gradyanlarla yazılırsa

$$\nabla\left(\frac{1}{\varphi}\right)(a)=-\frac{\nabla\varphi(a)}{\varphi(a)^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Bu sonuç Teorem 15.5 ile birleştirilince $\dfrac{f}{\varphi} = \dfrac{1}{\varphi}\, f$ bölümünün de a'da türevlenebilir olduğu çıkar. ■

Alıştırma 15.5 (Ara Değişkenlerle Kısmi Türev: s'ye Göre). $x = rse^{t}$, $y = rs^{2}e^{-t}$, $z = r^{2}s\sin t$ ve $u = x^{4}y + y^{2}z^{3}$ olsun. $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ için $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Nokta. $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ için $x = 2$, $y = 2$ ve $z = 0$'dır.
Dış türevler. Bu noktada $u_x = 4x^{3}y = 64$, $u_y = x^{4} + 2yz^{3} = 16$ ve $u_z = 3y^{2}z^{2} = 0$'dır.
İç türevler. $x_s = re^{t} = 2$, $y_s = 2rse^{-t} = 4$ ve $z_s = r^{2}\sin t = 0$'dır.
Zincir kuralı. Örnek 15.15 içindeki ağaçla

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u_x\, x_s + u_y\, y_s + u_z\, z_s = 64 \cdot 2 + 16 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 192$$

bulunur. ■

Alıştırma 15.6 (Ara Değişkenlerle Kısmi Türev: r'ye Göre). $x = rse^{t}$, $y = rs^{2}e^{-t}$, $z = r^{2}s\sin t$ ve $u = x^{4}y + y^{2}z^{3}$ olsun. $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ için $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Nokta ve dış türevler. $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ için $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$ ve $u_x = 64$, $u_y = 16$, $u_z = 0$'dır (Alıştırma 15.5).
İç türevler. $x_r = se^{t} = 1$, $y_r = s^{2}e^{-t} = 1$ ve $z_r = 2rs\sin t = 0$'dır.
Zincir kuralı.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_x\, x_r + u_y\, y_r + u_z\, z_r = 64 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 80$$

bulunur. ■

Alıştırma 15.7 (Ara Değişkenlerle Kısmi Türev: t'ye Göre). $x = rse^{t}$, $y = rs^{2}e^{-t}$, $z = r^{2}s\sin t$ ve $u = x^{4}y + y^{2}z^{3}$ olsun. $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ için $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Nokta ve dış türevler. $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ için $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$ ve $u_x = 64$, $u_y = 16$, $u_z = 0$'dır (Alıştırma 15.5).
İç türevler. $x_t = rse^{t} = 2$, $y_t = -rs^{2}e^{-t} = -2$ ve $z_t = r^{2}s\cos t = 4$'tür.
Zincir kuralı.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_x\, x_t + u_y\, y_t + u_z\, z_t = 64 \cdot 2 + 16 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = 96$$

bulunur. $z_t \neq 0$ olduğu hâlde $u_z = 0$ olduğundan z üzerinden geçen yol katkı vermez. ■

Alıştırma 15.8 (Gradyanın Kutupsal Koordinatlarda Uzunluğu). $f : \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir, $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ve $r > 0$ olsun.

$$f_x^{2} + f_y^{2} = F_r^{2} + \frac{1}{r^{2}}\, F_\theta^{2}$$

olduğunu gösteriniz; f_x ve f_y, $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ noktasında hesaplanır.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Formüller. Örnek 15.13 gereği

$$F_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta,$$
$$\frac{1}{r} F_\theta = -f_x \sin\theta + f_y \cos\theta$$

olur.
Kareler.

$$F_r^2 = f_x^2 \cos^2\theta + 2 f_x f_y \sin\theta\cos\theta + f_y^2 \sin^2\theta,$$
$$\frac{1}{r^2} F_\theta^2 = f_x^2 \sin^2\theta - 2 f_x f_y \sin\theta\cos\theta + f_y^2 \cos^2\theta.$$

Toplam. Toplarken karışık terimler birbirini götürür ve $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ kullanılır:

$$F_r^2 + \frac{1}{r^2} F_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2 = \| \nabla f \|^2.$$

Gradyanın uzunluğu Kartezyen ya da kutupsal koordinatlarla hesaplanabilir ve iki hesap aynı sonucu verir. ■

Alıştırma 15.9 (Farklara Bağlı Bir Fonksiyon). $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $w(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ olsun.

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İç fonksiyon. f'nin değişkenlerini (u, v, s) ile gösterelim ve $g(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ diyelim. g lineer olduğundan türevlenebilirdir (Örnek 15.2) ve

$$J_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.
Zincir kuralı. $w = f \circ g$ olduğundan Teorem 15.6 gereği $\nabla w = \nabla f\ (\ g(x, y, z)\ )\ J_g$'dir:

$$\begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v & f_s \end{pmatrix} J_g = \begin{pmatrix} f_u - f_s & -f_u + f_v & -f_v + f_s \end{pmatrix}.$$

Toplam. Üç girdiyi toplarsak

$$w_x + w_y + w_z = (f_u - f_s) + (-f_u + f_v) + (-f_v + f_s) = 0$$

bulunur. Bunun nedeni, J_g matrisinin her satırındaki girdilerin toplamının 0 olmasıdır: (x, y, z) üç değişkeni aynı miktarda artırıldığında $x - y$, $y - z$ ve $z - x$ farkları değişmez. ■

Bu bölümde vektör değerli bir fonksiyonun türevini bir lineer dönüşüm olarak kurduk, onu Jacobi matrisiyle hesapladık ve zincir kuralıyla bileşkelerin türevini matris çarpımına indirdik. Zincir kuralının en önemli uygulamalarından biri, bir fonksiyonu bir noktadan geçen $t \mapsto a + tu$ doğrusu boyunca izlemektir: Sonuç 15.3 gereği bu doğru boyunca değişim hızı $\langle \nabla f(a), u \rangle$ olur. Yönlü Türev ve Ortalama Değer Teoremi bölümünde bu değişim hızını yönlü türev adıyla inceliyor, gradyanın en hızlı artış doğrultusunu gösterdiğini ve çok değişkenli ortalama değer teoremini kanıtlıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

16. Yönlü Türev ve Ortalama Değer Teoremi

Tek değişkenli bir fonksiyonun a noktasındaki türevi, x değişkeni a'dan ayrılırken f'nin değişim hızını ölçer. Sayı doğrusunda a'dan yalnız iki yönde ayrılınabilir ve sola doğru hız, sağa doğru hızın ters işaretlisidir. Düzlemde ya da uzayda ise bir noktadan sonsuz farklı yönde çıkılabilir. Kısmi türevler bu yönlerden yalnız koordinat eksenlerine paralel olanlarda değişim hızını verir: iki değişkende $f_x(a)$ "doğu" yönündeki, $f_y(a)$ "kuzey" yönündeki eğimdir. Bir tepenin yamacında kuzeydoğuya doğru yürüyen birinin karşılaştığı eğimi ölçmek için yeni bir kavrama, **yönlü türeve**, ihtiyaç vardır.
Bölümün ilk yarısında yönlü türevi tanımlıyor, türevlenebilir bir fonksiyonun bütün yönlü türevlerinin gradyandan okunduğunu ve gradyanın fonksiyonun en hızlı arttığı yönü gösterdiğini ispatlıyoruz. Ardından her yönde yönlü türevi olduğu hâlde sürekli bile olmayan bir fonksiyon inceleyerek kısmi türev, yönlü türev ve türevlenebilirlik arasındaki ilişkiyi bir tabloda topluyoruz. İkinci yarıda tek değişkenli ortalama değer teoremini (bkz. Analiz 2) iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerinde $\mathbb{R}^n$'ye taşıyor, vektör değerli fonksiyonlarda teoremin neden bileşen bileşen kurulması gerektiğini görüyor ve türevi sıfır olan fonksiyonların konveks kümelerde sabit olduğunu gösteriyoruz.

16.1 Yönlü Türev

Kısmi türevde a noktasından bir koordinat ekseni doğrultusunda ayrılıyorduk; yönlü türevde bu doğrultu keyfi bir birim vektörle seçilir. Tanımı Kısmi Türevler bölümünün başında türevin üç türünü karşılaştırırken önceden görmüştük (Tablo 12.1); şimdi ayrıntısıyla işliyoruz.

Tanım 16.1 (Yönlü Türev). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D^\circ$ olsun. $u \in \mathbb{R}^n$ bir birim vektör (Tanım 1.10), yani $\| u \| = 1$ olsun.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}$$

limiti bir reel sayı olarak varsa bu sayıya f'nin a noktasında u **yönündeki yönlü türevi** denir ve $D_u f(a)$ ya da $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$ ile gösterilir. Burada h reel bir değişkendir.

Yani a noktasından u doğrultusunda geçen $\{a + tu : t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu üzerinde f'nin değerlerine bakıyoruz. $\varphi(t) = f(a+tu)$ tek değişkenli fonksiyonu tanımlanırsa

$$D_u f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \varphi'(0)$$

olur: yönlü türev, f'nin bu doğruya kısıtlanışının $t = 0$'daki sıradan türevidir. u birim vektör olduğundan $\| (a+tu) - a \| = | t |$'dir; t parametresi, doğru üzerinde a'dan alınan işaretli yolun uzunluğudur ve $D_u f(a)$, f'nin birim uzunluk başına değişim hızını ölçer. Birim olmayan bir vektör kullansaydık aynı doğru üzerinde bulunan hız vektörün uzunluğuyla çarpılmış olurdu; yönlü türevin yalnız yöne bağlı olması için $\| u \| = 1$ istenir.
a'nın iç nokta olması, fark oranının küçük h'ler için tanımlı olmasını sağlar: $B(a, r) \subseteq D$ olacak biçimde bir $r > 0$ vardır ve $| h | < r$ ise $\| (a+hu) - a \| = | h | < r$ olduğundan $a + hu \in D$'dir.
Kısmi türevler özel hâldir. $u = e_j$ doğal taban vektörü alınırsa $a + he_j = (a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)$ olur ve tanımdaki limit tam olarak j-inci kısmi türevin tanımıdır (Tanım 12.1). Öyleyse $D_{e_j} f(a)$'nın var olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$'nın var olmasıdır ve bu durumda

$$D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Kısmi türevler, yönlü türevin koordinat eksenleri yönündeki özel hâlleridir; yönlü türev ise kısmi türevin keyfi yönlere genelleşmesidir.

Ters yön. u birim vektörse $-u$ da birim vektördür. $k=-h$ yazılırsa

$$\frac{f(a-hu)-f(a)}{h}=-\frac{f(a+ku)-f(a)}{k}$$

olur ve $h\to 0$ iken $k\to 0$'dır. Demek ki $D_{-u}f(a)$'nın var olması $D_uf(a)$'nın var olmasına denktir ve bu durumda $D_{-u}f(a)=-D_uf(a)$ olur: bir doğru üzerinde geri yürümek eğimin yalnız işaretini değiştirir. Özel olarak $D_{-e_j}f(a)=-\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$'dır.

İki değişkende. $n=2$, $a=(x_0,y_0)$ ve $u=(u_1,u_2)$ için tanım

$$D_uf(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

biçimini alır. Düzlemdeki her birim vektör, pozitif x ekseniyle yaptığı θ açısı cinsinden $u=(\cos\theta,\sin\theta)$ biçiminde yazılır; $\theta=0$ için $D_uf=f_x$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ için $D_uf=f_y$ bulunur.

Geometrik anlam. f iki değişkenli olsun ve grafiği $z=f(x,y)$ yüzeyi olsun (Tanım 8.5). (x_0,y_0) noktasından geçen ve u'ya paralel olan düşey düzlem yüzeyi bir C eğrisi boyunca keser. Bu düzlemde yatay koordinat olarak t'yi, düşey koordinat olarak z'yi alırsak C, $z=f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)$ fonksiyonunun grafiğidir. $D_uf(x_0,y_0)$, bu eğriye $P=\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)$ noktasında çizilen teğetin eğimidir; yani yüzey üzerinde u yönünde yürüyen birinin o anda karşılaştığı yokuşun eğimidir. Kısmi türevlerin geometrik anlamı (Önerme 12.2), bu düzlemin x ya da y eksenine paralel seçildiği özel hâldir.

Örnek 16.1 (Paraboloidin Eğik Bir Kesiti). $f(x,y)=4-x^2-2y^2$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasında $u=\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ yönündeki yönlü türevini tanımla hesaplayınız ve geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm.

Birim vektör mü? $\|u\|^2=\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}=1$ olduğundan u birim vektördür.

Doğru üzerindeki değerler. $(1,1)+tu=\left(1-\dfrac{3t}{5},1-\dfrac{4t}{5}\right)$ ve $f(1,1)=1$'dir. $\varphi(t)=f\big((1,1)+tu\big)$ yazalım:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=4-\left(1-\frac{3t}{5}\right)^2-2\left(1-\frac{4t}{5}\right)^2\\&=4-\left(1-\frac{6t}{5}+\frac{9t^2}{25}\right)-\left(2-\frac{16t}{5}+\frac{32t^2}{25}\right)\\&=1+\frac{22t}{5}-\frac{41t^2}{25}.\end{aligned}$$

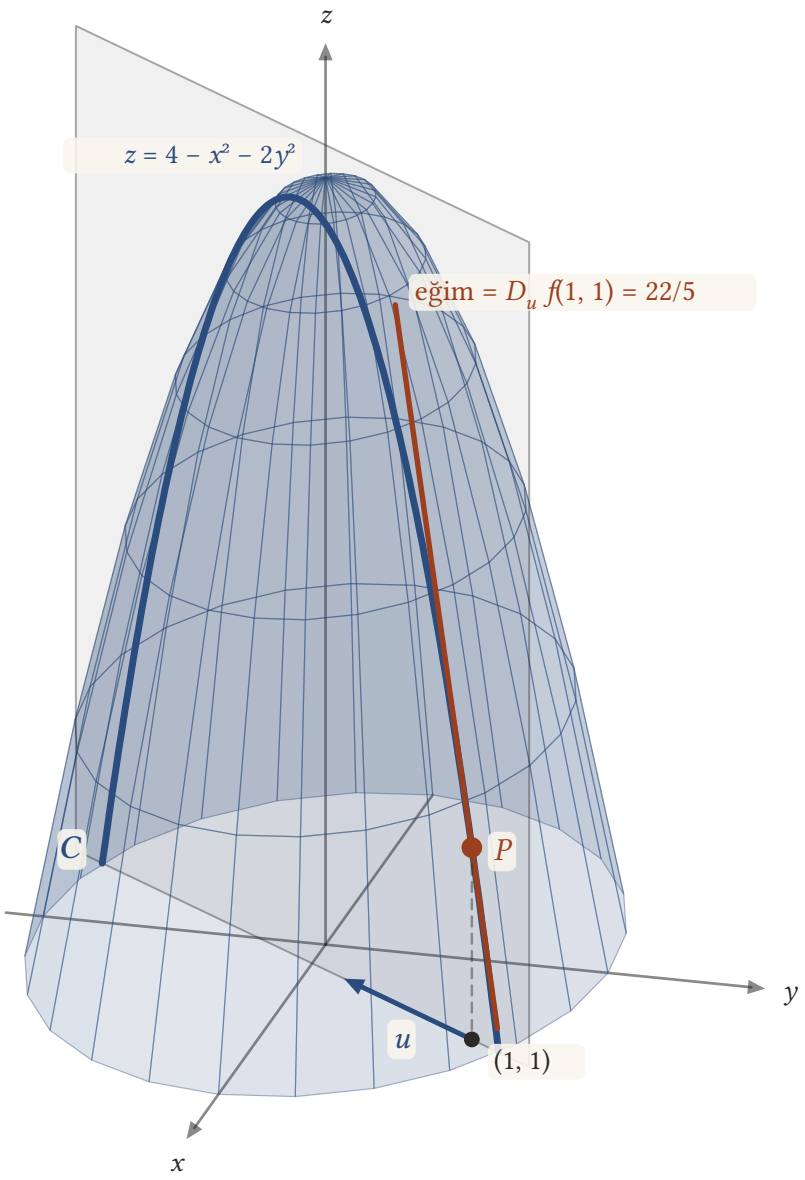
Fark oranı ve limit. $h\neq 0$ için

$$\frac{\varphi(h)-f(1,1)}{h}=\frac{\frac{22h}{5}-\frac{41h^2}{25}}{h}=\frac{22}{5}-\frac{41h}{25}$$

olur ve $h\to 0$ iken limit $\dfrac{22}{5}$'tir. Öyleyse $D_uf(1,1)=\dfrac{22}{5}$.

Yorum. Bu paraboloidin $P=(1,1,1)$ noktasından geçen, eksenlere paralel iki kesitini Örnek 12.12 içinde incelemiştik; eğimleri $f_x(1,1)=-2$ ve $f_y(1,1)=-4$ idi. Şimdi u vektörü $(1,1)$ noktasından kabaca orijine, yani paraboloidin tepesinin iz düşümüne doğru bakar; bu doğrultudaki doğru orijinden $\frac{1}{5}$ uzaklıkta geçer. $(1,1)$'den geçen ve u'ya paralel düşey düzlem yüzeyi $z=1+\dfrac{22t}{5}-\dfrac{41t^2}{25}$ parabolü boyunca keser. Bu parabolün $t=0$'daki, yani P noktasındaki teğetinin eğimi $\dfrac{22}{5}$'tir. Pozitif işaret, bu yönde yürüyen birinin yokuş yukarı çıktığını söyler; kesit tepenin yakınından geçer ve $t=\dfrac{55}{41}$'de en yükseğe ulaşıp öbür yamaca iner.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.1: $z = 4 - x^2 - 2y^2$ paraboloidinin $z \geq 0$ kısmı ve $(1, 1)$ noktasından $u = (-3/5, -4/5)$ yönünde geçen düşey düzlem (gri). Düzlem yüzeyi C: $z = 1 + 22t/5 - 41t^2/25$ parabolü boyunca keser; $P = (1, 1, 1)$ noktasındaki teğetin (turuncu) eğimi $D_u f(1, 1) = 22/5$'tir.

■

16.2 Türevlenebilir Fonksiyonlarda Yönlü Türev

Tanımla hesap her yön için ayrı bir limit gerektirir. Fonksiyon türevlenebilirse bu limitlerin hepsi tek bir vektörden, gradyandan (Tanım 12.3) okunur.

Teorem 16.1 (Yönlü Türevin Gradyanla Hesabı). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında türevlenebilir olsun. O zaman her $u \in \mathbb{R}^n$ birim vektörü için $D_u f(a)$ yönlü türevi vardır ve*

$$D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, u_j$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

İspat.
Doğruyu bir eğri olarak yazalım. *a iç nokta olduğundan $B(a,r) \subseteq D$ olacak biçimde bir $r>0$ vardır. $\gamma : (-r,r) \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = a + tu$ diyelim. $\| \gamma(t) - a \| = |\, t \,| < r$ olduğundan γ'nın değerleri $B(a,r)$ açık yuvarının içindedir. γ'nın bileşenleri $\gamma_j(t) = a_j + tu_j$ birinci dereceden polinomlardır ve $\gamma_j'(t) = u_j$ olur; öyleyse γ türevlenebilirdir (Teorem 15.2) ve $\gamma'(0) = u$'dur.*
Eğri boyunca değişim hızı. *Türevlenebilme yalnız a'nın yakınındaki değerlere bağlı olduğundan f'nin $V = B(a,r)$ açık yuvarına kısıtlanışı a'da türevlenebilirdir ve $\gamma\,\big(\,(-r,r)\,\big) \subseteq V$ olduğundan Sonuç 15.3 bu kısıtlanışa uygulanır. $F(t) = f(\gamma(t)) = f(a+tu)$ diyelim. f, $\gamma(0) = a$ noktasında türevlenebilir olduğundan Sonuç 15.3 gereği F, 0'da türevlenebilirdir ve*

$$F'(0) = \langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = \langle \nabla f(a), u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, u_j$$

olur. Bu adım zincir kuralının (Teorem 15.6) $1 \times n$ tipindeki $J_f(a)$ satırı ile $n \times 1$ tipindeki $J_\gamma(0)$ sütununun çarpımına uygulanmasıdır.
Tanımla karşılaştırma. *Öte yandan türevin tanımından*

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}$$

olur. Soldaki türev var olduğundan sağdaki limit de vardır ve bu limit tanım gereği $D_u f(a)$'dır. İki hesap birleştirilince $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$ bulunur. ■

Teoremin birkaç önemli sonucu vardır.
İzdüşüm. $\| u \| = 1$ olduğundan $\langle \nabla f(a), u \rangle$ sayısı, $\nabla f(a)$ vektörünün u doğrultusundaki işaretli izdüşümünün uzunluğudur. Yani u yönündeki değişim hızı, gradyanın o yöndeki bileşenidir.
Yöne lineer bağlılık. $u \mapsto D_u f(a)$ eşlemesi, $v \mapsto \langle \nabla f(a), v \rangle$ lineer fonksiyonunun birim vektörlere kısıtlanışıdır; sonsuz tane yönlü türevin hepsi n tane kısmi türevden hesaplanır. Buradan kullanışlı bir ölçüt çıkar: bir fonksiyonun bir noktadaki yönlü türevleri, sabit bir $w \in \mathbb{R}^n$ için $\langle w, u \rangle$ biçiminde yazılamıyorsa fonksiyon o noktada türevlenebilir değildir. Bu gözlemi aşağıda karşı örneklerde kullanacağız.
İki değişkende. $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ için teorem

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\sin\theta$$

biçimini alır. Örneğin Örnek 16.1 içinde $\nabla f(1,1) = (-2,-4)$ olduğundan $\langle \nabla f(1,1), u \rangle = \dfrac{6}{5} + \dfrac{16}{5} = \dfrac{22}{5}$ bulunur; tanımla hesapladığımız değerin aynısı.
Birim olmayan vektörler. Uygulamada yön çoğu zaman birim olmayan bir $v \neq 0$ vektörüyle ya da iki noktayla verilir. Bu durumda "v yönündeki yönlü türev" ile $u = \dfrac{v}{\| v \|}$ birim vektörü yönündeki yönlü türev kastedilir:

$$D_u f(a) = \left\langle \nabla f(a), \frac{v}{\| v \|} \right\rangle = \frac{\langle \nabla f(a), v \rangle}{\| v \|}.$$

a'dan b'ye doğru olan yön $v = b - a$ vektörüyle verilir. Birimleştirmeyi unutmak sonucu $\| v \|$ ile çarpar.

Üç adımda yönlü türev

1. **Birimleştir.** Yön bir v vektörüyle ya da iki noktayla verildiyse $u = \dfrac{v}{\| v \|}$ birim vektörünü bul.
2. **Gradyanı hesapla.** Kısmi türevleri bul ve f'nin noktada türevlenebilir olduğunu denetle; kısmi türevlerin noktanın bir komşuluğunda sürekli olması yeterlidir (Teorem 14.3). Sonra $\nabla f(a)$'yı hesapla.
3. **İç çarpım al.** $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$.

Türevlenebilirlik sağlanmıyorsa ya da denetlenemiyorsa (örneğin parçalı tanımlı fonksiyonların sorunlu noktalarında) yönlü türev tanımla hesaplanır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 16.2 (Birim Olmayan Bir Vektör Yönünde). $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ fonksiyonunun $(2,-1)$ noktasında $v = 2e_1 + 5e_2 = (2,5)$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz.

Çözüm.
Birimleştirme. $\| v \| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \neq 1$ olduğundan v birim vektör değildir;

$$u = \frac{v}{\| v \|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right).$$

Gradyan. $f_x = 2xy^3$ ve $f_y = 3x^2y^2 - 4$ polinomdur, dolayısıyla her yerde süreklidir ve f türevlenebilirdir (Teorem 14.3).

$$\nabla f(2,-1) = \big(\, 2 \cdot 2 \cdot (-1)^3, 3 \cdot 4 \cdot 1 - 4 \, \big) = (-4, 8).$$

İç çarpım.

$$\begin{aligned} D_u f(2,-1) &= \frac{(-4)\cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{32\sqrt{29}}{29} \approx 5{,}94. \end{aligned}$$

Birimleştirmeyi unutup $\langle \nabla f(2,-1), v \rangle = 32$ yazsaydık sonucu $\sqrt{29}$ ile çarpılmış bulurduk. ■

Örnek 16.3 (Üç Değişkenli Bir Fonksiyon). $f(x,y,z) = x \sin(yz)$ fonksiyonunun $(1,3,0)$ noktasında $v = (1,2,-1)$ yönündeki yönlü türevini gradyan yardımıyla bulunuz.

Çözüm.
Birimleştirme. $\| v \| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ olduğundan $u = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$'dir.
Gradyan. Her değişkene göre ayrı ayrı türev alınırsa

$$\nabla f(x,y,z) = \big(\sin(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz) \, \big)$$

bulunur. Bileşenler her yerde sürekli olduğundan f türevlenebilirdir. $(1,3,0)$ noktasında $\sin 0 = 0$ ve $\cos 0 = 1$ olduğundan

$$\nabla f(1,3,0) = (0, 0, 1 \cdot 3 \cdot 1) = (0,0,3).$$

İç çarpım.

$$D_u f(1,3,0) = \frac{0\cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Negatif işaret, u yönünde ilerlerken f'nin azaldığını söyler. ■

Örnek 16.4 (İki Noktayla Verilen Yön). $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun $M(2,1,3)$ noktasında, M'den $N(5,5,15)$ noktasına doğru olan yöndeki yönlü türevini önce tanımla, sonra gradyanla hesaplayınız.

Çözüm.
Birimleştirme. $v = N - M = (3,4,12)$ ve $\| v \| = \sqrt{9+16+144} = 13$ olduğundan

$$u = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13} \right).$$

Tanımla. $s = \dfrac{h}{13}$ yazarsak $M + hu$ noktası $(2+3s, 1+4s, 3+12s)$ olur. Üç çarpımı ayrı ayrı açalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(2+3s)(1+4s) = 2+11s+12s^2,$$
$$(1+4s)(3+12s) = 3+24s+48s^2,$$
$$(3+12s)(2+3s) = 6+33s+36s^2.$$

Toplayınca $f(M+hu) = 11+68s+96s^2$ bulunur; $f(M) = 2+3+6 = 11$'dir. $h = 13s$ olduğundan $h \neq 0$ için

$$\frac{f(M+hu)-f(M)}{h} = \frac{68s+96s^2}{13s} = \frac{68+96s}{13}$$

olur. $h \to 0$ iken $s \to 0$ olduğundan limit $\dfrac{68}{13}$'tür.

Gradyanla. $\nabla f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$ bileşenleri polinomdur; f türevlenebilirdir ve $\nabla f(2,1,3) = (4,5,3)$'tür.

$$D_u f(M) = \frac{4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 3\cdot 12}{13} = \frac{12+20+36}{13} = \frac{68}{13}.$$

İki yol, Teorem 16.1 ile uyumlu olarak aynı sonucu verir; gradyanla hesap açıkça daha kısadır. ■

16.3 En Hızlı Artış Yönü

Bir noktadaki bütün yönlü türevler gradyanla belirlendiğine göre, fonksiyonun hangi yönde en hızlı arttığı da gradyandan okunmalıdır.

Teorem 16.2 (En Hızlı Artış Yönü). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında türevlenebilir olsun. Her u birim vektörü için*

$$-\parallel \nabla f(a) \parallel \leq D_u f(a) \leq \parallel \nabla f(a) \parallel$$

olur. $\nabla f(a) = 0$ ise her yönde $D_u f(a) = 0$'dır. $\nabla f(a) \neq 0$ ise:
(i) $D_u f(a)$ en büyük değeri olan $\parallel \nabla f(a) \parallel$'yi yalnız $u = \dfrac{\nabla f(a)}{\parallel \nabla f(a) \parallel}$ yönünde alır;
(ii) en küçük değeri olan $-\parallel \nabla f(a) \parallel$'yi yalnız $u = -\dfrac{\nabla f(a)}{\parallel \nabla f(a) \parallel}$ yönünde alır;
(iii) $D_u f(a) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul u'nun $\nabla f(a)$'ya dik olmasıdır.

İspat.
Teorem 16.1 gereği $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$'dır.
Sınırlar. *Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) ve $\parallel u \parallel = 1$ ile*

$$\mid D_u f(a) \mid = \mid \langle \nabla f(a), u \rangle \mid \leq \parallel \nabla f(a) \parallel \parallel u \parallel = \parallel \nabla f(a) \parallel$$

olur; bu, istenen iki yanlı eşitsizliktir. $\nabla f(a) = 0$ ise iki sınır da 0'dır ve her yönlü türev 0'dır.
Açıyla yazılış. *$\nabla f(a) \neq 0$ olsun ve $\theta \in [0,\pi]$, $\nabla f(a)$ ile u arasındaki açı olsun (Tanım 1.8). $\parallel u \parallel = 1$ olduğundan*

$$D_u f(a) = \parallel \nabla f(a) \parallel \parallel u \parallel \cos\theta = \parallel \nabla f(a) \parallel \cos\theta$$

olur. $\cos\theta$ en büyük değeri 1'i yalnız $\theta = 0$'da, en küçük değeri -1'i yalnız $\theta = \pi$'de alır.
Uç değerlerin alındığı yönler. *$w = \dfrac{\nabla f(a)}{\parallel \nabla f(a) \parallel}$ birim vektörü için $\langle w, u \rangle = \cos\theta$'dır. Farkın normunun karesi (Lemma 1.1) ile*

$$\parallel u - w \parallel^2 = \parallel u \parallel^2 - 2\langle u, w \rangle + \parallel w \parallel^2 = 2 - 2\cos\theta$$

bulunur. Buna göre $\cos\theta = 1$ olması $\parallel u - w \parallel = 0$, yani $u = w$ olmasına denktir; bu (i)'dir. Aynı hesap $\parallel u + w \parallel^2 = 2 + 2\cos\theta$ verir; $\cos\theta = -1$ olması $u = -w$ olmasına denktir; bu (ii)'dir. Son olarak $D_u f(a) = 0$ olması $\langle \nabla f(a), u \rangle = 0$ demektir; bu da tanım gereği $u \perp \nabla f(a)$ olmasıdır (Tanım 1.9). Bu (iii)'tür. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem gradyanın geometrik anlamını verir: $\nabla f(a) \neq 0$ ise $\nabla f(a)$ vektörü f'nin a'da en hızlı arttığı yönü gösterir ve uzunluğu bu en büyük artış hızına eşittir. $-\nabla f(a)$ en hızlı azalış yönüdür. Gradyana dik yönlerde ise değişim hızı 0'dır. Her yöndeki hız, $\| \nabla f(a) \|$'nin gradyanla yapılan açının kosinüsüyle çarpımıdır.

Bu son gözlemin iki değişkende açık bir yorumu vardır. f'nin sabit bir k değerini aldığı noktaların oluşturduğu $f(x,y) = k$ eğrilerine f'nin **seviye eğrileri** denir; haritalardaki eş yükselti eğrileri bunun örneğidir. a'dan geçen bir seviye eğrisi, türevlenebilir bir $r : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^2$ yoluyla $r(0) = a$ ve $r'(0) \neq 0$ olacak biçimde parametrelenmiş olsun (f, a'yı içeren ve r'nin değerlerini kapsayan açık bir kümede türevlenebilir olsun). Her s için $f(r(s)) = k$ olduğundan, $s = 0$'da türev alınıp Sonuç 15.3 kullanılırsa

$$0 = \frac{d}{ds} f(r(s))\Big|_{s=0} = \langle \nabla f(a), r'(0) \rangle$$

bulunur. Yani gradyan, seviye eğrisinin teğet vektörüne diktir: seviye eğrisi boyunca yürümek f'yi değiştirmez ve teğet doğrultusundaki yönlü türev 0'dır. En hızlı artış yönü ise seviye eğrilerini dik açıyla keser. Üç değişkende aynı hesap, gradyanın $f(x,y,z) = k$ seviye yüzeyine dik olduğunu gösterir.

Örnek 16.5 (Bir Noktadan Öbürüne Doğru Değişim Hızı). $f(x,y) = xe^y$ fonksiyonunun $P(2,0)$ noktasında, P'den $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ noktasına doğru olan yöndeki değişim hızını bulunuz.

Çözüm.

Birimleştirme. $v = Q - P = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ ve $\| v \| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$ olduğundan $u = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$'tir.

Gradyan. $f_x = e^y$ ve $f_y = xe^y$ her yerde süreklidir; f türevlenebilirdir ve $\nabla f(2,0) = (e^0, 2e^0) = (1,2)$'dir.

İç çarpım.

$$D_u f(2,0) = 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{-3+8}{5} = 1.$$

f, P'den Q'ya doğru birim uzunluk başına 1 hızıyla artar. ■

Örnek 16.6 (En Hızlı Artış Yönü ve Hızı). $f(x,y) = xe^y$ fonksiyonunun $P(2,0)$ noktasında en hızlı arttığı yönü ve bu yöndeki değişim hızını bulunuz.

Çözüm.

En hızlı artış. Önceki örnekte (Örnek 16.5) $\nabla f(2,0) = (1,2)$ bulmuştuk. Teorem 16.2 gereği en hızlı artış gradyan yönündedir:

$$u = \frac{\nabla f(2,0)}{\| \nabla f(2,0) \|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

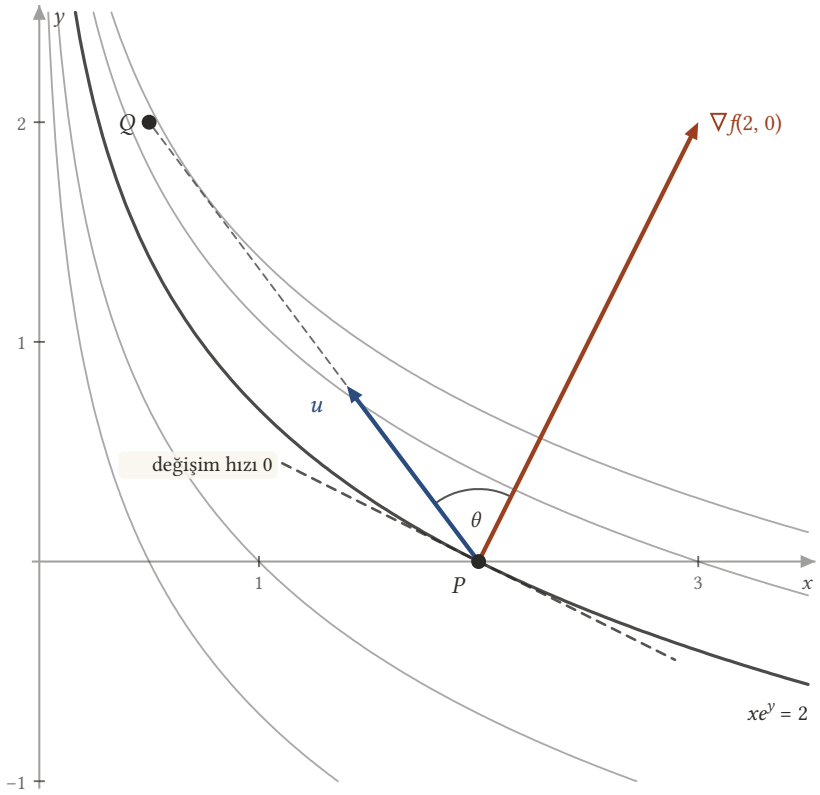
Bu yöndeki değişim hızı $\| \nabla f(2,0) \| = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ olur. En hızlı azalış $-\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ yönündedir ve o yöndeki hız $-\sqrt{5}$'tir.

Karşılaştırma. Önceki örnekteki $u = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ yönü gradyanla

$$\cos\theta = \frac{\langle (1,2), u \rangle}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olan bir θ açısı yapar; o yöndeki hız bu yüzden $\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$ çıkmıştı. P'den geçen seviye eğrisi $xe^y = 2$, yani $y = \ln\frac{2}{x}$ eğrisidir. Bu eğrinin P'deki eğimi $y' = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$ olduğundan teğet doğrultusu $(2,-1)$'dir; bu doğrultu gradyana diktir ($\langle (1,2), (2,-1) \rangle = 0$) ve o yönde değişim hızı 0'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.2: $f(x, y) = xe^y$ fonksiyonunun $xe^y = 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$ seviye eğrileri. $P = (2, 0)$ noktasında gradyan $\nabla f(2, 0) = (1, 2)$ (turuncu) P'den geçen seviye eğrisine diktir; o eğrinin teğet doğrultusunda (kesikli) değişim hızı 0'dır. Q'ya bakan $u = (-3/5, 4/5)$ birim vektörü (mavi) gradyanla $\cos\theta = 1/\sqrt{5}$ olan bir θ açısı yapar.

■

Örnek 16.7 (Yönlü Türevin En Büyük ve En Küçük Değeri). $f(x, y) = x^2y + e^{xy}\sin y$ fonksiyonunun $(1, 0)$ noktasındaki yönlü türevlerinin en büyük ve en küçük değerini ve bu değerlerin alındığı yönleri bulunuz.

Çözüm.
Gradyan. $e^{xy}\sin y$ teriminin y'ye göre türevi çarpım kuralıyla alınırsa

$$f_x = 2xy + ye^{xy}\sin y,$$
$$f_y = x^2 + xe^{xy}\sin y + e^{xy}\cos y$$

bulunur. Kısmi türevler her yerde sürekli olduğundan f türevlenebilirdir. $(1, 0)$'da $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ve $e^0 = 1$ olduğundan

$$\nabla f(1, 0) = (0 + 0{,}1 + 0 + 1) = (0, 2).$$

Uç değerler. Teorem 16.2 gereği yönlü türevin en büyük değeri $\| \nabla f(1, 0) \| = 2$'dir ve $u = (0, 1)$ yönünde alınır; en küçük değeri -2'dir ve $u = (0, -1)$ yönünde alınır. Gradyana dik olan $u = (1, 0)$ ve $u = (-1, 0)$ yönlerinde yönlü türev 0'dır; bunlar $f_x(1, 0) = 0$ kısmi türevi ve onun ters işaretlisidir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

16.4 Kısmi Türev, Yönlü Türev ve Türevlenebilirlik

Teorem 16.1 türevlenebilirlikten yönlü türevlerin varlığına gider. Bu kısımda ters yönlerin hiçbirinin doğru olmadığını gösteriyoruz: kısmi türevler yönlü türevleri vermez, bütün yönlü türevlerin varlığı sürekliliği vermez ve süreklilik eklense bile türevlenebilirlik elde edilmez.

Örnek 16.8 (Kısmi Türevleri Olup Yönlü Türevleri Olmayan Fonksiyon). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olsun. f'nin $(0,0)$ noktasında koordinat eksenleri dışındaki hiçbir yönde yönlü türevinin olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Eksen yönleri.** Bu fonksiyonun orijinde iki kısmi türevinin de var olduğunu ve $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ olduğunu Örnek 12.13 içinde görmüştük. Ters yön kuralı gereği $D_{-e_1} f(0,0) = D_{-e_2} f(0,0) = 0$'dır.
> **Öbür yönler.** $u = (u_1, u_2)$ birim vektör ve $h \neq 0$ olsun. $u_1^2 + u_2^2 = 1$ olduğundan
>
> $$f(hu) = \frac{h^2 u_1 u_2}{h^2(u_1^2 + u_2^2)} = u_1 u_2$$
>
> olur: f, orijinden çıkan her ışın üzerinde sabittir. Fark oranı
>
> $$\frac{f(hu) - f(0,0)}{h} = \frac{u_1 u_2}{h}$$
>
> olur. $u_1 u_2 \neq 0$ ise $h \to 0$ iken bu oranın mutlak değeri $+\infty$'a gider; limit yoktur. $u_1 u_2 = 0$ ise u vektörü $\pm e_1$, $\pm e_2$'den biridir. Demek ki yönlü türev yalnız dört eksen yönünde vardır ve orada 0'dır. ■

Kısmi türevler yalnız eksenlere paralel iki doğruya bakar ve bu doğrular dışında olup bitenden habersizdir. Bütün doğrulara bakan yönlü türevler de yeterli değildir, çünkü bir noktaya doğrular dışındaki yollardan da yaklaşılabilir.

Örnek 16.9 (Her Yönde Yönlü Türevi Olan Süreksiz Fonksiyon). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olsun. $(0,0)$ noktasında her yönde yönlü türevin var olduğunu, ama f'nin bu noktada sürekli olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Yönlü türevler.** $u = (u_1, u_2)$ bir birim vektör ve $h \neq 0$ olsun. $hu \neq (0,0)$ olduğundan
>
> $$\frac{f(hu) - f(0,0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4}$$
>
> olur (pay ve payda h^3 ile sadeleşti; $u \neq 0$ ve $h \neq 0$ olduğundan son payda pozitiftir). İki durum vardır.
>
> - $u_1 \neq 0$ ise $h \to 0$ iken payda $u_1^2 \neq 0$ sayısına gider ve limit $\frac{u_1 u_2^2}{u_1^2} = \frac{u_2^2}{u_1}$ olur.
> - $u_1 = 0$ ise pay özdeş olarak 0'dır ve limit 0'dır.
>
> Demek ki her u birim vektörü için $D_u f(0,0)$ vardır:
>
> $$D_u f(0,0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1}, & u_1 \neq 0, \\ 0, & u_1 = 0. \end{cases}$$

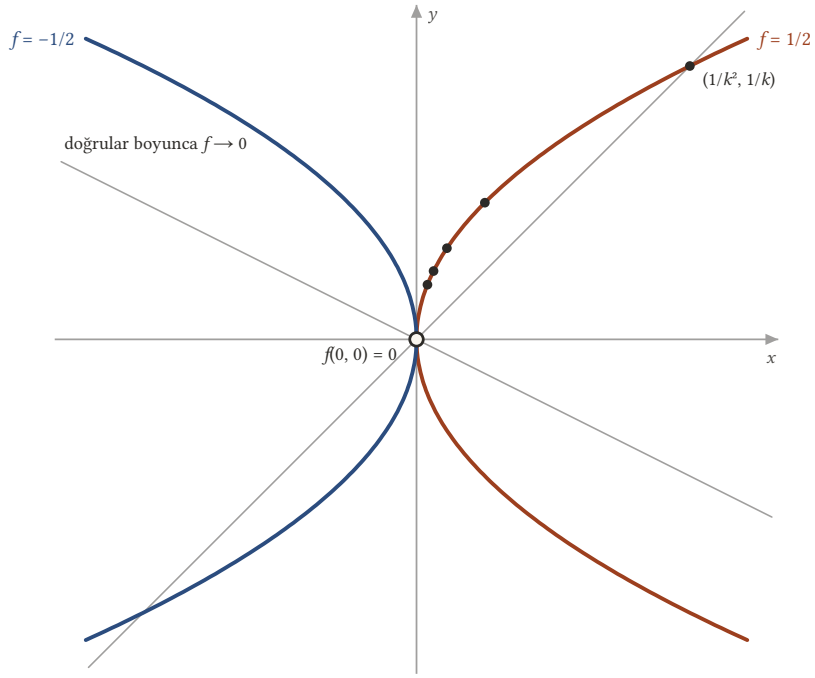
 CC BY-NC-SA 4.0

Süreksizlik. $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)$ dizisi $(0,0)$'a yakınsar, ama her k için

$$f(x_k, y_k) = \frac{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $f(x_k, y_k) \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$'dır. Dizisel süreklilik ölçütü (Teorem 10.1) gereği f, $(0,0)$'da sürekli değildir.

Neden? $u_1 \neq 0$ iken $f(tu) = \dfrac{tu_1u_2^2}{u_1^2 + t^2u_2^4}$ olduğundan, orijinden geçen her doğru boyunca f orijine yaklaşırken 0'a gider; yönlü türevler yalnız bu doğruları görür. Oysa $x = y^2$ parabolünün $y \neq 0$ olan her noktasında $f = \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2}$, $x = -y^2$ parabolünde ise $f = -\dfrac{1}{2}$'dir. Yukarıdaki dizi birinci parabolün üzerindedir. Süreklilik bütün yaklaşım yollarını denetler, yönlü türevler ise yalnız doğrusal olanları.



Şekil 16.3: $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4)$ için $x = y^2$ parabolünde (turuncu) $f = 1/2$, $x = -y^2$ parabolünde (mavi) $f = -1/2$'dir; orijin iki parabolden de çıkarılmıştır. Orijinden geçen her doğru boyunca $f \to 0$ olur, ama parabol üzerindeki $(1/k^2, 1/k)$ noktaları orijine yaklaşırken f hep $1/2$'dir.

■

Bu fonksiyon orijinde türevlenebilir de değildir (Sonuç 14.1). Aynı sonuca yönlü türevlerden de ulaşılır: $D_{e_1} f(0,0) = 0$ ve $D_{e_2} f(0,0) = 0$ olduğundan $\nabla f(0,0) = (0,0)$'dır. f türevlenebilir olsaydı Teorem 16.1 her yönde $D_u f(0,0) = 0$ verirdi; oysa $u_1 u_2 \neq 0$ için $D_u f(0,0) = \dfrac{u_2^2}{u_1} \neq 0$'dır.

Süreklilik eklemek de yetmez. Sürekli olup kısmi türevleri olan, ama türevlenemeyen $\sqrt{|\,xy\,|}$ fonksiyonunu Örnek 14.7 içinde görmüştük; o fonksiyonun köşegen yönlerinde yönlü türevi yoktur, çünkü $f(t,t) = |\,t\,|$'dir. Aşağıdaki fonksiyon bir adım daha ileri gider: orijinde süreklidir ve her yönde yönlü türevi vardır, ama yine türevlenebilir değildir. Aynı fonksiyonu üç ayrı soruda inceleyelim.

Örnek 16.10 (Orijinde Sürekli Bir Fonksiyon). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

olsun. f'nin $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$(x,y)\neq(0,0)$ için $x^2\leq x^2+y^2$ olduğundan $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1$'dir ve

$$\mid f(x,y)-f(0,0)\mid=\frac{3x^2\mid y\mid}{x^2+y^2}\leq 3\mid y\mid\leq 3\sqrt{x^2+y^2}$$

olur. $\varepsilon>0$ verilsin ve $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ alalım. $0<\parallel(x,y)\parallel<\delta$ ise $\mid f(x,y)-f(0,0)\mid\leq 3\parallel(x,y)\parallel<\varepsilon$ olur; $(x,y)=(0,0)$ için fark zaten 0'dır. Tanım gereği (Tanım 10.1) f, $(0,0)$'da süreklidir. ■

Örnek 16.11 (Aynı Fonksiyonun Yönlü Türevleri). $(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ ve $f(0,0)=0$ olsun. Her u birim vektörü için $D_uf(0,0)$ yönlü türevini bulunuz.

Çözüm.
$u=(u_1,u_2)$ birim vektör ve $h\neq 0$ olsun. $u_1^2+u_2^2=1$ olduğundan

$$f(hu)=\frac{3h^3u_1^2u_2}{h^2(u_1^2+u_2^2)}=3hu_1^2u_2$$

olur ve fark oranı

$$\frac{f(hu)-f(0,0)}{h}=3u_1^2u_2$$

sabittir. Öyleyse her u için $D_uf(0,0)=3u_1^2u_2$'dir. Özel olarak $f_x(0,0)=D_{e_1}f(0,0)=0$ ve $f_y(0,0)=D_{e_2}f(0,0)=0$ olur. ■

Örnek 16.12 (Aynı Fonksiyon Türevlenebilir Değildir). $(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ ve $f(0,0)=0$ olsun. f'nin $(0,0)$ noktasında türevlenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Gradyan. Önceki örnekte (Örnek 16.11) kısmi türevlerin var olduğunu ve $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ olduğunu bulduk. Kısmi türevlerden kurulan matris $\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ ve $\nabla f(0,0)=(0,0)$'dır.
Çelişki. f, $(0,0)$'da türevlenebilir olsaydı Teorem 16.1 gereği her u için

$$D_uf(0,0)=\langle\nabla f(0,0),u\rangle=0$$

olmalıydı. Oysa $u=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ için

$$D_uf(0,0)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\neq 0$$

bulunur. Bu çelişki f'nin $(0,0)$'da türevlenebilir olmadığını gösterir. Kısmi türevlerin matrisi vardır, ama bir türevi temsil etmez; $u\mapsto 3u_1^2u_2$ eşlemesi hiçbir w için $\langle w,u\rangle$ biçiminde yazılamaz. ■

Bu örnekleri, önceki iki bölümün sonuçlarıyla birlikte bir tabloda toplayalım. Tabloda a, f'nin tanım kümesinin bir iç noktasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 16.1: Kısmi türev, yönlü türev, süreklilik ve türevlenebilirlik

Önerme	Doğru mu?	Gerekçe ya da karşı örnek
f, a'da türevlenebilir $\Rightarrow$ her yönde $D_u f(a)$ var	Evet	Teorem 16.1
Her yönde $D_u f(a)$ var $\Rightarrow$ kısmi türevler var	Evet	$u = e_j$ özel hâli
f, a'da türevlenebilir $\Rightarrow$ f, a'da sürekli	Evet	Teorem 14.1
Kısmi türevler a'nın bir komşuluğunda sürekli $\Rightarrow$ f, a'da türevlenebilir	Evet	Teorem 14.3
Kısmi türevler var $\Rightarrow$ f, a'da sürekli	Hayır	Örnek 12.13
Kısmi türevler var $\Rightarrow$ her yönde $D_u f(a)$ var	Hayır	Örnek 16.8
Her yönde $D_u f(a)$ var $\Rightarrow$ f, a'da sürekli	Hayır	Örnek 16.9
Kısmi türevler var ve f sürekli $\Rightarrow$ türevlenebilir	Hayır	Örnek 14.7
Her yönde $D_u f(a)$ var ve f sürekli $\Rightarrow$ türevlenebilir	Hayır	Örnek 16.12

Kısaca: türevlenebilirlik bütün yönlü türevlerin varlığını, o da kısmi türevlerin varlığını gerektirir; bu iki gerektirmenin hiçbiri tersine çevrilemez ve yönlü türevlerin varlığı sürekliliği bile vermez. Yönlü türev kısmi türevden güçlü, türevlenebilirlikten zayıf bir kavramdır.

16.5 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Yönlü Türev

Yönlü türevin tanımı değer uzayının boyutunu kullanmaz; aynı fark oranı vektör değerli fonksiyonlar için de yazılabilir.

Tanım 16.2 (Vektör Değerli Fonksiyonun Yönlü Türevi). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $a \in D^\circ$ ve $u \in \mathbb{R}^n$ bir birim vektör olsun.

$$D_u f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}$$

limiti $\mathbb{R}^m$'de varsa bu vektöre f'nin a noktasında u **yönündeki yönlü türevi** denir.

Yani fark oranı artık $\mathbb{R}^m$'de bir vektördür. $\mathbb{R}^m$ değerli bir fonksiyonun limiti bileşen bileşen alındığından (Teorem 8.6), $f = (f_1, \ldots, f_m)$ için $D_u f(a)$ ancak ve ancak her bileşenin u yönündeki yönlü türevi varsa vardır ve

$$D_u f(a) = \big(\, D_u f_1(a), \ldots, D_u f_m(a) \, \big)$$

olur. $m = 1$ için Tanım 16.1 geri gelir.

Teorem 16.3 (Vektör Değerli Fonksiyonda Yönlü Türevin Hesabı). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D^\circ$ ve $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu a noktasında türevlenebilir olsun. O zaman her u birim vektörü için $D_u f(a)$ vardır ve u sütun vektörü olarak yazıldığında*

$$D_u f(a) = J_f(a)\, u$$

olur. Başka bir deyişle $D_u f(a) = Df(a)(u)$'dur.

> ***İspat.***
> *f, a'da türevlenebilir olduğundan her f_i bileşeni a'da türevlenebilirdir (Teorem 15.2). Teorem 16.1 gereği her i için $D_u f_i(a)$ vardır ve $D_u f_i(a) = \langle \nabla f_i(a), u\rangle$ olur. Bütün bileşenlerin yönlü türevleri var olduğundan $D_u f(a)$ da vardır ve i. bileşeni $\langle \nabla f_i(a), u\rangle$ olur.*
> *Öte yandan $J_f(a)$'nın i. satırı $\nabla f_i(a)$ olduğundan (Tanım 15.2) $J_f(a)\,u$ çarpımının i. bileşeni de*
>
> $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\, u_j = \langle \nabla f_i(a), u\rangle$$
>
> *olur. İki vektörün bütün bileşenleri eşit olduğundan $D_u f(a) = J_f(a)\,u$ bulunur. $J_f(a)$, $Df(a)$ lineer dönüşümünün matrisi olduğundan (Teorem 15.3) bu, $D_u f(a) = Df(a)(u)$ demektir.* ■

Örnek 16.13 (Jacobi Matrisiyle Yönlü Türev). $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasında $v = (3,4)$ yönündeki yönlü türevini bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Birimleştirme.** $\| v \| = \sqrt{9+16} = 5$ olduğundan $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$'tir.
> **Jacobi matrisi.** Bileşenler polinomdur; kısmi türevleri sürekli olduğundan f türevlenebilirdir (Teorem 15.4).
>
> $$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$
>
> olduğundan
>
> $$J_f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
>
> **Çarpım.**
>
> $$D_u f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6-16)/5 \\ (12+8)/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
>
> **Tanımla denetim.** $\varphi(t) = f\,\big(\,(1,2) + tu\,\big)$ yazalım; burada $(1,2) + tu = \left(1 + \frac{3t}{5}, 2 + \frac{4t}{5}\right)$'tir. Bileşenler
>
> $$\varphi_1(t) = \left(1 + \frac{3t}{5}\right)^2 - \left(2 + \frac{4t}{5}\right)^2 = -3 - 2t - \frac{7t^2}{25},$$
> $$\varphi_2(t) = 2\left(1 + \frac{3t}{5}\right)\left(2 + \frac{4t}{5}\right) = 4 + 4t + \frac{24t^2}{25}$$
>
> olur. $\varphi(0) = f(1,2) = (-3,4)$ olduğundan $h \neq 0$ için
>
> $$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \left(-2 - \frac{7h}{25}, 4 + \frac{24h}{25}\right)$$
>
> olur ve $h \to 0$ iken limit $(-2,4)$'tür. ■

16.6 Ortalama Değer Teoremi

Tek değişkenli ortalama değer teoremi, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyonun uçlar arasındaki değişimini ara bir noktadaki türevle ifade eder: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ (bkz. Analiz 2). $\mathbb{R}^n$'de iki nokta arasında aralığın rolünü onları birleştiren $L(a;b)$ doğru parçası üstlenir (Tanım 2.4). Bu doğru parçasını

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(1-t)a + tb = a + t(b-a), \qquad t \in [0,1]$$

biçiminde yazacağız: $t = 0$ için a, $t = 1$ için b elde edilir ve $t \in (0,1)$ için nokta a ile b arasındadır. Doğru parçası bir eksene paralelken teoremin kısmi türevlerle yazılmış biçimini Önerme 12.3 içinde görmüştük; şimdi keyfi doğrultudaki doğru parçalarına geçiyoruz.

Teorem 16.4 (Reel Değerli Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi). *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : A \to \mathbb{R}$, A üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $a, b \in A$ noktalarını birleştiren doğru parçası A'nın içinde kalsın: $L(a;b) \subseteq A$. O zaman öyle bir $t_0 \in (0,1)$ vardır ki $c = (1-t_0)a + t_0 b$ noktası için*

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle$$

olur.

İspat.
$a = b$ ise iki yan da 0'dır; $a \neq b$ olsun.
Doğru parçasını parametrelemek. *Her $t \in \mathbb{R}$ için $\varphi(t) = a + t(b-a)$ diyelim. $t \in [0,1]$ için $\varphi(t) \in L(a;b) \subseteq A$'dır. $g(t) = f(\varphi(t))$ fonksiyonunu $\varphi(t) \in A$ olan her t için tanımlayalım; özel olarak g, $[0,1]$ üzerinde tanımlıdır ve $g(0) = f(a)$, $g(1) = f(b)$'dir.*
g'nin türevi. *$t_1 \in [0,1]$ olsun. A açık olduğundan $B(\varphi(t_1), \varepsilon) \subseteq A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\| b-a \|}$ diyelim. $| t - t_1 | < \delta$ ise*

$$\| \varphi(t) - \varphi(t_1) \| = | t - t_1 | \, \| b - a \| < \varepsilon$$

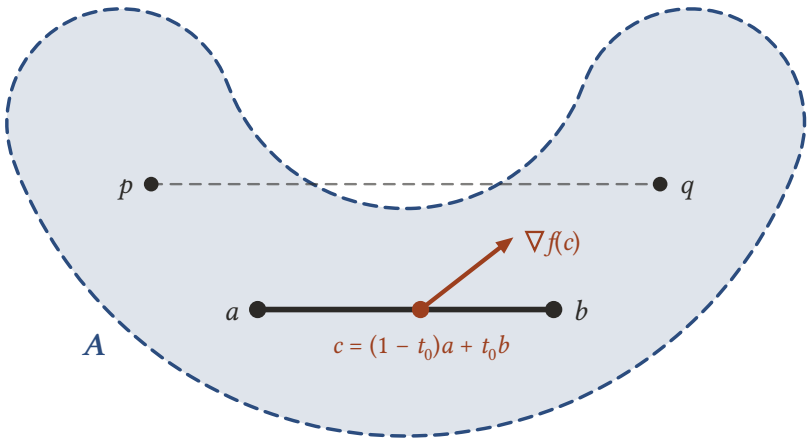
olduğundan $\varphi(t) \in A$'dır; yani $I = (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ açık aralığı için $\varphi(I) \subseteq A$'dır ve g, I üzerinde tanımlıdır. φ'nin bileşenleri $a_j + t(b_j - a_j)$ birinci dereceden polinomlardır; φ türevlenebilirdir ve $\varphi'(t) = b - a$'dır. f, $\varphi(t_1)$'de türevlenebilir olduğundan Sonuç 15.3 gereği g, t_1'de türevlenebilirdir ve

$$g'(t_1) = \langle \nabla f(\varphi(t_1)), \varphi'(t_1) \rangle = \langle \nabla f(\varphi(t_1)), b - a \rangle$$

olur.
Tek değişkenli teorem. *g, $[0,1]$'in her noktasında türevlenebilir olduğundan $[0,1]$ üzerinde süreklidir ve $(0,1)$ üzerinde türevlenebilirdir. Tek değişkenli ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) gereği öyle bir $t_0 \in (0,1)$ vardır ki*

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)\,(1-0)$$

olur. $g(1) - g(0) = f(b) - f(a)$'dır ve $c = \varphi(t_0) = (1-t_0)a + t_0 b$ için $g'(t_0) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle$ olduğundan iddia elde edilir.



Şekil 16.4: Konveks olmayan açık bir A kümesi. a ile b'yi birleştiren L(a; b) doğru parçası A'nın içinde kaldığından teorem bu ikiliye uygulanır ve parça üzerinde f(b) − f(a) = ⟨∇f(c), b − a⟩ eşitliğini sağlayan bir c noktası vardır. p ile q'yu birleştiren parça ise A'dan taşar; teorem bu ikili için bir şey söylemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Teoremin hipotezi yalnız tek bir doğru parçasıyla ilgilidir: A'nın her iki noktasını birleştiren doğru parçasının A'da kalması gerekmez; teorem, doğru parçası A'da kalan a, b ikilileri için geçerlidir. A açık ve konveks ise her $a, b \in A$ için $L(a;b) \subseteq A$'dır (Tanım 2.5); dolayısıyla teorem A'nın her iki noktası için geçerlidir. $\mathbb{R}^n$'nin kendisi ve açık yuvarlar böyle kümelerdir.
$n = 1$ için $\langle \nabla f(c), b-a \rangle = f'(c)(b-a)$ olur ve teorem tek değişkenli ortalama değer teoremine döner; $\mathbb{R}$'nin konveks alt kümeleri aralıklardır ve doğru parçası bir kapalı aralıktır. Tek değişkende olduğu gibi c noktası genellikle tek değildir ve teorem onun yerini söylemez; önemli olan, c'nin doğru parçası üzerinde bulunmasıdır.

Örnek 16.14 (Ortalama Değer Noktasının Bulunması). $f(x,y) = x^2 + y^3$ fonksiyonu ve $a = (0,0)$, $b = (1,1)$ noktaları için ortalama değer teoreminin (Teorem 16.4) verdiği c noktasını bulunuz.

Çözüm.
Hipotezler. f polinomdur ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde türevlenebilirdir; $\mathbb{R}^2$ açık ve konveks olduğundan teorem uygulanır.
Denklem. $\nabla f(x,y) = (2x, 3y^2)$, $b - a = (1,1)$ ve $f(b) - f(a) = 2 - 0 = 2$'dir. Doğru parçasının a ile b arasındaki noktaları $c = (t,t)$, $t \in (0,1)$ biçimindedir ve

$$\langle \nabla f(t,t), (1,1) \rangle = 2t + 3t^2$$

olur. Öyleyse $3t^2 + 2t - 2 = 0$ denklemini çözmeliyiz:

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Seçim. $\sqrt{7} \approx 2{,}646$ olduğundan kökler yaklaşık $0{,}549$ ve $-1{,}215$'tir; $(0,1)$ aralığında yalnız birincisi vardır. Öyleyse $c = (t_0, t_0)$ ve

$$t_0 = \frac{\sqrt{7} - 1}{3} \approx 0{,}549$$

olur. Bulunan c, doğru parçasının orta noktası olan $\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$ değildir; teorem ara noktanın varlığını söyler, yerini söylemez. ■

Ortalama değer teoreminin en sık kullanıldığı yer, bir fonksiyonun değişimini gradyanın büyüklüğüyle sınırlamaktır.

Sonuç 16.1 (Gradyanı Sınırlı Fonksiyonlar). *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve konveks, $f : A \to \mathbb{R}$, A üzerinde türevlenebilir olsun ve bir $M \geq 0$ sayısı için her $x \in A$'da $\| \nabla f(x) \| \leq M$ olsun. O zaman her $x, y \in A$ için*

$$| f(x) - f(y) | \leq M \, \| x - y \|$$

olur.

İspat.
$x, y \in A$ olsun. A konveks olduğundan $L(y;x) \subseteq A$'dır. Teorem 16.4 gereği bu doğru parçası üzerinde öyle bir c vardır ki $f(x) - f(y) = \langle \nabla f(c), x - y \rangle$ olur. $c \in A$ olduğundan Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) ile

$$| f(x) - f(y) | \leq \| \nabla f(c) \| \, \| x - y \| \leq M \, \| x - y \|$$

bulunur. ■

Örnek 16.15 (Ortalama Değer Teoremiyle Bir Eşitsizlik). Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$| \sin x_1 \sin y_1 - \sin x_2 \sin y_2 | \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Gradyan. $f(x,y)=\sin x\sin y$ alalım. $\nabla f(x,y)=(\cos x\sin y,\sin x\cos y)$ bileşenleri sürekli olduğundan f, $\mathbb{R}^2$'de türevlenebilirdir.
Sınır. $\sin^2 y\le 1$ ve $\cos^2 y\le 1$ olduğundan

$$\| \nabla f(x,y) \|^2 = \cos^2 x\sin^2 y+\sin^2 x\cos^2 y\le \cos^2 x+\sin^2 x=1$$

olur; yani her noktada $\| \nabla f(x,y) \|\le 1$'dir.
Sonuç. $\mathbb{R}^2$ açık ve konveks olduğundan Sonuç 16.1 $M=1$ ile uygulanır:

$$| f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2) |\le \| (x_1,y_1)-(x_2,y_2) \| .$$

Sol yan istenen eşitsizliğin sol yanıdır; sağdaki Öklid normu da $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ sayısıdır. Tek değişkende aynı yol $|\sin x_1-\sin x_2|\le |x_1-x_2|$ eşitsizliğini verir. ■

16.7 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Ortalama Değer Teoremi

Ortalama değer teoremini vektör değerli bir fonksiyona tek bir ara noktayla genişletmek mümkün değildir; bunu en basit örnekte görelim.

Örnek 16.16 (Tek Bir Ara Noktanın Bulunmadığı Eğri). $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(t)=(t^2,t^3)$ olsun. $f(1)-f(0)=J_f(c)\,(1-0)$ eşitliğini sağlayan bir $c\in(0,1)$ bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tek ara nokta yok. f'nin bileşenleri polinomdur ve $J_f(c)$, $(2c,3c^2)$'nin sütun hâlidir. $f(0)=(0,0)$ ve $f(1)=(1,1)$ olduğundan istenen eşitlik

$$\begin{aligned} 2c &= 1,\\ 3c^2 &= 1 \end{aligned}$$

denklemlerinin birlikte sağlanmasıdır. Birinci denklem $c=\dfrac{1}{2}$ verir, ama bu değer için $3c^2=\dfrac{3}{4}\neq 1$'dir. Öyleyse böyle bir c yoktur.
Bileşen bileşen. Bileşenlere ayrı ayrı bakıldığında ise tek değişkenli teorem her biri için bir ara nokta verir: t^2 için $1=2c_1$, yani $c_1=\dfrac{1}{2}$; t^3 için $1=3c_2^2$, yani $c_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}577$. İki ara nokta farklıdır ve ortak bir ara nokta bulunamaz. ■

Doğru olan, teoremi her bileşene ayrı ayrı uygulamaktır.

Teorem 16.5 (Vektör Değerli Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi). *$A\subseteq\mathbb{R}^n$ açık, $f=(f_1,\dots,f_m):A\to\mathbb{R}^m$, A üzerinde türevlenebilir ve $a,b\in A$ için $L(a;b)\subseteq A$ olsun. O zaman öyle $t_1,\dots,t_m\in(0,1)$ sayıları vardır ki $c_i=(1-t_i)a+t_ib$ noktaları için*

$$f_i(b)-f_i(a)=\langle \nabla f_i(c_i),\,b-a\rangle,\qquad i=1,\dots,m$$

olur.

İspat.
f, A'nın her noktasında türevlenebilir olduğundan her f_i bileşeni de öyledir (Teorem 15.2). Her i için reel değerli $f_i:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna Teorem 16.4 uygulanırsa $f_i(b)-f_i(a)=\langle\nabla f_i(c_i),b-a\rangle$ eşitliğini sağlayan bir $c_i=(1-t_i)a+t_ib$, $t_i\in(0,1)$ noktası bulunur. ■

Bu m eşitlik alt alta yazılırsa

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(c_m) \end{pmatrix} (b - a)$$

olur. Sağdaki matrisin her satırı farklı bir noktada hesaplanmıştır; bu matris genellikle tek bir c için $J_f(c)$ değildir ve Örnek 16.16, c_i noktalarının ortak seçilemeyebileceğini gösterir. $m = 1$ için bu teorem, reel değerli fonksiyonlar için ortalama değer teoremiyle (Teorem 16.4) aynıdır.
Buna rağmen bileşen bileşen teorem, tek değişkenli analizin en çok kullanılan sonuçlarından birini $\mathbb{R}^n$'ye taşımaya yeter: türevi sıfır olan fonksiyon sabittir (bkz. Analiz 2).

Sonuç 16.2 (Türevi Sıfır Olan Fonksiyon Sabittir). *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve konveks bir küme, $f : A \to \mathbb{R}^m$, A üzerinde türevlenebilir olsun. Her $x \in A$ için $Df(x) = 0$ ise, yani $J_f(x)$ sıfır matrisiyse, f, A üzerinde sabittir.*

> ***İspat.***
> *$f = (f_1, \ldots, f_m)$ ve $x, y \in A$ olsun. A konveks olduğundan $L(x; y) \subseteq A$'dır. Teorem 16.5 gereği bu doğru parçası üzerinde öyle $c_1, \ldots, c_m$ noktaları vardır ki her i için*
>
> $$f_i(y) - f_i(x) = \langle \nabla f_i(c_i), y - x \rangle$$
>
> *olur. $c_i \in A$'dır ve $\nabla f_i(c_i)$, $J_f(c_i)$ sıfır matrisinin i. satırıdır; öyleyse $\nabla f_i(c_i) = 0$ ve $f_i(y) = f_i(x)$'tir. Bu her i için doğru olduğundan $f(y) = f(x)$ bulunur. x ve y keyfi olduğundan f, A üzerinde sabittir.* ■

Sonucun tersi açıktır: sabit bir fonksiyonun bütün kısmi türevleri sıfırdır. Ayrıca hipotezdeki türevlenebilirlik kendiliğinden gelir: A'nın her noktasında bütün kısmi türevler sıfırsa kısmi türevler sürekli olduğundan f türevlenebilirdir (Teorem 15.4) ve $J_f = 0$'dır. Sonuç toplam diferansiyel (Tanım 15.3) diliyle de söylenebilir: A'nın her noktasında $df = 0$ ise f sabittir.
Konvekslik koşulu tümüyle atılamaz. $A = B((-2, 0), 1) \cup B((2, 0), 1)$ ayrık iki açık yuvarın birleşimi olsun ve f soldaki yuvarda 0, sağdakinde 1 değerini alsın. A'nın her noktası, f'nin sabit olduğu bir yuvarın içindedir; bu yüzden f her noktada türevlenebilirdir ve $Df = 0$'dır. Ama f sabit değildir. Engel A'nın iki parçadan oluşmasıdır; konvekslik yerine bağlantılılık yeterlidir (Alıştırma 16.9).

16.8 Alıştırmalar

Alıştırma 16.1 (Eksenle Açı Yapan Yön). $f(x, y) = x^3 - xy - 2y^2$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktasında, pozitif x ekseniyle $60°$'lik açı yapan birim vektör yönündeki yönlü türevini bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Birim vektör.** $u = (\cos 60°, \sin 60°) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
> **Gradyan.** $f_x = 3x^2 - y$ ve $f_y = -x - 4y$ polinomdur; f türevlenebilirdir ve
>
> $$\nabla f(1, 2) = (3 - 2, -1 - 8) = (1, -9).$$
>
> **İç çarpım.**
>
> $$D_u f(1, 2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-9) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 9\sqrt{3}}{2} \approx -7{,}29.$$
>
> ■

Alıştırma 16.2 (Her Noktada Yönlü Türev). $f(x, y, z) = xe^{yz}$ fonksiyonunun $u = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7} \right)$ yönündeki yönlü türevini her (x, y, z) noktasında bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Birim vektör mü?** $\| u \|^2 = \frac{4 + 9 + 36}{49} = 1$ olduğundan u birim vektördür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Gradyan.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(e^{yz}, xz\,e^{yz}, xy\,e^{yz} \right).$$

Bileşenler her yerde sürekli olduğundan f, $\mathbb{R}^3$'ün her noktasında türevlenebilirdir.
İç çarpım. Her (x,y,z) için

$$\begin{aligned} D_u f(x,y,z) &= \frac{2}{7}e^{yz} + \frac{3}{7}xz\,e^{yz} - \frac{6}{7}xy\,e^{yz} \\ &= \frac{e^{yz}}{7}\,(2 + 3xz - 6xy). \end{aligned}$$

Örneğin $(1,1,0)$ noktasında $D_u f(1,1,0) = \dfrac{1}{7}(2+0-6) = -\dfrac{4}{7}$'dir. ■

Alıştırma 16.3 (Tanımla Üç Değişkende Yönlü Türev). $f(x,y,z) = x^2y + y^2z$ fonksiyonunun $P(5,1,0)$ noktasında, P'den $Q(2,-3,12)$ noktasına doğru olan yöndeki yönlü türevini tanımla hesaplayınız ve sonucu gradyanla doğrulayınız.

Çözüm.
Birimleştirme. $v = Q - P = (-3,-4,12)$ ve $\| v \| = \sqrt{9+16+144} = 13$ olduğundan $u = \dfrac{1}{13}(-3,-4,12)$'dir.
Doğru üzerindeki değerler. $s = \dfrac{h}{13}$ yazarsak $P + hu = (5-3s, 1-4s, 12s)$ olur ve $f(P) = 25$'tir. İki terimi ayrı ayrı açalım:

$$\begin{aligned} (5-3s)^2(1-4s) &= 25 - 130s + 129s^2 - 36s^3, \\ (1-4s)^2 \cdot 12s &= 12s - 96s^2 + 192s^3. \end{aligned}$$

Toplayıp 25 çıkarırsak

$$f(P+hu) - f(P) = -118s + 33s^2 + 156s^3$$

bulunur.
Limit. $h = 13s$ olduğundan $h \neq 0$ için

$$\frac{f(P+hu)-f(P)}{h} = \frac{-118s + 33s^2 + 156s^3}{13s} = \frac{-118 + 33s + 156s^2}{13}$$

olur. $h \to 0$ iken $s \to 0$ olduğundan $D_u f(P) = -\dfrac{118}{13}$'tür.
Gradyanla denetim. $\nabla f = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$ polinom bileşenlidir ve $\nabla f(5,1,0) = (10,25,1)$'dir.

$$D_u f(P) = \frac{10\cdot(-3) + 25\cdot(-4) + 1\cdot 12}{13} = \frac{-30 - 100 + 12}{13} = -\frac{118}{13}.$$

İki hesap aynı sonucu verir. ■

Alıştırma 16.4 (Logaritmik Bir Fonksiyon). $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$ fonksiyonunun $(-1,2,1)$ noktasında $v = (-2,1,2)$ yönündeki yönlü türevini bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi ve türevlenebilirlik. f, açık $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kümesinde tanımlıdır ve $(-1,2,1)$ bu kümedir. Kısmi türevler

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,(2x, 2y, 2z)$$

bu kümede sürekli olduğundan f türevlenebilirdir.
Gradyan. $(-1,2,1)$'de $x^2+y^2+z^2 = 6$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\nabla f(-1,2,1) = \frac{1}{6}(-2,4,2) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Birimleştirme ve iç çarpım. $\| v \| = \sqrt{4+1+4} = 3$ ve $u = \frac{1}{3}(-2,1,2)$'dir.

$$D_u f(-1,2,1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

■

Alıştırma 16.5 (Açıortay Doğrultusunda Yönlü Türev). $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasında, birinci açıortay doğrultusundaki $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ yönünde yönlü türevini bulunuz.

Çözüm.
Gradyan. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ üzerinde $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$'dir ve

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

bu açık kümede süreklidir; f türevlenebilirdir. $\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
İç çarpım.

$$D_u f(1,1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Burada u, gradyanla aynı yöndedir; bu yüzden bulunan değer aynı zamanda $(1,1)$'deki en büyük yönlü türevdir: $\| \nabla f(1,1) \| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Alıştırma 16.6 (Üç Değişkende En Büyük ve En Küçük Yönlü Türev).

$$f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$$

fonksiyonunun $(1,1,1)$ noktasındaki yönlü türevlerinin en büyük ve en küçük değerlerini ve bu değerlerin alındığı yönleri bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi. f, $xy > 0$, $yz > 0$ ve $xz > 0$ olan noktalarda, yani üç koordinatın aynı işaretli olduğu noktalarda tanımlıdır; tanım kümesi $\{x,y,z > 0\}$ ile $\{x,y,z < 0\}$ açık kümelerinin birleşimidir ve $(1,1,1)$ birinci parçadadır.
Gradyan. $\ln(xy)$'nin x'e göre türevi $\frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$'tir; x iki terimde geçtiğinden $f_x = \frac{2}{x}$ olur. Benzer biçimde $f_y = \frac{2}{y}$ ve $f_z = \frac{2}{z}$'dir. Bu türevler açık kümede sürekli olduğundan f türevlenebilirdir ve

$$\nabla f(1,1,1) = (2,2,2),$$
$$\| \nabla f(1,1,1) \| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

Uç değerler. Teorem 16.2 gereği en büyük değer $2\sqrt{3}$'tür ve $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ yönünde alınır; en küçük değer $-2\sqrt{3}$'tür ve $u = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ yönünde alınır. ■

Alıştırma 16.7 (Yalnız Dört Yönde Yönlü Türev). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

olsun. $(0,0)$ noktasında hangi u birim vektörleri için $D_uf(0,0)$ yönlü türevinin var olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.
Fark oranı. $u=(u_1,u_2)$ birim vektör ve $h\neq 0$ olsun. $u_1^2+u_2^2=1$ olduğundan

$$f(hu)=\frac{h^2(u_1^2-u_2^2)}{h^2(u_1^2+u_2^2)}=u_1^2-u_2^2$$

olur; f, orijinden geçen her doğru üzerinde (orijin dışında) sabittir. Fark oranı

$$\frac{f(hu)-f(0,0)}{h}=\frac{u_1^2-u_2^2}{h}$$

olur.
İki durum. $u_1^2\neq u_2^2$ ise $h\to 0$ iken bu oranın mutlak değeri $+\infty$'a gider; yönlü türev yoktur. $u_1^2=u_2^2$ ise oran özdeş olarak 0'dır ve $D_uf(0,0)=0$ olur. $u_1^2+u_2^2=1$ ile birlikte $u_1^2=u_2^2=\dfrac{1}{2}$ bulunur. Demek ki yönlü türev yalnız

$$u=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

biçimindeki dört yönde, yani $y=x$ ve $y=-x$ doğrultularında vardır; bu doğrular üzerinde f özdeş olarak 0'dır.
Sonuçlar. Özel olarak $u=e_1$ ve $u=e_2$ için yönlü türev yoktur; $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevleri de yoktur. f orijinde sürekli değildir, çünkü orijin dışında x ekseni üzerinde 1, y ekseni üzerinde -1 değerini alır; dolayısıyla türevlenebilir de değildir (Sonuç 14.1). ■

Alıştırma 16.8 (Gradyanı Bilinen Fonksiyon). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ türevlenebilir olsun ve her (x,y) için $\nabla f(x,y)=(2xy,x^2)$ olsun. Bir C sabiti için $f(x,y)=x^2y+C$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Yardımcı fonksiyon. $g(x,y)=f(x,y)-x^2y$ diyelim. x^2y polinomu türevlenebilirdir ve türevlenebilir fonksiyonların farkı türevlenebilirdir (Teorem 15.5); g, $\mathbb{R}^2$ üzerinde türevlenebilirdir.
Türevi sıfırdır. $\nabla(x^2y)=(2xy,x^2)$ olduğundan her (x,y) için

$$\nabla g(x,y)=(2xy-2xy,x^2-x^2)=(0,0)$$

olur. g reel değerli olduğundan $J_g(x,y)$, $\nabla g(x,y)$'nin satır hâlidir; yani $Dg(x,y)=0$'dır.
Sabitlik. $\mathbb{R}^2$ açık ve konveks olduğundan Sonuç 16.2 gereği g sabittir: bir C için $g=C$, yani $f(x,y)=x^2y+C$'dir. ■

Alıştırma 16.9 (Bölgede Türevi Sıfır Olan Fonksiyon). $U\subseteq\mathbb{R}^n$ bir bölge (Tanım 5.4), $f:U\to\mathbb{R}^m$, U üzerinde türevlenebilir ve her $x\in U$ için $Df(x)=0$ olsun. f'nin U üzerinde sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İki küme. Bir $a\in U$ sabitleyelim ve

$$V=\{x\in U:f(x)=f(a)\},$$
$$W=\{x\in U:f(x)\neq f(a)\}$$

diyelim. $V\cap W=\varnothing$, $U=V\cup W$ ve $a\in V$'dir.
Yerel sabitlik. $x\in U$ olsun. U açık olduğundan $B(x,r)\subseteq U$ olacak biçimde bir $r>0$ vardır. Açık yuvar açık ve konvekstir (Teorem 2.2); f'nin $B(x,r)$'ye kısıtlanışı orada türevlenebilirdir ve türevi sıfırdır. Sonuç 16.2 gereği f, $B(x,r)$ üzerinde sabittir ve bu sabit $f(x)$'tir.

 CC BY-NC-SA 4.0

> ***V* ve *W* açıktır.** $x \in V$ ise $B(x,r)$ üzerinde $f = f(x) = f(a)$ olduğundan $B(x,r) \subseteq V$'dir. $x \in W$ ise $B(x,r)$ üzerinde $f = f(x) \neq f(a)$ olduğundan $B(x,r) \subseteq W$'dir. Her noktası bir yuvarıyla birlikte kümede kaldığından V ve W açıktır.
> **Bağlantılılık.** $W \neq \varnothing$ olsaydı V ve W açık kümeleri Tanım 5.3 içindeki üç koşulu sağlardı: $V \cap U \neq \varnothing$ ve $W \cap U \neq \varnothing$, $(V \cap U) \cap (W \cap U) = \varnothing$ ve $U \subseteq V \cup W$. Bu, U'nun bağlantısız olması demektir; oysa U bir bölgedir. Öyleyse $W = \varnothing$, yani $U = V$'dir ve her $x \in U$ için $f(x) = f(a)$ olur. ■

Bu bölümde fonksiyonun bir noktadan keyfi bir yönde ayrılırken nasıl değiştiğini ölçtük: türevlenebilir fonksiyonda bu değişim hızı gradyanın o yöndeki izdüşümüdür ve en büyük değerini gradyan yönünde alır. Ortalama değer teoremi ise iki nokta arasındaki değişimi, doğru parçası üzerindeki bir ara noktada gradyanla ifade etti. İspattaki fikir, $g(t) = f(a + t(b-a))$ fonksiyonuyla çok değişkenli bir problemi tek değişkenli bir probleme indirmekti. Aynı fikir, tek değişkende olduğu gibi yüksek mertebeden türevlerle de işler ve fonksiyonu bir nokta çevresinde polinomlarla yaklaştırmayı sağlar. Bunun için ikinci ve daha yüksek mertebeden diferansiyellere ihtiyaç vardır: Taylor Formülü.

 CC BY-NC-SA 4.0

17. Taylor Formülü

Tek değişkenli analizde Taylor formülü, bir fonksiyonu bir noktanın yakınında bir polinomla değiştirir ve yapılan hatayı bir üst mertebeden türevin ara bir noktadaki değeriyle tam olarak verir (bkz. Analiz 2). Formülün en alt basamağı ortalama değer teoremidir. Yönlü Türev ve Ortalama Değer Teoremi bölümünde bu basamağı $\mathbb{R}^n$'ye taşımıştık: a ile x'i birleştiren doğru parçası tanım kümesinin içinde kalıyorsa, bu doğru parçası üzerindeki bir c noktası için

$$f(x) - f(a) = \langle \nabla f(c), x - a \rangle$$

olur (Teorem 16.4).
Bu bölümde merdivenin üst basamaklarını çıkıyoruz. Yöntem ortalama değer teoremindekiyle aynıdır: f, a'dan x'e giden doğru parçası üzerine kısıtlanır, $g(t) = f\left(\, a + t(x-a) \,\right)$ tek değişkenli fonksiyonu elde edilir ve ona tek değişkenli Taylor formülü uygulanır. Asıl iş, g'nin yüksek mertebeden türevlerini f'nin kısmi türevleri cinsinden yazmaktır. Bu yüzden önce ikinci mertebeden kısmi türevleri bir araya getiren Hessian matrisini, ardından ikinci ve daha yüksek mertebeden toplam diferansiyelleri tanımlayacağız.
Bölümün sonunda elimizde üç araç olacak: kalanı bir ara noktada ya da bir integral olarak veren Taylor formülü, kalanın $h \to 0$ iken ne hızla söndüğünü söyleyen kestirim ve bir fonksiyonun Taylor serisiyle temsil edildiği durumları ayıran reel analitiklik kavramı. Bunlardan en sık kullanılacak olanı, gradyan ve Hessian matrisiyle yazılan ikinci mertebeden Taylor formülüdür.

17.1 Hessian Matrisi

Gradyan, birinci mertebeden kısmi türevleri bir vektörde toplar; ikinci mertebeden kısmi türevlerin doğal yeri ise bir kare matristir.
Bölüm boyunca $C^k(U)$ ve $C^\infty(U)$ sınıflarını (Tanım 13.3) sık kullanacağız. $f \in C^k(U)$ ise k. mertebeye kadar bütün kısmi türevler U üzerinde süreklidir ve karışık türevlerde türev alma sırası önemsizdir (Sonuç 13.2). Örneklerdeki polinomlar ve e^{xy}, $\sin(x-y)$ gibi temel fonksiyonlardan kurulan fonksiyonlar tanımlı oldukları açık kümelerde düzgündür, yani C^∞ sınıfındandır.

Tanım 17.1 (Hessian Matrisi). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin birinci mertebeden kısmi türevleri U üzerinde, ikinci mertebeden kısmi türevleri de a noktasında var olsun. (i, j) girdisi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$

olan $n \times n$ matrise f'nin a noktasındaki **Hessian matrisi** denir ve $H_f(a)$ ile gösterilir:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Matristeki bütün türevler a noktasında hesaplanır.

Yani Hessian matrisi, f'nin ikinci mertebeden bütün kısmi türevlerini tek bir tabloda toplar: köşegende $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ saf türevleri, köşegen dışında karışık türevler durur. j. sütun, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ fonksiyonunun gradyanıdır. İki değişkende, $f_{xy} = (f_x)_y$ gösterimiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{yx}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

olur. Karışık türevler eşit olduğunda matris simetriktir; aşağıdaki önerme bunun C^2 fonksiyonlarda her zaman gerçekleştiğini söyler.

Önerme 17.1 (Hessian Matrisinin Simetrisi). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme ve $f \in C^2(U)$ olsun. Her $a \in U$ için $H_f(a)$ simetrik bir matristir, yani $H_f(a)^T = H_f(a)$'dır. Ayrıca $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ gradyan fonksiyonunun a'daki Jacobi matrisi $J_{\nabla f}(a)$ ile gösterilirse*

$$H_f(a) = J_{\nabla f}(a)$$

olur.

> ***İspat.***
> ***Simetri.*** *$i \neq j$ olsun. $H_f(a)$'nın (i,j) girdisi önce x_j'ye sonra x_i'ye göre, (j,i) girdisi ise önce x_i'ye sonra x_j'ye göre türev alınarak bulunur. İkisi de aynı iki değişkene göre alınmış, yalnızca sırası farklı karışık türevlerdir. $f \in C^2(U)$ olduğundan Clairaut teoreminin n değişkenli biçimi (Sonuç 13.1) gereği bu iki türev eşittir.*
> ***Jacobi matrisiyle ilişki.*** *∇f fonksiyonunun bileşenleri $\varphi_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ fonksiyonlarıdır. Jacobi matrisinin tanımı (Tanım 15.2) gereği $J_{\nabla f}(a)$'nın (i,j) girdisi*
>
> $$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a)$$
>
> *sayısıdır; bu da $H_f(a)$'nın (j,i) girdisidir. Demek ki $J_{\nabla f}(a) = H_f(a)^T$'dir ve simetri gereği $H_f(a) = J_{\nabla f}(a)$ olur.* ■

İspatın ikinci kısmı süreklilik kullanmaz: ikinci mertebeden kısmi türevler var olduğu sürece $J_{\nabla f}(a)$, $H_f(a)$'nın devriğidir (transpozudur). Karışık türevleri eşit olmayan bir fonksiyonda (Örnek 13.6) iki matris birbirinin devriğidir ama birbirine eşit değildir; C^2 varsayımı bu farkı ortadan kaldırır.
Şimdiye kadar karşılaştığımız türev matrislerini yan yana koyalım.

Tablo 17.1: Birinci ve ikinci mertebeden türev matrisleri

Matris	Fonksiyon	Boyut	(i,j) girdisi
Gradyan $\nabla f(a)$	$f : U \to \mathbb{R}$	$1 \times n$	$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ (tek satır)
Jacobi $J_f(a)$	$f : U \to \mathbb{R}^m$	$m \times n$	$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$
Hessian $H_f(a)$	$f : U \to \mathbb{R}$	$n \times n$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a)$

Gradyan ve Jacobi matrisi birinci, Hessian matrisi ikinci mertebeden türevlerden oluşur. Reel değerli bir fonksiyonun Jacobi matrisi, gradyanını satır olarak yazmaktan ibarettir. Hessian matrisi yalnız reel değerli fonksiyonlar için tanımlıdır; vektör değerli bir fonksiyonda her bileşenin ayrı bir Hessian matrisi vardır.

Örnek 17.1 (Üç Bileşenli Bir Fonksiyonun Türev Matrisleri). $f(x,y) = (\sin x, xy, \cos y)$ fonksiyonunun Jacobi matrisini ve bileşenlerinin Hessian matrislerini bulunuz.

> **Çözüm.**
> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun bileşenleri $f_1(x,y) = \sin x$, $f_2(x,y) = xy$ ve $f_3(x,y) = \cos y$'dir. Jacobi matrisinin i. satırı f_i'nin gradyanıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ y & x \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Bu, 3×2 boyutlu bir matristir. Hessian matrisleri bileşen bileşen hesaplanır. $f_1 = \sin x$ için $(f_1)_{xx} = -\sin x$ olur, öbür ikinci türevler 0'dır. $f_2 = xy$ için $(f_2)_{xx} = (f_2)_{yy} = 0$ ve $(f_2)_{xy} = (f_2)_{yx} = 1$'dir. $f_3 = \cos y$ için $(f_3)_{yy} = -\cos y$ olur, öbürleri 0'dır:

$$H_{f_1}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}.$$

Bileşenler $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sınıfından olduğundan üç matrisin de simetrik çıkması Önerme 17.1 ile uyumludur. ■

Üç adımda Hessian matrisi

1. **Gradyanı yaz.** $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ hesaplanır.
2. **Gradyanın Jacobi matrisini kur.** i. satıra $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ fonksiyonunun gradyanı yazılır. $f \in C^2$ ise elde edilen matris H_f'dir (Önerme 17.1).
3. **Simetriyi sağlama olarak kullan.** Köşegene göre simetrik konumdaki girdiler aynı çıkmalıdır; çıkmıyorsa bir hesap hatası vardır.

Örnek 17.2 (Gradyanın Jacobi Matrisiyle Hessian). $f(x,y,z) = e^{xyz}$ fonksiyonunun Hessian matrisini $H_f = J_{\nabla f}$ eşitliğinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm.
Gradyan. Zincir kuralıyla

$$\nabla f(x,y,z) = \left(yz\,e^{xyz}, xz\,e^{xyz}, xy\,e^{xyz} \right)$$

bulunur. Bileşenleri $\varphi_1 = yz\,e^{xyz}$, $\varphi_2 = xz\,e^{xyz}$ ve $\varphi_3 = xy\,e^{xyz}$ ile gösterelim.
Gradyanın Jacobi matrisi. Birinci satır φ_1'in gradyanıdır; çarpım kuralıyla

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = yz \cdot yz\,e^{xyz} = y^2 z^2\,e^{xyz},$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = z\,e^{xyz} + yz \cdot xz\,e^{xyz} = z(1+xyz)\,e^{xyz},$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = y\,e^{xyz} + yz \cdot xy\,e^{xyz} = y(1+xyz)\,e^{xyz}$$

olur. Öbür iki satır, x, y ve z'nin rolleri değiştirilerek aynı biçimde bulunur:

$$\nabla \varphi_2 = \left(z(1+xyz), x^2 z^2, x(1+xyz) \right) e^{xyz},$$
$$\nabla \varphi_3 = \left(y(1+xyz), x(1+xyz), x^2 y^2 \right) e^{xyz}.$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ olduğundan Önerme 17.1 gereği $H_f = J_{\nabla f}$'dir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$H_f(x,y,z) = e^{xyz}\begin{pmatrix} y^2z^2 & z(1+xyz) & y(1+xyz) \\ z(1+xyz) & x^2z^2 & x(1+xyz) \\ y(1+xyz) & x(1+xyz) & x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

Sağlama. Matris simetriktir; örneğin $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ ile $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}$'in ikisi de $z(1+xyz)\,e^{xyz}$'dir. ■

17.2 İkinci Mertebeden Toplam Diferansiyel

Hessian matrisinin girdileri, toplam diferansiyel bir kez daha diferansiyellendiğinde ortaya çıkan katsayılardır.
Toplam diferansiyel (Tanım 14.2), f'nin a noktasındaki artışının lineer kısmıdır. Artımları bir $h = (h_1, \ldots, h_n)$ vektörünün bileşenleri olarak yazarsak

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

olur. Klasik yazımda h_i yerine dx_i konur ve $df = f_{x_1}\,dx_1 + \cdots + f_{x_n}\,dx_n$ yazılır. dx_i artımlarını sabit tutup df'yi bir kez daha diferansiyellediğimizde ne olduğunu önce iki değişkende görelim:

$$\begin{aligned} d(df) &= d\,(\, f_x\,dx + f_y\,dy\,) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\,(\, f_x\,dx + f_y\,dy\,)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,(\, f_x\,dx + f_y\,dy\,)\,dy \\ &= f_{xx}\,dx^2 + f_{yx}\,dx\,dy + f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2. \end{aligned}$$

Katsayılar tam olarak Hessian matrisinin girdileridir. Bu hesabı n değişkene genelleştiren tanım şudur.

Tanım 17.2 (İkinci Mertebeden Toplam Diferansiyel). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. f ile birinci mertebeden kısmi türevleri U üzerinde sürekli, birinci mertebeden kısmi türevleri de a noktasında türevlenebilir olsun (örneğin $f \in C^2(U)$). Her $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\, h_i\, h_j$$

sayısına f'nin a noktasındaki **ikinci mertebeden toplam diferansiyeli** denir. Klasik yazımda

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}\, dx_i\, dx_j$$

biçiminde yazılır.

Yani $d^2 f(a)(h)$, Hessian matrisinin belirlediği ikinci dereceden formdur. Bir matrisin girdileri H_{ij} ise $h^T H h = \sum_{i,j} H_{ij}\, h_i h_j$ olduğundan (h sütun, h^T satır vektörü olarak)

$$d^2 f(a)(h) = h^T H_f(a)\, h$$

olur. a sabitken $h \mapsto d^2 f(a)(h)$, $h_1, \ldots, h_n$ değişkenlerinin ikinci dereceden homojen bir polinomudur.
Tanım gerçekten "diferansiyelin diferansiyeli"dir: h sabit tutulup $\varphi(x) = df(x)(h) = \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, h_i$ fonksiyonu yazılırsa, bu fonksiyon a'da türevlenebilirdir ve

$$d\varphi(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a)\, h_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a)\, h_i\, h_j = d^2 f(a)(h)$$

bulunur; son eşitlikte i ile j'nin adları değiştirilmiştir. İki değişkende, $f \in C^2$ ise $f_{xy} = f_{yx}$ olduğundan

$$d^2 f(a)(h) = f_{xx}(a)\, h_1^2 + 2 f_{xy}(a)\, h_1 h_2 + f_{yy}(a)\, h_2^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; klasik yazımla $d^2f = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2$.
Örneğin $f(x,y,z) = e^{xyz}$ fonksiyonu için (Örnek 17.2) $(1,1,1)$ noktasında $1 + xyz = 2$ olur ve

$$H_f(1,1,1) = e\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$d^2f(1,1,1)(h) = e\,\left(\, h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 4h_1h_2 + 4h_1h_3 + 4h_2h_3 \,\right)$$

elde edilir; köşegen dışındaki her girdi, simetrik eşiyle birlikte iki kez sayıldığından karışık terimlerin katsayısı $2 \cdot 2e = 4e$ olur.

Örnek 17.3 (Bir Çarpımın İkinci Diferansiyeli). $f(x,y) = (xy)^2$ fonksiyonunun ikinci mertebeden toplam diferansiyelini bulunuz.

Çözüm.
$f(x,y) = x^2y^2$ bir polinomdur, dolayısıyla $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$'dir. Birinci mertebeden türevler $f_x = 2xy^2$ ve $f_y = 2x^2y$, ikinci mertebeden türevler

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y^2, \\ f_{xy} = f_{yx} &= 4xy, \\ f_{yy} &= 2x^2 \end{aligned}$$

olur. İki değişkenli formülle

$$d^2f = 2y^2\,dx^2 + 2\cdot 4xy\,dx\,dy + 2x^2\,dy^2 = 2y^2\,dx^2 + 8xy\,dx\,dy + 2x^2\,dy^2$$

bulunur. Aynı sonuç $df = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$ ifadesinin diferansiyeli alınarak da görülür:

$$d(df) = \left(\, 2y^2\,dx + 4xy\,dy \,\right)dx + \left(\, 4xy\,dx + 2x^2\,dy \,\right)dy.$$

Belirli bir noktada, örneğin $(1,-1)$'de, $H_f(1,-1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ve

$$d^2f(1,-1)(h) = 2h_1^2 - 8h_1h_2 + 2h_2^2$$

olur. ■

17.3 Yüksek Mertebeden Diferansiyeller

Diferansiyel alma işlemi art arda uygulanarak her mertebeden diferansiyel tanımlanır.

Tanım 17.3 (Yüksek Mertebeden Toplam Diferansiyel). $k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin $(k-1)$. mertebeye kadar bütün kısmi türevleri U üzerinde var ve sürekli, $(k-1)$. mertebeden kısmi türevleri de a noktasında türevlenebilir olsun (örneğin $f \in C^k(U)$). Her $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d^kf(a)(h) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a)\, h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

sayısına f'nin a noktasındaki ***k*. mertebeden toplam diferansiyeli** denir. Ayrıca $d^0f(a)(h) = f(a)$ kabul edilir. Klasik yazımda h yerine $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$ yazılır.

Yani $d^kf(a)(h)$, k. mertebeden bütün kısmi türevlerin, her birine karşılık gelen h bileşenlerinin çarpımıyla ağırlıklandırılmış toplamıdır; toplamda n^k terim vardır. $k = 1$ ve $k = 2$ için önceki tanımlar elde edilir: $d^1f = df$ ve d^2f. Bundan sonra kısalık için $\sum_{i_1,\ldots,i_k}$ yazısı, her indisin 1'den n'ye kadar değiştiği k katlı toplamı gösterecek.
Tanım özyinelidir: $d^kf = d\,\left(\, d^{k-1}f \,\right)$. Gerçekten h sabit tutulup $\varphi(x) = d^{k-1}f(x)(h)$ yazılırsa her j için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a) = \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}} \frac{\partial^k f}{\partial x_j\, \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}}(a)\, h_{i_1} \cdots h_{i_{k-1}}$$

olur. Bunu h_j ile çarpıp j üzerinden toplayınca $d\varphi(a)(h)$ bulunur. $(j, i_1, \dots, i_{k-1})$ indis dizisi bütün n^k değeri aldığından, bu diziye yeniden $(i_1, \dots, i_k)$ adı verilince toplam tam olarak $d^k f(a)(h)$ olur.
Tanımdaki toplamda h'nin k kopyası ayrı yuvalara girer. Bu kopyaları k ayrı vektörle değiştirirsek her bir değişkeninde lineer olan, yani k-lineer bir fonksiyon elde ederiz:

$$D^k f(a)\ \left(\ v^{(1)}, \dots, v^{(k)}\ \right) = \sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a)\, v_{i_1}^{(1)} \cdots v_{i_k}^{(k)}.$$

Buradan $d^k f(a)(h) = D^k f(a)(h, \dots, h)$ olur. $k = 1$'de $D^1 f(a)$ türevin kendisidir. $k = 2$'de $D^2 f(a)(u, v) = u^T H_f(a)\, v$, Hessian matrisinin belirlediği iki-lineer formdur ve $d^2 f(a)(h) = h^T H_f(a)\, h$ bunun köşegen değeridir.
Tanımdaki toplam bütün sıralı indis dizileri üzerinden alındığından, kısmi türevlerde hangi sıra kuralının kullanıldığı toplamı değiştirmez: bir diziyi ters çevirmek dizilerin kümesinde birebir bir eşleme olur ve $h_{i_1} \cdots h_{i_k}$ çarpımı bundan etkilenmez. $f \in C^k(U)$ ise daha fazlası doğrudur: k. mertebeye kadar her kısmi türev yalnızca hangi değişkene göre kaçar kez türev alındığına bağlıdır (Sonuç 13.2). Bu, $d^k f$'deki n^k terimin çoğunun birbirine eşit olması demektir ve iki değişkende $d^k f$'yi derli toplu yazmayı sağlar.

Önerme 17.2 (İki Değişkende Binom Biçimi). *$p \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık küme, $f \in C^p(U)$, $a \in U$ ve $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. O zaman*

$$d^p f(a)(h) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \frac{\partial^p f}{\partial x^j\, \partial y^{p-j}}(a)\, h_1^j\, h_2^{p-j}$$

olur.

> ***İspat.***
> *$x_1 = x$ ve $x_2 = y$ yazalım. Tanımdaki toplam, her i_r indisi 1 ya da 2 olan 2^p tane $(i_1, \dots, i_p)$ dizisi üzerinden alınır. Tam j tanesi 1, geri kalan $p - j$ tanesi 2 olan bir dizi düşünelim. Bu dizinin karşılık geldiği kısmi türevde x'e göre j kez, y'ye göre $p - j$ kez türev alınır. $f \in C^p(U)$ olduğundan türevlerin sırası önemsizdir (Sonuç 13.2) ve bu türev $\frac{\partial^p f}{\partial x^j\, \partial y^{p-j}}(a)$'ya eşittir. Aynı dizide $h_{i_1} \cdots h_{i_p} = h_1^j\, h_2^{p-j}$ olur. Tam j tanesi 1 olan dizilerin sayısı, p konumdan 1 yazılacak j tanesini seçme sayısıdır, yani $\binom{p}{j}$'dir (bkz. Analiz 1). Toplamı $j = 0, 1, \dots, p$ değerlerine göre gruplayınca iddia edilen eşitlik elde edilir.* ■

Formül, binom teoremiyle (bkz. Analiz 1) aynı katsayıları taşır. Bu yüzden simgesel olarak

$$d^p f(a)(h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(a)$$

yazılır: kuvvet binom teoremiyle açılır ve $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^{p-j}}{\partial y^{p-j}}$ çarpımı ilgili kısmi türev olarak okunur. İlk üç mertebe şöyledir (f_{xxy} gibi yazımlarda sıra önemsizdir):

$$\begin{aligned} df(a)(h) &= f_x\, h_1 + f_y\, h_2, \\ d^2 f(a)(h) &= f_{xx}\, h_1^2 + 2 f_{xy}\, h_1 h_2 + f_{yy}\, h_2^2, \\ d^3 f(a)(h) &= f_{xxx}\, h_1^3 + 3 f_{xxy}\, h_1^2 h_2 + 3 f_{xyy}\, h_1 h_2^2 + f_{yyy}\, h_2^3. \end{aligned}$$

Burada bütün türevler a noktasında hesaplanır. Aynı sayma, n değişkende çoklu indis gösterimiyle çok terimli katsayıları verir: x_i'ye göre p_i kez türev alınan $(p_1 + \cdots + p_n = p)$ dizilerin sayısı $\frac{p!}{p_1! \cdots p_n!}$ olduğundan

$$d^p f(a)(h) = \sum_{p_1 + \cdots + p_n = p} \frac{p!}{p_1! \cdots p_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}(a)\, h_1^{p_1} \cdots h_n^{p_n}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

17.4 Taylor Teoremi

Şimdi f'yi bir doğru parçası üzerine kısıtlayıp tek değişkenli Taylor formülünü uygulayacağız. İlk adım, kısıtlanmış fonksiyonun türevlerini hesaplamaktır.

Lemma 17.1 (Doğru Boyunca Türevler). *$k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^k(U)$, $a \in U$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ olsun. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve her $t \in I$ için $a + th \in U$ olsun. $g(t) = f(a + th)$ $(t \in I)$ ile tanımlanan $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde k kez türevlenebilirdir, $g^{(k)}$ süreklidir ve her $j = 0, 1, \ldots, k$ ile her $t \in I$ için*

$$g^{(j)}(t) = d^j f(a + th)(h)$$

olur.

İspat.
Bir adımlık türev. *$\varphi \in C^1(U)$ olsun ve $\psi(t) = \varphi(a + th)$ $(t \in I)$ diyelim. $\gamma(t) = a + th$ fonksiyonunun bileşenleri $a_i + th_i$ olduğundan γ türevlenebilirdir ve Jacobi matrisi $h_1, \ldots, h_n$ girdili sütun matrisidir. Kısmi türevleri sürekli olan φ, U'nun her noktasında türevlenebilirdir (Teorem 14.3) ve Jacobi matrisi $\nabla\varphi$ satırıdır. Zincir kuralı (Teorem 15.6) gereği $\psi = \varphi \circ \gamma$ türevlenebilirdir ve*

$$\psi'(t) = J_\varphi\big(\,\gamma(t)\,\big)\,J_\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(a + th)\,h_i \tag{1}$$

olur.
Tümevarım. *$j = 0$ için iddia $g(t) = f(a + th)$ eşitliğidir ve $d^0 f = f$ anlaşmasıyla doğrudur. İddia bir $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ için doğru olsun:*

$$g^{(j)}(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_j}}(a + th)\,h_{i_1}\cdots h_{i_j}.$$

Toplamdaki her $\varphi = \dfrac{\partial^j f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_j}}$ fonksiyonunun kısmi türevleri f'nin $(j+1)$. mertebeden kısmi türevleridir. $j + 1 \le k$ olduğundan bunlar süreklidir, yani $\varphi \in C^1(U)$'dur. $h_{i_1}\cdots h_{i_j}$ çarpanları t'ye bağlı olmayan sabitler olduğundan (1) her terime ayrı ayrı uygulanabilir:

$$g^{(j+1)}(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{j+1} f}{\partial x_i\,\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_j}}(a + th)\,h_i\,h_{i_1}\cdots h_{i_j}.$$

Çift toplam, $(i, i_1, \ldots, i_j)$ indis dizisinin aldığı bütün n^{j+1} değer üzerinden alınmıştır. Bu diziye $(i_1, \ldots, i_{j+1})$ adını verirsek toplam tam olarak $d^{j+1}f(a + th)(h)$ olur. İddia $j + 1$ için de doğrudur; tümevarım gereği g, I üzerinde k kez türevlenebilirdir ve formül her $j \le k$ için geçerlidir.
Süreklilik. *$g^{(k)}(t)$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(a + th)$ biçimindeki fonksiyonların sabitlerle çarpılıp toplanmasıyla elde edilir. Bunların her biri sürekli bir kısmi türev ile sürekli $t \mapsto a + th$ fonksiyonunun bileşkesidir, dolayısıyla süreklidir (Teorem 10.4). Sonlu bir toplam olan $g^{(k)}$ da süreklidir (Teorem 10.2).* ■

Lemmanın $t = 0$ hâli, diferansiyellerin geometrik anlamını verir: $d^j f(a)(h)$, f'nin a'dan geçen ve h doğrultusundaki doğru üzerindeki kısıtlamasının j. türevidir. u birim vektörse $g'(0) = \langle \nabla f(a), u\rangle$ yönlü türevdir (Tanım 16.1), $g''(0) = d^2 f(a)(u) = u^T H_f(a)\,u$ ise u yönündeki ikinci türevdir.
Tek değişkenli Taylor polinomunun (bkz. Analiz 2) çok değişkenli karşılığını da tanımlayalım.

Tanım 17.4 (Taylor Polinomu ve Kalan Terim). $k \ge 0$ bir tam sayı, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^k(U)$ ve $a \in U$ olsun.

$$T_k(x; a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\,d^j f(a)(x - a)$$

polinomuna f'nin a noktasındaki ***k*. mertebeden Taylor polinomu**, $x \in U$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$R_k(x;a) = f(x) - T_k(x;a)$$

farkına da ***k*. mertebeden kalan terim** denir.

Yani $T_k(x;a)$, $x_1, \ldots, x_n$ değişkenlerinin derecesi en çok k olan bir polinomudur: $d^j f(a)(x-a)$ terimi, $x-a$'nın bileşenlerinin j. dereceden homojen bir polinomudur. İlk iki basamak tanıdıktır. $T_0(x;a) = f(a)$ sabittir. $T_1(x;a) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle$ ise afin yaklaşımdır; iki değişkende $z = T_1(x,y;a)$ grafiği teğet düzlemdir (Tanım 14.4). T_2 buna Hessian matrisiyle yazılan $\frac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)\,(x-a)$ terimini ekler.

Teorem 17.1 (Taylor Teoremi). *$k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ boş olmayan açık küme ve $f \in C^k(U)$ olsun. $a, x \in U$ noktalarını birleştiren*

$$L(a;x) = \{a + t(x-a) : t \in [0,1]\}$$

doğru parçası U içinde kalsın. O zaman bu doğru parçası üzerinde öyle bir c noktası vardır ki

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\, d^j f(a)(x-a) + \frac{1}{k!}\, d^k f(c)(x-a)$$

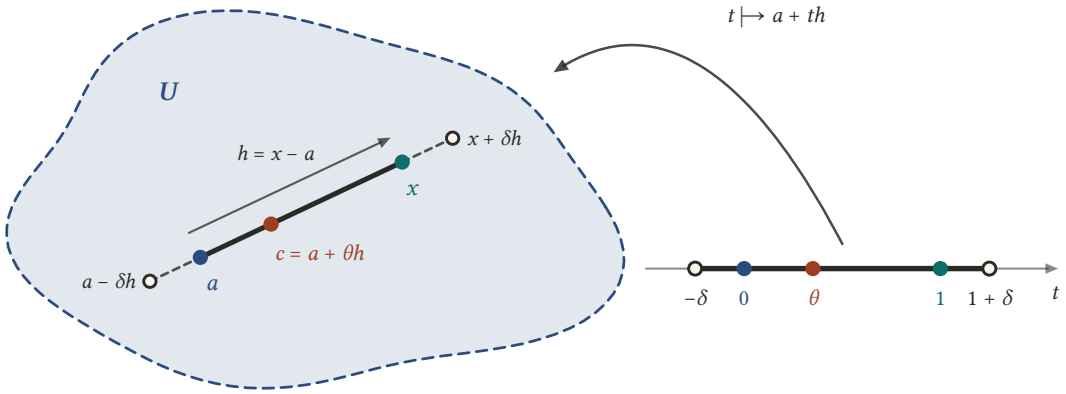
olur; burada

$$d^j f(a)(x-a) = \sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}(a)\,(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_j} - a_{i_j})$$

olarak yazılır. Başka bir deyişle $R_{k-1}(x;a) = \frac{1}{k!}\, d^k f(c)(x-a)$'dır. $x \neq a$ ise $c = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$ biçiminde seçilebilir.

> ***İspat.***
> *$h = x - a$ yazalım. $x = a$ ise $h = 0$'dır, $j \geq 1$ için $d^j f(a)(0) = 0$ olur ve eşitlik $c = a$ ile sağlanır. Bundan sonra $x \neq a$, yani $h \neq 0$ olsun.*
> ***Doğru parçasını biraz uzatmak.*** *$T = \{t \in \mathbb{R} : a + th \in U\}$ kümesi varsayım gereği $[0,1]$ aralığını içerir. T açıktır: $t_0 \in T$ ise U açık olduğundan bir $r > 0$ için $B(a + t_0 h, r) \subseteq U$ olur ve $\mid t - t_0 \mid < \frac{r}{\| h \|}$ olan her t için*
>
> $$\text{parallel}(a + th) - (a + t_0 h)\text{parallel} = \mid t - t_0 \mid \| h \| < r$$
>
> *olduğundan $t \in T$'dir. 0 ve 1 noktaları T'nin elemanı olduğundan öyle $\delta_0, \delta_1 > 0$ vardır ki $(-\delta_0, \delta_0) \subseteq T$ ve $(1-\delta_1, 1+\delta_1) \subseteq T$ olur. $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ alınırsa $I_\delta = (-\delta, 1+\delta) \subseteq T$ olur, yani her $t \in I_\delta$ için $a + th \in U$'dur.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.1: Açık U *kümesinde* a *ile* x*'i birleştiren* L(a; x) *doğru parçası ve* h = x − a. t ↦ a + th *eşlemesi* (−δ, 1 + δ) *aralığını, iki ucundan kesikli uzatılmış parçaya götürür ve parça hâlâ* U*'nun içindedir;* 0, θ *ve* 1 *sırasıyla* a, c = a + θh *ve* x *noktalarına gider (aynı renkler).*

Tek değişkene indirgeme. *$g(t) = f(a+th)$ $(t \in I_\delta)$ fonksiyonuna Lemma 17.1 uygulanabilir: g, I_δ üzerinde k kez türevlenebilirdir ve $g^{(j)}(t) = d^j f(a+th)(h)$'dir. Özel olarak $g, g', \ldots, g^{(k-1)}$ türevlenebilir oldukları için $[0,1]$ üzerinde süreklidir ve $g^{(k)}$ türevi $(0,1)$'in her noktasında vardır. Lagrange kalanlı tek değişkenli Taylor teoremi (bkz. Analiz 2), $n = k-1$, $x_0 = 0$ ve $x = 1$ ile uygulandığında öyle bir $\theta \in (0,1)$ verir ki*

$$g(1) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k)}(\theta)}{k!}$$

olur.
Geri çeviri. *$g(1) = f(a+h) = f(x)$, $g(0) = f(a)$, $j = 1, \ldots, k-1$ için $g^{(j)}(0) = d^j f(a)(h)$ ve $g^{(k)}(\theta) = d^k f(a+\theta h)(h)$'dir. $c = a + \theta h$ dersek $c \in L(a;x)$ olur ve*

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\, d^j f(a)(h) + \frac{1}{k!}\, d^k f(c)(h)$$

elde edilir. $h = x - a$ olduğundan bu, iddia edilen eşitliktir. ■

$L(a;x)$ kümesi, doğru parçası tanımındaki (Tanım 2.4) kümeyle aynıdır; parametrede t yerine $1-t$ yazmak kümeyi değiştirmez. U konveksse, örneğin bir yuvarsa (Teorem 2.2), doğru parçası koşulu her $a, x \in U$ için kendiliğinden sağlanır. Ara nokta c, hem x'e hem k'ya bağlıdır; teorem onun varlığını söyler, yerini söylemez.
$k = 1$ alalım. Toplam boştur ve formül

$$f(x) = f(a) + df(c)(x-a) = f(a) + \langle \nabla f(c), x-a \rangle$$

biçimini alır. Bu, ortalama değer teoremidir (Teorem 16.4). Demek ki **Taylor teoremi, ortalama değer teoreminin genel hâlidir**. Tek fark varsayımdadır: ortalama değer teoremi yalnızca türevlenebilirlik ister, burada $f \in C^1$ varsaydık.
İki değişkende Önerme 17.2 ile formül açıkça yazılabilir.

Sonuç 17.1 (İki Değişkenli Taylor Formülü). *$k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık küme, $f \in C^k(U)$, $r > 0$ ve $B\big((x_0,y_0), r\big) \subseteq U$ olsun. Her $(x,y) \in B\big((x_0,y_0), r\big)$ için, (x_0,y_0) ile (x,y)'yi birleştiren doğru parçası üzerinde öyle bir (c_1,c_2) noktası vardır ki $h_1 = x - x_0$ ve $h_2 = y - y_0$ olmak üzere*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p!} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \frac{\partial^p f}{\partial x^j \, \partial y^{p-j}}(x_0,y_0)\, h_1^j h_2^{p-j} + \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^j \, \partial y^{k-j}}(c_1,c_2)\, h_1^j h_2^{k-j}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Yuvar konveks olduğundan (Teorem 2.2) (x_0,y_0) ile (x,y)'yi birleştiren doğru parçası yuvarın, dolayısıyla U'nun içindedir. Teorem 17.1 bu doğru parçası üzerinde bir $c=(c_1,c_2)$ noktası verir. Formüldeki $d^p f(x_0,y_0)(h)$ $(1 \le p \le k-1)$ ve $d^k f(c)(h)$ diferansiyelleri Önerme 17.2 ile yazılınca iddia elde edilir.* ■

Uygulamada en sık $k=3$ hâli kullanılır:

$$f(x,y) = f + f_x\, h_1 + f_y\, h_2 + \frac{1}{2}\left(f_{xx}\, h_1^2 + 2f_{xy}\, h_1 h_2 + f_{yy}\, h_2^2 \right) + \frac{1}{6}\left(f_{xxx}\, h_1^3 + 3f_{xxy}\, h_1^2 h_2 + 3f_{xyy}\, h_1 h_2^2 + f_{yyy}\, h_2^3 \right).$$

Birinci satırdaki f ve türevler (x_0,y_0) noktasında, ikinci satırdaki üçüncü mertebeden türevler ise (c_1,c_2) noktasında hesaplanır.

> Dört adımda Taylor formülü
>
> 1. **Artımı yaz.** $h = x-a$; iki değişkende $h_1 = x-x_0$ ve $h_2 = y-y_0$ alınır. Doğru parçasının tanım kümesinde kaldığı denetlenir.
> 2. **Türevleri hesapla.** k. mertebeye kadar kısmi türevler bulunur. $f \in C^k$ olduğundan karışık türevlerden her grupta yalnızca biri hesaplanır. $(k-1)$. mertebeye kadar olanlar a noktasında değerlendirilir; k. mertebedekiler genel noktada bırakılır.
> 3. **Diferansiyelleri kur.** Her $d^j f(a)(h)$ binom biçimiyle (Önerme 17.2) yazılır.
> 4. **Formülü birleştir.** Terimler $\frac{1}{j!}$ katsayılarıyla toplanır ve kalan terimi $c = a+\theta h$ noktasında yazılır; istenirse h yerine $x-a$ konur.

Örnek 17.4 (Üçüncü Mertebeden Kalanlı Taylor Formülü). $f(x,y) = e^y \cos x$ fonksiyonunun $a = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ noktasındaki Taylor formülünü $k=3$ için yazınız.

> **Çözüm.**
> **Ne arıyoruz?** Teorem 17.1 $k=3$ ile uygulanınca f, iki parçanın toplamı olarak yazılır. Birinci parça a noktasında hesaplanan sıfırıncı, birinci ve ikinci mertebeden terimlerdir; bu, sayısal katsayılı bir polinomdur. İkinci parça ise üçüncü mertebeden kalan terimdir ve türevleri a'da değil, yeri bilinmeyen bir c noktasında hesaplanır; bu yüzden sayıya indirgenemez, c'ye bağlı bir ifade olarak kalır. Cevap bu iki parçanın toplamıdır.
> **Artım.** $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$'dir ve $\mathbb{R}^2$ konveks olduğundan formül her (x,y) için geçerlidir. $h_1 = x - \frac{\pi}{2}$ ve $h_2 = y$ yazalım.
> **Türevler.** $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ve $e^0 = 1$ olduğundan
>
> $$\begin{aligned} f &= e^y \cos x, & f(a) &= 0,\\ f_x &= -e^y \sin x, & f_x(a) &= -1,\\ f_y &= e^y \cos x, & f_y(a) &= 0,\\ f_{xx} &= -e^y \cos x, & f_{xx}(a) &= 0,\\ f_{xy} = f_{yx} &= -e^y \sin x, & f_{xy}(a) &= -1,\\ f_{yy} &= e^y \cos x, & f_{yy}(a) &= 0 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Kalan teriminde genel bir noktada gereken üçüncü mertebeden türevler, sıraları önemsiz olmak üzere

$$f_{xxx} = e^y \sin x, \quad f_{xxy} = -e^y \cos x,$$
$$f_{xyy} = -e^y \sin x,\ f_{yyy} = e^y \cos x$$

olur.

Diferansiyeller.

$$df(a)(h) = -h_1,$$
$$d^2 f(a)(h) = 0 \cdot h_1^2 + 2 \cdot (-1)\, h_1 h_2 + 0 \cdot h_2^2 = -2h_1 h_2.$$

$c = (c_1, c_2)$ noktasında üçüncü diferansiyel

$$d^3 f(c)(h) = e^{c_2} \sin c_1\, h_1^3 - 3e^{c_2} \cos c_1\, h_1^2 h_2 \\ -3e^{c_2} \sin c_1\, h_1 h_2^2 + e^{c_2} \cos c_1\, h_2^3$$

olur.

Formül. $\dfrac{1}{2!} d^2 f(a)(h) = -h_1 h_2$ olduğundan

$$e^y \cos x = -\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) y + R_2(x, y)$$

ve

$$R_2(x,y) = \frac{e^{c_2}}{6} \Big[\sin c_1 \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3 - 3 \cos c_1 \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 y \\ -3 \sin c_1 \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) y^2 + \cos c_1\, y^3 \Big]$$

bulunur; burada (c_1, c_2), $\Big(\dfrac{\pi}{2}, 0\Big)$ ile (x, y)'yi birleştiren doğru parçası üzerindedir.

Cevap. Sorulan Taylor formülü

$$e^y \cos x = \underbrace{-\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) y}_{T_2(x,y)} + R_2(x, y)$$

eşitliğidir. Yani f'nin a noktasındaki ikinci mertebeden Taylor polinomu $T_2(x, y) = -h_1 - h_1 h_2$'dir; sabit terim ve h_1^2, h_2, h_2^2 terimleri, katsayıları 0 çıktığı için görünmez. R_2 ise T_2'nin f'ye göre hatasıdır ve yukarıdaki köşeli parantezle verilir. (x, y) noktası a'ya yaklaştıkça $h_1, h_2 \to 0$ olur ve köşeli parantezdeki her terim h_1, h_2'de üçüncü dereceden olduğu için R_2, T_2'den çok daha hızlı küçülür. Bu yüzden a civarında $e^y \cos x \approx -h_1 - h_1 h_2$ yaklaşımı kullanılır.

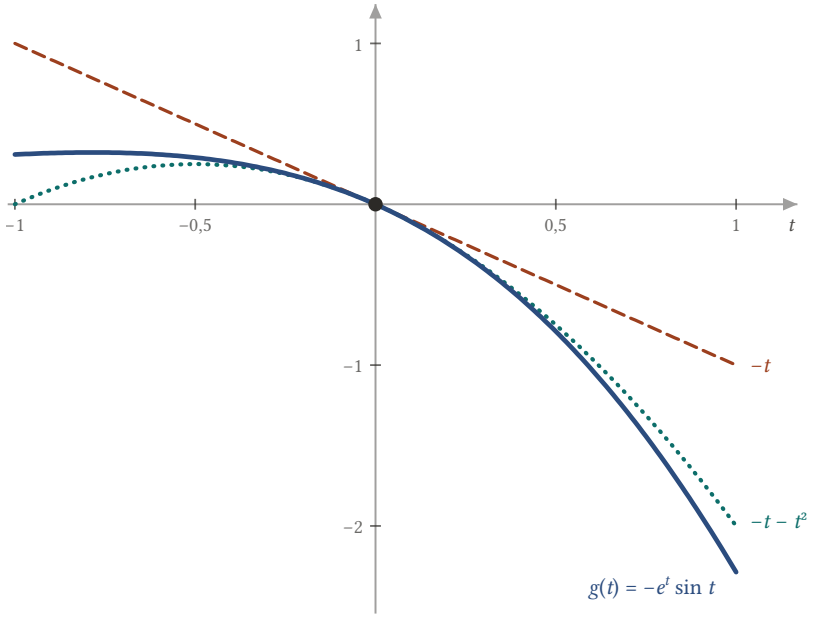
Sağlama. $\cos\Big(\dfrac{\pi}{2} + h_1\Big) = -\sin h_1$ olduğundan $f(x, y) = -e^{h_2} \sin h_1$'dir. Tek değişkenli açılımlar $e^{h_2} = 1 + h_2 + \dfrac{h_2^2}{2} + \cdots$ ve $\sin h_1 = h_1 - \dfrac{h_1^3}{6} + \cdots$ çarpılırsa derecesi en çok 2 olan terimler yalnızca $-h_1 - h_1 h_2$ olarak kalır. Bu, bulduğumuz T_2 ile aynıdır.

Formülü bir doğru boyunca okuyalım. $h = (t, t)$, yani $(x, y) = \Big(\dfrac{\pi}{2} + t, t\Big)$ alınırsa

$$f\Big(\frac{\pi}{2} + t, t\Big) = e^t \cos\Big(\frac{\pi}{2} + t\Big) = -e^t \sin t$$

olur ve ikinci mertebeden Taylor polinomu $-t - t^2$ değerini alır. Bu, $g(t) = -e^t \sin t$ fonksiyonunun 0'daki ikinci mertebeden Taylor polinomunun ta kendisidir; Lemma 17.1 tam olarak bunu söyler.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.2: $f(x, y) = e^y \cos x$ fonksiyonunun $(\pi/2 + t, t)$ doğrusu boyunca kesiti $g(t) = -e^t \sin t$ (düz), birinci mertebeden Taylor polinomu $-t$ (kesikli) ve ikinci mertebeden Taylor polinomu $-t - t^2$ (noktalı). İkinci mertebeden polinom $t = 0$ civarında eğriye çok daha iyi yapışır.

■

Örnek 17.5 (Bir Polinomun Taylor Açılımı). $f(x, y) = x^2 + 3x + 5y - y^2$ polinomunu $(x + 1)$ ve $(y - 1)$'in kuvvetleri cinsinden, yani $(-1, 1)$ noktası civarındaki Taylor açılımı biçiminde yazınız.

Çözüm.
$h_1 = x + 1$ ve $h_2 = y - 1$ yazalım; $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$'dir.
Türevler. $f(-1, 1) = 1 - 3 + 5 - 1 = 2$ ve

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 3,\ f_x(-1,1) = 1, \\ f_y &= 5 - 2y,\ f_y(-1,1) = 3, \\ f_{xx} &= 2, \qquad\qquad f_{xy} = 0, \\ f_{yy} &= -2 \end{aligned}$$

olur. İkinci türevler sabit olduğundan üçüncü mertebeden bütün kısmi türevler sıfırdır.
Kalan sıfırdır. Teorem 17.1, $k = 3$ ile kalan için $R_2 = \dfrac{1}{3!}\, d^3 f(c)(h) = 0$ verir. Dolayısıyla f, ikinci mertebeden Taylor polinomuna eşittir:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 + (x + 1) + 3(y - 1) + \frac{1}{2}\left[\, 2(x + 1)^2 - 2(y - 1)^2 \,\right] \\ &= 2 + (x + 1) + 3(y - 1) + (x + 1)^2 - (y - 1)^2. \end{aligned}$$

Sağlama. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ve $(y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1$ yerine yazılırsa

$$2 + x + 1 + 3y - 3 + x^2 + 2x + 1 - y^2 + 2y - 1 = x^2 + 3x + 5y - y^2$$

bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek genel bir gerçeği gösterir. Derecesi m olan bir polinomun $(m+1)$. mertebeden bütün kısmi türevleri sıfırdır. Taylor teoremi $k = m+1$ ile kalanın sıfır olduğunu verir; dolayısıyla bir polinom, her noktadaki m. mertebeden Taylor polinomuna eşittir. Bir polinomun Taylor açılımı, onu yeni bir merkeze göre yeniden yazmaktan ibarettir.

Örnek 17.6 (Üçüncü Mertebeden Taylor Polinomu). $f(x,y) = e^{xy} + xy$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktasındaki üçüncü mertebeden Taylor polinomunu yazınız.

Çözüm.
$h_1 = x$ ve $h_2 = y - 1$ yazalım; $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$'dir.
Türevler ve değerleri. $(0,1)$ noktasında $xy = 0$ ve $e^{xy} = 1$ olur.

$$\begin{aligned}
f &= e^{xy} + xy, & f(0,1) &= 1,\\
f_x &= y\,e^{xy} + y, & f_x(0,1) &= 2,\\
f_y &= x\,e^{xy} + x, & f_y(0,1) &= 0,\\
f_{xx} &= y^2 e^{xy}, & f_{xx}(0,1) &= 1,\\
f_{xy} &= (1+xy)\,e^{xy} + 1, & f_{xy}(0,1) &= 2,\\
f_{yy} &= x^2 e^{xy}, & f_{yy}(0,1) &= 0.
\end{aligned}$$

Üçüncü mertebeden türevler:

$$\begin{aligned}
f_{xxx} &= y^3 e^{xy}, & f_{xxx}(0,1) &= 1,\\
f_{xxy} &= (2y + xy^2)\,e^{xy}, & f_{xxy}(0,1) &= 2,\\
f_{xyy} &= (2x + x^2 y)\,e^{xy}, & f_{xyy}(0,1) &= 0,\\
f_{yyy} &= x^3 e^{xy}, & f_{yyy}(0,1) &= 0.
\end{aligned}$$

Polinom. $T_3 = f + df + \frac{1}{2!}d^2 f + \frac{1}{3!}d^3 f$ olduğundan (bütün diferansiyeller $(0,1)$ noktasında ve $h = (x, y-1)$ artımında)

$$\begin{aligned}
T_3(x,y) &= 1 + 2x + \frac{1}{2}\left[\, x^2 + 2\cdot 2\,x(y-1)\,\right] + \frac{1}{6}\left[\, x^3 + 3\cdot 2\,x^2(y-1)\,\right]\\
&= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + 2x(y-1) + \frac{x^3}{6} + x^2(y-1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Sağlama. $y = 1 + h_2$ ile $xy = x + xh_2$ olur. $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \cdots$ açılımında $u = x + xh_2$ koyup derecesi 3'ten büyük terimleri atınca

$$e^{xy} \approx 1 + x + xh_2 + \frac{x^2}{2} + x^2 h_2 + \frac{x^3}{6}$$

kalır. Buna $xy = x + xh_2$ eklenince aynı polinom çıkar. ■

17.5 Operatör Yazımıyla Taylor Polinomu

Binom biçiminden sonra (Önerme 17.2) diferansiyeli simgesel olarak bir türev operatörünün kuvveti diye yazmıştık. Bu yazım, Taylor polinomunu tek satırda vermenin en kısa yoludur ve hesapta hangi terimin nereden geldiğini akılda tutmayı çok kolaylaştırır. Yazımla Almanca bir kaynakta, A. Hinrichs'in *Analysis für Lehramt* ders notlarında (Vorlesungsnotizen 2016/17, Johannes Kepler Universität Linz) karşılaştık; orada Taylor polinomunun tanımı olarak kullanılır. Burada onu Tanım 17.4 ile aynı polinomu veren bir yazım olarak ispatlıyor, sonra üç ve daha çok değişkene genişletiyoruz.

Önerme 17.3 (Taylor Polinomunun Operatör Yazımı). *$k \geq 0$ bir tam sayı, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık küme, $f \in C^k(U)$ ve $a = (x_0, y_0) \in U$ olsun. f'nin a noktasındaki k. mertebeden Taylor polinomu*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T_k(x,y;a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x_0,y_0)$$

biçiminde yazılır. Burada j. kuvvet binom teoremiyle açılır: $x-x_0$ ve $y-y_0$ sabit çarpan gibi davranır, $\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^{j-i}}{\partial y^{j-i}}$ çarpımı $\frac{\partial^j f}{\partial x^i\,\partial y^{j-i}}$ kısmi türevi olarak okunur ve bu türev (x_0,y_0) noktasında hesaplanır. $j=0$ terimi $f(x_0,y_0)$'dır.

> ***İspat.***
> *$h=(h_1,h_2)=(x-x_0,y-y_0)$ yazalım. Taylor polinomunun tanımı (Tanım 17.4) gereği*
>
> $$T_k(x,y;a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\, d^j f(a)(h)$$
>
> *olur. $j=0$ için $d^0 f(a)(h) = f(a)$ anlaşması, operatörün sıfırıncı kuvvetinin $f(x_0,y_0)$ vermesiyle örtüşür. $1 \le j \le k$ için $f \in C^j(U)$ olduğundan Önerme 17.2 uygulanabilir:*
>
> $$d^j f(a)(h) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i\,\partial y^{j-i}}(a)\, h_1^i\, h_2^{j-i}.$$
>
> *Sağ yan, $\left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^j$ kuvvetinin binom teoremiyle açılıp yukarıdaki okuma kuralıyla f'ye uygulanmasından çıkan ifadenin ta kendisidir. Bu eşitlikler $j=0,1,\ldots,k$ için $\frac{1}{j!}$ ile çarpılıp toplanınca iddia elde edilir.* ■

Yani Taylor polinomunu yazmak için tek bir kalıp yeter: $h_1\partial_x + h_2\partial_y$ operatörünün $0,1,\ldots,k$. kuvvetleri f'ye uygulanır, (x_0,y_0)'da hesaplanır, $j!$'e bölünür ve toplanır. Burada $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ve $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ kısaltmalarını kullandık. Operatörün birinci kuvveti tanıdıktır: $(h_1\partial_x + h_2\partial_y)f(a) = \langle \nabla f(a), h\rangle$. Bu yüzden operatör kısaca $h\cdot\nabla$ diye de yazılır ve j. terim $\frac{1}{j!}(h\cdot\nabla)^j f(a)$ olur.

Kalan terim de aynı kalıba uyar. $k \ge 1$, $f \in C^k(U)$, $B(a,r) \subseteq U$ ve $(x,y) \in B(a,r)$ ise Sonuç 17.1, a ile (x,y)'yi birleştiren doğru parçası üzerindeki bir (c_1,c_2) noktası için

$$f(x,y) = T_{k-1}(x,y;a) + \frac{1}{k!}(h\cdot\nabla)^k f(c_1,c_2)$$

der; tek fark, son kuvvetteki türevlerin ara noktada hesaplanmasıdır.

> ⚠ Operatör yazımında üç dikkat noktası
>
> - **Üs, toplamın indisidir.** j. terimde operatörün j. kuvveti alınır. Bütün terimlere aynı üs yazılırsa toplam Taylor polinomu olmaktan çıkar.
> - **Sıranın önemsizliği için bir varsayım gerekir.** Kuvveti binom teoremiyle açmak, $\partial_x\partial_y$ ile $\partial_y\partial_x$'in aynı türevi verdiğini, yani karışık türevlerde sıranın önemsiz olduğunu kullanır; $f \in C^k(U)$ varsayımı bunu sağlar (Sonuç 13.2). Kısmi türevlerin yalnızca var olması yetmez: Örnek 13.6 içindeki fonksiyonda $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$'dır.
> - **Derece en çok *k*'dır.** T_k'nin derecesi k'dan küçük olabilir; örneğin f lineerse her $k \ge 1$ için $T_k = f$'dir. Bu yüzden "k. mertebeden Taylor polinomu" demek, "k. dereceden" demekten daha doğrudur.

Örnek 17.7 (Operatör Yazımıyla İkinci Mertebeden Polinom). $f(x,y) = x^y\,(x>0)$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasındaki ikinci mertebeden Taylor polinomunu operatör yazımıyla bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Operatör.** $U = \{(x,y) : x > 0\}$ açık bir yarı düzlemdir ve $x^y = e^{y\ln x}$ olduğundan $f \in C^\infty(U)$'dur. $h_1 = x-1$ ve $h_2 = y-1$ yazalım. Önerme 17.3 gereği

$$T_2 = f + (h_1\partial_x + h_2\partial_y)f + \frac{1}{2}(h_1\partial_x + h_2\partial_y)^2 f$$

olur; bütün türevler $(1,1)$'de hesaplanır. İkinci kuvvet binom teoremiyle

$$(h_1\partial_x + h_2\partial_y)^2 f = f_{xx}\,h_1^2 + 2f_{xy}\,h_1h_2 + f_{yy}\,h_2^2$$

biçiminde açılır.
Türevler. $f(1,1) = 1$'dir ve $\ln 1 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_x &= y\,x^{y-1}, & f_x(1,1) &= 1,\\ f_y &= x^y \ln x, & f_y(1,1) &= 0,\\ f_{xx} &= y(y-1)\,x^{y-2}, & f_{xx}(1,1) &= 0,\\ f_{xy} &= x^{y-1}(1 + y\ln x), & f_{xy}(1,1) &= 1,\\ f_{yy} &= x^y(\ln x)^2, & f_{yy}(1,1) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. f_{xy} için $f_x = y\,x^{y-1}$ çarpımının y'ye göre türevini aldık: $x^{y-1} + y\,x^{y-1}\ln x$.
Polinom. Değerler yerine yazılınca

$$T_2 = 1 + h_1 + \frac{1}{2}\cdot 2\,h_1h_2 = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$$

elde edilir. ■

Bu polinomla $1{,}02^{1{,}01}$ sayısına yaklaşabiliriz: $h_1 = 0{,}02$ ve $h_2 = 0{,}01$ ile $T_2 = 1 + 0{,}02 + 0{,}0002 = 1{,}0202$ bulunur. Gerçek değer $1{,}020202\ldots$ olduğundan hata yaklaşık $2\cdot 10^{-6}$'dır.
Operatör yazımının asıl kolaylığı, değişken sayısı arttığında ortaya çıkar. $U \subseteq \mathbb{R}^3$ açık küme, $f \in C^k(U)$, $a = (x_0, y_0, z_0) \in U$ ve $h = (h_1, h_2, h_3)$ olsun; burada $h_1 = x - x_0$, $h_2 = y - y_0$ ve $h_3 = z - z_0$'dır. Aynı akıl yürütme, bu kez binom yerine çok terimli açılımla

$$T_k(x,y,z;a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\big(\,h_1\partial_x + h_2\partial_y + h_3\partial_z\big)^j f(a)$$

verir; bunu birazdan Önerme 17.4 ile n değişkende ispatlayacağız. İlk üç kuvvet şöyle açılır (bütün türevler a'da hesaplanır):

$$\begin{aligned} (h\cdot\nabla)f &= f_x\,h_1 + f_y\,h_2 + f_z\,h_3,\\ (h\cdot\nabla)^2 f &= f_{xx}\,h_1^2 + f_{yy}\,h_2^2 + f_{zz}\,h_3^2\\ &\quad + 2f_{xy}\,h_1h_2 + 2f_{xz}\,h_1h_3 + 2f_{yz}\,h_2h_3,\\ (h\cdot\nabla)^3 f &= f_{xxx}\,h_1^3 + f_{yyy}\,h_2^3 + f_{zzz}\,h_3^3\\ &\quad + 3f_{xxy}\,h_1^2h_2 + 3f_{xxz}\,h_1^2h_3 + 3f_{xyy}\,h_1h_2^2\\ &\quad + 3f_{yyz}\,h_2^2h_3 + 3f_{xzz}\,h_1h_3^2 + 3f_{yzz}\,h_2h_3^2\\ &\quad + 6f_{xyz}\,h_1h_2h_3. \end{aligned}$$

Katsayılar çok terimli katsayılardır: x'e göre p, y'ye göre q, z'ye göre r kez türev alınan terimin katsayısı $\dfrac{j!}{p!\,q!\,r!}$'dir. Örneğin f_{xyz} teriminde $\dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$, f_{xxy} teriminde $\dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$ olur. Bu katsayılar önlerindeki $\dfrac{1}{j!}$ ile sadeleşir; böylece her terimin katsayısı yalnızca hangi değişkene göre kaç kez türev alındığına bağlı kalır. Bunu her boyutta kısaca yazmak için çoklu indis gösterimini kullanırız.

Önerme 17.4 (Operatör ve Çoklu İndis Yazımı). *$k \geq 0$ bir tam sayı, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^k(U)$, $a \in U$, $x \in U$ ve $h = x - a$ olsun. Negatif olmayan tam sayılardan oluşan bir $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dizisi (çoklu indis) için*

$$|\,\alpha\,| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!,$$
$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}, \qquad \partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\,\alpha\,|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

yazalım ($\alpha_i = 0$ olan değişkene göre türev alınmaz). O zaman

$$T_k(x;a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\big(\,h_1\partial_1 + \cdots + h_n\partial_n\big)^j f(a)$$
$$= \sum_{|\,\alpha\,|\le k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}\, h^\alpha$$

olur. Burada $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$'dir ve ortadaki kuvvet çok terimli açılımla açılıp Önerme 17.3'deki gibi okunur.

İspat.
Diferansiyelin açılımı. *$1 \le j \le k$ olsun. Tanımdaki n^j terimli toplamda (Tanım 17.3) bir $(i_1, \ldots, i_j)$ indis dizisine, her i değeri dizide kaç kez geçiyorsa onu sayan α çoklu indisini eşleyelim; $|\,\alpha\,| = j$ olur. $f \in C^j(U)$ olduğundan kısmi türevlerde sıra önemsizdir (Sonuç 13.2), dolayısıyla aynı α'ya eşlenen her dizi aynı $\partial^\alpha f(a)$ türevini ve aynı $h_{i_1}\cdots h_{i_j} = h^\alpha$ çarpımını verir. Bu dizilerin sayısı, j konuma α_1 tane 1, α_2 tane 2, ..., α_n tane n yerleştirme sayısıdır. Önce j konumdan α_1 tanesi $\binom{j}{\alpha_1}$ yolla, sonra kalan $j-\alpha_1$ konumdan α_2 tanesi $\binom{j-\alpha_1}{\alpha_2}$ yolla seçilir ve böyle devam edilir. Çarpımda ardışık faktöriyeller sadeleşir:*

$$\frac{j!}{\alpha_1!\,(j-\alpha_1)!}\cdot\frac{(j-\alpha_1)!}{\alpha_2!\,(j-\alpha_1-\alpha_2)!}\cdots = \frac{j!}{\alpha!}.$$

Toplamı α'lara göre gruplayınca

$$d^j f(a)(h) = \sum_{|\,\alpha\,|=j} \frac{j!}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(a)\, h^\alpha$$

bulunur. Sağ yan, $\big(\,h_1\partial_1 + \cdots + h_n\partial_n\big)^j$ kuvvetinin çok terimli açılımının f'ye uygulanıp a'da hesaplanmış hâlidir; bu birinci eşitliği verir.
Sadeleştirme. *Her iki yanı $j!$'e bölünce $\dfrac{1}{j!}\,d^j f(a)(h) = \displaystyle\sum_{|\,\alpha\,|=j} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}\,h^\alpha$ olur. $j=0$ için tek çoklu indis $\alpha = (0,\ldots,0)$'dır ve terim $f(a)$'dır. Taylor polinomunun tanımında (Tanım 17.4) $j = 0, 1, \ldots, k$ üzerinden toplayınca, $|\,\alpha\,| \le k$ olan bütün çoklu indisler tam bir kez sayılır ve ikinci eşitlik elde edilir.* ■

Üç değişkende $\alpha = (p,q,r)$ yazılırsa çoklu indis yazımı

$$T_k(x,y,z;a) = \sum_{p+q+r\le k} \frac{1}{p!\,q!\,r!}\,\frac{\partial^{p+q+r} f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}(a)\, h_1^p\, h_2^q\, h_3^r$$

olur. İki değişkende aynı şey $\displaystyle\sum_{p+q\le k} \frac{1}{p!\,q!}\,\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\,\partial y^q}(a)\, h_1^p\, h_2^q$ demektir. Operatör yazımı kalıbı akılda tutmayı, çoklu indis yazımı ise hesabı kolaylaştırır: türevi bulunan her terim, yalnızca kendi faktöriyellerine bölünür.

> **Üç adımda çoklu indis yöntemi**
>
> 1. **Artımı yaz.** $h = x - a$; varsayım olarak f'nin a'yı içeren açık bir kümede C^k olduğu denetlenir.
> 2. **Türev tablosu kur.** $|\,\alpha\,| \le k$ olan her çoklu indis için $\partial^\alpha f(a)$ hesaplanır. f değişkenleri ayrık çarpanların çarpımıysa türev de çarpanların türevlerinin çarpımıdır; sıfır çıkan türevler elenir.
> 3. **Topla.** Sıfırdan farklı her türev $\alpha!$'e bölünür ve h^α ile çarpılır.

Örnek 17.8 (Üç Değişkende İkinci Mertebeden Polinom). $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ fonksiyonunun $a = (2,1,2)$ noktasındaki ikinci mertebeden Taylor polinomunu operatör yazımıyla bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Artım. $f, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ açık kümesinde C^∞ sınıfındadır ve a bu kümededir. $h = (x-2, y-1, z-2)$ ve $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ yazalım; a'da $r = 3$'tür.
Birinci türevler. $f_x = \dfrac{x}{r}$, $f_y = \dfrac{y}{r}$ ve $f_z = \dfrac{z}{r}$ olduğundan

$$\nabla f(a) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

olur.
İkinci türevler. $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$ olduğundan bölüm kuralı

$$f_{xx} = \frac{r - x\cdot\frac{x}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \qquad f_{xy} = -\frac{xy}{r^3}$$

verir; öbürleri değişkenlerin rolleri değiştirilerek yazılır. $r^3 = 27$ ile

$$f_{xx}(a) = \frac{5}{27}, \quad f_{yy}(a) = \frac{8}{27}, \quad f_{zz}(a) = \frac{5}{27},$$
$$f_{xy}(a) = -\frac{2}{27}, f_{xz}(a) = -\frac{4}{27}, f_{yz}(a) = -\frac{2}{27}$$

bulunur. Örneğin $f_{xx}(a) = \dfrac{9-4}{27}$ ve $f_{xz}(a) = -\dfrac{2\cdot 2}{27}$'dir.
Operatörün kuvvetleri. Yukarıdaki üç değişkenli açılımla

$$(h\cdot\nabla)f(a) = \frac{2h_1 + h_2 + 2h_3}{3}$$

ve

$$(h\cdot\nabla)^2 f(a) = \frac{1}{27}\,\big(\,5h_1^2 + 8h_2^2 + 5h_3^2 \\ -4h_1h_2 - 8h_1h_3 - 4h_2h_3\,\big)$$

olur; karışık terimlerin katsayıları $2f_{xy}(a) = -\dfrac{4}{27}$ gibi hesaplanır.
Polinom. T_2, $f(a)$, $(h\cdot\nabla)f(a)$ ve $\dfrac{1}{2}(h\cdot\nabla)^2 f(a)$ terimlerinin toplamı olduğundan

$$T_2 = 3 + \frac{2h_1 + h_2 + 2h_3}{3} \\ + \frac{5h_1^2 + 8h_2^2 + 5h_3^2 - 4h_1h_2 - 8h_1h_3 - 4h_2h_3}{54}$$

bulunur; burada $h_1 = x-2$, $h_2 = y-1$ ve $h_3 = z-2$'dir. ■

Polinomu sayısal bir yaklaşımda kullanalım: $\sqrt{2{,}01^2 + 0{,}98^2 + 2{,}02^2}$ için $h_1 = 0{,}01$, $h_2 = -0{,}02$ ve $h_3 = 0{,}02$ alınır. Birinci mertebe terim $\dfrac{0{,}04}{3} \approx 0{,}013333$, ikinci mertebe terim $\dfrac{0{,}0065}{54} \approx 0{,}000120$ olur ve $T_2 \approx 3{,}013454$ bulunur. Gerçek değer $\sqrt{9{,}0809} \approx 3{,}013453$'tür; hata yaklaşık $5\cdot 10^{-7}$'dir.

Örnek 17.9 (Çoklu İndisle Üçüncü Mertebeden Polinom). $f(x,y,z) = e^x \sin y \cos z$ fonksiyonunun başlangıç noktasındaki üçüncü mertebeden Taylor polinomunu çoklu indis yazımıyla bulunuz.

Çözüm.
Türevlerin biçimi. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $a = 0$ ve $h = (x,y,z)$'dir. Her değişken ayrı bir çarpanda olduğundan $\alpha = (p,q,r)$ için

$$\partial^\alpha f = e^x \cdot \frac{d^q \sin y}{dy^q} \cdot \frac{d^r \cos z}{dz^r}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Başlangıçta $e^0 = 1$'dir. sin'in 0. ile 3. türevleri 0'da sırasıyla $0, 1, 0, -1$, cos'unkiler ise $1, 0, -1, 0$ değerlerini alır.
Sıfırdan farklı türevler. $\partial^\alpha f(0) \neq 0$ olması için q tek, r çift olmalıdır. $p+q+r \leq 3$ koşuluyla geriye beş çoklu indis kalır:

$\alpha = (p,q,r)$	$\partial^\alpha f(0)$	$\alpha!$	Terim
$(0,1,0)$	1	1	y
$(1,1,0)$	1	1	xy
$(2,1,0)$	1	2	$\dfrac{x^2 y}{2}$
$(0,1,2)$	-1	2	$-\dfrac{yz^2}{2}$
$(0,3,0)$	-1	6	$-\dfrac{y^3}{6}$

Polinom. Önerme 17.4 gereği

$$T_3(x,y,z;0) = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{yz^2}{2}$$

bulunur.
Sağlama. e^x, $\sin y$ ve $\cos z$'nin tek değişkenli Taylor polinomları $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$, $y - \dfrac{y^3}{6}$ ve $1 - \dfrac{z^2}{2}$'dir. Bunları çarpıp derecesi 3'ü aşan terimleri atınca aynı polinom çıkar. ■

17.6 Kalan Terim: İntegral Biçimi ve Mertebesi

Taylor teoremindeki kalan, ara bir noktadaki türevle verilir. Kalanı bir integral olarak tam yazmak ve $h \to 0$ iken ne hızla söndüğünü bilmek de işe yarar.

Teorem 17.2 (İntegral Biçimli Kalan). *Taylor teoreminin (Teorem 17.1) varsayımları altında $h = x - a$ olmak üzere*

$$R_{k-1}(x;a) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, d^k f(a+th)(h)\, dt$$

olur. Açıkça yazılırsa

$$R_{k-1}(x;a) = \sum_{i_1,\dots,i_k} h_{i_1}\cdots h_{i_k} \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots \partial x_{i_k}}(a+th)\, dt.$$

İspat.
Tek değişkenli özdeşlik. *Önce şunu gösterelim: $m \in \mathbb{N}$, I bir açık aralık, $[0,1] \subseteq I$ ve $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu m kez türevlenebilir, $g^{(m)}$ sürekli olsun. O zaman*

$$g(1) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, g^{(m)}(t)\, dt \tag{2}$$

olur. m üzerinden tümevarım yapalım. $m = 1$ için (2), $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt$ eşitliğidir; g' sürekli olduğundan Newton–Leibniz formülünden çıkar (bkz. Analiz 2).
Özdeşlik bir m için doğru olsun ve g, $m+1$ kez türevlenebilir, $g^{(m+1)}$ sürekli olsun. $g^{(m)}$ türevlenebilir olduğundan süreklidir; dolayısıyla (2) m için uygulanabilir. $u(t) = g^{(m)}(t)$ ve $v(t) = -\dfrac{(1-t)^m}{m!}$ alalım;

 CC BY-NC-SA 4.0

$v'(t) = \dfrac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!}$ olur. u ve v, $[0,1]$ üzerinde türevlenebilir ve türevleri süreklidir. Belirli integralde kısmi integrasyon (bkz. Analiz 2) ile

$$\int_0^1 v'(t)\,u(t)\,dt = \Big[\,v(t)\,u(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 v(t)\,u'(t)\,dt$$
$$= \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}\,g^{(m+1)}(t)\,dt$$

bulunur; çünkü $v(1)=0$ ve $v(0) = -\dfrac{1}{m!}$'dir. Sol yan, (2)'deki integraldir. Bunu (2)'de yerine yazınca toplama $j=m$ terimi eklenir ve (2), $m+1$ için elde edilir.
Uygulama. *Teorem 17.1 ispatındaki gibi bir $\delta>0$ için her $t \in I_\delta = (-\delta, 1+\delta)$ noktasında $a+th \in U$ olur ($h=0$ ise her t için). $g(t) = f(a+th)$ fonksiyonu Lemma 17.1 gereği I_δ üzerinde k kez türevlenebilir, $g^{(k)}$ süreklidir ve $g^{(j)}(t) = d^j f(a+th)(h)$'dir. (2), $m=k$ ile uygulanırsa*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}\,d^j f(a)(h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,d^k f(a+th)(h)\,dt$$

olur. Toplam $T_{k-1}(x;a)$ olduğundan integral $R_{k-1}(x;a)$'ya eşittir. Açık biçim, $d^k f(a+th)(h)$ sonlu toplamının terim terim integrallenmesiyle elde edilir. ■

İntegral biçiminden Lagrange biçimine geri dönmek kolaydır. $w(t) = \dfrac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}$ ağırlığı $[0,1]$ üzerinde negatif değildir ve $\int_0^1 w(t)\,dt = \dfrac{1}{k!}$'dir. $G(t) = d^k f(a+th)(h)$ ise $[0,1]$ üzerinde süreklidir. İntegraller için birinci ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) integrali, G'nin en küçük ve en büyük değeri arasındaki bir μ sayısı için $\mu \int_0^1 w = \dfrac{\mu}{k!}$ biçiminde yazar. Ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği bir $\theta \in [0,1]$ için $\mu = G(\theta)$ olur ve yeniden $R_{k-1}(x;a) = \dfrac{1}{k!}\,d^k f(a+\theta h)(h)$ bulunur.
Kalanın hangi hızla söndüğünü şimdi inceleyelim. Tek değişkende Peano kalanı bu soruyu yanıtlıyordu (bkz. Analiz 2).

Teorem 17.3 (Kalan Teriminin Mertebesi). *$k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^k(U)$ ve $a \in U$ olsun.*
(a) *Öyle $r>0$ ve $M \geq 0$ sayıları vardır ki $\| h \| \leq r$ olan her h için $| R_{k-1}(a+h;a) | \leq M \| h \|^k$ olur. Özel olarak*

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_{k-1}(a+h;a)}{\| h \|^{k-1}} = 0.$$

(b) *Daha güçlü olarak*

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_k(a+h;a)}{\| h \|^k} = 0.$$

İspat.
Hazırlık. *U açık olduğundan bir $\rho>0$ için $B(a,\rho) \subseteq U$'dur. $r = \dfrac{\rho}{2}$ ve $K = B[a,r]$ alalım; $K \subseteq B(a,\rho) \subseteq U$ olur. K kapalı ve sınırlıdır, dolayısıyla kompakttır (Teorem 5.5). k. mertebeden her kısmi türev K üzerinde sürekli olduğundan orada sınırlıdır (Teorem 11.3). Bu türevler sonlu sayıda (n^k tane) olduğundan, K üzerinde hepsinin mutlak değerini aşmayan bir M_k sayısı vardır. $\| h \| \leq r$ ise $a+h \in K$ olur ve K konveks olduğundan (Teorem 2.2) $L(a;a+h) \subseteq K \subseteq U$'dur.*
Temel kestirim. *Her $y \in K$ için*

$$| d^k f(y)(h) | \leq \sum_{i_1,\ldots,i_k} M_k\,| h_{i_1} | \cdots | h_{i_k} | = M_k \left(| h_1 | + \cdots + | h_n | \right)^k = M_k \| h \|_1^k$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Ortadaki eşitlik, k tane özdeş $\left(\mid h_1 \mid + \cdots + \mid h_n \mid \right)$ toplamının çarpımı açıldığında her $(i_1, \ldots, i_k)$ dizisinin tam bir kez görünmesinden gelir. Normların denkliği (Teorem 1.5) $\| h \|_1 \leq \sqrt{n} \| h \|$ verdiğinden

$$\mid d^k f(y)(h) \mid \leq M_k \, n^{k/2} \| h \|^k$$

bulunur.
(a) *$\| h \| \leq r$ olsun. Teorem 17.1, $L(a; a+h) \subseteq K$ üzerinde bir c noktası için $R_{k-1}(a+h; a) = \frac{1}{k!} d^k f(c)(h)$ verir. Temel kestirimle*

$$\mid R_{k-1}(a+h; a) \mid \leq \frac{M_k \, n^{k/2}}{k!} \| h \|^k$$

olur; $M = \frac{M_k \, n^{k/2}}{k!}$ almak yeter. $0 < \| h \| \leq r$ için buradan $\frac{\mid R_{k-1}(a+h; a) \mid}{\| h \|^{k-1}} \leq M \| h \|$ çıkar ve sağ yan $h \to 0$ iken 0'a gittiğinden sıkıştırma teoremi (Teorem 8.5) limitin 0 olduğunu verir.
(b) *$0 < \| h \| \leq r$ olsun ve c_h, (a) şıkkındaki gibi $L(a; a+h)$ üzerinde seçilen nokta olsun. $R_k = R_{k-1} - \frac{1}{k!} d^k f(a)(h)$ olduğundan*

$$R_k(a+h; a) = \frac{1}{k!} \left(d^k f(c_h)(h) - d^k f(a)(h) \right)$$

olur. Her i için $\mid h_i \mid \leq \| h \|$ olduğundan

$$\mid R_k(a+h; a) \mid \leq \frac{\| h \|^k}{k!} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(c_h) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) \right|$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ verilsin. k. mertebeden kısmi türevlerin her biri a'da sürekli olduğundan öyle bir $\eta \in (0, r]$ vardır ki $\| y - a \| < \eta$ olduğunda sağdaki toplamın n^k teriminin her biri $\frac{\varepsilon \, k!}{n^k}$'dan küçük olur. $c_h = a + \theta h$ $(0 \leq \theta \leq 1)$ olduğundan $\| c_h - a \| \leq \| h \|$'dir. Dolayısıyla $0 < \| h \| < \eta$ için

$$\frac{\mid R_k(a+h; a) \mid}{\| h \|^k} < \frac{1}{k!} \cdot n^k \cdot \frac{\varepsilon \, k!}{n^k} = \varepsilon$$

olur. Bu, istenen limittir. ■

Yani C^k bir fonksiyonda $(k-1)$. mertebeden Taylor polinomunun hatası $\| h \|^k$ ile orantılı bir sınırı aşmaz, k. mertebeden Taylor polinomunun hatası ise $\| h \|^k$'dan da hızlı söner. $k = 1$ hâlinde ikinci limit $\frac{f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h \rangle}{\| h \|} \to 0$ demektir; bu, C^1 fonksiyonların türevlenebilir olduğunu söyleyen Teorem 14.3 ile uyumludur (ispatımız o teoremi kullandığından bağımsız bir kanıt değildir). $k = 2$ hâli bir sonraki kesimin konusudur.

17.7 İkinci Mertebeden Taylor Formülü

Yerel ekstremum problemlerinde en çok kullanılan hâl $k = 2$'dir. Bu hâlde birinci mertebe terimi gradyanla, ikinci mertebe terimi Hessian matrisiyle yazılır.

Sonuç 17.2 (İkinci Mertebeden Taylor Formülü). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme ve $f \in C^2(U)$ olsun. $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ ve $\{x + th : t \in [0,1]\} \subseteq U$ olsun. O zaman öyle bir $\theta \in (0,1)$ vardır ki*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(x + \theta h) \, h \\ &= f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(x + \theta h)(h) \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; burada h^T satır, h sütun vektörüdür. Ayrıca

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2}\, h^T H_f(x)\, h + R_2(x+h;x)$$

yazılırsa $h \to 0$ iken $\dfrac{R_2(x+h;x)}{\| h \|^2} \to 0$ olur.

> ***İspat.***
> *$h = 0$ ise iki yan da $f(x)$'tir ve her θ uygundur. $h \neq 0$ olsun. Teorem 17.1, $k = 2$ ile $a = x$ ve $x + h$ noktalarına uygulanırsa bir $\theta \in (0,1)$ için*
>
> $$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2}\, d^2 f(x+\theta h)(h)$$
>
> *verir. $df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$ ve her $y \in U$ için $d^2 f(y)(h) = h^T H_f(y)\, h$ olduğundan birinci iddia çıkar. İkinci iddia, Teorem 17.3 içindeki (b) şıkkının $k = 2$ ve $a = x$ ile yazılmış biçimidir; $T_2(x+h;x)$ tam olarak sağ yandaki ilk üç terimdir.* ■

İki değişkende, $h = (h_1, h_2)$ ile ikinci mertebe terimi

$$\frac{1}{2}\, h^T H_f\, h = \frac{1}{2}\left(f_{xx}\, h_1^2 + 2 f_{xy}\, h_1 h_2 + f_{yy}\, h_2^2 \right)$$

olur. Formülün değeri şuradadır: $\nabla f(x) = 0$ olan bir noktada $f(x+h) - f(x)$ farkı tamamen ikinci mertebe terimine bağlıdır. Bu farkın işareti Hessian matrisinin belirlediği ikinci dereceden formun işaretiyle yönetilir; bu işaretin nasıl okunacağı bir sonraki bölümün konusudur.

17.8 Taylor Serisi ve Reel Analitik Fonksiyonlar

$f \in C^\infty(U)$ ise Taylor teoremi her k için geçerlidir ve $k \to \infty$ limitine bakabiliriz.

Tanım 17.5 (Taylor Serisi). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^\infty(U)$ ve $a \in U$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\, d^j f(a)(x-a) = f(a) + df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\, d^2 f(a)(x-a) + \cdots$$

serisine f'nin a noktası civarındaki (ya da a merkezli) **Taylor serisi** denir.

Yani Taylor serisi, terimleri homojen derecelere göre gruplanmış bir reel sayı serisidir ve k. kısmi toplamı $T_k(x;a)$ Taylor polinomudur. $n = 1$ için tek değişkenli Taylor serisi elde edilir (bkz. Analiz 2). Tek değişkende olduğu gibi burada da iki ayrı soru vardır: seri yakınsak mıdır ve yakınsaksa toplamı $f(x)$ midir? Seri hiç yakınsamayabilir; $f \in C^\infty$ olsa bile yakınsayıp $f(x)$'ten farklı bir sayıya gidebilir.

Tanım 17.6 (Reel Analitik Fonksiyon). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^\infty(U)$ ve $a \in U$ olsun. Öyle bir $r > 0$ varsa ki $B(a,r) \subseteq U$ olsun ve her $x \in B(a,r)$ için f'nin a merkezli Taylor serisi yakınsak ve toplamı $f(x)$ olsun, f'ye a noktasında **reel analitik** denir. f, U'nun her noktasında reel analitikse f'ye U üzerinde reel analitik denir.

Yani reel analitik bir fonksiyon, bir noktanın yakınında kendi Taylor serisinin toplamıdır. Tanımda serinin yakınsaması yetmez, toplamının $f(x)$ olması istenir. $n = 1$ için bu, tek değişkenli analitiklik tanımıyla aynıdır (bkz. Analiz 2).

Teorem 17.4 (Taylor Serisinin Fonksiyona Yakınsaması). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^\infty(U)$, $a, x \in U$ ve $L(a;x) \subseteq U$ olsun. f'nin a merkezli Taylor serisinin x noktasında yakınsak ve toplamının $f(x)$ olması için gerek ve yeter koşul*

$$\lim_{k \to \infty} R_k(x;a) = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olmasıdır. Taylor teoremi gereği her k için $R_{k-1}(x;a) = \dfrac{1}{k!}\, d^k f(c_k)(x-a)$ olacak biçimde bir $c_k \in L(a;x)$ noktası vardır; dolayısıyla koşul

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!}\, d^k f(c_k)(x-a) = 0$$

biçiminde de yazılabilir.

> ***İspat.***
> *Serinin k. kısmi toplamı $T_k(x;a)$'dır. Serinin x'te yakınsak ve toplamının $f(x)$ olması, $T_k(x;a) \to f(x)$ demektir. $f(x)$ sabit bir sayı olduğundan bu, $R_k(x;a) = f(x) - T_k(x;a) \to 0$ olmasına denktir. İkinci biçim, $R_{k-1}(x;a)$ dizisinin $R_k(x;a)$ dizisinin bir kaydırılmışı olmasından ve Taylor teoreminden (Teorem 17.1) gelir.* ■

Kalanın sıfıra gittiğini göstermenin en kullanışlı yolu, türevleri mertebeden bağımsız biçimde sınırlamaktır; tek değişkenli karşılığı Analiz 2'deki düzgün sınırlı türevler ölçütüdür (bkz. Analiz 2).

Sonuç 17.3 (Sınırlı Türevler Ölçütü). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $f \in C^\infty(U)$, $a \in U$, $r > 0$ ve $B(a,r) \subseteq U$ olsun. Öyle $M, C \geq 0$ sabitleri bulunsun ki her $k \geq 0$, her $i_1, \ldots, i_k$ indis dizisi ve her $y \in B(a,r)$ için*

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(y) \right| \leq M\, C^k$$

olsun. O zaman f, a noktasında reel analitiktir; Taylor serisi her $x \in B(a,r)$ için $f(x)$'e yakınsar.

> ***İspat.***
> *$x \in B(a,r)$ ve $h = x - a$ olsun. Yuvar konveks olduğundan $L(a;x) \subseteq B(a,r) \subseteq U$'dur (Teorem 2.2). Her $k \geq 1$ için Teorem 17.1 bir $c_k \in L(a;x)$ verir ve Teorem 17.3 ispatındaki temel kestirim gibi*
>
> $$\mid R_{k-1}(x;a) \mid = \frac{\mid d^k f(c_k)(h) \mid}{k!} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} M\, C^k \mid h_{i_1} \mid \cdots \mid h_{i_k} \mid = M\, \frac{(\, C \parallel h \parallel_1)^k}{k!}$$
>
> *olur. Her $b \in \mathbb{R}$ için $\dfrac{b^k}{k!} \to 0$ olduğundan (bkz. Analiz 1) sağ yan 0'a gider. Demek ki $R_{k-1}(x;a) \to 0$, dolayısıyla $R_k(x;a) \to 0$'dır ve Teorem 17.4 sonucu verir.* ■

Örneğin $e^y \cos x$ fonksiyonunun (Örnek 17.4) her kısmi türevi $\pm e^y \sin x$ ya da $\pm e^y \cos x$ biçimindedir. $B(a,r)$ üzerinde $\mid y \mid < \mid a_2 \mid + r$ olduğundan bu türevler $M = e^{\mid a_2 \mid + r}$ ve $C = 1$ ile sınırlanır; fonksiyon $\mathbb{R}^2$ üzerinde reel analitiktir. Polinomlar da her yerde reel analitiktir: Örnek 17.5 ardından gördüğümüz gibi Taylor serileri sonlu bir toplamdır ve polinomun kendisine eşittir.

Örnek 17.10 (Bütün Düzlemde Yakınsayan Taylor Serisi). *$f(x,y) = \sin(x-y)$ fonksiyonunun $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ noktası civarındaki Taylor serisini bulunuz ve serinin f'ye yakınsadığı D bölgesini belirleyiniz.*

> ***Çözüm.***
> **Türevler.** $u = x - y$ diyelim. Zincir kuralı gereği $\dfrac{\partial}{\partial x} \sin^{(m)}(u) = \sin^{(m+1)}(u)$ ve $\dfrac{\partial}{\partial y} \sin^{(m)}(u) = -\sin^{(m+1)}(u)$'dur; burada $\sin^{(m)}$, sinüsün m. türevidir. Dolayısıyla
>
> $$\frac{\partial^p f}{\partial x^j\, \partial y^{p-j}}(x,y) = (-1)^{p-j} \sin^{(p)}(x-y)$$
>
> olur. $a = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ noktasında $x - y = -\dfrac{\pi}{4}$'tür.
> **Diferansiyeller.** $h_1 = x - \dfrac{\pi}{4}$ ve $h_2 = y - \dfrac{\pi}{2}$ olsun. Önerme 17.2 ve binom teoremiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d^p f(a)(h) = \sin^{(p)}\!\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} h_1^{\,j} (-h_2)^{p-j}$$
$$= \sin^{(p)}\!\left(-\frac{\pi}{4}\right) (h_1 - h_2)^p$$

bulunur. $h_1 - h_2 = x - y + \dfrac{\pi}{4}$'tür. $\sin^{(p)}$ türevleri p'nin 4'e bölümünden kalana göre sırasıyla sin, cos, $-\sin$, $-\cos$ olduğundan ve $\sin\!\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\!\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan bu katsayılar $p = 0, 1, 2, 3$ için sırasıyla $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ olur ve dörder dörder yinelenir.

Seri. $s = x - y + \dfrac{\pi}{4}$ yazarsak Taylor serisi

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin^{(p)}(-\pi/4)}{p!}\, s^p = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, s + \frac{\sqrt{2}}{4}\, s^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\, s^3 - \frac{\sqrt{2}}{48}\, s^4 + \cdots$$

olur. $k = 3$ için Taylor formülü, (c_1, c_2) noktası a ile (x, y) arasındaki doğru parçası üzerinde olmak üzere

$$\sin(x - y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, s + \frac{\sqrt{2}}{4}\, s^2 - \frac{\cos(c_1 - c_2)}{6}\, s^3$$

biçimindedir; çünkü $\sin^{(3)} = -\cos$'tur.

Yakınsaklık bölgesi. Her mertebeden her kısmi türev $\pm\sin(x-y)$ ya da $\pm\cos(x-y)$ biçimindedir ve mutlak değeri 1'i aşmaz. Her $r > 0$ için $B(a, r)$ üzerinde Sonuç 17.3 koşulu $M = C = 1$ ile sağlanır; seri $B(a, r)$'deki her noktada f'ye yakınsar. r keyfi olduğundan $D = \mathbb{R}^2$'dir.

Sonuç şaşırtıcı değildir: seri, sinüsün $-\dfrac{\pi}{4}$ merkezli tek değişkenli Taylor serisinin $u = x - y$ noktasındaki değeridir ve o seri her u için $\sin u$'ya yakınsar. ■

Sonsuz kez türevlenebilir her fonksiyon reel analitik değildir; tek değişkenli karşı örnek iki değişkene de taşınır.

Örnek 17.11 (Düzgün Ama Analitik Olmayan Fonksiyon). $\phi(t) = e^{-1/t^2}$ $(t \neq 0)$ ve $\phi(0) = 0$ olmak üzere $f(x, y) = \phi(x)$ fonksiyonunun $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sınıfından olduğunu, ama $(0, 0)$ noktasında reel analitik olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Düzgünlük. ϕ, $\mathbb{R}$ üzerinde her mertebeden türevlenebilirdir ve her $p \geq 0$ için $\phi^{(p)}(0) = 0$'dır (bkz. Analiz 2). f, y'ye bağlı olmadığından y'ye göre en az bir kez türev alınan her kısmi türev özdeş olarak 0'dır; geri kalan kısmi türevler $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, y) = \phi^{(p)}(x)$'tir. Bunların hepsi süreklidir, dolayısıyla $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$'dir.

Taylor serisi. $(0, 0)$ noktasında bütün kısmi türevler sıfırdır: y'li olanlar özdeş olarak, öbürleri $\phi^{(p)}(0) = 0$ olduğu için. Öyleyse her j için $d^j f(0,0)(h) = 0$'dır ve f'nin $(0, 0)$ merkezli Taylor serisi her noktada 0'a yakınsar.

Analitik değil. Her $r > 0$ için $\left(\dfrac{r}{2}, 0\right) \in B\,(\,(0,0), r\,)$ olur ve bu noktada $f = e^{-4/r^2} > 0$'dır. Yani hiçbir yuvarda seri f'ye yakınsamaz; f, $(0, 0)$ noktasında reel analitik değildir. ■

17.9 Alıştırmalar

Alıştırma 17.1 (Dört Değişkenli Bir Fonksiyonun Türev Matrisleri). $f(x, y, z, t) = (xy + z^2, zt - x^2)$ fonksiyonunun Jacobi matrisini ve bileşenlerinin Hessian matrislerini bulunuz.

Çözüm.

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun bileşenleri $f_1 = xy + z^2$ ve $f_2 = zt - x^2$'dir. Değişkenleri (x, y, z, t) sırasıyla alalım.

Jacobi matrisi. $\nabla f_1 = (y, x, 2z, 0)$ ve $\nabla f_2 = (-2x, 0, t, z)$ olduğundan

$$J_f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} y & x & 2z & 0 \\ -2x & 0 & t & z \end{pmatrix}$$

bulunur; bu 2×4 boyutlu bir matristir.
Hessian matrisleri. Her bileşenin gradyanının Jacobi matrisini alalım. $\nabla f_1 = (y, x, 2z, 0)$'ın satırları sırasıyla $\nabla y = (0,1,0,0)$, $\nabla x = (1,0,0,0)$, $\nabla(2z) = (0,0,2,0)$ ve $\nabla 0 = 0$'dır. $\nabla f_2 = (-2x, 0, t, z)$ için de aynı biçimde

$$H_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$H_{f_2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bileşenler ikinci dereceden polinomlar olduğundan Hessian matrisleri sabittir ve ikisi de simetriktir. ■

Alıştırma 17.2 (Kutupsal Dönüşümün Türev Matrisleri). $f(u,w) = (u\cos w, u\sin w)$ fonksiyonunun Jacobi matrisini, Jacobi determinantını ve bileşenlerinin Hessian matrislerini bulunuz.

Çözüm.
Jacobi matrisi ve determinantı. $f_1 = u\cos w$ ve $f_2 = u\sin w$ için

$$J_f(u,w) = \begin{pmatrix} \cos w & -u\sin w \\ \sin w & u\cos w \end{pmatrix}$$

ve

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,w)} = \cos w \cdot u\cos w - (-u\sin w)\sin w = u\left(\cos^2 w + \sin^2 w\right) = u$$

bulunur.
Hessian matrisleri. f_1 için $(f_1)_{uu} = 0$, $(f_1)_{uw} = (f_1)_{wu} = -\sin w$ ve $(f_1)_{ww} = -u\cos w$'dir. f_2 için $(f_2)_{uu} = 0$, $(f_2)_{uw} = (f_2)_{wu} = \cos w$ ve $(f_2)_{ww} = -u\sin w$'dir:

$$H_{f_1}(u,w) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin w \\ -\sin w & -u\cos w \end{pmatrix},$$
$$H_{f_2}(u,w) = \begin{pmatrix} 0 & \cos w \\ \cos w & -u\sin w \end{pmatrix}.$$

■

Alıştırma 17.3 (Trigonometrik Bir Fonksiyonun Hessian Matrisi). $f(x,y) = x\cos y + y\sin x$ fonksiyonunun Jacobi matrisini ve Hessian matrisini bulunuz.

Çözüm.
Jacobi matrisi. f reel değerli olduğundan Jacobi matrisi gradyanın satır olarak yazılışıdır:

$$J_f(x,y) = \left(\cos y + y\cos x, -x\sin y + \sin x\right).$$

Hessian matrisi. İkinci türevler

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= -y\sin x,\\
f_{xy} &= (\cos y + y\cos x)_y = -\sin y + \cos x,\\
f_{yx} &= (-x\sin y + \sin x)_x = -\sin y + \cos x,\\
f_{yy} &= -x\cos y
\end{aligned}
$$

olur. Karışık türevlerin eşit çıkması $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ile uyumludur ve

$$
H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y\sin x & \cos x - \sin y \\ \cos x - \sin y & -x\cos y \end{pmatrix}
$$

bulunur. ■

Alıştırma 17.4 (Üstel Kosinüslü Bir Fonksiyonun Hessian Matrisi). $f(x,y) = x\,e^{\cos y}$ fonksiyonunun Jacobi matrisini ve Hessian matrisini bulunuz.

Çözüm.
Jacobi matrisi. Zincir kuralıyla $\dfrac{\partial}{\partial y} e^{\cos y} = -\sin y e^{\cos y}$ olduğundan

$$
J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\cos y}, & -x\sin y e^{\cos y} \end{pmatrix}
$$

bulunur.
Hessian matrisi. $f_{xx} = 0$ ve $f_{xy} = f_{yx} = -\sin y e^{\cos y}$'dir. f_y'nin y'ye göre türevinde çarpım kuralıyla

$$
f_{yy} = -x\cos y e^{\cos y} - x\sin y \cdot (-\sin y)\, e^{\cos y} = x\left(\sin^2 y - \cos y\right) e^{\cos y}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
H_f(x,y) = e^{\cos y}\begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & x\left(\sin^2 y - \cos y\right) \end{pmatrix}
$$

bulunur. ■

Alıştırma 17.5 (İkinci Dereceden Bir Polinomun Açılımı). $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ fonksiyonunun $(-1,1)$ noktası civarındaki Taylor açılımını bulunuz.

Çözüm.
$h_1 = x+1$ ve $h_2 = y-1$ yazalım.
Türevler. $f(-1,1) = 1 - 1 + 1 = 1$ olur. $f_x = 2x + y$ ve $f_y = x + 2y$ olduğundan $f_x(-1,1) = -1$ ve $f_y(-1,1) = 1$'dir. İkinci türevler sabittir: $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$. Üçüncü mertebeden türevlerin hepsi sıfırdır.
Açılım. Üçüncü mertebeden türevler sıfır olduğundan kalan da sıfırdır (gerekçe Örnek 17.5 ile aynıdır); dolayısıyla $f = T_2$'dir:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 1 - (x+1) + (y-1) + \frac{1}{2}\left[\, 2(x+1)^2 + 2(x+1)(y-1) + 2(y-1)^2 \,\right]\\
&= 1 - (x+1) + (y-1) + (x+1)^2 + (x+1)(y-1) + (y-1)^2.
\end{aligned}
$$

Sağlama. Parantezler açılınca

$$
\begin{aligned}
&1 - x - 1 + y - 1 + x^2 + 2x + 1\\
&\quad + xy - x + y - 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + xy + y^2
\end{aligned}
$$

bulunur.
Hessian matrisi $H_f = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ sabit olduğundan Sonuç 17.2 içindeki θ sayısının burada hiçbir önemi yoktur: her x ve h için

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\, h^T H_f\, h$$

tam olarak sağlanır. ■

Alıştırma 17.6 (Karekök Toplamının Kalanlı Taylor Formülü). $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ fonksiyonunun $(1,4)$ noktasındaki Taylor formülünü $k=3$ için kalan terimiyle yazınız.

Çözüm.
Tanım kümesi. f, $U = \{(x,y) : x>0, y>0\}$ açık kümesinde C^∞ sınıfındandır. U konvekstir: pozitif sayıların $tx + (1-t)x'$ biçimindeki bileşimleri ($t \in [0,1]$) pozitiftir. Dolayısıyla $(1,4)$ ile U'daki her (x,y) arasındaki doğru parçası U içindedir. $h_1 = x-1$ ve $h_2 = y-4$ yazalım.
Türevler. f, her biri tek bir değişkene bağlı iki fonksiyonun toplamı olduğundan bütün karışık türevler sıfırdır.

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f_x(1,4) = \frac{1}{2},\\
f_y &= \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad f_y(1,4) = \frac{1}{4},\\
f_{xx} &= -\frac{1}{4x^{3/2}}, f_{xx}(1,4) = -\frac{1}{4},\\
f_{yy} &= -\frac{1}{4y^{3/2}}, \; f_{yy}(1,4) = -\frac{1}{32}
\end{aligned}$$

olur; $4^{3/2} = 8$ olduğundan son değer $-\frac{1}{32}$'dir. Üçüncü mertebeden saf türevler

$$\begin{aligned}
f_{xxx} &= \frac{3}{8x^{5/2}},\\
f_{yyy} &= \frac{3}{8y^{5/2}}
\end{aligned}$$

olur.
Formül. $f(1,4) = 1+2 = 3$'tür. (c_1, c_2) noktası $(1,4)$ ile (x,y)'yi birleştiren doğru parçası üzerinde olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}+\sqrt{y} = 3 &+ \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-4) - \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{64}(y-4)^2\\
&+ \frac{1}{16}\left[\frac{(x-1)^3}{c_1^{5/2}} + \frac{(y-4)^3}{c_2^{5/2}}\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Katsayılar şöyle elde edilir: $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{32}\right) = -\frac{1}{64}$ ve $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{16}$.
Sağlama. f iki tek değişkenli fonksiyonun toplamıdır; formül, $\sqrt{x}$'in 1'deki ve $\sqrt{y}$'nin 4'teki tek değişkenli Taylor formüllerinin toplamıyla aynı katsayıları verir. ■

Alıştırma 17.7 (Bir Çarpımın Kalanlı Taylor Formülü). $f(x,y) = \cos x \sin y$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki Taylor formülünü $k=3$ için kalan terimiyle yazınız.

Çözüm.
$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$'dir; $h_1 = x$ ve $h_2 = y$ olur.
Türevler. $\sin 0 = 0$ ve $\cos 0 = 1$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
f_x &= -\sin x \sin y, \quad f_x(0,0) = 0,\\
f_y &= \cos x \cos y, \quad\ \ f_y(0,0) = 1,\\
f_{xx} &= -\cos x \sin y, f_{xx}(0,0) = 0,\\
f_{xy} &= -\sin x \cos y, f_{xy}(0,0) = 0,\\
f_{yy} &= -\cos x \sin y, f_{yy}(0,0) = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Üçüncü mertebeden türevler:

$$
\begin{aligned}
f_{xxx} &= \sin x \sin y, f_{xxy} = -\cos x \cos y,\\
f_{xyy} &= \sin x \sin y, f_{yyy} = -\cos x \cos y.
\end{aligned}
$$

Formül. $f(0,0)=0$, $df(0,0)(h)=y$ ve $d^2f(0,0)(h)=0$'dır. (c_1,c_2), $(0,0)$ ile (x,y) arasındaki doğru parçası üzerinde olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\cos x \sin y = y + \frac{1}{6}\Big[&\sin c_1 \sin c_2\, x^3 - 3\cos c_1 \cos c_2\, x^2 y\\
&+3\sin c_1 \sin c_2\, xy^2 - \cos c_1 \cos c_2\, y^3\Big]
\end{aligned}
$$

olur.
Üçüncü mertebeden polinom. Üçüncü türevler $(0,0)$'da hesaplanırsa $f_{xxx}=f_{xyy}=0$ ve $f_{xxy}=f_{yyy}=-1$ bulunur; buradan

$$
T_3(x,y) = y - \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3
$$

çıkar. Sağlama olarak $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ ve $\sin y \approx y - \dfrac{y^3}{6}$ çarpılıp derecesi 3'ü aşan terimler atıldığında da aynı polinom elde edilir. ■

Alıştırma 17.8 (Üç Terime Kadar Kalanlı Taylor Formülü). $f(x,y) = yx^3 - \sin(xy)$ fonksiyonunun $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ noktası civarındaki Taylor formülünü üç terime kadar ($k=3$), kalan terimiyle yazınız.

Çözüm.
$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$'dir. $h_1 = x-1$ ve $h_2 = y - \dfrac{\pi}{2}$ yazalım. $a = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ noktasında $xy = \dfrac{\pi}{2}$, $\sin(xy) = 1$ ve $\cos(xy) = 0$ olur.
Birinci mertebe.

$$
\begin{aligned}
f_x &= 3x^2 y - y\cos(xy), f_x(a) = \frac{3\pi}{2},\\
f_y &= x^3 - x\cos(xy), \quad f_y(a) = 1.
\end{aligned}
$$

İkinci mertebe.

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= 6xy + y^2\sin(xy), && f_{xx}(a) = 3\pi + \frac{\pi^2}{4},\\
f_{xy} &= 3x^2 - \cos(xy) + xy\sin(xy), && f_{xy}(a) = 3 + \frac{\pi}{2},\\
f_{yy} &= x^2\sin(xy), && f_{yy}(a) = 1.
\end{aligned}
$$

Öbür sırayla türev alınınca da $(f_y)_x$ için aynı ifade bulunur; karışık türevler eşittir.
Üçüncü mertebe (genel noktada):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
f_{xxx} &= 6y + y^3\cos(xy),\\
f_{xxy} &= 6x + 2y\sin(xy) + xy^2\cos(xy),\\
f_{xyy} &= 2x\sin(xy) + x^2 y\cos(xy),\\
f_{yyy} &= x^3\cos(xy).
\end{aligned}
$$

Formül. $f(a) = \dfrac{\pi}{2} - 1$ ve

$$
\frac{1}{2}\,d^2 f(a)(h) = \frac{1}{2}\left(3\pi + \frac{\pi^2}{4}\right)h_1^2 + \Big(3 + \frac{\pi}{2}\Big)h_1 h_2 + \frac{1}{2}\,h_2^2
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
yx^3 - \sin(xy) = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{3\pi}{2}\,h_1 + h_2 + \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right)h_1^2\\
+\Big(3 + \frac{\pi}{2}\Big)h_1 h_2 + \frac{1}{2}\,h_2^2 + R_2
\end{aligned}
$$

bulunur. Kalan terim, (c_1, c_2) noktası a ile (x, y)'yi birleştiren doğru parçası üzerinde olmak üzere

$$
\begin{aligned}
R_2 = \frac{1}{6}\Big[\ &\big(\ 6c_2 + c_2^3\cos(c_1c_2)\ \big)\,h_1^3\\
&+3\ \big(\ 6c_1 + 2c_2\sin(c_1c_2) + c_1c_2^2\cos(c_1c_2)\ \big)\,h_1^2 h_2\\
&+3\ \big(\ 2c_1\sin(c_1c_2) + c_1^2c_2\cos(c_1c_2)\ \big)\,h_1 h_2^2\\
&+c_1^3\cos(c_1c_2)\,h_2^3\ \Big]
\end{aligned}
$$

olur. ■

Alıştırma 17.9 (Bir Polinomu Yeni Merkeze Göre Yazmak). $f(x, y, z) = xyz + x^2$ polinomunu $(x-1)$, $(y-1)$ ve $(z-1)$'in kuvvetleri cinsinden operatör yazımıyla açınız.

Çözüm.
Kalan sıfırdır. f'nin derecesi 3 olduğundan dördüncü mertebeden bütün kısmi türevleri sıfırdır. Teorem 17.1, $k = 4$ ile $R_3 = 0$ verir; yani f, $(1,1,1)$ noktasındaki üçüncü mertebeden Taylor polinomuna eşittir. $h_1 = x-1$, $h_2 = y-1$ ve $h_3 = z-1$ yazalım.
Türevler. $(1,1,1)$ noktasında $f = 2$ ve

$$
\begin{aligned}
&f_x = yz + 2x = 3, \quad f_y = xz = 1, \quad f_z = xy = 1,\\
&f_{xx} = 2, \qquad\quad f_{yy} = 0, \qquad f_{zz} = 0,\\
&f_{xy} = z = 1, \qquad f_{xz} = y = 1, \quad f_{yz} = x = 1
\end{aligned}
$$

olur. Üçüncü mertebeden türevlerden yalnızca $f_{xyz} = 1$ sıfırdan farklıdır; örneğin $f_{xxy} = (f_{xx})_y = 0$ ve $f_{xyy} = (f_{xy})_y = (z)_y = 0$'dır.
Operatörün kuvvetleri. Üç değişkenli açılımla

$$
\begin{aligned}
(h\cdot\nabla)f &= 3h_1 + h_2 + h_3,\\
(h\cdot\nabla)^2 f &= 2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_2h_3,\\
(h\cdot\nabla)^3 f &= 6\,h_1h_2h_3
\end{aligned}
$$

bulunur. Son satırda yalnız karışık terim kalır ve katsayısı $\dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$ çok terimli katsayısıdır.
Açılım. Kuvvetler 1, $\dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{1}{6}$ ile çarpılıp toplanınca

 CC BY-NC-SA 4.0

$$xyz + x^2 = 2 + 3h_1 + h_2 + h_3 + h_1^2 \\ + h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 + h_1h_2h_3$$

elde edilir.
Sağlama. $x = 1 + h_1$, $y = 1 + h_2$, $z = 1 + h_3$ olduğundan $xyz = (1 + h_1)(1 + h_2)(1 + h_3)$ ve $x^2 = 1 + 2h_1 + h_1^2$'dir. Çarpım açılıp toplanınca aynı ifade bulunur. ■

Taylor formülü, bir fonksiyonun bir nokta yakınındaki davranışını, o noktadaki türevlerinden kurulan bir polinomla ve denetim altındaki bir kalanla anlatır. İkinci mertebeden formülde gradyan sıfır olduğunda geriye yalnızca Hessian matrisiyle yazılan ikinci dereceden form kalır. Yerel Ekstremumlar bölümünde bu gözlemi kullanarak kritik noktalarda fonksiyonun yerel maksimum mu, yerel minimum mu olduğuna, yoksa bir eyer noktası mı bulunduğuna karar vereceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

18. Yerel Ekstremumlar

Tek değişkenli bir fonksiyonun yerel ekstremumlarını iki adımda arıyorduk. Önce Fermat teoremi (bkz. Analiz 2) adayları türevin sıfır olduğu ya da var olmadığı noktalara indiriyordu. Sonra ikinci türev testi (bkz. Analiz 2), $f'(x_0) = 0$ olan bir adayda $f''(x_0)$ sayısının işaretine bakarak noktanın bir çukurun dibi mi yoksa bir tepenin doruğu mu olduğuna karar veriyordu. Bu bölümde iki adımın çok değişkenli karşılıklarını kuruyoruz.
Birinci adım kolayca genelleşir: bir yerel ekstremum noktasından geçen her doğru üzerinde fonksiyon, tek değişkenli bir fonksiyonun yerel ekstremumunu verir; dolayısıyla bütün kısmi türevler, yani gradyan sıfırdır. İkinci adım daha incedir. $f''(x_0)$ sayısının yerini Hessian matrisi (Tanım 17.1) alır ve "pozitif sayı" kavramının yerine "her yönde pozitif davranan matris" kavramı gelir. Tek değişkende tipik kritik noktalar çukurlar, tepeler ve x^3'teki gibi geçiş noktalarıdır. İki değişkende ise bir yönde yukarı, başka bir yönde aşağı kıvrılan eyer yüzeyi ortaya çıkar ve ikinci türev testi bu durumu da ayırt eder. Aracımız bir önceki bölümün Taylor formülüdür (Sonuç 17.2): kritik noktada birinci mertebe terim yok olur ve fonksiyonun davranışını ikinci mertebe terim belirler.

18.1 Yerel ve Mutlak Ekstremum

Tanımlar tek değişkendekilerle aynıdır; tek fark, aralık yerine yuvar kullanılmasıdır.

Tanım 18.1 (Yerel Maksimum ve Yerel Minimum). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D$ olsun.

- Her $x \in B(a, \delta) \cap D$ için $f(x) \leq f(a)$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonunun a noktasında **yerel (lokal) maksimumu** vardır denir.
- Her $x \in B(a, \delta) \cap D$ için $f(x) \geq f(a)$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonunun a noktasında **yerel (lokal) minimumu** vardır denir.

Bu iki duruma birlikte **yerel ekstremum** denir; a bir **yerel ekstremum noktası**, $f(a)$ da bir **yerel ekstremum değeridir**. Eşitsizlik $x \neq a$ olan her $x \in B(a, \delta) \cap D$ için kesinse, yani $f(x) < f(a)$ ya da $f(x) > f(a)$ ise, **kesin yerel maksimum** ya da **kesin yerel minimum** denir.

Yani a'nın yeterince küçük bir yuvarı içinde f, a'daki değerinden daha büyük (maksimumda) ya da daha küçük (minimumda) bir değer almaz. Yuvarın yarıçapı a'ya bağlıdır ve istenildiği kadar küçük olabilir. a, D'nin bir iç noktası ise δ yeterince küçük seçilerek $B(a, \delta) \subseteq D$ sağlanabilir; o zaman kesişim yazmaya gerek kalmaz ve koşul yalnız $B(a, \delta)$ yuvarında denetlenir. $n = 1$ için $B(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$ olur ve tek değişkendeki tanım (bkz. Analiz 2) elde edilir.

Tanım 18.2 (Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum). $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $a \in D$ olsun. Her $x \in D$ için $f(x) \leq f(a)$ ise f'nin a noktasında **mutlak maksimumu**, her $x \in D$ için $f(x) \geq f(a)$ ise **mutlak minimumu** vardır denir. Bu iki duruma birlikte **mutlak ekstremum** denir.

Yani mutlak ekstremumda karşılaştırma bütün tanım kümesi üzerinden yapılır: $f(a) = \max_{x \in D} f(x)$ ya da $f(a) = \min_{x \in D} f(x)$ olur. Her mutlak maksimum aynı zamanda yerel maksimumdur, çünkü eşitsizlik her $x \in D$ için sağlanıyorsa $B(a, \delta) \cap D$ kümesindeki x'ler için de sağlanır. Tersi doğru değildir; Örnek 18.7 içinde mutlak olmayan bir yerel minimum göreceğiz. Kompakt bir küme üzerinde sürekli bir fonksiyonun mutlak maksimum ve minimum değerlerini aldığını biliyoruz (Teorem 11.3); bu değerlerin nasıl bulunacağı bir sonraki bölümün konusudur. Bu bölümde yerel ekstremumlarla, özellikle de iç noktalardaki yerel ekstremumlarla ilgileniyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Birinci Mertebeden Gerek Koşul

Yerel ekstremum noktasından koordinat eksenlerine paralel doğrultularda ilerlediğimizde elde edilen tek değişkenli fonksiyonların hepsinin aynı noktada yerel ekstremumu vardır. Fermat teoremini bu fonksiyonlara uygulamak, çok değişkenli gerek koşulu verir.

Teorem 18.1 (Yerel Ekstremum için Gerek Koşul). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve a, D'nin bir iç noktası olsun. f'nin a noktasında yerel ekstremumu varsa şunlar doğrudur.*

- ***(i)*** *f'nin a'daki birinci mertebe kısmi türevlerinden var olanların her biri sıfırdır. Özel olarak bütün birinci mertebe kısmi türevler a'da varsa $\nabla f(a) = 0$ olur.*
- ***(ii)*** *Daha genel olarak, $u \in \mathbb{R}^n$ bir birim vektör ve $D_u f(a)$ yönlü türevi varsa $D_u f(a) = 0$ olur.*
- ***(iii)*** *f, a'da türevlenebilirse toplam diferansiyeli sıfırdır: her $h \in \mathbb{R}^n$ için $df(a)(h) = 0$.*

İspat.
Önce f'nin a'da yerel maksimumu olduğunu varsayalım. a bir iç nokta olduğundan $B(a,r) \subseteq D$ olacak biçimde bir $r > 0$ vardır. Yerel maksimum tanımındaki δ ile r'nin küçüğünü alarak (buna yine δ diyelim) $B(a,\delta) \subseteq D$ ve her $x \in B(a,\delta)$ için $f(x) \leq f(a)$ elde ederiz.
(ii) *u bir birim vektör olsun ve $\mid t \mid < \delta$ için $g(t) = f(a+tu)$ ile tanımlanan $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. $\mid t \mid < \delta$ ise*

$$\| (a+tu) - a \| = \mid t \mid \| u \| = \mid t \mid < \delta$$

olduğundan $a + tu \in B(a,\delta)$'dır; dolayısıyla g iyi tanımlıdır ve

$$g(t) = f(a+tu) \leq f(a) = g(0)$$

olur. Yani g fonksiyonunun $(-\delta, \delta)$ açık aralığının 0 noktasında yerel maksimumu vardır. Öte yandan yönlü türevin tanımı (Tanım 16.1) gereği

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = D_u f(a)$$

olur; $D_u f(a)$'nın var olması, g'nin 0'da türevlenebilir olması ve $g'(0) = D_u f(a)$ demektir. Fermat teoremi (bkz. Analiz 2) gereği $g'(0) = 0$, yani $D_u f(a) = 0$ olur.
(i) *$u = e_j$ alınırsa yönlü türev j. kısmi türeve dönüşür (Tanım 12.1):*

$$D_{e_j} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

(ii) gereği bu kısmi türev varsa sıfırdır. Bütün kısmi türevler varsa hepsi sıfır olduğundan $\nabla f(a) = 0$'dır (Tanım 12.3).

(iii) *f, a'da türevlenebilirse bütün birinci mertebe kısmi türevleri vardır ve türev tanımındaki vektör $\nabla f(a)$'dır (Teorem 14.2); toplam diferansiyel (Tanım 14.2) $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ olur. (i) gereği $\nabla f(a) = 0$ olduğundan her h için $df(a)(h) = 0$'dır.*
Son olarak f'nin a'da yerel minimumu varsa $-f$'nin a'da yerel maksimumu vardır. $-f$'nin kısmi türevleri, yönlü türevleri ve türevi f'ninkilerin -1 katıdır; yukarıdaki sonuçlar bunları sıfır bulduğundan f'ninkiler de sıfırdır. ■

Bu teoreme **birinci mertebeden gerek koşul** denir. İki değişkende (iii) şıkkının geometrik anlamı açıktır: f türevlenebilir ve (x_0, y_0) bir iç yerel ekstremum noktası ise grafiğin bu noktadaki teğet düzlemi (Tanım 14.4)

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(x_0,y_0) \end{aligned}$$

düzlemidir, yani yataydır. Tepenin doruğunda da çukurun dibinde de teğet düzlem yatay durur.
Teoremin iki noktasına dikkat edelim. **İç nokta** koşulu gereklidir: $D = [0,1] \times [0,1]$ karesinde $f(x,y) = x + y$ fonksiyonunun $(0,0)$ köşesinde mutlak minimumu vardır, ama $\nabla f = (1,1)$ hiçbir yerde sıfır olmaz. Sınır noktalarındaki ekstremumları bir sonraki bölümde ayrıca inceleyeceğiz. **Kısmi türevlerin varlığı**

 CC BY-NC-SA 4.0

ise sonucun kapsamını belirler: kısmi türevleri olmayan bir noktada da ekstremum bulunabilir (Örnek 18.1) ve teorem böyle bir nokta hakkında bir şey söylemez.

18.3 Durgun, Kritik ve Eyer Noktaları

Gerek koşul, iç noktalardaki yerel ekstremumların aranacağı yerleri daraltır. Bu yerlere ad verelim.

Tanım 18.3 (Durgun Nokta). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f : U \to \mathbb{R}$ ve $a \in U$ olsun. f'nin a'da bütün birinci mertebe kısmi türevleri varsa ve $\nabla f(a) = 0$ ise a noktasına f'nin bir **durgun noktası** denir.

Yani durgun nokta, bütün kısmi türevlerin var olup aynı anda sıfırlandığı noktadır; f türevlenebilirse grafiğin teğet düzlemi orada yataydır.

Tanım 18.4 (Kritik Nokta). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin durgun noktalarına ve birinci mertebe kısmi türevlerinden en az birinin var olmadığı noktalara f'nin **kritik noktaları** denir.

Yani kritik noktalar iki türlüdür: gradyanın var olup sıfır olduğu noktalar ve gradyanın hiç yazılamadığı noktalar. Tek değişkende de kritik noktayı aynı iki türle tanımlamıştık (bkz. Analiz 2). Kısmi türevleri her yerde var olan bir fonksiyonun kritik noktaları tam olarak durgun noktalarıdır. Gerek koşulu bu dille yeniden yazalım.

Sonuç 18.1 (Yerel Ekstremum Noktaları Kritik Noktalardır). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin her yerel ekstremum noktası bir kritik noktasıdır.*

> ***İspat.***
> *$a \in U$ bir yerel ekstremum noktası olsun. U açık olduğundan a bir iç noktadır. f'nin a'daki birinci mertebe kısmi türevlerinden biri yoksa a, tanım gereği bir kritik noktadır. Hepsi varsa Teorem 18.1 (i) gereği $\nabla f(a) = 0$ olur; a bir durgun nokta, dolayısıyla bir kritik noktadır.* ■

Sonucun pratik anlamı şudur: açık bir kümede yerel ekstremum ararken önce $\nabla f = 0$ denklem sisteminin çözümleri ve kısmi türevlerin var olmadığı noktalar bulunur; ekstremum ancak bu adaylar arasında olabilir. İlk örnek, ikinci türden adayların gerçekten ekstremum olabildiğini gösteriyor.

Örnek 18.1 (Kısmi Türevi Olmayan Bir Minimum). $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve $(0, 0)$ noktasında mutlak minimumu olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Kritik noktalar.** $(x, y) \neq (0, 0)$ ise $x^2 + y^2 > 0$'dır; kök fonksiyonu pozitif sayılarda türevlenebilir olduğundan zincir kuralıyla
>
> $$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$
>
> bulunur. Bu vektörün boyu 1'dir, dolayısıyla sıfır olamaz; $(0, 0)$ dışında durgun nokta yoktur. $(0, 0)$ noktasında x'e göre kısmi türevin fark oranı
>
> $$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \frac{|\, t \,|}{t}$$
>
> olur. Bu oran $t > 0$ için 1, $t < 0$ için -1'dir; $t \to 0$ iken limiti yoktur. Demek ki $f_x(0, 0)$ yoktur (aynı hesapla $f_y(0, 0)$ da yoktur) ve $(0, 0)$ bir kritik noktadır. f'nin tek kritik noktası budur.
> **Minimum.** Her (x, y) için $f(x, y) = \| (x, y) \| \geq 0 = f(0, 0)$ olur ve eşitlik yalnız $(0, 0)$'da sağlanır. f'nin $(0, 0)$'da kesin mutlak minimumu vardır. Grafik, tepesi aşağıda duran bir konidir; tepe noktası sivri olduğundan orada teğet düzlem yoktur. Bu, tek değişkendeki $|\, x \,|$ fonksiyonunun (bkz. Analiz 2) iki değişkenli karşılığıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerek koşulun tersi doğru değildir: kritik nokta olmak, yerel ekstremum olmayı gerektirmez. Tek değişkende $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $f'(0) = 0$ olduğu hâlde 0 bir ekstremum noktası değildi (bkz. Analiz 2). Çok değişkende bu durum daha sık ve daha zengin biçimde ortaya çıkar; ona bir ad verelim.

Tanım 18.5 (Eyer Noktası). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f : U \to \mathbb{R}$ ve $a \in U$, f'nin bir kritik noktası olsun. a, f'nin bir yerel ekstremum noktası değilse a noktasına f'nin bir **eyer (semer) noktası** denir.

Yani eyer noktası, yerel ekstremum olmayan kritik noktadır. Tanımı açalım. a yerel maksimum değildir: her $\rho > 0$ için $B(a, \rho)$ içinde $f(y) > f(a)$ olan bir y vardır. a yerel minimum da değildir: her $\rho > 0$ için $B(a, \rho)$ içinde $f(x) < f(a)$ olan bir x vardır. Demek ki bir kritik noktanın eyer noktası olması, a merkezli her $B(a, \rho) \subseteq U$ yuvarında $f(x) < f(a) < f(y)$ koşulunu sağlayan x ve y noktalarının bulunmasına denktir. a'nın ne kadar küçük bir yuvarına bakılırsa bakılsın, orada $f(a)$'dan hem küçük hem büyük değerler vardır.
Ad, eyerin biçiminden gelir: eyerin ortasındaki nokta, atın gövdesi boyunca bakıldığında en alçak, gövdeye dik doğrultuda bakıldığında en yüksek noktadır. Tek değişkendeki x^3 örneğinde olduğu gibi, eyer noktasında da grafik yatay teğet düzlemin hem altına hem üstüne geçer.

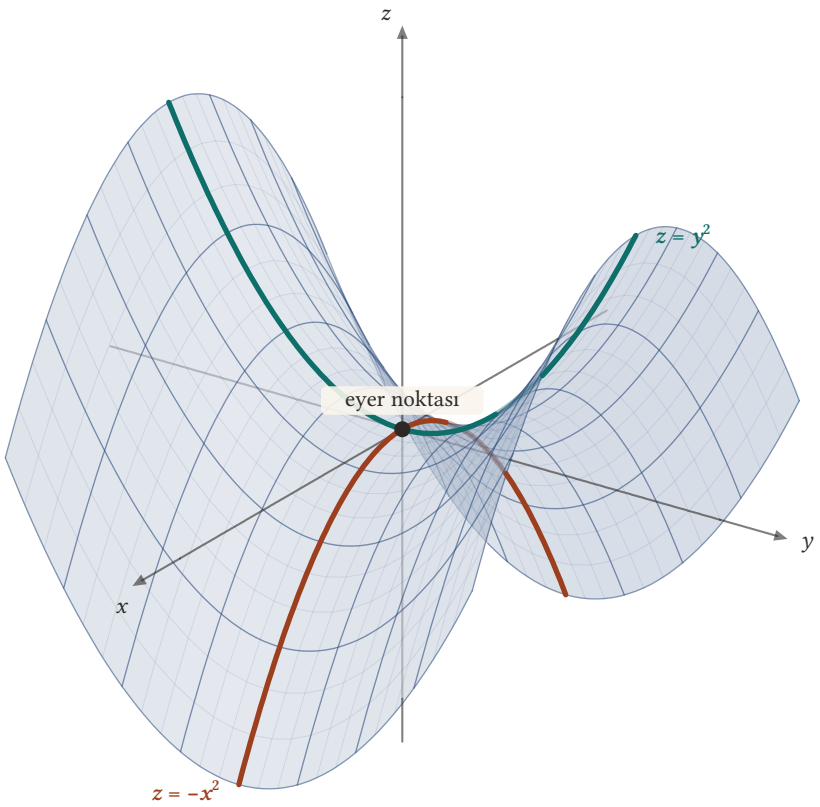
Örnek 18.2 (Eyer Yüzeyi). $f(x, y) = y^2 - x^2$ fonksiyonunun tek kritik noktasının $(0, 0)$ olduğunu ve bu noktanın bir eyer noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
f bir polinom olduğundan kısmi türevleri her yerde vardır ve süreklidir: $f_x = -2x$, $f_y = 2y$. $\nabla f(x, y) = (-2x, 2y) = (0, 0)$ eşitliği yalnız $(x, y) = (0, 0)$ için sağlanır. Tek kritik nokta $(0, 0)$'dır ve $f(0, 0) = 0$'dır.
$\rho > 0$ keyfi olsun ve $0 < t < \rho$ alalım. $(t, 0)$ ve $(0, t)$ noktaları $B((0, 0), \rho)$ yuvarındadır ve

$$f(t, 0) = -t^2 < 0 = f(0, 0) < t^2 = f(0, t)$$

olur. $(0, 0)$ noktasının her yuvarında $f(0, 0)$'dan küçük ve büyük değerler vardır; $(0, 0)$ bir eyer noktasıdır. Grafik, x ekseni üzerinde aşağı açılan $z = -x^2$ parabolünü, y ekseni üzerinde yukarı açılan $z = y^2$ parabolünü içerir: y doğrultusunda orijin bir çukurun dibi, x doğrultusunda bir tepenin doruğudur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.1: $z = y^2 - x^2$ yüzeyi ($-1 \le x, y \le 1$). x ekseni üzerindeki $z = -x^2$ parabolü aşağı, y ekseni üzerindeki $z = y^2$ parabolü yukarı açılır. Orijin, ilk parabolün en yüksek, ikincisinin en alçak noktasıdır. Yüzeyin arkasında kalan çizgiler soluk çizilmiştir.

f her yerde sürekli türevlenebilir olduğu hâlde $\nabla f(0,0) = 0$ koşulu bir ekstremum vermemiştir: gerek koşul yeterli değildir. ■

18.4 Simetrik Matrislerin Tanımlılığı

Kritik bir noktanın türünü belirlemek için Taylor formülüne dönelim. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f \in C^2(U)$, $a \in U$ ve $\nabla f(a) = 0$ olsun. $B(a,r) \subseteq U$ ve $\| h \| < r$ ise a ile $a+h$ arasındaki doğru parçası $B(a,r)$ içindedir ve Sonuç 17.2 gereği bir $\theta \in (0,1)$ için

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\, h^{T} H_f(a+\theta h)\, h \tag{1}$$

olur; birinci mertebe terim $\langle \nabla f(a), h \rangle = 0$ olduğundan kaybolmuştur. Burada h bir sütun vektörü, h^T onun devriği olarak düşünülür ve

$$h^{T} H_f(x)\, h = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(x)\, h_j h_k$$

olur. Bu sayı, f'nin x noktasındaki ikinci mertebeden toplam diferansiyelidir (Tanım 17.2): $d^2 f(x)(h) = h^T H_f(x)\, h$. Demek ki a'nın yakınında $f(a+h) - f(a)$ farkının işaretini, $h \mapsto h^T H h$ ifadesinin işareti belirler. $f \in C^2(U)$ olduğundan $H_f(x)$ simetrik bir matristir (Önerme 17.1). Bu yüzden önce simetrik matrislerin bu türden ifadelerini inceliyoruz.

Tanım 18.6 (Kuadratik Form). $A = (a_{jk})$, $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris ($a_{jk} = a_{kj}$) olsun. $h \in \mathbb{R}^n$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$Q_A(h) = h^T A h = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} h_j h_k$$

ile tanımlanan $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna A'nın **kuadratik formu** denir.

Yani Q_A, h'nin koordinatlarının ikinci dereceden homojen bir polinomudur ve her $t \in \mathbb{R}$ için $Q_A(th) = t^2 Q_A(h)$ olur. Örneğin $n = 2$ ve

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

için $Q_A(h) = ph_1^2 + 2qh_1h_2 + rh_2^2$ bulunur. Hessian matrisinin kuadratik formu, yukarıda gördüğümüz gibi ikinci diferansiyeldir. Şimdi formun alabileceği işaretleri sınıflandırıyoruz.

Tanım 18.7 (Pozitif ve Negatif Tanımlı Matris). A, $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris olsun.

- Her $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ için $h^T A h > 0$ ise A matrisine **pozitif tanımlı** denir.
- Her $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ için $h^T A h < 0$ ise A matrisine **negatif tanımlı** denir.

Yani pozitif tanımlı bir matrisin kuadratik formu, sıfır vektörü dışındaki her vektörde pozitif değer alır; tek değişkende bu, 1×1 tipindeki $(f''(x_0))$ matrisi için $f''(x_0)h^2 > 0$, yani $f''(x_0) > 0$ koşuludur. A'nın negatif tanımlı olması, $-A$'nın pozitif tanımlı olması demektir.

Tanım 18.8 (Yarı Tanımlı Matris). A, $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris olsun.

- Her $h \in \mathbb{R}^n$ için $h^T A h \geq 0$ ise A matrisine **pozitif yarı tanımlı** denir.
- Her $h \in \mathbb{R}^n$ için $h^T A h \leq 0$ ise A matrisine **negatif yarı tanımlı** denir.

Yani yarı tanımlı matrisin formu tek işaretlidir ama sıfırdan farklı bir vektörde sıfır değerini de alabilir. Her pozitif tanımlı matris pozitif yarı tanımlıdır; tersi doğru değildir.

Tanım 18.9 (Belirsiz Matris). A, $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris olsun. $u^T A u < 0 < v^T A v$ olacak biçimde $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektörleri varsa A matrisine **belirsiz** (tanımsız) denir.

Yani belirsiz matrisin formu işaret değiştirir: bazı yönlerde pozitif, bazı yönlerde negatif değer alır. Bir simetrik matris aşağıdaki dört durumdan tam birine düşer:

1. pozitif tanımlı,
2. negatif tanımlı,
3. belirsiz,
4. yarı tanımlı ama tanımlı değil: form ya hep ≥ 0 ya hep ≤ 0'dır ve sıfırdan farklı bir h için $h^T A h = 0$ olur.

Gerçekten, form negatif değer almıyorsa pozitif yarı tanımlı, pozitif değer almıyorsa negatif yarı tanımlıdır; ikisini de alıyorsa belirsizdir. Yarı tanımlı bir matrisin formu sıfırdan farklı her vektörde sıfırdan farklıysa matris tanımlıdır; değilse dördüncü durumdadır. Sıfır matrisi hem pozitif hem negatif yarı tanımlıdır ve dördüncü durumdadır. Şu üç matris sırasıyla birinci, dördüncü ve üçüncü duruma örnektir:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q_{A_1}(h) = h_1^2 + 2h_2^2,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{A_2}(h) = h_1^2,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q_{A_3}(h) = h_1^2 - h_2^2.$$

$Q_{A_1}(h)$ sıfırdan farklı her h için pozitiftir; A_1 pozitif tanımlıdır. Q_{A_2} hiç negatif olmaz ama $Q_{A_2}(0,1) = 0$'dır; A_2 pozitif yarı tanımlıdır, tanımlı değildir. $Q_{A_3}(1,0) = 1 > 0 > -1 = Q_{A_3}(0,1)$ olduğundan A_3 belirsizdir. Bu üç matris sırasıyla $x^2 + 2y^2$, x^2 ve $x^2 - y^2$ fonksiyonlarının orijindeki Hessian matrislerinin yarısıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Hızlı bir denetim de şudur: $Q_A(e_j) = a_{jj}$ olduğundan pozitif tanımlı bir matrisin köşegen elemanlarının hepsi pozitif, negatif tanımlı bir matrisinkilerin hepsi negatiftir. Köşegende biri pozitif, biri negatif iki eleman varsa matris belirsizdir.
Tanımlılık özdeğerlerle de ifade edilebilir. Lineer cebirden bilindiği gibi reel simetrik bir A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, ..., \lambda_n$ reeldir ve $\mathbb{R}^n$'nin, $Aw_i = \lambda_i w_i$ koşulunu sağlayan özvektörlerden oluşan bir ortonormal tabanı $\{w_1, ..., w_n\}$ vardır. $h = c_1 w_1 + ... + c_n w_n$ yazılırsa ortonormallik gereği

$$h^T A h = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2$$

olur. Buradan A'nın pozitif tanımlı olmasının bütün özdeğerlerin pozitif olmasına, negatif tanımlı olmasının hepsinin negatif olmasına, belirsiz olmasının hem pozitif hem negatif özdeğer bulunmasına, pozitif yarı tanımlı olmasının da bütün özdeğerlerin ≥ 0 olmasına denk olduğu görülür. Özdeğerleri hesaplamak çoğu zaman zor olduğundan biz tanımla ve birazdan kuracağımız determinant ölçütleriyle çalışacağız. "Sıfırdan farklı her vektörde pozitif" koşulunun nicel bir karşılığı vardır.

Lemma 18.1 (Pozitif Tanımlı Formun Alttan Sınırı). *A, $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı bir simetrik matris ise öyle bir $m > 0$ sayısı vardır ki her $h \in \mathbb{R}^n$ için*

$$h^T A h \geq m \parallel h \parallel^2$$

olur.

> ***İspat.***
> *$S = S(0,1) = \{h \in \mathbb{R}^n : \parallel h \parallel = 1\}$ birim yuvar yüzeyini ele alalım.*
> ***S kompakttır.** Norm sürekli bir fonksiyondur (Sonuç 10.2) ve S, $\mathbb{R}$'nin kapalı $\{1\}$ kümesinin norm altındaki ters görüntüsüdür; dolayısıyla S kapalıdır (Sonuç 11.2). $S \subseteq B[0,1]$ olduğundan S sınırlıdır. Heine–Borel teoremi (Teorem 5.5) gereği S kompakttır; $e_1 \in S$ olduğundan boş da değildir.*
> ***Form S üzerinde en küçük değerini alır.** $Q_A(h) = \sum_{j,k} a_{jk} h_j h_k$, h'nin koordinatlarının bir polinomudur, dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ üzerinde süreklidir (Teorem 10.3). Uç değer teoremi (Teorem 11.3) gereği öyle bir $h_0 \in S$ vardır ki her $h \in S$ için $Q_A(h) \geq Q_A(h_0)$ olur. $m = Q_A(h_0)$ diyelim. $\parallel h_0 \parallel = 1$ olduğundan $h_0 \neq 0$'dır ve A pozitif tanımlı olduğundan $m > 0$'dır.*
> ***Eşitsizlik.** $h = 0$ ise iki yan da sıfırdır. $h \neq 0$ ise $\dfrac{h}{\parallel h \parallel} \in S$'dir ve $Q_A(th) = t^2 Q_A(h)$ özelliği $t = \parallel h \parallel$ ile*
>
> $$h^T A h = \parallel h \parallel^2 Q_A\left(\frac{h}{\parallel h \parallel}\right) \geq m \parallel h \parallel^2$$
>
> *verir.* ■

Lemma, formun $\parallel h \parallel^2$'nin sabit bir katından büyük kaldığını söyler. Tek değişkende 1×1 tipindeki (c) matrisi için $m = c$ alınabilir ve lemma apaçıktır; çok değişkende m sayısı, formun birim yuvar yüzeyi üzerindeki en küçük değeridir (özdeğerler diliyle en küçük özdeğer). A negatif tanımlıysa lemma pozitif tanımlı $-A$ matrisine uygulanarak $h^T A h \leq -m \parallel h \parallel^2$ elde edilir.

(1) eşitliğindeki Hessian matrisi a'da değil, a ile $a + h$ arasındaki bilinmeyen bir $a + \theta h$ noktasında hesaplanır. Bu yüzden pozitif tanımlılığı a'dan yakın noktalara taşımamız gerekiyor.

Önerme 18.1 (Pozitif Tanımlılık Komşulukta Korunur). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f \in C^2(U)$ ve $a \in U$ olsun. $H_f(a)$ pozitif tanımlı ve $m > 0$, $H_f(a)$ için Lemma 18.1 ile verilen sayı olsun. O zaman öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki $B(a, \varepsilon) \subseteq U$ olur ve her $x \in B(a, \varepsilon)$ ile her $h \in \mathbb{R}^n$ için*

$$h^T H_f(x)\, h \geq \frac{m}{2} \parallel h \parallel^2$$

sağlanır. Özel olarak $H_f(x)$ matrisi her $x \in B(a, \varepsilon)$ için pozitif tanımlıdır.

> ***İspat.***
> *Kısaltma olarak $f_{jk} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k}$ yazalım ve $x \in U$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mid f_{jk}(x) - f_{jk}(a) \mid$$

diyelim. $f \in C^2(U)$ *olduğundan her* f_{jk} *süreklidir; sürekli fonksiyonların farkı, mutlak değeri ve toplamı sürekli olduğundan (Teorem 10.2, Teorem 10.4)* s *de süreklidir ve* $s(a) = 0$*'dır. Süreklilik tanımını (Tanım 10.1)* $\frac{m}{2}$ *sayısıyla uygulayıp gerekirse yarıçapı küçülterek öyle bir* $\varepsilon > 0$ *buluruz ki* $B(a,\varepsilon) \subseteq U$ *ve her* $x \in B(a,\varepsilon)$ *için* $s(x) < \frac{m}{2}$ *olur.*

Her j *için* $\mid h_j \mid \leq \parallel h \parallel$ *olduğundan her* j,k *için* $\mid h_j h_k \mid \leq \parallel h \parallel^2$*'dir. Dolayısıyla* $x \in B(a,\varepsilon)$ *ve* $h \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\begin{aligned} \left|h^T H_f(x)\, h - h^T H_f(a)\, h\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(f_{jk}(x) - f_{jk}(a) \right) h_j h_k\right| \\ &\leq s(x) \parallel h \parallel^2 \leq \frac{m}{2} \parallel h \parallel^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan ve lemmadan

$$\begin{aligned} h^T H_f(x)\, h &\geq h^T H_f(a)\, h - \frac{m}{2} \parallel h \parallel^2 \\ &\geq m \parallel h \parallel^2 - \frac{m}{2} \parallel h \parallel^2 = \frac{m}{2} \parallel h \parallel^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $h \neq 0$ *ise sağ yan pozitiftir.* $H_f(x)$ *simetrik olduğundan (Önerme 17.1) pozitif tanımlıdır.* ■

18.5 İkinci Türev Testi

Artık tek değişkenli ikinci türev testinin çok değişkenli karşılığını ifade edebiliriz: $f''(x_0) > 0$ koşulunun yerini Hessian matrisinin pozitif tanımlı olması alır.

Teorem 18.2 (İkinci Türev Testi). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f \in C^2(U)$ ve $a \in U$, f'nin bir durgun noktası olsun: $\nabla f(a) = 0$.*

- ***(i)*** *$H_f(a)$ pozitif tanımlı ise f'nin a'da kesin yerel minimumu vardır.*
- ***(ii)*** *$H_f(a)$ negatif tanımlı ise f'nin a'da kesin yerel maksimumu vardır.*
- ***(iii)*** *$H_f(a)$ belirsiz ise a, f'nin bir eyer noktasıdır.*
- ***(iv)*** *$H_f(a)$ yarı tanımlı olup tanımlı değilse test sonuç vermez: a yerel minimum, yerel maksimum ya da eyer noktası olabilir.*

İspat.
$B(a,r) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ seçelim. $\parallel h \parallel < r$ ise $t \in [0,1]$ için $\parallel (a+th) - a \parallel = t \parallel h \parallel < r$ olduğundan a ile $a+h$ arasındaki doğru parçası $B(a,r)$ içindedir; dolayısıyla (1) eşitliği her $\parallel h \parallel < r$ için geçerlidir.
(i) *Önerme 18.1 gereği öyle bir $m > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq r$ vardır ki her $x \in B(a,\varepsilon)$ ve her $\xi \in \mathbb{R}^n$ için $\xi^T H_f(x)\, \xi \geq \frac{m}{2} \parallel \xi \parallel^2$ olur. $0 < \parallel h \parallel < \varepsilon$ olsun. (1) eşitliğindeki $a+\theta h$ noktası için $\parallel \theta h \parallel \leq \parallel h \parallel < \varepsilon$ olduğundan $a + \theta h \in B(a,\varepsilon)$'dır; dolayısıyla*

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\, h^T H_f(a+\theta h)\, h \geq \frac{m}{4} \parallel h \parallel^2 > 0$$

olur. Yani $x \neq a$ olan her $x \in B(a,\varepsilon)$ için $f(x) > f(a)$'dır: f'nin a'da kesin yerel minimumu vardır.
(ii) *$g = -f$ alalım. $g \in C^2(U)$, $\nabla g(a) = -\nabla f(a) = 0$ ve $H_g(a) = -H_f(a)$'dır. $H_f(a)$ negatif tanımlı olduğundan $h \neq 0$ için $h^T H_g(a)\, h = -h^T H_f(a)\, h > 0$ olur; $H_g(a)$ pozitif tanımlıdır. (i) gereği g'nin a'da kesin yerel minimumu vardır: a'ya yeterince yakın her $x \neq a$ için $-f(x) > -f(a)$, yani $f(x) < f(a)$ olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(iii) *$H_f(a)$ belirsiz olduğundan $u^T H_f(a)\,u < 0 < v^T H_f(a)\,v$ olacak biçimde u, v vektörleri vardır; ikisi de sıfırdan farklıdır. Yine $f_{jk} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}$ kısaltmasıyla*

$$\psi(x) = v^T H_f(x)\,v = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(x)\,v_j v_k$$

fonksiyonu, sürekli f_{jk} fonksiyonlarının sabit katsayılı bir toplamı olduğundan U üzerinde süreklidir ve $\psi(a) > 0$'dır. Süreklilik tanımı $\dfrac{\psi(a)}{2}$ sayısıyla uygulanırsa öyle bir $0 < \varepsilon_1 \le r$ bulunur ki her $x \in B(a,\varepsilon_1)$ için $\psi(x) > \dfrac{\psi(a)}{2} > 0$ olur. $0 < |\,t\,| < \dfrac{\varepsilon_1}{\|\,v\,\|}$ olsun. $h = tv$ için $\|\,h\,\| < \varepsilon_1$ olduğundan (1) gereği

$$f(a+tv) - f(a) = \frac{t^2}{2}\,v^T H_f(a+\theta tv)\,v = \frac{t^2}{2}\,\psi(a+\theta tv) > 0$$

bulunur. Aynı akıl yürütme $\varphi(x) = u^T H_f(x)\,u$ fonksiyonuna uygulanırsa ($\varphi(a) < 0$), $|\,t\,|$ yeterince küçük ve sıfırdan farklıyken $f(a+tu) - f(a) < 0$ elde edilir.
Şimdi $\rho > 0$ keyfi olsun. t yeterince küçük seçilerek $a+tv$ ve $a+tu$ noktaları $B(a,\rho)$ içine alınabilir ve bu noktalarda $f(a+tu) < f(a) < f(a+tv)$ olur. Demek ki a ne yerel maksimum ne yerel minimumdur; durgun nokta olduğundan bir kritik noktadır, dolayısıyla bir eyer noktasıdır.
(iv) *Bu durumda üç sonucun da gerçekleştiğini örnekler gösterir. x^4+y^2, $-x^4-y^2$ ve x^3+y^2 fonksiyonlarının üçü için de $(0,0)$ bir durgun noktadır ve Hessian matrisi yarı tanımlıdır ama tanımlı değildir; birincide kesin yerel minimum, ikincide kesin yerel maksimum, üçüncüde eyer noktası vardır (Örnek 18.11, Örnek 18.12). Demek ki bu durumda yalnız $H_f(a)$ matrisine bakarak karar verilemez.* ■

(iii) durumunun ispatı eyer noktasının geometrisini de açıklar: a'dan v doğrultusunda geçen doğru üzerinde f'nin a'da kesin yerel minimumu, u doğrultusunda geçen doğru üzerinde kesin yerel maksimumu vardır. u ve v olarak $H_f(a)$ matrisinin negatif ve pozitif özdeğerlerine ait özvektörler alınabilir: $H_f(a)v = \lambda v$ ise $v^T H_f(a)\,v = \lambda\,\|\,v\,\|^2$'dir.

Teoremin arkasındaki fikir, Sonuç 17.2 içindeki kalan terim tahminiyle tek bir formülde toplanır. $\nabla f(a) = 0$ olduğundan

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\,h^T H_f(a)\,h + R_2(a+h;a)$$

yazılır ve $h \to 0$ iken $\dfrac{R_2(a+h;a)}{\|\,h\,\|^2} \to 0$ olur. Kritik noktanın yakınında fonksiyon, kuadratik formun yarısı artı $\|\,h\,\|^2$'ye göre küçük kalan bir hata gibi davranır. Form pozitif tanımlı ise lemma gereği $\frac{1}{2}h^T H_f(a) h \ge \frac{m}{2}\,\|\,h\,\|^2$ olur; $\|\,h\,\|$ yeterince küçükken $|\,R_2(a+h;a)\,| < \frac{m}{4}\,\|\,h\,\|^2$ olduğundan

$$f(a+h) - f(a) > \frac{m}{2}\,\|\,h\,\|^2 - \frac{m}{4}\,\|\,h\,\|^2 = \frac{m}{4}\,\|\,h\,\|^2$$

bulunur; bu, (i) için ikinci bir ispattır. Form belirsiz ise işaret değiştirir ve fonksiyon da onunla birlikte işaret değiştirir. Form yarı tanımlı ve bir $h \neq 0$ için $h^T H_f(a)\,h = 0$ ise o doğrultuda baş terim yok olur ve kararı R_2 kalan terimi, yani üçüncü ve daha yüksek mertebeden terimler verir. Testin (iv) durumunda susmasının nedeni budur.

18.6 İki Değişkenli Fonksiyonlar

İki değişkende Hessian matrisi 2×2 tipindedir ve tanımlılığı iki sayının işaretinden okunur.

Önerme 18.2 (İkiye İki Simetrik Matrislerin Sınıflandırılması). *$p, q, r \in \mathbb{R}$ ve*

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun; $\Delta = \det A = pr - q^2$ *diyelim.*

- ***(a)*** *A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul* $p > 0$ *ve* $\Delta > 0$ *olmasıdır.*
- ***(b)*** *A'nın negatif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul* $p < 0$ *ve* $\Delta > 0$ *olmasıdır.*
- ***(c)*** *A'nın belirsiz olması için gerek ve yeter koşul* $\Delta < 0$ *olmasıdır.*
- ***(d)*** $\Delta = 0$ *ise* A *yarı tanımlıdır ama tanımlı değildir.*

> ***İspat.***
> $h = (h_1, h_2)$ *için*
>
> $$Q(h) = h^T A h = p h_1^2 + 2q h_1 h_2 + r h_2^2$$
>
> *olur. Kareye tamamlayarak*
>
> $$p\, Q(h) = (p h_1 + q h_2)^2 + \Delta\, h_2^2 \tag{2}$$
>
> *özdeşliğini elde ederiz; gerçekten sağ yan açılırsa*
>
> $$p^2 h_1^2 + 2pq\, h_1 h_2 + q^2 h_2^2 + (pr - q^2) h_2^2 = p\, Q(h)$$
>
> *bulunur. Ayrıca* $(-q, p)$ *vektörü için*
>
> $$Q(-q, p) = pq^2 - 2pq^2 + rp^2 = p\,(pr - q^2) = p\,\Delta$$
>
> *olur.*
> ***$\Delta > 0$ durumu.*** $pr > q^2 \geq 0$ *olduğundan* $p \neq 0$*'dır.* $h \neq 0$ *olsun. (2) eşitliğinin sağ yanı negatif olamaz; sıfır olsaydı* $h_2 = 0$ *ve* $p h_1 + q h_2 = p h_1 = 0$*, yani* $h = 0$ *olurdu. Demek ki* $p\, Q(h) > 0$*'dır:* $p > 0$ *ise sıfırdan farklı her* h *için* $Q(h) > 0$*,* $p < 0$ *ise* $Q(h) < 0$ *olur.* A *birinci durumda pozitif tanımlı, ikincisinde negatif tanımlıdır.*
> ***$\Delta < 0$ durumu.*** $p \neq 0$ *ise* $Q(1, 0) = p$ *ile* $Q(-q, p) = p\,\Delta$ *zıt işaretlidir.* $p = 0$ *ise* $\Delta = -q^2 < 0$ *olduğundan* $q \neq 0$*'dır;* $Q(t, 1) = 2qt + r$ *ifadesi* t*'nin eğimi sıfırdan farklı bir birinci derece polinomu olduğundan hem pozitif hem negatif değerler alır. İki durumda da* A *belirsizdir.*
> ***$\Delta = 0$ durumu.*** $p \neq 0$ *ise (2) eşitliği* $p\, Q(h) = (p h_1 + q h_2)^2 \geq 0$ *verir;* Q *hep* p *ile aynı işaretli ya da sıfırdır, yani* A *yarı tanımlıdır.* $(-q, p) \neq 0$ *ve* $Q(-q, p) = p\,\Delta = 0$ *olduğundan* A *tanımlı değildir.* $p = 0$ *ise* $q^2 = pr - \Delta = 0$*, yani* $q = 0$*'dır ve* $Q(h) = r h_2^2$ *olur; bu form yarı tanımlıdır ve* $Q(1, 0) = 0$ *olduğundan tanımlı değildir. Bu, (d)'dir.*
> ***Denklikler.*** *Üç durum birbirini dışlar ve bütün olasılıkları kapsar.* A *pozitif tanımlı olsun.* $\Delta < 0$ *olamaz, çünkü o zaman* A *belirsiz olurdu;* $\Delta = 0$ *olamaz, çünkü o zaman* A *tanımlı olmazdı;* $\Delta > 0$ *ve* $p < 0$ *da olamaz, çünkü o zaman* A *negatif tanımlı olurdu. Öyleyse* $p > 0$ *ve* $\Delta > 0$*'dır; bu, (a)'nın gereklilik yönüdür. (b) ve (c)'nin gereklilik yönleri de aynı elemeyle elde edilir; yeterlilik yönleri yukarıda gösterildi.*
> ■

Sonuç 18.2 (İki Değişkende İkinci Türev Testi). *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $f \in C^2(U)$ ve $(x_0, y_0) \in U$ için $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ olsun. İkinci kısmi türevleri (x_0, y_0) noktasında hesaplayarak*

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - \big(\, f_{xy}(x_0, y_0)\big)^2$$

diyelim.

- ***(i)*** $D > 0$ *ve* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *ise* f*'nin* (x_0, y_0) *noktasında kesin yerel minimumu vardır.*
- ***(ii)*** $D > 0$ *ve* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *ise* f*'nin* (x_0, y_0) *noktasında kesin yerel maksimumu vardır.*
- ***(iii)*** $D < 0$ *ise* (x_0, y_0) *bir eyer noktasıdır.*
- ***(iv)*** $D = 0$ *ise test sonuç vermez.*

> ***İspat.***
> *Clairaut teoremi (Teorem 13.1) gereği* $f_{xy} = f_{yx}$ *olduğundan, türevler* (x_0, y_0) *noktasında hesaplanmak üzere*
>
> $$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

simetrik bir matristir ve determinantı D'dir. Önerme 18.2 $p = f_{xx}(x_0, y_0)$ ile uygulanırsa $H_f(x_0, y_0)$ matrisi (i) durumunda pozitif tanımlı, (ii) durumunda negatif tanımlı, (iii) durumunda belirsiz, (iv) durumunda ise yarı tanımlı ama tanımlı değildir. Sonuç Teorem 18.2 ile elde edilir. ■

D, Hessian matrisinin determinantıdır. $D > 0$ iken $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2 \geq 0$ olduğundan f_{xx} sıfır olamaz ve f_{xx} ile f_{yy} aynı işaretlidir; bu yüzden (i) ve (ii)'de f_{xx} yerine f_{yy}'nin işaretine de bakılabilir. $D < 0$ ise f_{xx}'in işaretine bakmaya gerek yoktur: $f_{xx} = 0$ olsa bile nokta bir eyer noktasıdır.

Dört adımda kritik noktaların sınıflandırılması

1. **Kritik noktalar.** Birinci kısmi türevler hesaplanır ve $\nabla f = 0$ denklem sistemi çözülür; kısmi türevlerin var olmadığı noktalar da not edilir.
2. **Hessian.** İkinci kısmi türevlerden $H_f(x, y)$ matrisi genel bir noktada yazılır.
3. **Test.** Her durgun noktada $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ ve f_{xx} hesaplanır.
4. **Karar.** $D > 0$ ve $f_{xx} > 0$ ise yerel minimum, $D > 0$ ve $f_{xx} < 0$ ise yerel maksimum, $D < 0$ ise eyer noktası vardır. $D = 0$ olan noktalar ve kısmi türevin olmadığı noktalar tanıma dönülerek doğrudan incelenir. Ekstremum değerleri f'de yerine koyarak bulunur.

Örnek 18.3 (Paraboloidin Tepe Noktası). $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kritik noktalar. $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ olur ve $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ eşitliği yalnız $(x, y) = (0, 0)$ için sağlanır. f bir polinom olduğundan kısmi türevleri her yerde vardır; tek kritik nokta $(0, 0)$'dır.
Hessian. $f_{xx} = f_{yy} = 2$ ve $f_{xy} = f_{yx} = 0$ olduğundan her (x, y) için

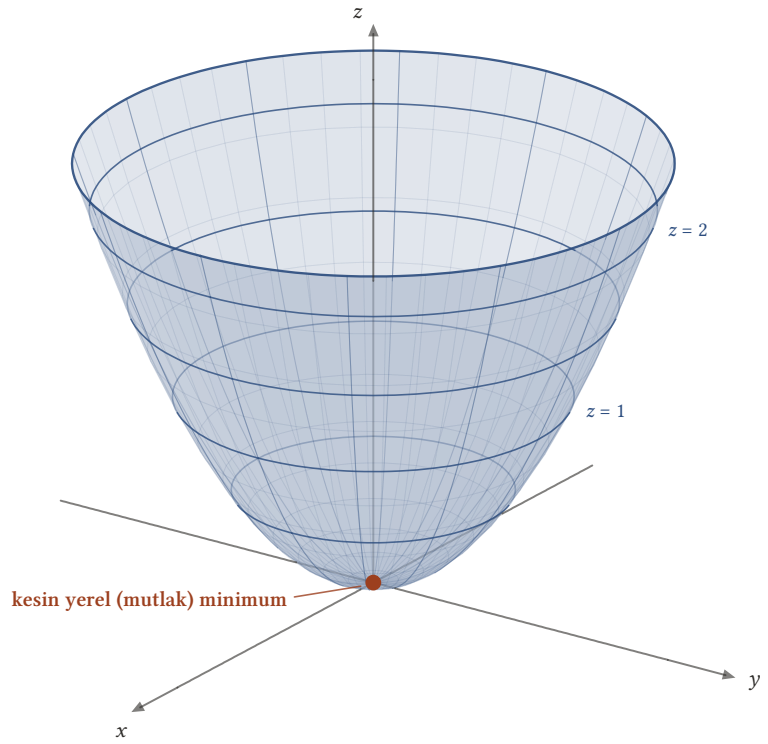
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olur.
Test. $(0, 0)$ noktasında

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

ve $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$'dır. Sonuç 18.2 gereği f'nin $(0, 0)$ noktasında kesin yerel minimumu vardır; yerel minimum değeri $f(0, 0) = 0$'dır.
Bu minimum aslında mutlaktır: her (x, y) için $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ olur. Grafik, tepe noktası orijinde olan ve yukarı açılan bir paraboloiddir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.2: $z = x^2 + y^2$ dönel paraboloidinin $x^2 + y^2 \le 2{,}25$ diski üzerindeki parçası. İnce çemberler $z = 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$ seviyelerindedir. Yüzeyin en alt noktası orijindir: $f(0,0) = 0$ kesin ve mutlak minimum değeridir.

■

Örnek 18.4 (Üç Kritik Noktalı Bir Polinom). $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimum değerlerini ve varsa eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Kritik noktalar. Kısmi türevleri sıfıra eşitleyelim:

$$f_x = 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow y = x^3,$$
$$f_y = 4y^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = y^3.$$

Birinciyi ikincide yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 0 = y^3 - x = x^9 - x &= x\,(x^8 - 1) \\ &= x\,(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \end{aligned}$$

olur. $x^2 + 1$ ve $x^4 + 1$ çarpanları hiç sıfır olmadığından $x = 0$, $x = 1$ ya da $x = -1$'dir; $y = x^3$ ile kritik noktalar $(0,0)$, $(1,1)$ ve $(-1,-1)$ bulunur.
Hessian. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 12y^2$ olduğundan

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

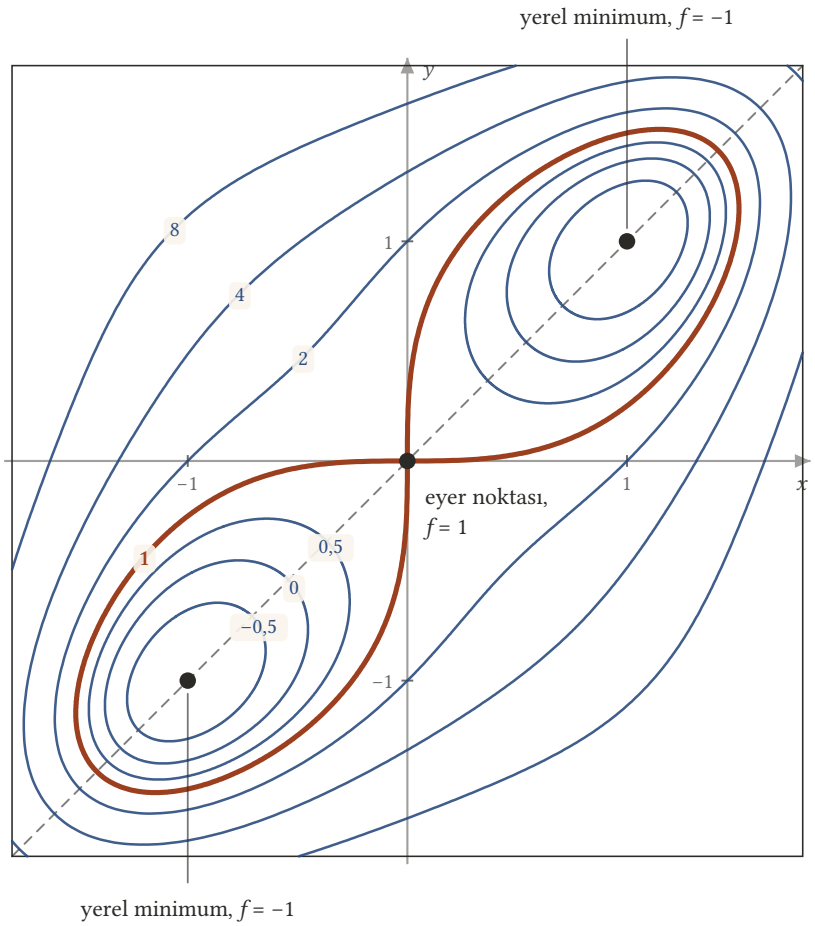
ve $D(x,y) = 144\,x^2y^2 - 16$ olur.
Test.

- $(0,0)$: $D(0,0) = -16 < 0$ olduğundan $(0,0)$ bir eyer noktasıdır; $f(0,0) = 1$.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $(1,1)$: $D(1,1) = 144 - 16 = 128 > 0$ ve $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ olduğundan kesin yerel minimum vardır; yerel minimum değeri $f(1,1) = 1 + 1 - 4 + 1 = -1$'dir.
- $(-1,-1)$: $D(-1,-1) = 128 > 0$ ve $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ olduğundan yine kesin yerel minimum vardır; $f(-1,-1) = -1$'dir.

Yerel maksimum yoktur, çünkü kritik noktaların hiçbiri yerel maksimum değildir.



Şekil 18.3: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ fonksiyonunun $-0{,}5$; 0; 0,5; 1; 2; 4; 8 seviye eğrileri. Kalın sekiz biçimli eğri $f = 1$ seviyesidir ve eyer noktası olan orijinden geçer. Bu seviyenin altındaki eğriler (1, 1) ve (−1, −1) minimumlarını ayrı ayrı çevreler, üstündekiler ise üç kritik noktayı birlikte çevreler. Kesikli doğru $y = x$'tir.

İki yerel minimum aslında mutlak minimumdur. Gerçekten

$$f(x,y) + 1 = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2 - y^2)^2 + 2\,(xy - 1)^2 \geq 0$$

olduğundan her (x, y) için $f(x, y) \geq -1$'dir. ■

Örnek 18.5 (İkinci Dereceden Bir Polinom). $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Kritik noktalar. $f_x = 2x + y - 2$ ve $f_y = x + 2y - 3$ olduğundan

$$2x + y - 2 = 0,$$
$$x + 2y - 3 = 0$$

sistemini çözmeliyiz. Birinciden $y = 2 - 2x$ bulunur; ikincide yerine yazılırsa $x + 4 - 4x - 3 = 0$, yani $x = \frac{1}{3}$ ve $y = \frac{4}{3}$ olur. Tek kritik nokta $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$'tür.

Hessian ve test. İkinci türevler sabittir:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$D = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$ ve $f_{xx} = 2 > 0$ olduğundan Sonuç 18.2 gereği $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ noktasında kesin yerel minimum vardır. Minimum değeri

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{2}{3} - 4 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} - 4 = -\frac{7}{3}$$

bulunur.

Bu minimum mutlaktır. f ikinci dereceden bir polinom olduğundan Hessian matrisi her noktada aynıdır ve (1) eşitliği $a = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ için $f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} h^T H h$ biçimini alır. H pozitif tanımlı olduğundan sıfırdan farklı her h için sağ yan pozitiftir. ■

Örnek 18.6 (Kosinüslü Bir Fonksiyon). $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 3\}$ açık şeridi üzerinde tanımlı $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve varsa eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.

Kritik noktalar. $f_x = 2y \sin x$ ve $f_y = 2y - 2\cos x$ olduğundan

$$2y \sin x = 0,$$
$$2y - 2\cos x = 0$$

sistemini çözeriz. İkinci denklemden $y = \cos x$ bulunur; birincide yerine yazılırsa $\cos x \sin x = 0$ olur.

- $\cos x = 0$ ise: $-1 < x < 3$ aralığındaki tek çözüm $x = \frac{\pi}{2}$'dir, çünkü $-\frac{\pi}{2} < -1$ ve $\frac{3\pi}{2} > 3$'tür. Bu durumda $y = 0$ ve kritik nokta $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ olur.
- $\sin x = 0$ ise: $-1 < x < 3$ aralığındaki tek çözüm $x = 0$'dır, çünkü $\pi > 3$'tür. Bu durumda $y = \cos 0 = 1$ ve kritik nokta $(0, 1)$ olur.

Hessian. $f_{xx} = 2y \cos x$, $f_{xy} = 2 \sin x$, $f_{yy} = 2$ olduğundan

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y \cos x & 2 \sin x \\ 2 \sin x & 2 \end{pmatrix}$$

olur.

Test.

- $(0, 1)$ noktasında $H_f(0, 1)$ matrisinin köşegeni $2, 2$, köşegen dışı elemanları 0'dır; $D = 4 > 0$ ve $f_{xx} = 2 > 0$ olduğundan kesin yerel minimum vardır. Değeri $f(0, 1) = 1 - 2 = -1$'dir.
- $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ noktasında $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 2$ olduğundan $D = 0 \cdot 2 - 2^2 = -4 < 0$'dır. Bu nokta bir eyer noktasıdır ve $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$'dır.

Kareye tamamlayarak minimumun şerit üzerinde mutlak olduğunu da görebiliriz:

$$f(x, y) = (y - \cos x)^2 - \cos^2 x \geq -\cos^2 x \geq -1.$$

Eşitlik için $y = \cos x$ ve $\cos^2 x = 1$ gerekir; şeritte bu yalnız $(0, 1)$ noktasında olur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 18.7 (Kübik Terimli Bir Polinom). $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını araştırınız, tiplerini ve varsa eyer noktalarını belirleyiniz.

Çözüm.
Kritik noktalar. $f_x = 2x + 2xy = 2x(1+y)$ ve $f_y = 2y + x^2$'dir. $f_x = 0$ denklemi $x = 0$ ya da $y = -1$ verir.

- $x = 0$ ise $f_y = 2y = 0$, yani $y = 0$ olur: $(0,0)$.
- $y = -1$ ise $f_y = -2 + x^2 = 0$, yani $x = \pm\sqrt{2}$ olur: $(\sqrt{2}, -1)$ ve $(-\sqrt{2}, -1)$.

Hessian. $f_{xx} = 2 + 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yy} = 2$ olduğundan

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

ve $D(x,y) = 4(1+y) - 4x^2$ olur.
Test.

- $(0,0)$: $D = 4 > 0$ ve $f_{xx} = 2 > 0$; kesin yerel minimum vardır, değeri $f(0,0) = 4$'tür.
- $(\pm\sqrt{2}, -1)$: $f_{xx} = 0$ ve $D = 0 - 4 \cdot 2 = -8 < 0$; iki nokta da eyer noktasıdır. Bu noktalarda $f = 2 + 1 - 2 + 4 = 5$'tir.

$(0,0)$ noktasındaki yerel minimum mutlak değildir. $y = -2$ doğrusu üzerinde

$$f(x,-2) = x^2 + 4 - 2x^2 + 4 = 8 - x^2$$

olur; örneğin $f(10,-2) = -92 < 4$'tür. Hatta $x \to \infty$ iken $f(x,-2) \to -\infty$ olduğundan f'nin mutlak minimumu yoktur. Yerel minimum, adı üstünde, yalnız $(0,0)$'ın yakın çevresindeki değerlerle karşılaştırma yapar. ■

18.7 Sylvester Ölçütü

Üç ve daha çok değişkende Hessian matrisinin tanımlılığını tanımdan denetlemek zorlaşır. Önerme 18.2 içindeki p ve Δ sayıları, matrisin sol üst köşesinden başlayan alt matrislerinin determinantlarıdır; bu gözlem her boyuta genelleşir.

Tanım 18.10 (Asal Alt Determinantlar). $A = (a_{ij})$, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $k = 1, 2, \ldots, n$ için A'nın ilk k satırı ve ilk k sütunundan oluşan $k \times k$ tipindeki alt matrisini A_k ile gösterelim.

$$D_k = \det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

sayısına A'nın k. **asal alt determinantı** denir.

Yani $D_1 = a_{11}$, $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ve $D_n = \det A$'dır. Simetrik bir matriste $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ olur; iki değişkenli bir Hessian matrisi için $D_1 = f_{xx}$ ve $D_2 = D$'dir.

Teorem 18.3 (Sylvester Ölçütü). *A, $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris ve $D_1, \ldots, D_n$ asal alt determinantları olsun.*

- ***(a)** A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul her $k = 1, \ldots, n$ için $D_k > 0$ olmasıdır.*
- ***(b)** A'nın negatif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul her k için $(-1)^k D_k > 0$ olmasıdır; yani işaretler $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, ... biçiminde sırayla değişir.*
- ***(c)** $D_n = \det A \neq 0$ ise ve (a) ile (b)'deki işaret düzenlerinden hiçbiri sağlanmıyorsa A belirsizdir.*

İspat.
***(a), gereklilik.** A pozitif tanımlı ve $1 \le k \le n$ olsun. $\eta \in \mathbb{R}^k$, $\eta \neq 0$ için $h = (\eta, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ vektörü sıfırdan farklıdır ve son $n-k$ koordinatı sıfır olduğundan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\eta^T A_k\,\eta = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,\eta_i\eta_j = h^T A h > 0$$

olur. Yani A_k pozitif tanımlıdır. Geriye, pozitif tanımlı her M matrisinin determinantının pozitif olduğunu göstermek kalıyor. $t \in [0,1]$ için $M_t = (1-t)I + tM$ diyelim. $h \neq 0$ için

$$h^T M_t\, h = (1-t) \parallel h \parallel^2 + t\, h^T M h > 0$$

olur, çünkü iki terim de negatif değildir ve $t < 1$ ise birincisi, $t = 1$ ise ikincisi pozitiftir. Demek ki her M_t pozitif tanımlıdır, dolayısıyla terslenebilirdir: $M_t h = 0$ ise $h^T M_t h = 0$, buradan da $h = 0$ çıkar. O hâlde $\varphi(t) = \det M_t$ hiçbir $t \in [0,1]$ için sıfır olmaz. φ, t'nin bir polinomu olduğundan süreklidir ve $\varphi(0) = \det I = 1 > 0$'dır. $\varphi(1) < 0$ olsaydı ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği φ bir noktada sıfır olurdu. Öyleyse $\det M = \varphi(1) > 0$'dır. $M = A_k$ alınırsa $D_k > 0$ bulunur.
(a), yeterlilik. *n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 1$ ise $A = (a_{11})$, $D_1 = a_{11} > 0$ ve $h \neq 0$ için $h^T A h = a_{11} h^2 > 0$'dır. Sonucun $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki matrisler için doğru olduğunu varsayalım ve A'yı*

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$$

biçiminde bloklara ayıralım: $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ bir sütun vektörü ve $c = a_{nn}$'dir. A_{n-1} simetriktir ve asal alt determinantları $D_1, \ldots, D_{n-1}$'dir; hepsi pozitif olduğundan tümevarım varsayımı gereği A_{n-1} pozitif tanımlıdır, dolayısıyla terslenebilirdir. $w = A_{n-1}^{-1} b$ ve $s = c - b^T w$ diyelim. A_{n-1} simetrik olduğundan $w^T A_{n-1} = (A_{n-1} w)^T = b^T$'dir.
Determinant. *Blok çarpımıyla ve $w^T b = b^T w$ eşitliğiyle*

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ w^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ w^T A_{n-1} & w^T b + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & c \end{pmatrix} = A$$

bulunur. Blok üçgen bir matrisin determinantı köşegen bloklarının determinantlarının çarpımı olduğundan

$$D_n = \det A = 1 \cdot \det A_{n-1} \cdot s = D_{n-1}\, s$$

olur. $D_n > 0$ ve $D_{n-1} > 0$ olduğundan $s > 0$'dır.
Kuadratik form. *$h \in \mathbb{R}^n$'yi $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h = (\eta, t)$ biçiminde yazalım. Blok çarpımıyla*

$$h^T A h = \eta^T A_{n-1}\,\eta + 2t\, b^T \eta + c\, t^2$$

olur. Öte yandan $w^T A_{n-1} = b^T$ ve $w^T A_{n-1} w = b^T w$ olduğundan

$$\begin{aligned}(\eta + tw)^T A_{n-1}(\eta + tw) &= \eta^T A_{n-1}\,\eta + 2t\, w^T A_{n-1}\,\eta + t^2\, w^T A_{n-1} w \\ &= \eta^T A_{n-1}\,\eta + 2t\, b^T \eta + t^2\, b^T w\end{aligned}$$

bulunur. İki eşitlik birlikte

$$h^T A h = (\eta + tw)^T A_{n-1}(\eta + tw) + s\, t^2 \tag{3}$$

verir. A_{n-1} pozitif tanımlı ve $s > 0$ olduğundan sağ yandaki iki terim de negatif değildir. Toplam sıfırsa $t = 0$ ve $\eta + tw = \eta = 0$, yani $h = 0$ olur. Demek ki $h \neq 0$ için $h^T A h > 0$'dır ve A pozitif tanımlıdır.
(b) *A'nın negatif tanımlı olması, $-A$'nın pozitif tanımlı olmasıdır. $-A$'nın k. asal alt matrisi $-A_k$'dır ve $k \times k$ tipindeki bir matrisin -1 ile çarpımının determinantı $(-1)^k$ ile çarpılacağından $\det(-A_k) = (-1)^k D_k$ olur. (a) gereği $-A$'nın pozitif tanımlı olması, her k için $(-1)^k D_k > 0$ olmasına denktir.*
(c) *$D_n \neq 0$ olsun ve A belirsiz olmasın. O zaman A'nın formu ya hiç negatif değer almaz ya da hiç pozitif değer almaz. Önce A'nın pozitif yarı tanımlı olduğunu varsayalım ve aslında pozitif tanımlı olduğunu gösterelim. $h^T A h = 0$ olsun. A simetrik olduğundan her $v \in \mathbb{R}^n$ ve $\tau \in \mathbb{R}$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0 \le (h+\tau v)^T A\,(h+\tau v) = 2\tau\, v^T Ah + \tau^2\, v^T Av$$

olur. $\beta = v^T Ah \neq 0$ *olsaydı,* $\sigma > 0$ *için* $\tau = -\sigma\beta$ *alınınca sağ yan* $\sigma\beta^2(-2+\sigma\, v^T Av)$ *olur ve* σ *yeterince küçükken negatiftir; bu olanaksızdır. Demek ki her* v *için* $v^T Ah = 0$*'dır;* $v = Ah$ *alınırsa* $\| Ah \|^2 = 0$*, yani* $Ah = 0$ *bulunur.* $\det A \neq 0$ *olduğundan* A *terslenebilirdir ve* $h = 0$*'dır. Yani* A *pozitif tanımlıdır ve (a) gereği asal alt determinantlar (a)'daki düzendedir.* A *negatif yarı tanımlıysa aynı akıl yürütme* $-A$*'ya uygulanır ve (b)'deki düzen elde edilir. Karşıt tersiyle:* $D_n \neq 0$ *iken iki düzen de sağlanmıyorsa* A *belirsizdir.* ■

Yeterlilik ispatındaki (3) eşitliği, (2) eşitliğindeki kareye tamamlamanın n boyutlu biçimidir: son değişken bir kareye toplanır ve katsayısı $s = \dfrac{D_n}{D_{n-1}}$ olur. Ölçüt ayrıca Önerme 18.1 için ikinci bir gerekçe verir: $H_f(x)$ matrisinin asal alt determinantları ikinci kısmi türevlerin polinomları olduğundan x'in sürekli fonksiyonlarıdır; a'da hepsi pozitifse a'nın bir komşuluğunda da pozitif kalırlar.
Üç değişkende ölçütü açıkça yazalım. $f \in C^2(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ve

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

için $D_1 = f_{xx}$, $D_2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ ve $D_3 = \det H_f$'dir. Bir durgun noktada:

- $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$ ise kesin yerel minimum vardır;
- $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ ise kesin yerel maksimum vardır;
- $D_3 \neq 0$ olup bu iki düzenden hiçbiri yoksa nokta bir eyer noktasıdır;
- $D_3 = 0$ ise asal alt determinantlar karar vermez.

Son durumda Hessian matrisi belirsiz de olabilir (o zaman nokta yine eyer noktasıdır), tanımlı olmayan bir yarı tanımlı matris de olabilir (o zaman test sonuç vermez). Böyle bir noktada tanıma dönülür: formun pozitif ve negatif değer aldığı iki vektör bulunabiliyorsa matris belirsizdir. Bir uyarı da ekleyelim: bütün $D_k \ge 0$ olması matrisin pozitif yarı tanımlı olduğunu göstermez. Örneğin

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi için $D_1 = D_2 = 0$'dır, ama form $-h_2^2$ olduğundan matris negatif yarı tanımlıdır. Sınıflandırma reçetesinde üç ve daha çok değişkende yalnız üçüncü adım değişir: D ve f_{xx} yerine $D_1, \dots, D_n$ hesaplanır.

Örnek 18.8 (Üç Değişkende Bir Eyer Noktası). $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kritik noktalar.

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy - 2 = 0, \\ f_y &= x^2 + 2yz = 0, \\ f_z &= y^2 + 2z = 0. \end{aligned}$$

Üçüncü denklemden $z = -\dfrac{y^2}{2}$ bulunur; ikincide yerine yazılırsa $x^2 - y^3 = 0$, yani $x^2 = y^3$ olur. Birinci denklem $xy = 1$ verir; dolayısıyla $x \neq 0$, $y \neq 0$ ve $x = \dfrac{1}{y}$'dir. Bunu $x^2 = y^3$ eşitliğinde yerine yazarsak $\dfrac{1}{y^2} = y^3$, yani $y^5 = 1$ bulunur. $t \mapsto t^5$ kesin artan olduğundan tek reel çözüm $y = 1$'dir; buradan $x = 1$ ve $z = -\dfrac{1}{2}$ olur. Tek kritik nokta $P = \left(1, 1, -\dfrac{1}{2}\right)$'dir.
Hessian. İkinci kısmi türevler $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{xz} = 0$, $f_{yy} = 2z$, $f_{yz} = 2y$, $f_{zz} = 2$'dir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix}.$$

P noktasında

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

olur.
Asal alt determinantlar. Birinci satıra göre açarak

$$\begin{aligned} D_1 &= 2, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6, \\ D_3 &= 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2(-6) - 2\cdot 4 = -20 \end{aligned}$$

bulunur.
Karar. $D_3 = -20 \neq 0$'dır. $D_2 < 0$ olduğundan ne (a)'daki $(+,+,+)$ ne de (b)'deki $(-,+,-)$ düzen sağlanır. Sylvester ölçütü (Teorem 18.3) (c) gereği $H_f(P)$ belirsizdir ve Teorem 18.2 gereği P bir eyer noktasıdır; $f(P) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - 2 = -\tfrac{5}{4}$'tür.
Belirsizliği doğrudan da görebiliriz: köşegen elemanlarından $e_1^{T} H_f(P)\, e_1 = 2 > 0$ ve $e_2^{T} H_f(P)\, e_2 = -1 < 0$'dır. ■

Örnek 18.9 (Üç Değişkenli Kübik Bir Fonksiyon).

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve varsa eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Kritik noktalar.

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 12y = 0, \\ f_y &= 2y + 12x = 0, \\ f_z &= 2z + 2 = 0. \end{aligned}$$

Üçüncü denklemden $z = -1$, ikinciden $y = -6x$ bulunur. Birincide yerine yazılırsa $3x^2 - 72x = 3x(x-24) = 0$, yani $x = 0$ ya da $x = 24$ olur. Kritik noktalar $(0,0,-1)$ ve $(24,-144,-1)$'dir.
Hessian.

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olur ve üçüncü satıra göre açarak $D_3 = 2D_2$ bulunur.
$(0,0,-1)$ noktası. $D_1 = 0$, $D_2 = 0\cdot 2 - 144 = -144$, $D_3 = -288 \neq 0$'dır. İki işaret düzeni de sağlanmadığından Sylvester ölçütünün (c) şıkkı gereği Hessian belirsizdir; nokta bir eyer noktasıdır ve $f(0,0,-1) = 1 - 2 = -1$'dir. $D_1 = 0$ olması burada bir engel değildir; önemli olan $D_3 \neq 0$ olmasıdır. Doğrudan denetim: $h = (1,-1,0)$ için $h^{T}Hh = 0 - 24 + 2 = -22 < 0$, $h = e_2$ için $h^{T}Hh = 2 > 0$'dır.
$(24,-144,-1)$ noktası.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$H_f(24,-144,-1)=\begin{pmatrix}144 & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

için $D_1=144>0$, $D_2=288-144=144>0$, $D_3=2\cdot 144=288>0$'dır. Hessian pozitif tanımlıdır; kesin yerel minimum vardır. Değeri

$$f(24,-144,-1)=13824+20736+1-41472-2=-6913$$

bulunur. Bu minimum mutlak değildir: $f(x,0,-1)=x^3-1$ ifadesi $x\to-\infty$ iken $-\infty$'a gider. ■

Örnek 18.10 (Çarpım Eksi Kareler). $f(x,y,z)=xyz-x^2-y^2-z^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kritik noktalar. Kısmi türevleri sıfıra eşitleyelim:

$$\begin{aligned} f_x &= yz-2x=0,\\ f_y &= xz-2y=0,\\ f_z &= xy-2z=0. \end{aligned}$$

Koordinatlardan biri sıfırsa hepsi sıfırdır: örneğin $x=0$ ise ikinci denklemden $y=0$, üçüncüden $z=0$ olur; $y=0$ ya da $z=0$ durumları da aynıdır. Bu, $(0,0,0)$ kritik noktasını verir.
Hiçbir koordinat sıfır değilse denklemleri sırasıyla x,y,z ile çarparak $xyz=2x^2=2y^2=2z^2$ buluruz. $c=xyz$ dersek $x^2=y^2=z^2=\dfrac{c}{2}$ ve

$$c^2=x^2y^2z^2=\left(\frac{c}{2}\right)^3$$

olur; $c\neq 0$ olduğundan $c=8$ ve $x^2=y^2=z^2=4$'tür. $xyz=8>0$ olduğundan koordinatlardan çift sayıda negatif olanı vardır. Kritik noktalar $(0,0,0)$, $(2,2,2)$, $(2,-2,-2)$, $(-2,2,-2)$ ve $(-2,-2,2)$'dir. Örneğin $(2,-2,-2)$ için $yz=4=2x$, $xz=-4=2y$ ve $xy=-4=2z$ olduğu kolayca denetlenir.
Hessian.

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}-2 & z & y\\ z & -2 & x\\ y & x & -2\end{pmatrix}$$

olur. Asal alt determinantlar $D_1=-2$, $D_2=4-z^2$ ve birinci satıra göre açılımla

$$D_3=2(x^2+y^2+z^2)+2xyz-8$$

bulunur.
$(0,0,0)$ noktası. $D_1=-2<0$, $D_2=4>0$, $D_3=-8<0$ olduğundan Hessian negatif tanımlıdır (zaten $-2I$'dır); kesin yerel maksimum vardır ve değeri $f(0,0,0)=0$'dır. Bu maksimum mutlak değildir: $f(t,t,t)=t^3-3t^2$ ifadesi $t\to\infty$ iken sonsuza gider.
Öbür dört nokta. Hepsinde $z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=12$ ve $xyz=8$ olduğundan $D_1=-2$, $D_2=0$ ve $D_3=24+16-8=32$ olur. $D_3\neq 0$'dır ve $D_2=0$ olduğundan iki işaret düzeni de sağlanmaz; Sylvester ölçütünün (c) şıkkı gereği Hessian belirsizdir. Dört nokta da eyer noktasıdır ve hepsinde $f=8-12=-4$'tür.
Doğrudan denetim: $e_1^{T}He_1=-2<0$'dır; $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ koordinatların işaretleri olmak üzere $h=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ alınırsa köşegen dışı her terim $2\sigma_1\sigma_2\sigma_3=2$ katkı verir ve $h^{T}Hh=-6+2\cdot 3\cdot 2=6>0$ olur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

18.8 Test Sonuç Vermediğinde

Hessian matrisi yarı tanımlı ama tanımlı değilse ikinci türev testi susar. Bu durumda fonksiyonun kendisine, örneğin bir eşitsizliğe ya da belirli doğrular ve eğriler boyunca aldığı değerlere bakmak gerekir. Aşağıdaki örneklerde testin sustuğu noktaları doğrudan inceliyoruz; ortaya çıkan sonuçlar birbirinden farklıdır.

Örnek 18.11 (Yarı Tanımlı Hessian ile Minimum). $f(x,y) = x^4 + y^2$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında kesin yerel minimumu olduğunu, ama ikinci türev testinin bu noktada sonuç vermediğini gösteriniz.

Çözüm.
$\nabla f(x,y) = (4x^3, 2y) = (0,0)$ eşitliği yalnız $(0,0)$'da sağlanır. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2$ olduğundan

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ve $D = 0$ olur. Form $2h_2^2 \geq 0$'dır ve $h = (1,0)$ için sıfırdır; Hessian pozitif yarı tanımlıdır ama tanımlı değildir. Teorem 18.2 (iv) gereği test bir şey söylemez.
Doğrudan inceleme ise hemen sonuç verir: her (x,y) için $f(x,y) = x^4 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ olur ve eşitlik yalnız $x = y = 0$ iken sağlanır. f'nin $(0,0)$'da kesin (hatta mutlak) minimumu vardır.
Aynı biçimde $-x^4 - y^2$ fonksiyonunun Hessian matrisi orijinde negatif yarı tanımlıdır ve fonksiyon orijin dışında negatif olduğundan orada kesin yerel maksimum vardır. ■

Örnek 18.12 (Yarı Tanımlı Hessian ile Eyer Noktası). $f(x,y) = x^3 + y^2$ fonksiyonunun orijindeki Hessian matrisinin Örnek 18.11 içindekiyle aynı olduğunu, ama $(0,0)$ noktasının bir eyer noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\nabla f(x,y) = (3x^2, 2y) = (0,0)$ eşitliği yalnız $(0,0)$'da sağlanır. $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2$ olduğundan

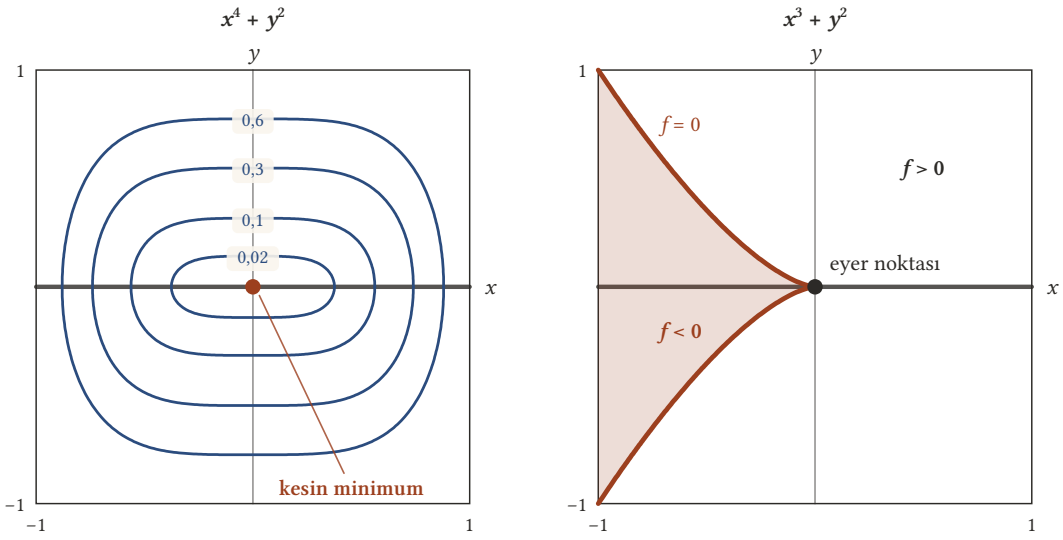
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bulunur; bu, $x^4 + y^2$ fonksiyonunun orijindeki Hessian matrisinin aynısıdır ve test yine sonuç vermez. Oysa x ekseni boyunca $f(t,0) = t^3$'tür. $\rho > 0$ keyfi olsun; $t = \pm\dfrac{\rho}{2}$ için $\left(\pm\dfrac{\rho}{2}, 0\right)$ noktaları $B((0,0),\rho)$ içindedir ve

$$f\left(-\frac{\rho}{2},0\right) = -\frac{\rho^3}{8} < 0 = f(0,0) < \frac{\rho^3}{8} = f\left(\frac{\rho}{2},0\right)$$

olur. $(0,0)$ bir eyer noktasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.4: Solda $x^4 + y^2$ fonksiyonunun 0,02; 0,1; 0,3; 0,6 seviye eğrileri orijini çevreler ve orijinde kesin minimum vardır. Sağda $x^3 + y^2 = 0$ eğrisi ($x = -|y|^{2/3}$) orijinde sivri bir uç yapar; taralı bölgede $f < 0$, geri kalanında $f > 0$ olur. İki fonksiyonun Hessian matrisi orijinde aynıdır; fark, kalın çizilen x ekseni boyunca ortaya çıkar.

İki fonksiyonun orijindeki ikinci mertebe Taylor polinomu aynıdır: y^2. Hessian matrisi yalnız bu polinomu görür. Form, $h = (1, 0)$ doğrultusunda sıfır olduğundan o doğrultuda karar üçüncü ve dördüncü mertebe terimlere kalır: çift dereceli x^4 işaretini korur, tek dereceli x^3 işaret değiştirir. Tek değişkende x^4 ile x^3 arasındaki fark da buydu (bkz. Analiz 2).
İlginç bir ayrıntı: x ekseni dışındaki her doğru üzerinde f'nin orijinde kesin yerel minimumu vardır. $\sin\alpha \neq 0$ için

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = t^2(\sin^2\alpha + t\cos^3\alpha)$$

olur ve parantez, $|\,t\,|$ küçükken $\sin^2\alpha > 0$ sayısına yakın kalır. Orijinden geçen doğrular arasında eyer davranışını yalnız formun sıfır olduğu x ekseni gösterir; $f < 0$ bölgesi ise $x < -\,|\,y\,|^{2/3}$ sivri bölgesidir ve orijin yakınında başka hiçbir doğruyu içermez. Doğrulara bakmak genelde yetmez: $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ fonksiyonu orijinden geçen her doğru üzerinde orijinde kesin yerel minimuma sahiptir, ama $y = \frac{3}{2}x^2$ eğrisi boyunca $f = -\frac{1}{4}x^4 < 0$ olduğundan orijin bir eyer noktasıdır. ■

Örnek 18.13 (Hessian Matrisi Sıfır Olan Bir Minimum). $f(x, y) = x^4 + y^4$ fonksiyonunun orijindeki Hessian matrisinin sıfır matrisi olduğunu ve f'nin orijinde kesin yerel minimumu olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\nabla f(x, y) = (4x^3, 4y^3)$ yalnız orijinde sıfırdır. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 12y^2$ olduğundan $H_f(0, 0)$ sıfır matrisidir. Sıfır matrisi hem pozitif hem negatif yarı tanımlıdır ama tanımlı değildir; ikinci diferansiyel her h için sıfırdır ve test hiçbir bilgi vermez.
Öte yandan $(x, y) \neq (0, 0)$ için $x^4 + y^4 > 0 = f(0, 0)$'dır; f'nin orijinde kesin mutlak minimumu vardır.
Hessian matrisi orijinde yine sıfır olan iki fonksiyonla karşılaştıralım. $-x^4 - y^4$ fonksiyonunun orijinde kesin yerel maksimumu vardır. $x^4 - y^4$ fonksiyonu için ise $f(t, 0) = t^4 > 0$ ve $f(0, t) = -t^4 < 0$ olduğundan orijin bir eyer noktasıdır. Üç fonksiyonda Hessian aynıdır, sonuçlar farklıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 18.14 (Yalıtılmamış Kritik Noktalar). $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ üzerinde tanımlı $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kritik noktalar. U açıktır ve f orada bir rasyonel fonksiyondur. Kesrin türev kuralıyla

$$f_x = \frac{2x(x^2+y^2) - x^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y = \frac{-x^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

bulunur. $\nabla f = 0$ için $xy^2 = 0$ ve $x^2y = 0$ gerekir. $x \neq 0$ ise birinci denklemden $y = 0$ olur; $x = 0$ ise iki denklem de sağlanır. Kritik noktalar, orijin çıkarılmış iki koordinat ekseninin bütün noktalarıdır: $t \neq 0$ olmak üzere $(t,0)$ ve $(0,t)$. Bu noktalar yalıtılmış değildir; her birinin her komşuluğunda başka kritik noktalar vardır.
Test. $(t,0)$ noktasında: $f(x,0) = 1$ sabit olduğundan $f_{xx}(t,0) = 0$'dır; $f_x(t,y) = \dfrac{2ty^2}{(t^2+y^2)^2}$ ifadesinin $y=0$'daki türevi 0 olduğundan $f_{xy}(t,0) = 0$'dır; $f(t,y) = \dfrac{t^2}{t^2+y^2}$ fonksiyonunun y'ye göre ikinci türevi $y=0$'da $-\dfrac{2}{t^2}$'dir. Aynı yolla $(0,t)$ noktasında $f_{xx} = \dfrac{2}{t^2}$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 0$ bulunur. İki durumda da $D = 0$'dır ve test sonuç vermez.
Doğrudan inceleme. $0 \le x^2 \le x^2+y^2$ olduğundan her $(x,y) \in U$ için $0 \le f(x,y) \le 1$'dir. $f(t,0) = 1$ olduğundan x ekseni üzerindeki her nokta bir mutlak maksimum noktasıdır; $f(0,t) = 0$ olduğundan y ekseni üzerindeki her nokta bir mutlak minimum noktasıdır. Bu ekstremumlar kesin değildir: kutupsal koordinatlarda $f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \cos^2\alpha$ olduğundan f, orijinden çıkan her ışın üzerinde sabittir ve eksenler üzerindeki komşu noktalar aynı değeri alır. ■

Örnek 18.15 (Üstel Sönümlü Bir Çarpım). $f(x,y,z) = xyz\,e^{-x^2-y^2-z^2}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kısaltma olarak $E = e^{-x^2-y^2-z^2} > 0$ yazalım.
Kritik noktalar. Çarpımın türeviyle

$$f_x = yz\,E + xyz\,(-2x)\,E = yz\,(1-2x^2)\,E$$

ve benzer biçimde $f_y = xz\,(1-2y^2)\,E$, $f_z = xy\,(1-2z^2)\,E$ bulunur. Üç durum vardır.

- Hiçbir koordinat sıfır değilse $1-2x^2 = 1-2y^2 = 1-2z^2 = 0$, yani $x,y,z \in \left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ olmalıdır: sekiz nokta.
- Tam bir koordinat sıfırsa, örneğin $z=0$ ve $x,y \neq 0$ ise $f_z = xy\,E \neq 0$ olur; böyle kritik nokta yoktur.
- En az iki koordinat sıfırsa yz, xz, xy çarpımlarının üçü de sıfırdır ve bütün kısmi türevler sıfırdır: üç koordinat ekseninin her noktası bir kritik noktadır.

İkinci türevler. f_x'i bir kez daha türeterek

$$f_{xx} = yz\,(-4x)\,E + yz\,(1-2x^2)(-2x)\,E = 2xyz\,(2x^2-3)\,E,$$
$$f_{xy} = z\,(1-2x^2)\,E + yz\,(1-2x^2)(-2y)\,E = z\,(1-2x^2)(1-2y^2)\,E$$

bulunur; öbür ikinci türevler değişkenlerin yer değiştirmesiyle elde edilir.
Sekiz nokta. Bu noktalarda $1-2x^2 = 1-2y^2 = 1-2z^2 = 0$ olduğundan karışık türevlerin hepsi sıfırdır ve $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -4xyz\,E$ olur. Burada $E = e^{-3/2}$ ve $xyz = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $xyz > 0$ ise (koordinatlardan çift sayıda negatif olan dört nokta) $H_f = -\sqrt{2}\,e^{-3/2}\,I$ negatif tanımlıdır; kesin yerel maksimum vardır ve değeri $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-3/2}$'dir.
- $xyz < 0$ ise (öbür dört nokta) $H_f = \sqrt{2}\,e^{-3/2}\,I$ pozitif tanımlıdır; kesin yerel minimum vardır ve değeri $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-3/2}$'dir.

Eksen noktaları. $t \neq 0$ ve $(t,0,0)$ noktasını alalım. xyz çarpanını ya da y veya z çarpanını içeren ikinci türevler sıfırdır; yalnız

$$f_{yz}(t,0,0) = t\,(1-0)(1-0)\,e^{-t^2} = t\,e^{-t^2}$$

kalır ($f_{yz} = x\,(1-2y^2)(1-2z^2)\,E$ formülünden). Form

$$h^T H_f(t,0,0)\,h = 2t\,e^{-t^2}\,h_2 h_3$$

olur ve $h=(0,1,1)$ ile $h=(0,1,-1)$ için zıt işaretli değerler alır. Hessian belirsizdir; $(t,0,0)$ bir eyer noktasıdır. Öbür iki eksen için de simetri gereği sonuç aynıdır.
Orijin. Bütün ikinci türevlerde x, y ya da z çarpanı bulunduğundan $H_f(0,0,0)$ sıfır matrisidir ve test sonuç vermez. Doğrudan bakalım: $f(t,t,t) = t^3 e^{-3t^2}$ ifadesi t ile aynı işaretlidir. Orijinin her yuvarında $f(0,0,0)=0$'dan büyük ve küçük değerler vardır; orijin de bir eyer noktasıdır. ■

18.9 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda kritik noktaları bulup sınıflandırma yöntemini iki ve üç değişkenli fonksiyonlara uyguluyoruz.

Alıştırma 18.1 (Sinüslerin Çarpımı). $f(x,y) = \sin x \sin y$ fonksiyonunun $(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$ karesindeki yerel ekstremum noktalarını ve eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Kritik noktalar. $f_x = \cos x \sin y$ ve $f_y = \sin x \cos y$'dir. $f_x = 0$ için $\cos x = 0$ ya da $\sin y = 0$ gerekir.

- $\cos x = 0$ ise $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ ve $\sin x = \pm 1 \neq 0$'dır; $f_y = 0$ denklemi $\cos y = 0$, yani $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ verir.
- $\sin y = 0$ ise aralıkta $y = 0$ ve $\cos y = 1$'dir; $f_y = 0$ denklemi $\sin x = 0$, yani $x = 0$ verir.

Kritik noktalar $(0,0)$ ve dört nokta $\left(\pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$'dir.
Hessian.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}.$$

Test.

- $(0,0)$: $f_{xx}=0$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=0$ ve $D = -1 < 0$; eyer noktasıdır, $f(0,0)=0$.
- $\left(\pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$: $\cos x \cos y = 0$ olduğundan $H_f = -f(x,y)\,I$ olur ve $f(x,y) = \sin x \sin y = \pm 1$'dir. $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$ noktalarında $f=1$, $H_f = -I$, $D = 1 > 0$, $f_{xx} = -1 < 0$; kesin yerel maksimum vardır ve değeri 1'dir. $\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ noktalarında $f=-1$, $H_f = I$; kesin yerel minimum vardır ve değeri -1'dir.

$|\,f\,| \le 1$ olduğundan bu maksimumlar ve minimumlar mutlaktır. ■

Alıştırma 18.2 (Kübik Terimli İkinci Bir Polinom). $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + xy + y^2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve varsa eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kritik noktalar. $f_x = 3x^2 - 6x + y$ ve $f_y = x + 2y$'dir. $f_y = 0$ denklemi $y = -\dfrac{x}{2}$ verir; $f_x = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$3x^2 - 6x - \frac{x}{2} = x\left(3x - \frac{13}{2}\right) = 0$$

olur. $x = 0$ ya da $x = \dfrac{13}{6}$'dır; kritik noktalar $(0,0)$ ve $\left(\dfrac{13}{6}, -\dfrac{13}{12}\right)$'dir.
Hessian. $f_{xx} = 6x - 6$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$ olduğundan

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ve $D = 2(6x-6) - 1 = 12x - 13$ olur.
Test.

- $(0,0)$: $D = -13 < 0$; eyer noktasıdır ve $f(0,0) = 0$'dır.
- $\left(\dfrac{13}{6}, -\dfrac{13}{12}\right)$: $D = 26 - 13 = 13 > 0$ ve $f_{xx} = 13 - 6 = 7 > 0$; kesin yerel minimum vardır.

Minimum değerini hesaplamak için $y = -\dfrac{x}{2}$ doğrusu üzerinde

$$f\left(x, -\frac{x}{2}\right) = x^3 - 3x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = x^3 - \frac{13}{4}\,x^2$$

olduğunu kullanalım:

$$f\left(\frac{13}{6}, -\frac{13}{12}\right) = \frac{169}{36}\left(\frac{13}{6} - \frac{13}{4}\right) = \frac{169}{36} \cdot \left(-\frac{13}{12}\right) = -\frac{2197}{432}.$$

■

Alıştırma 18.3 (Çarpanlarına Ayrılan Gradyan).

$$f(x,y) = x^2y + 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 7y$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve varsa eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Kritik noktalar.

$$f_x = 2xy + 4x - 2y - 4 = 2(x-1)(y+2),$$
$$f_y = x^2 - 2x + 6y + 7$$

olur. $f_x = 0$ denklemi $x = 1$ ya da $y = -2$ verir.

- $x = 1$ ise $f_y = 1 - 2 + 6y + 7 = 6y + 6 = 0$, yani $y = -1$: $(1,-1)$.
- $y = -2$ ise $f_y = x^2 - 2x - 5 = 0$, yani $x = 1 \pm \sqrt{6}$: $(1+\sqrt{6}, -2)$ ve $(1-\sqrt{6}, -2)$.

Hessian. $f_{xx} = 2y + 4$, $f_{xy} = 2x - 2$, $f_{yy} = 6$ olduğundan

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+4 & 2x-2 \\ 2x-2 & 6 \end{pmatrix}$$

olur.
Test.

- $(1,-1)$: $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6$ ve $D = 12 > 0$; kesin yerel minimum vardır. Değeri

$$f(1,-1) = -1 + 2 + 2 + 3 - 4 - 7 = -5$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $(1 \pm \sqrt{6}, -2)$: $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = \pm 2\sqrt{6}$ ve $D = 0 \cdot 6 - 24 = -24 < 0$; iki nokta da eyer noktasıdır. Bu noktalarda $f = -2$'dir.

■

Alıştırma 18.4 (Ekstremumu Olmayan Bir Polinom). $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Kritik noktalar. Açarak $f(x, y) = x - y - x^2 y + x y^2$ yazalım. Buradan

$$f_x = 1 - 2xy + y^2,$$
$$f_y = -1 - x^2 + 2xy$$

bulunur. İki denklem toplanırsa $y^2 - x^2 = 0$, yani $y = x$ ya da $y = -x$ olur.

- $y = x$ ise $f_x = 1 - 2x^2 + x^2 = 1 - x^2 = 0$, yani $x = \pm 1$: $(1, 1)$ ve $(-1, -1)$.
- $y = -x$ ise $f_x = 1 + 2x^2 + x^2 = 1 + 3x^2 > 0$; çözüm yoktur.

Hessian. $f_{xx} = -2y$, $f_{xy} = -2x + 2y$, $f_{yy} = 2x$ olduğundan

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 2y - 2x \\ 2y - 2x & 2x \end{pmatrix}$$

olur.
Test. $(1, 1)$ noktasında köşegen $-2, 2$ ve köşegen dışı 0'dır; $D = -4 < 0$. $(-1, -1)$ noktasında köşegen $2, -2$ ve köşegen dışı 0'dır; yine $D = -4 < 0$. İki nokta da eyer noktasıdır ve iki noktada da $f = 0$'dır. Fonksiyonun hiç yerel ekstremumu yoktur. ■

Alıştırma 18.5 (Pozitif Tanımlı Bir Kuadratik Form). $f(x, y) = 34x^2 - 24xy + 41y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kritik noktalar. $f_x = 68x - 24y$ ve $f_y = -24x + 82y$ olur. $\nabla f = 0$ homojen bir doğrusal sistemdir ve katsayı determinantı

$$68 \cdot 82 - 24^2 = 5576 - 576 = 5000 \neq 0$$

olduğundan tek çözümü $(0, 0)$'dır.
Hessian ve test.

$$H_f = \begin{pmatrix} 68 & -24 \\ -24 & 82 \end{pmatrix}$$

sabittir; $D = 5000 > 0$ ve $f_{xx} = 68 > 0$ olduğundan $(0, 0)$ noktasında kesin yerel minimum vardır ve değeri $f(0, 0) = 0$'dır.
Bu minimum mutlaktır. $h = (x, y)$ için $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\, h^T H_f\, h$ olur ve H_f pozitif tanımlı olduğundan $(x, y) \neq (0, 0)$ için $f(x, y) > 0$'dır. Formun yapısı döndürülmüş koordinatlarda açıkça görünür: $u = \dfrac{4x + 3y}{5}$ ve $v = \dfrac{3x - 4y}{5}$ dersek

$$25u^2 + 50v^2 = (4x + 3y)^2 + 2(3x - 4y)^2 = 34x^2 - 24xy + 41y^2$$

olur. Buradaki 50 ve 100 sayıları ($f = \frac{1}{2}(50u^2 + 100v^2)$) H_f matrisinin özdeğerleridir. ■

Alıştırma 18.6 (Daha Geniş Bir Şeritte Kosinüslü Fonksiyon). $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 7\}$ açık şeridi üzerinde $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve eyer noktalarını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Kritik noktalar. Örnek 18.6 içindeki gibi $\nabla f = 0$ sistemi $y = \cos x$ ve $\sin x \cos x = 0$ koşullarına denktir. $-1 < x < 7$ aralığında:

- $\cos x = 0$ için $x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $x = \dfrac{3\pi}{2}$ ($-\dfrac{\pi}{2} < -1$ ve $\dfrac{5\pi}{2} > 7$), bunlarda $y = 0$;
- $\sin x = 0$ için $x = 0$, $x = \pi$ ve $x = 2\pi$ ($3\pi > 7$), bunlarda $y = \cos x$ sırasıyla $1, -1, 1$.

Kritik noktalar $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$, $(0,1)$, $(\pi, -1)$ ve $(2\pi, 1)$'dir.
Test. Kritik noktalarda $y = \cos x$ olduğundan $f_{xx} = 2y\cos x = 2\cos^2 x$ olur; ayrıca $f_{xy} = 2\sin x$, $f_{yy} = 2$'dir. Buradan

$$D = 4\cos^2 x - 4\sin^2 x = 4\cos 2x$$

bulunur.

- $\sin x = 0$ olan $(0,1)$, $(\pi,-1)$, $(2\pi,1)$ noktalarında $\cos 2x = 1$, $D = 4 > 0$ ve $f_{xx} = 2 > 0$'dır; üçünde de kesin yerel minimum vardır. $y = \cos x$ olduğundan değer $f = -\cos^2 x = -1$'dir.
- $\cos x = 0$ olan $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ ve $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ noktalarında $\cos 2x = -1$ ve $D = -4 < 0$'dır; ikisi de eyer noktasıdır ve $f = 0$'dır.

Örnek 18.6 içindeki $f \geq -\cos^2 x \geq -1$ eşitsizliği gereği üç minimum da şerit üzerinde mutlaktır. ■

Alıştırma 18.7 (Öteleme ile Sadeleşen Bir Fonksiyon).

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & x^2yz - 2xyz + x^2z + y^2 + z^2 \\ & + x^2 + yz - 2xz - 2x + 2y + z \end{aligned}$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Sadeleştirme. $x^2 - 2x$ ifadesinin üç kez geçtiğine dikkat edelim:

$$\begin{aligned} f &= (x^2 - 2x)(yz + z + 1) + y^2 + z^2 + yz + 2y + z \\ &= \big((x-1)^2 - 1 \big)(yz + z + 1) + y^2 + z^2 + yz + 2y + z \\ &= (x-1)^2 \big((y+1)z + 1 \big) + (y+1)^2 + z^2 - 2. \end{aligned}$$

$u = x - 1$ ve $v = y + 1$ dersek $f(x,y,z) = g(x-1, y+1, z)$ olur; burada

$$g(u,v,z) = u^2(1 + vz) + v^2 + z^2 - 2$$

olur. Zincir kuralı gereği f'nin (x,y,z) noktasındaki birinci ve ikinci kısmi türevleri g'ninkilerin $(x-1, y+1, z)$ noktasındaki değerlerine eşittir (ötelemenin Jacobi matrisi birim matristir). Dolayısıyla kritik noktalar ötelemeyle birbirine karşılık gelir ve Hessian matrisleri aynıdır.
Kritik noktalar.

$$\begin{aligned} g_u &= 2u\,(1 + vz) = 0, \\ g_v &= u^2 z + 2v = 0, \\ g_z &= u^2 v + 2z = 0. \end{aligned}$$

- $u = 0$ ise $v = 0$ ve $z = 0$ olur: $(u,v,z) = (0,0,0)$.
- $1 + vz = 0$ ise ikinci denklemi v ile, üçüncüyü z ile çarpıp $vz = -1$ kullanırsak $-u^2 + 2v^2 = 0$ ve $-u^2 + 2z^2 = 0$ buluruz. Buradan $v^2 = z^2$ olur; $vz = -1$ olduğundan v ile z zıt işaretlidir ve $v^2 = 1$'dir. Yani $(v,z) = (1,-1)$ ya da $(-1,1)$ ve $u^2 = 2$, $u = \pm\sqrt{2}$'dir. Bu değerler $g_v = 2z + 2v = 0$ ve $g_z = 2v + 2z = 0$ denklemlerini sağlar.

$x = u + 1$, $y = v - 1$ ile f'nin kritik noktaları $(1, -1, 0)$, $(1 \pm \sqrt{2}, 0, -1)$ ve $(1 \pm \sqrt{2}, -2, 1)$'dir.
Hessian.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$H_g(u,v,z)=\begin{pmatrix}2(1+vz) & 2uz & 2uv\\ 2uz & 2 & u^2\\ 2uv & u^2 & 2\end{pmatrix}.$$

$(1,-1,0)$ noktası ($u=v=z=0$). $H=2I$ olur; $D_1=2$, $D_2=4$, $D_3=8$ pozitiftir. Kesin yerel minimum vardır ve değeri $f(1,-1,0)=g(0,0,0)=-2$'dir.
Öbür dört nokta. $1+vz=0$ ve $u^2=2$ olduğundan, $\alpha=2uz$ ve $\beta=2uv$ yazarak

$$H=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ \alpha & 2 & 2\\ \beta & 2 & 2\end{pmatrix}$$

buluruz. $\alpha^2=4u^2z^2=8$ olduğundan $D_1=0$, $D_2=-\alpha^2=-8$ ve birinci satıra göre açarak

$$D_3=-\alpha(2\alpha-2\beta)+\beta(2\alpha-2\beta)=-2(\alpha-\beta)^2$$

olur. $v=-z$ olduğundan $\alpha-\beta=2u(z-v)=4uz$ ve $(\alpha-\beta)^2=16\cdot 2\cdot 1=32$, yani $D_3=-64\neq 0$'dır. İşaret düzenlerinden hiçbiri sağlanmadığından Sylvester ölçütünün (c) şıkkı gereği Hessian belirsizdir; dört nokta da eyer noktasıdır ve hepsinde $f=g=0+1+1-2=0$'dır.
$(1,-1,0)$ noktasındaki minimum mutlak değildir: $(u,v,z)=(\sqrt{3},t,-t)$ için $g=3(1-t^2)+2t^2-2=1-t^2$ olur ve $t\to\infty$ iken $-\infty$'a gider. ■

Alıştırma 18.8 (Paydası Kareye Tamamlanan Kesir). $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Tanım kümesi. Payda $g(x,y)=x^2-x+y^2+y+1$ için kareye tamamlarsak

$$g(x,y)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

olur. Payda hiç sıfır olmadığından $f=\dfrac{1}{g}$ bütün $\mathbb{R}^2$'de tanımlı ve sonsuz kez türevlenebilirdir.
Kritik noktalar. Zincir kuralıyla $\nabla f=-\dfrac{\nabla g}{g^2}$ olduğundan $\nabla f=0$ ancak ve ancak $\nabla g=(2x-1,2y+1)=0$ ise sağlanır. Tek kritik nokta $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$'dir ve orada $g=\dfrac{1}{2}$'dir.
İkinci türevler. $f_x=\dfrac{1-2x}{g^2}$ ve $f_y=-\dfrac{2y+1}{g^2}$'dir. Bir kez daha türeterek

$$f_{xx}=-\frac{2}{g^2}-\frac{2(1-2x)\,g_x}{g^3},$$
$$f_{xy}=-\frac{2(1-2x)\,g_y}{g^3},$$
$$f_{yy}=-\frac{2}{g^2}+\frac{2(2y+1)\,g_y}{g^3}$$

bulunur. Kritik noktada $1-2x=0$, $2y+1=0$ ve $g^2=\dfrac{1}{4}$ olduğundan $f_{xx}=f_{yy}=-8$ ve $f_{xy}=0$'dır.
Test. $D=64>0$ ve $f_{xx}=-8<0$; $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ noktasında kesin yerel maksimum vardır ve değeri $f=\dfrac{1}{1/2}=2$'dir. $g\geq\dfrac{1}{2}$ olduğundan her yerde $f\leq 2$'dir; maksimum mutlaktır. ■

Alıştırma 18.9 (Üstel Çarpanlı Bir Fonksiyon). $f(x,y)=xy\,e^{-x^2-y^4}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Kısaltma olarak $E = e^{-x^2-y^4} > 0$ yazalım.
Kritik noktalar. Çarpımın türeviyle

$$f_x = yE + xy\,(-2x)\,E = y\,(1-2x^2)\,E,$$
$$f_y = xE + xy\,(-4y^3)\,E = x\,(1-4y^4)\,E$$

bulunur. $f_x = 0$ için $y = 0$ ya da $1 - 2x^2 = 0$ gerekir.

- $y = 0$ ise $f_y = xE = 0$, yani $x = 0$: $(0, 0)$.
- $x^2 = \dfrac{1}{2}$ ise $x \neq 0$ olduğundan $1 - 4y^4 = 0$, yani $y^2 = \dfrac{1}{2}$ olur: dört nokta $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

İkinci türevler.

$$f_{xx} = 2xy\,(2x^2 - 3)\,E,$$
$$f_{xy} = (1-2x^2)(1-4y^4)\,E,$$
$$f_{yy} = 4xy^3\,(4y^4 - 5)\,E.$$

Test.

- $(0, 0)$: $f_{xx} = f_{yy} = 0$, $f_{xy} = 1$ ve $D = -1 < 0$; eyer noktasıdır.
- Dört noktada $1 - 2x^2 = 0$ olduğundan $f_{xy} = 0$'dır; $2x^2 = 1$, $y^2 = \dfrac{1}{2}$, $4y^4 = 1$ ve $E = e^{-3/4}$ kullanılarak $f_{xx} = -4xy\,E$ ve $f_{yy} = -16\,xy\,y^2\,E = -8xy\,E$ bulunur. $D = 32\,x^2y^2E^2 = 8E^2 > 0$'dır.
  - $xy = \dfrac{1}{2}$ olan $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ve $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ noktalarında $f_{xx} = -2E < 0$; kesin yerel maksimum vardır ve değeri $\dfrac{1}{2}e^{-3/4}$'tür.
  - $xy = -\dfrac{1}{2}$ olan öbür iki noktada $f_{xx} = 2E > 0$; kesin yerel minimum vardır ve değeri $-\dfrac{1}{2}e^{-3/4}$'tür.

■

Bu bölümde açık bir kümenin iç noktalarında yerel ekstremumları bulmayı ve sınıflandırmayı öğrendik: adaylar kritik noktalardır, durgun noktaların türünü Hessian matrisinin tanımlılığı belirler ve tanımlılık iki değişkende D ile, genel durumda Sylvester ölçütüyle okunur. İki soru ise açık kaldı. Tanım kümesi kapalı ve sınırlıyken mutlak ekstremumlar sınır üzerinde de olabilir ve orada gradyan sıfır olmak zorunda değildir. Değişkenler bir denklemle birbirine bağlıyken, örneğin bir küre üzerinde ekstremum arandığında da gerek koşul değişir. Bu iki durumu ve Lagrange çarpanları yöntemini Mutlak ve Bağlı Ekstremumlar bölümünde ele alıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

19. Mutlak ve Bağlı Ekstremumlar

Tek değişkenli analizde kapalı bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonun en büyük ve en küçük değerini iki soruyu yanıtlayarak bulmuştuk. Bu değerlerin var olduğunu Weierstrass ekstremum teoremi söyler (bkz. Analiz 1); nerede alındıklarını ise kısa bir aday listesi belirler: aralığın içindeki kritik noktalar ve iki uç nokta (bkz. Analiz 2). Yerel Ekstremumlar bölümünde çok değişkenli bir fonksiyonun iç noktalardaki davranışını gradyan ve Hessian matrisi yardımıyla inceledik. Bu bölümde resmin eksik kalan iki parçasını tamamlıyoruz.

Birinci parça **mutlak ekstremumdur**. Kompakt bir kümede sürekli fonksiyon en büyük ve en küçük değerini alır (Teorem 11.3) ve bu değerler ya kümenin içindeki bir kritik noktada ya da kümenin sınırında alınır. Tek değişkende sınır yalnız iki uç noktaydı; düzlemde sınır bir eğri, uzayda bir yüzeydir ve fonksiyonu sınır üzerinde incelemek başlı başına bir problem olur.

İkinci parça bu problemin kendisidir: değişkenler $g(x) = 0$ gibi bir bağıntıyla birbirine bağlıyken f'nin ekstremumlarını aramak. Buna **bağlı** (kısıtlı) **ekstremum** problemi denir. Bölümün ana sonucu olan **Lagrange çarpanları teoremi**, kısıt denklemini çözmeye gerek bırakmadan bu problemi $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ denklemine indirir. Teoremin ispatında, bir sonraki bölümün konusu olan kapalı fonksiyon teoreminin sonucunu kullanacağız.

19.1 Kompakt Kümede Mutlak Ekstremum

Önce mutlak ekstremumların ne zaman var olduğunu ve nerede aranacağını belirleyelim.

Mutlak maksimum ve mutlak minimum kavramlarını Tanım 18.2 ile tanımlamıştık: $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için bir $x^* \in D$ noktası, her $x \in D$ için $f(x) \leq f(x^*)$ oluyorsa bir mutlak maksimum noktasıdır. Bir fonksiyonun mutlak ekstremumu olmayabilir; ama tanım kümesi kompakt ve fonksiyon sürekliyse ikisi de vardır. Aşağıdaki önerme bunu ve ekstremum noktalarının nerede aranacağını birlikte söyler.

Önerme 19.1 (Mutlak Ekstremum Noktalarının Yeri). *$\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $f : D \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. O zaman:*

1. *f, D üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini alır.*
2. *Bu değerlerin alındığı her $x^* \in D$ noktası ya D'nin bir sınır noktasıdır ya da D'nin bir iç noktasıdır ve f'nin D° açık kümesine kısıtlanışının bir kritik noktasıdır.*

> ***İspat.***
> ***(1)*** *Uç değer teoreminin (Teorem 11.3) doğrudan sonucudur.*
> ***(2)*** *f mutlak maksimumunu $x^* \in D$ noktasında alsın; minimum için bütün eşitsizlikler ters çevrilir. İki durum vardır.*
> *x^*, D'nin bir iç noktası değilse hiçbir $r > 0$ için $B(x^*, r) \subseteq D$ olmaz, yani her $B(x^*, r)$ yuvarı D^c'den bir nokta içerir. x^*'ın kendisi D'de olduğundan her yuvar hem D'yi hem D^c'yi keser. Bu, $x^* \in \partial D$ demektir (Tanım 4.1).*
> *$x^* \in D^\circ$ ise $B(x^*, \delta) \subseteq D$ olan bir $\delta > 0$ vardır. Her $x \in D$ için $f(x) \leq f(x^*)$ olduğundan özel olarak her $x \in B(x^*, \delta)$ için de $f(x) \leq f(x^*)$ olur; yani f, x^* noktasında yerel maksimuma sahiptir (Tanım 18.1). f'nin x^*'da bütün kısmi türevleri varsa yerel ekstremum için gerek koşul (Teorem 18.1) gereği $\nabla f(x^*) = 0$'dır; yoksa kısmi türevlerden en az biri bulunmaz. İki durumda da x^* bir kritik noktadır (Tanım 18.4).* ■

Önerme, mutlak ekstremum aramayı iç kritik noktalar ile sınırın incelenmesine indirir. Tek değişkendeki kapalı aralık yönteminin çok değişkenli karşılığı şudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda mutlak ekstremum

D kompakt ve $f : D \to \mathbb{R}$ sürekli olsun.

1. **İç kritik noktalar.** D° içinde $\nabla f = 0$ denklemi çözülür ve kısmi türevlerin bulunmadığı noktalar belirlenir; f'nin bu noktalardaki değerleri hesaplanır.
2. **Sınır.** ∂D uygun parçalara ayrılır. Her parça tek bir değişkenle betimlenir (örneğin $y = 0$, $0 \le x \le 3$); f o parça üzerinde tek değişkenli bir fonksiyona dönüşür ve bunun kapalı aralıktaki en büyük ve en küçük değerleri bulunur. Parçaların uç noktaları (köşeler) de listeye girer.
3. **Karşılaştırma.** İlk iki adımda bulunan değerlerin en büyüğü mutlak maksimum, en küçüğü mutlak minimum değeridir.

Üçüncü adım Önerme 19.1 sayesinde geçerlidir. Mutlak maksimum noktası ya bir iç kritik noktadır ve birinci adımın listesindedir, ya da sınırdadır; sınırdaysa f'nin sınıra kısıtlanışının da en büyük değerini verir ve ikinci adımın listesindedir. Gerçek maksimum noktası listede mutlaka bulunduğuna göre listedeki en büyük değer mutlak maksimumdur; minimum için de aynı akıl yürütme geçerlidir. Sınır bir $g(x) = 0$ eğrisi ya da yüzeyi olduğunda ikinci adım bir bağlı ekstremum problemidir; bunun için bölümün ikinci yarısında Lagrange yöntemini kuracağız.

Örnek 19.1 (Dikdörtgen Üzerinde Mutlak Ekstremum). $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ fonksiyonunun

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$$

dikdörtgenindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Varlık. f bir polinom olduğundan süreklidir (Teorem 10.3). $D = [0, 3] \times [0, 2]$ kapalı ve sınırlıdır; Heine–Borel teoremi (Teorem 5.5) gereği kompakttır. Önerme 19.1 gereği f, D üzerinde mutlak maksimumunu ve mutlak minimumunu alır.
Adım 1: iç kritik noktalar. Kısmi türevler her yerde vardır ve

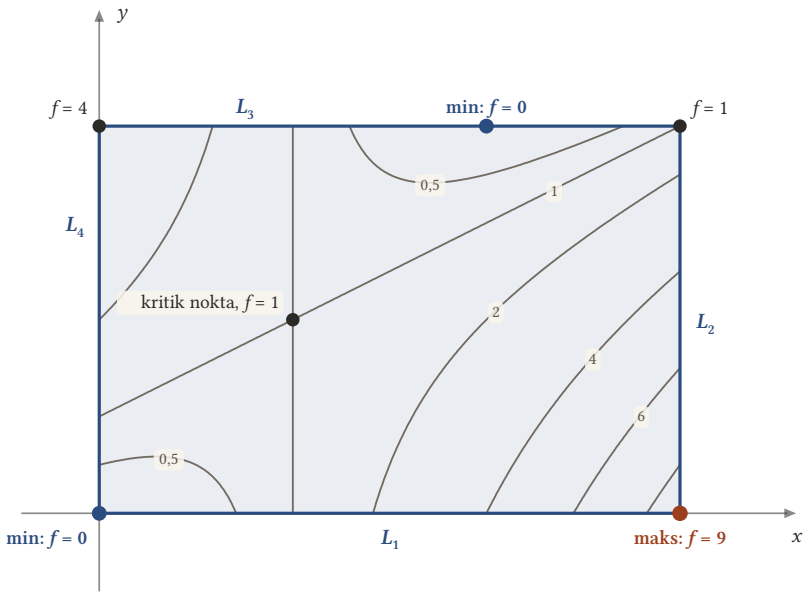
$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2y = 0, \\ f_y &= -2x + 2 = 0 \end{aligned}$$

sisteminin ikinci denkleminden $x = 1$, birincisinden $y = x = 1$ bulunur. Tek kritik nokta $(1, 1)$'dir; $0 < 1 < 3$ ve $0 < 1 < 2$ olduğundan D'nin iç noktasıdır ve

$$f(1, 1) = 1 - 2 + 2 = 1.$$

Adım 2: sınır. ∂D dört doğru parçasından oluşur: alt kenar L_1 ($y = 0$), sağ kenar L_2 ($x = 3$), üst kenar L_3 ($y = 2$) ve sol kenar L_4 ($x = 0$). Her kenarda f tek değişkenli bir fonksiyondur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.1: $D = [0, 3] \times [0, 2]$ dikdörtgeni, kenarları L_1–L_4 ve $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ fonksiyonunun $f = 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8$ seviye eğrileri. $f = 1$ seviyesi $(1, 1)$ eyer noktasında kesişen iki doğrudur. En büyük değer $(3, 0)$ köşesinde, en küçük değer $(0, 0)$ ve $(2, 2)$ sınır noktalarında alınır.

- L_1 üzerinde $f(x, 0) = x^2$, $0 \le x \le 3$. Bu fonksiyon $[0, 3]$ aralığında artandır; en küçük değeri $f(0, 0) = 0$, en büyük değeri $f(3, 0) = 9$'dur.
- L_2 üzerinde $f(3, y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y$, $0 \le y \le 2$. Bu fonksiyon azalandır; en büyük değeri $f(3, 0) = 9$, en küçük değeri $f(3, 2) = 1$'dir.
- L_3 üzerinde $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, $0 \le x \le 3$. Türevi $2(x - 2)$, $x = 2$'de sıfırdır. Bu nokta ile uç noktalardaki değerler $f(2, 2) = 0$, $f(0, 2) = 4$ ve $f(3, 2) = 1$'dir; en küçük değer 0, en büyük değer 4'tür.
- L_4 üzerinde $f(0, y) = 2y$, $0 \le y \le 2$. Bu fonksiyon artandır; en küçük değeri $f(0, 0) = 0$, en büyük değeri $f(0, 2) = 4$'tür.

Adım 3: karşılaştırma. Kritik noktadaki 1 değeri ile sınırda bulunan 0, 1, 4, 9 değerleri karşılaştırılırsa

$$\max_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(3, 0) = 9,$$
$$\min_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(0, 0) = f(2, 2) = 0$$

bulunur. Minimum iki ayrı noktada alınır ve ikisi de sınırdadır. İç kritik nokta $(1, 1)$ ise ne maksimum ne minimum noktasıdır: orada

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0$$

olduğundan bir eyer noktasıdır (Sonuç 18.2). ■

Örnek 19.2 (Üçgen Üzerinde Mutlak Ekstremum). $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ fonksiyonunun, köşeleri $(0, 0)$, $(4, 0)$ ve $(0, 4)$ olan

$$T = \{(x, y) : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 4\}$$

kapalı üçgensel bölgesindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Varlık. $T \subseteq [0,4]\times[0,4]$ olduğundan T sınırlıdır. T, sürekli x, y ve $4-x-y$ fonksiyonlarının $[0,+\infty)$ kapalı kümesi altındaki ters görüntülerinin kesişimidir; ters görüntüler kapalıdır (Sonuç 11.2) ve kapalı kümelerin kesişimi kapalıdır (Teorem 3.4). Demek ki T kompakttır ve polinom olan f burada mutlak ekstremumlarını alır.
Adım 1: iç kritik noktalar.

$$f_x = 2x + y - 3 = 0,$$
$$f_y = x + 2y - 3 = 0$$

denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa $x - y = 0$, ardından $3x = 3$ bulunur. Tek kritik nokta $(1,1)$'dir; $1 > 0$ ve $1+1 < 4$ olduğundan T'nin iç noktasıdır ve $f(1,1) = 1+1+1-3-3 = -3$.
Adım 2: sınır. Sınır üç kenardan oluşur.

- Alt kenar $y = 0$, $0 \le x \le 4$: $f(x,0) = x^2 - 3x$. Türev $2x-3$, $x = \frac{3}{2}$'de sıfırdır. Değerler $f(0,0) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{9}{4}$ ve $f(4,0) = 4$'tür.
- Sol kenar $x = 0$, $0 \le y \le 4$: $f(x,y) = f(y,x)$ olduğundan aynı hesap $f\left(0, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ ve $f(0,4) = 4$ verir.
- Hipotenüs $y = 4 - x$, $0 \le x \le 4$:

$$\begin{aligned} f(x, 4-x) &= x^2 + x(4-x) + (4-x)^2 - 3x - 3(4-x) \\ &= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2. \end{aligned}$$

Türev $2(x-2)$, $x = 2$'de sıfırdır: $f(2,2) = 0$. Uçlarda $f(0,4) = f(4,0) = 4$'tür.
Adım 3: karşılaştırma. Aday değerler -3, $-\frac{9}{4}$, 0 ve 4'tür. Mutlak maksimum değer 4'tür ve $(4,0)$ ile $(0,4)$ köşelerinde alınır; mutlak minimum değer -3'tür ve iç nokta $(1,1)$'de alınır.
$(1,1)$'de $f_{xx} = 2 > 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ olduğundan bu noktanın bir yerel minimum olduğunu Sonuç 18.2 ile zaten biliyorduk; karşılaştırma, bu yerel minimumun aynı zamanda mutlak olduğunu gösterir. ■

Kompaktlık varsayımı atlanamaz. $\mathbb{R}^2$'deki açık birim yuvar $B(0,1)$ üzerinde $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu $[0,1)$ aralığındaki her değeri alır ama 1'i almaz: $\sup f = 1$ olduğu hâlde mutlak maksimum yoktur. Bütün $\mathbb{R}^2$ üzerinde ise $f(x,y) = x + y$ alttan da üstten de sınırsızdır; ne maksimumu ne minimumu vardır. Birinci örnekte küme kapalı değildir, ikincisinde sınırlı değildir.

19.2 Bağlı Ekstremum

Dikdörtgen örneğinin ikinci adımında f'yi D'nin tamamında değil, yalnız $y = 0$ gibi bir denklemi sağlayan noktalarda inceledik. Değişkenleri bir denklemle birbirine bağlanmış bu tür ekstremum problemleri geometride ve uygulamalarda çok sık karşımıza çıkar.

Tanım 19.1 (Bağlı (Kısıtlı) Ekstremum). $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : U \to \mathbb{R}$ ve

$$M = \{x \in U : g(x) = 0\}$$

olsun. $P_0 \in M$ noktasının, U içinde kalan bir V komşuluğu bulunsun.

- Her $x \in V \cap M$ için $f(x) \le f(P_0)$ oluyorsa f, P_0 noktasında **$g(x) = 0$ kısıtı (koşulu) altında yerel maksimuma** sahiptir denir.
- Her $x \in V \cap M$ için $f(x) \ge f(P_0)$ oluyorsa f, P_0 noktasında **$g(x) = 0$ kısıtı altında yerel minimuma** sahiptir denir.

Bu ikisine **bağlı** (kısıtlı, koşullu) **yerel ekstremum** denir. $g(x) = 0$ denklemine **kısıt**, M kümesine **kısıt kümesi** denir.

Yani $f(P_0)$ değeri, P_0'ın yakınındaki bütün değerlerle değil, yalnız kısıtı sağlayan noktalardaki değerlerle karşılaştırılır. Başka bir deyişle P_0, f'nin M kümesine kısıtlanışının bir yerel ekstremum noktasıdır. Her $x \in M$ için $f(x) \le f(P_0)$ oluyorsa P_0'a f'nin M üzerindeki **mutlak maksimum** noktası denir (Tanım 18.2, f'nin M'ye kısıtlanışı için); V yerine U alınırsa bunun bir bağlı yerel maksimum olduğu görülür. Mutlak minimum için de aynısı geçerlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kısıtsız bir yerel ekstremum noktası M'de bulunuyorsa aynı zamanda bağlı yerel ekstremumdur, çünkü $V \cap M \subseteq V$'dir. Tersi ise doğru değildir: bağlı ekstremum noktası f'nin kritik noktası olmak zorunda değildir.

Örnek 19.3 (Kısıtı Çözerek Bağlı Ekstremum). $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun $x + y = 2$ kısıtı altındaki ekstremumlarını, kısıt denklemini bir değişkene göre çözerek bulunuz.

> **Çözüm.**
> Kısıt kümesi $y = 2 - x$ doğrusudur. Bu doğru üzerinde
>
> $$f(x, 2-x) = x(2-x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$$
>
> olur. Bu tek değişkenli fonksiyonun türevi $2 - 2x$, $x = 1$'de sıfırdır ve fonksiyon her x için 1'den küçük ya da ona eşittir. Demek ki f'nin kısıt doğrusu üzerindeki mutlak maksimumu 1'dir ve $(1,1)$ noktasında alınır. Minimum yoktur, çünkü $x \to \pm\infty$ iken $1 - (x-1)^2 \to -\infty$ olur.
> Kısıtsız $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun ise hiç yerel ekstremumu yoktur: tek kritik noktası $(0,0)$'dır ve $f(t,t) = t^2 > 0$, $f(t,-t) = -t^2 < 0$ olduğundan bu nokta bir eyer noktasıdır (Tanım 18.5). Bulduğumuz $(1,1)$ noktası f'nin kritik noktası bile değildir: $\nabla f(1,1) = (1,1) \neq 0$. Kısıt, problemi tamamen değiştirmiştir. ■

Kısıtı bir değişkene göre çözüp yerine koyarak problemi kısıtsız hâle getirmeye **doğrudan yöntem** denir. Kısıt denklemi kolayca çözülebildiği sürece iyi çalışır. Ama $x^3 + y^3 = 16$ gibi bir kısıtta açık çözüm elverişsiz, $e^z + z + x^2 y = 1$ gibi bir kısıtın z'ye göre çözümü ise temel fonksiyonlarla yazılamaz. Ayrıca çember gibi kapalı bir eğri tek bir grafik olarak yazılamaz; üst ve alt yarıyı ayrı ayrı incelemek gerekir. **Lagrange çarpanları yöntemi** kısıtı çözmeden çalışır ve bu zorlukların hepsini ortadan kaldırır.

19.3 Lagrange Çarpanları Teoremi

Doğrudan yöntemin arkasındaki fikir, kısıtı çözüp problemi kısıtsız hâle getirmektir. Kısıtı açıkça çözemesek bile böyle bir çözümün yerel olarak var olduğunu bilmek, bağlı ekstremum için bir gerek koşul türetmeye yeter.

> **i** Kullanacağımız sonuç: kapalı fonksiyon teoremi
>
> Kapalı fonksiyon teoreminin iki ve üç değişkenli biçimini bir sonraki bölümde ispatlayacağız; n değişkenli ve denklem sistemleri için olan biçimi orada da ispatsız kabul edilecek. Burada yalnız sonucunu kullanıyoruz. Üç değişkenli biçimi (Sonuç 20.1) şöyledir.
> $W \subseteq \mathbb{R}^3$ açık küme, $F \in C^1(W)$ ve $(a,b,c) \in W$ olsun; $F(a,b,c) = 0$ ve $F_z(a,b,c) \neq 0$ olsun. O zaman öyle bir $r > 0$ ve öyle bir $\Phi : B\big((a,b), r\big) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki
>
> - $\Phi(a,b) = c$ olur,
> - her $(x,y) \in B\big((a,b), r\big)$ için $\big(x, y, \Phi(x,y)\big) \in W$ ve $F\big(x, y, \Phi(x,y)\big) = 0$ olur,
> - $\Phi \in C^1\big(B((a,b), r)\big)$ olur.
>
> Yani $F(x,y,z) = 0$ denklemi (a,b,c) yakınında $z = \Phi(x,y)$ biçiminde çözülebilir ve çözüm sürekli türevlenebilirdir. Teorem ayrıca bu çözümün (a,b,c) yakınında tek olduğunu da söyler; bize yukarıdaki üç özellik yetecek.
> Aynı sonuç n değişkende de geçerlidir (Teorem 20.3): $F \in C^1$, $F(a) = 0$ ve $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$ ise $F(x) = 0$ denklemi a yakınında $x_n = \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ biçiminde C^1 bir Φ ile çözülür.

Teorem 19.1 (Lagrange Çarpanları Teoremi). *$n \geq 2$, $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme ve $f, g \in C^1(U)$ olsun. f, $P_0 \in U$ noktasında $g(x) = 0$ kısıtı altında yerel ekstremuma sahip olsun ve $\nabla g(P_0) \neq 0$ olsun. O zaman*

$$\nabla f(P_0) + \lambda \nabla g(P_0) = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

> ***İspat.***

 CC BY-NC-SA 4.0

Önce $n = 3$ için ispatlayalım. $P_0 = (a, b, c)$ yazalım ve f'nin P_0'da bağlı yerel maksimumu olduğunu varsayalım; minimum durumunda yalnız eşitsizliğin yönü değişir.
Adım 1: kısıtı çözmek. *$\nabla g(P_0) \neq 0$ olduğundan $g_x(P_0)$, $g_y(P_0)$ ve $g_z(P_0)$ bileşenlerinden en az biri sıfırdan farklıdır. Değişkenlerin adları gerekirse değiştirilerek $g_z(a, b, c) \neq 0$ varsayılabilir. $g \in C^1(U)$ ve $g(a, b, c) = 0$ olduğundan kapalı fonksiyon teoremi ($F = g$, $W = U$) bir $\Omega = B\big((a, b), r\big)$ yuvarı ve C^1 bir $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verir: $\Phi(a, b) = c$ ve her $(x, y) \in \Omega$ için $\psi(x, y) = \big(x, y, \Phi(x, y)\big)$ yazarsak*

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &\in U, \\ g\big(\psi(x, y)\big) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Yani P_0 yakınında kısıt kümesi, $z = \Phi(x, y)$ grafiğini içerir.
Adım 2: kısıtsız bir probleme geçiş. *$h : \Omega \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = f\big(\psi(x, y)\big)$ tanımlayalım. Bağlı maksimum tanımındaki V komşuluğu için $B(P_0, \varepsilon) \subseteq V$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır (Tanım 3.1). $\Phi \in C^1(\Omega)$ olduğundan Φ türevlenebilir ve süreklidir (Sonuç 14.3); dolayısıyla bileşenleri sürekli olan ψ süreklidir (Teorem 10.5) ve $\psi(a, b) = P_0$'dır. Öyleyse öyle bir $0 < \delta \leq r$ vardır ki $\| (x, y) - (a, b) \| < \delta$ iken $\| \psi(x, y) - P_0 \| < \varepsilon$ olur. Bu (x, y)'ler için $\psi(x, y) \in V$ ve $g\big(\psi(x, y)\big) = 0$, yani $\psi(x, y) \in V \cap M$ olduğundan*

$$h(x, y) = f\big(\psi(x, y)\big) \leq f(P_0) = h(a, b)$$

olur. Demek ki h, (a, b) noktasında kısıtsız bir yerel maksimuma sahiptir.
Adım 3: gerek koşul. *f ve Φ'nin kısmi türevleri sürekli olduğundan ikisi de türevlenebilirdir (Teorem 14.3); bileşenleri türevlenebilir olan ψ da türevlenebilirdir (Teorem 15.2). Zincir kuralı (Teorem 15.6) gereği h türevlenebilirdir ve f'nin türevleri $\psi(x, y)$ noktasında alınmak üzere*

$$\begin{aligned} h_x &= f_x + f_z\, \Phi_x, \\ h_y &= f_y + f_z\, \Phi_y \end{aligned}$$

olur. Yerel ekstremum için gerek koşul (Teorem 18.1) $h_x(a, b) = h_y(a, b) = 0$ verir; $\psi(a, b) = P_0$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_x(P_0) + f_z(P_0)\, \Phi_x(a, b) &= 0, \\ f_y(P_0) + f_z(P_0)\, \Phi_y(a, b) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Adım 4: kısıtın türevi. *Ω üzerinde $g\big(\psi(x, y)\big) = 0$ özdeş olarak sağlandığından bu fonksiyonun kısmi türevleri sıfırdır. Aynı zincir kuralı hesabıyla*

$$\begin{aligned} g_x(P_0) + g_z(P_0)\, \Phi_x(a, b) &= 0, \\ g_y(P_0) + g_z(P_0)\, \Phi_y(a, b) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

bulunur.
Adım 5: çarpanın seçimi. *$g_z(P_0) \neq 0$ olduğundan*

$$\lambda = -\frac{f_z(P_0)}{g_z(P_0)}$$

tanımlayabiliriz. Bu seçimle

$$f_z(P_0) + \lambda\, g_z(P_0) = 0 \tag{3}$$

olur. (2)'den $\Phi_x(a, b) = -\dfrac{g_x(P_0)}{g_z(P_0)}$ bulunur; bunu (1)'in birinci satırında yerine koyarsak

$$f_x(P_0) - f_z(P_0)\, \frac{g_x(P_0)}{g_z(P_0)} = f_x(P_0) + \lambda\, g_x(P_0) = 0$$

elde edilir. Aynı hesap ikinci satırlardan $f_y(P_0) + \lambda\, g_y(P_0) = 0$ verir. Bu iki eşitlik (3) ile birlikte bileşen bileşen $\nabla f(P_0) + \lambda \nabla g(P_0) = 0$ demektir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Genel n. *Değişkenleri $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ diye ayıralım, $P_0 = (a', a_n)$ olsun ve gerekirse yeniden numaralandırarak $\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(P_0) \neq 0$ varsayalım. n değişkenli kapalı fonksiyon teoremi a' merkezli bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ yuvarı ve $\Phi(a') = a_n$, $g\left(\, x', \Phi(x') \,\right) = 0$ olan C^1 bir $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ verir. Adım 2 aynen tekrarlanarak $h(x') = f\left(\, x', \Phi(x') \,\right)$ fonksiyonunun a''da yerel ekstremuma sahip olduğu görülür. Adım 3 ve 4, her $j = 1, \ldots, n-1$ için (türevler P_0 ve a''da)*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0$$

verir. $\lambda = -\dfrac{\partial f/\partial x_n}{\partial g/\partial x_n}$ seçilirse Adım 5'teki hesap her $j = 1, \ldots, n$ için $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(P_0) = 0$ verir; bu, $\nabla f(P_0) + \lambda \nabla g(P_0) = 0$ demektir. ■

Teoremin sonucu, $n+1$ bilinmeyenli ($x_1, \ldots, x_n$ ve λ) $n+1$ denklemden oluşan bir sistemdir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$
$$g(x) = 0.$$

Teoremle ilgili üç gözlem yapalım.

- **Teorem bir gerek koşuldur.** Bağlı ekstremum noktaları bu sistemin çözümleri arasındadır, ama her çözüm bir bağlı ekstremum değildir. Örneğin $f(x, y) = y$ ve $g(x, y) = y - x^3$ için $\nabla f + \lambda \nabla g = (-3\lambda x^2, 1 + \lambda) = 0$ ve $g = 0$ sisteminin tek çözümü $\lambda = -1$, $(x, y) = (0, 0)$'dır. Oysa kısıt eğrisi $y = x^3$ üzerinde $f = x^3$ olur ve bu fonksiyonun $x = 0$'da ekstremumu yoktur. Yöntem yalnız **aday** verir.
- **U'nun bağlantılı olması gerekmez.** İspat yalnız P_0'ın küçük bir komşuluğunda çalışır.
- **$\nabla g(P_0) \neq 0$ varsayımı atlanamaz.** Aşağıdaki örnek, bu koşulun bozulduğu bir noktada bağlı ekstremumun Lagrange sisteminin hiçbir çözümünde görünmeyebileceğini gösterir.

Örnek 19.4 (Gradyanın Sıfır Olduğu Kısıt Noktası). $f(x, y) = x$ fonksiyonunun $y^2 - x^3 = 0$ eğrisi üzerindeki en küçük değerini bulunuz ve Lagrange sisteminin bu noktayı vermediğini gösteriniz.

Çözüm.
Minimum. Eğri üzerinde $x^3 = y^2 \geq 0$, dolayısıyla $x \geq 0$'dır. $(0, 0)$ eğrinin üzerindedir ve $f(0, 0) = 0$ olduğundan f'nin eğri üzerindeki mutlak minimumu 0'dır ve $(0, 0)$'da alınır.
Lagrange sistemi. $g(x, y) = y^2 - x^3$ için $\nabla f = (1, 0)$ ve $\nabla g = (-3x^2, 2y)$ olduğundan sistem

$$1 - 3\lambda x^2 = 0,$$
$$2\lambda y = 0,$$
$$y^2 - x^3 = 0$$

olur. Birinci denklem $\lambda \neq 0$ olmasını gerektirir; ikinci denklemden $y = 0$, üçüncüden $x = 0$ bulunur. Ama $x = 0$ birinci denklemde $1 = 0$ çelişkisini verir. Sistemin hiç çözümü yoktur.
Açıklama. Minimum noktasında $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$'dır; Lagrange teoreminin (Teorem 19.1) varsayımı sağlanmaz. Gerçekten de her λ için $\nabla f(0, 0) + \lambda \nabla g(0, 0) = (1, 0) \neq 0$ olur. Eğrinin orijinde sivri bir ucu vardır ve eğri orada kapalı fonksiyon teoreminin verdiği türden düzgün bir grafik değildir. Bu yüzden Lagrange yönteminde, kısıt kümesi üzerinde $\nabla g = 0$ olan noktalar aday listesine ayrıca eklenir. ■

19.4 Lagrange Fonksiyonu ve Lagrange Yöntemi

Lagrange teoreminin denklemlerini tek bir fonksiyonun durgun noktası koşulu olarak yazmak, yöntemi hem hatırlamayı hem uygulamayı kolaylaştırır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 19.2 (Lagrange Fonksiyonu ve Lagrange Çarpanı). $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve $f, g : U \to \mathbb{R}$ olsun. $U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda\, g(x)$$

ile tanımlanan L fonksiyonuna f'nin $g(x) = 0$ kısıtına ait **Lagrange fonksiyonu**, λ değişkenine de **Lagrange çarpanı** denir.

Yani L, $n+1$ değişkenli bir fonksiyondur ve kısmi türevleri

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j}(x),$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) = g(x)$$

olur ($j = 1, \ldots, n$). Dolayısıyla $\nabla L(P_0, \lambda_0) = 0$ koşulu tam olarak $\nabla f(P_0) + \lambda_0 \nabla g(P_0) = 0$ ve $g(P_0) = 0$ demektir. Teorem 19.1, bağlı ekstremum noktalarının L'nin durgun noktalarından elde edildiğini söyler: kısıtlı problem, kısıtsız bir fonksiyonun durgun noktalarını bulma problemine dönüşür ve kısıt, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ denklemi olarak sisteme kendiliğinden girer.
Çarpan bazen ters işaretle, $\nabla f(P_0) = \mu \nabla g(P_0)$ biçiminde yazılır. $\mu = -\lambda$ olduğundan bulunan adaylar aynıdır; yalnız çarpanın işareti değişir.

Dört adımda Lagrange yöntemi

1. **Kısıtı düzenle.** Kısıtı $g(x) = 0$ biçiminde yaz ($g(x) = k$ ise $g(x) - k$ kullan). M üzerinde $\nabla g = 0$ olan noktalar varsa onları aday listesine ayrıca ekle.
2. **Sistemi çöz.** $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ denklemlerini $x_1, \ldots, x_n, \lambda$ bilinmeyenlerine göre çöz. Bir denklemi bir ifadeye bölmeden önce o ifadenin sıfır olduğu durumu ayrıca incele.
3. **Değerleri hesapla.** f'yi bulunan bütün adaylarda hesapla.
4. **Karar ver.** M kompaktsa adaylardaki en büyük değer f'nin M üzerindeki mutlak maksimumu, en küçük değer mutlak minimumudur. M kompakt değilse bu karşılaştırma tek başına yetmez; f'nin M üzerindeki davranışı ayrıca incelenir.

Dördüncü adımın gerekçesi şudur. $f, g \in C^1(U)$ olsun. M kompakt ve f sürekliyse f, M üzerindeki mutlak maksimumunu bir $P^* \in M$ noktasında alır (Teorem 11.3). P^* bir bağlı yerel maksimumdur; $\nabla g(P^*) \neq 0$ ise Teorem 19.1 gereği ikinci adımda bulunur, $\nabla g(P^*) = 0$ ise birinci adımda listeye girmiştir. Mutlak maksimum noktası listede olduğuna göre listedeki en büyük değer mutlak maksimumdur. $U = \mathbb{R}^n$ ve g sürekli ise $M = g^{-1}(\{0\})$ kümesi her zaman kapalıdır (Sonuç 11.2); kompaktlık için yalnız sınırlılığı denetlemek yeter (Teorem 5.5).

Örnek 19.5 (Çember Üzerinde Bir Kuadratik Fonksiyon). $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini ve bu değerlerin alındığı noktaları bulunuz.

Çözüm.
Kısıt. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ alalım; $M = S(0, 1)$ birim çemberdir. M kapalı (Sonuç 11.2) ve sınırlı, dolayısıyla kompakttır; f sürekli olduğundan M üzerinde en büyük ve en küçük değerini alır. $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ yalnız orijinde sıfırdır ve orijin çemberin üzerinde değildir.
Sistem. $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$ olduğundan $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ ve $g = 0$ denklemleri

$$2x + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x(1 + \lambda) = 0,$$
$$4y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y(2 + \lambda) = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

olur. Birinci denklemden $x = 0$ ya da $\lambda = -1$'dir.

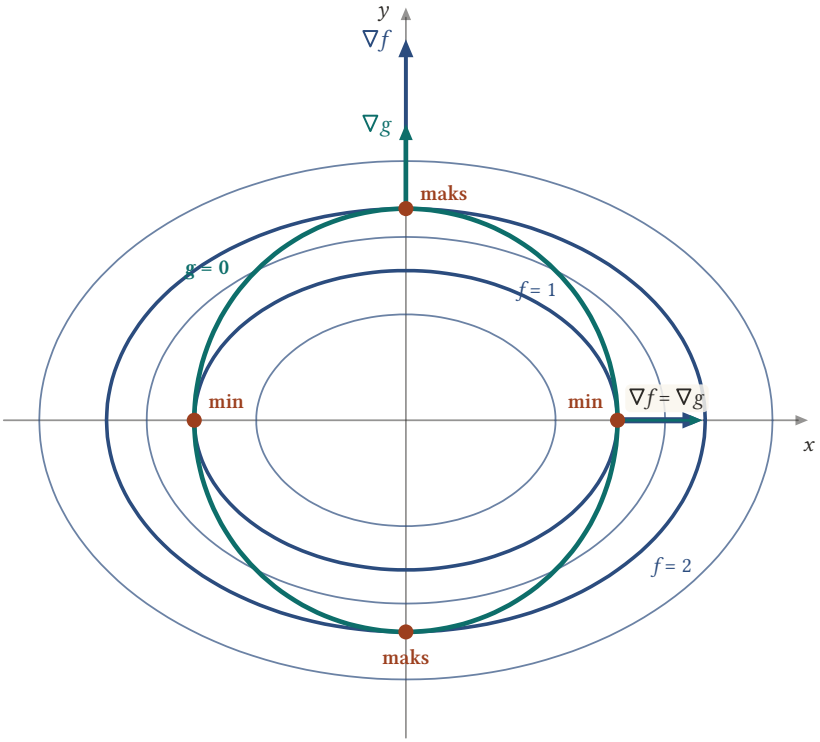
- $x = 0$ ise üçüncü denklemden $y = \pm 1$ bulunur; $y \neq 0$ olduğundan ikinci denklem $\lambda = -2$ verir. Adaylar $(0, 1)$ ve $(0, -1)$'dir.
- $\lambda = -1$ ise ikinci denklem $y = 0$ verir, üçüncü denklemden $x = \pm 1$ bulunur. Adaylar $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Değerler ve karar. $f(0,\pm1)=2$ ve $f(\pm1,0)=1$'dir. M kompakt olduğundan f'nin çember üzerindeki en büyük değeri 2'dir ve $(0,\pm1)$ noktalarında, en küçük değeri 1'dir ve $(\pm1,0)$ noktalarında alınır. Sonucu doğrudan da denetleyebiliriz: çember üzerinde $x^2=1-y^2$ olduğundan $f=1+y^2$ olur ve $0\le y^2\le 1$ olduğundan f, 1 ile 2 arasında değişir.
Geometrik resim. f'nin seviye eğrileri $x^2+2y^2=c$ elipsleridir. $c<1$ ise bu elipsin her noktasında $x^2+y^2\le x^2+2y^2=c<1$ olur; elips çemberin içinde kalır. $c>2$ ise elipsin her noktasında

$$x^2+y^2\ge\frac{x^2+2y^2}{2}=\frac{c}{2}>1$$

olur; elips çemberin dışında kalır. Çemberle ortak noktası olan elipsler tam olarak $1\le c\le 2$ olanlardır ve uç değerler, elipsin çembere teğet olduğu $c=1$ ve $c=2$ durumlarında alınır. Değme noktalarında gradyanlar paraleldir: $(1,0)$'da $\nabla f=(2,0)=\nabla g$, $(0,1)$'de $\nabla f=(0,4)=2\nabla g$ olur.



Şekil 19.2: Birim çember $g=0$ ve $f=x^2+2y^2$ fonksiyonunun $f=0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 3$ seviye elipsleri. $f=1$ elipsi çembere $(\pm1,0)$ noktalarında içten, $f=2$ elipsi $(0,\pm1)$ noktalarında dıştan teğettir; bu noktalarda ∇f ile ∇g paraleldir. Oklar 1/5 ölçekle çizilmiştir: $(1,0)$'da $\nabla f=\nabla g=(2,0)$, $(0,1)$'de $\nabla f=(0,4)$ ve $\nabla g=(0,2)$.

■

Lagrange fonksiyonunun durgun noktası L'nin kendi ekstremumu olmak zorunda değildir. Bu örnekte $L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$'dir ve $(1,0,-1)$ durgun noktasının yakınında

$$L(1+t,0,-1+s)=1+s\,t\,(2+t)$$

olur. $|\,t\,|<2$ iken s ile t aynı işaretliyse $L>1$, zıt işaretliyse $L<1$'dir; yani $(1,0,-1)$ noktası L'nin bir eyer noktasıdır. Kısıtsız probleme geçiş ekstremumları değil, yalnız durgun noktaları korur; bu yüzden durgun noktalar bulunduktan sonra f'nin değerleri karşılaştırılır.

Örnek 19.6 (Küre Üzerinde Doğrusal Bir Fonksiyon). $f(x,y,z)=2x+2y+z$ fonksiyonunun $x^2+y^2+z^2=9$ küresi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Kısıt. $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9$ alalım; $M = S(0,3)$ kapalı ve sınırlı, yani kompakttır. $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ yalnız orijinde sıfırdır ve orijin kürenin üzerinde değildir.
Sistem. $\nabla f = (2,2,1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda x &= 0,\\ 2 + 2\lambda y &= 0,\\ 1 + 2\lambda z &= 0,\\ x^2+y^2+z^2 &= 9. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ birinci denklemde $2 = 0$ çelişkisini verir; öyleyse $\lambda \neq 0$'dır ve $x = y = -\dfrac{1}{\lambda}$, $z = -\dfrac{1}{2\lambda}$ olur. Bunlar kısıtta yerine konursa

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{9}{4\lambda^2} = 9$$

yani $\lambda^2 = \dfrac{1}{4}$ ve $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$ bulunur.

- $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ için $(2,2,1)$ noktası ve $f(2,2,1) = 4+4+1 = 9$.
- $\lambda = \dfrac{1}{2}$ için $(-2,-2,-1)$ noktası ve $f(-2,-2,-1) = -9$.

Karar. Küre kompakt olduğundan f'nin küre üzerindeki en büyük değeri 9'dur ve $(2,2,1)$'de, en küçük değeri -9'dur ve $(-2,-2,-1)$'de alınır.
Denetim. $f(x,y,z) = \langle (2,2,1), (x,y,z)\rangle$ olduğundan Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) küre üzerinde

$$\mid f(x,y,z) \mid \leq \| \ (2,2,1) \ \| \ \| \ (x,y,z) \ \| = 3 \cdot 3 = 9$$

verir ve eşitlik (x,y,z) vektörü $(2,2,1)$'e paralel olduğunda, yani tam bulduğumuz iki noktada sağlanır. ■

Örnek 19.7 (Kompakt Olmayan Bir Kısıt Eğrisi). $f(x,y) = e^{xy}$ fonksiyonunun $x^3+y^3 = 16$ kısıtı altındaki en büyük ve en küçük değerlerini araştırınız.

Çözüm.
Adaylar. $g(x,y) = x^3+y^3-16$ alalım. $\nabla g = (3x^2, 3y^2)$ yalnız orijinde sıfırdır ve orijin eğrinin üzerinde değildir. $\nabla f = \left(\ ye^{xy}, xe^{xy} \ \right)$ olduğundan sistem

$$\begin{aligned} ye^{xy} + 3\lambda x^2 &= 0,\\ xe^{xy} + 3\lambda y^2 &= 0,\\ x^3 + y^3 &= 16 \end{aligned}$$

olur. $x = 0$ olsaydı birinci denklemden $y = 0$ çıkardı; oysa $(0,0)$ eğrinin üzerinde değildir. Demek ki $x \neq 0$, aynı nedenle $y \neq 0$'dır ve birinci denklemden ($ye^{xy} \neq 0$) $\lambda \neq 0$ olur. İlk iki denklemden

$$e^{xy} = -\frac{3\lambda x^2}{y} = -\frac{3\lambda y^2}{x}$$

bulunur. $-3\lambda \neq 0$ ile sadeleştirip içler dışlar çarpımı yapılırsa $x^3 = y^3$, yani $x = y$ olur. Kısıttan $2x^3 = 16$, $x = y = 2$ ve birinci denklemden $\lambda = -\dfrac{2e^4}{12} = -\dfrac{e^4}{6}$ bulunur. Tek aday $(2,2)$ noktasıdır ve $f(2,2) = e^4$'tür.
Eğri kompakt değildir. $x \to +\infty$ iken $y = \sqrt[3]{16 - x^3} \to -\infty$ olur; eğri sınırsızdır. Dolayısıyla tek adayın maksimum mu, minimum mu, yoksa hiçbiri mi olduğunu Lagrange yöntemi söyleyemez; eğriyi ayrıca incelemeliyiz.
Eğri üzerinde xy çarpımı. $s = x+y$ ve $p = xy$ diyelim. $(x,y) \neq (0,0)$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^2 - xy + y^2 = \Big(x - \frac{y}{2}\Big)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$$

olduğundan

$$16 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

eşitliği $s > 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca $x^3 + y^3 = s^3 - 3ps$ olduğundan

$$p = \frac{s^3 - 16}{3s} = \frac{s^2}{3} - \frac{16}{3s}$$

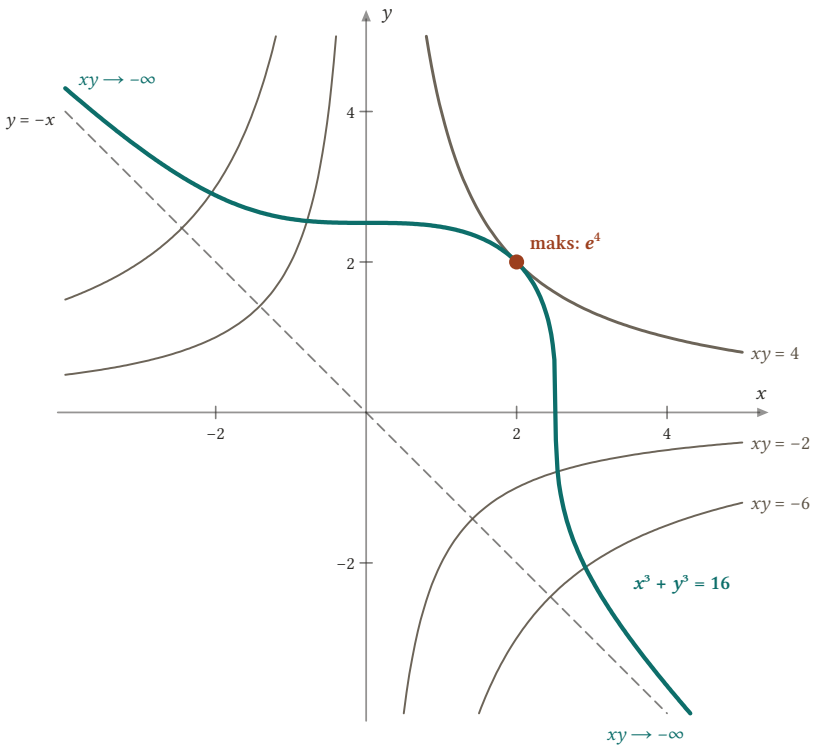
bulunur. x ve y, $t^2 - st + p = 0$ denkleminin kökleridir; reel olmaları için diskriminant negatif olmamalıdır:

$$s^2 - 4p = \frac{64 - s^3}{3s} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < s \leq 4.$$

Tersine, her $s \in (0, 4]$ için bu denklemin reel kökleri $x + y = s$, $xy = p$ ve $x^3 + y^3 = s^3 - 3ps = 16$ sağlar; yani eğri üzerinde bir nokta verir. $(0, 4]$ aralığında s^2 ve $-\dfrac{16}{s}$ artan olduğundan p artandır. En büyük değeri $p(4) = \dfrac{16}{3} - \dfrac{4}{3} = 4$'tür ve yalnız $s = 4$ iken, yani diskriminant sıfırken $(x = y = 2)$ alınır.

Sonuç. Eğri üzerinde $xy \leq 4$'tür ve eşitlik yalnız $(2, 2)$'de sağlanır. Üstel fonksiyon artan olduğundan eğri üzerinde $e^{xy} \leq e^4$ olur: f'nin eğri üzerindeki mutlak maksimumu e^4'tür ve $(2, 2)$'de alınır.

Öte yandan $s \to 0^+$ iken $p \to -\infty$ ve $e^p \to 0$'dır. Örneğin $s = 1$ için $p = -5$ ve $f = e^{-5}$ olur. f eğri üzerinde 0'a istendiği kadar yakın değerler alır, ama $e^{xy} > 0$ olduğundan 0'ı almaz. Demek ki f'nin eğri üzerinde **minimumu yoktur**; değerlerinin en büyük alt sınırı 0'dır.



Şekil 19.3: $x^3 + y^3 = 16$ eğrisi ve $f = e^{xy}$ fonksiyonunun $xy = 4, -2, -6$ seviye eğrileri. $xy = 4$ hiperbolü eğriye $(2, 2)$'de teğettir; eğrinin öbür bütün noktalarında $xy < 4$'tür. Eğri $y = -x$ asimptotuna yaklaşırken $xy \to -\infty$, yani $f \to 0$ olur; minimum yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Lagrange yönteminin tek bir aday vermesi, bu adayın maksimum ya da minimum olduğunu kendi başına göstermez; burada maksimum olduğunu ek bir inceleme gösterdi, minimumun ise hiç olmadığı ortaya çıktı. ■

Örnek 19.8 (İki Düzleme Uzaklıkların Kareleri Toplamı). $x+y-2z=0$ düzlemi üzerinde öyle bir $P(x,y,z)$ noktası bulunuz ki P'nin $x+3z=6$ ve $y+3z=2$ düzlemlerine olan uzaklıklarının kareleri toplamı en küçük olsun.

Çözüm.
Amaç fonksiyonu. (x_0,y_0,z_0) noktasının $ax+by+cz=d$ düzlemine uzaklığı

$$\frac{\mid ax_0+by_0+cz_0-d \mid}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

olduğundan $P(x,y,z)$'nin iki düzleme uzaklıkları

$$k_1=\frac{\mid x+3z-6 \mid}{\sqrt{10}},$$
$$k_2=\frac{\mid y+3z-2 \mid}{\sqrt{10}}$$

olur. En küçük yapılacak fonksiyon

$$f(x,y,z)=k_1^2+k_2^2=\frac{(x+3z-6)^2+(y+3z-2)^2}{10},$$

kısıt ise $g(x,y,z)=x+y-2z=0$'dır. $\nabla g=(1,1,-2)$ hiçbir yerde sıfır değildir.
Sistem. $A=x+3z-6$ ve $B=y+3z-2$ kısaltmalarıyla $f_x=\dfrac{A}{5}$, $f_y=\dfrac{B}{5}$ ve $f_z=\dfrac{3(A+B)}{5}$ olur. Sistem

$$\begin{aligned}\frac{A}{5}+\lambda&=0,\\ \frac{B}{5}+\lambda&=0,\\ \frac{3(A+B)}{5}-2\lambda&=0,\\ x+y-2z&=0\end{aligned}$$

biçimindedir. İlk iki denklemden $A=B=-5\lambda$; üçüncüde yerine koyarsak $-6\lambda-2\lambda=-8\lambda=0$, yani $\lambda=0$ ve $A=B=0$ bulunur. $A=0$ ve $B=0$ denklemleri $x=6-3z$ ve $y=2-3z$ verir; kısıtta yerine koyarsak $8-8z=0$, $z=1$ ve buradan $x=3$, $y=-1$ bulunur. Tek aday $P(3,-1,1)$'dir.
Karar. Kısıt düzlemi kompakt değildir; ama her yerde $f\geq 0$ ve $f(3,-1,1)=0$ olduğundan $P(3,-1,1)$ noktası f'nin kısıt düzlemi üzerindeki mutlak minimum noktasıdır. En küçük toplam 0'dır. Bunun nedeni P'nin üç düzlemin de üzerinde olmasıdır: $3+3\cdot 1=6$, $-1+3\cdot 1=2$ ve $3-1-2=0$. Üç düzlemin normal vektörlerinden kurulan determinant

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-8\neq 0$$

olduğundan düzlemler tek bir noktada kesişir ve bu nokta P'dir. $\lambda=0$ çıkması da bununla uyumludur: $\nabla f(P)=0$'dır, yani f'nin kısıtsız minimumu zaten kısıt düzleminin üzerindedir. Maksimum ise yoktur: (t,t,t) noktaları kısıt düzlemindedir ve $t\to+\infty$ iken

$$f(t,t,t)=\frac{(4t-6)^2+(4t-2)^2}{10}\to+\infty$$

olur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

19.5 Geometrik Yorum

Çember örneğinde uç değerlerin, f'nin seviye eğrisinin kısıt eğrisine teğet olduğu noktalarda alındığını gördük. Bu, Lagrange koşulunun genel geometrik anlamıdır ve aşağıdaki önermeden çıkar.

Önerme 19.2 (Gradyanlar Kısıt Kümesinin Teğetlerine Diktir). *$\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık, $f, g \in C^1(U)$ ve $M = \{x \in U : g(x) = 0\}$ olsun; f, $P_0 \in M$ noktasında $g(x) = 0$ kısıtı altında yerel ekstremuma sahip olsun. $\delta > 0$ ve $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$, her t için $\gamma(t) \in M$ ve $\gamma(0) = P_0$ olan türevlenebilir bir eğri ise*

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(P_0), \gamma'(0) \rangle &= 0, \\ \langle \nabla f(P_0), \gamma'(0) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olur.

> ***İspat.***
> ***Zincir kuralı.*** *f ve g, C^1 olduğundan türevlenebilirdir (Teorem 14.3). Zincir kuralı (Teorem 15.6) gereği $g \circ \gamma$ ve $f \circ \gamma$ tek değişkenli fonksiyonları türevlenebilirdir ve*
>
> $$(g \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$
>
> *olur (f için de aynısı): $1 \times n$ boyutlu $J_g(\gamma(t))$ satırı ile $n \times 1$ boyutlu $\gamma'(t)$ sütununun çarpımı, iki vektörün iç çarpımıdır.*
> ***Kısıtın gradyanı.*** *$\gamma(t) \in M$ olduğundan her t için $g(\gamma(t)) = 0$'dır. Sabit fonksiyonun türevi sıfır olduğundan $t = 0$'da $\langle \nabla g(P_0), \gamma'(0) \rangle = 0$ bulunur.*
> ***Amaç fonksiyonunun gradyanı.*** *f'nin P_0'da bağlı yerel maksimumu olsun (minimum için eşitsizlik ters çevrilir) ve tanımdaki V komşuluğu için $B(P_0, \varepsilon) \subseteq V$ olsun. γ türevlenebilir olduğundan süreklidir ve $\gamma(0) = P_0$'dır; öyleyse öyle bir $0 < \eta \leq \delta$ vardır ki $\mid t \mid < \eta$ iken $\gamma(t) \in B(P_0, \varepsilon) \subseteq V$ olur. Bu t'ler için $\gamma(t) \in V \cap M$ olduğundan*
>
> $$\varphi(t) = f(\gamma(t)) \leq f(P_0) = \varphi(0)$$
>
> *olur. Demek ki tek değişkenli φ fonksiyonu $(-\eta, \eta)$ aralığının iç noktası olan $t = 0$'da yerel maksimuma sahiptir ve Fermat teoremi (bkz. Analiz 2) gereği $\varphi'(0) = \langle \nabla f(P_0), \gamma'(0) \rangle = 0$ olur.* ■

M içinde kalan türevlenebilir bir eğrinin P_0'daki hız vektörü $\gamma'(0)$'a M'nin P_0'daki bir **teğet vektörü** diyelim. Önerme, $\nabla f(P_0)$ ve $\nabla g(P_0)$ vektörlerinin ikisinin de M'nin bütün teğet vektörlerine dik olduğunu söyler. Lagrange koşulu bu gözlemden geometrik olarak okunabilir.

Düzlemde. $n = 2$, $\nabla g(P_0) \neq 0$ ve örneğin $g_y(P_0) \neq 0$ olsun. Kapalı fonksiyon teoremi M'yi $P_0 = (a, b)$ yakınında bir $y = \Phi(x)$ grafiği olarak verir. $\gamma(t) = \big(a + t, \Phi(a + t) \big)$ eğrisi M içindedir ve $\gamma'(0) = \big(1, \Phi'(a) \big) \neq 0$'dır. Düzlemde sıfırdan farklı bir vektöre dik olan vektörler tek bir doğru oluşturur. $\nabla g(P_0)$ bu doğru üzerinde sıfırdan farklı bir vektör olduğundan $\nabla f(P_0)$ onun bir katıdır: $\nabla f(P_0) = -\lambda \nabla g(P_0)$.

Aynı akıl yürütme, $\nabla f(P_0) \neq 0$ iken $f(x) = f(P_0)$ seviye eğrisine uygulanırsa (bu eğri üzerinde $f \circ \gamma$ sabittir) $\nabla f(P_0)$'ın seviye eğrisinin teğetine dik olduğunu gösterir. Gradyanlar paralel olduğundan seviye eğrisi ile kısıt eğrisi P_0'da aynı normal doğruya, dolayısıyla aynı teğet doğruya sahiptir: **bağlı ekstremum noktasında f'nin seviye eğrisi kısıt eğrisine teğettir.** Sezgisel olarak, seviye eğrisi kısıt eğrisini teğet olmadan kesseydi, kısıt eğrisi üzerinde bir yöne ilerlerken f artar, öbür yöne ilerlerken azalırdı ve P_0 ekstremum olamazdı. Örnek 19.5 içindeki $x^2 + 2y^2 = 1$ ve $x^2 + 2y^2 = 2$ elipslerinin çembere değdiği dört nokta tam olarak bu durumdur.

Uzayda. $n = 3$ ve $g_z(P_0) \neq 0$ ise M, $P_0 = (a, b, c)$ yakınında $z = \Phi(x, y)$ yüzeyini içerir. $\gamma_1(t) = \big(a + t, b, \Phi(a + t, b) \big)$ ve $\gamma_2(t) = \big(a, b + t, \Phi(a, b + t) \big)$ eğrileri

$$\begin{aligned} \gamma_1'(0) &= \big(1, 0, \Phi_x(a, b) \big), \\ \gamma_2'(0) &= \big(0, 1, \Phi_y(a, b) \big) \end{aligned}$$

gibi doğrusal bağımsız iki teğet vektör verir. Bu ikisine dik vektörler tek bir doğru oluşturur ve $\nabla g(P_0)$ bu doğruyu gerer; öyleyse yine $\nabla f(P_0) = -\lambda \nabla g(P_0)$ olur. Bu, Lagrange teoreminin ispatındaki hesabın geometrik karşılığıdır: (1) ve (2) eşitlikleri, $\nabla f(P_0)$ ile $\nabla g(P_0)$'ın bu iki teğet vektöre dik olduğunu söyler. Uzayda bağlı ekstremum noktasında f'nin seviye yüzeyi kısıt yüzeyine teğettir.

 CC BY-NC-SA 4.0

19.6 Birden Çok Kısıt

Değişkenler birden çok denklemle bağlı olabilir; örneğin uzayda iki yüzeyin kesişim eğrisi üzerinde ekstremum aranıyorsa iki kısıt vardır. Lagrange teoremi, her kısıt için ayrı bir çarpanla aynı biçimde genelleşir.
$g_1, ..., g_k : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için kısıt kümesi

$$M = \{x \in U : g_1(x) = ... = g_k(x) = 0\}$$

olur. Bağlı yerel ekstremum, Tanım 19.1 içindeki M yerine bu küme alınarak aynen tanımlanır.

Teorem 19.2 (Birden Çok Kısıt için Lagrange Teoremi). *$1 \le k \le n-1$, $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve $f, g_1, ..., g_k \in C^1(U)$ olsun. f, $P_0 \in U$ noktasında $g_1(x) = ... = g_k(x) = 0$ kısıtları altında yerel ekstremuma sahip olsun ve*

$$\nabla g_1(P_0), ..., \nabla g_k(P_0)$$

vektörleri doğrusal bağımsız olsun. O zaman

$$\nabla f(P_0) + \lambda_1 \nabla g_1(P_0) + ... + \lambda_k \nabla g_k(P_0) = 0$$

eşitliğini sağlayan $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ sayıları vardır.

İspat.
$G = (g_1, ..., g_k) : U \to \mathbb{R}^k$ yazalım. $k \times n$ boyutlu $J_G(P_0)$ Jacobi matrisinin satırları $\nabla g_1(P_0), ..., \nabla g_k(P_0)$'dır ve varsayım gereği doğrusal bağımsızdır. Bir matrisin satır rankı sütun rankına eşit olduğundan $J_G(P_0)$'ın doğrusal bağımsız k sütunu vardır. Değişkenleri yeniden numaralandırarak bunların son k sütun olduğunu varsayabiliriz.
Blok yazılış. *$x = (u, v)$, $u = (x_1, ..., x_{n-k})$, $v = (x_{n-k+1}, ..., x_n)$ ve $P_0 = (u_0, v_0)$ yazalım. Bundan sonra bütün türevler P_0'da alınmıştır. Jacobi matrisini*

$$J_G(P_0) = (B \;\; A)$$

biçiminde iki bloğa ayıralım: B, u değişkenlerine göre kısmi türevlerden oluşan $k \times (n-k)$ matris, A ise v değişkenlerine göre kısmi türevlerden oluşan $k \times k$ matristir. A'nın sütunları doğrusal bağımsız olduğundan $\det A \neq 0$'dır ve A terslenebilirdir. Aynı biçimde $\nabla f(P_0)$ satır vektörünü $\big(\, \nabla_u f, \nabla_v f \,\big)$ diye ayıralım: $\nabla_u f$, f'nin ilk $n-k$ değişkene göre, $\nabla_v f$ ise son k değişkene göre kısmi türevlerinden oluşur.
Kısıtları çözmek. *$\det A \neq 0$ koşulu, kapalı fonksiyon teoreminin denklem sistemleri için olan biçiminin (Teorem 20.3; burada da yalnız sonucunu kullanıyoruz) varsayımıdır. Teorem u_0 merkezli bir Ω açık yuvarı ve $\Phi(u_0) = v_0$ olan C^1 bir $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ fonksiyonu verir; her $u \in \Omega$ için $\big(\, u, \Phi(u) \,\big) \in U$ ve $G\big(\, u, \Phi(u) \,\big) = 0$'dır.*
Kısıtsız probleme geçiş. *Teorem 19.1 ispatındaki 2. adım aynen tekrarlanarak $h(u) = f\big(\, u, \Phi(u) \,\big)$ fonksiyonunun u_0'da kısıtsız bir yerel ekstremuma sahip olduğu görülür. Zincir kuralı ve gerek koşul (Teorem 18.1)*

$$\nabla_u f + \nabla_v f J_\Phi(u_0) = 0$$

verir. $G\big(\, u, \Phi(u) \,\big) = 0$ özdeşliğinin türevi alınırsa $B + A\, J_\Phi(u_0) = 0$, yani

$$J_\Phi(u_0) = -A^{-1}B$$

bulunur.
Çarpanlar. *$\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) = -\nabla_v f\, A^{-1}$ satır vektörünü tanımlayalım. O zaman*

$$\begin{aligned} \nabla_v f + \Lambda A &= \nabla_v f - \nabla_v f = 0, \\ \nabla_u f + \Lambda B &= \nabla_u f - \nabla_v f\, A^{-1} B \\ &= \nabla_u f + \nabla_v f\, J_\Phi(u_0) = 0 \end{aligned}$$

olur. İki eşitlik birlikte $\nabla f(P_0) + \Lambda\, J_G(P_0) = 0$ demektir. $\Lambda\, J_G(P_0)$ çarpımı, $J_G(P_0)$'ın satırlarının $\lambda_1, ..., \lambda_k$ katsayılı toplamı, yani $\lambda_1 \nabla g_1(P_0) + ... + \lambda_k \nabla g_k(P_0)$ olduğundan istenen elde edilir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

$k = 1$ için doğrusal bağımsızlık $\nabla g_1(P_0) \neq 0$ demektir ve teorem Teorem 19.1 ile aynıdır. $k \leq n-1$ koşulu doğaldır: $\mathbb{R}^n$'de en çok n doğrusal bağımsız vektör vardır ve $k = n$ bağımsız kısıt olduğunda ters fonksiyon teoremi (Teorem 20.1) gereği P_0'ın yakınında M'nin başka noktası yoktur; o zaman problem anlamını yitirir.
Lagrange fonksiyonu bu durumda $n + k$ değişkenlidir:

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_k g_k(x).$$

$\nabla L = 0$ koşulu, teoremdeki n denklem ile k kısıt denkleminin birleşimidir. Lagrange yönteminin dört adımı aynen geçerlidir; birinci adımda, M üzerinde gradyanların doğrusal bağımlı olduğu noktalar aday listesine eklenir.

Örnek 19.9 (Silindir ile Düzlemin Kesişiminde Uzaklık). $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ile $x + y + z = 1$ düzleminin kesişim eğrisi üzerinde orijine en yakın ve en uzak noktaları bulunuz.

Çözüm.
Kurulum. Uzaklık ile karesi aynı noktalarda en büyük ve en küçük olduğundan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonunu inceleyelim. Kısıtları $g_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ biçiminde yazalım:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1,$$
$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

M iki kapalı kümenin kesişimi olarak kapalıdır; M üzerinde $|\,x\,|, |\,y\,| \leq 1$ ve $|\,z\,| = |\,1 - x - y\,| \leq 3$ olduğundan sınırlıdır. Demek ki M kompakttır.
Bağımsızlık. $\nabla g_1 = (2x, 2y, 0)$ ve $\nabla g_2 = (1, 1, 1)$'dir. $a\nabla g_1 + b\nabla g_2 = 0$ ise üçüncü bileşenden $b = 0$, ardından $a(2x, 2y) = 0$ bulunur; M üzerinde $(x, y) \neq (0, 0)$ olduğundan $a = 0$'dır. Gradyanlar M'nin her noktasında doğrusal bağımsızdır.
Sistem. $\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0$ ve kısıtlar

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0,\\ 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 &= 0,\\ 2z + \lambda_2 &= 0,\\ x^2 + y^2 &= 1,\\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

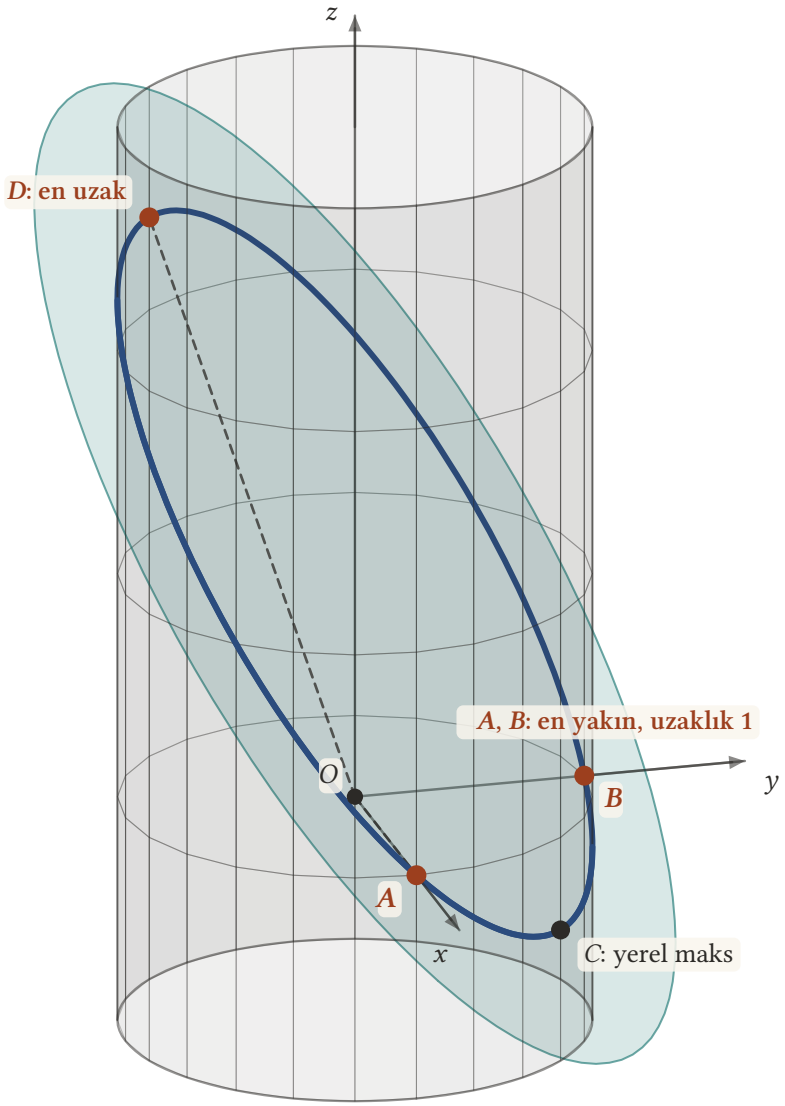
sistemini verir. İlk iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa $2(1 + \lambda_1)(x - y) = 0$ bulunur.

- $\lambda_1 = -1$ ise birinci denklemden $\lambda_2 = 0$, üçüncüden $z = 0$ olur. O zaman $x + y = 1$ ve $x^2 + y^2 = 1$'dir; buradan $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 0$, yani $x = 0$ ya da $y = 0$ bulunur. Adaylar $(1, 0, 0)$ ve $(0, 1, 0)$'dır ve ikisinde de $f = 1$'dir.
- $x = y$ ise $2x^2 = 1$, $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve $z = 1 - 2x = 1 \mp \sqrt{2}$ olur. Bu noktalarda çarpanlar üçüncü ve birinci denklemden $\lambda_2 = -2z$ ve $1 + \lambda_1 = \dfrac{z}{x}$ olarak bulunur. $f = x^2 + y^2 + z^2 = 1 + z^2$ olduğundan

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2}\right) = 1 + (1 - \sqrt{2})^2 = 4 - 2\sqrt{2},$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2}\right) = 1 + (1 + \sqrt{2})^2 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Karar. M kompakt olduğundan f'nin en küçük değeri 1, en büyük değeri $4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}83$'tür. Orijine en yakın noktalar $(1, 0, 0)$ ve $(0, 1, 0)$'dır (uzaklık 1); en uzak nokta $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2}\right)$'dir (uzaklık $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.4: $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ile $x + y + z = 1$ düzleminin kesişimi bir elipstir. Orijine en yakın noktalar $A = (1, 0, 0)$ ve $B = (0, 1, 0)$ (uzaklık 1), en uzak nokta $D = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$'dir. $C = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ noktası A ile B arasındaki yayda bir yerel maksimumdur.

Dördüncü aday $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2} \right)$ ne en yakın ne en uzak noktadır, ama yine de anlamlı bir noktadır. $u(t) = 1 - \cos t - \sin t$ yazarsak eğri $\gamma(t) = \big(\cos t, \sin t, u(t) \big)$ ile parametrelenir; $F(t) = f(\gamma(t)) = 1 + u(t)^2$ olur ve $C = \gamma(\pi/4)$'tür. $u'(t) = \sin t - \cos t$ ve $u''(t) = \cos t + \sin t$ olduğundan $u'(\pi/4) = 0, u''(\pi/4) = \sqrt{2}$ ve $u(\pi/4) = 1 - \sqrt{2}$'dir. $F' = 2uu'$ ve $F'' = 2(u')^2 + 2uu''$ olduğundan

$$F''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(1 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4 < 0$$

bulunur. Demek ki C, f'nin eğri üzerindeki bir **bağlı yerel maksimumudur**: $t = 0$ ile $t = \pi/2$ arasındaki yayda f, uçlardaki 1 değerinden C'deki $4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}17$ değerine çıkıp yeniden iner. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

19.7 Alıştırmalar

Alıştırma 19.1 (Kapalı Birim Yuvarda Mutlak Ekstremum). $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ fonksiyonunun $B[0,1] = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ kapalı yuvarı üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz. Sınırı Lagrange yöntemiyle inceleyiniz.

Çözüm.
Varlık. $B[0,1]$ kapalı ve sınırlı, yani kompakttır; polinom olan f süreklidir.
İç kritik noktalar. $f_x = 2x - 1 = 0$ ve $f_y = 4y = 0$ denklemlerinden $\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$ bulunur. parallel$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$parallel$= \tfrac{1}{2} < 1$ olduğundan iç noktadır ve $f\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}$.
Sınır. Sınır $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir; $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ için $\nabla g = (2x, 2y)$ çember üzerinde sıfır değildir. Lagrange sistemi

$$\begin{aligned} 2x - 1 + 2\lambda x &= 0, \\ 4y + 2\lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

olur. İkinci denklem $y(2 + \lambda) = 0$ demektir.

- $y = 0$ ise $x = \pm 1$: $f(1,0) = 0$ ve $f(-1,0) = 1 + 1 = 2$.
- $\lambda = -2$ ise birinci denklem $2x - 1 - 4x = 0$, yani $x = -\tfrac{1}{2}$ verir; kısıttan $y^2 = \tfrac{3}{4}$, $y = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur ve

$$f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$$

Karşılaştırma. Aday değerler $-\tfrac{1}{4}$, 0, 2 ve $\tfrac{9}{4}$'tür. Mutlak maksimum $\tfrac{9}{4}$'tür ve $\left(-\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktalarında, mutlak minimum $-\tfrac{1}{4}$'tür ve $\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$ noktasında alınır. ■

Alıştırma 19.2 (Parabolle Sınırlı Bölgede Mutlak Ekstremum). $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2y$ fonksiyonunun $D = \{(x,y) : x^2 \le y \le 1\}$ bölgesindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Varlık. D, sürekli $y - x^2$ ve $1 - y$ fonksiyonlarının $[0, +\infty)$ altındaki ters görüntülerinin kesişimi olarak kapalıdır. D üzerinde $0 \le x^2 \le y \le 1$ olduğundan $|\,x\,| \le 1$ ve $0 \le y \le 1$'dir; D sınırlıdır. Demek ki D kompakttır.
İç kritik noktalar. $f_x = 4x = 0$ ve $f_y = 2y - 2 = 0$ denklemlerinin tek çözümü $(0,1)$'dir. Bu nokta $y = 1$ doğrusu üzerinde olduğundan D'nin iç noktası değildir ($D^\circ = \{x^2 < y < 1\}$). İçeride kritik nokta yoktur.
Sınır. Sınır iki parçadan oluşur.

- Üst kenar $y = 1$, $-1 \le x \le 1$: $f(x,1) = 2x^2 - 1$. En küçük değeri $f(0,1) = -1$, en büyük değeri $f(\pm 1, 1) = 1$'dir.
- Parabol yayı $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$: $f(x, x^2) = 2x^2 + x^4 - 2x^2 = x^4$. En küçük değeri $f(0,0) = 0$, en büyük değeri $f(\pm 1, 1) = 1$'dir.

Karşılaştırma. Mutlak maksimum 1'dir ve $(1,1)$ ile $(-1,1)$ köşelerinde, mutlak minimum -1'dir ve $(0,1)$ noktasında alınır. Minimum noktası f'nin kritik noktasıdır ama bölgenin iç noktası değildir; sınır incelemesi atlansaydı bulunamazdı. ■

Alıştırma 19.3 (Elips Üzerinde Çarpım). $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun $x^2 + 4y^2 = 8$ elipsi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini Lagrange yöntemiyle bulunuz.

Çözüm.
Kısıt. $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8$; elips kapalı ve sınırlıdır ($|\,x\,| \le 2\sqrt{2}$, $|\,y\,| \le \sqrt{2}$), yani kompakttır. $\nabla g = (2x, 8y)$ yalnız orijinde sıfırdır ve orijin elipste değildir.
Sistem.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y + 2\lambda x = 0,$$
$$x + 8\lambda y = 0,$$
$$x^2 + 4y^2 = 8.$$

Birinci denklemden $y = -2\lambda x$; ikincide yerine koyarsak $x - 16\lambda^2 x = 0$, yani $x(1 - 16\lambda^2) = 0$ bulunur. $x = 0$ olsaydı $y = 0$ olurdu, ama $(0,0)$ elipste değildir. Öyleyse $\lambda^2 = \dfrac{1}{16}$, $\lambda = \pm\dfrac{1}{4}$'tür.

- $\lambda = -\dfrac{1}{4}$ ise $y = \dfrac{x}{2}$; kısıttan $2x^2 = 8$, $x = \pm 2$. Noktalar $(2,1)$ ve $(-2,-1)$, değer $f = 2$.
- $\lambda = \dfrac{1}{4}$ ise $y = -\dfrac{x}{2}$; aynı biçimde $(2,-1)$ ve $(-2,1)$, değer $f = -2$.

Karar. Elips kompakt olduğundan en büyük değer 2 ($(2,1)$ ve $(-2,-1)$'de), en küçük değer -2'dir ($(2,-1)$ ve $(-2,1)$'de).
Denetim. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği (bkz. Analiz 1) $a = |x|$ ve $b = 2|y|$ için $2|x||y| \le \dfrac{x^2 + 4y^2}{2} = 4$, yani elips üzerinde $|xy| \le 2$ verir; eşitlik $|x| = 2|y|$ iken, yani bulunan dört noktada sağlanır. ■

Alıştırma 19.4 (Düzlemin Orijine En Yakın Noktası). $x + 2y + 3z = 14$ düzleminin orijine en yakın noktasını Lagrange yöntemiyle bulunuz ve bu noktanın gerçekten en yakın nokta olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sistem. Uzaklığın karesi $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$'yi $g(x,y,z) = x + 2y + 3z - 14 = 0$ kısıtı altında inceleyelim; $\nabla g = (1,2,3) \neq 0$. Sistem

$$2x + \lambda = 0,$$
$$2y + 2\lambda = 0,$$
$$2z + 3\lambda = 0,$$
$$x + 2y + 3z = 14$$

olur. İlk üç denklemden $x = -\dfrac{\lambda}{2}$, $y = -\lambda$, $z = -\dfrac{3\lambda}{2}$; kısıtta yerine koyarsak

$$-\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - \frac{9\lambda}{2} = -7\lambda = 14$$

yani $\lambda = -2$ ve tek aday $(1,2,3)$ bulunur; $f(1,2,3) = 14$.
Minimum olduğunun gösterilmesi. Düzlem kompakt olmadığından karşılaştırma yetmez. Cauchy–Schwarz eşitsizliği (Teorem 1.1) düzlemin her noktası için

$$14 = \langle (1,2,3), (x,y,z) \rangle \le \sqrt{14}\,\|\,(x,y,z)\,\|$$

verir; yani $\|\,(x,y,z)\,\| \ge \sqrt{14}$'tür. Eşitlik $(1,2,3)$ noktasında sağlandığından bu nokta orijine en yakın noktadır ve en küçük uzaklık $\sqrt{14}$'tür. En uzak nokta yoktur: düzlem sınırsızdır. ■

Alıştırma 19.5 (Küre Üzerinde Üç Değişkenin Çarpımı). $f(x,y,z) = xyz$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ küresi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini ve bu değerlerin alındığı bütün noktaları bulunuz.

Çözüm.
Kısıt. $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$; küre kompakttır ve $\nabla g = 2(x,y,z)$ küre üzerinde sıfır değildir.
Sistem.

$$yz + 2\lambda x = 0,$$
$$xz + 2\lambda y = 0,$$
$$xy + 2\lambda z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İlk üç denklemi sırasıyla x, y ve z ile çarparsak

$$xyz = -2\lambda x^2 = -2\lambda y^2 = -2\lambda z^2$$

bulunur.

- $\lambda = 0$ ise $yz = xz = xy = 0$ olur; üç koordinattan ikisi sıfırdan farklı olsaydı çarpımları sıfır olmazdı. Demek ki en az iki koordinat sıfırdır ve kısıttan adaylar $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0, \pm\sqrt{3})$ olur; hepsinde $f = 0$.
- $\lambda \neq 0$ ise $x^2 = y^2 = z^2$ olur ve kısıttan $3x^2 = 3$, yani $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ bulunur. Adaylar $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ biçimindeki sekiz noktadır ve $f = xyz = \pm 1$'dir. Bu noktalarda $\lambda = -\dfrac{xyz}{2}$ seçilince üç denklem de sağlanır.

Karar. Küre kompakt olduğundan en büyük değer 1'dir ve eksi işaretli koordinat sayısı çift olan dört noktada alınır:

$$(1,1,1), \quad (1,-1,-1), \quad (-1,1,-1), \quad (-1,-1,1).$$

En küçük değer -1'dir ve öbür dört noktada alınır:

$$(-1,-1,-1), \quad (-1,1,1), \quad (1,-1,1), \quad (1,1,-1).$$

Koordinat eksenleri üzerindeki altı aday ne maksimum ne minimumdur. ■

Alıştırma 19.6 (Hiperbol Üzerinde Toplam). $f(x,y) = x + y$ fonksiyonunun $xy = 1$ hiperbolü üzerindeki bağlı ekstremumlarını bulunuz. Adaylardaki değerleri karşılaştırmanın neden yanıltıcı olacağını açıklayınız.

Çözüm.
Adaylar. $g(x,y) = xy - 1$ için $\nabla g = (y, x)$ hiperbol üzerinde sıfır değildir. Sistem

$$\begin{aligned} 1 + \lambda y &= 0, \\ 1 + \lambda x &= 0, \\ xy &= 1 \end{aligned}$$

olur. $\lambda = 0$ birinci denklemde çelişki verir; öyleyse $x = y = -\dfrac{1}{\lambda}$ ve kısıttan $x^2 = 1$ bulunur. Adaylar $(1,1)$ ($\lambda = -1$, $f = 2$) ve $(-1,-1)$ ($\lambda = 1$, $f = -2$) noktalarıdır.
Sağ kol. $x > 0$ kolunda $y = \dfrac{1}{x}$ ve

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

olur; yani bu kolda $f \geq 2$'dir ve eşitlik yalnız $(1,1)$'de sağlanır. $V = \{(x,y) : x > 0\}$ açık yarı düzlemi $(1,1)$'in bir komşuluğudur ve $V \cap M$ tam olarak sağ koldur. Demek ki $(1,1)$ bir bağlı yerel minimumdur. Bu kolda maksimum yoktur: $x \to +\infty$ iken $x + \dfrac{1}{x} \to +\infty$.
Sol kol. $x < 0$ kolunda

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{(x+1)^2}{x} \leq 0$$

olur; yani $f \leq -2$'dir ve eşitlik yalnız $(-1,-1)$'de sağlanır. Aynı akıl yürütmeyle $(-1,-1)$ bir bağlı yerel maksimumdur; bu kolda minimum yoktur.
Yorum. f'nin hiperbol üzerinde ne mutlak maksimumu ne mutlak minimumu vardır. Üstelik yerel maksimum değeri (-2), yerel minimum değerinden (2) küçüktür. Adaylardaki en büyük değeri maksimum saymak, $(1,1)$'i maksimum ilan etmek olurdu; oysa $(1,1)$ bir minimumdur. Hiperbol sınırlı olmadığından kompakt değildir ve Lagrange yönteminin dördüncü adımındaki karşılaştırma burada geçersizdir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 19.7 (Küre ile Düzlemin Kesişim Çemberinde En Yüksek Nokta). $x^2+y^2+z^2=4$ küresi ile $x+y+z=2$ düzleminin kesişim çemberi üzerinde $f(x,y,z)=z$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Kurulum. $g_1=x^2+y^2+z^2-4$ ve $g_2=x+y+z-2$ olsun. Kesişim kümesi M kapalıdır ve küre içinde kaldığı için sınırlıdır; kompakttır.
Bağımsızlık. $\nabla g_1=2(x,y,z)$ ile $\nabla g_2=(1,1,1)$ ancak $x=y=z$ iken doğrusal bağımlıdır ($\nabla g_1\neq 0$ olduğu için). $x=y=z$ ise düzlemden $x=\tfrac{2}{3}$ bulunur; ama $3\cdot\tfrac{4}{9}=\tfrac{4}{3}\neq 4$ olduğundan bu nokta kürede değildir. Gradyanlar M üzerinde doğrusal bağımsızdır.
Sistem. $\nabla f=(0,0,1)$ olduğundan $\nabla f+\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2=0$ koşulu

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 x+\lambda_2&=0,\\ 2\lambda_1 y+\lambda_2&=0,\\ 1+2\lambda_1 z+\lambda_2&=0 \end{aligned}$$

denklemlerini verir; bunlar iki kısıtla birlikte çözülür. İlk iki denklemden $2\lambda_1(x-y)=0$ bulunur. $\lambda_1=0$ olsaydı birinci denklemden $\lambda_2=0$ ve üçüncüden $1=0$ çıkardı; öyleyse $x=y$'dir. Düzlemden $z=2-2x$, küreden

$$2x^2+(2-2x)^2=4\Leftrightarrow 6x^2-8x=0$$

yani $x=0$ ya da $x=\tfrac{4}{3}$ bulunur. Adaylar $(0,0,2)$ ve $\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3},-\tfrac{2}{3}\right)$'tür. (Çarpanlar sırasıyla $\lambda_1=-\tfrac{1}{4}$, $\lambda_2=0$ ve $\lambda_1=\tfrac{1}{4}$, $\lambda_2=-\tfrac{2}{3}$'tür.)
Karar. M kompakt olduğundan $f=z$'nin en büyük değeri 2'dir ve $(0,0,2)$'de, en küçük değeri $-\tfrac{2}{3}$'tür ve $\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3},-\tfrac{2}{3}\right)$'te alınır. ■

Lagrange teoremini ispatlarken kısıt denklemini bir değişkene göre çözebilmek için kapalı fonksiyon teoreminin yalnız sonucunu kullandık. Bir denklem sisteminin hangi koşulda bazı değişkenleri öbürleri cinsinden belirlediğini, çözümün türevlerinin Jacobi determinantlarıyla nasıl hesaplandığını ve bir fonksiyonun ne zaman yerel olarak terslenebildiğini Ters ve Kapalı Fonksiyon Teoremleri bölümünde üç değişkene kadar ispatlarıyla birlikte inceliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

20. Ters ve Kapalı Fonksiyon Teoremleri

Tek değişkenli analizde türevin en verimli kullanımlarından biri, bir fonksiyonun bir noktanın yakınındaki davranışını teğet doğrusuna bakarak anlamaktır. Ters fonksiyonun türevi bunun tipik bir örneğidir: $f'(x_0) \neq 0$ ise teğet yatay değildir, f o noktanın yakınında birebirdir ve tersinin türevi $1/f'(x_0)$'dır (bkz. Analiz 2). Bu bölümde aynı düşünceyi çok değişkenli fonksiyonlara taşıyoruz. Türevin yerini Jacobi matrisi, "$f'(x_0) \neq 0$" koşulunun yerini ise "Jacobi determinantı sıfırdan farklıdır" koşulu alıyor.
İki soru soracağız. Birincisi: $y = F(x)$ denklem sistemi x için çözülebilir mi, yani F'nin tersi var mı? İkincisi: $x^2 + y^2 = 1$ ya da $x^3 + y^3 = 6xy$ gibi bir denklemden y, x'in fonksiyonu olarak çözülebilir mi? Lineer denklemlerde iki sorunun yanıtı da bir determinanta bağlıdır: $Ax = y$ sistemi, A kare matrisinin determinantı sıfırdan farklıysa tek türlü çözülür. **Ters fonksiyon teoremi** ve **kapalı fonksiyon teoremi**, bu gerçeğin doğrusal olmayan fonksiyonlar için yerel karşılıklarıdır. Türevlenebilir bir fonksiyon bir noktanın yakınında türevine, yani bir lineer dönüşüme benzer; lineer dönüşümün terslenebilirliği de fonksiyonun kendisine, o noktanın yakınında aktarılır.
Önce ters fonksiyon teoremini ifade ediyor ve örneklerle neden yalnızca yerel bir sonuç verdiğini gösteriyoruz. Ardından tek denklemli kapalı fonksiyon teoremini tam olarak ispatlıyor, onu yüzeylere ve denklem sistemlerine genişletiyor, çözüm fonksiyonlarının kısmi türevlerini Jacobi determinantlarıyla hesaplıyoruz. Bölüm, birkaç fonksiyon arasında bir bağıntı bulunup bulunmadığını Jacobi matrisiyle sınayan fonksiyonel bağlılık kavramıyla bitiyor.

20.1 Tek Değişkenden Çok Değişkene

Önce tek değişkenli sonucu ve onun hangi yönlerinin çok değişkene taşınacağını hatırlayalım.
Bir I aralığında sürekli, birebir ve $J = f(I)$ üzerine örten bir f fonksiyonu $x_0 \in I$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise f^{-1}, $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

olur (bkz. Analiz 2). $f'(x_0) = 0$ olduğunda ise iki durum da mümkündür. $f(x) = x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde birebirdir ama tersi $y \mapsto \sqrt[3]{y}$, 0 noktasında türevlenebilir değildir. $f(x) = x^2$ ise 0'ın hiçbir komşuluğunda birebir değildir. Yani türevin sıfır olduğu bir noktada fonksiyon terslenebilir de olabilir, olmayabilir de. Terslenebilse bile tersi o noktada türevlenebilir olamaz: f^{-1}, y_0'da türevlenebilir olsaydı $f^{-1}(f(x)) = x$ özdeşliğine zincir kuralını uygulayarak $\left(f^{-1}\right)'(y_0)\, f'(x_0) = 1$ elde ederdik, bu da $f'(x_0) = 0$ ile çelişir.
Türevin sürekli olduğu durumda daha güçlü bir sonuç vardır. $f \in C^1(I)$ ve $f'(x_0) \neq 0$ ise f', x_0'ın bir komşuluğunda işaretini korur (bkz. Analiz 1). Monotonluk testi (bkz. Analiz 2) gereği f bu komşulukta kesin monotondur, dolayısıyla birebirdir. Yani yalnızca x_0 noktasındaki bir koşul, f'nin x_0 yakınında terslenebilir olduğunu söyler. Dahası f', I aralığının hiçbir noktasında sıfır değilse sürekli f' ara değer teoremi gereği işaret değiştiremez ve f bütün I üzerinde birebirdir. Bu iki sonuçtan birincisi çok değişkene aynen taşınacak, ikincisi ise taşınmayacak.
Çok değişkenli durumda $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $F = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ olsun. $y = F(x)$ eşitliği, n bilinmeyenli n denklemden oluşan

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

sistemidir. F'nin bir $F^{-1} = (g_1, \ldots, g_n)$ tersi varsa bu sistem $x_i = g_i(y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$ biçiminde çözülmüş olur. Tek değişkendeki $f'(x_0) \neq 0$ koşulunun karşılığını bulmak için doğrusal yaklaşıma bakalım. F, a noktasında türevlenebilirse a'nın yakınında

$$F(x) \approx F(a) + J_F(a)\,(x - a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; burada $J_F(a)$, F'nin a'daki Jacobi matrisidir (Tanım 15.2). Sağ taraf y'ye eşitlendiğinde x ancak $J_F(a)$ matrisi terslenebilirse tek türlü çözülür:

$$x = a + J_F(a)^{-1}\,\big(\, y - F(a)\,\big)\,.$$

Bir kare matris ancak ve ancak determinantı sıfırdan farklıysa terslenebilir. Dolayısıyla beklediğimiz koşul, F'nin Jacobi determinantının (Tanım 15.4) sıfırdan farklı olmasıdır:

$$\det J_F(a) = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a) \neq 0.$$

Bu koşul, $DF(a)$ lineer dönüşümünün terslenebilir olmasıyla denktir. Beklediğimiz sonuç yerel bir sonuçtur; bunu bir tanımla kesinleştirelim.

Tanım 20.1 (Yerel Olarak Terslenebilir Fonksiyon). $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık, $F : U \to \mathbb{R}^n$ ve $a \in U$ olsun. $a \in V \subseteq U$ koşulunu sağlayan, F'nin üzerinde birebir olduğu ve $F(V)$ görüntüsünün açık olduğu bir V açık kümesi varsa F'ye a noktasında **yerel olarak terslenebilir** denir. Bu durumda F'nin V'ye kısıtlanışının tersi olan

$$F^{-1} : F(V) \to V$$

fonksiyonuna F'nin a yakınındaki bir **yerel tersi** denir.

Yani F bütün U üzerinde birebir olmak zorunda değildir; yalnızca a'nın yeterince küçük bir komşuluğunda birebir olması istenir. $F(V)$'nin açık olması, yerel tersin $F(a)$ noktasının bütün bir komşuluğunda tanımlı olmasını ve orada türevinden söz edilebilmesini sağlar.

20.2 Ters Fonksiyon Teoremi

Beklentimizi doğrulayan teorem, türevi sürekli olan fonksiyonlar için Jacobi determinantının sıfırdan farklı olmasının yerel terslenebilirliğe yettiğini söyler.
Teoremin (i) ve (ii) kısımlarının ispatı, daralma dönüşümü ilkesi gibi bu kitapta kurmadığımız araçlara dayanır; bu kısımları ispatsız kabul ediyoruz. Tersin Jacobi matrisini veren (iii) ise, tersin var olduğu ve türevlenebildiği bilindiğinde zincir kuralının doğrudan bir sonucudur; onu ispatlıyoruz.

Teorem 20.1 (Ters Fonksiyon Teoremi). *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ boş olmayan açık bir küme, $F = (f_1,\ldots,f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ve $F \in C^1(U)$ olsun. Bir $a \in U$ noktasında*

$$\det J_F(a) \neq 0$$

ise $a \in V \subseteq U$ koşulunu sağlayan öyle bir V açık kümesi vardır ki şunlar doğrudur.
(i) *F, V üzerinde birebirdir ve $W = F(V)$ açık bir kümedir; yani F, a noktasında yerel olarak terslenebilirdir.*
(ii) *Yerel ters $F^{-1} : W \to V$, $C^1(W)$ sınıfındandır.*
(iii) *Her $y \in W$ için, $x = F^{-1}(y)$ olmak üzere, $\det J_F(x) \neq 0$ ve*

$$J_{F^{-1}}(y) = \big(\, J_F(x)\big)^{-1}$$

olur. Lineer dönüşümler diliyle bu, $DF^{-1}(y)$ dönüşümünün $DF(x)$ dönüşümünün tersi olması demektir.

> ***(iii)'ün ispatı.***
> *Teoremin (i) ve (ii) kısımları sağlansın; $x \in V$ alalım ve $y = F(x)$ yazalım. Her $z \in V$ için $F^{-1}\,\big(\, F(z)\,\big) = z$ olduğundan $F^{-1} \circ F$ bileşkesi V üzerinde birim dönüşümdür. Birim dönüşüm türevlenebilirdir ve her noktadaki Jacobi matrisi $n \times n$ birim matris I_n'dir.*
> *$F \in C^1(U)$ olduğundan F, x noktasında türevlenebilirdir (Teorem 15.4). (ii) gereği F^{-1}, $y = F(x)$ noktasında türevlenebilirdir. V ve W açık olduğundan x ve y sırasıyla bu kümelerin iç noktalarıdır. Zincir kuralı (Teorem 15.6) gereği*
>
> $$I_n = J_{F^{-1}\circ F}(x) = J_{F^{-1}}\,\big(\, F(x)\,\big)\, J_F(x) = J_{F^{-1}}(y)\, J_F(x)$$
>
> *olur. Çarpımları birim matris olan iki kare matristen sağdaki terslenebilirdir ve soldaki onun tersidir. Dolayısıyla $\det J_F(x) \neq 0$ ve $J_{F^{-1}}(y) = \big(\, J_F(x)\big)^{-1}$'dir.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani C^1 sınıfından bir F fonksiyonunun, Jacobi determinantının sıfır olmadığı her noktanın yakınında C^1 sınıfından bir yerel tersi vardır ve bu yerel tersin Jacobi matrisi, F'nin Jacobi matrisinin tersidir. Bileşenlerle yazılırsa $x = F^{-1}(y)$ için

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(y) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}^{-1}$$

olur. Çarpımın determinantı determinantların çarpımı olduğundan Jacobi determinantları için de

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(y) = \frac{1}{\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)}$$

bulunur. Bu, tek değişkendeki $\left(f^{-1} \right)'(y_0) = 1/f'(x_0)$ formülünün doğrudan genellemesidir.
Teoremin (iii) kısmının ispatı bir şey daha söylüyor: F'nin bir noktanın yakınında türevlenebilir bir tersi varsa o noktada $\det J_F \neq 0$ olmak zorundadır. Yani Jacobi determinantının sıfırdan farklı olması, türevlenebilir bir yerel tersin varlığı için gereklidir. Tersin kendisinin varlığı için ise gerekli değildir; bunu Alıştırma 20.1 gösteriyor. Tek değişkenli x^3 örneğinde olduğu gibi, determinantın sıfır olduğu noktalarda ters var olabilir ama türevlenebilir olamaz.
Teoremin verdiği bilgi yereldir. Tek değişkende türevi hiçbir yerde sıfır olmayan C^1 bir fonksiyon bütün aralıkta birebirdi; çok değişkende Jacobi determinantı hiçbir yerde sıfır olmasa bile fonksiyon birebir olmayabilir.

Örnek 20.1 (Her Noktada Yerel Olarak Terslenebilen Ama Birebir Olmayan Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$F(x, y) = \left(e^x \cos y, e^x \sin y \right)$$

ile verilsin. $\det J_F$'nin hiçbir noktada sıfır olmadığını, buna karşın F'nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde birebir olmadığını gösteriniz ve F'nin yerel terslerinin Jacobi matrisini bulunuz.

Çözüm.
Jacobi determinantı. F'nin bileşenleri $C^1(\mathbb{R}^2)$ sınıfındandır ve

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

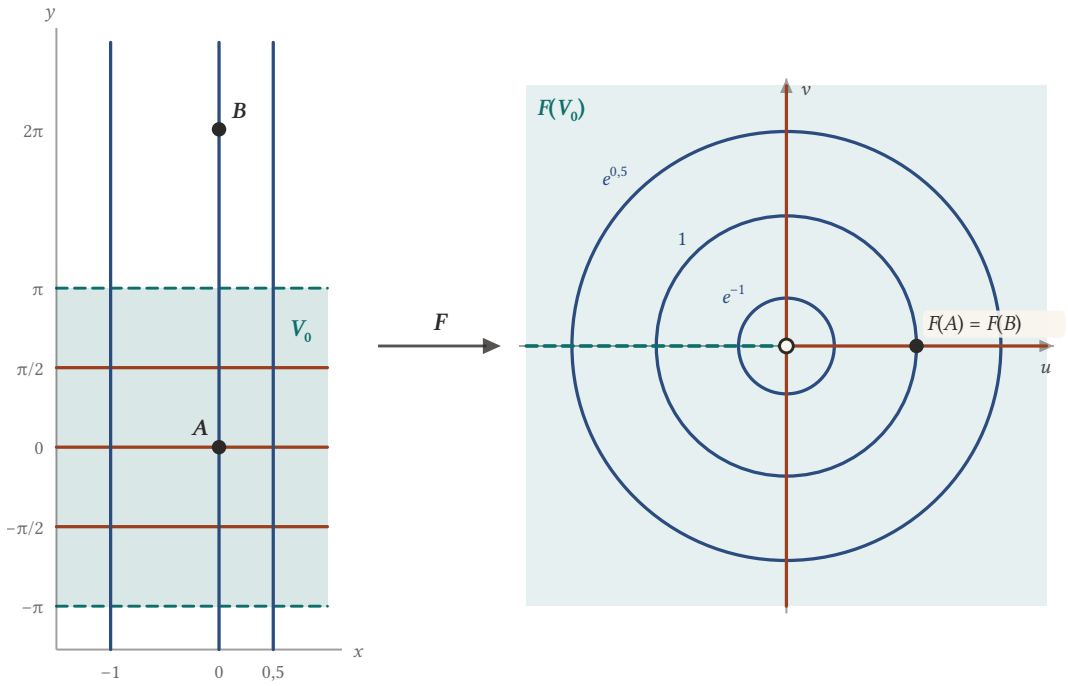
$$\det J_F(x, y) = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} > 0$$

bulunur. Determinant hiçbir noktada sıfır olmadığından Teorem 20.1 gereği F her noktada yerel olarak terslenebilirdir.
Birebir değildir. Kosinüs ve sinüs 2π periyotlu olduğundan her (x, y) için $F(x, y + 2\pi) = F(x, y)$'dir. Örneğin $F(0, 0) = F(0, 2\pi) = (1, 0)$ olur.
Şeritler üzerinde birebirdir. $c \in \mathbb{R}$ için $V_c = \mathbb{R} \times (c - \pi, c + \pi)$ şeridini alalım ve $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ olsun. $\| F(x, y) \| = e^x$ olduğundan $e^{x_1} = e^{x_2}$, yani $x_1 = x_2$'dir. Bunu yerine koyarsak $\cos y_1 = \cos y_2$ ve $\sin y_1 = \sin y_2$ elde edilir. Öyleyse

$$\cos(y_1 - y_2) = \cos y_1 \cos y_2 + \sin y_1 \sin y_2 = \cos^2 y_1 + \sin^2 y_1 = 1$$

olur ve $y_1 - y_2$, 2π'nin bir tam katıdır. $y_1, y_2 \in (c - \pi, c + \pi)$ olduğundan $| y_1 - y_2 | < 2\pi$'dir; tek olasılık $y_1 = y_2$'dir. F düşey doğruları merkezi orijin olan çemberlere, yatay doğruları orijinden çıkan ışınlara götürür. Yüksekliği 2π olan V_c şeridinin görüntüsü, düzlemden orijin ve orijinden çıkan $c + \pi$ açılı ışın atılarak elde edilen açık kümedir; şerit bu kümeyi tam bir kez örter.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.1: $F(x, y) = (e^x \cos y,\, e^x \sin y)$ dönüşümü. Soldaki $x = -1;\ 0;\ 0{,}5$ düşey doğruları sağda merkezi orijin olan ve yarıçapı $e^{-1} \approx 0{,}37;\ 1;\ e^{0{,}5} \approx 1{,}65$ olan çemberlere, $y = -\pi/2;\ 0;\ \pi/2$ yatay doğruları orijinden çıkan ışınlara gider. $-\pi < y < \pi$ şeridi V_0, orijin ve kesikli negatif u yarı ekseni dışındaki bütün düzlemi bir kez örter. $A = (0, 0)$ ile $B = (0, 2\pi)$ aynı $(1, 0)$ noktasına gider.

Yerel tersin Jacobi matrisi. Teorem 20.1 (iii) gereği $(u, v) = F(x, y)$ için

$$J_{F^{-1}}(u, v) = \big(\, J_F(x, y)\big)^{-1} = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

olur. $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ ve $u^2 + v^2 = e^{2x}$ olduğundan

$$e^{-x} \cos y = \frac{e^x \cos y}{e^{2x}} = \frac{u}{u^2 + v^2},$$
$$e^{-x} \sin y = \frac{e^x \sin y}{e^{2x}} = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

yazılabilir ve

$$J_{F^{-1}}(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

bulunur. Sonuç hangi şeridin seçildiğine bağlı değildir, çünkü $\big(\, J_F(x, y)\big)^{-1}$ matrisi yukarıda yalnız (u, v) cinsinden yazıldı; iki yerel tersin farkı ortak tanım bölgesinin her noktasında $(0, 2k\pi)$ biçimindedir ve her bağlantılı parçada sabittir. Birinci satırı doğrudan da denetleyebiliriz: yerel tersin birinci bileşeni $x = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)$'dir ve kısmi türevleri $\dfrac{u}{u^2 + v^2}$ ile $\dfrac{v}{u^2 + v^2}$'dir. ■

Uygulamada teoremin tipik kullanımı, tersin formülünü bulmadan tersin türevini hesaplamaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda yerel tersin Jacobi matrisi

1. **Ön görüntüleri bul.** $F(x) = b$ denklemini çözerek b'ye giden bütün x noktalarını belirle.
2. **Jacobi determinantını denetle.** Her ön görüntüde $J_F(x)$ matrisini hesapla ve $\det J_F(x) \neq 0$ olduğunu göster. Teorem 20.1 gereği x'in yakınında b'nin bir komşuluğunda tanımlı bir yerel ters vardır.
3. **Matrisin tersini al.** Bu yerel tersin b'deki Jacobi matrisi $J_F(x)^{-1}$'dir. Birden çok ön görüntü varsa her biri ayrı bir yerel ters ve genellikle ayrı bir sonuç verir.

Örnek 20.2 (Lineer Bir Dönüşümün Tersi). $f(u,v) = (3u - v,\, 2u + 5v)$ dönüşümünün her $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ noktasını içeren bir açık kümede tanımlı, türevlenebilir bir tersi olduğunu gösteriniz ve $J_{f^{-1}}(a,b)$ matrisini hesaplayınız.

Çözüm.
f'nin bileşenleri polinom olduğundan $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$'dir. Her (u,v) için

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ve $\det J_f(u,v) = 15 + 2 = 17 \neq 0$ olur. Teorem 20.1 her noktada uygulanır ve

$$J_{f^{-1}}(a,b) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

bulunur.
Bu örnekte ters açıkça da bulunabilir. f lineer ve determinantı sıfırdan farklı olduğundan bütün $\mathbb{R}^2$ üzerinde birebir ve örtendir. $3u - v = a$ ve $2u + 5v = b$ sisteminde birinci denklemi 5 ile çarpıp ikinciye eklersek $17u = 5a + b$ olur; buradan

$$f^{-1}(a,b) = \left(\frac{5a + b}{17},\, \frac{-2a + 3b}{17} \right)$$

çıkar. Bu lineer dönüşümün Jacobi matrisi, yukarıda bulduğumuz matristir. Lineer bir dönüşümün türevi kendisi olduğundan sonuç (a,b)'ye bağlı değildir. ■

Örnek 20.3 (Ön Görüntüsü Sonsuz Çok Olan Bir Nokta). $f(u,v) = (u + v,\, \sin u + \cos v)$ olsun. $(0,1)$ noktasını içeren bir açık kümede f'nin türevlenebilir yerel terslerinin bulunduğunu gösteriniz ve bu yerel terslerin $(0,1)$ noktasındaki Jacobi matrislerini hesaplayınız.

Çözüm.
Ön görüntüler. $f(u,v) = (0,1)$ olsun. Birinci bileşenden $v = -u$ bulunur. Kosinüs çift olduğundan $\cos v = \cos u$'dur ve ikinci bileşen

$$\sin u + \cos u = \sqrt{2}\sin\!\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

denklemini verir. Buradan $\sin(u + \tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$, yani $u + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ya da $u + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ çıkar ($k \in \mathbb{Z}$). $(0,1)$'in ön görüntüleri iki ailedir:

$$P_k = (2k\pi,\, -2k\pi),$$
$$Q_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\, -\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right).$$

Jacobi matrisi. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ve

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cos u & -\sin v \end{pmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Q_k noktalarında $\cos u = 0$ ve $\sin v = \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1$'dir; P_k noktalarında $\cos u = 1$ ve $\sin v = 0$'dır. Öyleyse

$$J_f(Q_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$J_f(P_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Determinantlar sırasıyla 1 ve -1'dir, ikisi de sıfırdan farklıdır. Teorem 20.1 gereği her ön görüntünün yakınında, $(0,1)$'in bir komşuluğunda tanımlı C^1 bir yerel ters vardır.
Yerel terslerin Jacobi matrisleri. Q_k yakınındaki yerel ters için

$$J_{f^{-1}}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

P_k yakınındaki yerel ters için

$$J_{f^{-1}}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur.
$f(u + 2\pi, v - 2\pi) = f(u,v)$ olduğundan f birebir değildir ve "f^{-1}" yazımı, seçilen bir ön görüntünün yakınındaki yerel tersi anlatır. Aynı ailedeki yerel tersler $(0,1)$'in yeterince küçük bir yuvarında birbirinden $(2j\pi, -2j\pi)$ biçiminde sabit bir vektör kadar farklıdır ve aynı Jacobi matrisini verir; iki aile ise farklı matrisler verir. ■

Örnek 20.4 (Çarpım ve Kareler Toplamı Dönüşümü). $f(u,v) = (uv, u^2 + v^2)$ olsun. $(2,5)$ noktasını içeren bir açık kümede f'nin türevlenebilir yerel terslerinin bulunduğunu gösteriniz ve bu yerel terslerin $(2,5)$ noktasındaki Jacobi matrislerini hesaplayınız.

Çözüm.
Ön görüntüler. $uv = 2$ ve $u^2 + v^2 = 5$ olsun. O zaman

$$(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 5 + 4 = 9,$$
$$(u-v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv = 5 - 4 = 1$$

olur; $u + v = \pm 3$ ve $u - v = \pm 1$'dir. Dört işaret seçimi dört ön görüntü verir:

$$(2,1), \quad (1,2), \quad (-1,-2), \quad (-2,-1).$$

Jacobi matrisi. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ve

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

olur; $\det J_f(u,v) = 2(v^2 - u^2)$'dir. Dört noktada da $\mid u \mid \neq \mid v \mid$ olduğundan determinant sıfırdan farklıdır: $(2,1)$ ve $(-2,-1)$'de -6, $(1,2)$ ve $(-1,-2)$'de 6'dır. Teorem 20.1 gereği $(2,5)$'in bir komşuluğunda tanımlı dört yerel ters vardır.
Yerel terslerin Jacobi matrisleri. 2×2 bir matrisin tersini

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ps - qr} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$$

formülüyle alalım. $(2,1)$ yakınındaki yerel ters için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$J_{f^{-1}}(2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$(1,2)$ yakınındaki yerel ters için

$$J_{f^{-1}}(2,5) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

bulunur. $f(-u,-v) = f(u,v)$ ve $J_f(-u,-v) = -J_f(u,v)$ olduğundan $(-2,-1)$ yakınındaki yerel tersin matrisi birincinin, $(-1,-2)$ yakınındakinin matrisi ikincinin -1 katıdır:

$$(-2,-1) \text{ için: } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$
$$(-1,-2) \text{ için: } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Denetim. $(2,1)$ yakınındaki yerel tersi açıkça yazabiliriz. $u > v > 0$ bölgesinde $u+v = \sqrt{b+2a}$ ve $u-v = \sqrt{b-2a}$ olduğundan

$$u = \frac{\sqrt{b+2a}+\sqrt{b-2a}}{2},$$
$$v = \frac{\sqrt{b+2a}-\sqrt{b-2a}}{2}$$

olur. $(a,b) = (2,5)$'te $b+2a = 9$ ve $b-2a = 1$'dir; türev alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{1}{3},$$
$$\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

ve aynı biçimde $\dfrac{\partial v}{\partial a} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\partial v}{\partial b} = -\dfrac{1}{6}$ bulunur. Sonuç, teoremle bulduğumuz ilk matristir.
Determinantın sıfır olduğu $v = \pm u$ doğrularının neden dışarıda kaldığı da görülüyor. $u^2+v^2 \geq 2\mid uv\mid$ olduğundan f'nin görüntüsü $b \geq 2\mid a\mid$ bölgesindedir ve bu doğrular $b = 2\mid a\mid$ sınırına gider. Böyle bir noktanın herhangi bir komşuluğunun görüntüsü, sınırdaki bir noktayı içerir ama sınırın öbür yanına geçemez; dolayısıyla açık olamaz ve orada yerel ters yoktur. $(2,5)$ noktası ise $5 > 4$ olduğundan görüntünün içindedir. ■

20.3 Kapalı Fonksiyonlar

Ters fonksiyon teoremi $y = F(x)$ denklemini x için çözer; şimdi değişkenleri birbirine bağlayan bir denklemden bazı değişkenleri öbürleri cinsinden çözmeyi soruyoruz.
Düzlemdeki birçok eğri bir fonksiyonun grafiği olarak değil, bir denklemle verilir: $x^2+y^2 = 1$ çemberi ya da $x^3+y^3 = 6xy$ eğrisi gibi. Böyle bir $F(x,y) = 0$ denkleminden y'yi x cinsinden çözebildiğimizde bulduğumuz fonksiyona kapalı fonksiyon denir.

Tanım 20.2 (Kapalı Fonksiyon). $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $F : U \to \mathbb{R}$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in I$ için $\big(\, x, \varphi(x) \,\big) \in U$ ve

$$F\,\big(\, x, \varphi(x) \,\big) = 0$$

koşullarını sağlıyorsa φ'ye $F(x,y) = 0$ denkleminin I üzerinde tanımladığı bir **kapalı fonksiyon** denir.

Yani φ'nin grafiği denklemin sıfır kümesinin içinde kalır; $y = \varphi(x)$ yazıldığında denklem x'e bağlı bir özdeşliğe dönüşür. "Kapalı" sözcüğü, φ'nin açık bir formülle değil, bir denklemle belirlendiğini anlatır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç örnek sorunun doğasını gösteriyor.

- $F(x,y) = x^2 - y$ için her x'e karşılık denklemin tek çözümü $y = x^2$'dir; denklem $\mathbb{R}$ üzerinde tek bir kapalı fonksiyon tanımlar.
- $F(x,y) = y^2 - x$ için her $x \geq 0$'a karşılık iki çözüm vardır: $y = \sqrt{x}$ ve $y = -\sqrt{x}$. İkisi de $[0,\infty)$ üzerinde sürekli birer kapalı fonksiyondur. Rasyonel x'lerde $\sqrt{x}$, irrasyonel x'lerde $-\sqrt{x}$ değerini alan süreksiz fonksiyon da denklemi sağlar. Demek ki denklem tek başına bir fonksiyon belirlemez.
- $x^2 + y^2 = 1$ çemberi $[-1,1]$ üzerinde $y = \sqrt{1-x^2}$ ve $y = -\sqrt{1-x^2}$ kapalı fonksiyonlarını tanımlar; çemberin tamamı tek bir grafik değildir.

Bu örnekler sorunun doğru biçimini gösteriyor. Eğrinin tamamını tek bir grafik olarak yazmak yerine, eğrinin bir (x_0,y_0) noktasının yakınında şunu soruyoruz: x_0'a yakın her x için denklemin y_0'a yakın tek bir çözümü var mı? $y^2 = x$ eğrisinin $(1,1)$ noktasının yakınında yanıt evettir ve çözüm $y = \sqrt{x}$'tir. $(0,0)$ noktasının hiçbir komşuluğunda ise yanıt hayırdır: küçük her $x > 0$ için $\pm\sqrt{x}$ çözümlerinin ikisi de 0'a yakındır, $x < 0$ için ise çözüm yoktur.
Yerel çözümün nerede bulunduğunu doğrusal yaklaşım söyler. F türevlenebilir ve $F(x_0,y_0) = 0$ ise (x_0,y_0)'ın yakınında

$$F(x,y) \approx F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

olur. Sağ tarafı sıfıra eşitleyen doğru denklemi, $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ ise y için tek türlü çözülür. $y^2 - x$ örneğinde $F_y = 2y$ fonksiyonu $(1,1)$'de 2, $(0,0)$'da 0 değerini alır. Kapalı fonksiyon teoremi bu gözlemin doğru olduğunu söyler.

20.4 İki Değişkenli Kapalı Fonksiyon Teoremi

Tek denklem ve iki değişken hâlini bölümün tam olarak ispatlanan ana teoremi olarak kuruyoruz; ispatta ara değer teoremi, sürekliliğin işaret koruma özelliği, monotonluk, uç değer teoremi ve ortalama değer teoremi kullanılır.

Teorem 20.2 (İki Değişkenli Kapalı Fonksiyon Teoremi). *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $F : U \to \mathbb{R}$ ve $F \in C^1(U)$ olsun. Bir $(x_0,y_0) \in U$ noktasında $F(x_0,y_0) = 0$ ve $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ ise öyle $\delta > 0$ ve $\eta > 0$ sayıları vardır ki*

$$R = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$$

dikdörtgeni U'nun içinde kalır ve $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ için şunlar doğrudur.
(i) *Her $x \in I$ için $F(x,y) = 0$ denkleminin $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ aralığında bir ve yalnız bir $y = \varphi(x)$ çözümü vardır. Özellikle $\varphi(x_0) = y_0$'dır ve $\{(x,y) \in R : F(x,y) = 0\}$ kümesi φ'nin grafiğidir.*
(ii) *$\varphi : I \to \mathbb{R}$ süreklidir.*
(iii) *φ, I üzerinde türevlenebilirdir, $\varphi \in C^1(I)$ ve her $x \in I$ için*

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x\left(\, x, \varphi(x) \,\right)}{F_y\left(\, x, \varphi(x) \,\right)}$$

olur.

> ***İspat.***
> *$F_y(x_0,y_0) < 0$ ise F yerine $-F$ alınabilir: $-F$ de $C^1(U)$ sınıfındandır, sıfır kümesi aynıdır ve (iii)'teki oran değişmez. Bu yüzden $F_y(x_0,y_0) > 0$ varsayıyoruz.*
> ***Birinci adım: F_y'nin pozitif kaldığı bir kare.*** *F_y, (x_0,y_0)'da süreklidir. Süreklilik tanımını (Tanım 10.1) $\varepsilon = F_y(x_0,y_0)/2$ ile uygularsak, U açık olduğundan da, $B\left(\,(x_0,y_0), \rho\,\right) \subseteq U$ olan ve bu yuvarda $F_y > F_y(x_0,y_0)/2 > 0$ olmasını sağlayan bir $\rho > 0$ buluruz. $0 < r < \rho/\sqrt{2}$ seçelim ve*
>
> $$K = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$$
>
> *karesini alalım. K'nin her noktasının (x_0,y_0)'a uzaklığı en çok $r\sqrt{2} < \rho$ olduğundan K bu yuvarın içindedir; dolayısıyla $K \subseteq U$ ve K üzerinde $F_y > 0$'dır.*
> *K kapalı ve sınırlı olduğundan kompaktır (Teorem 5.5). $|\,F_x\,|$ ve F_y sürekli olduğundan uç değer teoremi (Teorem 11.3) gereği K üzerinde en büyük ve en küçük değerlerini alırlar. $M = \max_K |\,F_x\,|$ ve $\mu = \min_K F_y$ diyelim; μ, F_y'nin K'deki bir değeri olduğundan $\mu > 0$'dır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

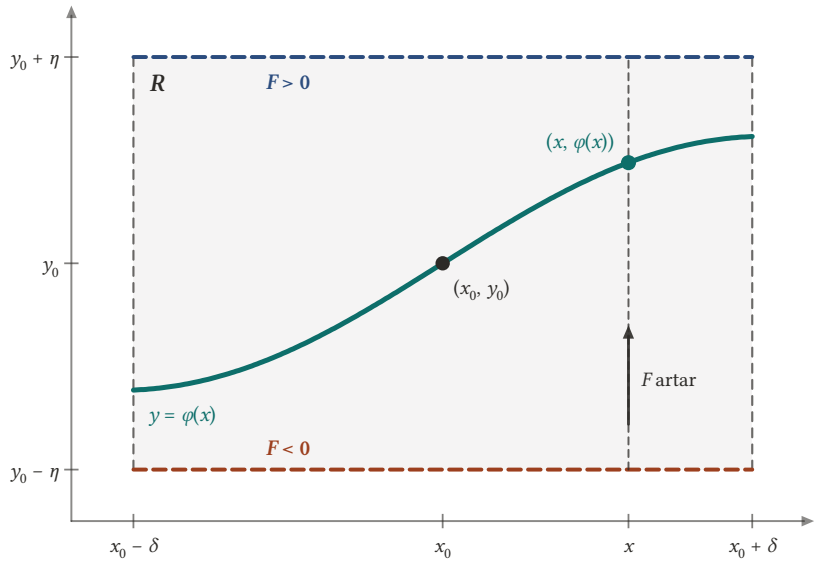
İkinci adım: y'ye göre kesin artanlık. *Her $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ için $g_x(y) = F(x,y)$ fonksiyonu $[y_0 - r, y_0 + r]$ aralığında türevlenebilirdir ve $g_x'(y) = F_y(x,y) > 0$'dır. Monotonluk testi (bkz. Analiz 2) gereği g_x bu aralıkta kesin artandır. $\eta = r$ alalım. $x = x_0$ için $g_{x_0}(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ olduğundan*

$$F(x_0, y_0 - \eta) < 0 < F(x_0, y_0 + \eta)$$

olur.
Üçüncü adım: δ'nın seçimi. *$F \in C^1(U)$ olduğundan F türevlenebilir (Teorem 14.3), dolayısıyla süreklidir (Teorem 14.1). Bu yüzden $x \mapsto F(x, y_0 - \eta)$ ve $x \mapsto F(x, y_0 + \eta)$ tek değişkenli fonksiyonları x_0'da süreklidir (Teorem 10.4). Sürekli fonksiyonların işaret koruma özelliği (bkz. Analiz 1) gereği öyle bir $\delta \in (0, r]$ vardır ki $| x - x_0 | < \delta$ olan her x için*

$$F(x, y_0 - \eta) < 0 < F(x, y_0 + \eta) \tag{1}$$

olur. $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ve $R = I \times (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ olsun; $R \subseteq K \subseteq U$'dur.
Dördüncü adım: varlık ve teklik. *$x \in I$ olsun. g_x, $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ aralığında süreklidir ve (1) gereği uçlarda zıt işaretlidir. Ara değer teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $g_x(y) = 0$ olan bir $y \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ vardır. g_x kesin artan olduğundan bu y tektir; onu $\varphi(x)$ ile gösterelim. y_0, $x = x_0$ için bir çözüm olduğundan teklik gereği $\varphi(x_0) = y_0$'dır. R'deki her sıfır noktası $(x, \varphi(x))$ biçiminde olduğundan (i) ispatlandı.*



Şekil 20.2: $R = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ *dikdörtgeni. Alt kenarda* $F < 0$, *üst kenarda* $F > 0$*'dır ve her düşey kesitte* F, y*'ye göre kesin artandır. Bu yüzden her* x *için düşey doğru* $F = 0$ *kümesini tam bir kez,* $(x, \varphi(x))$ *noktasında keser.*

Beşinci adım: bir Lipschitz kestirimi. *x ve $x + h$ noktaları I'da olsun; $y = \varphi(x)$ ve $k = \varphi(x + h) - \varphi(x)$ yazalım. (x, y) ve $(x + h, y + k)$ noktaları R'dedir. R konvekstir: iki noktanın koordinatları birer aralıkta ise aradaki doğru parçasındaki noktaların koordinatları da aynı aralıklardadır. Demek ki iki noktayı birleştiren doğru parçası R'de kalır. İki noktada da F sıfır olduğundan ortalama değer teoremi (Teorem 16.4) gereği bu doğru parçası üzerinde, bir $\theta \in (0,1)$ için $\xi = (x + \theta h, y + \theta k)$ noktası vardır ki*

$$0 = F(x + h, y + k) - F(x, y) = F_x(\xi)\, h + F_y(\xi)\, k$$

olur. $\xi \in R \subseteq K$ olduğundan $F_y(\xi) \geq \mu > 0$'dır ve

$$k = -\frac{F_x(\xi)}{F_y(\xi)}\, h \tag{2}$$

elde edilir. $| F_x(\xi) | \leq M$ olduğundan buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| k | \leq \frac{M}{\mu} | h | \tag{3}$$

çıkar.
Altıncı adım: süreklilik. *(3), I'daki her x ve $x+h$ için $| \varphi(x+h) - \varphi(x) | \leq \frac{M}{\mu} | h |$ demektir. $h \to 0$ iken sağ taraf 0'a gider; φ, I'nın her noktasında süreklidir. (ii) ispatlandı.*
Yedinci adım: türev. *$x \in I$ olsun ve $h \neq 0$, $x+h \in I$ için (2)'deki ξ noktasını ξ_h ile gösterelim. (2) gereği*

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{F_x(\xi_h)}{F_y(\xi_h)}$$

olur. (3) gereği ξ_h ile $\big(x, \varphi(x) \big)$ arasındaki uzaklık en çok $| h | + | k | \leq \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) | h |$'dir; dolayısıyla $h \to 0$ iken $\xi_h \to \big(x, \varphi(x) \big)$ olur. F_x ve F_y bu noktada sürekli ve $F_y \big(x, \varphi(x) \big) > 0$ olduğundan sağ tarafın limiti vardır ve

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x \big(x, \varphi(x) \big)}{F_y \big(x, \varphi(x) \big)}$$

bulunur. $x \mapsto \big(x, \varphi(x) \big)$ fonksiyonu sürekli, F_x ve F_y sürekli ve payda sıfırdan farklı olduğundan sağ taraf I üzerinde süreklidir; $\varphi \in C^1(I)$. (iii) ispatlandı. ■

Yani $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ise $F(x,y) = 0$ eğrisi (x_0, y_0) noktasının yakınında türevi sürekli bir fonksiyonun grafiğidir. İspatın özü ikinci adımdadır: dikdörtgenin her düşey kesitinde F kesin artan olduğundan her düşey doğru eğriyi tam bir kez keser.
Türev formülünü hatırlamanın kısa bir yolu vardır. φ'nin türevlenebilir olduğu bilindiğinde $F \big(x, \varphi(x) \big) = 0$ özdeşliğinin iki yanının x'e göre türevi alınır. Zincir kuralı (Teorem 15.6) gereği

$$F_x \big(x, \varphi(x) \big) + F_y \big(x, \varphi(x) \big) \varphi'(x) = 0$$

olur ve $F_y \neq 0$ olduğundan (iii) çıkar. Leibniz gösterimiyle $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ yazılır. Teoremin asıl içeriği ise formülün kendisi değil, türevlenebilir bir φ'nin var olduğu ve tek olduğudur.
x ile y'nin rolleri simetriktir: $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ise aynı teorem, eğrinin (x_0, y_0) yakınında bir $x = \psi(y)$ grafiği olduğunu ve $\psi' = -F_y/F_x$ olduğunu söyler. Dolayısıyla $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$ ise eğri bu noktanın yakınında iki biçimden birinde bir grafiktir. Her iki durumda da eğrinin (x_0, y_0)'daki teğet doğrusu

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

denklemiyle verilir. Örneğin $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ise $y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$ teğetinde $\varphi'(x_0) = -F_x/F_y$ yazıp F_y ile çarpmak bu denklemi verir. Gradyan, eğrinin teğetine diktir.

Örnek 20.5 (Çember ve Teoremin Uygulanamadığı Noktalar). $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin hangi noktalarının yakınında y, x'in fonksiyonu olarak tek türlü yazılabilir? Bu noktalarda kapalı fonksiyonun türevini bulunuz ve $(\pm 1, 0)$ noktalarındaki durumu inceleyiniz.

Çözüm.
$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ polinomu $C^1(\mathbb{R}^2)$ sınıfındandır; $F_x = 2x$ ve $F_y = 2y$'dir.
$y_0 \neq 0$ olan noktalar. Çemberin $y_0 \neq 0$ olan her (x_0, y_0) noktasında $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$'dır. Teorem 20.2 gereği bu noktanın yakınında tek bir C^1 kapalı fonksiyon vardır ve

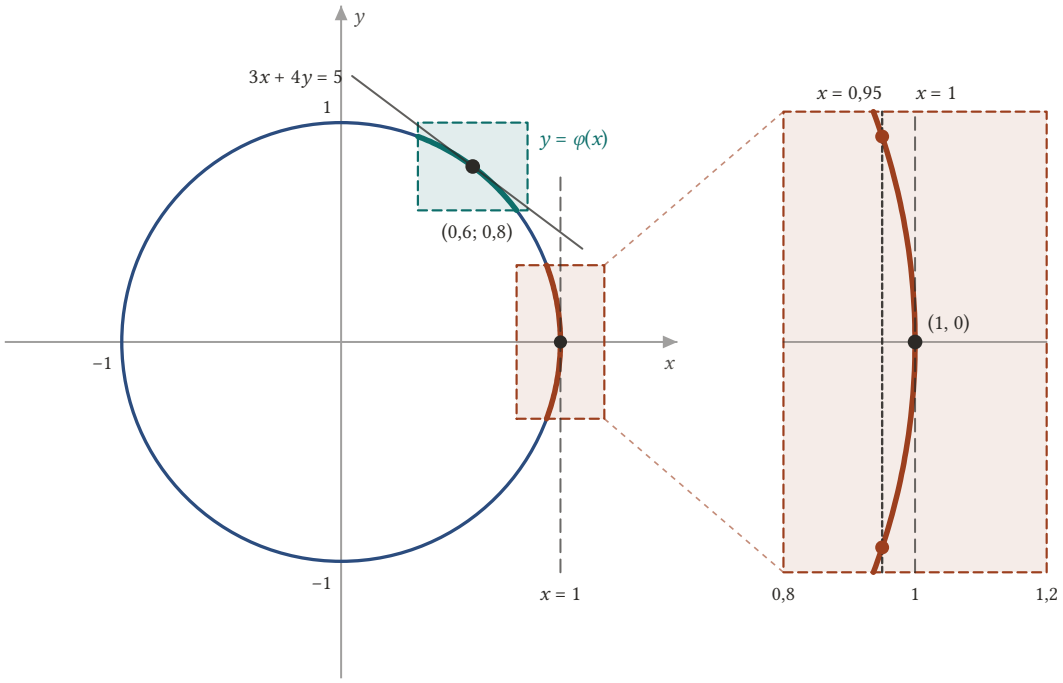
$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{2\varphi(x)} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

olur. Bu durumda φ'yi açıkça da biliyoruz: $y_0 > 0$ ise $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $y_0 < 0$ ise $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$'dir. Örneğin $y_0 > 0$ için doğrudan türev almak

$$\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

verir; teoremin formülüyle aynıdır.
$(1,0)$ noktası. Burada $F_y(1,0) = 0$'dır ve teorem uygulanamaz. Gerçekten de hiçbir $\delta, \eta > 0$ için teoremin sonucu doğru değildir. $1-\delta < x < 1$ ve $1 - x^2 < \eta^2$ olan her x için $y = \sqrt{1-x^2}$ ve $y = -\sqrt{1-x^2}$ çözümlerinin ikisi de $(-\eta, \eta)$ aralığındadır; çözüm tek değildir. $1 < x < 1+\delta$ için ise hiç çözüm yoktur. Çemberin $(1,0)$'daki teğeti düşey $x = 1$ doğrusudur ve düşey bir teğeti olan eğri, o noktanın yakınında x'in bir fonksiyonunun grafiği olamaz.
Öte yandan $F_x(1,0) = 2 \neq 0$'dır. Rolleri değiştirirsek çember $(1,0)$ yakınında $x = \psi(y) = \sqrt{1-y^2}$ grafiğidir ve $\psi'(0) = -F_y(1,0)/F_x(1,0) = 0$ olur. $(-1,0)$ noktası için aynı akıl yürütme $x = -\sqrt{1-y^2}$ verir.



Şekil 20.3: Birim çember. (0,6; 0,8) noktasının çevresindeki [0,35; 0,85] × [0,6; 1] penceresinde çember tek bir $y = \varphi(x)$ grafiğidir; teğeti $3x + 4y = 5$ doğrusudur. (1, 0) noktasında teğet düşeydir ($x = 1$). Sağda üç kat büyütülen [0,8; 1,2] × [−0,35; 0,35] penceresinde $x = 0{,}95$ doğrusu çemberi iki kez keser; 1'den büyük x'ler için ise kesişim yoktur.

■

Örnek 20.6 (Descartes Yaprağının Teğetleri). $x^3 + y^3 = 6xy$ eğrisinin, üzerinde teorem uygulanabilen noktalarında $\dfrac{dy}{dx}$ türevini bulunuz ve eğrinin $(3,3)$ noktasındaki teğetini yazınız. Eğrinin hangi noktalarında y, x'in fonksiyonu olarak yazılamayabilir?

Çözüm.
$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$ polinomu $C^1(\mathbb{R}^2)$ sınıfındandır; $F_x = 3x^2 - 6y$ ve $F_y = 3y^2 - 6x$'tir. Eğrinin $F_y \neq 0$, yani $y^2 \neq 2x$ olan her noktasının yakınında Teorem 20.2 uygulanır ve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

bulunur. Kübik denklemi y için çözmeye gerek kalmadan türevi hesapladık.
$(3,3)$ noktası. $F(3,3) = 27 + 27 - 54 = 0$ olduğundan nokta eğrinin üzerindedir ve $F_y(3,3) = 27 - 18 = 9 \neq 0$'dır. Türev

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = -\frac{9-6}{9-6} = -1$$

olur; teğet $y-3=-(x-3)$, yani $x+y=6$ doğrusudur.
Teoremin uygulanamadığı noktalar. Eğrinin $F_y=0$ olan noktalarını bulalım. $y^2=2x$, yani $x=\dfrac{y^2}{2}$ denklemde yerine konursa

$$\frac{y^6}{8}+y^3=3y^3$$

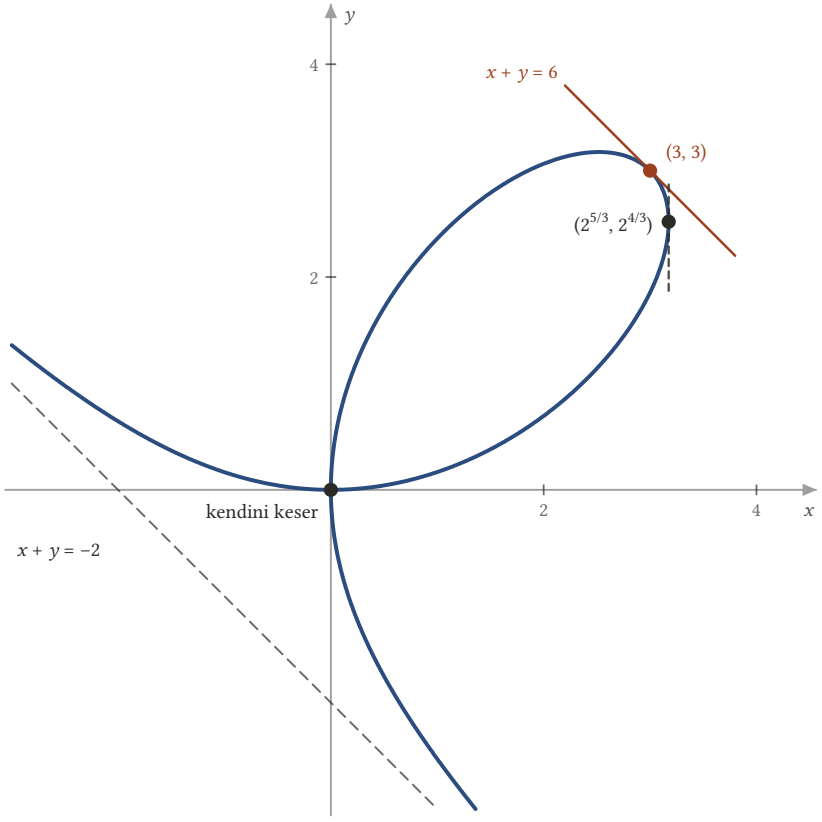
çıkar; bu, $y^3\left(\,y^3-16\,\right)=0$ demektir. $y=0$ için $(0,0)$ noktası, $y=16^{1/3}=2^{4/3}$ için $x=2^{8/3}/2=2^{5/3}$ ve

$$\left(\,2^{5/3},\,2^{4/3}\,\right)\approx(3{,}17;\,2{,}52)$$

noktası bulunur. İkinci noktada

$$F_x=3\cdot 2^{10/3}-6\cdot 2^{4/3}=6\cdot 2^{4/3}\neq 0$$

olur; eğrinin burada düşey bir teğeti vardır ve eğri bu noktanın yakınında $x=\psi(y)$ biçiminde yazılır. $(0,0)$'da ise $F_x=F_y=0$'dır. Eğri orijinden iki kez geçer (kendini keser) ve orada ne y, x'in ne de x, y'nin fonksiyonu olarak yazılabilir.



Şekil 20.4: Descartes yaprağı $x^3+y^3=6xy$ ve kesikli $x+y=-2$ asimptotu. (3, 3) noktasındaki teğet $x+y=6$ doğrusudur; $(2^{5/3},\,2^{4/3})\approx(3{,}17;\,2{,}52)$ noktasında teğet düşeydir. Eğri orijinden iki kez geçer ve orada kendini keser.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

20.5 Yüzeyler ve Teğet Düzlem

Aynı teorem, üç değişkenli bir denklemden bir değişkeni öbür ikisi cinsinden çözmeye, yani bir yüzeyi yerel olarak bir grafik gibi yazmaya da yarar.

Sonuç 20.1 (Üç Değişkenli Kapalı Fonksiyon Teoremi). *$U \subseteq \mathbb{R}^3$ açık bir küme, $F : U \to \mathbb{R}$ ve $F \in C^1(U)$ olsun. Bir $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ noktasında $F(P_0) = 0$ ve $F_z(P_0) \neq 0$ ise öyle $\delta > 0$ ve $\eta > 0$ sayıları vardır ki $W = B\left((x_0, y_0), \delta\right)$ açık yuvarı için $W \times (z_0 - \eta, z_0 + \eta) \subseteq U$'dur ve şunlar doğrudur.*
(i) *Her $(x, y) \in W$ için $F(x, y, z) = 0$ denkleminin $(z_0 - \eta, z_0 + \eta)$ aralığında bir ve yalnız bir $z = \varphi(x, y)$ çözümü vardır. Böylece $\varphi(x_0, y_0) = z_0$, her $(x, y) \in W$ için $\left(x, y, \varphi(x, y)\right) \in U$ ve $F\left(x, y, \varphi(x, y)\right) = 0$'dır.*
(ii) *$\varphi \in C^1(W)$'dir ve W'nin her noktasında, sağ taraflar $\left(x, y, \varphi(x, y)\right)$ noktasında hesaplanmak üzere,*

$$\varphi_x = -\frac{F_x}{F_z},$$
$$\varphi_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

olur.
(iii) *$F(x, y, z) = 0$ yüzeyinin P_0 noktasındaki teğet düzlemi*

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

denklemiyle, vektörel biçimde $P = (x, y, z)$ için$\text{chevron.l}\nabla F(P_0), P - P_0\text{chevron.r} = 0$ denklemiyle verilir.
(iv) *Daha genel olarak $\nabla F(P_0) \neq 0$ ise $F_x(P_0)$, $F_y(P_0)$, $F_z(P_0)$ sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Yüzey P_0 yakınında o değişkenin öbür ikisi cinsinden C^1 bir fonksiyonunun grafiğidir ve teğet düzlemi yine (iii)'teki denklemle verilir.*

> ***İspat.***
> *İspat, Teorem 20.2 ispatının adımlarını izler; farkları yazıyoruz. Yine $F_z(P_0) > 0$ varsayabiliriz.*
> ***Varlık ve teklik.*** *F_z'nin P_0'daki sürekliliğinden, U'nun içinde kalan ve üzerinde $F_z > 0$ olan bir*
>
> $$K = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r]$$
>
> *küpü bulunur (küpün noktalarının P_0'a uzaklığı en çok $r\sqrt{3}$ olduğundan r yeterince küçük seçilir). K kompakt olduğundan K üzerinde $|F_x| \leq M, |F_y| \leq M$ ve $F_z \geq \mu > 0$ olacak biçimde M ve μ sayıları vardır (Teorem 11.3). $|x - x_0| \leq r$ ve $|y - y_0| \leq r$ olan her (x, y) için $z \mapsto F(x, y, z)$ fonksiyonu $[z_0 - r, z_0 + r]$ aralığında kesin artandır. $\eta = r$ ile*
>
> $$F(x_0, y_0, z_0 - \eta) < 0 < F(x_0, y_0, z_0 + \eta)$$
>
> *olur. $(x, y) \mapsto F(x, y, z_0 \mp \eta)$ iki değişkenli fonksiyonları süreklidir (Teorem 10.4). Süreklilik tanımı $\varepsilon = |F(x_0, y_0, z_0 \mp \eta)|/2$ ile uygulanırsa bu işaretlerin (x_0, y_0) merkezli bir yuvarda korunduğu görülür. Bu yuvarın yarıçapını $\delta \leq r$ olacak biçimde küçültüp $W = B\left((x_0, y_0), \delta\right)$ diyelim; W, $[x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$ karesinin içindedir ve $W \times (z_0 - \eta, z_0 + \eta) \subseteq K \subseteq U$'dur. Her $(x, y) \in W$ için ara değer teoremi ve kesin artanlık, denklemin $(z_0 - \eta, z_0 + \eta)$ aralığında tek bir $\varphi(x, y)$ çözümünü verir; teklikten $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ çıkar.*
> ***Süreklilik.*** *(x, y) ve $(x + h, y + l)$ noktaları W'de olsun; $z = \varphi(x, y)$ ve $k = \varphi(x + h, y + l) - z$ yazalım. (x, y, z) ve $(x + h, y + l, z + k)$ noktaları $W \times (z_0 - \eta, z_0 + \eta)$ kümesindedir. Bu küme konvekstir: yuvar konveks olduğundan (Teorem 2.2) iki noktayı birleştiren doğru parçasının ilk iki koordinatı W'de, üçüncü koordinatı aralıkta kalır. Ortalama değer teoremi (Teorem 16.4) gereği aradaki doğru parçası üzerinde bir ξ noktası için*
>
> $$0 = F(x + h, y + l, z + k) - F(x, y, z) = F_x(\xi)\, h + F_y(\xi)\, l + F_z(\xi)\, k$$
>
> *olur. Buradan $|k| \leq \frac{M}{\mu}\left(|h| + |l|\right)$ çıkar; φ, W üzerinde süreklidir.*
> ***Kısmi türevler.*** *$l = 0$ alınırsa yukarıdaki eşitlik*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} = -\frac{F_x(\xi_h)}{F_z(\xi_h)}$$

verir. $h\to 0$ iken $\xi_h \to \big(\, x, y, \varphi(x,y)\,\big)$ olduğundan, Teorem 20.2 ispatının yedinci adımındaki gibi $\varphi_x = -F_x/F_z$ bulunur. $h=0$ alınarak aynı biçimde $\varphi_y = -F_y/F_z$ elde edilir. Bu kısmi türevler, paydası sıfır olmayan sürekli fonksiyonların bölümü olduğundan süreklidir; $\varphi \in C^1(W)$.
Teğet düzlem. *$\varphi \in C^1(W)$ olduğundan φ türevlenebilirdir (Teorem 14.3). Grafiğinin (x_0,y_0,z_0) noktasındaki teğet düzlemi (Tanım 14.4)*

$$z - z_0 = \varphi_x(x_0,y_0)(x-x_0) + \varphi_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

düzlemidir. $\varphi_x(x_0,y_0) = -F_x(P_0)/F_z(P_0)$ ve $\varphi_y(x_0,y_0) = -F_y(P_0)/F_z(P_0)$ yazıp eşitliği $F_z(P_0)$ ile çarparsak (iii)'teki denklem çıkar.
Son olarak (iv) için değişkenlerin adlarını değiştirmek yeter. Örneğin $F_x(P_0)\neq 0$ ise yukarıdaki ispat x'e z'nin rolünü vererek yüzeyi $x=\psi(y,z)$ biçiminde yazar ve teğet düzlem aynı yolla aynı denklemle bulunur. Burada teğet düzlem, Tanım 14.4 tanımının $x=\psi(y,z)$ grafiğine değişken adları değiştirilerek uygulanmasıyla tanımlanır; iki gösterim birden mümkünse ikisi de (iii)'teki denklemi verdiğinden düzlem gösterime bağlı değildir. ■

Yani $\nabla F(P_0)\neq 0$ ise $F(x,y,z)=0$ yüzeyi P_0'ın yakınında düzgün bir yüzeydir ve gradyan, teğet düzleme dik olan normal vektördür. Teğet düzlemin denklemini yazmak için yüzeyi bir grafik olarak açıkça çözmek gerekmez; yalnızca F'nin P_0'daki kısmi türevleri yeter.

Örnek 20.7 (Kürenin Teğet Düzlemi). $x^2+y^2+z^2=14$ küresinin $(1,2,3)$ noktasının yakınında $z=\varphi(x,y)$ biçiminde yazılabildiğini gösteriniz. $\varphi_x(1,2)$ ve $\varphi_y(1,2)$ değerlerini ve kürenin bu noktadaki teğet düzlemini bulunuz.

Çözüm.
$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$ olsun; $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$ ve $F(1,2,3)=1+4+9-14=0$'dır. Kısmi türevler $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_z=2z$'dir ve $P_0=(1,2,3)$'te

$$\nabla F(P_0) = (2,4,6)$$

olur. $F_z(P_0)=6\neq 0$ olduğundan Sonuç 20.1 uygulanır ve

$$\varphi_x(1,2) = -\frac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3},$$
$$\varphi_y(1,2) = -\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

bulunur. Sonuç 20.1 (iii) gereği teğet düzlem

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,$$

sadeleştirilirse $x+2y+3z=14$ düzlemidir. Bu örnekte $\varphi(x,y)=\sqrt{14-x^2-y^2}$ açıkça bilinir ve $\varphi_x=-x/\varphi$ türevi aynı sonucu verir. Normal vektör $(2,4,6)$, merkezden noktaya giden $(1,2,3)$ vektörüne paraleldir: kürenin teğet düzlemi yarıçapa diktir.
Teorem yalnızca $F_z=2z=0$ olan ekvator çemberinde uygulanamaz. Oradaki bir noktanın yakınında $\pm\sqrt{14-x^2-y^2}$ değerlerinin ikisi de 0'a yakındır ve küre z'nin (x,y) cinsinden bir fonksiyonunun grafiği olamaz. Bu noktalarda F_x ya da F_y sıfırdan farklıdır ve Sonuç 20.1 (iv) gereği küre, x'in ya da y'nin öbür iki değişken cinsinden bir fonksiyonunun grafiğidir. ■

Örnek 20.8 (Açıkça Çözülmeyen Bir Yüzey). $xy+z^3+xz=3$ denkleminin $(1,1,1)$ noktasının yakınında bir $z=\varphi(x,y)$ fonksiyonu tanımladığını gösteriniz. $\varphi_x(1,1)$, $\varphi_y(1,1)$ değerlerini ve yüzeyin bu noktadaki teğet düzlemini bulunuz; $\varphi(1{,}1;\,0{,}9)$ için doğrusal bir yaklaşık değer veriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$F(x,y,z) = xy + z^3 + xz - 3$ polinomu $C^1(\mathbb{R}^3)$ sınıfındandır ve $F(1,1,1) = 1+1+1-3 = 0$'dır. Kısmi türevler $F_x = y+z$, $F_y = x$, $F_z = 3z^2 + x$ olur; $P_0 = (1,1,1)$'de değerleri 2, 1 ve 4'tür. $F_z(P_0) = 4 \neq 0$ olduğundan Sonuç 20.1 gereği $(1,1)$'in bir komşuluğunda $\varphi(1,1) = 1$ olan tek bir C^1 çözüm vardır ve

$$\varphi_x(1,1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2},$$
$$\varphi_y(1,1) = -\frac{1}{4}$$

bulunur. Teğet düzlem $2(x-1) + (y-1) + 4(z-1) = 0$, yani

$$2x + y + 4z = 7$$

düzlemidir.
z'ye göre kübik olan denklemi her (x,y) için çözmek pratik değildir; buna karşın teğet düzlem φ'nin yakın değerlerini tahmin etmeye yeter. $(x,y) = (1{,}1;\, 0{,}9)$ için

$$\varphi(1{,}1;\, 0{,}9) \approx 1 - \frac{1}{2}(0{,}1) - \frac{1}{4}(-0{,}1) = 0{,}975$$

bulunur. $z^3 + 1{,}1\,z - 2{,}01 = 0$ denkleminin sayısal çözümü $z \approx 0{,}978$'dir; yaklaşım iyidir. ■

20.6 Denklem Sistemleri

Şimdi birden çok denklemden birden çok bilinmeyeni aynı anda çözmek istiyoruz.
$n+m$ değişkenli m denklemden oluşan

$$\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0,\\ &\vdots\\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0 \end{aligned}$$

sistemini ele alalım. $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\dots,y_m) \in \mathbb{R}^m$ ve $F = (F_1,\dots,F_m)$ yazarsak sistem kısaca $F(x,y) = 0$ olur. Amacımız y'yi x cinsinden, $y = \varphi(x)$ biçiminde çözmektir. Lineer durumda, yani A bir $m \times n$ ve B bir $m \times m$ matris olmak üzere $F(x,y) = Ax + By$ ise sistem $By = -Ax$ olur. B terslenebilirse tek çözüm $y = -B^{-1}Ax$'tir. Doğrusal olmayan durumda A ve B'nin rolünü F'nin x'e ve y'ye göre kısmi türevlerinden oluşan matrisler oynar.

Tanım 20.3 (Kısmi Jacobi Matrisleri). $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ açık bir küme olsun; noktalarını (x,y) ile gösterelim ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$). $F = (F_1,\dots,F_m) : U \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun bütün birinci kısmi türevleri U'da var olsun. $(x,y) \in U$ için F'nin x'e göre ve y'ye göre **kısmi Jacobi matrisleri**, bütün kısmi türevler (x,y)'de hesaplanmak üzere

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ matrisi ve

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

$m \times m$ matrisidir. İkincisinin determinantı $\dfrac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x,y)$ ile gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani F'nin $m \times (n+m)$ boyutlu $J_F(x,y)$ Jacobi matrisinin ilk n sütunu $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, son m sütunu $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ matrisini oluşturur. Aynı gösterim herhangi bir değişken seçimi için kullanılır; örneğin $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$, F ve G'nin x ve v'ye göre kısmi türevlerinden oluşan 2×2 matrisin determinantıdır.
Aşağıdaki teoremin varlık, teklik ve türevlenebilirlik kısımları, yani (i) ve (ii), ters fonksiyon teoremi $(x,y) \mapsto \big(\, x, F(x,y) \,\big)$ dönüşümüne uygulanarak elde edilir. Ters fonksiyon teoremini ispatsız kabul ettiğimizden bu kısımları da ispatsız kabul ediyor, (iii)'teki türev formülünü zincir kuralıyla türetiyoruz.

Teorem 20.3 (Kapalı Fonksiyon Teoremi). *$U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ açık bir küme, $F = (F_1, ..., F_m) : U \to \mathbb{R}^m$ ve her $F_k \in C^1(U)$ olsun. $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ ve $(a,b) \in U$ olmak üzere $F(a,b) = 0$ ve*

$$\frac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(y_1, ..., y_m)}(a,b) \neq 0$$

ise a merkezli bir $W = B(a,\delta) \subseteq \mathbb{R}^n$ açık yuvarı ve b'yi içeren bir $V \subseteq \mathbb{R}^m$ açık kümesi vardır ki $W \times V \subseteq U$, bu kümede Jacobi determinantı sıfırdan farklıdır ve şunlar doğrudur.
(i) *Her $x \in W$ için $F(x,y) = 0$ denkleminin V'de bir ve yalnız bir $y = \varphi(x)$ çözümü vardır. Böylece $\varphi(a) = b$, her $x \in W$ için $\big(\, x, \varphi(x) \,\big) \in U$ ve $F\,\big(\, x, \varphi(x) \,\big) = 0$'dır.*
(ii) *$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) : W \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun her bileşeni $C^1(W)$ sınıfındandır.*
(iii) *Her $x \in W$ için, kısmi Jacobi matrisleri $\big(\, x, \varphi(x) \,\big)$ noktasında hesaplanmak üzere,*

$$J_\varphi(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$

olur. Bileşenlerle, $i = 1, ..., m$ ve $j = 1, ..., n$ için

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_{i-1},x_j,y_{i+1},...,y_m)}}{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}}$$

yazılır. Paydaki determinant, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ matrisinin i-inci sütununun yerine F'nin x_j'ye göre kısmi türevlerinden oluşan sütun konarak elde edilir.

> ***(iii)'ün ispatı.***
> *Teoremin (i) ve (ii) kısımları sağlansın. Her $x \in W$ için $F\,\big(\, x, \varphi(x) \,\big) = 0$'dır. $H(x) = F\,\big(\, x, \varphi(x) \,\big)$ fonksiyonu W üzerinde sabit olduğundan Jacobi matrisi $m \times n$ sıfır matristir. $x \mapsto \big(\, x, \varphi(x) \,\big)$ fonksiyonunun bileşenleri $C^1(W)$ sınıfından olduğundan bu fonksiyon türevlenebilirdir (Teorem 15.4); Jacobi matrisi, üstte I_n birim matrisi, altta $J_\varphi(x)$ bulunan $(n+m) \times n$ matristir. F de C^1 olduğundan türevlenebilirdir. Zincir kuralı (Teorem 15.6) gereği*
>
> $$0 = J_H(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot I_n + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot J_\varphi(x)$$
>
> *olur; burada kısmi Jacobi matrisleri $\big(\, x, \varphi(x) \,\big)$'de hesaplanır. $W \times V$ üzerinde $\det \dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ olduğundan bu matris terslenebilirdir ve matris formülü çıkar.*
>
> *Bileşen formülü için j-inci sütuna bakalım. $c = \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}, ..., \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}\right)$ sütunu, $A = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ ve $d = \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_j}, ..., \dfrac{\partial F_m}{\partial x_j}\right)$ sütunu için $Ac = -d$ lineer sistemini sağlar. $\det A \neq 0$ olduğundan Cramer kuralı gereği c'nin i-inci bileşeni, A'nın i-inci sütunu yerine $-d$ konarak elde edilen matrisin determinantının $\det A$'ya bölümüdür. Determinant bir sütuna göre lineer olduğundan $-d$ yerine d konup önüne eksi işareti yazılabilir. A'nın i-inci sütunu yerine d konmuş matris, $F_1, ..., F_m$'nin $y_1, ..., y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, ..., y_m$ değişkenlerine göre Jacobi matrisidir.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani sistem, y'ye göre kısmi Jacobi determinantının sıfır olmadığı bir çözüm noktasının yakınında $y = \varphi(x)$ biçiminde tek türlü çözülür; φ'nin türevi, lineer durumdaki $-B^{-1}A$ formülünün aynısıdır. $n = m = 1$ için teorem, Teorem 20.2 ile aynıdır.
Ters fonksiyon teoremi de bu teoremin özel bir hâlidir. $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ için $y = F(x)$ denklemini x için çözmek, $G(y, x) = F(x) - y = 0$ sisteminde y'yi bağımsız değişken, x'i bilinmeyen saymak demektir. Bilinmeyene göre kısmi Jacobi matrisi $J_F(x)$, bağımsız değişkene göre olanı $-I_n$'dir ve (iii) formülü

$$J_{F^{-1}}(y) = -J_F(x)^{-1}\,(-I_n) = J_F(x)^{-1}$$

verir. İki teorem aynı olgunun iki yüzüdür.
Uygulamada en sık karşılaşılan hâl, dört değişkenli iki denklemdir.

Teorem 20.4 (İki Denklemli Sistem). *$U \subseteq \mathbb{R}^4$ açık bir küme, $F, G : U \to \mathbb{R}$ ve $F, G \in C^1(U)$ olsun. Bir $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) \in U$ noktasında $F(P_0) = G(P_0) = 0$ ve*

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P_0) = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_{P_0} \neq 0$$

ise (x_0, y_0) merkezli bir W açık yuvarı ve (u_0, v_0)'ı içeren bir $V \subseteq \mathbb{R}^2$ açık kümesi vardır; W'de tanımlı, değerleri V'de olan, $\varphi(x_0, y_0) = u_0$ ve $\psi(x_0, y_0) = v_0$ koşullarını sağlayan ve her $(x, y) \in W$ için

$$\begin{aligned} F\,\big(\,x, y, \varphi(x,y), \psi(x,y)\,\big) &= 0, \\ G\,\big(\,x, y, \varphi(x,y), \psi(x,y)\,\big) &= 0 \end{aligned}$$

olan bir ve yalnız bir $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ fonksiyon çifti vardır (teklik, değerleri V'de olan çiftler arasındadır). Bu fonksiyonlar $C^1(W)$ sınıfındandır ve $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}, \\ u_y &= -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}, \\ v_x &= -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}, \\ v_y &= -\frac{1}{J}\,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

olur; sağ taraflar $\big(\,x, y, \varphi(x,y), \psi(x,y)\,\big)$ noktasında hesaplanır.

> ***İspat.***
> *Varlık, teklik ve C^1 olma, Teorem 20.3 ile elde edilir: $n = m = 2$ alınır, bağımsız değişkenler (x, y), bilinmeyenler (u, v)'dir. Türev formüllerini doğrudan türetelim. $F\,\big(\,x, y, \varphi, \psi\,\big) = 0$ ve $G\,\big(\,x, y, \varphi, \psi\,\big) = 0$ özdeşliklerinin x'e göre türevini zincir kuralıyla (Teorem 15.6) alırsak*
>
> $$\begin{aligned} F_u\,u_x + F_v\,v_x &= -F_x, \\ G_u\,u_x + G_v\,v_x &= -G_x \end{aligned}$$
>
> *sistemi çıkar. Katsayılar determinantı $J \neq 0$ olduğundan Cramer kuralı gereği*
>
> $$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}, \\ v_x &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} \end{aligned}$$
>
> *bulunur. y'ye göre türev alınırsa aynı sistem F_y ve G_y sağ taraflarıyla çıkar ve u_y, v_y formülleri aynı biçimde elde edilir.* ∎

 CC BY-NC-SA 4.0

Formülleri akılda tutmak kolaydır: u_x için paydaki determinantta u'nun sütunu yerine x'in sütunu gelir ve önüne eksi işareti konur. Aynı kural genel teoremdeki bileşen formülüdür.
Birçok değişkenin bulunduğu hesaplarda hangi değişkenlerin bağımsız sayıldığını belirtmek için kısmi türevin yanına sabit tutulan değişkenler yazılır. Örneğin $F(x,y,z,w)=0$, $G(x,y,z,w)=0$ sisteminden x ve y, (z,w)'nin fonksiyonları olarak çözülmüşse x'in z'ye göre kısmi türevi

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{w} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

olur. Aynı sistemden x ve w, (y,z)'nin fonksiyonları olarak çözülürse x'in z'ye göre kısmi türevi $\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)_{y}$ ile gösterilir ve genellikle farklı bir sayıdır. Bağımsız değişkenler belirtilmeden "$\dfrac{\partial x}{\partial z}$" yazımı anlamsızdır.
Aynı yol daha çok denklemde de işler. Örneğin $\mathbb{R}^6$'nın açık bir kümesinde tanımlı ve C^1 sınıfından F, G, H fonksiyonları $P_0=(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0,w_0)$ noktasında sıfır olsun ve

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_0)\neq 0$$

olsun. Teorem 20.3 ($n=m=3$) gereği (x_0,y_0,z_0)'ın bir komşuluğunda u, v, w, (x,y,z)'nin C^1 fonksiyonları olarak tek türlü çözülür. Kısmi türevleri bulmanın pratik yolu diferansiyel almaktır. $dF=0$, $dG=0$, $dH=0$ eşitlikleri

$$\begin{aligned}
F_u\,du+F_v\,dv+F_w\,dw &= -\left(\,F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\,\right),\\
G_u\,du+G_v\,dv+G_w\,dw &= -\left(\,G_x\,dx+G_y\,dy+G_z\,dz\,\right),\\
H_u\,du+H_v\,dv+H_w\,dw &= -\left(\,H_x\,dx+H_y\,dy+H_z\,dz\,\right)
\end{aligned}$$

lineer sistemini verir. Bu sistem du, dv, dw için çözülür; örneğin $du=u_x\,dx+u_y\,dy+u_z\,dz$ ifadesindeki katsayılar u'nun kısmi türevleridir. Bu yazım, zincir kuralıyla her bağımsız değişkene göre ayrı ayrı türev almanın kısa bir kaydıdır.

Üç adımda kapalı türev hesabı

1. **Sistemi sıfıra eşitle.** Denklemleri $F=0$, $G=0$, … biçiminde yaz; bilinmeyenleri ve bağımsız değişkenleri belirle.
2. **Jacobi determinantını denetle.** Bilinmeyenlere göre Jacobi determinantını hesapla ve ilgilenilen çözüm noktasında sıfırdan farklı olduğunu göster.
3. **Türevleri hesapla.** Kısmi türevleri Jacobi determinantlarının oranı olarak ya da diferansiyellerin oluşturduğu lineer sistemi çözerek bul; toplam diferansiyeli $du=u_x\,dx+u_y\,dy$ biçiminde yaz.

Örnek 20.9 (Sinüs Oranlı Bir Sistem).

$$\begin{aligned}
u+v &= x+y,\\
\frac{\sin u}{\sin v} &= \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

denklem sistemiyle belirlenen $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ fonksiyonlarının u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevlerini ve du, dv toplam diferansiyellerini bulunuz.

Çözüm.
Sistem. $y\neq 0$ ve $\sin v\neq 0$ olan noktalarda

$$\begin{aligned}
F(x,y,u,v) &= u+v-x-y,\\
G(x,y,u,v) &= \frac{\sin u}{\sin v}-\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

diyelim. Bu fonksiyonlar tanımlı oldukları açık kümede C^1 sınıfındandır. Kısmi türevler şunlardır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F_x = -1, \quad F_y = -1, \quad F_u = 1, \quad F_v = 1,$$
$$G_x = -\frac{1}{y}, \quad G_y = \frac{x}{y^2}, \quad G_u = \frac{\cos u}{\sin v}, \quad G_v = -\frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v}.$$

Jacobi determinantı.

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\cos u}{\sin v} & -\frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} \end{vmatrix} = -\frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\sin^2 v} = -\frac{\sin(u+v)}{\sin^2 v}$$

olur. Teorem 20.4 gereği sistem, $\sin(u+v) \neq 0$ olan her çözüm noktasının yakınında u ve v'yi x ve y cinsinden tek türlü belirler.
***u*'nun türevleri.**

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{y} & -\frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} \end{vmatrix} = \frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} + \frac{1}{y} = \frac{y \sin u \cos v + \sin^2 v}{y \sin^2 v}$$

olduğundan

$$u_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \frac{y \sin u \cos v + \sin^2 v}{y \sin(u+v)}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{x}{y^2} & -\frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} \end{vmatrix} = \frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} - \frac{x}{y^2} = \frac{y^2 \sin u \cos v - x \sin^2 v}{y^2 \sin^2 v}$$

ve

$$u_y = \frac{y^2 \sin u \cos v - x \sin^2 v}{y^2 \sin(u+v)}$$

olur.
***v*'nin türevleri.**

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\cos u}{\sin v} & -\frac{1}{y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y} + \frac{\cos u}{\sin v} = \frac{y \cos u - \sin v}{y \sin v}$$

olduğundan

$$v_x = \frac{(y \cos u - \sin v)\sin v}{y \sin(u+v)} = \frac{y \sin v \cos u - \sin^2 v}{y \sin(u+v)}$$

bulunur. Son olarak

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\cos u}{\sin v} & \frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{x}{y^2} + \frac{\cos u}{\sin v} = \frac{x \sin v + y^2 \cos u}{y^2 \sin v}$$

ve

$$v_y = \frac{x \sin^2 v + y^2 \sin v \cos u}{y^2 \sin(u+v)}$$

olur.
Denetim. Birinci denklemin x'e ve y'ye göre türevi $u_x + v_x = 1$ ve $u_y + v_y = 1$ verir. Gerçekten

$$u_x + v_x = \frac{y\left(\sin u \cos v + \cos u \sin v\right)}{y \sin(u+v)} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; $u_y + v_y$ toplamında da $x\sin^2 v$ terimleri birbirini götürür ve toplam 1 çıkar.
Toplam diferansiyeller.

$$du = \frac{y\sin u\cos v + \sin^2 v}{y\sin(u+v)}\,dx + \frac{y^2\sin u\cos v - x\sin^2 v}{y^2\sin(u+v)}\,dy,$$
$$dv = \frac{y\sin v\cos u - \sin^2 v}{y\sin(u+v)}\,dx + \frac{x\sin^2 v + y^2\sin v\cos u}{y^2\sin(u+v)}\,dy.$$

Birinci denklemden $dv = dx + dy - du$ olduğu da görülür. ■

Örnek 20.10 (Beş Değişkenli İki Denklem).

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3,$$
$$x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

sisteminin $P_0 = (x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ noktasının yakınında u ve v'yi (x, y, z)'nin fonksiyonları olarak belirlediğini gösteriniz ve $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ noktasında $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{x,z}$ ile $\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z}$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Sistem. $F = xy^2 + xzu + yv^2 - 3$ ve $G = x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2$ polinomları $C^1(\mathbb{R}^5)$ sınıfındandır. $F(P_0) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$ ve $G(P_0) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$'dır. Gerekli kısmi türevler ve P_0'daki değerleri:

$$F_u = xz = 1, \quad F_v = 2yv = 2, \quad F_y = 2xy + v^2 = 3,$$
$$G_u = -2uv^2 = -2, \quad G_v = 2x - 2u^2v = 0, \quad G_y = x^3z = 1.$$

Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P_0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4 \neq 0$$

olduğundan Teorem 20.3 ($n = 3$, $m = 2$) gereği $(1, 1, 1)$'in bir komşuluğunda $u(1, 1, 1) = v(1, 1, 1) = 1$ olan tek bir C^1 çözüm $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ vardır.
Türevler. Bilinmeyenin sütunu yerine y'nin sütununu koyarak

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(P_0) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(P_0) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

buluruz. Öyleyse

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x,z} = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2},$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z} = -\frac{7}{4}$$

olur.
Denetim. Denklemlerin y'ye göre türevi $F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0$ ve $G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0$ verir. Değerleri yerine koyarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$3 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{7}{4}\right) = 0,$$
$$1 + (-2) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 0$$

olur. ■

20.7 Fonksiyonel Bağlılık

Kapalı fonksiyon teoreminin son bir uygulaması, verilen birkaç fonksiyondan birinin öbürleri tarafından belirlenip belirlenmediğini sınamaktır.
$u = x + y$ ve $v = x^2 + 2xy + y^2$ fonksiyonları birbirinden bağımsız görünse de $v = u^2$'dir: u bilindiğinde v de bilinir. Lineer cebirde lineer fonksiyonlar arasında lineer bir bağıntı bulunup bulunmadığını katsayı matrisinin rankı belirler. Doğrusal olmayan fonksiyonlarda bağıntı keyfi bir fonksiyon olabilir ve rolü Jacobi matrisi üstlenir.

Tanım 20.4 (Fonksiyonel Bağlılık). $D \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $m \leq n$ ve $f_1, ..., f_m : D \to \mathbb{R}$ olsun; $f = (f_1, ..., f_m)$ yazalım. $f(D) \subseteq G$ olan bir $G \subseteq \mathbb{R}^m$ açık kümesi ile G'nin boş olmayan hiçbir açık alt kümesinde özdeş olarak sıfır olmayan ve her $x \in D$ için

$$\Phi\ \big(\ f_1(x), ..., f_m(x)\ \big) = 0$$

koşulunu sağlayan bir $\Phi \in C^1(G)$ fonksiyonu varsa $f_1, ..., f_m$ fonksiyonlarına D'de **fonksiyonel bağlı** denir. Böyle bir Φ yoksa fonksiyonlara D'de **fonksiyonel bağımsız** denir.

Yani fonksiyonların değerleri, x değişse bile, her zaman $\Phi(z_1, ..., z_m) = 0$ "yüzeyinin" üzerinde kalır. Örneğin $\partial\Phi/\partial z_m$ türevi $f(p)$ noktasında sıfırdan farklıysa kapalı fonksiyon teoremi gereği bu bağıntı, p'nin yakınında f_m'yi öbür fonksiyonların bir fonksiyonu olarak yazar. Φ üzerindeki koşul gereklidir: özdeş sıfır fonksiyonu her fonksiyon ailesi için bağıntıyı sağlardı. Fonksiyonel bağlılık, $u = x + y$, $v = x^2 + 2xy + y^2$ örneğinde $\Phi(z_1, z_2) = z_2 - z_1^2$ ile gösterilir.

Teorem 20.5 (Fonksiyonel Bağlılık ve Jacobi Matrisinin Rankı). *$D \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $m \leq n$, $f_1, ..., f_m \in C^1(D)$ ve $f = (f_1, ..., f_m)$ olsun.*
(a) *$f_1, ..., f_m$ fonksiyonları D'de fonksiyonel bağlıysa her $x \in D$ için* $\operatorname{rank}\ J_f(x) < m$*'dir.*
(b) *Tersine, $J_f(x)$ matrisinin rankı D'nin her noktasında aynı $r < m$ sayısına eşitse D'nin her noktasının bir komşuluğunda $f_1, ..., f_m$ fonksiyonel bağlıdır.*

(a)'nın ispatı.
$f_1, ..., f_m$ fonksiyonları D'de fonksiyonel bağlı olsun; G ve Φ tanımdaki gibi olsun. Bir $p \in D$ noktasında $\operatorname{rank}\ J_f(p) = m$ *olduğunu varsayıp çelişki elde edelim.*
$m \times n$ boyutlu $J_f(p)$ matrisinin rankı m olduğundan m tane lineer bağımsız sütunu vardır; bunlar $j_1 < ... < j_m$ sütunları olsun. Öbür değişkenleri p'nin koordinatlarında sabitleyelim: $s = (s_1, ..., s_m)$ için

$$A(s) = p + \sum_{k=1}^{m} \big(\ s_k - p_{j_k}\ \big)\ e_{j_k}$$

olsun. Burada p_{j_k}, p'nin j_k-inci koordinatıdır. A sürekli olduğundan açık D kümesinin ters görüntüsü olan $O = \{s \in \mathbb{R}^m : A(s) \in D\}$ kümesi açıktır (Teorem 11.1) ve $s^0 = (p_{j_1}, ..., p_{j_m})$ noktasını içerir; $A(s^0) = p$'dir. $g = f \circ A : O \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunda s_l'nin değişmesi yalnızca x_{j_l} koordinatını değiştirdiğinden

$$\frac{\partial g_k}{\partial s_l}(s) = \frac{\partial f_k}{\partial x_{j_l}}\ \big(\ A(s)\ \big)$$

olur. Bu kısmi türevler süreklidir; $g \in C^1(O)$'dur. $J_g(s^0)$ matrisi $J_f(p)$'nin $j_1, ..., j_m$ sütunlarından oluşur. Bu sütunlar lineer bağımsız olduğundan $\det J_g(s^0) \neq 0$*'dır.*
Ters fonksiyon teoremi (Teorem 20.1) gereği s^0'ı içeren ve $g(V)$ görüntüsü açık olan bir $V \subseteq O$ açık kümesi vardır. $g(V)$ boş değildir ve $g(V) \subseteq f(D) \subseteq G$'dir. Her $z \in g(V)$ bir $s \in V$ için $z = f\ \big(\ A(s)\ \big)$ biçimin-

 CC BY-NC-SA 4.0

dedir ve $A(s) \in D$ olduğundan $\Phi(z) = 0$'dır. Demek ki Φ, G'nin boş olmayan $g(V)$ açık alt kümesinde özdeş olarak sıfırdır. Bu, tanımla çelişir. Öyleyse her $x \in D$ için $\operatorname{rank} J_f(x) < m$*'dir.* ■

Yani (a), bağlılık için bir gerek koşuldur: Jacobi matrisinin rankı tek bir noktada bile m'ye eşitse fonksiyonlar bağımsızdır. (b) ise bir yeter koşuldur ama yereldir: bağıntı her noktanın yakınında vardır, fakat tek bir Φ'nin bütün D'de iş görmesi gerekmez. (b)'deki rankın sabit olması koşulu yalnızca rankın m'den küçük olmasıyla değiştirilemez; ispat, rankın bir komşulukta sabit kalmasına dayanır. (b)'nin genel ispatı bu kitabın kapsamı dışındadır; düzlemdeki hâlini aşağıda ispatlıyoruz.
$m = n = 2$ için 2×2 bir matrisin rankının 2'den küçük olması, determinantının sıfır olması demektir. Bu hâlde teorem Jacobi determinantıyla ifade edilir.

Teorem 20.6 (Düzlemde Fonksiyonel Bağlılık). *$D \subseteq \mathbb{R}^2$ açık bir küme ve $u, v \in C^1(D)$ olsun.*
(a) *u ve v, D'de fonksiyonel bağlıysa her $(x, y) \in D$ için*

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 0$$

olur.
(b) *D'nin her noktasında $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ ve bir $p \in D$ noktasında $\nabla u(p) \neq 0$ ise p'nin bir W komşuluğu ve bir J açık aralığında tanımlı $\psi \in C^1(J)$ fonksiyonu vardır ki her $(x, y) \in W$ için $u(x, y) \in J$ ve*

$$v(x, y) = \psi\,\big(\,u(x, y)\,\big)$$

olur. Özellikle u ve v, W'de fonksiyonel bağlıdır.

İspat.
(a) *Teorem 20.5 (a) gereği 2×2 Jacobi matrisinin rankı her noktada 2'den küçüktür; bu da determinantın sıfır olması demektir.*
(b) *$u_y(p) \neq 0$ varsayalım. $u_y(p) = 0$ ise $u_x(p) \neq 0$'dır ve aşağıdaki akıl yürütme x ile y'nin rolleri değiştirilerek yapılır.*
Yardımcı dönüşüm. *$T(x, y) = \big(\,x, u(x, y)\,\big)$ olsun. $T \in C^1(D)$ ve*

$$J_T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_x & u_y \end{pmatrix}$$

olur; $\det J_T(x, y) = u_y(x, y)$*'dir.* $\det J_T(p) \neq 0$ *olduğundan ters fonksiyon teoremi (Teorem 20.1) gereği p'yi içeren bir $V \subseteq D$ açık kümesi vardır ki T, V üzerinde birebir, $T(V)$ açık ve yerel ters C^1 sınıfındandır; (iii) gereği V'nin her noktasında $u_y \neq 0$'dır. T birinci koordinatı değiştirmediğinden yerel ters $T^{-1}(s, t) = \big(\,s, h(s, t)\,\big)$ biçimindedir ve h, C^1 sınıfındandır. $T(p)$ noktasını içeren ve $T(V)$'nin içinde kalan bir $Q = I \times J$ açık dikdörtgeni seçelim (I ve J açık aralıklar). $W = \{(x, y) \in V : T(x, y) \in Q\}$ kümesi açıktır ve p'yi içerir.*
v'yi yeni değişkenlerle yazmak. $(s, t) \in Q$ için $T\,\big(\,s, h(s, t)\,\big) = (s, t)$, yani $u\,\big(\,s, h(s, t)\,\big) = t$'dir. Bu özdeşliğin s'ye göre türevi zincir kuralıyla $u_x + u_y\, h_s = 0$ verir; $h_s = -u_x/u_y$'dir. $w(s, t) = v\,\big(\,s, h(s, t)\,\big)$ tanımlayalım. Zincir kuralı gereği, u ve v'nin türevleri $\big(\,s, h(s, t)\,\big)$ noktasında hesaplanmak üzere

$$w_s = v_x + v_y\, h_s = \frac{v_x u_y - v_y u_x}{u_y} = -\frac{1}{u_y}\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$$

olur. Her $t \in J$ için $s \mapsto w(s, t)$ fonksiyonunun I aralığında türevi sıfır olduğundan bu fonksiyon sabittir (bkz. Analiz 2). $p = (p_1, p_2)$ için $p_1 \in I$ olduğundan $\psi(t) = w(p_1, t)$ tanımlanabilir ve her $(s, t) \in Q$ için $w(s, t) = \psi(t)$ olur. ψ, C^1 fonksiyonların bileşkesi olduğundan $C^1(J)$ sınıfındandır.
Sonuç. *$(x, y) \in W$ olsun. $T(x, y) = \big(\,x, u(x, y)\,\big) \in Q$ olduğundan $u(x, y) \in J$'dir ve $T^{-1}\,\big(\,T(x, y)\,\big) = (x, y)$ eşitliği $h\,\big(\,x, u(x, y)\,\big) = y$ verir. Dolayısıyla*

$$v(x, y) = v\,\Big(\,x, h\,\big(\,x, u(x, y)\,\big)\,\Big) = w\,\big(\,x, u(x, y)\,\big) = \psi\,\big(\,u(x, y)\,\big)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $\Phi(z_1, z_2) = z_2 - \psi(z_1)$ fonksiyonu $J \times \mathbb{R}$ açık kümesinde C^1 sınıfındandır ve $\partial\Phi/\partial z_2 = 1$ olduğundan hiçbir açık alt kümede özdeş sıfır olamaz; özdeş sıfır olsaydı o kümede kısmi türevleri de sıfır olurdu. $\Phi(u, v) = 0$ olduğundan u ve v, W'de fonksiyonel bağlıdır. ■

Örnek 20.11 (Üstel ve Logaritmik İki Fonksiyon).

$$u(x, y) = e^x \sin y,$$
$$v(x, y) = x + \ln(\sin y)$$

fonksiyonlarının tanımlı oldukları D kümesinde fonksiyonel bağlı olduklarını gösteriniz ve aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi. $\ln(\sin y)$ ifadesi $\sin y > 0$ iken tanımlıdır, yani bir $k \in \mathbb{Z}$ için $2k\pi < y < (2k+1)\pi$ olmalıdır:

$$D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin y > 0 \,\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{R} \times \big(\, 2k\pi, (2k+1)\pi \,\big)\,.$$

D, yatay açık şeritlerin birleşimidir ve açıktır. D'de $u_x = e^x \sin y$, $u_y = e^x \cos y$, $v_x = 1$ ve

$$v_y = \frac{\cos y}{\sin y} = \cot y$$

kısmi türevleri vardır ve süreklidir.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ 1 & \cot y \end{vmatrix} = e^x \sin y \cot y - e^x \cos y = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

olur. Determinant D'de özdeş olarak sıfırdır; Teorem 20.5 (a)'daki gerek koşul sağlanır. Ayrıca $\nabla u = e^x(\sin y, \cos y) \neq 0$ olduğundan Teorem 20.6 (b) gereği her noktanın yakınında v, u'nun bir fonksiyonudur.
Bağıntı. D'de $u > 0$'dır ve

$$\ln u = \ln\big(\, e^x \sin y \,\big) = \ln e^x + \ln(\sin y) = x + \ln(\sin y) = v$$

olur. $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ açık kümesinde $\Phi(z_1, z_2) = \ln z_1 - z_2$ alalım. $\Phi \in C^1(G)$'dir ve $u > 0$ olduğundan (u, v)'nin değerleri G'dedir. $\partial\Phi/\partial z_2 = -1 \neq 0$ olduğundan Φ hiçbir açık alt kümede özdeş sıfır değildir. D'nin her noktasında $\Phi(u, v) = 0$ olduğundan u ve v, D'de fonksiyonel bağlıdır. Aralarındaki bağıntı $\ln u = v$, yani $u = e^v$ bağıntısıdır. ■

Örnek 20.12 (Toplam ve Toplamın Karesi). $u = x + y$ ve $v = x^2 + 2xy + y^2$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}^2$'de fonksiyonel bağlı olduğunu Jacobi determinantıyla sınayınız ve aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm.
İki fonksiyon da polinomdur ve

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x + 2y & 2x + 2y \end{vmatrix} = (2x + 2y) - (2x + 2y) = 0$$

olur. Determinant özdeş olarak sıfırdır ve $\nabla u = (1, 1) \neq 0$'dır; Teorem 20.6 (b) gereği her noktanın yakınında v, u'nun bir fonksiyonudur. Bu örnekte bağıntı her yerde geçerlidir: $v = (x + y)^2 = u^2$. $\Phi(z_1, z_2) = z_2 - z_1^2$ fonksiyonu $C^1(\mathbb{R}^2)$ sınıfındandır, $\partial\Phi/\partial z_2 = 1$ olduğundan hiçbir açık kümede özdeş sıfır değildir ve $\Phi(u, v) = 0$'dır. u ve v, $\mathbb{R}^2$'de fonksiyonel bağlıdır. ■

Karşılaştırma için $u = x + y$ ile $w = x^2 + y^2$ fonksiyonlarına bakalım. Bu kez

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial(u,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y-x)$$

olur. Boş olmayan her açık küme $y \neq x$ olan noktalar içerir ve bu noktalarda determinant sıfırdan farklıdır. Teorem 20.5 (a) gereği u ve w hiçbir açık kümede fonksiyonel bağlı değildir. Gerçekten w, u'dan belirlenemez: $x+y$ sabit tutulurken x^2+y^2 değişebilir.

20.8 Alıştırmalar

Alıştırma 20.1 (Tersi Olan Ama Teoremin Uygulanamadığı Dönüşüm). $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(x^3,y)$ olsun. F'nin birebir ve örten olduğunu, buna karşın $\det J_F$'nin $x=0$ doğrusu üzerinde sıfır olduğunu ve F^{-1}'in $(0,t)$ noktalarında türevlenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Birebir ve örten. $x\mapsto x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artan ve örtendir; tersi $s\mapsto \sqrt[3]{s}$'dir. Dolayısıyla F birebir ve örtendir ve

$$F^{-1}(s,t) = \left(\,\sqrt[3]{s},\, t\,\right)$$

olur.
Jacobi determinantı.

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan $\det J_F(x,y) = 3x^2$'dir; determinant $x=0$ doğrusu üzerinde sıfırdır ve Teorem 20.1 bu noktalarda uygulanamaz.
Tersin türevlenemezliği. F^{-1}'in birinci bileşeninin $(0,t)$'de s'ye göre kısmi türevi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

olduğundan yoktur. Türevlenebilir bir fonksiyonun bütün kısmi türevleri var olduğundan (Teorem 15.3) F^{-1}, $(0,t)$ noktalarında türevlenebilir değildir.
Sonuç: $\det J_F \neq 0$ koşulu tersin var olması için gerekli değildir, ama türevlenebilir bir tersin var olması için gereklidir. Bu, Teorem 20.1 (iii)'ün ispatında gördüğümüz olgudur. ■

Alıştırma 20.2 (Kutupsal Koordinat Dönüşümü). $U=(0,\infty)\times\mathbb{R}$ üzerinde $P(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ olsun. P'nin U'nun her noktasında yerel olarak terslenebilir olduğunu, ama U üzerinde birebir olmadığını gösteriniz. $P(2,\pi/2)=(0,2)$ noktasının yakınındaki yerel tersin $(0,2)$'deki Jacobi matrisini bulunuz.

Çözüm.
Yerel terslenebilirlik. $P\in C^1(U)$ ve

$$J_P(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

olur; Jacobi determinantı $\det J_P = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$'dir (Örnek 15.3). U'da $r>0$ olduğundan Teorem 20.1 her noktada uygulanır. Öte yandan $P(r,\theta+2\pi)=P(r,\theta)$ olduğundan P birebir değildir.
Jacobi matrisi. $(r,\theta)=(2,\pi/2)$'de $\cos\theta=0$ ve $\sin\theta=1$'dir. Öyleyse

$$J_P\!\left(2,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$J_{P^{-1}}(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.
Denetim. $y > 0$ yarı düzleminde θ'yı $(0,\pi)$'de seçen yerel ters

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}$$

ile verilir. Kısmi türevler

$$r_x = \frac{x}{r}, \qquad r_y = \frac{y}{r},$$
$$\theta_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \theta_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

olur ve $(0,2)$'de sırasıyla 0, 1, $-\frac{1}{2}$, 0 değerlerini alır; sonuç aynıdır. ■

Alıştırma 20.3 (Kapalı Fonksiyonun İkinci Türevi). $x^2 + xy + y^3 = 3$ denkleminin $(1,1)$ noktasının yakınında bir $y = \varphi(x)$ kapalı fonksiyonu tanımladığını gösteriniz ve $\varphi'(1)$ ile $\varphi''(1)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Teoremin koşulları. $F(x,y) = x^2 + xy + y^3 - 3$ polinomu $C^1(\mathbb{R}^2)$ sınıfındandır, $F(1,1) = 0$ ve $F_y = x + 3y^2$ olduğundan $F_y(1,1) = 4 \neq 0$'dır. Teorem 20.2 gereği 1'in bir komşuluğunda $\varphi(1) = 1$ olan tek bir C^1 kapalı fonksiyon vardır.
Birinci türev. $F_x = 2x + y$ olduğundan

$$\varphi'(x) = -\frac{2x + \varphi(x)}{x + 3\varphi(x)^2}$$

ve $\varphi'(1) = -\dfrac{3}{4}$ bulunur.
İkinci türev. φ' ifadesinin sağ tarafı, paydası sıfır olmayan türevlenebilir fonksiyonların bölümüdür; φ iki kez türevlenebilirdir. $x^2 + x\varphi + \varphi^3 = 3$ özdeşliğinin türevi

$$2x + \varphi + x\varphi' + 3\varphi^2\varphi' = 0$$

olur. Bir kez daha türev alırsak

$$2 + 2\varphi' + x\varphi'' + 6\varphi(\varphi')^2 + 3\varphi^2\varphi'' = 0$$

bulunur. $x = 1$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = -\frac{3}{4}$ yazalım:

$$2 - \frac{3}{2} + \frac{27}{8} + 4\varphi''(1) = 0.$$

Buradan $4\varphi''(1) = -\dfrac{31}{8}$ çıkar. Öyleyse $\varphi''(1) = -\dfrac{31}{32}$'dir. ■

Alıştırma 20.4 (Üstel Terimli Bir Yüzeyin Teğet Düzlemi). $xz + e^{yz} = 2$ yüzeyinin $(1,0,1)$ noktasının yakınında $z = \varphi(x,y)$ biçiminde yazılabildiğini gösteriniz. $\varphi_x(1,0)$ ve $\varphi_y(1,0)$ değerlerini ve yüzeyin bu noktadaki teğet düzlemini bulunuz.

Çözüm.
$F(x,y,z) = xz + e^{yz} - 2$ fonksiyonu $C^1(\mathbb{R}^3)$ sınıfındandır ve $F(1,0,1) = 1 + e^0 - 2 = 0$'dır. Kısmi türevler $F_x = z$, $F_y = ze^{yz}$ ve $F_z = x + ye^{yz}$ olur; $P_0 = (1,0,1)$'de üçü de 1'dir. $F_z(P_0) = 1 \neq 0$ olduğundan Sonuç 20.1 uygulanır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\varphi_x(1,0) = -\frac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)} = -1,$$
$$\varphi_y(1,0) = -\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)} = -1.$$

Teğet düzlem $(x-1)+(y-0)+(z-1)=0$, yani

$$x+y+z=2$$

düzlemidir. ■

Alıştırma 20.5 (Kare Alma Dönüşümünün Tersi). $x=u^2-v^2$ ve $y=2uv$ denklemleri, $u^2+v^2\neq 0$ olan her çözüm noktasının yakınında u ve v'yi x ile y'nin fonksiyonları olarak belirler. Bunu gösteriniz ve u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevlerini u ve v cinsinden bulunuz.

Çözüm.
Sistem. $F=u^2-v^2-x$ ve $G=2uv-y$ polinomları $C^1(\mathbb{R}^4)$ sınıfındandır. $F_x=-1$, $F_y=0$, $G_x=0$, $G_y=-1$ ve

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}2u & -2v\\ 2v & 2u\end{vmatrix}=4\left(\,u^2+v^2\,\right)\neq 0$$

olduğundan Teorem 20.4 uygulanır.
Türevler. Gerekli determinantlar

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}-1 & -2v\\ 0 & 2u\end{vmatrix}=-2u,$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\begin{vmatrix}0 & -2v\\ -1 & 2u\end{vmatrix}=-2v,$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\begin{vmatrix}2u & -1\\ 2v & 0\end{vmatrix}=2v,$$
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=\begin{vmatrix}2u & 0\\ 2v & -1\end{vmatrix}=-2u$$

olur. Bunları $-1/J$ ile çarparsak

$$u_x=\frac{u}{2(u^2+v^2)},\quad u_y=\frac{v}{2(u^2+v^2)},$$
$$v_x=-\frac{v}{2(u^2+v^2)},\ v_y=\frac{u}{2(u^2+v^2)}$$

bulunur.
Ters fonksiyon teoremiyle karşılaştırma. Aynı sistem, $(u,v)\mapsto(u^2-v^2,2uv)$ dönüşümünün tersini sorar. Bu dönüşümün Jacobi matrisinin tersi

$$\begin{pmatrix}2u & -2v\\ 2v & 2u\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4(u^2+v^2)}\begin{pmatrix}2u & 2v\\ -2v & 2u\end{pmatrix}$$

olur ve satırları yukarıdaki kısmi türevlerdir. ■

Alıştırma 20.6 (Köklerin Katsayılara Bağlılığı). t^3-xt^2+yt-z polinomunun kökleri u, v, w ise

$$u+v+w=x,$$
$$uv+vw+wu=y,$$
$$uvw=z$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Bu sistemin $(u,v,w)=(1,2,3)$, $(x,y,z)=(6,11,6)$ çözüm noktasının yakınında u, v, w'yu (x,y,z)'nin C^1 fonksiyonları olarak belirlediğini gösteriniz ve bu noktada u_x, u_y, u_z değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Sistem. $F=u+v+w-x$, $G=uv+vw+wu-y$ ve $H=uvw-z$ polinomlarıdır. $(1,2,3)$ için $1+2+3=6$, $2+6+3=11$ ve $1\cdot 2\cdot 3=6$ olduğundan nokta sistemi sağlar.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ v+w & u+w & u+v\\ vw & uw & uv\end{vmatrix}$$

olur. $(1,2,3)$'te matris satırları $(1,1,1)$, $(5,4,3)$, $(6,3,2)$'dir ve birinci satıra göre açılım

$$(8-9)-(10-18)+(15-24)=-1+8-9=-2\neq 0$$

verir. Teorem 20.3 ($n=m=3$) uygulanır.
Diferansiyellerle çözüm. Denklemlerin diferansiyelleri

$$\begin{aligned}du+dv+dw&=dx,\\ (v+w)\,du+(u+w)\,dv+(u+v)\,dw&=dy,\\ vw\,du+uw\,dv+uv\,dw&=dz\end{aligned}$$

olur. Bu denklemleri sırasıyla u^2, $-u$ ve 1 ile çarpıp toplayalım. dv'nin katsayısı $u^2-u(u+w)+uw=0$, dw'nin katsayısı $u^2-u(u+v)+uv=0$ olur. du'nun katsayısı ise

$$u^2-u(v+w)+vw=(u-v)(u-w)$$

olur. Böylece

$$(u-v)(u-w)\,du=u^2\,dx-u\,dy+dz$$

bulunur. $(u,v,w)=(1,2,3)$'te $u-v=-1$ ve $u-w=-2$, yani $(u-v)(u-w)=2$ olduğundan

$$du=\frac{1}{2}\,dx-\frac{1}{2}\,dy+\frac{1}{2}\,dz$$

olur. Öyleyse bu noktada $u_x=\dfrac{1}{2}$, $u_y=-\dfrac{1}{2}$, $u_z=\dfrac{1}{2}$'dir.
Genel durum da aynı biçimde okunur. Jacobi determinantı her noktada $(u-v)(u-w)(v-w)$ çarpımına eşittir; kökler birbirinden farklı oldukça sıfırdan farklıdır ve kökler, katsayıların türevlenebilir fonksiyonlarıdır. İki kök birbirine yaklaşırken du formülündeki payda sıfıra gider. ■

Alıştırma 20.7 (Arktanjantlar Toplamı). $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy<1\}$ olsun.

$$\begin{aligned}u&=\frac{x+y}{1-xy},\\ v&=\arctan x+\arctan y\end{aligned}$$

fonksiyonlarının D'de fonksiyonel bağlı olduğunu gösteriniz ve aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm.
Jacobi determinantı. D açıktır ve $u,v\in C^1(D)$'dir. Bölümün türevinden

$$\begin{aligned}u_x&=\frac{(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2},\\ u_y&=\frac{(1-xy)+x(x+y)}{(1-xy)^2}=\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}\end{aligned}$$

ve $v_x=\dfrac{1}{1+x^2}$, $v_y=\dfrac{1}{1+y^2}$ bulunur. Öyleyse

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x = \frac{1}{(1-xy)^2} - \frac{1}{(1-xy)^2} = 0$$

olur. Teorem 20.5 (a)'daki gerek koşul sağlanır. Ayrıca $\nabla v \neq 0$ olduğundan Teorem 20.6 (b), u ile v'nin rolleri değiştirilerek uygulanırsa her noktanın yakınında u, v'nin bir fonksiyonudur. Bağıntıyı açıkça bulalım.

***v*'nin değer aralığı.** D'de $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösterelim. x ve y zıt işaretliyse ya da biri sıfırsa $\arctan x$ ile $\arctan y$ de zıt işaretlidir ya da biri sıfırdır; bu durumda $|\,v\,|$, $|\arctan x\,|$ ve $|\arctan y\,|$ sayılarının büyüğünü aşmaz ve $|\,v\,| < \frac{\pi}{2}$'dir. $x, y > 0$ ise $xy < 1$ koşulu $y < \frac{1}{x}$ verir ve arctan artan olduğundan

$$\arctan y < \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

olur; yani $0 < v < \frac{\pi}{2}$'dir. $x, y < 0$ ise $(-x)(-y) < 1$ olduğundan aynı akıl yürütme $-v$'ye uygulanır.

Bağıntı. Tanjantın toplam formülünden

$$\tan v = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)} = \frac{x+y}{1-xy} = u$$

bulunur. $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ olduğundan $v = \arctan u$'dur. $\Phi(z_1, z_2) = z_2 - \arctan z_1$ fonksiyonu $C^1(\mathbb{R}^2)$ sınıfındandır ve $\partial\Phi/\partial z_2 = 1$ olduğundan hiçbir açık kümede özdeş sıfır değildir. $\Phi(u, v) = 0$ olduğundan u ve v, D'de fonksiyonel bağlıdır ve bağıntı $v = \arctan u$'dur. ■

Alıştırma 20.8 (Üç Simetrik Fonksiyon). $\mathbb{R}^3$'te $f_1 = x + y + z$, $f_2 = x^2 + y^2 + z^2$ ve $f_3 = xy + yz + zx$ fonksiyonlarının Jacobi determinantının özdeş olarak sıfır olduğunu gösteriniz ve fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm.
Jacobi determinantı.

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$$

olur. İkinci satırın yarısını üçüncü satıra eklersek üçüncü satır

$$(x+y+z,\; x+y+z,\; x+y+z)$$

olur; bu, birinci satırın $x+y+z$ katıdır. Satır işlemi determinantı değiştirmez ve iki satırı orantılı olan matrisin determinantı sıfırdır. Dolayısıyla $\det J_f = 0$ ve $\operatorname{rank} J_f < 3$'tür; Teorem 20.5 (a)'daki gerek koşul sağlanır.

Bağıntı.

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

özdeşliği $f_1^2 = f_2 + 2f_3$ demektir. $\Phi(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2 - 2z_3$ fonksiyonu $C^1(\mathbb{R}^3)$ sınıfındandır, $\partial\Phi/\partial z_2 = -1$ olduğundan hiçbir açık kümede özdeş sıfır değildir ve $\Phi(f_1, f_2, f_3) = 0$'dır. Fonksiyonlar $\mathbb{R}^3$'te fonksiyonel bağlıdır. ■

Bu bölümle kitap tamamlanıyor. $\mathbb{R}^n$'nin cebirsel ve topolojik yapısıyla başladık: iç çarpım ve norm, açık, kapalı, kompakt ve bağlantılı kümeler. Diziler ve Cauchy ölçütü üzerinden limit ve sürekliliğe, oradan kısmi türevlere, türevlenebilmeye ve Jacobi matrisine geçtik. Zincir kuralı, ortalama değer teoremi ve Taylor formülüyle türevin taşıdığı yerel bilgiyi kullanmayı öğrendik; yerel, mutlak ve bağlı ekstremumları bu araçlarla bulduk. Ters ve kapalı fonksiyon teoremleri bu yolun doğal sonucudur: türevlenebilir bir fonksiyon bir noktanın yakınında türevi olan lineer dönüşüm gibi davranır ve lineer dönüşümün terslenebilirliği fonksiyonun kendisine aktarılır. Dersin bütün konularına Müfredat ve Giriş sayfasından, öbür Analiz kitaplarına Analiz sayfasından ulaşabilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

21. Uygulamalı Özet

Bu sayfa kitabın yöntemlerini ispatsız, soru çözmeye dönük bir kopya kâğıdı olarak toplar. Uygulamada en sık karşılaşılan sorular şunlardır: parçalı tanımlı bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, sürekliliği, kısmi türevleri ve türevlenebilirliği; kritik noktaların sınıflandırılması; bir nokta civarında Taylor formülü; yönlü türev, gradyan ve teğet düzlem; Lagrange çarpanları. Bunların yanında kümelerin açık, kapalı, kompakt ya da konveks olup olmadığını, bir dizinin limitini ya da bir fonksiyonun tanım kümesini soran kısa sorular da sık gelir. Sayfa her soru tipi için adım adım bir algoritma, gerekli formül tablolarını, sık yapılan hataları ve kısa ama tam çözümlü örnekleri verir. Her kural, ayrıntısının ve gerekçesinin bulunduğu tanıma ya da teoreme bağlanır.

21.1 Soru Tipine Göre Yöntem

Bir soruyu okuyunca ilk iş, sorunun hangi kalıba girdiğini ve hangi aracın en kısa yol olduğunu belirlemektir. Aşağıdaki tablo soru kalıplarını yöntemlerle eşleştirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.1: Soru kalıpları ve yöntemler

Soruda istenen	Kullanılacak yöntem	Bu sayfada
Bir fonksiyon norm ya da iç çarpım mı? Normlar denk mi?	Aksiyomları tek tek denetle; iç çarpımdan gelip gelmediği için paralelkenar özdeşliği	Bölüm 21.2
Kümeyi çiz; içini, kapanışını, sınırını, yığılma noktalarını bul	Eşitsizlikleri kesinleştir ya da gevşet, sonra yuvarlarla doğrula	Bölüm 21.3
Küme açık, kapalı, sınırlı, konveks, kompakt, bağlantılı mı?	Ters görüntü, Heine–Borel, konvekslik	Bölüm 21.4
$\mathbb{R}^n$'de bir dizinin limiti ya da yakınsaklığı	Koordinat yakınsaklık	Bölüm 21.5
Tanım kümesini bul ve çiz	Koşul tablosu, koşulların kesişimi	Bölüm 21.6
Limit var mı? (yok)	İki farklı yol, parabolik yollar, diziler	Bölüm 21.7
Limitin L olduğunu göster	Sıkıştırma, kutupsal koordinat, ε–δ	Bölüm 21.8
Ardışık limitleri bul	İç limit, sonra dış limit	Bölüm 21.9
Sürekli mi? Sürekli genişletilebilir mi?	Limit ile fonksiyon değerini karşılaştır	Bölüm 21.10
Bir noktada kısmi türevleri bul	Tanımdan fark bölümü	Bölüm 21.11
$f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$'ı karşılaştır	Önce $f_x(0,y)$, sonra fark bölümü	Bölüm 21.12
Bir noktada türevlenebilir mi?	Dört adımlık inceleme, kalan oranı	Bölüm 21.13
Toplam diferansiyel, yaklaşık değer	$f(a+h) \approx f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle$	Bölüm 21.14
Jacobi ya da Hessian matrisi, zincir kuralı	Matris çarpımı, ağaç diyagramı	Bölüm 21.15
Yönlü türev, en hızlı artış yönü	$D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$, $\|u\| = 1$	Bölüm 21.16
Teğet düzlem, normal doğru	Gradyan normal vektördür	Bölüm 21.17
Bir nokta civarında Taylor formülü	Binom biçimli diferansiyeller	Bölüm 21.18
Yerel ekstremum ve eyer noktaları	Hessian, $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, Sylvester	Bölüm 21.19
Kapalı, sınırlı bölgede en büyük ve en küçük değer	İç kritik noktalar, sınır, köşeler	Bölüm 21.20
Bir ya da iki kısıt altında ekstremum	Lagrange çarpanları	Bölüm 21.21
Kapalı fonksiyonun türevi, ters fonksiyon, Jacobi determinantı	$-F_x/F_z$ ve Jacobi oranları	Bölüm 21.22

 CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Normlar ve İç Çarpım

Norm sorularının hepsi aynı iskeletle çözülür: tanımdaki koşullar tek tek denetlenir, biri bozuluyorsa somut bir karşı örnek verilir. Norm tanımı (N1)–(N4) koşullarından (Tanım 1.11), iç çarpım tanımı (İ1)–(İ4) koşullarından (Tanım 1.5) oluşur.

Dört adımda norm denetimi

1. **(N1) ve (N2).** Değerin negatif olmadığını ve yalnız $x = 0$'da sıfır olduğunu göster. Çoğu zaman "negatif olmayan sayıların toplamı ya da en büyüğü 0 ise hepsi 0'dır" gözlemi yeter.
2. **(N3).** $N(\lambda x)$ yazılır ve $|\,\lambda\,|$ dışarı alınır.
3. **(N4).** Bileşen bileşen $|\,a+b\,| \le |\,a\,| + |\,b\,|$ yazılıp toplanır ya da en büyüğü alınır; karekök içeren normlarda Minkowski eşitsizliği (Teorem 1.4) kullanılır.
4. **Karar.** Bir koşul bozuluyorsa bunu sayılarla gösteren iki vektör seçilir. İç çarpım için aynı akış (İ1)–(İ4) ile yürür.

Kitapta üç norm kullanılır. Düzlemdeki birim yuvarları, bir sorunun "çiziniz" kısmı için akılda tutulmalıdır (Tanım 2.8).

Tablo 21.2: Üç norm ve birim yuvarları

Norm	Formül	Düzlemde $B(0,1)$
Öklid normu	$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$	açık birim daire
1-normu	$\|x\|_1 = \|\,x_1\,| + \cdots + |\,x_n\,|$	köşeleri $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ olan kare
Maksimum normu	$\|x\|_\infty = \max_k |\,x_k\,|$	kenarları eksenlere paralel $(-1,1)^2$ karesi

$B_N(x_0, r)$ yuvarı, birim yuvarın r katının x_0 kadar ötelenmişidir. Örneğin $B_1\big((2,2), 1\big)$ kümesi $|\,x-2\,| + |\,y-2\,| < 1$ eşitsizliğiyle verilir ve köşeleri $(1,2)$, $(3,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$ olan karedir. Üç normun denkliği şu sabitlerle ifade edilir (Teorem 1.5):

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \le \|x\| &\le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty, \\ \|x\| \le \|x\|_1 &\le \sqrt{n}\,\|x\|, \\ \|x\|_\infty \le \|x\|_1 &\le n\,\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler limit ve yakınsaklık sorularında da işe yarar: bir dizinin ya da fonksiyonun hangi normda yakınsadığı önemli değildir, çünkü hepsi aynı sonucu verir. İç çarpımla ilgili üç formül daha sık kullanılır:

- Cauchy–Schwarz eşitsizliği: $|\,\langle x, y\rangle\,| \le \|x\|\,\|y\|$ (Teorem 1.1).
- Açı: $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ (Tanım 1.8); $\langle x, y\rangle = 0$ ise vektörler diktir (Tanım 1.9).
- Bir iç çarpımdan gelen her norm paralelkenar özdeşliğini sağlar (Önerme 1.5):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\big(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,\big)\,.$$

Özdeşliği bozan iki vektör bulunursa norm hiçbir iç çarpımdan gelmez.

Örnek 21.1 (1-Normu Bir İç Çarpımdan Gelmez). $\mathbb{R}^2$'deki $\|\cdot\|_1$ normunun hiçbir iç çarpımdan elde edilemediğini gösteriniz.

Çözüm.
Norm bir iç çarpımdan geliyorsa paralelkenar özdeşliğini sağlamak zorundadır (Önerme 1.5). Özdeşliği bozan iki vektör bulmak yeter. $x = (1,0)$ ve $y = (0,1)$ alalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\|x+y\|_1 = \|(1,1)\|_1 = 2,$$
$$\|x-y\|_1 = \|(1,-1)\|_1 = 2,$$
$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1.$$

Sol yan $2^2+2^2=8$, sağ yan $2(1^2+1^2)=4$'tür. $8 \neq 4$ olduğundan özdeşlik bozulur ve $\|\cdot\|_1$ hiçbir iç çarpımdan gelmez.
Aynı iki vektör maksimum normunu da eler: $\|x \pm y\|_\infty = 1$ olduğundan sol yan $1+1=2$, sağ yan yine 4'tür. ■

21.3 İç, Kapanış, Sınır ve Yığılma Noktaları

Küme sorularında önce kümeyi çizmek, sonra her noktayı kümenin "içinde mi, kenarında mı, dışında mı" diye sınıflandırmak gerekir. Tanımlar: iç nokta (Tanım 4.4), sınır noktası (Tanım 4.1), kapanış (Tanım 4.2) ve yığılma noktası (Tanım 3.4).

Dört adımda iç, kapanış, sınır ve yığılma noktaları

1. **İç.** Kümeyi tanımlayan eşitsizlikleri kesin yap: $\leq$ yerine $<$ yaz, eşitlik koşulu varsa iç boştur. Bulunan kümenin her noktası için kümenin içinde kalan bir yuvar göster.
2. **Kapanış.** Eşitsizlikleri gevşet: $<$ yerine $\leq$ yaz. Eklenen noktaların her birine kümeden bir dizi yakınsadığını göster.
3. **Sınır.** $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ$ farkını al (Sonuç 4.1).
4. **Yığılma noktaları.** $S' = \overline{S} \setminus \{\text{izole noktalar}\}$; izole nokta, küçük bir yuvarında S'nin başka noktası bulunmayan noktadır. İzole noktası olmayan kümelerde $S' = \overline{S}$'dir.

Son iki adımın dayanağı $\overline{S} = S \cup \partial S$ ve $S^\circ = S \setminus \partial S$ eşitlikleridir (Teorem 4.2, Teorem 4.3). Sık karşılaşılan kümelerin sonuçları kitapta bir tabloda toplanmıştır (Tablo 4.1).

Gevşetme kuralı her kümede işlemez

"Kesinleştir ve gevşet" kuralı, sınırı birkaç eğriden oluşan düzgün kümeler içindir. $\mathbb{Q}^2$ gibi yoğun kümelerde iç boş, kapanış bütün düzlemdir; sonlu bir kümenin içi boş, kapanışı kendisidir; tek bir noktası kopuk duran bir kümede o nokta kapanışa girer ama yığılma noktası değildir. Kural bir tahmin üretir; sonuç her zaman yuvarlarla doğrulanır.

Örnek 21.2 (Kesilmiş Bir Diskin İçi, Kapanışı ve Sınırı).

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 9,\, y \geq 1\}$$

kümesinin içini, kapanışını, sınırını ve yığılma noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Çizim. S, merkezi orijin ve yarıçapı 3 olan açık diskin $y=1$ doğrusunun üstünde kalan parçasıdır. Doğru çemberi $x^2+1=9$, yani $x=\pm 2\sqrt{2}$ noktalarında keser. Kümenin alt kenarı ($y=1$ parçası) kümeye aittir, üst kenarı (çember yayı) ait değildir.
İç. Eşitsizlikleri kesinleştirerek aday buluruz:

$$S^\circ = \{x^2+y^2 < 9,\, y > 1\}.$$

Bu kümenin bir $p=(x_0,y_0)$ noktası için $\varepsilon = \min\{3-\|p\|, y_0-1\}$ alınırsa $B(p,\varepsilon)$ yuvarının her noktası çemberin içinde kalır (üçgen eşitsizliği) ve ikinci koordinatı 1'den büyüktür. $y=1$ üzerindeki noktalar iç nokta değildir: $(x_0,1)$ merkezli her yuvar, $y<1$ olan $\left(x_0, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ noktasını içerir.
Kapanış. Eşitsizlikleri gevşetiriz:

$$\overline{S} = \{x^2+y^2 \leq 9,\, y \geq 1\}.$$

Örneğin $(0,3) \notin S$ noktasına S'deki $\left(0, 3-\frac{1}{k}\right)$ dizisi yakınsar; yay üzerindeki öbür noktalar ve iki köşe noktası da aynı biçimde kapanıştadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sınır. $\partial S = \overline{S} \setminus S^{\circ}$, kapalı bölgenin kenarıdır:

$$\partial S = \{x^2 + y^2 = 9,\, y \geq 1\} \\ \cup \left\{(x, 1) : |\ x\ | \leq 2\sqrt{2}\right\}.$$

Yığılma noktaları. S'nin izole noktası yoktur; her noktasının her yuvarında S'nin başka noktaları vardır. Dolayısıyla $S' = \overline{S}$'dir. ■

21.4 Açık, Kapalı, Kompakt, Konveks, Bağlantılı

Bir kümenin özelliklerini sormak, çoğu zaman tek tek tanıma gitmeden bilinen sonuçları birleştirmek demektir. En hızlı araç ters görüntüdür: sürekli fonksiyonlarla yazılan kesin eşitsizlikler açık, eşitlikler ve geniş eşitsizlikler kapalı kümeler verir.

Tablo 21.3: Küme özelliklerinin hızlı denetimi

Küme ya da durum	Sonuç	Dayanak
$\{x : g(x) < c\}$, g bütün $\mathbb{R}^n$'de sürekli	açık	Sonuç 11.1
$\{x : g(x) \leq c\}$ ya da $\{x : g(x) = c\}$	kapalı	Sonuç 11.2
açıkların sonlu kesişimi, herhangi birleşimi	açık	Teorem 3.3
kapalıların sonlu birleşimi, herhangi kesişimi	kapalı	Teorem 3.4
sonlu küme	kapalı	Sonuç 3.2
$<$ ile $\leq$ birlikte kullanılmış	çoğunlukla ne açık ne kapalı; doğrudan denetlenir	Tablo 3.1
kapalı ve sınırlı	kompakt	Teorem 5.5
sınırsız ya da kapalı değil	kompakt değil	Sonuç 5.1
yuvar ya da konvekslerin kesişimi	konveks	Teorem 2.2, Teorem 2.1
konveks küme	bağlantılı	Teorem 5.7
sürekli f altında kompakt ya da bağlantılı kümenin görüntüsü	kompakt ya da bağlantılı	Teorem 11.2, Teorem 11.5

Olumsuz cevaplar için her özelliğin kendi karşı örnek biçimi vardır:

- **Açık değil:** kümede olup kenarda duran bir p seç; her $\varepsilon > 0$ için $B(p, \varepsilon)$ içinde kümenin dışında bir nokta göster (bir bileşeni $\frac{\varepsilon}{2}$ kaydırmak çoğu zaman yeter).
- **Kapalı değil:** kümeden bir dizi seç, limiti kümenin dışında olsun (Teorem 7.3); ya da kümeye ait olmayan bir yığılma noktası göster (Teorem 3.7).
- **Sınırlı değil:** normu istenildiği kadar büyük noktalar göster; örneğin $\{x > 0\}$ yarı düzleminde $(k, 0)$ noktaları.
- **Konveks değil:** iki noktayı ve aralarındaki doğru parçasının kümenin dışına çıkan bir noktasını göster; çoğu zaman orta nokta yeter.
- **Bağlantılı değil:** kümeyi iki ayrık parçaya ayıran iki açık küme göster (Tanım 5.3). Örneğin $\{xy > 0\}$ kümesini $U = \{x > 0\}$ ve $V = \{x < 0\}$ ayırır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir fonksiyon altında görüntü ve ters görüntü sorulduğunda tanımdan hesaplanır; hangi özelliklerin korunduğu kitapta bir tabloda toplanmıştır (Tablo 11.1). Özellikle açıklık ve kapalılık sürekli görüntü altında korunmaz, ters görüntü altında korunur.

Örnek 21.3 (Kesilmiş Diskin Özellikleri).

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9,\, y \geq 1\}$$

kümesinin açık, kapalı, sınırlı, kompakt, konveks ve bağlantılı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
Kümenin içi, kapanışı ve sınırı Örnek 21.2 içinde bulundu.
Açık değil. $p = (0,1) \in S$'dir. Her $\varepsilon > 0$ için $\left(\, 0, 1 - \frac{\varepsilon}{2} \,\right)$ noktası $B(p,\varepsilon)$ içindedir ama $y < 1$ olduğundan S'de değildir. Eşdeğer olarak $S^\circ \neq S$'dir.
Kapalı değil. $x_k = \left(\, 0, 3 - \frac{1}{k} \,\right)$ dizisinin terimleri S'dedir ($3 - \frac{1}{k} \geq 2 \geq 1$ ve $\left(\, 3 - \frac{1}{k}\right)^2 < 9$), limiti $(0,3)$ ise S'de değildir (Teorem 7.3).
Sınırlı. Her noktası için $\|(x,y)\| < 3$'tür; $S \subseteq B(0,3)$.
Kompakt değil. Sınırlıdır ama kapalı değildir; Heine–Borel teoremi gereği kompakt olamaz (Sonuç 5.1).
Konveks ve bağlantılı. S, $B(0,3)$ yuvarı ile $\{y \geq 1\}$ yarı düzleminin kesişimidir. Yuvar konvekstir (Teorem 2.2). Yarı düzlem de konvekstir: $y_1, y_2 \geq 1$ ve $t \in [0,1]$ ise $ty_1 + (1-t)y_2 \geq t + (1-t) = 1$ olur. Konvekslerin kesişimi konveks olduğundan (Teorem 2.1) S konvekstir ve dolayısıyla bağlantılıdır (Teorem 5.7). ■

Örnek 21.4 (Bir Elipsoit Parçasının Kompaktlığı).

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6,\; x + y + z \geq 1\}$$

kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kapalılık. $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ ve $\ell(x,y,z) = x + y + z$ polinomları $\mathbb{R}^3$'te süreklidir. $(-\infty, 6]$ ve $[1, +\infty)$ kapalı olduğundan ters görüntüleri

$$g^{-1}\left(\, (-\infty, 6] \,\right), \qquad \ell^{-1}\left(\, [1, +\infty) \,\right)$$

kapalıdır (Sonuç 11.2). K bu iki kapalı kümenin kesişimidir, dolayısıyla kapalıdır (Teorem 3.4).
Sınırlılık. K'nin her noktasında $x^2 \leq 6$, $2y^2 \leq 6$ ve $3z^2 \leq 6$'dır; buradan

$$\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 6 + 3 + 2 = 11$$

bulunur. $K \subseteq B[0, \sqrt{11}]$'dir.
Sonuç. K kapalı ve sınırlı olduğundan Heine–Borel teoremi gereği kompakttır (Teorem 5.5). K boş da değildir: $(1,0,0)$ iki koşulu da sağlar. Bunun bir sonucu olarak K üzerinde sürekli her fonksiyon en büyük ve en küçük değerini alır (Teorem 11.3). ■

21.5 $\mathbb{R}^n$'de Diziler

$\mathbb{R}^n$'de dizi sorularının neredeyse hepsi tek bir teoremle tek değişkenli dizilere indirgenir: bir dizi ancak ve ancak her bileşen dizisi yakınsaksa yakınsaktır ve limit, bileşenlerin limitlerinden oluşur (Teorem 6.3).

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.4: Dizi sorularında yöntem

Soru	Yöntem	Dayanak
Limiti bul	Her bileşenin limitini ayrı ayrı bul	Teorem 6.3
Tanımla yakınsaklığı göster	$\|x_k - a\| \le \|x_k - a\|_1$ ile her bileşeni sınırla, N'yi seç	Tanım 6.3
Iraksak olduğunu göster	Bir bileşen ıraksak ya da iki alt dizi farklı limitli ya da dizi sınırsız	Sonuç 6.2, Sonuç 7.1, Sonuç 6.1
Yakınsak bir alt dizi bul	Dizi sınırlıysa vardır; çift ve tek indisleri ayır	Teorem 7.2
Cauchy dizisi mi?	$\mathbb{R}^n$'de Cauchy olmak yakınsak olmakla aynıdır	Teorem 7.6

Bileşenlerin limitlerinde Analiz 1'in bilinen limitleri kullanılır:

Tablo 21.5: Bileşenlerde sık kullanılan limitler

Bileşen	Limit
$\left(1+\frac{a}{k}\right)^k$	e^a
$k\ln\left(1+\frac{a}{k}\right)$	a
$\sqrt{k^2+ak}-k$	$\frac{a}{2}$ (eşlenikle çarp)
$k\sin\frac{1}{k}$	1
$\sqrt[k]{k}$, $\sqrt[k]{c}$ $(c>0)$	1
q^k, $\mid q \mid < 1$	0
$\frac{\sin k}{k}$, $\frac{(-1)^k}{k}$	0 (sıkıştırma)
$(-1)^k$, $\cos(k\pi)$, $\sin\frac{k\pi}{2}$	yok (iki alt dizi)

Örnek 21.5 (Üç Bileşenli Bir Dizinin Limiti).

$$x_k = \left(k\ln\frac{k+2}{k},\ \sqrt{k^2+5k}-k,\ k\sin\frac{1}{k}\right)$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm.
Koordinat yakınsaklık teoremi (Teorem 6.3) gereği her bileşenin limitini ayrı ayrı bulmak yeter.
Birinci bileşen. Logaritmanın özelliğiyle

$$k\ln\frac{k+2}{k} = \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)^k \to \ln e^2 = 2$$

olur; son adımda logaritmanın sürekliliği kullanıldı.
İkinci bileşen. Eşlenikle çarpalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sqrt{k^2+5k}-k = \frac{5k}{\sqrt{k^2+5k}+k} = \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{k}}+1} \to \frac{5}{2}.$$

Üçüncü bileşen. $t=\frac{1}{k}\to 0$ dersek $k\sin\frac{1}{k}=\dfrac{\sin t}{t}\to 1$'dir.
Sonuç. Üç bileşen de yakınsak olduğundan dizi yakınsaktır ve

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \left(2, \frac{5}{2}, 1\right)$$

olur. ■

21.6 Tanım Kümesi

Soru bir fonksiyonun tanım kümesini istiyorsa, formüldeki her parçanın anlamlı olduğu noktalar aranır. Vektör değerli bir fonksiyonun tanım kümesi, bileşenlerin tanım kümelerinin kesişimidir (Tanım 8.3).

Tablo 21.6: Tanım kümesi koşulları

Formülde geçen	Koşul
$\sqrt{g}$ (çift dereceli kök)	$g \geq 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{g}}$	$g > 0$
$\ln g$	$g > 0$
$\dfrac{p}{q}$	$q \neq 0$
$\dfrac{1}{\ln g}$	$g > 0$ ve $g \neq 1$
$\arcsin g$, $\arccos g$	$-1 \leq g \leq 1$
$\tan g$	$g \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$
g^h (üs değişken)	$g > 0$

Üç adımda tanım kümesi

1. **Koşulları yaz.** Tablodan her parça için koşulu yaz; iç içe fonksiyonlarda içten dışa ilerle.
2. **Sınır eğrilerini çiz.** Her koşulun eşitlik hâlini ($g=0$, $g=1$ gibi) çiz. Koşulu sağlamayan eğriler kesikli, sağlayanlar düz çizilir.
3. **Bölgeyi seç.** Her eğrinin hangi yanının koşulu sağladığını bir deneme noktasıyla bul; bütün koşulların ortak bölgesini tara.

Örnek 21.6 (Kök ve Logaritma Birlikte).

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(y-x)}$$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve düzlemde tarif ediniz.

Çözüm.

Koşullar. Pay için $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, logaritma için $y - x > 0$, payda için $\ln(y-x) \neq 0$, yani $y - x \neq 1$ gerekir:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\, y > x,\, y \neq x + 1\}.$$

Tarif. Birinci koşul, yarıçapı 2 olan kapalı diski verir; çember kümeye dahildir. İkinci koşul $y = x$ doğrusunun üst yanıdır; doğrunun kendisi dahil değildir. Üçüncü koşul $y = x + 1$ doğrusunu çıkarır. Bu doğrunun orijine uzaklığı $\frac{1}{\sqrt{2}} < 2$ olduğundan doğru diski keser; çıkarılan şey diskin içinden geçen bir kiriştir.
Sonuç olarak D, kapalı diskin $y = x$ köşegeninin üstünde kalan yarısıdır; köşegen ve $y = x + 1$ kirişi çıkarılmıştır. Çemberin köşegen üstündeki yayı ise, uçları ve $y = x + 1$ doğrusuyla kesiştiği iki nokta dışında, kümededir. D sınırlıdır; hem kümeye ait sınır noktaları (yay) hem de ait olmayanları (köşegen) olduğundan ne açık ne kapalıdır. ■

21.7 Limitin Olmadığını Göstermek

Limitin yokluğunu göstermek için tek bir şey yeter: noktaya giden ve farklı limitler veren iki yol (Sonuç 9.1) ya da iki dizi (Sonuç 8.1). Bütün iş, doğru yolu hızlıca bulmaktır.

Dört adımda limitin olmadığını gösterme

1. **Noktayı orijine taşı.** $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ ise $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ yaz; ifadeyi u ve v cinsinden sadeleştir.
2. **Eksenler ve doğrular.** $u = 0$, $v = 0$ ve $v = mu$ boyunca limiti hesapla. Sonuç m'ye bağlıysa bitti.
3. **Eğriler.** Doğrular hep aynı değeri veriyorsa paydanın terimlerini aynı mertebeye getiren eğriyi dene: payda $u^a + v^b$ ise $v = m\,u^{a/b}$ (ya da $u = m\,v^{b/a}$).
4. **Başka araçlar.** Diziler (Sonuç 8.1) ya da var olan ama farklı ardışık limitler (Sonuç 9.2) de limitin yokluğunu gösterir.

Tablo 21.7: Paydaya göre yol seçimi

Payda	Denenecek yol	Tipik pay
$x^2 + y^2$	$y = mx$	$xy,\, x^2 - y^2$
$x^4 + y^2$	$y = mx^2$	$x^2 y$
$x^2 + y^4$	$x = my^2$	xy^2
$x^6 + y^2$	$y = mx^3$	$x^3 y$
bir doğru boyunca sıfırlanan, örneğin $x + y$	doğruya yaklaşan eğri: $y = -x + x^2$	xy

Tablonun son satırına bir örnek: $\dfrac{xy}{x+y}$ için $y = x$ boyunca değer $\dfrac{x}{2} \to 0$, $y = -x + x^2$ boyunca ise $\dfrac{x(x^2 - x)}{x^2} = x - 1 \to -1$'dir; limit yoktur.

Aynı değeri veren yollar limitin varlığını göstermez

Üç, beş ya da sonsuz çoklukta doğru boyunca aynı değeri bulmak yalnızca bir **adaydır**; varlık ayrıca sıkıştırmayla ya da tanımla gösterilmelidir (Bölüm 21.8). Ayrıca seçilen yol gerçekten noktaya gitmelidir: $(1, 0)$ noktasındaki limit için $y = 1$ doğrusu boyunca hesap yapmak anlamsızdır, çünkü bu doğru $(1, 0)$'dan geçmez.

Örnek 21.7 (Orijin Dışında Bir Noktada Limit).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{xy-2x}{x^2+y^2-4y+4}$$

limitinin var olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
Kaydırma. Pay $x(y-2)$, payda $x^2+(y-2)^2$ biçiminde yazılır. $v=y-2$ dersek $(x,y)\to(0,2)$ olması $(x,v)\to(0,0)$ olması demektir ve ifade

$$f=\frac{xv}{x^2+v^2}$$

olur.
Eksenler. $x=0$ boyunca ($v\neq 0$) değer 0'dır. $v=0$, yani $y=2$ doğrusu boyunca ($x\neq 0$) değer yine 0'dır. İki eksen aynı sonucu verdi; bu bir şey kanıtlamaz.
Doğrular. $v=mx$, yani $y=2+mx$ doğrusu $(0,2)$'den geçer ve bu doğru boyunca

$$f=\frac{mx^2}{(1+m^2)\,x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

sabittir. $m=0$ için limit 0, $m=1$ için $\frac{1}{2}$'dir.
Sonuç. İki farklı yol farklı limit verdiğinden limit yoktur (Sonuç 9.1). Yalnız eksenlere ve $y=2$ doğrusuna bakıp "limit 0" demek bu yüzden hatalı olurdu. ■

Örnek 21.8 (Doğruların Yetmediği Bir Limit).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Doğrular. $x=0$ boyunca değer 0'dır. $y=mx$ boyunca ($x\neq 0$)

$$f(x,mx)=\frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4}=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\to 0$$

bulunur. Bütün doğrular 0 veriyor; limit varsa 0 olmak zorundadır.
Parabol. Paydada x^2 ile y^4 terimleri $x=my^2$ iken aynı mertebededir. Bu parabol boyunca ($y\neq 0$)

$$f(my^2,y)=\frac{my^4}{m^2y^4+y^4}=\frac{m}{1+m^2}$$

olur; $m=1$ için değer $\frac{1}{2}$'dir.
Sonuç. x ekseni (ya da herhangi bir doğru) boyunca limit 0, $x=y^2$ parabolü boyunca $\frac{1}{2}$'dir. Limit yoktur (Sonuç 9.1). ■

21.8 Limitin Var Olduğunu Göstermek

Limitin varlığını göstermek için, yollarla bulunan L adayının $|\,f-L\,|$ farkını yalnız uzaklığa bağlı ve sıfıra giden bir ifadeyle sınırlamak gerekir (Teorem 8.5, Sonuç 8.2). Kitapta bu iş için üç adımlı bir reçete vardır (Çok değişkenli fonksiyonlar ve limit); burada en çok kullanılan eşitsizlikleri topluyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.8: Sıkıştırmada sık kullanılan eşitsizlikler

Eşitsizlik	Nerede işe yarar
$\mid x \mid \le \|(x,y)\|, \mid y \mid \le \|(x,y)\|$	paydada x^2+y^2 ya da norm varsa
$2 \mid xy \mid \le x^2+y^2$	payda değil, payın içinde xy gibi karışık terim varsa
$\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$	payı paydanın bir terimiyle ortaklaştırınca
$\mid \sin t \mid \le \mid t \mid, \mid \sin t \mid \le 1$	sinüslü paylarda
$1-\cos t \le \dfrac{t^2}{2}$	kosinüslü paylarda
$e^t \ge 1$ $(t \ge 0)$	paydada e^{y^2} gibi bir çarpan varsa, atılır
$x^4+y^4 \ge \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2}$	paydada dördüncü kuvvetler varsa

İki değişkende kutupsal koordinatlar en düzenli yoldur: $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$ yazılır ve $\mid f - L \mid \le g(r)$ biçiminde, **θ'ya bağlı olmayan** ve $r \to 0^+$ iken 0'a giden bir g aranır (Önerme 9.1). Pay ve payda x, y'nin homojen polinomları, payda yalnız orijinde sıfırsa pratik bir kural da vardır: payın derecesi paydanınkinden büyükse limit 0'dır; küçük ya da eşitse limit çoğunlukla yoktur ve yollar denenir. Değişkenler yalnız $t = x^2+y^2$ birleşiminde geçiyorsa limit tek değişkenli bir limite dönüşür (Önerme 8.3): örneğin $\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \to 1$'dir, çünkü $t \to 0^+$ iken $\dfrac{\sin t}{t} \to 1$'dir.

Örnek 21.9 (Sıkıştırma ve Kutupsal Sınır).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Aday.** Payın derecesi (3 ve 4) paydanınkinden (2) büyüktür; aday $L = 0$'dır.
> **Kutupsal sınır.** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ yazalım. $x^2+y^2 = r^2$ olduğundan
>
> $$f = \frac{r^3\cos^3\theta + 2r^4\sin^4\theta}{r^2} = r\cos^3\theta + 2r^2\sin^4\theta$$
>
> olur. $\mid\cos\theta\mid \le 1$ ve $\mid\sin\theta\mid \le 1$ olduğundan
>
> $$\mid f - 0 \mid \le r + 2r^2 = g(r)$$
>
> bulunur. g, θ'ya bağlı değildir ve $r \to 0^+$ iken 0'a gider; Önerme 9.1 gereği limit 0'dır.
> **ε–δ diliyle.** $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$ seçilsin. $0 < r < \delta$ ise $r < 1$ olduğundan $2r^2 < 2r$ ve
>
> $$\mid f(x,y) \mid \le r + 2r^2 < 3r < 3\delta \le \varepsilon$$
>
> olur. Burada $r = \|(x,y)\|$'dir. ■

21.9 Ardışık Limitler

Ardışık limitler değişkenleri birer birer limite götürür (Tanım 9.3): önce iç limit, sonra dış limit alınır ve her adım tek değişkenli bir limittir, L'Hôpital kuralı dahil bütün Analiz 1 araçları kullanılabilir. İki katlı limitle ilişkisi şöyledir:

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.9: Ardışık limitler ve iki katlı limit

Durum	Sonuç	Dayanak
İç limitler var, iki ardışık limit var ve farklı	İki katlı limit yok	Sonuç 9.2
İç limitler var, ardışık limitlerden biri yok	İki katlı limit yok	Sonuç 9.2
Ardışık limitler var ve eşit	Hiçbir şey söylemez; yollar ve sıkıştırma denenir	Önerme 9.2
İki katlı limit L ve iç limitler var	İki ardışık limit de L	Önerme 9.2
İç limit yok	Ardışık limit tanımsız; iki katlı limit yine de olabilir	Örnek 9.12

Örneğin $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ için $x\neq 0$ sabitken $y\to 0$ iç limiti 1, $y\neq 0$ sabitken $x\to 0$ iç limiti $\dfrac{-y}{y}=-1$'dir. Ardışık limitler 1 ve -1 çıkar, farklıdır. Bu fonksiyon $y=-x$ doğrusu üzerinde tanımsız olduğundan kararı eksenlere dayandırmak daha temizdir: x ekseni boyunca ($y=0$, $x\neq 0$) değer 1, y ekseni boyunca -1'dir; Sonuç 9.1 gereği $(0,0)$'da limit yoktur.

21.10 Süreklilik ve Sürekli Genişleme

Süreklilik sorusu, limit sorusunun bir adım ötesidir: limit bulunur ve fonksiyonun o noktadaki değeriyle karşılaştırılır (Önerme 10.3). Polinomlar, rasyonel fonksiyonlar ve bunların bileşkeleri tanımlı oldukları her noktada süreklidir (Teorem 10.3, Teorem 10.4); bu yüzden parçalı fonksiyonda yalnız özel nokta incelenir.

Tablo 21.10: Özel noktada süreklilik kararı

Özel noktada durum	Sonuç	Dayanak
Limit var ve $f(x_0)$'a eşit	Sürekli	Önerme 10.3
Limit var, $f(x_0)$ farklı ya da tanımsız	Kaldırılabilir süreksizlik: $f(x_0)=L$ alınırsa sürekli	Tanım 10.3, Önerme 10.4
Limit yok	Esas süreksizlik; hiçbir değer düzeltmez	Tanım 10.4, Önerme 10.4

"Hangi a değeri için sürekli?" ya da "sürekli genişletilebilir mi?" diye soran sorularda cevap, varsa limitin kendisidir. Genişletme bir doğru boyunca da istenebilir: $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ fonksiyonu $x\neq y$ iken $x+y$'ye eşittir; $y=x$ doğrusu üzerinde $f(x,x)=2x$ tanımlanırsa her yerde sürekli $x+y$ fonksiyonu elde edilir. Süreksizliği dizilerle göstermek için $f(x_k)\not\to f(x_0)$ olan bir $x_k\to x_0$ dizisi yeter (Sonuç 10.1).

Örnek 21.10 (Tanımla Süreklilik).

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{(1+y^2)(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2mm] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu ε–δ tanımıyla gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Farkı sınırla.** $(x,y)\neq(0,0)$ için $1+y^2\geq 1$ ve $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
|\, f(x,y) - f(0,0) \,| &\le |\, x \,|\, |\, y \,| \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \\
&\le |\, xy \,| \le \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{\|(x,y)\|^2}{2}
\end{aligned}
$$

olur; son adımda $2\,|\,xy\,| \le x^2+y^2$ kullanıldı.
δ'yı seç. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ olsun. $\|(x,y)\| < \delta$ ise

$$
|\, f(x,y) - f(0,0) \,| \le \frac{\|(x,y)\|^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon
$$

bulunur; $(x,y) = (0,0)$ için fark zaten 0'dır. Tanım gereği (Tanım 10.1) f, $(0,0)$'da süreklidir. ■

Örnek 21.11 (Sürekli Genişleme Değeri).

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

fonksiyonunun $(0,0)$'da sürekli olması için a ne olmalıdır?

Çözüm.
Değişkenler yalnız $t = x^2+y^2$ birleşiminde geçiyor. $(x,y) \to (0,0)$ iken $t \to 0^+$'dır. Tek değişkenli limit iki kez L'Hôpital kuralıyla

$$
\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{2} = \frac{1}{2}
$$

bulunur. $\varphi(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ $(t \neq 0)$, $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$ fonksiyonu 0'da süreklidir ve $f = \varphi(x^2+y^2)$'dir; Önerme 8.3 gereği

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}
$$

olur. Limit var olduğundan $(0,0)$ kaldırılabilir süreksizliktir ve f ancak $a = \dfrac{1}{2}$ için süreklidir (Önerme 10.4). ■

21.11 Kısmi Türev: Tanımdan

Bir noktadaki kısmi türev, tek değişkenli bir fark bölümünün limitidir (Tanım 12.1):

$$
\begin{aligned}
f_x(a,b) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}, \\
f_y(a,b) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.
\end{aligned}
$$

Olağan noktalarda kurallarla türev alınır (Teorem 12.1). Tanıma gitmek şu durumlarda zorunludur: parçalı fonksiyonun özel noktası, mutlak değer ya da kök içeren ifadenin sıfırlandığı nokta ve türev formülünün tanımsız kaldığı nokta.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda tanımdan kısmi türev

1. **Doğru dalı seç.** $f(a+h,b)$ yazılırken $(a+h,b)$ noktasının hangi parçaya düştüğüne bak; $h\neq 0$ küçükken çoğunlukla formülün geçerli olduğu parçadadır.
2. **Fark bölümünü sadeleştir.** $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ ifadesini h'nin tek değişkenli fonksiyonu olarak yaz.
3. **Limit.** Limit sonluysa kısmi türev odur. Limit $\pm\infty$ ya da sağ ve sol limitler farklıysa kısmi türev yoktur; bu durumda f o noktada türevlenemez (Teorem 14.2).

Tablo 21.11: Orijinde tanımdan kısmi türevler

$f(x,y)$ (orijinde 0)	$f_x(0,0)$	$f_y(0,0)$	Not
$\sqrt{\lvert xy\rvert}$	0	0	eksenlerde $f=0$
$\sqrt[3]{x^3+y^3}$	1	1	formül orijinde tanımsız, tanım çalışır
$\lvert x\rvert + y$	yok	1	sağ ve sol limit ± 1
$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$	0	0	süreksiz olduğu hâlde kısmi türevler var

Formülü türevleyip noktada yerine koymak

Parçalı fonksiyonun özel noktasında formülü türevleyip noktayı yerine koymak yanlıştır: $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ için türev formülü $\dfrac{x^2}{(x^3+y^3)^{2/3}}$ orijinde tanımsızdır, oysa tanımdan $f_x(0,0)=\lim \dfrac{h}{h}=1$ bulunur. Ters yönde de tehlike vardır: türevi alınan formül özel noktada hiç geçerli olmayabilir.

Örnek 21.12 (Bir Doğru Boyunca Tanımlı Parçalı Fonksiyon).

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y-2}, & x+y\neq 2,\\ 1, & x+y=2\end{cases}$$

fonksiyonu için $f_x(1,1)$ ve $f_y(1,1)$ kısmi türevlerinin var olup olmadığını araştırınız; f bu noktada türevlenebilir midir?

Çözüm.
Doğru dal. $(1,1)$ noktası $x+y=2$ doğrusu üzerindedir, $f(1,1)=1$'dir. $h\neq 0$ için $(1+h,1)$ noktasında $x+y-2=h\neq 0$ olduğundan formül geçerlidir:

$$f(1+h,1)=\frac{(1+h)^2+1}{h}=\frac{2+2h+h^2}{h}.$$

Fark bölümü.

$$\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\frac{\frac{2+2h+h^2}{h}-1}{h}=\frac{h^2+h+2}{h^2}.$$

Limit. $h\to 0$ iken pay 2'ye, payda 0^+'ya gider; fark bölümü $+\infty$'a ıraksar. Demek ki $f_x(1,1)$ yoktur. f, x ile y'ye göre simetrik olduğundan aynı hesap $f_y(1,1)$'in de olmadığını gösterir.
Türevlenebilirlik. Kısmi türevleri olmayan bir fonksiyon türevlenemez (Teorem 14.2); f, $(1,1)$'de türevlenebilir değildir. Aslında sürekli bile değildir: $(1+h,1)$ boyunca $f\approx\frac{2}{h}$ sınırsız büyür (Sonuç 14.1). ■

 CC BY-NC-SA 4.0

21.12 Karışık Türevler ve Clairaut Teoremi

Kitapta $f_{xy} = (f_x)_y$ yazılır: önce x'e, sonra y'ye göre türev alınır (Tanım 13.1). Orijinde karışık türevler tanımdan şöyle hesaplanır:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k},$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}.$$

Üç adımda tanımla karışık türev

1. **Eksen üzerindeki birinci türev.** $y \neq 0$ için $f_x(0,y)$'yi bul. $(0,y)$ olağan bir noktaysa formül türevlenip $x = 0$ konabilir; ya da doğrudan $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}$ hesaplanır.
2. **Orijindeki birinci türev.** $f_x(0,0)$ tanımdan bulunur.
3. **Fark bölümü.** $\dfrac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$ limiti $f_{xy}(0,0)$'dır. $f_{yx}(0,0)$ için rolleri değiştir: önce $f_y(x,0)$.

Clairaut teoremi (Teorem 13.1): f_{xy} ile f_{yx} noktanın bir komşuluğunda var ve noktada sürekliyse ikisi eşittir; özel olarak $f \in C^2$ ise her yerde eşittir. Karışık türevler farklı çıkıyorsa f o noktada C^2 olamaz. n değişkende ve yüksek mertebede de C^k fonksiyonlarda türevlerin sırası önemsizdir (Sonuç 13.2). İkinci türevlerle ilgili bir başka kalıp Laplace denklemidir: $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (üç değişkende $+f_{zz}$) sağlanıyorsa f harmoniktir (Tanım 13.4, Tanım 13.5).

Örnek 21.13 (Eşit Olmayan Karışık Türevler).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-2y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

için $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$'ı bulunuz.

Çözüm.
$f_x(0,y)$. $f(0,y) = 0$ olduğundan $y \neq 0$ için

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y(h^2-2y^2)}{h^2+y^2} = \frac{y\cdot(-2y^2)}{y^2} = -2y$$

olur. Orijinde $f(h,0) = 0$ olduğundan $f_x(0,0) = 0$'dır; formül $y = 0$'da da geçerlidir.
$f_{xy}(0,0)$.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-2k}{k} = -2.$$

$f_y(x,0)$. $f(x,0) = 0$ olduğundan $x \neq 0$ için

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x(x^2-2k^2)}{x^2+k^2} = x$$

ve $f_y(0,0) = 0$'dır.
$f_{yx}(0,0)$.

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Yorum. $f_{xy}(0,0) = -2 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$'dır. Orijin dışında f rasyonel olduğundan karışık türevler orada eşittir; demek ki ikinci türevler orijinde sürekli olamaz ve Clairaut teoreminin (Teorem 13.1) varsayımı bozulur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

21.13 Türevlenebilirlik İncelemesi

"Bir noktada türevlenebilir mi?" sorusu kitabın en çok tekrar eden sorusudur. Tanım (Tanım 14.1) tek bir aday lineer dönüşüm bırakır: $h \mapsto \langle \nabla f(a), h \rangle$ (Sonuç 14.2). Kitaptaki dört adımlı reçete (Türevlenebilme ve toplam diferansiyel) şöyle özetlenir.

Dört adımda türevlenebilirlik

1. **Süreklilik.** f, a'da sürekli değilse türevlenemez (Sonuç 14.1); dur.
2. **Kısmi türevler.** Tanımdan hesapla (Bölüm 21.11). Biri yoksa türevlenemez. Kısmi türevler a'nın bir komşuluğunda var ve a'da sürekliyse türevlenebilir (Teorem 14.3); dur.
3. **Kalan oranı.** İki değişkende, $a = (0,0)$ için
$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)\,h - f_y(0,0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
yazılır.
4. **Limit.** $R \to 0$ ise (sıkıştırma ya da kutupsal sınır) türevlenebilir. Aksi hâlde, yani bir yol boyunca $R \not\to 0$ ise (limit yoksa ya da sıfırdan farklıysa), türevlenemez.

Türevin bir başka habercisi yönlü türevlerdir: f türevlenebilirse her yönde $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$'dir (Teorem 16.1). Yönlü türevler u'nun lineer bir fonksiyonu değilse f türevlenemez. Kavramlar arasındaki bütün oklar ve karşı örnekler kitapta tablolaştırılmıştır (Tablo 16.1, Tablo 14.1). En çok kullanılan zincir şudur:

$$\begin{aligned} C^1 &\Rightarrow \text{türevlenebilir} \\ &\Rightarrow \text{sürekli ve her yönde } \ D_u f \ \text{ var}\,. \end{aligned}$$

Okların hiçbiri ters çevrilemez. Orijinde 0 değerini alan standart örnekler:

Tablo 21.12: Orijinde türevlenebilirlik için standart örnekler

$f(x,y)$	Sürekli mi?	$\nabla f(0,0)$	Türevlenebilir mi?
$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$	hayır	$(0,0)$	hayır
$\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	evet	$(0,0)$	hayır
$\sqrt{\lvert xy \rvert}$	evet	$(0,0)$	hayır
$\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$	evet	$(0,0)$	evet
$(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$	evet	$(0,0)$	evet, ama C^1 değil

Vektör değerli bir fonksiyonun türevlenebilirliği (Jacobi matrisiyle "matris temsili") bileşen bileşen incelenir (Teorem 15.2); bileşenleri polinom olan bir fonksiyonun kısmi türevleri sürekli olduğundan her yerde türevlenebilirdir (Teorem 15.4).

Örnek 21.14 (Sürekli, Kısmi Türevli, Türevlenemez).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında türevlenebilir olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Süreklilik. $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$ olduğundan $|\,f(x,y)\,| \le |\,x\,| \le \|(x,y)\|$'dir; f orijinde süreklidir. Bu adım bir karar vermez.
Kısmi türevler. Eksenler üzerinde $f = 0$'dır:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0, \qquad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)}{k} = 0.$$

Kalan oranı. Tek aday sıfır dönüşümdür ve

$$R(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

olur.
Limit. $k = 0$ boyunca $R = 0$'dır. $k = h$, $h > 0$ boyunca

$$R(h,h) = \frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{h^3}{2\sqrt{2}\,h^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

olur. İki yol farklı değer verdiğinden R'nin limiti yoktur; f, $(0,0)$'da türevlenemez.
Yönlü türevlerle sağlama. $u = (u_1,u_2)$ birim vektörse $\dfrac{f(tu)}{t} = \dfrac{u_1u_2^2}{u_1^2+u_2^2} = u_1u_2^2$ olduğundan her yönde $D_uf(0,0) = u_1u_2^2$ vardır. Bu değer $\langle \nabla f(0,0), u\rangle = 0$'a eşit değildir (örneğin $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ için $\frac{1}{2\sqrt{2}}$); Teorem 16.1 gereği f türevlenemez. ■

21.14 Toplam Diferansiyel ve Yaklaşık Hesap

Türevlenebilir bir fonksiyonun artışının lineer kısmı toplam diferansiyeldir (Tanım 14.2):

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy \quad (\text{ üç değişkende } + f_z\,dz\ ).$$

Yaklaşık hesapta $dx = h_1$, $dy = h_2$ artımları alınır ve doğrusallaştırma (Tanım 14.3) kullanılır:

$$f(a+h) \approx f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle.$$

Üç adımda yaklaşık hesap

1. **Fonksiyonu ve noktayı seç.** Hesaplanacak sayıyı bir $f(a+h)$ değeri olarak yaz; a, f'nin ve türevlerinin kolay hesaplandığı yakın bir nokta olsun.
2. **Gradyanı hesapla.** $\nabla f(a)$ bulunur.
3. **Topla.** $f(a) + f_x(a)\,h_1 + f_y(a)\,h_2$ hesaplanır. Bağıl hata soruluyorsa $\dfrac{df}{f}$ oranı kullanılır.

Örnek 21.15 (Bir Kökün Yaklaşık Değeri). $\sqrt{3{,}02^2 + 3{,}97^2}$ sayısının yaklaşık değerini toplam diferansiyelle bulunuz.

Çözüm.
Seçim. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $a = (3,4)$ ve $h = (0{,}02, -0{,}03)$ alalım; $f(a) = 5$'tir.
Gradyan. $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olduğundan $\nabla f(3,4) = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$'tir.
Toplam.

$$\begin{aligned} f(a+h) &\approx 5 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}02 + \frac{4}{5}\cdot(-0{,}03) \\ &= 5 + 0{,}012 - 0{,}024 = 4{,}988. \end{aligned}$$

Gerçek değer $4{,}98812\ldots$'dir; yaklaşımın hatası yaklaşık $0{,}0001$'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

21.15 Jacobi Matrisi, Hessian ve Zincir Kuralı

Türev matrislerinin hepsi aynı kurala uyar: satırlar fonksiyonun bileşenlerine, sütunlar değişkenlere karşılık gelir (Tanım 15.2, Tanım 17.1, Tablo 17.1).

Tablo 21.13: Türev matrisleri

Nesne	Boyut	Girdiler
∇f, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	$1\times n$	$f_{x_1},\dots,f_{x_n}$
J_F, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$	$m\times n$	i. satır ∇F_i
H_f, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	$n\times n$	(i,j) girdisi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}=f_{x_jx_i}$; $f\in C^2$ ise simetrik ve $H_f=J_{\nabla f}$
$\det J_F$ $(m=n)$	sayı	$\dfrac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$

Zincir kuralı matris diliyle tek satırdır (Teorem 15.6):

$$J_{f\circ g}(a)=J_f\big(\,g(a)\,\big)\,J_g(a).$$

Elle hesapta ağaç diyagramı daha hızlıdır: tepeden bağımsız değişkene inen her yol boyunca kısmi türevler çarpılır, yollar toplanır (Sonuç 15.4). Sık kullanılan özel hâller:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=f_x\,x'(t)+f_y\,y'(t),\\ z_r&=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta,\\ z_\theta&=-f_x\,r\sin\theta+f_y\,r\cos\theta.\end{aligned}$$

Birinci satır $z=f\big(\,x(t),y(t)\,\big)$ için, son iki satır $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ kutupsal dönüşümü için geçerlidir.

> ⚠ **Dış fonksiyonun türevi ara noktada hesaplanır**
>
> J_f matrisi a'da değil $g(a)$'da hesaplanır. Ağaç diyagramında da önce ara değişkenlerin noktadaki değerleri bulunur, sonra dış fonksiyonun türevleri bu değerlerde yazılır.

Örnek 21.16 (Ağaç Diyagramıyla Zincir Kuralı). $z=u^2v$, $u=xe^y$ ve $v=x+y$ olsun. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevlerini $(x,y)=(1,0)$ noktasında bulunuz.

Çözüm.
Ara değerler. $(1,0)$'da $u=1\cdot e^0=1$ ve $v=1+0=1$'dir.
Dallar. $z_u=2uv=2$, $z_v=u^2=1$; ayrıca $u_x=e^y=1$, $u_y=xe^y=1$, $v_x=v_y=1$'dir.
Yollar. z'den x'e iki yol iner (u ve v üzerinden):

$$\begin{aligned}z_x&=z_u\,u_x+z_v\,v_x=2\cdot1+1\cdot1=3,\\ z_y&=z_u\,u_y+z_v\,v_y=2\cdot1+1\cdot1=3.\end{aligned}$$

Matris biçimiyle sağlama.

$$J_z\big(\,u,v\,\big)\,J_{(u,v)}(1,0)=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\end{pmatrix}.$$

Doğrudan yerine koyarak da $z=x^2e^{2y}(x+y)$ ve $z_x(1,0)=2+1=3$ bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

21.16 Yönlü Türev, Gradyan ve En Hızlı Artış

Yönlü türev, f'nin bir birim vektör doğrultusundaki değişim hızıdır (Tanım 16.1). f türevlenebilirse gradyanla hesaplanır (Teorem 16.1); en hızlı artış ve azalış yönleri de gradyandan okunur (Teorem 16.2).

Tablo 21.14: Yönlü türev formülleri

İstenen	Formül
v yönünde yönlü türev	$D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$, $u = \dfrac{v}{\|v\|}$
P'den Q'ya doğru yönlü türev	$v = Q - P$ alınır
En hızlı artış yönü ve hızı ($\nabla f(a) \neq 0$)	$\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, hız $\|\nabla f(a)\|$
En hızlı azalış yönü ve hızı ($\nabla f(a) \neq 0$)	$-\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, hız $-\|\nabla f(a)\|$
Değişimin sıfır olduğu yönler	$\langle \nabla f(a), u \rangle = 0$: seviye eğrisine teğet
f türevlenebilir değil	$D_u f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}$

> ⚠ Yön vektörünü birim yapmayı unutmak
>
> $\langle \nabla f(a), v \rangle$ sayısı ancak $\|v\| = 1$ ise yönlü türevdir. $v = (-2, 1, 2)$ gibi bir vektör verildiyse önce $\|v\| = 3$'e bölünür.

Örnek 21.17 (Üç Değişkenli Fonksiyonda Yönlü Türev). $f(x, y, z) = x^2 y + y z^3$ fonksiyonunun $P = (1, -1, 2)$ noktasında $v = (2, -1, 2)$ yönündeki yönlü türevini bulunuz. f bu noktada hangi yönde en hızlı artar ve bu hız nedir?

Çözüm.
Gradyan. f bir polinom olduğundan her yerde türevlenebilirdir.

$$\nabla f = \left(\, 2xy,\, x^2 + z^3,\, 3yz^2 \, \right)$$

ve P'de

$$\nabla f(P) = \big(\, -2,\, 1 + 8,\, -12 \, \big) = (-2, 9, -12)$$

olur.
Birim vektör. $\|v\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ olduğundan $u = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$'tür.
Yönlü türev.

$$D_u f(P) = \frac{(-2) \cdot 2 + 9 \cdot (-1) + (-12) \cdot 2}{3} = \frac{-37}{3}.$$

En hızlı artış. f en hızlı $\nabla f(P)$ yönünde, yani $\dfrac{1}{\sqrt{229}}(-2, 9, -12)$ birim vektörü yönünde artar. Bu yöndeki hız

$$\|\nabla f(P)\| = \sqrt{4 + 81 + 144} = \sqrt{229}$$

olur (Teorem 16.2). ■

 CC BY-NC-SA 4.0

21.17 Teğet Düzlem ve Normal Doğru

Teğet düzlem sorularında yüzeyin nasıl verildiği yöntemi belirler: bir grafik olarak $z = f(x,y)$ ya da bir seviye yüzeyi olarak $F(x,y,z) = 0$.

Tablo 21.15: Teğet düzlem ve normal

Yüzey	Normal vektör	Teğet düzlem
$z = f(x,y)$, $P = \big(\, a, b, f(a,b) \,\big)$	$\big(\, f_x, f_y, -1 \,\big)$	$z = f(a,b) + f_x\,(x-a) + f_y\,(y-b)$
$F(x,y,z) = 0$, P yüzeyde, $F \in C^1$, $\nabla F(P) \neq 0$	$\nabla F(P)$	$\langle \nabla F(P), X - P \rangle = 0$
Düzlemde $F(x,y) = 0$ eğrisi, $F \in C^1$, $\nabla F(P) \neq 0$	$\nabla F(P)$	teğet doğru: $F_x\,(x-x_0) + F_y\,(y-y_0) = 0$

Tablodaki türevler (a,b)'de ya da P'de hesaplanır. Normal doğru, P'den geçen ve normal vektöre paralel doğrudur: $X = P + t\,n$, $t \in \mathbb{R}$ (Tanım 14.4, Tanım 14.5, Sonuç 20.1). Grafik $z = f(x,y)$ aynı zamanda $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ seviye yüzeyidir; iki satır bu yüzden aynı düzlemi verir.

Örnek 21.18 (Küre Kapağına Teğet Düzlem). $f(x,y) = \sqrt{21 - x^2 - y^2}$ grafiğinin $P = \big(\, 2, -4, f(2,-4) \,\big)$ noktasındaki teğet düzlemini ve normal doğrusunu bulunuz.

Çözüm.
Nokta. $f(2,-4) = \sqrt{21 - 4 - 16} = 1$; $P = (2,-4,1)$'dir.
Gradyan. $f_x = -\dfrac{x}{\sqrt{21 - x^2 - y^2}}$, $f_y = -\dfrac{y}{\sqrt{21 - x^2 - y^2}}$ olduğundan $\nabla f(2,-4) = (-2,4)$'tür.
Teğet düzlem.

$$z = 1 - 2(x-2) + 4(y+4), \quad \text{yani} \quad 2x - 4y + z = 21.$$

Normal doğru. Normal vektör $(f_x, f_y, -1) = (-2,4,-1)$'dir:

$$(x,y,z) = (2,-4,1) + t\,(-2,4,-1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Sağlama. Grafik, $F = x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0$ küresinin üst yarısıdır. $\nabla F(P) = (4,-8,2)$ vektörü $(-2,4,-1)$'in -2 katıdır, yani aynı doğrultudadır ve $\langle \nabla F(P), X - P \rangle = 0$ denklemi yine $2x - 4y + z = 21$ verir. ■

21.18 Taylor Formülü

Taylor formülü, f'yi a civarında $x - a$'nın kuvvetleriyle yazar. Akılda tutmanın en kısa yolu operatör yazımıdır (Önerme 17.3): $f \in C^k$ ise f'nin (x_0, y_0) noktasındaki k. mertebeden Taylor polinomu

$$T_k(x,y) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^{j} f(x_0, y_0)$$

olur. Yani parantezin j. kuvveti binom teoremiyle açılır; $x - x_0$ ve $y - y_0$ sabit çarpan gibi davranır, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ ile $\dfrac{\partial}{\partial y}$'nin çarpımı art arda türev diye okunur ve bütün türevler (x_0, y_0)'da hesaplanır. Kısaca $h_1 = x - x_0$, $h_2 = y - y_0$ ve $h \cdot \nabla = h_1 \partial_x + h_2 \partial_y$ yazılırsa ilk kuvvetler şöyle açılır (Önerme 17.2):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
(h\cdot\nabla)f &= f_x\,h_1 + f_y\,h_2,\\
(h\cdot\nabla)^2 f &= f_{xx}\,h_1^2 + 2f_{xy}\,h_1h_2 + f_{yy}\,h_2^2,\\
(h\cdot\nabla)^3 f &= f_{xxx}\,h_1^3 + 3f_{xxy}\,h_1^2h_2\\
&\quad + 3f_{xyy}\,h_1h_2^2 + f_{yyy}\,h_2^3.
\end{aligned}
$$

Bunlar, bölümdeki df, d^2f, d^3f diferansiyelleridir; katsayılar Pascal üçgeninin satırlarıdır $(1,1;\ 1,2,1;\ 1,3,3,1)$.

> ⚠ Operatör yazımında üç tuzak
>
> - **Üs, toplamın indisidir.** j. terimde parantezin j. kuvveti alınır; bütün terimlere aynı üs yazılmaz.
> - **$f\in C^k$ gerekir.** Binom açılımı $f_{xy}=f_{yx}$ eşitliğini kullanır; kısmi türevlerin yalnızca var olması yetmez.
> - **Derece en çok k'dır.** Bazı katsayılar sıfır çıkabilir; T_k'nin derecesi k'dan küçük olabilir.

Kalanlı biçim. Son kuvvet ara noktada hesaplanır. $f\in C^k$ ve (x,y), (x_0,y_0) merkezli ve tanım kümesinde kalan bir yuvarın içindeyse, iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki bir (c_1,c_2) noktası için (Sonuç 17.1)

$$
f(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\,(h\cdot\nabla)^j f(x_0,y_0)+\frac{1}{k!}\,(h\cdot\nabla)^k f(c_1,c_2)
$$

olur. Soruda en sık istenen $k=3$ hâlidir ("ikinci mertebeye kadar kalanlı" ya da "üç terime kadar kalanlı"):

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0)+(h\cdot\nabla)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\,(h\cdot\nabla)^2 f(x_0,y_0)\\
&\quad +\frac{1}{6}\,(h\cdot\nabla)^3 f(c_1,c_2).
\end{aligned}
$$

Cevap iki parçadır: türevleri (x_0,y_0)'da hesaplanmış, sayısal katsayılı T_2 polinomu ve türevleri bilinmeyen (c_1,c_2) noktasında bırakılan kalan R_2. Matris diliyle $T_2=f(a)+\langle\nabla f(a),h\rangle+\frac12\,h^{T}H_f(a)\,h$'dir (Sonuç 17.2).

Üç değişken. Parantezin içine üçüncü terim eklenir:

$$
T_k(x,y,z)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\,\big(\,h_1\partial_x+h_2\partial_y+h_3\partial_z\big)^j f(x_0,y_0,z_0),
$$

burada $h_3=z-z_0$'dır. Kuvvetler çok terimli açılımla açılır; örneğin ikinci kuvvet altı türev içerir:

$$
\begin{aligned}
(h\cdot\nabla)^2 f &= f_{xx}\,h_1^2+f_{yy}\,h_2^2+f_{zz}\,h_3^2\\
&\quad +2\,\big(\,f_{xy}\,h_1h_2+f_{xz}\,h_1h_3+f_{yz}\,h_2h_3\,\big)\,.
\end{aligned}
$$

Hesapta en pratik olanı, katsayıları önceden sadeleştirilmiş çoklu indis biçimidir (Önerme 17.4):

$$
T_k=\sum_{p+q+r\le k}\frac{1}{p!\,q!\,r!}\,\frac{\partial^{p+q+r}f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}(a)\,h_1^p\,h_2^q\,h_3^r.
$$

Yani x'e göre p, y'ye göre q, z'ye göre r kez türev alınan terim yalnızca $p!\,q!\,r!$'e bölünür. Örneğin f_{xyz} teriminin açılımdaki katsayısı $3!=6$'dır, $\dfrac{1}{3!}$ ile sadeleşip 1 olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört adımda kalanlı Taylor formülü

1. **Artımları yaz.** $h_1 = x - x_0$, $h_2 = y - y_0$.
2. **Türevleri hesapla.** k. mertebeye kadar bütün kısmi türevler bulunur; C^k fonksiyonda karışık türevlerden her gruptan yalnız biri yeter. $(k-1)$. mertebeye kadar olanlar noktada, k. mertebedekiler genel noktada bırakılır.
3. **Operatörün kuvvetlerini aç.** $(h \cdot \nabla)^j f$ binom katsayılarıyla yazılır.
4. **Birleştir.** $\frac{1}{j!}$ katsayılarıyla toplanır; kalan $c = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$ noktasında yazılır.

Polinomlarda formül kesindir: derecesi m olan bir polinomun m. mertebeden sonraki türevleri sıfır olduğundan kalan sıfırdır ve Taylor açılımı, polinomu $(x-x_0)$ ile $(y-y_0)$'ın kuvvetlerine göre yeniden yazmaktan ibarettir.

Örnek 21.19 (İkinci Mertebeye Kadar Kalanlı Taylor Formülü). $f(x,y) = e^{xy} + x^2 y$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktası civarında ikinci mertebeden terimlere kadar kalanlı Taylor formülünü yazınız.

Çözüm.
Artımlar. $h_1 = x - 0 = x$ ve $h_2 = y - 1$'dir. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ olduğundan formül her (x,y) için geçerlidir.
Noktadaki türevler. $f(0,1) = 1$'dir ve

$$\begin{aligned} f_x &= y e^{xy} + 2xy, & f_x(0,1) &= 1, \\ f_y &= x e^{xy} + x^2, & f_y(0,1) &= 0, \\ f_{xx} &= y^2 e^{xy} + 2y, & f_{xx}(0,1) &= 3, \\ f_{xy} &= (1 + xy)\, e^{xy} + 2x, & f_{xy}(0,1) &= 1, \\ f_{yy} &= x^2 e^{xy}, & f_{yy}(0,1) &= 0. \end{aligned}$$

Üçüncü türevler (genel noktada).

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= y^3 e^{xy}, \\ f_{xxy} &= (2y + xy^2)\, e^{xy} + 2, \\ f_{xyy} &= (2x + x^2 y)\, e^{xy}, \\ f_{yyy} &= x^3 e^{xy}. \end{aligned}$$

Birleştirme. $h = (x, y-1)$ ile $(h \cdot \nabla) f(0,1) = x$ ve $(h \cdot \nabla)^2 f(0,1) = 3x^2 + 2x(y-1)$ olduğundan

$$f(x,y) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x(y-1) + R_2$$

bulunur. Kalan terim, (c_1, c_2) noktası $(0,1)$ ile (x,y)'yi birleştiren doğru parçası üzerinde olmak üzere

$$\begin{aligned} R_2 = \frac{1}{6}\Big[& f_{xxx}\, x^3 + 3 f_{xxy}\, x^2 (y-1) \\ & + 3 f_{xyy}\, x (y-1)^2 + f_{yyy}\, (y-1)^3 \Big] \end{aligned}$$

olur; köşeli parantezdeki türevler (c_1, c_2)'de hesaplanır.
Sayısal sağlama. $(0{,}1,\, 1{,}1)$ noktasında polinom $1 + 0{,}1 + 0{,}015 + 0{,}01 = 1{,}125$, gerçek değer ise $e^{0{,}11} + 0{,}011 \approx 1{,}1273$'tür; aradaki fark $R_2 \approx 0{,}0023$'tür. ■

21.19 Kritik Noktaları Sınıflandırmak

Yerel ekstremum sorusu iki aşamalıdır: önce aday noktalar ($\nabla f = 0$ olan durgun noktalar ve kısmi türevin olmadığı noktalar) bulunur (Teorem 18.1, Tanım 18.4), sonra Hessian matrisiyle sınıflandırılır (Teorem 18.2).

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört adımda kritik noktaların sınıflandırılması

1. **Kritik noktalar.** $\nabla f = 0$ sistemini çöz. Bir denklem çarpanlara ayrılıyorsa ($2x(1-y) = 0$ gibi) her çarpanı ayrı bir durum olarak incele; bölme yapmadan önce bölenin sıfır olduğu durumu ayır. Kısmi türevin olmadığı noktaları da listeye ekle.
2. **Hessian.** İkinci türevlerle H_f'yi genel noktada yaz.
3. **Test.** Test yalnız $\nabla f(a) = 0$ olan durgun noktalarda ve f, a'nın bir komşuluğunda C^2 iken uygulanır. İki değişkende $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ ve f_{xx}'in, üç değişkende D_1, D_2, D_3 asal alt determinantlarının işaretine bak. Kısmi türevin olmadığı kritik noktalarda $f(x) - f(a)$ farkının işaretine doğrudan bakılır.
4. **Karar ve değer.** Tablolardan sonucu oku; ekstremum değerini f'de yerine koyarak bul. Test susarsa fonksiyonun kendisine dön.

Tablo 21.16: İki değişkende ikinci türev testi

Durgun noktada	Sonuç
$D > 0$ ve $f_{xx} > 0$	kesin yerel minimum
$D > 0$ ve $f_{xx} < 0$	kesin yerel maksimum
$D < 0$	eyer noktası
$D = 0$	test sonuç vermez

Tablo, iki değişkenli testin (Sonuç 18.2) özetidir; D, Hessian matrisinin determinantıdır. n değişkende Sylvester ölçütü kullanılır (Teorem 18.3); D_k, H_f'nin sol üst köşesindeki $k \times k$ alt matrisin determinantıdır.

Tablo 21.17: Sylvester ölçütüyle sınıflandırma

Asal alt determinantlar	Hessian	Sonuç
$D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, … (hepsi pozitif)	pozitif tanımlı	kesin yerel minimum
$D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, … (işaret değişir)	negatif tanımlı	kesin yerel maksimum
$D_n \neq 0$ ve iki düzen de yok	belirsiz	eyer noktası
$D_n = 0$	ölçüt karar vermez	forma ya da fonksiyona dön

Test sustuğunda karar vermek

$D = 0$ (ya da $D_n = 0$) iken "ekstremum yoktur" demek yanlıştır; nokta minimum, maksimum ya da eyer olabilir (Tanım 18.5). Bu durumda $f(x) - f(a)$ farkının işaretine doğrudan bakılır: kareler toplamına ya da çarpanlara ayrılır, noktadan geçen doğrular ve eğriler ($y = mx$, $y = kx^2$) boyunca incelenir. İki yol boyunca zıt işaret görülürse eyer noktasıdır; bir komşulukta $f \geq f(a)$ gösterilirse minimumdur.

Örnek 21.20 (İki Değişkende Kritik Noktalar). $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kritik noktalar. f bir polinomdur; kısmi türevleri her yerde vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_x = 2x - 2xy = 2x(1-y) = 0,$$
$$f_y = 4y - x^2 = 0.$$

Birinci denklemden $x = 0$ ya da $y = 1$'dir. $x = 0$ ise ikinciden $y = 0$ bulunur. $y = 1$ ise $x^2 = 4$, yani $x = \pm 2$'dir. Kritik noktalar $(0,0)$, $(2,1)$ ve $(-2,1)$'dir.
Hessian. $f_{xx} = 2 - 2y$, $f_{xy} = -2x$, $f_{yy} = 4$:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}.$$

Test.

Tablo 21.18: Kritik noktaların sınıflandırması

Nokta	f_{xx}	D	Sonuç	f
$(0,0)$	2	$2\cdot 4 - 0 = 8$	kesin yerel minimum	0
$(2,1)$	0	$0\cdot 4 - 16 = -16$	eyer noktası	2
$(-2,1)$	0	$0\cdot 4 - 16 = -16$	eyer noktası	2

$(\pm 2, 1)$ noktalarında $f_{xx} = 0$ olması önemli değildir: $D < 0$ olduğu anda nokta eyerdir. Yerel minimum değeri $f(0,0) = 0$'dır. ■

Örnek 21.21 (Üç Değişkende Sylvester Ölçütü). $f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 + z^2 + yz$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm.
Kritik noktalar.

$$f_x = 3x^2 - 3 = 0,$$
$$f_y = 2y + z = 0,$$
$$f_z = 2z + y = 0.$$

Birinciden $x = \pm 1$'dir. Son iki denklemden $z = -2y$ ve $-4y + y = 0$, yani $y = z = 0$ bulunur. Kritik noktalar $(1,0,0)$ ve $(-1,0,0)$'dır.
Hessian.

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = 6x, \quad D_2 = 12x, \quad D_3 = 18x.$$

Burada $D_2 = 6x\cdot 2 - 0 = 12x$ ve $D_3 = 6x\,(2\cdot 2 - 1\cdot 1) = 18x$'tir.
$(1,0,0)$. $D_1 = 6$, $D_2 = 12$, $D_3 = 18$; hepsi pozitiftir. Kesin yerel minimumdur ve $f(1,0,0) = 1 - 3 = -2$'dir.
$(-1,0,0)$. $D_1 = -6$, $D_2 = -12$, $D_3 = -18$. $D_3 \neq 0$'dır ama $D_2 < 0$ olduğundan ne $(+,+,+)$ ne de $(-,+,-)$ düzeni vardır. Sylvester ölçütü gereği Hessian belirsizdir ve nokta bir eyer noktasıdır; $f(-1,0,0) = -1 + 3 = 2$'dir (Teorem 18.3). ■

Örnek 21.22 (Her Doğru Boyunca Minimum, Yine de Eyer). $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$ fonksiyonu için ikinci türev testinin $(0,0)$'da sonuç vermediğini gösteriniz ve noktanın türünü belirleyiniz.

Çözüm.
Test. $\nabla f = (12x^3 - 8xy, -4x^2 + 2y)$ orijinde sıfırdır. $f_{xx} = 36x^2 - 8y$, $f_{xy} = -8x$, $f_{yy} = 2$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = 0$$

bulunur; test susar.
Doğrular boyunca. $y = mx$ boyunca $f = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$'tür; $m \neq 0$ ise küçük $x \neq 0$ için m^2x^2 terimi baskındır ve $f > 0$ olur. $m = 0$ için $f = 3x^4 > 0$, $x = 0$ doğrusunda $f = y^2 > 0$'dır. Her doğru boyunca orijin bir minimumdur.
Parabol boyunca. Fonksiyon çarpanlarına ayrılır: $f = (y - x^2)(y - 3x^2)$. İki parabolün arasında, örneğin $y = 2x^2$ üzerinde

$$f(x, 2x^2) = (x^2)(-x^2) = -x^4 < 0 \quad (x \neq 0)$$

olur. Orijinin her yuvarında $f < 0 = f(0,0)$ olan noktalar ($y = 2x^2$ üzerinde) ve $f > 0$ olan noktalar ($y = 0$ üzerinde) vardır. $(0,0)$ bir eyer noktasıdır. ■

21.20 Kapalı ve Sınırlı Bölgede Mutlak Ekstremum

Kompakt bir bölgede sürekli bir fonksiyon en büyük ve en küçük değerini mutlaka alır; bu değerler ya bir iç kritik noktada ya da sınırdadır (Önerme 19.1). Bu yüzden aday listesi eksiksiz kurulup değerler karşılaştırılır.

Üç adımda mutlak ekstremum

1. **İç kritik noktalar.** Bölgenin içinde $\nabla f = 0$ olan ve kısmi türevin olmadığı noktalar bulunur. Bölge dışına düşenler atılır.
2. **Sınır.** Sınır parçalara ayrılır ve her parça tek değişkenle yazılır; f o parçada tek değişkenli bir fonksiyona dönüşür. Onun kapalı aralıktaki kritik noktaları ve aralığın uçları (köşeler) listeye girer. Sınır bir $g = 0$ eğrisiyse Lagrange yöntemi de kullanılabilir (Bölüm 21.21).
3. **Karşılaştırma.** Listedeki değerlerin en büyüğü mutlak maksimum, en küçüğü mutlak minimumdur.

Tablo 21.19: Sınır parçalarının tek değişkenle yazılışı

Sınır	Tek değişkenli yazım
$x^2 + y^2 = R^2$	$x = R\cos t, y = R\sin t$; ya da $y^2 = R^2 - x^2, x \in [-R, R]$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi]$
Doğru parçası	$y = mx + n, x \in [x_1, x_2]$; ya da bir değişken sabit
Çokgen	her kenar ayrı doğru parçası; köşeler ayrıca listeye

Yerine koyarken aralığı unutmak

Çember üzerinde $y^2 = R^2 - x^2$ yazınca x yalnız $[-R, R]$ aralığında değişir. Bu aralığın dışına düşen kritik noktalar atılır, aralığın uçları ise mutlaka listeye eklenir.

Örnek 21.23 (Diskte En Büyük ve En Küçük Değer). $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 \leq 4$ kapalı diski üzerindeki mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Disk kapalı ve sınırlı, f sürekli olduğundan iki değer de vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İç kritik nokta. $f_x = 2x - 2 = 0$ ve $f_y = 4y = 0$ sistemi $(1,0)$ noktasını verir; $1^2 + 0^2 < 4$ olduğundan disktedir ve $f(1,0) = -1$'dir.
Sınır. Çember üzerinde $y^2 = 4 - x^2$, $x \in [-2,2]$'dir:

$$g(x) = x^2 + 2(4 - x^2) - 2x = -x^2 - 2x + 8.$$

$g'(x) = -2x - 2 = 0$ ise $x = -1$, $y = \pm\sqrt{3}$ ve $g(-1) = 9$'dur. Aralığın uçlarında $g(2) = 0$ (nokta $(2,0)$) ve $g(-2) = 8$ (nokta $(-2,0)$) bulunur.
Karşılaştırma.

Tablo 21.20: Mutlak ekstremum adayları

Aday	$(1,0)$	$(-1,\pm\sqrt{3})$	$(2,0)$	$(-2,0)$
f	-1	9	0	8

Mutlak maksimum 9'dur ve $(-1,\pm\sqrt{3})$ noktalarında alınır; mutlak minimum -1'dir ve $(1,0)$'da alınır. ■

21.21 Lagrange Çarpanları

Kısıt altında ekstremum sorusunda kısıtı çözmeye uğraşmak yerine Lagrange sistemi kurulur (Teorem 19.1, Tanım 19.2). Bir ve iki kısıt için sistemler şöyledir (Teorem 19.2):

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0, \quad g = 0;$$
$$\nabla f + \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 = 0, \quad g_1 = g_2 = 0.$$

Bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşittir: n değişken ve k kısıt için $n + k$ denklem.

Dört adımda Lagrange yöntemi

1. **Kısıtı düzenle.** Kısıtı $g = 0$ biçiminde yaz. Kısıt üzerinde $\nabla g = 0$ (iki kısıtta ∇g_1, ∇g_2 doğrusal bağımlı) olan noktalar varsa aday listesine ayrıca ekle.
2. **Sistemi çöz.** λ'yı yok etmek için denklemleri birbirine oranla ya da uygun değişkenlerle çarpıp çıkar. Bir ifadeye bölmeden önce o ifadenin sıfır olduğu durumu ayrı incele.
3. **Değerleri hesapla.** f'yi bütün adaylarda hesapla.
4. **Karar.** Kısıt kümesi kompaktsa (kapalı ve sınırlı) en büyük değer maksimum, en küçük değer minimumdur. Kompakt değilse karşılaştırma tek başına yetmez.

Amaç fonksiyonunu sadeleştirmek işi kısaltır: uzaklık yerine uzaklığın karesi, $\sqrt{u}$ yerine u en iyilenir; bu dönüşümler artan olduğundan ekstremum noktalarını değiştirmez.

Örnek 21.24 (Elips Üzerinde Bir Çarpımın Ekstremumları). $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun $x^2 + 4y^2 = 8$ elipsi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Kısıt. $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8$ alalım. $\nabla g = (2x, 8y)$ yalnız orijinde sıfırdır, orijin de elips üzerinde değildir.
Sistem.

$$y + 2\lambda x = 0,$$
$$x + 8\lambda y = 0,$$
$$x^2 + 4y^2 = 8.$$

Birinciden $y = -2\lambda x$; ikinciye koyarsak $x(1 - 16\lambda^2) = 0$ bulunur. $x = 0$ ise $y = 0$ olur ve kısıt sağlanmaz. Demek ki $\lambda = \pm\frac{1}{4}$'tür.

- $\lambda = -\frac{1}{4}$: $y = \frac{x}{2}$, kısıttan $2x^2 = 8$, $x = \pm 2$. Adaylar $(2,1)$ ve $(-2,-1)$; $f = 2$.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $\lambda = \frac{1}{4}$: $y = -\frac{x}{2}$, yine $x = \pm 2$. Adaylar $(2,-1)$ ve $(-2,1)$; $f = -2$.

Karar. Elips kapalı ve sınırlıdır, dolayısıyla kompakttır; f sürekli olduğundan iki değer de alınır. En büyük değer 2 (noktalar $(2,1)$ ve $(-2,-1)$), en küçük değer -2'dir (noktalar $(2,-1)$ ve $(-2,1)$). ■

Örnek 21.25 (İki Kısıtlı Lagrange Problemi). $f(x,y,z) = x + y + z$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 2$ ve $x + z = 1$ kısıtları altındaki en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Kısıtlar. $g_1 = x^2 + y^2 - 2$, $g_2 = x + z - 1$. $\nabla g_1 = (2x, 2y, 0)$ ve $\nabla g_2 = (1,0,1)$ ancak $x = y = 0$ iken doğrusal bağımlıdır; bu nokta birinci kısıtı sağlamaz.
Sistem. $\nabla f + \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 = 0$ bileşen bileşen

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x + \mu &= 0, \\ 1 + 2\lambda y &= 0, \\ 1 + \mu &= 0 \end{aligned}$$

verir. Üçüncüden $\mu = -1$, birinciden $2\lambda x = 0$ bulunur. İkinci denklem $\lambda \neq 0$ olmasını gerektirir; o hâlde $x = 0$'dır. Kısıtlardan $y^2 = 2$, yani $y = \pm\sqrt{2}$ ve $z = 1 - x = 1$'dir.
Değerler. $f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}$ ve $f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2}$'dir.
Karar. Kısıt kümesi, bir silindirle bir düzlemin kesişimi olan bir elipstir; kapalı ve sınırlıdır. En büyük değer $1 + \sqrt{2}$, en küçük değer $1 - \sqrt{2}$'dir. Sağlama: kısıt üzerinde $f = x + y + (1 - x) = 1 + y$ ve $|\, y \,| \leq \sqrt{2}$'dir. ■

21.22 Kapalı Fonksiyonlar, Ters Fonksiyon ve Jacobi Determinantı

Kapalı fonksiyon sorularında denklem çözülmez; türevler, denklemin kısmi türevlerinin oranından okunur. Her satırda F (ya da F ve G) C^1 sınıfındadır ve denklem incelenen noktada sağlanır; her formülün paydası, teoremin "sıfırdan farklı" koşuludur.

Tablo 21.21: Kapalı ve ters fonksiyonların türevleri

Denklem	Bilinmeyen	Türev	Koşul
$F(x,y) = 0$	$y = \varphi(x)$	$y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$	$F_y \neq 0$ (Teorem 20.2)
$F(x,y,z) = 0$	$z = \varphi(x,y)$	$z_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$	$F_z \neq 0$ (Sonuç 20.1)
$F = G = 0$	u, v (değişkenler x, y)	Jacobi oranları (aşağıda)	$J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$ (Teorem 20.4)
$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$	x, y (ters fonksiyon)	$J_{F^{-1}}(F(a)) = (J_F(a))^{-1}$	$\det J_F \neq 0$ (Teorem 20.1)

İki denklemli sistemde payda hep J'dir; pay olan determinantta J'nin ilgili sütunu, türevi alınan değişkenin sütunuyla değiştirilir ve önüne eksi işareti konur:

$$u_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad u_y = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},$$
$$v_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \quad v_y = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

İki değişkenli ters fonksiyonda $J = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x$ (Tanım 15.4) ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_u = \frac{v_y}{J}, \quad x_v = -\frac{u_y}{J}, \quad y_u = -\frac{v_x}{J}, \quad y_v = \frac{u_x}{J}$$

ve $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{J}$'dir. Örneğin kutupsal dönüşümde $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$'dir; dönüşüm $r > 0$ olan her noktada yerel olarak terslenebilir. Kapalı yüzeyin teğet düzlemi için Bölüm 21.17, sistem çözümünün reçetesi için Ters ve kapalı fonksiyon teoremleri bölümüne bakılabilir.

Örnek 21.26 (Kapalı Tanımlı Bir Yüzeyin Kısmi Türevleri). $x^2z + yz^3 + xy = 3$ denklemi $(1,1,1)$ noktası civarında z'yi x ve y'nin türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlar mı? Tanımlıyorsa $z_x(1,1)$ ve $z_y(1,1)$'i bulunuz.

Çözüm.
Denklem. $F(x,y,z) = x^2z + yz^3 + xy - 3$ bir polinomdur, dolayısıyla C^1'dir ve $F(1,1,1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$'dır.
Kısmi türevler.

$$\begin{aligned} F_x &= 2xz + y, \quad & F_x(1,1,1) &= 3, \\ F_y &= z^3 + x, \quad & F_y(1,1,1) &= 2, \\ F_z &= x^2 + 3yz^2, & F_z(1,1,1) &= 4. \end{aligned}$$

Koşul. $F_z(1,1,1) = 4 \neq 0$ olduğundan üç değişkenli kapalı fonksiyon teoremi (Sonuç 20.1) gereği $(1,1)$'in bir komşuluğunda $z(1,1) = 1$ olan tek bir C^1 fonksiyon $z = \varphi(x,y)$ vardır.
Türevler.

$$z_x(1,1) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3}{4}, \qquad z_y(1,1) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Aynı türevlerden yüzeyin $(1,1,1)$'deki teğet düzlemi de çıkar:

$$3(x-1) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0.$$

Bu düzlemin normal vektörü $\nabla F(1,1,1) = (3,2,4)$'tür. ■

Örnek 21.27 (Ters Fonksiyonun Kısmi Türevleri). $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ dönüşümünün $(x,y) = (1,1)$ civarında yerel olarak terslenebilir olduğunu gösteriniz ve x_u, x_v, y_u, y_v türevlerini bu noktada bulunuz.

Çözüm.
Jacobi matrisi.

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \qquad J_F(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinant. $J = 2 \cdot 2 - (-2) \cdot 2 = 8 \neq 0$'dır. Bileşenler polinom olduğundan $F \in C^1$'dir ve ters fonksiyon teoremi (Teorem 20.1) gereği F, $(1,1)$ civarında yerel olarak terslenebilir; $F(1,1) = (0,2)$'dir.
Ters matris. $J_{F^{-1}}(0,2) = \big(\, J_F(1,1)\big)^{-1}$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

bulunur. Yukarıdaki formüllerle sağlama: $x_u = \dfrac{v_y}{J} = \dfrac{2}{8}$ ve $y_u = -\dfrac{v_x}{J} = -\dfrac{2}{8}$'dir. Ayrıca $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{8}$'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

21.23 Son Kontrol Listesi

Bir çözümü bitirmeden önce şu soruları sor:

1. Limit sorusunda nokta orijin değilse değişkenleri kaydırdın mı? Seçtiğin yollar gerçekten noktaya gidiyor mu?
2. Birkaç yol aynı değeri verdiyse limitin varlığını ayrıca sıkıştırmayla ya da tanımla gösterdin mi? Kutupsal sınırın θ'dan bağımsız olduğundan emin misin?
3. Parçalı fonksiyonun özel noktasında kısmi türevi tanımdan mı hesapladın, yoksa formülü türevleyip yerine mi koydun?
4. Türevlenebilirlik için önce süreklilik ve kısmi türevlere baktın mı? Kalan oranında paydaya $\sqrt{h^2+k^2}$ yazdın mı?
5. Yönlü türevde yön vektörünü birim yaptın mı?
6. Zincir kuralında dış fonksiyonun türevlerini ara noktada hesapladın mı?
7. Taylor formülünde kalan terimin türevlerini ara noktada bıraktın mı, katsayıları ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, binom katsayıları) doğru yazdın mı?
8. Kritik noktaları ararken çarpanlara ayrılan denklemlerin her durumunu inceledin mi? Kısmi türevin olmadığı noktaları listeye ekledin mi?
9. $D=0$ ya da $D_n=0$ olan noktalarda fonksiyonun kendisine döndün mü?
10. Mutlak ekstremumda sınırın köşelerini ve aralık uçlarını listeye kattın mı?
11. Lagrange sisteminde bölmeden önce sıfır durumunu ayırdın mı? Kısıt kümesinin kompakt olduğunu söyledin mi?
12. Kapalı fonksiyon türevinde paydadaki F_z ya da J'nin noktada sıfırdan farklı olduğunu gösterdin mi?

Kuralları bir bütün hâlinde uygulamak için kitabın her bölümünün sonundaki Alıştırmalar kısmına dönebilir, konu sırasını Müfredat ve Giriş sayfasından izleyebilirsin.

 CC BY-NC-SA 4.0