

Diferansiyel Denklemler

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

Giriş	5
1 Diferansiyel Denklemler: Kavram ve Sınıflandırma	6
1.1 Diferansiyel Denklemler Kavramı	6
1.2 Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemler	7
1.3 Mertebe	8
1.4 Lineerlik	9
1.5 Sabit ve Değişken Katsayılı Lineer Denklemler	12
1.6 Sınıflandırma Alıştırmaları	12
1.7 Özet	15
2 Çözüm Kavramı ve Çözüm Aileleri	17
2.1 Bir Diferansiyel Denklemin Çözümü	17
2.2 Açık ve Kapalı Çözümler	18
2.3 Bir Fonksiyonun Çözüm Olduğunu Doğrulamak	18
2.4 Çözüm Aileleri	20
2.5 Alıştırmalar	22
2.6 Sonraki Adım	26
3 Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri; Varlık ve Teklik	27
3.1 Ek Koşullar: Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri	27
3.2 Varlık ve Teklik Teoremi	30
3.3 Hipotezler Sağlanmazsa: Tekliğin Bozulması ve Tekil Çözümler	34
3.4 Alıştırmalar	36
4 Keyfi Sabitlerin Yok Edilmesi	40
4.1 Eğri Ailesi ve Keyfi Sabitler	40
4.2 Yöntem: Türev Alıp Sabitleri Yok Etmek	41
4.3 Tek Keyfi Sabitli Aileler	42
4.4 İki Keyfi Sabitli Aileler	44
4.5 Alıştırmalar	45
5 Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler	49
5.1 Ayrılabilen Denklem Nedir?	49
5.2 Yöntemin Gerekçesi	50
5.3 Yöntem	51
5.4 Mutlak Değerli Logaritma ve Kayıp Çözümler	53
5.5 Başlangıç Koşuluyla Özel Çözüm	54

5.6	Değişken Değiştirmeyle Ayrılabilir Hâle Getirme	55
5.7	Alıştırmalar	57
5.8	Bölümün Özeti	60
6	Homojen Denklemler ve Homojene İndirgenebilenler	61
6.1	Homojen Denklemler Nedir?	61
6.2	$y = ux$ Değişken Değiştirme	65
6.3	Homojene İndirgenebilen Denklemler	68
6.4	Alıştırmalar	73
6.5	Kapanış	77
7	Tam Diferansiyel Denklemler	78
7.1	Tam Diferansiyel	78
7.2	Tam Diferansiyel Denklem	79
7.3	Tamlık Ölçütü	80
7.4	Potansiyel Fonksiyonun Bulunması	81
7.5	Örnekler	82
7.6	Alıştırmalar	85
7.7	Tam Olmayan Denklemler Ne Olacak?	87
8	İntegrasyon Çarpanı	88
8.1	Neden Bir Çarpana İhtiyaç Duyuyoruz?	88
8.2	İntegrasyon Çarpanı	88
8.3	Çarpanın Sağladığı Denklem	90
8.4	Yalnız x 'e Bağlı Çarpan	91
8.5	Yalnız y 'ye Bağlı Çarpan	93
8.6	Hangi Çarpanı Denemeli?	94
8.7	Özel Biçimli Çarpanlar: $\mu(x^2 + y^2)$	96
8.8	Alıştırmalar	98

Giriş

Diferansiyel denklemler, bir büyüklüğün değişim hızıyla kendisi arasındaki ilişkiyi kurarak doğadaki dinamik süreçleri modellemenin temel aracıdır. Bu notlar birinci mertebe denklemlerin klasik çözüm tekniklerinden başlayıp lineer sistemlere ve Laplace dönüşümüne uzanır.

i Not

Dersin ilk kısmı — temel kavramlar, çözüm aileleri, varlık ve teklik, birinci mertebe denklemlerin klasik çözüm yöntemleri — hazırdır ve aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Kalan başlıkların notları hazırlanmaktadır; tamamlandıkça bu sayfadan bağlantılanacaktır.

1. Diferansiyel Denklemler: Kavram ve Sınıflandırma

Analiz derslerinde bir fonksiyon verildiğinde türevini hesaplamayı öğrendik. Doğa bilimlerinde, mühendislikte ve ekonomide karşılaşılan durum çoğu zaman bunun tersidir: elimizde fonksiyonun kendisi değil, **değişim hızı** hakkında bir bilgi vardır. Bir nüfusun artış hızının o anki nüfusla orantılı olduğunu, bir cismin ivmesinin üzerine etkiyen kuvvetle belirlendiğini, bir çubuk boyunca sıcaklığın zamana göre değişiminin konuma göre eğriliğiyle ilişkili olduğunu biliriz. Bu bilgilerin her biri, bilinmeyen bir fonksiyonu türevleriyle birlikte içeren bir denklem olarak yazılır. İşte bu tür denklemlere **diferansiyel denklem** denir.

Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen bir sayı değil, bir **fonksiyondur**. $x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminde x 'in hangi sayılar olabileceğini sorarız; $y' = 2y$ denkleminde ise “türevi kendisinin iki katı olan fonksiyonlar hangileridir?” diye sorarız. Bu fark, dersin bütün yapısını belirler: çözüm bir sayı değil bir fonksiyon, hatta çoğu zaman sonsuz tane fonksiyondan oluşan bir ailedir.

Bu ilk bölümde hiçbir denklem çözmeyeceğiz. Önce ortak dili kuracağız. Bir diferansiyel denkleme baktığımızda onu üç ölçüte göre sınıflandırmayı öğreneceğiz: türevler **tek bir** bağımsız değişkene göre mi alınmış (adi-kısmi ayrımı), denkleminde görünen **en yüksek** türev kaçınıcı basamaktan (mertebe) ve bilinmeyen fonksiyon denkleminde **nasıl** görünüyor (lineerlik). Bu sınıflandırma süs değildir: sonraki bölümlerde göreceğimiz çözüm yöntemlerinin her biri belirli bir sınıf için tasarlanmıştır, dolayısıyla bir denklemle karşılaşıldığında atılacak ilk adım onu doğru sınıfa yerleştirmektir.

1.1 Diferansiyel Denklem Kavramı

Tanımı yapmadan önce bir denklemde iki tür değişkenin bulunduğunu belirtelim. **Bağımsız değişken** (independent variable), bilinmeyen fonksiyonun girdisidir; **bağımlı değişken** (dependent variable) ise bu fonksiyonun kendisidir, yani bilinmeyendir. $y = y(x)$ yazdığımızda x bağımsız, y bağımlıdır: y 'nin aldığı değer x 'e bağlıdır.

Tanım 1.1 (Diferansiyel Denklem). Bir ya da birden çok **bağımlı değişkenin**, bir ya da birden çok **bağımsız değişkene** göre türevlerini içeren denkleme **diferansiyel denklem** (differential equation) denir.

Yani bir bağıntının diferansiyel denklem olması için içinde en az bir türev bulunması yeterlidir; bilinmeyen, o türevleri alınan fonksiyondur.

Örnek 1.1 (Bir Büyüme Modeli). Bir bakteri kültüründe nüfusun artış hızının, o andaki nüfusun iki katı olduğu gözlenmiştir. Bu gözlemi bir denklem olarak yazınız; yazdığınız bağıntının neden bir diferansiyel denklem olduğunu ve bilinmeyeninin ne olduğunu açıklayınız.

Çözüm.

Nüfusu, zamanın bir fonksiyonu olarak $y = y(t)$ ile gösterelim. “Artış hızı” ifadesi, nüfusun zamana göre türevi olan $\frac{dy}{dt}$ demektir. Gözlem, bu hızın o andaki nüfusun iki katına eşit olduğunu söylüyor:

$$\frac{dy}{dt} = 2y.$$

Bu bağıntıda bilinmeyen t ya da y sayıları değil, t 'ye $y(t)$ değerini karşılık getiren **fonksiyonun kendisidir**. Bağıntı bu bilinmeyen fonksiyonun türevini içerdiğinden bir diferansiyel denklemdir. Burada t bağımsız, y bağımlı değişkendir.

Denklemi çözmeyi henüz bilmiyoruz; ama $y(t) = e^{2t}$ fonksiyonunun denklemi sağladığını doğrudan görebiliriz: türevi $2e^{2t}$ 'dir, bu da $2y(t)$ 'ye eşittir. Aynı şekilde her C sabiti için $y(t) = Ce^{2t}$ de denklemi sağlar. Demek ki bir diferansiyel denklemin çözümü tek bir fonksiyon değil, bir fonksiyon ailesi olabilir.

■

1.2 Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemler

İlk sınıflandırma ölçütü, türevlerin **kaç tane** bağımsız değişkene göre alındığıdır. Bilinmeyen fonksiyon tek değişkenliyse ($y = y(x)$ gibi) denklemde yalnızca adi türevler, çok değişkenliyse ($u = u(x, t)$ gibi) kısmi türevler görünür.

Tanım 1.2 (Adi Diferansiyel Denklem). Bir ya da birden çok bağımlı değişkenin **tek bir** bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme **adi diferansiyel denklem** (ordinary differential equation) denir.

Yani bir denklemde yalnızca tek bir harfe göre türev alınmışsa denklem adidir.

Örnek 1.2 (Adi Denklem Örneği). Aşağıdaki denklemin adi olup olmadığını belirleyiniz; bağımlı ve bağımsız değişkenlerini yazınız:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0, \quad y = y(x).$$

Çözüm.

Denklemde geçen türevler $\frac{d^2y}{dx^2}$ ve $\frac{dy}{dx}$ 'tir; her ikisi de **yalnızca** x 'e göre alınmıştır. Bağımsız değişken sayısı bir olduğundan denklem adidir.

Bilinmeyen fonksiyon y , girdisi ise x 'tir; dolayısıyla x bağımsız, y bağımlı değişkendir. Denklemde ayrıca bir x^2 çarpanı ve $\left(\frac{dy}{dx} \right)^3$ ifadesi bulunması bu sınıflandırmayı değiştirmez: adi-kısmi ayrımı yalnızca türevlerin hangi değişkene göre alındığına bakar.

■

Örnek 1.3 (Değişken Adlarına Aldanmamak). Aşağıdaki denklemin adi olup olmadığını belirleyiniz; bağımlı ve bağımsız değişkenlerini yazınız:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 7\frac{dx}{dt} + 8x^2 = \cosh t, \quad x = x(t).$$

Çözüm.

Türevlerin hepsi t 'ye göre alınmıştır, yani bağımsız değişken tektir; denklem adidir.

Buradaki asıl incelik harflerdedir: x burada bir bağımsız değişken **değil**, bilinmeyen fonksiyonun adıdır. $x = x(t)$ yazımı bunu açıkça söyler. Dolayısıyla t bağımsız, x bağımlı değişkendir. Bağımlı ve bağımsız değişkeni belirlerken harfin kendisine değil, “hangisi hangisinin fonksiyonu?” sorusunun cevabına bakılır.

Denklemin sağındaki $\cosh t$ terimi yalnızca bağımsız değişkene bağlıdır; bu da sınıflandırmayı etkilemez.

■

Tanım 1.3 (Kısmi Diferansiyel Denklem). Bir ya da birden çok bağımlı değişkenin **birden çok** bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme **kısmi diferansiyel denklem** (partial differential equation) denir.

Yani denklemde iki ya da daha fazla harfe göre türev alınmışsa (ve bu yüzden ∂ simgesi görünüyorsa) denklem kısmidir.

Örnek 1.4 (Kısmi Denklem Örneği). Aşağıdaki denklemin türünü belirleyiniz; bağımlı ve bağımsız değişkenlerini yazınız:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + 2\frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad z = z(s, t).$$

Çözüm.

Bilinmeyen fonksiyon z , iki değişkenli bir fonksiyondur: $z = z(s, t)$. Denklemden z 'nin hem s 'ye hem t 'ye göre türevi görünüyor. Bağımsız değişken sayısı ikidir, dolayısıyla denklem kısmi diferansiyel denklemdir.

Burada s ve t bağımsız, z bağımlı değişkendir. Kısmi türev simgesi ∂ 'nin kullanılmasının nedeni de budur: $\frac{\partial z}{\partial s}$ yazıldığında t sabit tutulup yalnızca s 'ye göre türev alındığı anlaşılır.

■

Örnek 1.5 (Dalga Denklemi). Aşağıdaki denklemin türünü belirleyiniz; bağımlı ve bağımsız değişkenlerini yazınız (c sabittir):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u = u(x, t).$$

Çözüm.

Bilinmeyen u fonksiyonu iki değişkene bağlıdır ve denklemden hem t 'ye hem x 'e göre ikinci türevler bulunmaktadır. Bağımsız değişkenler x ve t , bağımlı değişken u 'dur; bağımsız değişken sayısı birden çok olduğundan denklem kısmi diferansiyel denklemdir.

c harfi bir değişken değil, sabittir (gerilmiş bir telde dalganın yayılma hızı); bu yüzden sınıflandırmada rol oynamaz. Bu denklem **dalga denklemi** adıyla bilinir.

■

i Bu notlarda ağırlık adi denklemlerde

Adi ve kısmi denklemlerin çözüm teknikleri birbirinden oldukça farklıdır. Bu notlarda esas olarak adi diferansiyel denklemler incelenecektir; kısmi denklemler burada yalnızca sınıflandırmayı tamamlamak için tanıtılmıştır.

1.3 Mertebe

Bir denklemi adi ya da kısmi diye ayırdıktan sonra, hem adi hem kısmi denklemler için kullanılabilecek ikinci bir ölçütümüz var: denklemden görünen **en yüksek basamaktan türev**.

Tanım 1.4 (Mertebe). Bir diferansiyel denklemden bulunan en yüksek basamaktan türevin basamağına, denklemin **mertebesi** (order) denir.

Yani denklemden görünen bütün türevlerin basamaklarına bakılır ve en büyüğü seçilir. Kısmi türevlerde basamak, toplam kaç kez türev alındığıdır: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$ ifadesinde iki kez x 'e, bir kez t 'ye göre türev alındığından basamak $2 + 1 = 3$ 'tür.

⚠ Üs ile mertebe karıştırılmaz

Bir türevin **üssü** ile **basamağı** farklı şeylerdir. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^8$ ifadesinde birinci türev sekizinci kuvvete yükseltilmiştir; bu terimin mertebeye katkısı 8 değil 1'dir. Buna karşılık $\frac{d^8 y}{dx^8}$ ifadesinde gerçekten sekiz kez türev alınmıştır ve basamağı 8'dir. Üs, birazdan göreceğimiz lineerlik ölçütünde önem kazanacaktır.

Örnek 1.6 (Adi Denklemin Mertebesi). Aşağıdaki denklemin mertebesini belirleyiniz:

$$\frac{d^7 y}{dx^7} + \sin x \left(\frac{dy}{dx} \right)^8 + \frac{d^3 y}{dx^3} = 0.$$

Çözüm.

Denklemden üç türev görünüyor. Bunları basamaklarıyla birlikte listeleyelim:

terim	türev	basamak
birinci	$\frac{d^7 y}{dx^7}$	7
ikinci	$\frac{dy}{dx}$	1
üçüncü	$\frac{d^3 y}{dx^3}$	3

En büyük basamak 7'dir, yani en yüksek basamaktan türev $\frac{d^7 y}{dx^7}$ 'dir. Öyleyse denklem **yedinci mertebeden** bir adi diferansiyel denklemdir.

İkinci terimdeki 8 üssünün mertebeye ilgisiz olmadığına dikkat edelim: orada türev bir kez alınmış, sonra sonuç sekizinci kuvvete yükseltmiştir.

■

Örnek 1.7 (Kısmi Denklemin Mertebesi). Aşağıdaki denklemin türünü ve mertebesini belirleyiniz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + u^2 = 0.$$

Çözüm.

Türevler iki farklı değişkene (x ve t) göre alındığından denklem kısımdır.

Mertebe için türevlerin basamaklarını sayalım. Birinci terimde t 'ye göre iki kez türev alınmıştır, basamak 2'dir. İkinci terimde x 'e göre iki, t 'ye göre bir kez türev alınmıştır; toplam türev alma sayısı $2 + 1 = 3$ olduğundan basamak 3'tür. Üçüncü terim u^2 hiç türev içermez.

En büyük basamak 3 olduğundan denklem **üçüncü mertebeden** bir kısmi diferansiyel denklemdir.

■

1.4 Lineerlik

Sınıflandırmanın üçüncü ve en önemli ölçütü **lineerliktir**. Mertebe, denklemde kaç kez türev alındığını söyler; lineerlik ise bilinmeyen fonksiyonun denklemde **nasıl** görüldüğünü söyler. Lineer denklemler için eksiksiz bir teori vardır: sağ tarafı sıfır olan lineer denklemlerde çözümler toplanabilir ve sabitle çarpılabilir, genel çözüm de bu yapı üzerinden bir formülle yazılabilir. Lineer olmayan denklemlerde böyle bir genel teori yoktur ve her denklem kendi yöntemini ister.

Tanım 1.5 (Lineer Adi Diferansiyel Denklem). Bağımlı değişkeni y , bağımsız değişkeni x olan bir denklem

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x)$$

biçimindeyse ya da bu biçimde yazılabiliyorsa, denkleme **n -inci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem** (linear ordinary differential equation of order n) denir. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayıları ile b yalnızca bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlardır; a_0 'ın, üzerinde çalışılan aralıkta sıfırdan farklı olduğu varsayılır.

Başka bir deyişle, bir lineer adi diferansiyel denklemde

1. bağımlı değişken y ve türevleri yalnızca **birinci dereceden** görünür;

2. y' 'nin ve/veya türevlerinin **çarpımları** bulunmaz;
3. y' 'nin ve/veya türevlerinin **aşkın fonksiyonları** (üstel fonksiyon, logaritma, trigonometrik fonksiyon, ...) bulunmaz.

Yani lineer bir denklemde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri yalnızca “katsayı çarpı terim” biçiminde, birinci kuvvetten ve birbirleriyle çarpılmadan görünür.

💡 Katsayılara ve sağ tarafa sınır yok

Lineerlik koşulları yalnızca **bağımlı** değişkenle ilgilidir. $a_i(x)$ katsayıları ve sağ taraftaki $b(x)$ istenildiği kadar karmaşık olabilir: x^3 , e^x , $\sin x$, $\cos^2 x$ gibi terimler denklemin lineerliğini bozmaz. Bozan şey y^2 , yy' , $\sin y$, e^y gibi, **bilinmeyeni** birinci dereceden başka biçimde içeren terimlerdir.

Tanım 1.6 (Lineer Olmayan Denklem). Yukarıdaki genel biçimde yazılamayan, yani üç koşuldan en az biri bozulan adi diferansiyel denkleme **lineer olmayan adi diferansiyel denklem** (nonlinear ordinary differential equation) denir.

Yani bilinmeyen ya da türevlerinden biri ikinci veya daha yüksek dereceden görünüyorsa, bir çarpımda yer alıyorsa ya da bir aşkın fonksiyonun içine girmişse denklem lineer değildir.

Örnek 1.8 (Altıncı Mertebeden Lineer Denklem). Aşağıdaki denklemin mertebesini ve lineerliğini belirleyiniz:

$$x^3 \frac{d^6 y}{dx^6} + x \frac{dy}{dx} + \cos^2 x = 0.$$

Çözüm.

En yüksek basamaktan türev $\frac{d^6 y}{dx^6}$ olduğundan denklem altıncı mertebedendir.

Lineerlik için denklemin tanımdaki biçime getirelim; yalnızca bağımsız değişkene bağlı olan $\cos^2 x$ terimini sağ tarafa atalım:

$$x^3 \frac{d^6 y}{dx^6} + x \frac{dy}{dx} = -\cos^2 x.$$

Şimdi üç koşulu sırayla denetleyelim. Bilinmeyen y ve türevleri birinci dereceden görünüyor; y' 'nin ya da türevlerinin birbiriyle çarpımı yok; y' 'nin içine giren üstel, logaritmik ya da trigonometrik bir fonksiyon yok. ($\cos^2 x$ aşkın bir fonksiyondur, ama y' 'nin değil x 'in fonksiyonudur; bu yüzden lineerliği bozmaz.)

Öyleyse denklem **altıncı mertebeden lineer** bir adi diferansiyel denklemdir. Tanımdaki gösterimle $a_0(x) = x^3$, $a_5(x) = x$, $b(x) = -\cos^2 x$ 'tir; geri kalan katsayıların, yani a_1, a_2, a_3, a_4 ile y' 'nin katsayısı a_6 'nın hepsi sıfırdır. Baştaki x^3 katsayısı $x = 0$ noktasında sıfırlandığından denklem, bu noktayı içermeyen bir aralıkta (örneğin $x > 0$ için) lineer denklem olarak ele alınır.

■

Örnek 1.9 (Üstel Katsayılı Lineer Denklem). Aşağıdaki denklemin mertebesini ve lineerliğini belirleyiniz:

$$3x^2 \frac{d^5 y}{dx^5} + e^x \frac{dy}{dx} + y + x \sin x = 0.$$

Çözüm.

En yüksek basamaktan türev $\frac{d^5 y}{dx^5}$ 'tir, yani denklem beşinci mertebedendir.

Yalnızca x 'e bağlı olan $x \sin x$ terimini sağ tarafa alalım:

$$3x^2 \frac{d^5 y}{dx^5} + e^x \frac{dy}{dx} + y = -x \sin x.$$

Bilinmeyen y ve türevleri birinci dereceden ve çarpımsız görünüyor, y hiçbir aşkın fonksiyonun içine girmiyor. Katsayılardan biri olan e^x üstel bir fonksiyondur; ama üssünde y değil x vardır, dolayısıyla üçüncü koşul bozulmaz.

Öyleyse denklem **beşinci mertebeden lineer** bir adi diferansiyel denklemdir.

■

Örnek 1.10 (Türevin Kuvveti Alınmış Denklem). Aşağıdaki denklemin mertebesini ve lineerliğini belirleyiniz:

$$\left(\frac{d^7 x}{dt^7}\right)^3 + 9\frac{dx}{dt} + x = 1.$$

Çözüm.

En yüksek basamaktan türev $\frac{d^7 x}{dt^7}$ 'dir; 3 üssü basamağı değiştirmez. Denklem **yedinci mertebededir**. Lineerlik koşullarından ilki bozuluyor: bilinmeyen yedinci türevi birinci dereceden değil, **üçüncü** dereceden görünüyor. Böyle bir terim, tanımdaki $a_0(t)\frac{d^7 x}{dt^7}$ biçimine hiçbir katsayı seçimiyle getirilemez.

Öyleyse denklem **yedinci mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir.

■

Örnek 1.11 (Sarkaç Denklemi). Aşağıdaki denklemin mertebesini ve lineerliğini belirleyiniz (k sabittir):

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + k \sin \theta = 0.$$

Çözüm.

Burada bağımlı değişken θ , bağımsız değişken t 'dir; yani bilinmeyen, zamana bağlı açı fonksiyonu $\theta = \theta(t)$ 'dir. En yüksek basamaktan türev $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ olduğundan denklem ikinci mertebededir.

Lineerlik koşullarından üçüncüsü bozuluyor: $\sin \theta$ terimi, **bağımlı** değişkenin aşkın bir fonksiyonudur. Denklemi $a_0(t)\theta'' + a_1(t)\theta' + a_2(t)\theta = b(t)$ biçimine getirmenin yolu yoktur, çünkü $\sin \theta$ ifadesinden θ 'yı katsayısıyla çarpım hâlinde ayırmak mümkün değildir.

Öyleyse denklem **ikinci mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir. Bu denklem, bir sarkacın salınımını betimler; küçük açılarda $\sin \theta \approx \theta$ yaklaşımı yapılarak lineer hâle getirilmesi, uygulamalı matematiğin en bilinen örneklerinden biridir.

■

Örnek 1.12 (Çarpım İçeren Denklem). Aşağıdaki denklemin mertebesini ve lineerliğini belirleyiniz:

$$3x^2 yy' + 5 \cos x = 0.$$

Çözüm.

Denkleminde görünen tek türev y' olduğundan denklem birinci mertebededir.

Lineerlik koşullarından ikincisi bozuluyor: yy' terimi, bilinmeyenle türevinin **çarpımıdır**. Denklemi

$$3x^2 yy' = -5 \cos x$$

biçiminde yazsak bile sol tarafta y' 'nin katsayısı $3x^2 y$ olur; bu katsayı y içerdiğinden yalnızca bağımsız değişkene bağlı değildir, yani tanımdaki biçime uymaz.

Öyleyse denklem **birinci mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir.

■

1.5 Sabit ve Değişken Katsayılı Lineer Denklemler

Lineer denklemler kendi içinde de ayrılır. Bu kez bakılan şey, bağımlı değişkenin ve türevlerinin **katsayılarının** yapısıdır.

Tanım 1.7 (Sabit ve Değişken Katsayı). Lineer bir adi diferansiyel denklemde $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ katsayılarının hepsi sabitse denkleme **sabit katsayılı lineer denklem** (linear equation with constant coefficients), katsayılarından en az biri bağımsız değişkene gerçekten bağlıysa **değişken katsayılı lineer denklem** (linear equation with variable coefficients) denir.

Yani ayırım, yalnızca bilinmeyenin önündeki katsayılar bakılarak yapılır; sağ taraftaki $b(x)$ bu sınıflandırmaya girmez. Örneğin yukarıda incelediğimiz $x^3y^{(6)} + xy' = -\cos^2 x$ denklemi lineerdir ve katsayıları x^3 ile x olduğundan **değişken katsayılıdır**.

Örnek 1.13 (Sabit Katsayılı Denklem). Aşağıdaki denklemi mertebe, lineerlik ve katsayı türü bakımından sınıflandırınız:

$$3y'' + y' = 2e^x.$$

Çözüm.

En yüksek basamaktan türev y'' olduğundan denklem ikinci mertebededir.

Bilinmeyen y ve türevleri birinci dereceden, çarpımsız ve aşkın fonksiyonların dışında görüldüğünden denklem lineerdir. Tanımdaki gösterimle

$$a_0(x) = 3, \quad a_1(x) = 1, \quad a_2(x) = 0, \quad b(x) = 2e^x.$$

Katsayıların üçü de sabittir. Sağ taraftaki $2e^x$ terimi x 'e bağlıdır; ama katsayı değil, denklemin sağ tarafıdır, dolayısıyla sınıflandırmayı değiştirmez.

Öyleyse denklem **ikinci mertebeden, sabit katsayılı lineer** bir adi diferansiyel denklemdir.

■

Bu ayırım ileride çok işimize yarayacaktır: sabit katsayılı lineer denklemler için her mertebede çalışan tam bir çözüm yöntemi vardır, değişken katsayılı denklemlerde ise durum çok daha zordur.

1.6 Sınıflandırma Alıştırmaları

Aşağıdaki alıştırmalarda her denklem üç ölçüte göre sınıflandırılacaktır: adi mi kısmi mi, mertebesi kaç, lineer mi değil mi. Sıralamayı hep aynı tutmak yararlıdır: önce bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleyin, sonra en yüksek basamaktan türevi bulun, en sonunda lineerlik koşullarını denetleyin.

Alıştırma 1.1 (Üçüncü Mertebeden Çarpım Terimli Denklem). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4, \quad y = y(t).$$

Çözüm.

Bütün türevler tek bir değişkene, t 'ye göre alınmıştır; denklem **adidir**. Bağımsız değişken t , bağımlı değişken y 'dir.

En yüksek basamaktan türev y''' olduğundan denklem **üçüncü mertebededir**.

Lineerlik için terimlere tek tek bakalım. y''' ve $2e^t y''$ terimleri sorunsuzdur: bilinmeyen türevleri birinci dereceden görünür ve $2e^t$ katsayısı yalnızca bağımsız değişkene bağlıdır. Ama yy' terimi bilinmeyenle türevinin çarpımıdır ve ikinci koşulu bozar.

Öyleyse denklem **üçüncü mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir.

■

Alıştırma 1.2 (Lojistik Denklem). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız (a ve α sabittir):

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha x^2.$$

Çözüm.

Tek türev $\frac{dx}{dt}$ 'dir ve yalnızca t 'ye göre alınmıştır; denklem **adidir**. Bağımsız değişken t , bağımlı değişken x 'tir.

En yüksek basamaktan türev birinci basamaktan olduğundan denklem **birinci mertebededir**.

Bütün terimleri sola toplayalım:

$$\frac{dx}{dt} - ax + \alpha x^2 = 0.$$

Burada αx^2 terimi, bilinmeyişi **ikinci dereceden** içerir ve birinci koşulu bozar. (a ile α 'nın sabit olması bir şey değiştirmez; bozan şey x 'in kuvvetidir.)

Öyleyse denklem **birinci mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir. Bu denklem, sınırlı kaynaklar altındaki nüfus artışını betimleyen lojistik denklem olarak bilinir.

■

Alıştırma 1.3 (Bağımlı Değişkeni Ayırt Etmek). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız (k sabittir):

$$\frac{d^2t}{d\theta^2} + k \sin \theta = 0.$$

Çözüm.

Önce değişkenleri doğru okumak gerekir: türev θ 'ya göre alınmış ve türevi alınan büyüklük t 'dir. Demek ki burada θ **bağımsız**, t **bağımlı** değişkendir, yani bilinmeyen $t = t(\theta)$ fonksiyonudur. Tek bağımsız değişken bulunduğundan denklem **adidir**.

En yüksek basamaktan türev $\frac{d^2t}{d\theta^2}$ olduğundan denklem **ikinci mertebededir**.

Lineerlik için $k \sin \theta$ terimini sağa atalım:

$$\frac{d^2t}{d\theta^2} = -k \sin \theta.$$

Şimdi durum açıktır: sol tarafta bilinmeyen ikinci türevi birinci dereceden ve 1 katsayısıyla görünür; sağ taraftaki $-k \sin \theta$ ise yalnızca **bağımsız** değişkenin fonksiyonudur, yani tanımdaki $b(\theta)$ rolündedir. Üç koşul da sağlanır.

Öyleyse denklem **ikinci mertebeden, sabit katsayılı lineer** bir adi diferansiyel denklemdir.

Bu alıştırmada, sarkaç denkleminin (Örnek 1.11) yan yana konduğunda öğretici bir karşıtlık oluşturur: orada $\sin$ 'in içindeki θ bağımlı değişken olduğu için denklem lineer değildi, burada ise bağımsız değişken olduğu için denklem lineerdir. Aynı görünen iki ifadenin sınıflandırması, hangi harfin bilinmeyen olduğuna göre değişir.

■

Alıştırma 1.4 (Karma Kısmi Türevli Denklem). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0.$$

Çözüm.

Bilinmeyen u fonksiyonunun hem x 'e hem y 'ye göre türevleri alınmıştır; bağımsız değişkenler x ve y , bağımlı değişken u 'dur. Bağımsız değişken sayısı birden çok olduğundan denklem **kısımdır**.

Birinci terimde bir kez x 'e, bir kez y 'ye göre türev alınmıştır; basamağı $1 + 1 = 2$ 'dir. İkinci terimin basamağı 1, üçüncü terimin 0'dır. En büyük basamak 2 olduğundan denklem **ikinci mertebededir**.

Lineerlik koşullarını kısmi denklemler için de aynı biçimde uygulayalım: bilinmeyen u ve türevleri birinci dereceden görünür, birbirleriyle çarpılmamıştır, aşkın bir fonksiyonun içine girmemiştir. Üstelik bütün katsayılar 1'e eşittir.

Öyleyse denklem **ikinci mertebeden lineer** bir kısmi diferansiyel denklemdir.

■

Alıştırma 1.5 (Kök İçeren Denklem). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \left(\frac{d^2r}{ds^2} + 1\right)^{1/2}.$$

Çözüm.

Türevler yalnızca s 'ye göre alınmıştır; denklem **adidir**. Bağımsız değişken s , bağımlı değişken r 'dir.

Denkleminde görünen türevler $\frac{dr}{ds}$ (basamak 1) ve $\frac{d^2r}{ds^2}$ (basamak 2) olduğundan denklem **ikinci mertebededir**. Dıştaki 3 üssü ile $1/2$ üssü basamakları değiştirmez.

Lineerlik koşulu daha ilk bakışta bozuluyor: birinci türevin küpü alınmış, ikinci türev ise bir karekökün içine girmiştir. İstersek iki tarafın karesini alıp kökten kurtulabiliriz:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^6 = \frac{d^2r}{ds^2} + 1.$$

Bu biçimde ikinci türev birinci dereceden görünür; ama bu kez birinci türev altıncı dereceden görünmektedir, yani birinci koşul yine sağlanmaz.

Öyleyse denklem **ikinci mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir.

■

Alıştırma 1.6 (Beşinci Mertebeden Kısmi Denklem). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$\frac{\partial^5 v}{\partial t^2 \partial y^3} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + tyv = 0.$$

Çözüm.

Bilinmeyen v fonksiyonunun hem t 'ye hem y 'ye göre türevleri alınmıştır; bağımsız değişkenler t ve y , bağımlı değişken v 'dir. Denklem **kısmidir**.

Birinci terimde t 'ye göre iki, y 'ye göre üç kez türev alınmıştır; basamağı $2 + 3 = 5$ 'tir. İkinci terimin basamağı 2, üçüncü terimin 0'dır. En büyük basamak 5 olduğundan denklem **beşinci mertebededir**. Lineerlik koşullarını denetleyelim: v ve türevlerinin hepsi birinci dereceden görünür, aralarında çarpım yoktur, aşkın bir fonksiyonun içine girmemişlerdir. Üçüncü terimdeki ty çarpanı bir katsayıdır ve yalnızca bağımsız değişkenlere bağlıdır; bu yüzden lineerliği bozmaz, yalnızca katsayının değişken olduğunu gösterir.

Öyleyse denklem **beşinci mertebeden lineer** bir kısmi diferansiyel denklemdir.

■

Alıştırma 1.7 (Değişken Katsayılı Lineer Denklem). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 2ty.$$

Çözüm.

Tek bağımsız değişken t olduğundan denklem **adidir**; bağımlı değişken y 'dir.

Tek türev birinci basamaktan olduğundan denklem **birinci mertebededir**.

Lineerliği görmek için bilinmeyene ait terimleri sola toplayalım:

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = 1.$$

Bu, tam olarak tanımdaki biçimdir: $a_0(t) = 1$, $a_1(t) = 2t$ ve $b(t) = 1$. Bilinmeyen y ile türevi birinci dereceden ve çarpımsızdır.

Öyleyse denklem **birinci mertebeden, değişken katsayılı lineer** bir adi diferansiyel denklemdir. ($2ty$ terimindeki t çarpanı bir katsayıdır; y 'nin kuvvetini değiştirmediği için lineerliği bozmaz, yalnızca katsayıyı değişken yapar.)

■

Alıştırma 1.8 (İki Türevin Çarpımı). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$\frac{d^6 x}{dt^6} + \left(\frac{d^3 x}{dt^3} \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + 3x^2 = t^2.$$

Çözüm.

Türevlerin hepsi t 'ye göre alınmıştır; denklem **adidir**. Bağımsız değişken t , bağımlı değişken x 'tir. Basamaklar sırasıyla 6, 3, 2 ve 0'dır; en büyüğü 6 olduğundan denklem **altıncı mertebededir**. Lineerlik iki ayrı yerden bozuluyor. Önce ikinci terim: iki türevin çarpımıdır, ikinci koşula aykırıdır. Sonra üçüncü terim: $3x^2$ bilinmeyişi ikinci dereceden içerir, birinci koşula aykırıdır. Bunlardan biri bile lineerliği bozmaya yeterdi. Öyleyse denklem **altıncı mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir. Sağ taraftaki t^2 terimi yalnızca bağımsız değişkene bağlı olduğundan bu sonuçta rol oynamaz.

■

Alıştırma 1.9 (Bilinmeyen Üstel Fonksiyonu). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$y'' + xe^y = 0, \quad y = y(x).$$

Çözüm.

Türev yalnızca x 'e göre alınmıştır; denklem **adidir**. Bağımsız değişken x , bağımlı değişken y 'dir. En yüksek basamaktan türev y'' olduğundan denklem **ikinci mertebededir**. Lineerlik koşullarından üçüncüsü bozuluyor: e^y ifadesi, **bağımlı** değişkenin üstel fonksiyonudur. Önündeki x çarpanı sorun değildir; sorun, üsse bilinmeyen kendisinin girmiş olmasıdır. e^y teriminden y 'yi katsayısıyla çarpım hâlinde ayırmanın bir yolu yoktur. Öyleyse denklem **ikinci mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir. Karşılaştırma için: $y'' + xe^x = 0$ denklemi lineer olurdu, çünkü orada üstteki harf bağımsız değişkendir.

■

Alıştırma 1.10 (Tabanı ve Üssü Bilinmeyen Terim). Aşağıdaki denklemi sınıflandırınız:

$$y^{(4)} + (\sin x) y^y = 2, \quad y = y(x).$$

Çözüm.

Türev yalnızca x 'e göre alınmıştır; denklem **adidir**. Bağımsız değişken x , bağımlı değişken y 'dir. Denklemde görünen tek türev $y^{(4)}$ 'tür, yani dördüncü basamaktadır (bu türev $y^{(iv)}$ biçiminde de yazılır). Öyleyse denklem **dördüncü mertebededir**. İkinci terimdeki y^y ifadesine dikkat edelim: hem taban hem üs bilinmeyendir. Bu ifadeyi

$$y^y = e^{y \ln y}$$

biçiminde yazabiliriz; demek ki y^y , bağımlı değişkenin aşkın bir fonksiyonudur ve üçüncü koşulu bozar. (Aynı zamanda birinci dereceden de değildir, yani birinci koşul da sağlanmaz.) Katsayı olan $\sin x$ ise yalnızca bağımsız değişkene bağlı olduğundan lineerliğe bir zarar vermez. Öyleyse denklem **dördüncü mertebeden lineer olmayan** bir adi diferansiyel denklemdir.

■

1.7 Özet

Bir diferansiyel denklemle karşılaştığımızda soracağımız üç soruyu ve cevaplarının ne anlama geldiğini toparlayalım:

soru	cevap	sonuç
Türevler kaç değişkene göre alınmış?	tek	adi denklem

soru	cevap	sonuç
	birden çok	kısmi denklem
En yüksek basamaktan türev kaçınıcı basamaktan?	n	n -inci mertebeden denklem
Bilinmeyen birinci dereceden, çarpımsız ve aşkın fonksiyonsuz mu görünüyor?	evet	lineer denklem
	hayır	lineer olmayan denklem
(Lineerse) katsayılar sabit mi?	evet / hayır	sabit / değişken katsayılı

Artık bir denklemi tanıyabiliyoruz; ama “bu denklemin çözümü” derken tam olarak neyi kastettiğimizi henüz söylemedik. Bir fonksiyonun denklemi sağlaması ne demektir, bu hangi aralıkta istenir, çözüm neden tek bir fonksiyon değil de bir aile olarak çıkar? Bu soruların cevabını [Çözüm Kavramı ve Çözüm Aileleri](#) bölümünde vereceğiz.

2. Çözüm Kavramı ve Çözüm Aileleri

Önceki bölümde bir diferansiyel denklemi mertebesine, derecesine ve lineer olup olmadığına göre sınıflandırmayı öğrendik. Sınıflandırma, denkleme bakıp onun hangi türden bir nesne olduğunu söyler; ama asıl sorumuza, “bu denklemi *çözmek* ne demektir?” sorusuna henüz cevap vermez. Bu bölümün konusu tam olarak budur.

Cebirsel bir denklemde, örneğin $x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminde bilinmeyen bir **sayı**dır; denklemi çözmek, yerine konduğunda eşitliği sağlayan sayıları bulmak demektir. Diferansiyel bir denklemde ise bilinmeyen bir **fonksiyon**dur. Dolayısıyla çözüm de bir sayı değil, bir fonksiyondur: kendisi ve türevleri denklemde yerine konduğunda denklemi özdeş olarak sağlayan bir fonksiyon.

Bu farkın iki önemli sonucu vardır. Birincisi, bir fonksiyonun türevlerinden söz edebilmek için onun tanımlı ve türevlenebilir olduğu bir **aralık** belirtmek zorundayız; “çözüm” her zaman “şu aralık üzerinde çözüm” demektir. İkincisi, çözüm her zaman $y = f(x)$ biçiminde açıkça yazılabilir olmayabilir; çoğu zaman elimize x ile y arasında bir bağıntı geçer. Aşağıda önce çözümün kesin tanımını yapacak, sonra bir fonksiyonun ya da bağıntının gerçekten çözüm olup olmadığını sınamanın düzenli yolunu göreceğiz. Bölümün sonunda ise tek bir çözüm yerine sonsuz çok çözümden oluşan **çözüm ailelerini** ve bu ailelerin içinde genel, özel ve tekil çözümlerin nasıl ayrıldığını inceleyeceğiz.

2.1 Bir Diferansiyel Denklemin Çözümü

n -inci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin en genel yazılışı, bağımsız değişken x , bağımlı değişken y ve y 'nin n -inci mertebeye kadarki türevleri arasında bir bağıntıdır:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Bu yazılıшта denklemin bütün terimleri bir tarafa toplanmış, diğer tarafta sıfır bırakılmıştır. Örneğin $y'' + 2y' - 3y = 0$ denklemi bu biçimdedir; $y' = x^2 + y$ denklemi ise $y' - x^2 - y = 0$ yazılarak bu biçime getirilir.

i Gösterim

Yüksek mertebeden türevler için

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

gösterimini kullanacağız. Düşük mertebelerde y' , y'' , y''' üs işaretli yazım da yaygındır; $y^{(4)}$ ile y^4 (yani y 'nin dördüncü kuvveti) karıştırılmamalıdır.

Tanım 2.1 (Bir Aralık Üzerinde Çözüm). n -inci mertebeden

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

diferansiyel denklemi verilsin. $\alpha < x < \beta$ aralığı üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonu bu aralığın her noktasında φ' , φ'' , ..., $\varphi^{(n)}$ türevlerine sahipse **ve** aralıktaki **her** x için

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa, φ fonksiyonuna bu denklemin $\alpha < x < \beta$ aralığı üzerinde bir **çözümü** (solution) denir.

Yani bir fonksiyonun çözüm olması demek, o fonksiyon ile türevleri denklemde yerine konduğunda eşitliğin aralıktaki tek tek bazı noktalarda değil, aralığın tamamında bir **özdeşlik** hâline gelmesi demektir.

i İki anlaşıma

Aksi söylenmedikçe F fonksiyonunun reel değerli olduğunu varsayacak ve $y = \varphi(x)$ biçiminde **reel değerli** çözümler arayacağız.

Ayrıca çözümün tanımlı olduğu aralık her zaman ayrıca belirtilebilir; böyle durumlarda söz konusu aralık, yapılan işlemlerin anlamlı olduğu en geniş aralıktır. Bir fonksiyonun bir aralıkta çözüm olup daha geniş bir aralıkta çözüm olmaması sık karşılaşılan bir durumdur.

2.2 Açık ve Kapalı Çözümler

Bir çözüm elimize her zaman “ y eşittir x ’in bir ifadesi” biçiminde geçmez. Kimi zaman x ile y arasında, y yalnız bırakılmamış bir bağıntı buluruz. Bu iki duruma ayrı adlar veriyoruz.

Tanım 2.2 (Açık Çözüm, Kapalı Çözüm). Bir diferansiyel denklemin çözümü

$$y = \varphi(x)$$

biçiminde, yani bağımlı değişken yalnız bırakılmış olarak veriliyorsa buna **açık çözüm** (explicit solution) denir.

Çözüm

$$h(x, y) = 0$$

biçiminde bir bağıntıyla veriliyorsa, yani bağımlı değişken yalnız bırakılmamışsa buna **kapalı çözüm** (implicit solution) denir.

Yani açık çözüm doğrudan kullanılabilen bir fonksiyon formülüdür; kapalı çözüm ise, uygun bir aralıkta bir ya da birkaç açık çözümü *içinde saklayan* bir bağıntıdır.

Bir bağıntının kapalı çözüm sayılabilmesi için, söz konusu aralıkta gerçekten türevlenebilir bir $y = \varphi(x)$ fonksiyonu belirlemesi ve belirlediği bu fonksiyonun denklemi sağlaması gerekir. Aşağıda her iki durumu da örnekleyeceğiz.

2.3 Bir Fonksiyonun Çözüm Olduğunu Doğrulamak

Bir fonksiyonun verilen denklemin çözümü olup olmadığını anlamak için denklemi çözmeye gerek yoktur; yerine koymak yeterlidir. İzlenecek adımlar şunlardır:

1. Verilen fonksiyonun tanımlı olduğu ve gereken mertebeye kadar türevlenebildiği aralığı belirleyin.
2. Denklemin mertebesi kadar türevi sırayla hesaplayın.
3. $y, y', \dots, y^{(n)}$ yerine bu ifadeleri denklemde yazın.
4. Sol tarafı sadeleştirin ve sağ tarafla karşılaştırın. Eşitlik aralıktaki her x için sağlanıyorsa fonksiyon bu aralıkta çözümdür; tek bir x değerinde bile bozuluyorsa çözüm değildir.

Örnek 2.1 (Üstel Bir Fonksiyonun Doğrulanması). Bütün reel x değerleri için

$$y = f(x) = 2e^{-3x} + 4e^x$$

ile tanımlanan fonksiyonun

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

denkleminin açık çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Üstel fonksiyonlar bütün reel sayılarda tanımlı ve her mertebeden türevlenebilir olduğundan, f fonksiyonu bütün x değerleri için ikinci türeve sahiptir. Demek ki doğrulamayı $(-\infty, \infty)$ aralığında yapabiliriz.

Önce türevleri hesaplayalım:

$$f'(x) = -6e^{-3x} + 4e^x,$$

$$f''(x) = 18e^{-3x} + 4e^x.$$

Burada e^{-3x} türevlenirken zincir kuralından her seferinde -3 çarpanı gelmektedir: $2 \cdot (-3) = -6$ ve $-6 \cdot (-3) = 18$.

Şimdi bu ifadeleri denklemde yerine koyalım:

$$(18e^{-3x} + 4e^x) + 2(-6e^{-3x} + 4e^x) - 3(2e^{-3x} + 4e^x).$$

Parantezleri açıp e^{-3x} ve e^x terimlerini ayrı ayrı toplayalım:

$$e^{-3x}(18 - 12 - 6) + e^x(4 + 8 - 12).$$

Her iki parantez de sıfırdır, dolayısıyla toplam her x için sıfıra eşittir:

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Eşitlik belirli birkaç x değerinde değil, bütün reel sayılarda sağlandığı için f fonksiyonu denklemin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir açık çözümüdür.

■

Şimdi de bir bağıntının kapalı çözüm olduğunu gösterelim. İzlenecek yol şudur: bağıntının belirlediği açık fonksiyonları bulup her birini ayrı ayrı denetlemek.

Örnek 2.2 (Çember Bağıntısının Kapalı Çözüm Olması).

$$x^2 + y^2 - 16 = 0$$

bağıntısının

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

denkleminin $-4 < x < 4$ aralığında kapalı çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bağıntıyı y için çözelim:

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}.$$

Demek ki bağıntı, $-4 < x < 4$ aralığında iki ayrı fonksiyon belirlemektedir:

$$f_1(x) = \sqrt{16 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{16 - x^2}.$$

Aralığın uç noktaları dışarıda bırakılmıştır, çünkü $x = \pm 4$ noktalarında karekökün altındaki ifade sıfır olur ve bu fonksiyonların türevi tanımsızdır.

Birinci fonksiyon. $f_1(x) = \sqrt{16 - x^2}$ için zincir kuralıyla

$$f_1'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

Denklemden y yerine $f_1(x)$, $\frac{dy}{dx}$ yerine $f_1'(x)$ yazalım:

$$x + \sqrt{16 - x^2} \left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} \right) = x - x = 0.$$

Sadeleşme $-4 < x < 4$ aralığının her noktasında geçerlidir, çünkü orada $\sqrt{16 - x^2} \neq 0$ 'dır.

İkinci fonksiyon. $f_2(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ için

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$$

olur ve yerine koyarsak

$$x + (-\sqrt{16-x^2}) \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = x - x = 0$$

elde ederiz.

Her iki fonksiyon da denklemi aralığın tamamında sağladığından f_1 ve f_2 birer açık çözümdür. Bu iki açık çözümü birlikte veren $x^2 + y^2 - 16 = 0$ bağıntısı ise denklemin $-4 < x < 4$ aralığında kapalı çözümdür.

■

2.3.1 Bağıntıyı Çözmeden Denetlemek

Yukarıdaki örnekte bağıntıyı y için çözebildik. Çoğu zaman bu mümkün değildir; örneğin $\sin(xy) + y^2 - x = 0$ bağıntısından y 'yi yalnız bırakamayız. Böyle durumlarda kapalı türev alma yöntemi kullanılır:

1. $h(x, y) = 0$ bağıntısının iki tarafının da x 'e göre türevini alın; bunu yaparken y 'nin x 'in bir fonksiyonu olduğunu unutmayın, yani y içeren her terimde zincir kuralı gereği bir $\frac{dy}{dx}$ çarpanı belirir.
2. Elde ettiğiniz eşitlikte $\frac{dy}{dx}$ içeren terimleri bir tarafta toplayın.
3. $\frac{dy}{dx}$ 'i yalnız bırakın ve sonucu verilen diferansiyel denklemle karşılaştırın. İki ifade aynıysa bağıntı denklemin kapalı çözümdür.

Bu yöntemi çember örneğine uygularsak, $x^2 + y^2 - 16 = 0$ bağıntısının x 'e göre türevi

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

olur; iki tarafı 2'ye bölünce doğrudan $x + y \frac{dy}{dx} = 0$ denkleminde ulaşırız. Görüldüğü gibi yöntem, bağıntıyı y için çözmeden de aynı sonucu vermektedir.

2.4 Çözüm Aileleri

Bir diferansiyel denklemin tek bir çözümü olması beklenen bir durum değildir. En basit örnek doğrudan integrasyonla çözülen denklemlerdir: $y' = 2x$ denkleminin çözümü $y = x^2 + c$ 'dir ve c 'nin her değeri için ayrı bir çözüm elde ederiz. Yani karşımızda tek bir fonksiyon değil, bir **fonksiyon ailesi** vardır.

Tanım 2.3 (Bir Parametrelili Çözüm Ailesi). Bir diferansiyel denklemin çözümü, içinde c gibi bir **keyfi sabit** (arbitrary constant) bulunan

$$y = f(x, c)$$

biçiminde veriliyorsa, c 'nin her reel değeri bir çözüm belirler. Bu çözümler topluluğuna denklemin **bir parametrelili çözüm ailesi** (one-parameter family of solutions) denir. Buradaki c sabitine ailenin **parametresi** denir.

Aynı biçimde içinde n tane keyfi sabit bulunan bir çözüm ailesine n parametrelili çözüm ailesi denir.

Yani bir parametrelili aile, tek bir formülün sabiti değiştirildikçe ürettiği sonsuz çoklukta çözüm demektir; bu çözümlerin grafiklerine denklemin **çözüm eğrileri** denir.

Bir denklemin bütün çözümleri her zaman böyle tek bir ailenin içinde toplanmaz: kimi denklemlerde, aileye hangi sabit değeri verilirse verilsin elde edilemeyen ayrı çözümler de bulunur. Aşağıdaki tanım çözümleri bu bakımdan üç gruba ayırır.

Tanım 2.4 (Genel Çözüm, Özel Çözüm, Tekil Çözüm). n -inci mertebeden bir adi diferansiyel denklem verilsin.

- Denklemin, birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit içeren bir çözümüne **genel çözüm** (general solution) denir.
- Genel çözümdeki keyfi sabitlere belirli sayısal değerler verilerek elde edilen her çözüme **özel çözüm** (particular solution) denir.
- Genel çözümdeki keyfi sabitlere hangi değer verilirse verilsin elde edilemeyen bir çözüme **tekil çözüm** (singular solution) denir.

Yani genel çözüm denklemin çözümlerinin neredeyse tamamını tek bir formülde toplar, özel çözüm bu formülün tek bir üyesidir, tekil çözüm ise formülün hiçbir üyesi olmadığı hâlde denklemi sağlayan bir çözümdür.

Çözüm türü	Keyfi sabit	Elde ediliş
Genel çözüm	n mertebeli denklemde n tane	Denklemin çözülmesiyle
Özel çözüm	yok (sabitler belirlenmiştir)	Genel çözümden sabitlere değer vererek
Tekil çözüm	yok	Genel çözümden elde edilemez; ayrıca bulunur

Aşağıdaki iki örnek, aynı denklem üzerinde bu ayrımın nasıl işlediğini gösteriyor: önce bir genel çözüm, sonra o genel çözümün dışında kalan bir çözüm bulacağız.

Örnek 2.3 (Bir Parametrelili Parabol Ailesi). Birinci mertebeden

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0$$

denkleminin, c keyfi bir sabit olmak üzere $f(x) = (x + c)^2$ biçiminde bir parametrelili çözüm ailesine sahip olduğunu gösterip bu ailenin ne türden bir çözüm olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.

$y = f(x) = (x + c)^2$ fonksiyonu bütün reel sayılarda tanımlı ve türevlenebilirdir. Türevi

$$y' = f'(x) = 2(x + c)$$

olur. Bunları denklemde yerine koyalım:

$$[2(x + c)]^2 - 4(x + c)^2 = 4(x + c)^2 - 4(x + c)^2 = 0.$$

Eşitlik c 'nin **her** değeri ve x 'in her değeri için sağlanır. Demek ki tek bir keyfi sabit içeren $y = (x + c)^2$ ailesinin her üyesi denklemin bir çözümüdür.

Geometrik olarak bu aile, tepe noktası x ekseninde olan ve c değiştikçe yatay yönde kayan birbirinin aynısı parabolardan oluşur; c ne olursa olsun parabol x eksenine tepe noktasında değer.

Çözümün türüne gelince: denklem birinci mertebededir ve ailede bir tane keyfi sabit vardır. Keyfi sabit sayısı mertebeye eşit olduğundan $y = (x + c)^2$ ailesi denklemin **genel çözümüdür**. Sabite belirli bir sayı vererek elde edilen her üye, örneğin $y = (x + 3)^2$, bu genel çözümün bir özel çözümüdür.

■

Örnek 2.4 (Aileden Elde Edilemeyen Bir Çözüm).

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0$$

denkleminin, genel çözümünü olan $y = (x + c)^2$ ailesinden elde edilemeyen bir çözümü var mıdır?

Çözüm.

$y = 0$ sabit fonksiyonunu deneyelim. Bu fonksiyonun türevi $y' = 0$ 'dır ve

$$(0)^2 - 4 \cdot 0 = 0$$

olduğundan $y = 0$ da denklemin bir çözümüdür.

Ancak $y = 0$ fonksiyonu aileden elde edilemez: $(x + c)^2$ ifadesi c 'ye hangi sayısal değeri verirsek verelim özdeş olarak sıfır olmaz, yalnızca tek bir noktada ($x = -c$ noktasında) sıfırdır. Bir fonksiyonun tek bir noktada sıfır olması ile bir aralık boyunca sıfır fonksiyonuna eşit olması aynı şey değildir.

Demek ki $y = 0$, genel çözümdeki keyfi sabite hangi değer verilirse verilsin elde edilemeyen bir çözümdür; yani denklemin bir **tekil çözümüdür**.

■

i Tekil çözüm nerede görülür?

Tekil çözümler yalnızca lineer olmayan denklemlerde ortaya çıkar. Yukarıdaki örneklerdeki denklemlerde türevin karesi bulunduğundan denklem lineer değildir; tekil çözümün varlığı da bununla ilgilidir. Lineer bir denklemin bütün çözümleri genel çözümün içinde yer alır.

Bir aile içinden tek bir çözümü seçmek için denklemin yanında bir ek koşul verilir. Aşağıdaki örnek bu seçimin nasıl yapıldığını gösteriyor.

Örnek 2.5 (Aileden Tek Bir Çözümün Seçilmesi).

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y(0) = 2$$

problemini çözünüz.

Çözüm.

Genel çözüm. Denklemin sağ tarafı yalnızca x 'e bağlı olduğundan, iki tarafın da x 'e göre integralini alarak doğrudan çözebiliriz:

$$y = \int \cos x \, dx = \sin x + c.$$

Burada c keyfi bir sabittir. Bu, denklemin genel çözümüdür: birinci mertebeden bir denklem ve bir tane keyfi sabit. Geometrik olarak bu aile, sinüs eğrisinin düşey yönde kaydırılmış kopyalarından oluşan çözüm eğrileri topluluğudur.

Ek koşulun kullanılması. Çözümün ayrıca $y(0) = 2$ koşulunu sağlamasını istiyoruz. Genel çözümde $x = 0$ yazalım:

$$y(0) = \sin 0 + c = c.$$

Buradan $c = 2$ bulunur. Sabiti yerine koyarsak

$$y(x) = \sin x + 2$$

elde edilir. Bu, sonsuz çoklukta çözüm eğrisi arasından $(0, 2)$ noktasından geçen tek eğridir ve problemin özel çözümüdür.

■

2.5 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (Doğrulama: Üstel Fonksiyon). $y_1(t) = e^t$ fonksiyonunun $y'' - y = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

Fonksiyon bütün reel sayılarda tanımlı ve her mertebeden türevlenebilirdir. Türevleri

$$y_1'(t) = e^t, \quad y_1''(t) = e^t$$

olur. Denklemden yerine koyalım:

$$y_1'' - y_1 = e^t - e^t = 0.$$

Eşitlik her t için sağlandığından $y_1(t) = e^t$ denklemin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir çözümdür.

■

Alıştırma 2.2 (Doğrulama: Hiperbolik Kosinüs). $y_2(t) = \cosh t$ fonksiyonunun $y'' - y = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

Hiperbolik kosinüs

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

biçiminde tanımlıdır ve bütün reel sayılarda türevlenebilirdir. Türevleri sırasıyla

$$y_2'(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$y_2''(t) = \cosh t.$$

İkinci türev fonksiyonun kendisine eşit çıktığı için

$$y_2'' - y_2 = \cosh t - \cosh t = 0$$

olur. Eşitlik her t için sağlanır, dolayısıyla $\cosh t$ de denklemin bir çözümdür.

■

Alıştırma 2.3 (Doğrulama: Sekant Sağ Tarafı Denklem). $0 < t < \frac{\pi}{2}$ aralığında

$$y = (\cos t) \ln \cos t + t \sin t$$

fonksiyonunun $y'' + y = \sec t$ denkleminin bir çözümü olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

Verilen aralıkta $\cos t > 0$ olduğundan $\ln \cos t$ tanımlıdır ve fonksiyon iki kez türevlenebilirdir.

Birinci türev. Çarpım kuralını iki terime de uygulayalım:

$$y' = -\sin t \ln \cos t + \cos t \cdot \frac{-\sin t}{\cos t} + \sin t + t \cos t.$$

Ortadaki terim $-\sin t$ olarak sadeleşir ve üçüncü terimle birbirini götürür:

$$y' = -\sin t \ln \cos t + t \cos t.$$

İkinci türev. Aynı kuralları bir kez daha uygulayalım:

$$y'' = -\cos t \ln \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t - t \sin t.$$

Burada $-\sin t \ln \cos t$ çarpımında $\ln \cos t$ çarpanının türevi alındığında

$$-\sin t \cdot \frac{-\sin t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$$

terimi ortaya çıkar.

Yerine koyma. Şimdi $y'' + y$ toplamını yazalım:

$$y'' + y = -\cos t \ln \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t - t \sin t + (\cos t) \ln \cos t + t \sin t.$$

Logaritmali terimler ve $t \sin t$ terimleri birbirini götürür; geriye

$$\frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} = \sec t$$

kalır. Eşitlik $0 < t < \frac{\pi}{2}$ aralığının her noktasında sağlandığından verilen fonksiyon bu aralıkta denklemin bir çözümüdür. ■

Alıştırma 2.4 (Doğrulama: Kuvvet Fonksiyonu). $t > 0$ için $y_1(t) = t^{-2}$ fonksiyonunun

$$t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

$t > 0$ olduğu sürece t^{-2} tanımlı ve iki kez türevlenebilir. Türevleri

$$y_1'(t) = -2t^{-3}, \quad y_1''(t) = 6t^{-4}.$$

Bu ifadeleri denklemde yerine koyalım:

$$t^2(6t^{-4}) + 5t(-2t^{-3}) + 4t^{-2}.$$

Üsleri toplayarak her terimi t^{-2} cinsinden yazalım:

$$6t^{-2} - 10t^{-2} + 4t^{-2} = (6 - 10 + 4)t^{-2} = 0.$$

Eşitlik her $t > 0$ için sağlandığından $y_1(t) = t^{-2}$ denklemin bu aralıkta bir çözümüdür. ■

Alıştırma 2.5 (Doğrulama: Logaritmali Kuvvet Fonksiyonu). $t > 0$ için $y_2(t) = t^{-2} \ln t$ fonksiyonunun

$$t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$$

denkleminin bir çözümü olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

$t > 0$ için hem t^{-2} hem de $\ln t$ türevlenebilir olduğundan çarpımları da türevlenebilir. Çarpım kuralıyla

$$y_2'(t) = -2t^{-3} \ln t + t^{-2} \cdot \frac{1}{t} = -2t^{-3} \ln t + t^{-3}.$$

İkinci türevi alırken ilk terime yine çarpım kuralını uygulayalım:

$$y_2''(t) = 6t^{-4} \ln t - 2t^{-4} - 3t^{-4} = 6t^{-4} \ln t - 5t^{-4}.$$

Burada $-2t^{-3} \ln t$ teriminin türevi $6t^{-4} \ln t - 2t^{-4}$, t^{-3} teriminin türevi ise $-3t^{-4}$ 'tür. Şimdi denklemin sol tarafını terim terim yazalım:

$$t^2 y_2'' = 6t^{-2} \ln t - 5t^{-2},$$

$$5ty_2' = -10t^{-2} \ln t + 5t^{-2},$$

$$4y_2 = 4t^{-2} \ln t.$$

Bunları toplayalım. Logaritmali terimlerin katsayıları $6 - 10 + 4 = 0$, logaritmasız terimlerin katsayıları ise $-5 + 5 = 0$ verir:

$$t^2 y_2'' + 5t y_2' + 4y_2 = 0.$$

Demek ki $y_2(t) = t^{-2} \ln t$ de denklemin $t > 0$ aralığında bir çözümüdür.

■

Alıştırma 2.6 (Doğrulama: İntegral İçeren Çözüm).

$$y = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}$$

fonksiyonunun $y' - 2ty = 1$ denkleminin bir çözümü olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

e^{-s^2} fonksiyonu sürekli olduğundan, analizin temel teoremi gereği

$$\frac{d}{dt} \int_0^t e^{-s^2} ds = e^{-t^2}$$

olur. Şimdi y' nin türevini alalım; ilk terim bir çarpım olduğundan çarpım kuralını kullanıyoruz:

$$y' = 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2} e^{-t^2} + 2te^{t^2}.$$

Ortadaki terim $e^{t^2} e^{-t^2} = e^0 = 1$ biçiminde sadeleşir:

$$y' = 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + 1 + 2te^{t^2}.$$

Öte yandan verilen fonksiyonun $2t$ katı

$$2ty = 2te^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + 2te^{t^2}$$

olur. İki ifadeyi çıkaralım; integralli terimler ve $2te^{t^2}$ terimleri birbirini götürür:

$$y' - 2ty = 1.$$

Eşitlik her t için sağlandığından verilen fonksiyon denklemin bir çözümüdür. Bu örnek, bir çözümün her zaman bilinen temel fonksiyonlarla sonlu bir formül hâlinde yazılamayabileceğini, bir integrale verilmesinin de yeterli olduğunu göstermektedir.

■

Alıştırma 2.7 (Kapalı Bağıntının Denetlenmesi).

$$\sin(xy) + y^2 - x = 0$$

bağıntısı

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y \cos(xy)}{x \cos(xy) + 2y}$$

denkleminin kapalı çözümü müdür?

Çözüm.

Bağıntıdan y' yi yalnız bırakmak mümkün değildir; bu yüzden kapalı türev alma yolunu izleyeceğiz. y' yi x' in bir fonksiyonu kabul edip iki tarafın x' e göre türevini alalım.

$\sin(xy)$ teriminde önce zincir kuralı, sonra xy çarpımı için çarpım kuralı kullanılır:

$$\frac{d}{dx} \sin(xy) = \cos(xy) \left(y + x \frac{dy}{dx} \right).$$

y^2 teriminin türevi $2y \frac{dy}{dx}$, $-x$ teriminin türevi ise -1 'dir. Hepsini bir araya getirirsek

$$\cos(xy) \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) + 2y \frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Parantezi açalım:

$$y \cos(xy) + x \cos(xy) \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 1.$$

$\frac{dy}{dx}$ içeren terimleri ortak parantezine alalım:

$$\frac{dy}{dx} \left(x \cos(xy) + 2y \right) = 1 - y \cos(xy).$$

$x \cos(xy) + 2y \neq 0$ olan noktalarda iki tarafı bu ifadeye bölelim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y \cos(xy)}{x \cos(xy) + 2y}.$$

Elde ettiğimiz ifade verilen denklemin ta kendisidir. Demek ki bağıntı, $x \cos(xy) + 2y \neq 0$ koşulunun sağlandığı ve bağıntının türevlenebilir bir y fonksiyonu belirlediği her aralıkta denklemin kapalı çözümüdür.

■

2.6 Sonraki Adım

Bu bölümde bir denklemin çözümlerinin çoğu zaman tek bir fonksiyon değil, keyfi sabitler içeren bir aile oluşturduğunu gördük. Son örnekte olduğu gibi, bu aileden tek bir üyeyi seçmek için denklemin yanına ek koşullar konur. Bu koşulların hepsi bağımsız değişkenin aynı değerinde mi verilmiştir, yoksa farklı değerlerinde mi? Bu ayrım problemin türünü belirler ve çözümün varlığı ile tekliği sorusunu gündeme getirir. Bir sonraki bölümde bu konuyu ele alıyoruz: [Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri](#).

3. Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri; Varlık ve Teklik

Bir diferansiyel denklemin tek bir çözümü değil, genellikle bir **çözüm ailesi** vardır: n -inci mertebeden bir denklemin genel çözümü n tane keyfi sabit taşır ve bu sabitlere verilen her değer, düzlemde ayrı bir çözüm eğrisi belirler. Örneğin $y'' + y = 0$ denkleminin çözümleri $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ biçimindedir; c_1 ve c_2 'ye değer vermedikçe elimizde tek bir fonksiyon değil, sonsuz tane fonksiyon vardır.

Oysa bir uygulamada sorulan soru hemen hemen her zaman şudur: “Sistem şu anda şu durumdayken bundan sonra ne olacak?” Bu soru, denklemin yanına **ek koşullar** koymayı gerektirir. Ek koşullar, çözüm ailesinin sonsuz üyesi arasından bizi ilgilendiren tek bir üyeyi seçmeye yarar. Bu bölümde önce ek koşulların iki temel tipini (başlangıç koşulu ve sınır koşulu) ayırt edecek, sonra can alıcı soruyu soracağız: **verilen koşulları sağlayan bir çözüm var mıdır, varsa tek midir?**

Bu soru görüldüğü kadar masum değildir. Göreceğiz ki bazı problemlerin hiç çözümü yok, bazılarının sonsuz çözümü var. Bölümün ikinci yarısında, birinci mertebeden denklemler için bu iki soruya birden cevap veren temel **varlık ve teklik teoremini** (existence and uniqueness theorem) vereceğiz: teorem, bir denklemi hiç çözmeden, yalnızca sağ tarafın sürekliliğine bakarak çözümün varlığını ve tekliğini garanti eder.

3.1 Ek Koşullar: Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri

Ek koşulların nerede verildiği, problemin karakterini tamamen değiştirir. Bütün koşullar **tek bir** x değeri veriliyorsa problem bir tiptedir; koşullar **farklı** x değerlerine dağılmışsa bambaşka bir tiptedir.

Tanım 3.1 (Başlangıç Değer Problemi). n -inci mertebeden bir diferansiyel denklem ile birlikte, tek bir x_0 noktasında verilen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

biçimindeki n tane koşul ele alınsın. Bu koşullara **başlangıç koşulları** (initial conditions), denklem ile koşulların oluşturduğu probleme **başlangıç değer problemi** (initial value problem) denir. x_0 noktasına problemin **başlangıç noktası** denir.

Yani başlangıç değer probleminde bütün bilgi tek bir noktada toplanmıştır: fonksiyonun o noktadaki değeri, türevinin o noktadaki değeri ve gerekiyorsa daha yüksek mertebeden türevlerinin o noktadaki değerleri.

Tanım 3.2 (Sınır Değer Problemi). Bir diferansiyel denklem ile birlikte verilen ek koşullar **en az iki farklı** x değerinde veriliyorsa, bu koşullara **sınır koşulları** (boundary conditions), denklem ile koşulların oluşturduğu probleme **sınır değer problemi** (boundary value problem) denir.

Yani sınır değer probleminde bilgi, üzerinde çalıştığımız aralığın iki ucuna (ya da birden çok noktasına) dağıtılmıştır: bir uçtaki davranışı biliriz, öteki uçtaki davranışı biliriz, arada ne olduğunu denklem söyler. Aradaki farkı şu tablo özetler.

	başlangıç değer problemi	sınır değer problemi
koşulların verildiği nokta	tek bir x_0 noktası	en az iki farklı nokta
ikinci mertebede tipik koşul	$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$	$y(a) = A, y(b) = B$
sezgisel anlamı	“şu andaki durum ve hız”	“iki uçtaki durum”

	başlangıç değer problemi	sınır değer problemi
çözümün varlığı ve tekliği	uygun koşullar altında garanti edilebilir	garanti edilemez

Bir problemin hangi tipte olduğunu anlamak için denklemin kendisine bakmak gerekmez; koşulların **nere**de verildiğine bakmak yeter.

Örnek 3.1 (Koşulların Tek Nuktada Verildiği Bir Problem). Aşağıdaki problem hangi tiptedir?

$$y'' + y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -4$$

Çözüm.

Denklem ikinci mertebeden olduğu için iki ek koşul verilmiştir ve bu iki koşulun ikisi de **aynı** x değerinde, $x = 1$ noktasında okunmaktadır: biri fonksiyonun oradaki değerini, öteki türevinin oradaki değerini söylüyor.

Tanım gereği bu bir **başlangıç değer problemidir**; başlangıç noktası $x_0 = 1$ 'dir.

■

Örnek 3.2 (Koşulların Farklı Noktalarda Verildiği Bir Problem). Aşağıdaki problem hangi tiptedir?

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$$

Çözüm.

Denklem yine ikinci mertebeden ve yine iki koşul var; ama koşullar bu kez iki **farklı** noktada veriliyor: biri $x = 0$, öteki $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında.

Tanım gereği bu bir **sınır değer problemidir**. Dikkat edilirse burada türev hakkında hiçbir bilgi verilmemiş, bunun yerine fonksiyonun iki ayrı noktadaki değeri bildirilmiştir; sınır koşullarının tipik görünümü budur.

■

Her iki problemde de izlenen yol aynıdır: önce denklemin keyfi sabitler içeren genel çözümü bulunur, sonra ek koşullar bu sabitler için bir denklem sistemi verir, sistem çözülerek sabitler belirlenir. Sabitlere belirli değerler verilerek elde edilen çözüme **özel çözüm** (particular solution) denir. Aşağıdaki dört örnek, aynı denklem üzerinde bu yolun nereye çıkabileceğini gösteriyor.

Örnek 3.3 (İki Sabitli Bir Çözüm Ailesinin Doğrulanması). c_1 ve c_2 sabit olmak üzere

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

fonksiyonunun

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

denkleminin genel çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce fonksiyonun her yerde iki kez türevlenebilir olduğuna dikkat edelim: $\cos x$ ve $\sin x$ bütün $\mathbb{R}$ üzerinde istenildiği kadar türevlenebilir olduğundan y , y' ve y'' her $x \in \mathbb{R}$ için vardır. Dolayısıyla denklemdeki bütün terimler anlamlıdır ve geriye tek iş kalır: fonksiyonu denklemde yerine koyup denklemi sağlayıp sağlamadığına bakmak.

Türevleri alalım:

$$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$y''(x) = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

Bu iki ifadeyi denklemin sol tarafında yerine koyalım:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = (-c_1 \cos x - c_2 \sin x) + (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

Sağ taraftaki terimler ikiye ikiye sadeleşir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Eşitlik, c_1 ile c_2 'nin hangi değerleri için olursa olsun ve her $x \in \mathbb{R}$ için sağlanır. Demek ki fonksiyon, sabitlerin her seçimi için denklemin bir çözümüdür.

Bu bir **çözüm ailesi**dir ve ailede birbirinden bağımsız iki keyfi sabit vardır. Denklem ikinci mertebeden olduğu için aranan keyfi sabit sayısı da ikidir; dolayısıyla

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

denklemin genel çözümüdür. Bundan sonraki üç örnekte hep bu aileyi kullanacağız.

■

Örnek 3.4 (Bir Başlangıç Değer Problemi). Aşağıdaki problemi çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

Çözüm.

Her iki koşul da aynı noktada, $x = 0$ noktasında verilmiştir; problem bir başlangıç değer problemidir. Genel çözüm ve türevi

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

biçimindeydi. Şimdi $x = 0$ yazalım. $\cos 0 = 1$ ve $\sin 0 = 0$ olduğundan birinci koşul

$$y(0) = c_1 = 1$$

verir. İkinci koşul ise

$$y'(0) = c_2 = 4$$

verir. İki sabit de doğrudan okunduğuna göre özel çözüm

$$y(x) = \cos x + 4 \sin x$$

olur. Bu çözüm, bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır ve verilen iki koşulu sağlayan tek çözümdür: sabitleri belirleyen denklemler tek çözümlü olduğu için başka bir seçenek yoktur.

■

Örnek 3.5 (Bir Sınır Değer Problemi). Aşağıdaki problemi çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

Çözüm.

Koşullar bu kez iki farklı noktada, $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ noktalarında veriliyor; problem bir sınır değer problemidir.

Genel çözümde önce $x = 0$ alalım:

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 1$$

Şimdi $x = \frac{\pi}{2}$ alalım. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ve $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ olduğundan

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 = 4$$

bulunur. İki sabit de belirlendi; özel çözüm

$$y(x) = \cos x + 4 \sin x$$

olur.

Bir önceki örnekte başlangıç koşullarından çıkan çözümle burada sınır koşullarından çıkan çözüm **aynı** fonksiyon oldu. Bu bir rastlantı değil: bu denklemin genel çözümünde $y'(0) = c_2$ ve $y(\pi/2) = c_2$ olduğundan, “ $y'(0) = 4$ ” koşulu ile “ $y(\pi/2) = 4$ ” koşulu sabitler hakkında birebir aynı bilgiyi taşır. Gösterdiği şey ise geneldir: bir çözüm eğrisi, “bir noktadaki değeri ve eğimi” ile de, “iki ayrı noktadaki değerleri” ile de belirlenebilir. Ne var ki bu iki bilgi türü eşit derecede güvenilir değildir; sıradaki örnek bunu gösteriyor.

■

Örnek 3.6 (Çözümü Olmayan Bir Sınır Değer Problemi). Aynı denklemi bu kez

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 4$$

sınır koşullarıyla ele alınız. Bu problemin çözümü var mıdır?

Çözüm.

Genel çözüm yine

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ve sınır koşullarını sırayla uyguluyoruz. Birinci koşuldan

$$y(0) = c_1 = 1$$

çkar. İkinci koşul için $\cos \pi = -1$ ve $\sin \pi = 0$ değerlerini kullanalım:

$$y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = -c_1$$

Koşul $y(\pi) = 4$ olduğuna göre

$$-c_1 = 4 \Rightarrow c_1 = -4$$

olmalıdır. Ama birinci koşul $c_1 = 1$ demişti. Bir sayı hem 1 hem -4 olamaz: **çelişki**.

Demek ki genel çözüm ailesinin hiçbir üyesi iki koşulu birden sağlayamaz; bu sınır değer probleminin **çözümü yoktur**.

Çelişkinin kaynağını görmek öğreticidir. $x = \pi$ noktasında $\sin \pi = 0$ olduğu için c_2 ikinci denklemden tamamen düşer; elimizde c_1 için iki farklı istek kalır ve bunlar uyuşmaz. Yani sınır koşullarının konduğu noktalar, denklemin çözümlerinin o noktalardaki davranışıyla ters düşebilir. Başlangıç değer problemlerinde böyle bir tehlike yoktur: koşulların hepsi tek noktada verildiği için sabitler birbirini bozmadan sırayla belirlenir.

■

Bu örnek, bölümün ikinci yarısının motivasyonudur. Bir problem yazmak onun bir cevabı olduğu anlamına gelmiyor. O hâlde **çözmeye başlamadan önce** çözümün var olup olmadığını, varsa tek olup olmadığını söyleyen bir ölçüte ihtiyacımız var. Böyle bir ölçüt, birinci mertebeden başlangıç değer problemleri için vardır.

3.2 Varlık ve Teklik Teoremi

Teoremin ifadesinde düzlemin bir parçası üzerinde süreklilik isteneceği için, önce o parçanın ne olduğunu belirleyelim.

Tanım 3.3 (Bölge). Düzlemin açık ve bağlantılı bir $D \subset \mathbb{R}^2$ alt kümesine **bölge** (domain) denir.

Yani bir bölge, her noktasını içine alan küçük bir disk barındıran (açık) ve tek parça olan (bağlantılı) bir düzlem kümesidir; sınırlı bölgeler sezgisel olarak düzlemdeki basit kapalı bir eğrinin içi diye düşünülebilir, ama bir bölge sınırsız da olabilir. Bir açık dikdörtgen, bir açık daire ya da $x > 0$ yarı düzlemi birer bölgedir; sonuncusu sınırsızdır.

Artık teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1 (Temel Varlık ve Teklik Teoremi).

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. D , xy -düzleminde bir bölge olmak üzere

1. f fonksiyonu D üzerinde x ve y 'nin sürekli bir fonksiyonu,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi de D üzerinde x ve y 'nin sürekli bir fonksiyonu

olsun. (x_0, y_0) da D bölgesinin bir noktası olsun. O zaman yeterince küçük bir $h > 0$ sayısı ve $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı **bir ve yalnız bir** ϕ fonksiyonu vardır öyle ki bu aralıktaki her x için

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

ve ayrıca

$$\phi(x_0) = y_0$$

sağlanır.

Yani f ile $\partial f / \partial y$ 'nin sürekli olduğu bir bölgenin içinden hangi noktayı seçersek seçelim, o noktadan geçen bir çözüm eğrisi vardır ve o noktadan **tek** bir çözüm eğrisi geçer.

i Not

Teoremin ispatı, çözümü ardışık yaklaşımlarla (Picard iterasyonu) kuran ve bu dizinin bir büzülme argümanı ile yakınsadığını gösteren bir yöntem üzerine kuruludur; bu notların kapsamı dışında bırakıyoruz. Bizim için önemli olan, teoremin **nasıl kullanılacağıdır**: bir denklem verildiğinde f ile $\partial f / \partial y$ 'yi yazıp süresiz oldukları yerleri işaretlemek, sonra başlangıç noktasının bu yerlerden uzakta kalıp kalmadığına bakmak.

⚠ Teoremin söylemedikleri

Teoremi kullanırken üç sınırı akılda tutmak gerekir.

- **Sonuç yereldir.** Çözümün varlığı yalnızca $|x - x_0| \leq h$ aralığında garanti edilir ve h küçük olabilir. Teorem, çözümün ne kadar geniş bir aralığa uzanacağını söylemez.
- **Koşullar yeterlidir, gerekli değildir.** Hipotezler sağlanmıyorsa teoremden hiçbir sonuç çıkmaz: ne “çözüm vardır” ne de “çözüm yoktur”. O durumda teorem susar.
- **Teorem çözümü bulmaz.** Varlığı ve tekliği garanti eder, ama çözümün formülünü vermez. Formülü bulmak, sonraki bölümlerin yöntemlerinin işidir.

Birinci maddenin ne kadar ciddi olduğunu görmek için, hipotezlerin bütün düzlemde sağlandığı hâlde çözümün küçük bir aralıktan dışarı çıkamadığı bir örneğe bakalım.

Örnek 3.7 (Hipotezler Her Yerde Sağlansa da Çözüm Yerel Olabilir).

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

başlangıç değeri probleminin çözümü hangi aralıkta tanımlıdır?

Çözüm.

Önce hipotezleri denetleyelim:

$$f(x, y) = 1 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Bu iki fonksiyon da iki değişkenli birer polinomdur, dolayısıyla düzlemin **her** noktasında süreklidirler. Başlangıç noktası $(0, 0)$, süreklilik bölgesi olarak alabileceğimiz bütün düzlemin içindedir. Teoremin bütün hipotezleri sağlanır; problemin tek bir çözümü vardır.

Bu çözümü yazalım. $y(x) = \tan x$ fonksiyonunu deneyelim:

$$y'(x) = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

ve

$$y(0) = \tan 0 = 0$$

olduğundan $y = \tan x$ gerçekten problemin çözümüdür. Ne var ki $\tan x$ fonksiyonu $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ iken sınırsız büyür; çözüm ancak

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

aralığında tanımlıdır ve bu aralıktan dışarı hiçbir biçimde genişletilemez.

Buradaki ders şudur: f ile $\partial f / \partial y$ 'nin bütün düzlemde sürekli olması, çözümün bütün $\mathbb{R}$ üzerinde var olacağı anlamına gelmez. Teorem yalnızca başlangıç noktasının yakınında bir aralık vaat eder; o aralığın uzunluğu denklemin kendi davranışına bağlıdır.

■

Şimdi teoremin olağan kullanımına dönelim: verilen bir problemde hipotezleri denetlemek.

Örnek 3.8 (Hipotezlerin Her Yerde Sağlandığı Bir Problem).

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(1) = 3$$

başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.

Denklem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ biçimindedir ve

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Kısmi türevi alalım; x 'i sabit tutup y 'ye göre türev alıyoruz:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$$

Her iki fonksiyon da polinom olduğundan xy -düzleminin **her** bölgesinde süreklidir. Başlangıç koşulu $y(1) = 3$ ise

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 3$$

demektir ve $(1, 3)$ noktası kuşkusuz böyle bir bölgenin içinde yer alır; örneğin

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 2, 2 < y < 4\}$$

açık dikdörtgeni işimizi görür.

Teoremin bütün hipotezleri sağlandı. O hâlde yeterince küçük bir $h > 0$ için $|x - 1| \leq h$ aralığında tanımlı,

$$\phi'(x) = x^2 + \phi(x)^2, \quad \phi(1) = 3$$

koşullarını sağlayan **tek** bir ϕ çözümü vardır.

Bu sonucun değeri şurada: söz konusu denklemin çözümü temel fonksiyonlarla yazılamaz. Yine de çözümü hiç bulmadan, yalnızca sağ tarafa bakarak çözümün var ve tek olduğunu biliyoruz.

■

Örnek 3.9 (Süreksizlik Çizgisinden Kaçınan Bir Bölge).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 2$$

başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.

Burada

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

olur. $\sqrt{x}$ ifadesi yalnızca $x > 0$ için tanımlı ve sıfırdan farklıdır; $x \leq 0$ olan noktalarda ise ne f ne de kısmi türev anlamlıdır. Yani her iki fonksiyon da yalnızca $x > 0$ yarı düzleminde tanımlıdır ve orada süreklidir; y eksen ($x = 0$ doğrusu) ile onun solu bu fonksiyonların tanım kümesinin dışında kalır.

Başlangıç koşulundan

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2$$

Merkezi $(1, 2)$ olan ve y eksenine hiç dokunmayan bir bölge bulabiliriz; örneğin

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, 1 < y < 3 \right\}$$

açık dikdörtgeni yalnızca $x > 0$ noktalarından oluşur. Bu D üzerinde f ve $\partial f / \partial y$ süreklidir, $(1, 2)$ noktası da D 'nin içindedir.

Teoremin hipotezleri sağlandığına göre, yeterince küçük bir $h > 0$ için $|x - 1| \leq h$ aralığında tanımlı ve $\phi(1) = 2$ koşulunu sağlayan tek bir ϕ çözümü vardır.

Bu örnekte önemli olan şudur: f 'nin düzlemin **tamamında** sürekli olması gerekmez. Başlangıç noktasının çevresinde, f ile $\partial f / \partial y$ 'nin tanımsız ya da süreksiz olduğu yerlerden uzak duran **bir** bölge bulabilmek yeter.

■

Örnek 3.10 (Başlangıç Noktası Süreksizlik Üzerindeyse). Aynı denklemi bu kez

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad y(0) = 2$$

başlangıç koşuluyla ele alınız. Çözümün varlığı ve tekliği hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.

Fonksiyonlar bir öncekiyle aynı:

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Değişen tek şey başlangıç noktası:

$$(x_0, y_0) = (0, 2)$$

Bu nokta tam olarak $x = 0$ doğrusunun, yani süreksizlik çizgisinin üzerindedir. $(0, 2)$ noktasını içeren her açık küme, $x \leq 0$ olan noktaları da içerir; oralarda f de $\partial f / \partial y$ de sürekli değildir, hatta tanımlı bile

değildir. Dolayısıyla $(0, 2)$ noktasını, hipotezlerin sağlandığı bir bölgenin içine yerleştirmek **mümkün değildir**.

Sonuç olarak bu problem için teoremden hiçbir şey çıkaramayız. Özellikle iki şeyi birden söyleyemeyiz:

- problemin bir çözümü olduğunu söyleyemeyiz,
- problemin çözümü olmadığını da söyleyemeyiz.

Teorem bu noktada susar; bilgi yok. Çözümün olup olmadığını öğrenmek istiyorsak denklemi elle incelemek zorundayız.

■

3.3 Hipotezler Sağlanmazsa: Tekliğin Bozulması ve Tekil Çözümler

Son örnek, hipotezler sağlanmadığında teoremin sustuğunu gösterdi. Peki sustuğunda gerçekte ne oluyor? Bazen hiçbir şey olmaz, çözüm yine var ve tektir. Bazen ise **teklik gerçekten bozulur**: aynı noktadan birden çok çözüm eğrisi geçer. Aşağıdaki örnek bu ikinci durumun tipik örneğidir.

Örnek 3.11 (Aynı Noktadan Geçen İki Çözüm).

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin birden çok çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce hipotezleri denetleyelim:

$$f(x, y) = \sqrt{y}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

f fonksiyonu yalnızca $y \geq 0$ kapalı yarı düzleminde tanımlıdır ve orada süreklidir. Başlangıç noktamız $(0, 0)$ ise bu yarı düzlemin tam sınırı üzerindedir: $(0, 0)$ noktasını içeren her açık küme $y < 0$ olan noktaları da içerir, oralarda f tanımlı bile değildir. Dolayısıyla daha birinci hipotez için, $(0, 0)$ noktasını içeren ve üzerinde f 'nin sürekli olduğu bir bölge bulunamaz. İkinci hipotez ise çok daha belirgin biçimde bozulur: kısmi türev $y = 0$ için tanımsızdır ve $y \rightarrow 0^+$ iken sınırsız büyür. Teorem susuyor; tekliğin bozulup bozulmadığını elle kontrol edeceğiz.

Birinci çözüm. Sabit fonksiyon $y_1(x) = 0$ olsun. O zaman $y_1'(x) = 0$ ve $\sqrt{y_1(x)} = 0$ olduğundan denklem sağlanır; ayrıca $y_1(0) = 0$ 'dır.

İkinci çözüm. Şimdi parçalı tanımlı

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. $x > 0$ için

$$y_2'(x) = \frac{x}{2} \quad \text{ve} \quad \sqrt{y_2(x)} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}$$

olduğundan denklem sağlanır ($x > 0$ olduğu için karekök $x/2$ verir). $x < 0$ için her iki taraf da sıfırdır. $x = 0$ noktasında ise soldan ve sağdan türevler

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{y_2(h) - 0}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2/4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{4} = 0$$

olarak çıkarılır; yani y_2 sıfırda türevlenebilirdir ve $y_2'(0) = 0 = \sqrt{y_2(0)}$ 'dir. Ayrıca $y_2(0) = 0$ 'dır.

Demek ki y_1 ile y_2 , $x = 0$ noktasını içeren her aralıkta aynı başlangıç değer probleminin **iki farklı** çözümüdür: teklik bozulmuştur.

Dahası, bozulma iki çözümle de sınırlı değildir. Her $a \geq 0$ için

$$y_a(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{(x-a)^2}{4}, & x > a \end{cases}$$

fonksiyonu da aynı problemi çözer: çözüm eğrisi x eksenı boyunca istediği kadar ilerler, sonra istediği anda “ayrılıp” yükselmeye başlar. Yani problemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Tekliğı bozan şey, tam olarak $\partial f / \partial y$ 'nin $y = 0$ üzerinde sürekli olmamasıdır.

■

Bu örnekteki $y \equiv 0$ çözümünün ilginç bir yanı daha vardır: birazdan göreceğimiz gibi, denklemin genel çözüm ailesinde bu fonksiyon yoktur. Genel çözümdeki keyfi sabitlere hangi değer verilirse verilsin elde edilemeyen böyle çözümlere **Çözüm Kavramı ve Çözüm Aileleri** bölümünde **tekil çözüm** adını vermiştik: denklemini sağlar, ama ailenin hiçbir üyesi değildir. Aşağıdaki örnek, tekil çözümlerle tekliğin bozulmasının aynı yerde bulunduğu gösteriyor.

Örnek 3.12 (Bir Tekil Çözüm). c keyfi sabit olmak üzere

$$y(x) = \frac{(x+c)^2}{4}$$

fonksiyonlarının $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$ denkleminin genel çözümü olduğunu gösteriniz ve $y \equiv 0$ fonksiyonunun tekil çözüm olduğunu belirtiniz.

Çözüm.

Önce ailenin denklemi sağladığını doğrulayalım. Türev alalım:

$$y'(x) = \frac{2(x+c)}{4} = \frac{x+c}{2}$$

Öte yandan

$$\sqrt{y(x)} = \sqrt{\frac{(x+c)^2}{4}} = \frac{|x+c|}{2}$$

Bu iki ifadenin eşit olması için $x+c \geq 0$, yani $x \geq -c$ olması gerekir. O hâlde

$$y(x) = \frac{(x+c)^2}{4}, \quad x \geq -c$$

denklemin bir çözümüdür ve c keyfi olduğundan tek parametrelı bir çözüm ailesi elde ederiz. Denklem birinci mertebeden olduğu ve ailede bir keyfi sabit bulunduğu için bu aile genel çözümdür.

Şimdi $y \equiv 0$ fonksiyonuna bakalım. Bir önceki örnekte bunun denklemi sağladığını görmüştük. Ama ailenin bir üyesi midir? Olması için, her x değeri için

$$\frac{(x+c)^2}{4} = 0$$

olmasını sağlayan bir c sabiti bulmalıyız. Sabit bir c için bu eşitlik yalnızca $x = -c$ noktasında doğrudur, bir aralık boyunca değil. Dolayısıyla hiçbir c değeri sıfır fonksiyonunu vermez.

Sonuç: $y \equiv 0$, denklemin genel çözümünden elde edilemeyen bir çözümdür; yani bir **tekil çözüm**dür. Bu, teklik bozulmasının geometrik resmini de tamamlar. $y = 0$ doğrusu, ailedeki bütün parabol parçalarının teğet olarak ayrıldığı bir “zarf” görevi görür; bu doğru üzerindeki her noktadan hem doğrunun kendisi hem de bir parabol parçası geçer. Zaten bu doğru, $\partial f / \partial y$ 'nin tanımsız kaldığı yerdir.

■

İpucu

Bir problemle karşılaştığımızda izlenecek yol şudur: denklemi $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ biçiminde yazın, $\partial f / \partial y$ 'yi hesaplayın, ikisinin tanımsız ya da süreksiz olduğu noktaları işaretleyin ve başlangıç noktasının bu kümeden uzak olup olmadığına bakın. Uzaksa çözüm var ve tektir. Üzerindeyse teorem susar; teklik bozulmuş olabilir ve ortada bir tekil çözüm bulunabilir.

3.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda, $y'' + y = 0$ denkleminin genel çözümünün $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ olduğunu kullanabilirsiniz.

Alıştırma 3.1 (Tek Çözümlü Bir Sınır Değer Problemi).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

problemini çözünüz.

Çözüm.

Koşullar iki farklı noktada verildiğinden bu bir sınır değer problemidir. Genel çözümde $x = 0$ alalım:

$$y(0) = c_1 = 2$$

Şimdi $x = \frac{\pi}{2}$ alalım:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2 = -3$$

İki sabit de belirlendi. Özel çözüm

$$y(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$$

Bu problemde sabitler birbirinden bağımsız olarak okunabildiği için çelişki çıkmadı ve çözüm tek oldu. ■

Alıştırma 3.2 (Sonsuz Çözümlü Bir Sınır Değer Problemi).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

probleminin kaç çözümü vardır?

Çözüm.

Birinci koşuldan

$$y(0) = c_1 = 0$$

çıkar. İkinci koşulda $\cos \pi = -1$ ve $\sin \pi = 0$ değerlerini kullanalım:

$$y(\pi) = -c_1 = 0$$

Bu eşitlik, $c_1 = 0$ olduğu için **kendiliğinden** sağlanır; c_2 hakkında hiçbir bilgi vermez. Demek ki c_2 serbest kalır ve

$$y(x) = c_2 \sin x$$

fonksiyonlarının hepsi problemin çözümüdür. Problemin **sonsuz çoklukta** çözümü vardır.

Bu alıştırmayı, çözümü olmayan sınır değer problemiyle yan yana koymak öğreticidir: her iki durumda da $\sin \pi = 0$ olması yüzünden c_2 ikinci denklemden düşer. Kalan denklem c_1 için bir çelişki üretirse

çözüm yok olur, kendiliğinden sağlanırsa sonsuz çözüm ortaya çıkar. Sınır değer problemlerinde “tek çözüm” kuralın kendisi değil, şanslı hâlidir.

■

Alıştırma 3.3 (Üstel Çözüm Ailesiyle Bir Başlangıç Değer Problemi). $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ fonksiyonlarının $y'' - 4y = 0$ denkleminin genel çözümü olduğu biliniyor. Buna göre

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm.

Genel çözümün türevini alalım:

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$x = 0$ yazalım; $e^0 = 1$ olduğundan koşullar

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 0$$

denklemlerini verir. İkinci denklemden $c_1 = c_2$ bulunur; bunu birinci denklemde yerine koyarsak $2c_1 = 1$, yani

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

olur. Özel çözüm

$$y(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x$$

Koşulların ikisi de tek bir noktada verildiği için sabitleri belirleyen sistem tek çözümlüdür; problemin tek çözümü budur.

■

Alıştırma 3.4 (Bir Doğrudan Uzak Duran Başlangıç Noktası).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}, \quad y(2) = 1$$

probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.

Sağ tarafı adlandıralım:

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

Bu fonksiyon, payda sıfır olmadıkça yani $x + y \neq 0$ oldukça süreklidir. Kısmi türevi bölüm kuralıyla hesaplayalım:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(-1)(x+y) - (x-y)(1)}{(x+y)^2}$$

Payı sadeleştiririm:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

Bu da $x + y \neq 0$ oldukça süreklidir. Demek ki her iki fonksiyon da yalnızca $y = -x$ doğrusu üzerinde süreksizdir.

Başlangıç noktası $(2, 1)$ için $x + y = 3 \neq 0$ 'dır; nokta bu doğrunun üzerinde değildir. Örneğin

$$D = \{(x, y) : x + y > 0\}$$

yarı düzlemi açık ve bağlantılıdır, $(2, 1)$ noktasını içerir ve üzerinde her iki hipotez de sağlanır.

O hâlde yeterince küçük bir $h > 0$ için $|x - 2| \leq h$ aralığında tanımlı ve $\phi(2) = 1$ koşulunu sağlayan tek bir ϕ çözümü vardır.

■

Alıştırma 3.5 (Teoremin Sustuğu Bir Problem).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1}, \quad y(1) = 3$$

problemde teoremin hipotezlerini denetleyiniz ve sonucu yorumlayınız.

Çözüm.

Fonksiyonları yazalım:

$$f(x, y) = \frac{y}{x-1}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x-1}$$

Her ikisi de $x = 1$ doğrusu üzerinde tanımsız, dolayısıyla süreksizdir. Başlangıç noktası $(1, 3)$ tam olarak bu doğrunun üzerindedir; $(1, 3)$ 'ü içeren her açık küme $x = 1$ noktalarını da içereceğinden, hipotezlerin sağlandığı bir bölge bulunamaz. Teorem bu problem hakkında hiçbir bilgi vermez.

Burada “bilgi yok” demenin “çözüm yok” demek olmadığını vurgulamak gerekir; ama bu özel problemde çözümün gerçekten olmadığını doğrudan gösterebiliriz. Problemin bir ϕ çözümü olsaydı, ϕ başlangıç noktası $x_0 = 1$ 'i içeren bir aralığın her noktasında denklemini sağlamak zorundaydı. Özellikle $x = 1$ noktasında

$$\phi'(1) = \frac{\phi(1)}{1-1}$$

eşitliğini yazabilmemiz gerekirdi; oysa payda sıfır, pay ise $\phi(1) = 3 \neq 0$ olduğundan sağ taraf tanımsızdır. Denklem tam da başlangıç noktasında anlamını yitirdiğine göre, bu problemin hiçbir çözümü yoktur.

Aynı sonucu denklemin çözüm eğrileri üzerinden de görebiliriz. c sabit olmak üzere

$$y(x) = c(x-1)$$

fonksiyonlarını deneyelim:

$$y'(x) = c \quad \text{ve} \quad \frac{y(x)}{x-1} = \frac{c(x-1)}{x-1} = c$$

olduğundan bunlar $x \neq 1$ için denklemin çözümleridir. Ama her c için

$$y(1) = c \cdot 0 = 0$$

olur; bu ailedeki bütün doğrular $x \rightarrow 1$ iken tek bir noktaya, $(1, 0)$ noktasına yaklaşır. $(1, 3)$ noktası onların hiçbirinin erişemediği bir noktadır; yukarıda gösterdiğimiz gibi, başka hiçbir çözüm de oraya erişemez. Teoremin susması, kötü şeylerin olabileceği anlamına gelir; burada olmuştur.

■

Alıştırma 3.6 (Tekliğin Bozulduğu Başka Bir Problem).

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

probleminin en az iki çözümü olduğunu gösteriniz ve bunun teoremle çelişmediğini açıklayınız.

Çözüm.

Önce iki çözüm bulalım.

Birinci çözüm. $y_1(x) = 0$ alalım. Bu durumda $y_1'(x) = 0$ ve $y_1(x)^{2/3} = 0$ olduğundan denklem sağlanır; ayrıca $y_1(0) = 0$ 'dır.

İkinci çözüm. $y_2(x) = \frac{x^3}{27}$ alalım. Türevi

$$y_2'(x) = \frac{3x^2}{27} = \frac{x^2}{9}$$

Sağ tarafı hesaplayalım:

$$y_2(x)^{2/3} = \left(\frac{x^3}{27}\right)^{2/3} = \frac{x^2}{9}$$

İki taraf eşittir; ayrıca $y_2(0) = 0$ 'dır. Demek ki y_2 de problemin çözümüdür ve y_1 ile y_2 farklı fonksiyonlardır.

Şimdi bunun teoremle neden çelişmediğine bakalım:

$$f(x, y) = y^{2/3}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$

f bütün düzlemde süreklidir, ama kısmi türev $y = 0$ üzerinde tanımsızdır. Başlangıç noktası $(0, 0)$ tam da orada bulunduğu için ikinci hipotez sağlanmaz. Teorem hipotezleri sağlanmayan bir problem hakkında hiçbir şey iddia etmediği için teklifin bozulması bir çelişki yaratmaz; tersine, hipotezlerin gereksiz olmadığını gösterir.

■

Bu bölümde, verilen bir denklemden yola çıkıp koşulları sağlayan çözümü bulduk: genel çözümdeki keyfi sabitleri ek koşullarla belirledik. Bir sonraki bölümde yolu tersine yürüyeceğiz. Elimizde keyfi sabitler içeren bir eğri ailesi varsa, türev alarak bu sabitleri yok edip ailenin sağladığı diferansiyel denklemi kuracağız: [Keyfi Sabitlerin Yok Edilmesi](#).

4. Keyfi Sabitlerin Yok Edilmesi

Buraya kadar hep aynı yönde çalıştık: elimizde bir diferansiyel denklem vardı, onu sağlayan fonksiyonları arıyorduk. Bu arayışın sonunda karşımıza çıkan şeyin tek bir fonksiyon değil, keyfi sabitler içeren bir **fonksiyon ailesi** olduğunu gördük. Örneğin $y' = 2x$ denkleminin çözümleri $y = x^2 + c$ parabolleridir; c 'nin her değeri düzlemde başka bir eğri verir ve hepsi birden denklemin genel çözümünü oluşturur.

Bu bölümde oku ters çeviriyoruz. Artık başlangıç noktamız bir denklem değil, bir **eğri ailesi** olacak: “orijinden geçen bütün doğrular”, “merkezi orijinde olan bütün çemberler”, “ $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ biçimindeki bütün fonksiyonlar” gibi. Soru şudur: bu ailenin **bütün** üyelerinin sağladığı, içinde hiçbir keyfi sabit bulunmayan bir diferansiyel denklem yazabilir miyiz?

Bu ters soru görüldüğünden daha önemlidir. Bir olguyu modellerken çoğu zaman elimizde önce ailenin geometrik ya da fiziksel özelliği bulunur; modelin denklemi bu özellikten üretilir. Ayrıca bir denklemin genel çözümünü bulduğumuzda, çözümü geri türetip aynı denkleme varmak yaptığımız işi sınamanın en hızlı yoludur. Yöntemin kendisi de tek cümleyle özetlenebilir: **sabitleri türev olarak yok ederiz**.

4.1 Eğri Ailesi ve Keyfi Sabitler

$y = cx$ yazdığımızda tek bir eğri değil, bir eğri yığını tanımlarız: $c = 1$ için $y = x$ doğrusu, $c = -2$ için $y = -2x$ doğrusu ve benzeri. Sabitin her değeri düzlemde bir eğri çizer; “aile” sözcüğü işte bu yığını anlatır. Ailede kaç bağımsız sabit bulunduğu, birazdan göreceğimiz gibi, üreteceğimiz denklemin mertebesini doğrudan belirleyecek.

Tanım 4.1 (Eğri Ailesi ve Esas Keyfi Sabitler). F yeterince türevlenebilir bir fonksiyon ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ birer sabit olmak üzere

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

bağıntısının, sabitlerin aldığı her uygun değer için düzlemde belirlediği eğrilerin oluşturduğu topluluğa **n -parametrel eğri ailesi** (n -parameter family of curves) denir. Buradaki $c_1, \dots, c_n$ sayılarına ailenin **keyfi sabitleri** (arbitrary constants) denir.

Bu sabitler, aile daha az sayıda sabitle de yazılamıyorsa, yani sabitlerin hiçbir grubu birleştirilerek daha az sayıda sabite indirgenemiyorsa **esas** (essential) sayılır.

Yani bir eğri ailesi, tek bir bağıntıya sabitlerin her değeri için ayrı bir eğri okutmaktır; esas sabit sayısı ise aileyi tanımlamak için gerçekten gereken bağımsız parametre sayısıdır.

Örnek 4.1 (Orijinden Geçen Doğrular). Orijinden geçen ve düşey olmayan bütün doğrular $y = cx$ ailesini oluşturur. Bu ailenin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Ailede tek bir keyfi sabit var. Bağıntının x 'e göre türevini alalım:

$$y' = c$$

Sabit, türevin kendisine eşit çıktı. Bunu asıl bağıntıda c yerine yazalım:

$$y = y'x$$

Düzenlersek ailenin diferansiyel denklemi

$$xy' - y = 0$$

olur. İçinde artık c yok; denklem birinci mertebeden ve lineerdir.

Elde ettiğimiz denklemi $x \neq 0$ için $y' = \frac{y}{x}$ biçiminde yazarsak geometrik anlamı da okunur: eğrinin bir noktadaki eğimi, o noktayı orijine birleştiren doğru parçasının eğimine eşittir. Ailenin tanımı buydu zaten.

■

Sabitlerin **esas** olması şartı üzerinde biraz durmak gerekir, çünkü bir bağıntıda göz kaç harf görüyorsa o kadar bağımsız parametre var sanmak kolay bir yanılgıdır.

Örnek 4.2 (Görünürdeki Sabit Sayısı Aldatıcı Olabilir). $y = Ae^{x+B}$ ailesinde kaç esas keyfi sabit vardır? Ailenin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Bağıntıda A ve B diye iki harf geçiyor, ama üstel fonksiyonun çarpım kuralı bunları birleştiriyor:

$$y = Ae^{x+B} = Ae^B e^x$$

Burada Ae^B çarpımı tek bir sayıdır. $C = Ae^B$ dersek aile

$$y = Ce^x$$

hâline gelir; demek ki esas keyfi sabit sayısı ikiden değil **birden** ibarettir. O hâlde bir kez türev almak yeter:

$$y' = Ce^x = y \Rightarrow y' - y = 0$$

Sabit sayısını iki sanıp iki kez türev alsaydık $y'' - y = 0$ denkleminde varırdık. Ailenin her üyesi bu denklemi de sağlar, ama denklem ailemizden daha geniş bir çözüm topluluğuna sahiptir: örneğin $y = e^{-x}$ fonksiyonu $y'' - y = 0$ 'ı sağlar, oysa $y = Ce^x$ ailesinin bir üyesi değildir. Bu yüzden sabitleri saymadan önce onları sadeleştirmek gerekir.

■

4.2 Yöntem: Türev Alıp Sabitleri Yok Etmek

Fikir basittir. Elimizdeki bağıntı sabitleri içeriyor; ama bağıntının x 'e göre türevi bize **yeni** bir bağıntı verir ve bu yeni bağıntıda sabitler farklı biçimde görünür. Yeterince türev alırsak, sabitleri bilinmeyen sayıp bu bağıntılardan çözebilecek kadar denkleminiz olur. Sabitleri çözüp geriye kalan bağıntıya yerleştirdiğimizde ise ortada sabit kalmaz.

n esas keyfi sabit içeren bir aile için adımlar şunlardır:

1. Aileyi veren bağıntıyı yazıp **esas** keyfi sabit sayısını belirle; buna n de.
2. Bağıntının x 'e göre türevini ardışık olarak n kez al. Türev alırken y 'nin x 'in fonksiyonu olduğunu unutma (kapalı biçimde verilmiş ailelerde zincir kuralı gerekir).
3. Böylece elinde biri asıl bağıntı olmak üzere $n + 1$ tane bağıntı olur. Bunları $c_1, \dots, c_n$ bilinmeyenli bir denklem sistemi gibi gör.
4. Sabitleri bu bağıntılardan çöz ve kullanmadığın bağıntıya yerleştir; ya da bağıntıları birbiriyle toplayıp çıkararak sabitleri doğrudan düşür. Hangi yolun kısa olduğu ailenin biçimine bağlıdır.
5. Sonuçta içinde hiçbir sabit bulunmayan ve en yüksek türev olarak $y^{(n)}$ içeren bir denklem kalır: ailenin diferansiyel denklemini.

Adım sayısının neden tam olarak sabit sayısına eşit olduğunu ayrıca kayda geçirelim.

Teorem 4.1 (Sabit Sayısı Mertebeyi Belirler). $F(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ bağıntısı n esas keyfi sabit içeren bir eğri ailesi belirlsin, F gereken mertebeden sürekli türevlenebilir olsun ve söz konusu bölgede $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ olsun. Bağıntı ile onun x 'e göre ardışık ilk $n - 1$ türevinden oluşan sistemden $c_1, \dots, c_n$ sabitleri çözülebiliyorsa, sabitler yok edildiğinde geriye

$$(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

biçiminde **n -inci mertebeden** bir adi diferansiyel denklem kalır ve ailenin her üyesi bu denklemi sağlar.

İspat.

Bağıntının x 'e göre türevini ardışık olarak n kez alalım. Elimizde

$$F = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^n F}{dx^n} = 0$$

biçiminde toplam $n + 1$ bağıntı olur. Bu bağıntıların her birinde bilinmeyen olarak yalnızca $c_1, \dots, c_n$ sabitleri, veri olarak da $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ büyüklükleri bulunur.

İlk n bağıntıyı alalım; bunlar n bilinmeyenli bir sistemdir ve içlerinde en yüksek türev $y^{(n-1)}$ 'dir. Varsayım gereği bu sistemden sabitler çözülebilir:

$$c_k = \varphi_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Bulunan bu ifadeleri kullanılmadan kalan son bağıntıya, yani $\frac{d^n F}{dx^n} = 0$ bağıntısına yerleştirelim. Ortaya çıkan bağıntıda hiçbir keyfi sabit kalmaz.

Geriye kalan denklemin mertebesinin gerçekten n olduğunu görmek için $y^{(n)}$ türevinin bu son bağıntıya nasıl girdiğine bakalım. İlk türevde

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

olur; en yüksek türev $\frac{\partial F}{\partial y}$ katsayısıyla görünür. Bir kez daha türev aldığımızda $\frac{\partial F}{\partial y}$ çarpanının türevi yalnızca x, y, y' büyüklüklerine bağlıdır, dolayısıyla y'' yine tek bir yerden, $\frac{\partial F}{\partial y} y''$ teriminden gelir. Aynı gerekçe her basamakta yinelenir ve

$$\frac{d^n F}{dx^n} = \frac{\partial F}{\partial y} y^{(n)} + \varphi_n(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

biçimi elde edilir; buradaki H terimi $y^{(n)}$ içermez. Yerine koyduğumuz φ_k ifadeleri de yalnızca $x, y, \dots, y^{(n-1)}$ büyüklüklerine bağlı olduğundan $y^{(n)}$ 'in katsayısını değiştirmez. Varsayım gereği bu katsayı sıfırdan farklı olduğuna göre elde edilen denklem gerçekten $y^{(n)}$ içerir; yani denklem n -inci mertebededir.

Son olarak, ailenin herhangi bir üyesi alındığında bu üye tanım gereği $F = 0$ bağıntısını sağlar; türev alma işlemi eşitliği bozmadığından bütün türev bağıntılarını da sağlar. Yok etme işlemi bu bağıntıların cebirsel birleşiminden ibaret olduğu için ailenin her üyesi son denklemini de sağlar.

■

Yani bir ailede kaç esas sabit varsa, üreteceğimiz denklemin mertebesi odur: tek sabit birinci mertebeden, iki sabit ikinci mertebeden bir denklem verir.

4.3 Tek Keyfi Sabitli Aileler

Tek sabitli ailelerde işin tamamı iki bağıntıdan ibarettir: ailenin kendisi ve bir kez türevi. Sabiti bunlardan birinden çözüp diğerine koymak yeterlidir.

Örnek 4.3 (Sinüs Kareli Aile). c bir sabit olmak üzere genel çözümü $y(x) = (c + \sin x)^2$ olan diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm.

Ailede tek bir keyfi sabit bulunduğu için bir kez türev almak yeter. Zincir kuralıyla

$$y' = 2(c + \sin x) \cos x$$

Türevde c hâlâ duruyor; onu yok etmek için $c + \sin x$ çarpanını yalnız bırakalım. $\cos x \neq 0$ olan noktalarda

$$c + \sin x = \frac{y'}{2 \cos x}$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi asıl bağıntıda yerine koyalım:

$$y = (c + \sin x)^2 = \left(\frac{y'}{2 \cos x} \right)^2 = \frac{(y')^2}{4 \cos^2 x}$$

Paydadan kurtulup her şeyi bir yana toplarsak ailenin diferansiyel denklemi

$$(y')^2 - 4y \cos^2 x = 0$$

olur. Denklem birinci mertebededir, ama y' karesiyle girdiği için **lineer değildir**.

Ara adımda $\cos x \neq 0$ varsaymıştık. Buna karşılık son denklem $\cos x = 0$ olan noktalarda da sağlanır: orada $y' = 2(c + \sin x) \cos x = 0$ olduğundan denklemin her iki terimi de sıfırdır. Dolayısıyla bulduğumuz denklem ailenin bütün üyeleri için, bütün x değerlerinde geçerlidir.

■

Her zaman sabiti tek başına çözmek zorunda değiliz; bazen sabit türev alınca kendiliğinden düşer.

Örnek 4.4 (Merkezi Orijinde Olan Çemberler). Merkezi orijinde olan bütün çemberler $x^2 + y^2 = c^2$ ailesiyle verilir ($c > 0$). Bu ailenin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Bağıntı kapalı biçimde verilmiş; y' 'yi x 'in fonksiyonu sayarak iki yanın türevini alalım. Soldaki y^2 teriminin türevi zincir kuralıyla $2yy'$ olur, sağ taraf sabit olduğundan türevi sıfırdır:

$$2x + 2y y' = 0$$

İki yanı 2'ye bölersek ailenin diferansiyel denklemi

$$x + y y' = 0$$

olur. Burada sabiti çözmek için ayrıca uğraşmadık: c bağıntıda yalnız başına bir sabit terim olarak durduğu için türev alınca kendiliğinden yok oldu.

Denklemini $y \neq 0$ için $y' = -\frac{x}{y}$ biçiminde yazarsak yine geometrik bir okuma çıkar: teğetin eğimi $-\frac{x}{y}$, aynı noktadan orijine giden yarıçapın eğimi ise $\frac{y}{x}$ 'tir. İki eğimin çarpımı -1 olduğuna göre teğet ile yarıçap birbirine diktir; çemberin bu temel özelliği denklemde böyle okunur.

■

Sabit, bağıntıya lineer olmayan biçimde girdiğinde de yöntem değişmez; yalnızca yerine koyma adımı biraz daha cebir gerektirir.

Örnek 4.5 (Sabitli Kareli Giren Doğru Ailesi). $y = cx + c^2$ doğru ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Tek keyfi sabit var, bir kez türev alıyoruz. c sabit olduğundan c^2 terimi düşer:

$$y' = c$$

Sabit yine doğrudan türeve eşit çıktı. Bunu asıl bağıntıda yerine koyalım:

$$y = x y' + (y')^2$$

Bu, ailenin diferansiyel denklemidir. Birinci mertebededir; y' hem çarpım hem kare olarak girdiği için lineer değildir.

■

i Ailenin dışında kalan bir çözüm

Yukarıdaki $y = xy' + (y')^2$ denklemini $y = -\frac{x^2}{4}$ parabolü de sağlar. Gerçekten $y' = -\frac{x}{2}$ olduğundan sağ taraf

$$x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

çıkar. Oysa bu parabol, c 'ye hangi değer verilirse verilsin $y = cx + c^2$ ailesinden elde edilemez; genel çözüm ailesinin dışında kalan böyle bir çözüm, Tanım 2.4 anlamında bir tekil çözümdür. Demek ki bir aileden üretilen denklemin çözüm kümesi, aileden daha geniş olabilir.

4.4 İki Keyfi Sabitli Aileler

İki sabitli ailelerde iki kez türev alırız ve elimizde üç bağıntı olur. Bu üç bağıntıdan iki sabiti yok etmenin iki yolu vardır: bağıntıları uygun katsayılarla toplayıp sabitleri sırayla düşürmek ya da sabitleri doğrudan çözüp yerine koymak.

Örnek 4.6 (İki Üstel Terimli Aile). c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere genel çözümü $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ olan diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm.

İki keyfi sabit var, bu yüzden iki kez türev alacağız:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{-3x}$$

Önce c_2 'yi düşürelim. Birinci bağıntıyı 3 ile çarpıp ikinciyle toplarsak e^{-3x} terimleri birbirini götürür:

$$y' + 3y = 5c_1 e^{2x}$$

Aynı işlemi bir basamak yukarıda, ikinci ve üçüncü bağıntılarla yapalım:

$$y'' + 3y' = 10c_1 e^{2x}$$

Şimdi elimizde yalnızca c_1 içeren iki bağıntı var ve sağ taraflar birbirinin katı: ikincisi birincisinin tam iki katıdır. O hâlde

$$y'' + 3y' = 2(y' + 3y)$$

yazabiliriz. Sağ tarafı dağıtıp her şeyi sol yana toplarsak ailenin diferansiyel denklemi

$$y'' + y' - 6y = 0$$

olur. Beklediğimiz gibi ikinci mertebeden, üstelik sabit katsayılı ve lineer bir denklem elde ettik.

■

Örnek 4.7 (Sinüs ve Kosinüsün Birleşimi). $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

İki sabit olduğu için iki kez türev alıyoruz:

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

Son satırdaki ifadeyi dikkatle okuyalım: parantezine alırsak

$$y'' = -(c_1 \cos x + c_2 \sin x) = -y$$

Burada hiçbir cebirsel uğraşa gerek kalmadı, çünkü ikinci türev tam da asıl bağıntının ters işaretlisi çıktı. Ailenin diferansiyel denklemi

$$y'' + y = 0$$

olur. Bu denklemin, yay ve sarkaç gibi salınım problemlerinde karşımıza çıkan temel denklem olduğunu ileride göreceğiz.

■

Örnek 4.8 (Kuvvetlerin Birleşimi). $y = c_1 x + c_2 x^2$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Bu örnekte sabitleri bilinmeyen sayıp doğrudan çözme yolunu deneyelim. İki kez türev alalım:

$$y' = c_1 + 2c_2 x$$

$$y'' = 2c_2$$

Son bağıntı c_2 'yi hemen veriyor:

$$c_2 = \frac{y''}{2}$$

Bunu bir önceki bağıntıda yerine koyup c_1 'i çekelim:

$$c_1 = y' - 2c_2 x = y' - x y''$$

Şimdi bulduğumuz iki ifadeyi asıl bağıntıya yerleştirelim:

$$y = (y' - x y'')x + \frac{y''}{2} x^2 = x y' - x^2 y'' + \frac{x^2}{2} y''$$

Sağ taraftaki y'' terimlerini birleştirirsek

$$y = x y' - \frac{x^2}{2} y''$$

kalır. İki yanı 2 ile çarpıp düzenlersek ailenin diferansiyel denklemi

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0$$

olur. İkinci mertebeden, lineer, ama bu kez **değişken katsayılı** bir denklem elde ettik.

■

4.5 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (Tek Üstel Terim). $y = ce^{-2x}$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Tek sabit var, bir kez türev alıyoruz:

$$y' = -2ce^{-2x}$$

Sağ taraftaki ce^{-2x} ifadesi asıl bağıntıya göre y 'ye eşittir. Yerine koyarsak

$$y' = -2y \Rightarrow y' + 2y = 0$$

Birinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer bir denklem.

■

Alıştırma 4.2 (Logaritmik Aile). $y = \ln(x + c)$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz ($x + c > 0$).

Çözüm.

Sabiti yalnız bırakmak için bağıntıyı üstel biçimde yazmak işi kolaylaştırır. İki yanın üstelini alırsak

$$e^y = x + c$$

Şimdi iki yanın x 'e göre türevini alalım; solda zincir kuralı gerekir:

$$e^y y' = 1$$

Sağ taraftaki sabit türev alınırken kendiliğinden düştü. Ailenin diferansiyel denklemi

$$e^y y' - 1 = 0$$

olur; istenirse $y' = e^{-y}$ biçiminde de yazılır. Birinci mertebededir ve y üstel olarak girdiği için lineer değildir.

■

Alıştırma 4.3 (Orijinden Geçen Çemberler). Merkezleri x ekseninde olan ve orijinden geçen çemberler $x^2 + y^2 = cx$ ailesiyle verilir. Bu ailenin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Önce iki yanın x 'e göre türevini alalım:

$$2x + 2y y' = c$$

Görüldüğü gibi c türevden sonra da duruyor; bu yüzden onu asıl bağıntıdan çekelim. $x \neq 0$ için

$$c = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

Bu ifadeyi türev bağıntısında yerine koyalım:

$$2x + 2y y' = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

İki yanı x ile çarpalım:

$$2x^2 + 2xy y' = x^2 + y^2$$

Her şeyi bir yana toplarsak ailenin diferansiyel denklemi

$$x^2 - y^2 + 2xy y' = 0$$

olur. Birinci mertebededir ve lineer değildir.

■

Alıştırma 4.4 (Üstel Terimlerin Toplamı). $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

İki sabit var, iki kez türev alıyoruz:

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

İkinci türev, asıl bağıntının sağ tarafıyla birebir aynı çıktı:

$$y'' = y$$

Ailenin diferansiyel denklemi

$$y'' - y = 0$$

olur. İkinci mertebeden, sabit katsayılı, lineer bir denklem.

■

Alıştırma 4.5 (Katlı Kök Durumu). $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

İki sabit var. Çarpım kuralıyla birinci türevi alalım:

$$y' = c_1 e^x + c_2 (e^x + x e^x)$$

Buradan asıl bağıntıyı çıkarırsak c_1 ve $x e^x$ terimleri gider:

$$y' - y = c_2 e^x$$

Elimizde tek sabitli, daha sade bir bağıntı kaldı. Bunun da türevini alalım:

$$y'' - y' = c_2 e^x$$

Son iki bağıntının sağ tarafları aynı olduğundan sol taraflar da eşittir:

$$y'' - y' = y' - y$$

Düzenlersek ailenin diferansiyel denklemi

$$y'' - 2y' + y = 0$$

olur. İki kez türev alıp sabitleri sırayla düşürme yolunun, sabitleri doğrudan çözmekten çoğu zaman kısa olduğuna dikkat ediniz.

■

Alıştırma 4.6 (Sabit Terimli Aile). $y = c_1 + c_2 e^{3x}$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

İki sabit var, iki kez türev alıyoruz. Birinci türevde sabit terim c_1 kendiliğinden düşer:

$$y' = 3c_2 e^{3x}$$

$$y'' = 9c_2 e^{3x}$$

Son iki bağıntıyı karşılaştıralım: ikinci türev, birinci türevin tam üç katıdır.

$$y'' = 3y'$$

Ailenin diferansiyel denklemi

$$y'' - 3y' = 0$$

olur. Dikkat edilirse denklemde y hiç görünmüyor; bunun nedeni c_1 sabitinin bağıntıya yalnızca toplanan sabit terim olarak girmesidir.

■

Alıştırma 4.7 (Yarıçapı Bir Olan Çemberler). Merkezleri x ekseninde olan ve yarıçapı 1 olan çemberler $(x - c)^2 + y^2 = 1$ ailesiyle verilir. Bu ailenin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm.

Tek sabit var. İki yanın x 'e göre türevini alalım:

$$2(x - c) + 2y y' = 0$$

Buradan sabiti içeren ifadeyi yalnız bırakırız:

$$x - c = -y y'$$

Bu ifadeyi asıl bağıntıda $x - c$ yerine koyalım:

$$(-y y')^2 + y^2 = 1$$

Kareyi açarsak ailenin diferansiyel denklemi

$$y^2 (y')^2 + y^2 = 1$$

olur; ortak çarpan parantezine alırsak $y^2 [(y')^2 + 1] = 1$ biçimini alır. Birinci mertebededir ve lineer değildir.

■

Bu bölümde eğri ailesinden denkleme giden yolu öğrendik: sabit sayısı mertebeyi verir, türev almak sabitleri yok eder. Bundan sonraki bölümlerde ise ters yönde ilerleyeceğiz; artık elimizde denklem olacak ve çözüm ailesini biz üreteceğiz. İlk durağımız, türevi bir x fonksiyonu ile bir y fonksiyonunun çarpımı biçiminde yazılabilen ve bu sayede iki değişkeni denklemin iki yanına ayırıp integral alabildiğimiz denklemler olacak: [Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler](#).

5. Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler

Buraya kadar bir diferansiyel denklemin ne olduğunu, bir fonksiyonun hangi anlamda çözüm sayıldığını ve bir çözüm ailesinin keyfi sabitleri yok edilerek hangi denkleme geri döndüğünü gördük. Bütün bunlar denklemleri **tanımaya** yarıyordu; bu bölümden itibaren artık denklemleri **çözmeye** başlıyoruz.

Birinci mertebeden bir denklemi çözmek, özünde bir integral almaktır. Nitekim $\frac{dy}{dx} = g(x)$ biçimindeki en basit denklemin çözümü doğrudan $y = \int g(x) dx$ 'tir. Sorun, sağ tarafta y de görüldüğünde başlar: $\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$ denkleminde x 'e göre doğrudan integral alamayız, çünkü sağ taraf bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonunu içerir. Bu bölümün fikri çok basittir: denklemi, bir yakasında yalnız y ve dy , öbür yakasında yalnız x ve dx kalacak biçimde düzenleyip iki yakayı ayrı ayrı integrallemek.

Bu fikrin işlediği denklem sınıfına **değişkenlerine ayrılabilen denklemler** (separable equations) diyoruz. Sınıf dar görünse de, birinci mertebeden denklemlerin büyük bölümü ya doğrudan bu sınıftandır ya da uygun bir değişken değiştirmeye bu sınıfa indirgenir; bölümün sonunda böyle bir indirgemeyi ayrıntısıyla göreceğiz.

5.1 Ayrılabilen Denklem Nedir?

Birinci mertebeden bir denklemi $\frac{dy}{dx}$ için çözülmüş hâlde yazalım:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

Sağ taraftaki F , x 'e bağlı bir çarpanla y 'ye bağlı bir çarpanın çarpımı olarak ayrışiyorsa, yani $F(x, y) = g(x) h(y)$ yazılabiliyorsa, dx ve dy 'yi birer çarpan gibi düşünüp denklemi

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$$

biçimine getirebiliriz. Artık her yakada tek bir değişken vardır ve iki yakanın integrali ayrı ayrı alınabilir. Tanımı bu gözlem üzerine kuruyoruz.

Tanım 5.1 (Değişkenlerine Ayrılabilen Denklem). M ve N sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

biçiminde yazılabilen birinci mertebeden denklemlere **değişkenlerine ayrılabilen denklem** (separable equation) denir.

Denklem $\frac{dy}{dx}$ için çözülmüş hâlde verildiğinde bu koşul, sağ tarafın

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$$

biçiminde çarpanlara ayrılabilmesine karşılık gelir: $h(y) \neq 0$ olan bölgede iki yakayı $h(y)$ 'ye bölüp dx ile çarparak $M(x) = -g(x)$ ve $N(y) = \frac{1}{h(y)}$ seçimiyle yukarıdaki biçime geçilir.

Yani bir denklem, x 'li her şeyi bir yakaya, y 'li her şeyi öbür yakaya toplayabiliyorsak ayrılabilendir. Ayrışmanın olup olmadığına karar vermek genellikle birkaç çarpanlama denemesi meselesidir:

- $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ ayrılabilir: $g(x) = x^2$, $h(y) = y$.
- $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ ayrılabilir; çünkü $e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y}$ 'dir.

- $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ ayrılabilir **değildir**: sağ taraf x 'li ve y 'li iki çarpanın çarpımı olarak yazılamaz. Bu türden denklemleri bir sonraki bölümde başka bir yöntemle çözeceğiz.

Ayırma işlemi bir bölme içerdiği için bir tehlike barındırır: $h(y)$ 'nin sıfır olduğu y değerlerinde bölme yapılamaz. Oysa tam da bu değerler denklemin en kolay çözümlerini verir.

Tanım 5.2 (Denge Çözümü). $\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$ denkleminde $h(y_0) = 0$ olsun. Bu durumda sabit $y(x) = y_0$ fonksiyonu denklemi sağlar; çünkü sol yakası 0, sağ yakası $g(x) h(y_0) = 0$ 'dır. Böyle sabit çözümlere denklemin **denge çözümü** (equilibrium solution) denir.

Yani h 'nin her kökü, grafiği x eksenine paralel bir doğru olan bir çözüm demektir; bu çözümler ayırma adımıyla bölme yüzünden gözden kaçtığı için ayrıca yazılmalıdır.

5.2 Yöntemin Gerekçesi

Değişkenleri ayırıp iki yakayı integrallemek, dx ve dy ile sayı gibi işlem yapmayı gerektirir. Bu işlemin neden meşru olduğunu zincir kuralı açıklar.

Teorem 5.1 (Ayrılabilen Denklemin Çözümleri). g bir I aralığında, h bir J aralığında sürekli ve J üzerinde $h(y) \neq 0$ olsun. G fonksiyonu g 'nin, H fonksiyonu da $\frac{1}{h}$ 'nin bir ters türevi olsun; yani

$$G'(x) = g(x), \quad H'(y) = \frac{1}{h(y)}.$$

Bu durumda I aralığında tanımlı, değerleri J 'de kalan türevlenebilir bir $y = \varphi(x)$ fonksiyonu için şunlar denktir:

1. $\varphi, \frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$ denkleminin bir çözümüdür.
2. Bir c sabiti için $H(\varphi(x)) = G(x) + c$ bağıntısı I üzerinde sağlanır.

İspat.

Önce φ 'nin çözüm olduğunu varsayalım. $F(x) = H(\varphi(x)) - G(x)$ fonksiyonunu tanımlayıp zincir kuralıyla türevini alalım:

$$F'(x) = H'(\varphi(x)) \varphi'(x) - G'(x) = \frac{\varphi'(x)}{h(\varphi(x))} - g(x).$$

φ çözüm olduğundan $\varphi'(x) = g(x) h(\varphi(x))$ 'tir; bunu yerine koyunca

$$F'(x) = \frac{g(x) h(\varphi(x))}{h(\varphi(x))} - g(x) = 0$$

bulunur. Türevi bir **aralık** üzerinde özdeş olarak sıfır olan fonksiyon sabittir; dolayısıyla $F(x) = c$, yani $H(\varphi(x)) = G(x) + c$ olur.

Tersine, $H(\varphi(x)) = G(x) + c$ bağıntısı sağlansın. İki yakanın x 'e göre türevi alınırsa

$$\frac{\varphi'(x)}{h(\varphi(x))} = g(x)$$

elde edilir. $h(\varphi(x)) \neq 0$ olduğundan iki yaka $h(\varphi(x))$ ile çarpılabilir ve $\varphi'(x) = g(x) h(\varphi(x))$ bulunur; bu da φ 'nin çözüm olması demektir.

■

Teoremin “aralık” vurgusu önemlidir: sabitliği veren, türevin bir aralıkta sıfır olmasıdır. Bu yüzden bulduğumuz çözüm genellikle bütün $\mathbb{R}$ 'de değil, belirli bir aralıkta geçerlidir; başlangıç koşulu verildiğinde bu aralığı açıkça belirtmek gerekir.

Teorem ayrıca şunu söyler: iki yakayı integrallerken ayrı ayrı iki sabit yazmaya gerek yoktur, çünkü farkları yine keyfi bir sabittir. Uygulamada tek bir c yazılır.

5.3 Yöntem

Yukarıdaki teoremi bir hesap reçetesine dönüştürelim.

1. Denklemi $\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$ ya da $M(x) dx + N(y) dy = 0$ biçimine getirin.
2. $h(y) = 0$ denkleminin köklerini bulun; her kök bir denge çözümü verir. Bunları kenara yazın.
3. $h(y) \neq 0$ bölgesinde değişkenleri ayırın: $\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$.
4. İki yakanın integralini alın ve **tek bir** keyfi sabit yazın.
5. Mümkünse bağıntıyı y için çözüp açık çözümü yazın; çözülemiyorsa sonuç kapalı çözüm olarak bırakılır.
6. Adım 2'deki denge çözümlerinin genel çözüm formülünün içinde yer alıp almadığına bakın; yer almıyorsa ayrıca belirtin.
7. Başlangıç koşulu verilmişse sabiti belirleyin ve çözümün geçerli olduğu aralığı yazın.

İlk örnekte bu adımları teker teker izleyelim.

Örnek 5.1 (Üstel Büyüme Denklemi). k sabit olmak üzere $\frac{dy}{dx} = k y$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Denklem birinci mertebeden, lineer ve ayrılabilir: $g(x) = k$, $h(y) = y$.

Denge çözümü. $h(y) = y = 0$ olduğundan $y = 0$ sabit fonksiyonu bir çözümdür.

Ayırma. $y \neq 0$ bölgesinde iki yakayı y' 'ye bölüp dx ile çarpalım:

$$\frac{dy}{y} = k dx.$$

İki yakayı integralleyelim:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k dx \Rightarrow \ln |y| = kx + c.$$

Mutlak değerden kurtulma. İki yakayı e tabanında üs olarak

$$|y| = e^{kx+c} = e^c e^{kx}$$

yazarız. Burada $A = e^c$ sayısı pozitiftir, dolayısıyla $y = Ae^{kx}$ ya da $y = -Ae^{kx}$ olur; yani $y = Ce^{kx}$ biçimindeki her fonksiyon ($C \neq 0$) çözümdür.

Denge çözümünü katma. $C = 0$ alındığında $y = 0$ elde edildiğinden denge çözümü de bu formülün içindedir. Sonuç olarak genel çözüm

$$y = Ce^{kx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

olur. Gerçekten $y' = Cke^{kx} = ky'$ dir.

■

i Logaritma çıktığında sabiti birleştirme

Ayrılabilen denklemlerde $\ln|y|$ hemen her zaman ortaya çıkar; yukarıdaki üç satırlık hesap her seferinde aynı biçimde işler. Bir kez yapıp kural olarak saklayalım: F herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$\ln|y| = F(x) + c \Rightarrow |y| = e^c e^{F(x)} \Rightarrow y = \pm e^c e^{F(x)}.$$

e^c pozitif bir sayı, $\pm e^c$ ise sıfırdan farklı **herhangi** bir sayıdır. Üstelik $h(y) = y$ olan denklemlerde $y = 0$ da çözüm olduğundan, sıfır değeri de formüle katılabilir. Böylece üç adım tek satıra iner:

$$\ln|y| = F(x) + c \Rightarrow y = C e^{F(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Buradaki C , mutlak değer iki dalını ve denge çözümünü birlikte taşıyan yeni keyfi sabittir. Bu yüzden ara adımlarda çıkan c , e^c , c_1 gibi sabitleri son satırda tek bir harfe indirmek serbesttir.

Şimdi denklem doğrudan ayrılmış biçimde verildiğinde ne yapıldığına bakalım.

Örnek 5.2 (Ayrılmış Biçimde Verilen Denklem). $2x dx - 3y^2 dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Denklem zaten $M(x) dx + N(y) dy = 0$ biçimindedir: $M(x) = 2x$ ve $N(y) = -3y^2$. Değişkenleri ayırmak için hiçbir bölme yapmamız gerekmiyor, terimleri iki yakaya dağıtmak yetiyor:

$$2x dx = 3y^2 dy \Rightarrow \int 2x dx = \int 3y^2 dy.$$

İntegraller alınıp sabit tek yakada toplanırsa

$$x^2 = y^3 + c \Rightarrow x^2 - y^3 = c$$

bulunur. Bu, denklemin **kapalı çözümüdür** (implicit solution). Burada y 'yi yalnız bırakmak mümkündür:

$$y = \sqrt[3]{x^2 - c}.$$

Doğrulayalım: $y^3 = x^2 - c$ bağıntısının x 'e göre türevi $3y^2 y' = 2x$, yani $2x dx - 3y^2 dy = 0$ verir.

■

Örnek 5.3 (Kısmi İntegrasyon Gerektiren Bir Denklem). $(1 + y^2) y' = x \cos x$ denklemini sınıflandırıp genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Sınıflandırma. Denklemden en yüksek türev birinci mertebededir. Bilinmeyen fonksiyon y' ile çarpım hâlinde ve karesiyle görüldüğünden denklem lineer değildir. Tek bağımsız değişken x olduğundan denklem birinci mertebeden, lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemdir.

Ayırma. $y' = \frac{dy}{dx}$ yazıp iki yakayı dx ile çarpalım:

$$(1 + y^2) \frac{dy}{dx} = x \cos x \Rightarrow (1 + y^2) dy = x \cos x dx.$$

Sol yakada yalnız y , sağ yakada yalnız x kaldı; iki yakayı integralleyelim:

$$\int (1 + y^2) dy = \int x \cos x dx.$$

Sağ yakadaki integral. Bu integral kısmi integrasyonla (integration by parts) alınır. Seçimimiz

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \cos x dx, \quad v = \sin x$$

olsun. $\int u dv = uv - \int v du$ formülünden

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c.$$

Birleştirme. Sol yakanın integrali $y + \frac{y^3}{3}$ olduğundan

$$y + \frac{y^3}{3} = x \sin x + \cos x + c$$

elde edilir. Paydayı yok etmek için iki yakayı 3 ile çarpalım; sağda beliren $3c$ yine keyfi bir sabit olduğundan ona da c diyebiliriz. Genel çözüm

$$y^3 + 3y - 3x \sin x - 3 \cos x = c$$

bağıntısıdır.

Yorum. Bu bağıntıdan y 'yi yalnız bırakamayız, yani elimizdeki çözüm kapalıdır. Yine de $y \mapsto y^3 + 3y$ fonksiyonunun türevi $3y^2 + 3 > 0$ olduğundan bu fonksiyon kesin artandır; dolayısıyla her x için bağıntıyı sağlayan tek bir y değeri vardır. Kapalı çözüm, adı konmamış bir fonksiyonu gerçekten belirliyor.

■

Örnek 5.4 (Kapalı Çözümünden Açık Çözüme). $y' = 1 + y^2$ adi diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm.

Denklem birinci mertebeden, lineer olmayan ve ayrılabilir: $g(x) = 1$, $h(y) = 1 + y^2$.

Denge çözümü yok. $1 + y^2 \geq 1$ olduğundan h hiçbir yerde sıfırlanmaz; ayırma adımıdaki bölme her y için güvenlidir.

Ayırma ve integralleme.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = dx.$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx \Rightarrow \arctan(y) = x + c.$$

Bu bağıntı denklemin **kapalı çözümüdür**.

Açık çözüm. Burada y 'yi yalnız bırakmak mümkündür; iki yakanın tanjantı alınır

$$y = \tan(x + c)$$

bulunur. Bu da denklemin **açık çözümüdür** (explicit solution).

Geçerlilik aralığı. Tanjant fonksiyonu $-\frac{\pi}{2} < x + c < \frac{\pi}{2}$ aralığında tanımlıdır; dolayısıyla çözüm

$$-\frac{\pi}{2} - c < x < \frac{\pi}{2} - c$$

aralığında geçerlidir. Denklemin sağ yakası her yerde düzgün olmasına karşın çözümün sonlu bir aralıkta patlaması, lineer olmayan denklemlerin tipik davranışlarıdır.

■

5.4 Mutlak Değerli Logaritma ve Kayıp Çözümler

Bu kısımdaki iki örnek, ayırma sırasında bölünen çarpanın izini sürmenin neden önemli olduğunu gösteriyor.

Örnek 5.5 (Mutlak Değerin İki Dalı). $\frac{dy}{dx} = y \sin x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Denklem birinci mertebeden, lineer ve ayrılabilir: $g(x) = \sin x$, $h(y) = y$.

Ayırma. Önce $y \neq 0$ varsayalım:

$$\frac{dy}{y} = \sin x \, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \sin x \, dx.$$

$$\ln |y| = -\cos x + c.$$

Üs alma. İki yakayı e tabanında üs alalım:

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c} = e^c e^{-\cos x} = A e^{-\cos x}, \quad A = e^c > 0.$$

Soldaki ifade $|y|$ olduğundan

$$|y| = A e^{-\cos x}$$

elde edilir. Mutlak değeri açalım: $y > 0$ ise $y = A e^{-\cos x}$, $y < 0$ ise $y = -A e^{-\cos x}$ olur.

Kayıp çözüm. Ayırmanın başında $y \neq 0$ varsaymıştık; oysa sabit $y = 0$ fonksiyonu da denklemi sağlar (iki yaka da sıfırdır). Bu çözüm $y = \pm A e^{-\cos x}$ ailesinde $A > 0$ olduğu için görünmüyordu.

Birleştirme. Üç durumu (A , $-A$ ve 0) tek bir sabitte toplarsak denklemin genel çözümü

$$y = c e^{-\cos x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

olur. Buradaki c 'nin işareti çözümün hangi dalda olduğunu, $c = 0$ ise denge çözümünü verir.

■

5.5 Başlangıç Koşuluyla Özel Çözüm

Genel çözümdeki keyfi sabit, tek bir başlangıç koşuluyla belirlenir. Bu, sonsuz üyeli çözüm ailesinden tek bir eğri seçmek demektir.

Örnek 5.6 (Bir Başlangıç Değer Problemi). $\frac{dy}{dx} = 4x^3 y - y$ denklemini $y(1) = -3$ koşulu altında çözünüz.

Çözüm.

Ayırma. Sağ yakada y ortak çarpan olarak alınırsa denklemin ayrılabilen olduğu görülür:

$$\frac{dy}{dx} = y(4x^3 - 1).$$

$y \neq 0$ bölgesinde iki yakayı y 'ye bölelim:

$$\frac{dy}{y} = (4x^3 - 1) \, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (4x^3 - 1) \, dx.$$

$$\ln |y| = x^4 - x + c.$$

Üs alma. İki yakayı üs alırsak, $c_1 = e^c > 0$ olmak üzere

$$|y| = c_1 e^{x^4 - x}$$

bulunur.

Başlangıç koşulu. $x = 1$ için $y = -3$ verilmiştir. $x = 1$ değerinde üs $1^4 - 1 = 0$ olduğundan $e^0 = 1$ 'dir:

$$|y(1)| = |-3| = c_1 \cdot 1 \Rightarrow c_1 = 3.$$

İşaretin belirlenmesi. $|y| = 3e^{x^4 - x}$ bağıntısı iki dal verir. Başlangıç değeri $y(1) = -3 < 0$ olduğundan çözüm negatif daldadır; üstelik üstel fonksiyon hiç sıfırlanmadığı için sürekli bir çözüm işaret değiştiremez. Demek ki $-y = 3e^{x^4 - x}$, yani

$$y = -3e^{x^4 - x}.$$

Doğrulama. Bulduğumuz fonksiyonun türevi

$$y' = -3(4x^3 - 1)e^{x^4 - x} = (4x^3 - 1)y$$

olur ve $y(1) = -3e^0 = -3$ 'tür. Çözüm bütün $\mathbb{R}$ 'de geçerlidir.

■

Bir sonraki örnek, başlangıç koşulunun genel çözüm formülüyle uyuşmadığı ilginç bir durumu ele alıyor.

Örnek 5.7 (Genel Çözümün İçinde Görünmeyen Çözüm). $\frac{dy}{dx} = y^2$ denklemini $y(-3) = 0$ koşulu altında çözüünüz.

Çözüm.

Denklem birinci mertebeden ve lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemdir.

Ayırma. $y \neq 0$ bölgesinde

$$\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + c,$$

yani

$$y = -\frac{1}{x + c}.$$

Görünürdeki çelişki. Başlangıç koşulu, $x = -3$ noktasında y 'nin 0 olmasını istiyor. Oysa $y = -\frac{1}{x + c}$ fonksiyonu hiçbir x değerinde sıfır olmaz; pay sabit olarak -1 'dir. Öyleyse bu problemin çözümü yok mudur?

Kayıp çözümü hatırlama. Ayırmaya başlarken $y \neq 0$ varsaymıştık. Sabit $y = 0$ fonksiyonu denklemin bir denge çözümüdür ve $y(-3) = 0$ koşulunu da sağlar. Demek ki problemin çözümü vardır:

$$y = 0.$$

Tek çözüm bu mudur? Varlık ve teklik teoremine başvuralım. Denklemin $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ biçiminde yazarsak

$$f(x, y) = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

olur. Her iki fonksiyon da düzlemin tamamında süreklidir; özel olarak $(-3, 0)$ noktasını içeren bir dikdörtgende süreklidirler. Dolayısıyla problemin bu noktanın bir komşuluğunda **tek** çözümü vardır. Bulduğumuz $y = 0$ çözüm olduğuna göre tek çözüm odur.

Ders. $y = -\frac{1}{x + c}$ ailesi denklemin bütün çözümlerini vermez; ayırma sırasında bölünen çarpanın kökü olan $y = 0$ çözümü bu ailenin dışında kalır. Bu yüzden ayırmadan önce hangi çarpana bölündüğünü not etmek, yöntemin vazgeçilmez bir adımıdır.

■

5.6 Değişken Değiştirmeye Ayrılabilir Hâle Getirme

Ayrılabilen denklemler sınıfı dardır, ama basit bir değişken değiştirmeye (substitution) bu sınıfa taşınabilen geniş bir aile vardır: sağ yakası yalnızca $ax + by + c$ birleşimine bağlı olan denklemler. Böyle bir denklemi

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad b \neq 0,$$

biçiminde yazalım; burada a, b, c sabittir. Parantezin içine tek bir isim verelim:

$$u = ax + by + c.$$

Burada u , x 'in bir fonksiyonudur, çünkü y öyledir. İki yakanın x 'e göre türevini alalım:

$$a + b \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \left(\frac{du}{dx} - a \right).$$

Sağdaki ifade $\frac{dy}{dx}$ 'e, o da denkleme göre $f(u)$ 'ya eşittir:

$$\frac{1}{b} \left(\frac{du}{dx} - a \right) = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = b f(u) + a.$$

Son denklemin sağ yakası yalnız u 'ya bağlıdır; yani u ile x arasındaki denklem ayrılabilendir:

$$\frac{du}{b f(u) + a} = dx.$$

Yani bilinmeyeni y 'den u 'ya değiştirerek, x 'i ve y 'yi ayıramadığımız bir denklemi ayrılabilen bir denkleme çevirmiş olduk. Yöntemin adımları şunlardır:

1. $u = ax + by + c$ koyun.
2. x 'e göre türev alıp $\frac{du}{dx} = b f(u) + a$ denklemini elde edin.
3. $b f(u_0) + a = 0$ köklerine bakın; her kök u denkleminin bir denge çözümüdür. $ax + by + c = u_0$ yazıldığında bu kök, özgün denklemin grafiği bir doğru olan çözüme karşılık gelir.
4. Kalan bölgede değişkenleri ayırıp integralleyin.
5. u yerine $ax + by + c$ yazarak çözümü x ve y cinsinden ifade edin.

Örnek 5.8 (Değişken Değiştirmeyle Çözülen Denklem). $y' = (3x + 3y - 5)^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Sağ yaka yalnızca $3x + 3y - 5$ birleşimine bağlıdır; burada $a = 3$, $b = 3$, $c = -5$ ve $f(u) = u^2$ 'dir.

Değişken değiştirme. $u = 3x + 3y - 5$ koyup x 'e göre türev alalım:

$$3 + 3 \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{du}{dx} - 3 \right).$$

Denkleme göre bu ifade u^2 'ye eşittir:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{du}{dx} - 3 \right) = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3u^2 + 3 = 3(u^2 + 1).$$

Denge çözümü yok. $3(u^2 + 1) \geq 3$ olduğundan sağ yaka hiç sıfırlanmaz; bölme güvenlidir.

Ayrırma ve integralleme.

$$\frac{du}{u^2 + 1} = 3 dx \Rightarrow \int \frac{du}{u^2 + 1} = \int 3 dx.$$

$$\arctan(u) = 3x + c_0.$$

Değişken değiştirmenin sabitleri a , b , c ile karışmasın diye integrasyon sabitine c_0 dedik.

Geri dönüş. u yerine $3x + 3y - 5$ yazalım:

$$\arctan(3x + 3y - 5) = 3x + c_0.$$

İki yakanın tanjantı alınırsa çözüm

$$3x + 3y - 5 = \tan(3x + c_0)$$

biçiminde elde edilir; burada c_0 keyfi sabittir. İstenirse y yalnız bırakılabilir:

$$y = \frac{\tan(3x + c_0) - 3x + 5}{3}.$$

■

5.7 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Üstel Azalma ve Başlangıç Koşulu). $\frac{dy}{dx} = -2xy$ denklemini $y(0) = 4$ koşulu altında çözünüz.

Çözüm.

Denklemler ayrılabilir: $g(x) = -2x$, $h(y) = y$. Önce h 'nin kökü olan $y = 0$ denge çözümünü not edelim.

$y \neq 0$ bölgesinde ayırılım:

$$\frac{dy}{y} = -2x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (-2x) dx.$$

$$\ln |y| = -x^2 + c.$$

Sabiti birleştirme kuralına göre genel çözüm

$$y = Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

olur; $C = 0$ seçimi denge çözümünü verdiğinden hiçbir çözüm dışarıda kalmaz.

Başlangıç koşulunu uygulayalım: $y(0) = Ce^0 = C = 4$. Aranacak çözüm

$$y = 4e^{-x^2}$$

ve $y' = -8xe^{-x^2} = -2xy$ olduğundan denklem sağlanır. Çözüm bütün $\mathbb{R}$ 'de geçerlidir.

■

Alıştırma 5.2 (Diferansiyel Biçimde Verilen Denklem). $(1+x) dy - y dx = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Denklemler diferansiyel biçimdedir; değişkenleri ayırmak için iki yakayı $y(1+x)$ çarpımına bölmemiz gerekir. Bu yüzden önce bölünen çarpanların köklerine bakalım: $y = 0$ sabit fonksiyonu denklemi sağlar (her iki terim de sıfır olur); $x = -1$ ise bölmenin yasak olduğu noktadır, bu yüzden hesabı önce $x > -1$ ya da $x < -1$ aralıklarında yürütürüz.

$y \neq 0$ ve $x \neq -1$ iken:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}.$$

$$\ln |y| = \ln |1+x| + c.$$

İki yakayı üs alalım:

$$|y| = e^c |1+x|.$$

Mutlak değerlerin iki dalı ile denge çözümünü tek bir sabitte toplarsak genel çözüm

$$y = C(1+x), \quad C \in \mathbb{R}$$

olur. Doğrulama: $dy = C dx$ olduğundan

$$(1+x)C dx - C(1+x) dx = 0$$

bulunur; üstelik bu formül $x = -1$ noktasında da denklemi sağladığından çözümler bütün $\mathbb{R}$ 'ye genişler. Çözüm ailesi, hepsi $(-1, 0)$ noktasından geçen doğrulardan oluşur.

■

Alıştırma 5.3 (Üs Farkı İçeren Denklem). $y' = e^{x-y}$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Sağ yaka ilk bakışta ayrılmış görünmez, ama üstel fonksiyonun çarpım kuralı bunu düzeltir:

$$e^{x-y} = e^x e^{-y}.$$

Demek ki $g(x) = e^x$ ve $h(y) = e^{-y}$ 'dir. h hiçbir yerde sıfırlanmadığından denge çözümü yoktur ve bölme her y için güvenlidir.

Ayrılalım:

$$\frac{dy}{e^{-y}} = e^x dx \Rightarrow e^y dy = e^x dx.$$

İki yakayı integralleyelim:

$$\int e^y dy = \int e^x dx \Rightarrow e^y = e^x + c.$$

Bu kapalı çözümden y yalnız bırakılabilir:

$$y = \ln(e^x + c).$$

Çözüm, $e^x + c > 0$ koşulunun sağlandığı aralıkta geçerlidir: $c \geq 0$ ise bütün $\mathbb{R}$ 'de, $c < 0$ ise $x > \ln(-c)$ aralığında.

■

Alıştırma 5.4 (Kapalı Çözümünden Geçerlilik Aralığı). $x dx + y dy = 0$ denklemini $y(3) = 4$ koşulu altında çözünüz.

Çözüm.

Denklemler $M(x) dx + N(y) dy = 0$ biçimindedir ve hiçbir bölme gerektirmez. İki yakayı doğrudan integralleyelim:

$$\int x dx + \int y dy = k \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = k.$$

İki yakayı 2 ile çarpıp $c = 2k$ yazarsak kapalı çözüm

$$x^2 + y^2 = c$$

olur; çözüm eğrileri merkezi orijin olan çemberlerdir.

Başlangıç koşulunu uygulayalım: $x = 3, y = 4$ için $9 + 16 = 25$, yani $c = 25$. Aranılan kapalı çözüm

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Açık çözüm için y 'yi yalnız bırakırız. Başlangıç değeri $y(3) = 4 > 0$ olduğundan üst yarı çember seçilir:

$$y = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 < x < 5.$$

Uç noktalar aralığın dışında bırakıldı, çünkü $x \rightarrow \pm 5$ iken $y \rightarrow 0$ olur ve $y' = -\frac{x}{y}$ tanımsızlaşır. Bir kapalı çözümün geçerli olduğu aralığın, başlangıç noktasını içeren ve türevin var olduğu en büyük aralık olarak seçilmesi gerektiğini bu örnek iyi gösterir.

■

Alıştırma 5.5 (Toplamin Karesine Bağlı Denklem). $y' = (x + y)^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Sağ yaka yalnızca $x + y$ birleşimine bağlıdır; burada $a = 1, b = 1, c = 0$ ve $f(u) = u^2$ 'dir.

$u = x + y$ koyup x 'e göre türev alalım:

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 = u^2.$$

Buradan

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1$$

elde edilir. Sağ yaka hiç sıfırlanmadığından denge çözümü yoktur. Değişkenleri ayırıp integralleyelim:

$$\frac{du}{u^2 + 1} = dx \Rightarrow \arctan(u) = x + c_0.$$

İntegrasyon sabitini, değişken değiştirmenin c sabitiyle karışmaması için c_0 ile gösterdik. u yerine $x + y$ yazalım:

$$\arctan(x + y) = x + c_0 \Rightarrow x + y = \tan(x + c_0).$$

Yani genel çözüm

$$y = \tan(x + c_0) - x$$

olup tanjantın tanımlı olduğu $-\frac{\pi}{2} < x + c_0 < \frac{\pi}{2}$ aralığında geçerlidir.

■

Alıştırma 5.6 (Sabit u Çözümü Olan Bir Değişken Değiştirme). $y' = x - y + 2$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Sağ yaka $x - y + 2$ birleşiminin kendisidir; yani $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$ ve $f(u) = u$ 'dur.

$u = x - y + 2$ koyup türev alalım:

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx} = u.$$

Buradan u için denklem

$$\frac{du}{dx} = 1 - u$$

olur.

Sabit u çözümü. $1 - u = 0$, yani $u = 1$ değeri u denkleminin bir denge çözümüdür. $x - y + 2 = 1$ yazınca bunun y cinsinden karşılığı $y = x + 1$ doğrusu olur; bu doğru sabit bir fonksiyon değildir, ama özgün denklemin bir çözümüdür. Gerçekten $y' = 1$ ve $x - y + 2 = 1$ 'dir.

Ayırma. $u \neq 1$ bölgesinde:

$$\frac{du}{1 - u} = dx \Rightarrow -\ln|1 - u| = x + c_0.$$

İki yakayı -1 ile çarpıp üs alalım:

$$|1 - u| = e^{-x - c_0} \Rightarrow 1 - u = A e^{-x}.$$

Mutlak değer iki dalı ile $u = 1$ çözümünü ($A = 0$) birlikte alırsak $A \in \mathbb{R}$ olur.

Geri dönüş. $u = x - y + 2$ yazalım:

$$1 - (x - y + 2) = A e^{-x} \Rightarrow y - x - 1 = A e^{-x}.$$

Genel çözüm

$$y = x + 1 + A e^{-x}, \quad A \in \mathbb{R}$$

olur. Doğrulama: $y' = 1 - Ae^{-x}$ ve $x - y + 2 = 1 - Ae^{-x}$ 'tir. $A = 0$ seçimi, başta bulduğumuz $y = x + 1$ doğrusunu geri verir.

■

5.8 Bölümün Özeti

Değişkenlerine ayırma, birinci mertebeden denklemlerde elimizdeki en doğrudan yöntemdir: denklemi $M(x)dx + N(y)dy = 0$ biçimine getir, iki yakayı ayrı ayrı integrale, tek bir keyfi sabit yaz. Yöntemin iki ince noktası vardır. Birincisi, ayırma bir bölme içerdiğinden bölünen çarpanın kökleri olan denge çözümleri ayrıca kontrol edilmelidir; $\frac{dy}{dx} = y^2$, $y(-3) = 0$ problemi bunun en çarpıcı örneğiydi. İkincisi, $\ln|y|$ içeren sonuçlarda mutlak değer iki dalı ile denge çözümü tek bir keyfi sabitte birleştirilebilir. Sağ yakası $ax + by + c$ birleşimine bağlı denklemlerde ise $u = ax + by + c$ değişken değiştirmesi denklemi ayrılabilen hâle getiriyordu. Bu, ileride sık kullanacağımız daha genel bir fikrin ilk örneğidir: ayıramadığımız bir denklemde, doğru seçilmiş yeni bir bilinmeyen değişkenleri ayrılabilir hâle getirebilir. Sırada bu fikrin ikinci ve daha güçlü uygulaması var. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ gibi, sağ yakası x ve y 'nin yalnızca $\frac{y}{x}$ oranına bağlı olan denklemlerde $v = \frac{y}{x}$ değişken değiştirmesi yine ayrılabilen bir denklem verir. Bu sınıfı [Homojen Denklemler](#) bölümünde inceleyeceğiz.

6. Homojen Denklemler ve Homojene İndirgenebilenler

Bir önceki bölümde **değişkenlerine ayrılabilen denklemleri** çözdük: x 'li her şeyi bir yana, y 'li her şeyi öbür yana toplayıp iki tarafı ayrı ayrı integralleyebildiğimiz denklemler. Bu yöntemin kapsamı dar görünür, çünkü karşımıza çıkan denklemlerin çoğunda değişkenler böyle temiz biçimde ayrılmaz.

Buna rağmen ayrılabilen denklemler sanıldığından çok daha geniş bir sınıfı çözer: bir denklem ayrılabilen biçimde değilse bile, **uygun bir değişken değiştirme** (substitution) ile ayrılabilen bir denkleme dönüştürülebilir. Bu bölüm, bu stratejinin ilk ve en klasik örneğini işliyor. Eğimi $\frac{dy}{dx}$ veren ifade, x ile y 'ye ayrı ayrı değil de yalnızca bunların $\frac{y}{x}$ oranına bağlıysa, denkleme **homojen** denir; $u = \frac{y}{x}$ koymak böyle bir denklemi her zaman ayrılabilen bir denkleme indirger.

Bölümün ikinci yarısında bir adım daha atacağız: katsayıları $ax + by + c$ biçiminde birinci dereceden polinomlar olan denklemler homojen değildir, ama sabit terimler uygun bir **öteleme** (translation) ile yok edilebiliyorsa homojen hâle gelirler. Ötelemenin işe yaramadığı durumda ise başka bir değişken değiştirme devreye girer. Böylece tek bir yöntemden, birbirine bağlı yöntem zinciri çıkacak.

6.1 Homojen Denklem Nedir?

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemi, düzlemin her (x, y) noktasına bir eğim atar. Şimdi şu özel duruma bakalım: bu eğim noktanın *nerede* olduğuna değil, yalnızca noktanın orijinden hangi *doğrultuda* görüldüğüne bağlı olsun. Orijinden çıkan bir ışın üzerindeki bütün noktalarda $\frac{y}{x}$ oranı sabittir; dolayısıyla “eğim yalnızca doğrultuya bağlı” demek, “ f yalnızca $\frac{y}{x}$ oranının bir fonksiyonudur” demektir.

Tanım 6.1 (Homojen Diferansiyel Denklem). $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ biçimindeki birinci mertebeden bir denklemde $f(x, y)$ ifadesi yalnızca $\frac{y}{x}$ oranının (ya da yalnızca $\frac{x}{y}$ oranının) bir fonksiyonu olarak yazılabiliyorsa, yani

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ya da} \quad \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{x}{y}\right)$$

biçimine getirilebiliyorsa, bu denkleme **homojen diferansiyel denklem** (homogeneous differential equation) denir.

Yani homojen bir denklemde eğim alanı orijinden çıkan ışınlar boyunca sabittir: aynı ışın üzerindeki bütün noktalarda çözüm eğrilerinin eğimi aynıdır.

Örnek 6.1 (Oran Cinsinden Yazılabilen Bir Denklem). $x \neq 0$ olmak üzere $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ denkleminin homojen olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Sağ tarafta payı terim terim paydaya bölmek yeterlidir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Sağ tarafta x ile y yalnızca $\frac{y}{x}$ oranı içinde geçiyor; $g(u) = 1 + u$ almak üzere denklem $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ biçimindedir, yani homojendir.

■

Bir denkleme bakıp “ f gerçekten $\frac{y}{x}$ cinsinden yazılabilir mi?” sorusunu her seferinde elle denemek yorucudur. Bunu mekanik olarak denetleyen bir ölçüt vardır; ölçüt, aşağıdaki kavrama dayanır.

Tanım 6.2 (n . Dereceden Homojen Fonksiyon). $F(x, y)$ fonksiyonu, tanımlı olduğu her (x, y) ve her $\lambda > 0$ için

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$$

eşitliğini sağlıyorsa, F 'ye **n . dereceden homojen fonksiyon** (homogeneous function of degree n) denir.

Yani her iki değişkeni birden λ katına çıkardığınızda fonksiyonun değeri λ^n katına çıkıyorsa, F n . dereceden homojendir; $n = 0$ ise fonksiyonun değeri hiç değişmez.

Pratikte şu gözlem yeterlidir: bir polinomun bütün terimlerinin toplam derecesi aynı n sayısı ise, polinom n . dereceden homojendir. Örneğin $x^2 + 3xy + y^2$ ikinci dereceden, $x^3 - y^3$ üçüncü dereceden homojendir; buna karşılık $x^2 + y$ hiçbir dereceden homojen değildir.

Örnek 6.2 (Bir Fonksiyonun Homojenlik Derecesi). $F(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ fonksiyonunun homojen olup olmadığını, homojense derecesini belirleyiniz.

Çözüm.

$\lambda > 0$ için doğrudan yerine koyalım:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda^3 (x^3 + y^3)}{\lambda (x - y)}.$$

λ 'ların sadeleşmesiyle

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 \frac{x^3 + y^3}{x - y} = \lambda^2 F(x, y)$$

elde edilir. Demek ki F ikinci dereceden homojendir. Sezgisel olarak da beklenen sonuç budur: pay üçüncü, payda birinci dereceden homojendir; bölümün derecesi $3 - 1 = 2$ olur.

■

Şimdi ölçütü kuralım. Ölçüt iki parçadan oluşur: sıfırcı dereceden homojenlik ile “ $\frac{y}{x}$ ’in fonksiyonu olma” aynı şeydir; ayrıca diferansiyel biçimde verilmiş bir denklemde katsayıların dereceleri eşitse denklem homojendir.

Teorem 6.1 (Homojenliği Tanıma Ölçütü). $x > 0$ olan bir bölgede çalışalım.

1. F sıfırcı dereceden homojendir $\Leftrightarrow F(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)$ olacak biçimde tek değişkenli bir g fonksiyonu vardır.
2. $M(x, y)$ ile $N(x, y)$ aynı n derecesinden homojen ise, $N \neq 0$ olduğu noktalarda

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

denklemini homojendir.

İspat.

(1) Önce F 'nin sıfırcı dereceden homojen olduğunu varsayalım. Tanımdaki eşitlik her $\lambda > 0$ için geçerli olduğundan, $\lambda = \frac{1}{x}$ seçebiliriz:

$$\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = F(x, y) \Rightarrow F(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right).$$

$g(t) := F(1, t)$ tanımlarsak $F(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)$ olur.

Tersine $F(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)$ ise, oran ölçeklemeden etkilenmediği için

$$F(\lambda x, \lambda y) = \left(\frac{\lambda y}{\lambda x} \right) = \left(\frac{y}{x} \right) = \lambda^0 F(x, y)$$

bulunur; yani F sıfırdan dereceden homojendir.

(2) M ile N n . dereceden homojen olsun. Homojenlik eşitliğinde $\lambda = x > 0$ alırsak

$$M(x, y) = M(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}) = x^n M(1, \frac{y}{x}),$$

aynı biçimde $N(x, y) = x^n N(1, \frac{y}{x})$ olur. Denklemi eğim biçiminde yazıp bu iki ifadeyi yerine koyalım:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{x^n M(1, \frac{y}{x})}{x^n N(1, \frac{y}{x})}.$$

x^n çarpanları sadeleşir ve sağ tarafta yalnızca $\frac{y}{x}$ 'e bağlı bir ifade kalır. Birinci kısma göre bu, denklemin homojen olması demektir.

■

Teoremin ikinci kısmı, diferansiyel biçimde verilen denklemleri gözle taramayı çok kolaylaştırır: M ile N 'nin terimlerinin derecelerine bakmak yeter.

Örnek 6.3 (Katsayı Derecelerine Bakarak Tanıma). $(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$ denkleminin homojen olup olmadığını belirleyiniz; homojense sağ tarafı $\frac{y}{x}$ cinsinden yazınız.

Çözüm.

Katsayıları adlandıralım: $M(x, y) = x^2 + y^2$ ve $N(x, y) = -2xy$. M 'nin her iki terimi ikinci dereceden, N 'nin tek terimi de ikinci derecedendir; yani ikisi de **aynı** derecedendir. **Teorem 6.1** gereği denklem homojendir.

Bunu açıkça görmek için denklemi eğim biçimine getirelim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Pay ve paydayı x^2 'ye bölersek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

olur. Sağ taraf yalnızca $u = \frac{y}{x}$ oranına bağlıdır: $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + u^2}{2u}$.

■

Örnek 6.4 (Tanıma: Kesirli Bir Denklem). $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ denkleminin homojen olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Sağ tarafın pay ve paydasını x^2 ile bölelim:

$$\frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Sağ tarafta x ile y yalnızca $\frac{y}{x}$ oranı içinde geçiyor. Dolayısıyla $g(u) = u^2 + 2u$ almak üzere denklem

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)$ biçimindedir, yani homojendir.

Aynı sonuca derecelere bakarak da varılır: denklem $(y^2 + 2xy) dx - x^2 dy = 0$ biçiminde yazıldığında her iki katsayı da ikinci dereceden homojendir.

■

Örnek 6.5 (Tanıma: Logaritmali Bir Denklem). $x > 0, y > 0$ ve $x \neq y$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}$$

denkleminin homojen olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İki terimi ayrı ayrı ele alalım. Logaritmaların farkı bölümün logaritmasıdır:

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y} = \ln \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}} = -\ln \frac{y}{x}.$$

İkinci terimde pay ve paydayı x 'e bölelim:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

İkisini toplarsak

$$\frac{dy}{dx} = -\ln \frac{y}{x} + \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

elde ederiz. Sağ tarafta x ile y yine yalnızca $\frac{y}{x}$ oranı içinde geçtiğinden denklem homojendir; burada $g(u) = -\ln u + \frac{1+u}{1-u}$, dur.

■

Örnek 6.6 (Tanıma: Homojen Olmayan Bir Denklem). $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2}$ denkleminin homojen olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Bir önceki örnekle arasındaki tek fark payın ilk teriminin y^2 değil y^3 olması; buna rağmen sonuç değişir. Sağ tarafı oran cinsinden yazmaya çalışalım:

$$\frac{y^3 + 2xy}{x^2} = \frac{y^3}{x^2} + \frac{2y}{x} = x\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{x}\right).$$

İlk terimde oranın yanında yalnız başına bir x çarpanı kaldı ve bu çarptandan kurtulmanın yolu yok. Yani ifade $\frac{y}{x}$ 'in bir fonksiyonu değildir.

Bunu ölçütle de doğrulayabiliriz. $f(x, y) = \frac{y^3 + 2xy}{x^2}$ için

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^3 y^3 + 2\lambda^2 xy}{\lambda^2 x^2} = \lambda \frac{y^3}{x^2} + \frac{2y}{x}.$$

Bu ifade $\lambda^0 f(x, y) = f(x, y)$ 'ye eşit değildir (iki terim λ 'dan farklı biçimde etkilenmiştir), dolayısıyla f sıfırıncı dereceden homojen değildir. Sebep açıktır: payın terimleri üçüncü ve ikinci dereceden olduğu için pay homojen bir ifade değildir.

■

6.2 $y = ux$ Değişken Değiştirmesi

Homojen denklemlerin değerli olmasının sebebi, hepsinin tek bir hamleyle ayrılabilen denkleme dönüşmesidir. Hamle doğaldır: denklem bize $\frac{y}{x}$ oranından söz ediyorsa, bilinmeyen olarak y yerine bu oranı seçelim.

Teorem 6.2 (Homojen Denklemin Ayrılabilen Denkleme İndirgenmesi). $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)$ homojen denklemde

$$u = \frac{y}{x}, \quad \text{yani} \quad y = ux$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, $g(u) \neq u$ olduğu yerlerde denklem u ile x değişkenlerine ayrılabilen

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

denkleme dönüşür.

İspat.

u, x 'in bir fonksiyonudur; $y = ux$ çarpımının türevini çarpım kuralıyla alalım:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

Bunu denklemde yerine koyarsak

$$u + x \frac{du}{dx} = g(u)$$

olur. u 'yu sağ tarafa geçirirsek

$$x \frac{du}{dx} = g(u) - u$$

elde edilir. Sağ tarafta yalnızca u , sol taraftaki çarpanda yalnızca x vardır; $g(u) - u \neq 0$ ve $x \neq 0$ iken iki tarafı $x [g(u) - u]$ ile bölmek değişkenleri ayırır:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

■

İspatta bir tarafa ayırdığımız $g(u) - u$ ifadesinin kökleri de bilgi taşır: $g(u_0) = u_0$ ise sabit $u \equiv u_0$ fonksiyonu indirgenmiş denklemi sağlar, yani orijinden geçen $y = u_0x$ doğrusu özgün denklemin bir çözümüdür. Bu doğrular genel çözüm ailesinin içinde çıkmayabilir; bu yüzden ayrıca not edilirler. Yöntemi adım adım toparlayalım:

1. Denklemi $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ biçimine getir ve f 'yi $\frac{y}{x}$ cinsinden yazmayı dene (ya da katsayıların homojenlik derecelerine bak).
2. $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ ve $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ koy.
3. Ortaya çıkan $x \frac{du}{dx} = g(u) - u$ denklemde değişkenleri ayırıp iki tarafı integrele.
4. $g(u) - u = 0$ denkleminin köklerini ayrıca incele; her kök $y = u_0x$ çözümünü verir.
5. Sonuçta u yerine $\frac{y}{x}$ yazarak x ile y 'ye geri dön.

i Denklem x/y cinsindense

Bazı denklemlerde $\frac{x}{y}$ oranı çok daha sade bir ifade verir. O zaman simetrik hamleyi yapmak, yani $v = \frac{x}{y}$, $x = vy$ koyup y 'yi bağımsız değişken gibi kullanmak işi kolaylaştırır; hesabın gidişi aynıdır.

Örnek 6.7 (Homojen Denklem: Bir Çember Ailesi). $2xyy' = y^2 - x^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Önce denklemi eğim biçimine getirelim ($x \neq 0, y \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Bu hâliyle denklem değişkenlerine ayrılabilen değildir. Ama pay ve paydayı x^2 'ye bölüp ortaya çıkan kesri sadeleştirirsek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$$

olur. Son ifadedeki $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ oranının tersinden başka bir şey değildir; dolayısıyla sağ taraf yalnızca $\frac{y}{x}$ oranına bağlıdır, denklem homojendir ve Teorem 6.2 uygulanabilir.

$u = \frac{y}{x}$, yani $y = ux$ koyalım. $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ olduğundan

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right).$$

Kesirlerden kurtulmak için iki tarafı 2 ile çarpalım:

$$2u + 2x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{u}.$$

$2u$ 'yu sağa geçirip ortak paydada topladığımızda

$$2x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{u} = -\frac{u^2 + 1}{u}$$

buluruz. Şimdi değişkenleri ayıralım:

$$\frac{2u du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Sol taraftaki integral için $t = u^2 + 1$ koyarsak $dt = 2u du$ olur ve integral çok sadeleşir:

$$\int \frac{dt}{t} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |t| = -\ln |x| - \ln |c|.$$

Sağ taraftaki iki logaritmayı birleştirelim ve t 'yi geri yazalım:

$$\ln |u^2 + 1| = -\ln |cx| \Rightarrow u^2 + 1 = \frac{1}{cx}.$$

Son adımda u yerine $\frac{y}{x}$ koyarız:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{cx}, \quad c \text{ sabit}.$$

İsteyen bunu x^2 ile çarpıp daha tanıdık bir biçime getirebilir. $k = \frac{1}{c}$ yazarsak

$$x^2 + y^2 = kx \Leftrightarrow \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4}$$

olur: çözüm eğrileri, merkezleri x ekseninde olan ve orijinden geçen çemberlerdir.

■

Örnek 6.8 (Homojen Denklem: Üstel Terimli). $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Sağ tarafta x ile y yalnızca $\frac{y}{x}$ oranı içinde geçiyor; denklem homojendir. $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ koyalım:

$$u + x \frac{du}{dx} = e^u + u.$$

İki tarafta da u bulunduğu için sadeleşme çok temiz olur:

$$x \frac{du}{dx} = e^u.$$

Değişkenleri ayırılım ve iki tarafı integralleyelim:

$$e^{-u} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int e^{-u} du = \int \frac{dx}{x}.$$

$$-e^{-u} = \ln |x| + \ln |c| = \ln |cx|.$$

Şimdi u yerine $\frac{y}{x}$ yazalım:

$$-e^{-y/x} = \ln |cx| \Rightarrow e^{-y/x} = -\ln |cx| = \ln \frac{1}{|cx|}.$$

Bu eşitliğin anlamlı olması için sağ tarafın pozitif olması, yani $|cx| < 1$ olması gerekir. Son adımda iki tarafın logaritmasını alıp y 'yi yalnız bırakırız:

$$-\frac{y}{x} = \left(\ln \frac{1}{|cx|} \right) \Rightarrow y = -x \left(\ln \frac{1}{|cx|} \right), \quad c \text{ sabit}.$$

■

Örnek 6.9 (Homojen Denklem: Basit Kesirlere Ayırma ile). $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Bu denklemin homojen olduğunu daha önce görmüştük:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right).$$

$u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ koyalım:

$$u + x \frac{du}{dx} = u^2 + 2u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = u^2 + u.$$

Değişkenleri ayırıp sağ taraftaki ifadeyi çarpanlarına ayırılım:

$$\frac{du}{u^2 + u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{u(u+1)} = \frac{dx}{x}.$$

$u(u+1) \neq 0$ olduğu sürece iki tarafı integralleyebiliriz. Sol taraftaki kesri basit kesirlere ayırırız:

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}.$$

Buna göre

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|c|.$$

Logaritmaları birleştirip iki tarafın üstelini alalım:

$$\ln \left| \frac{u}{u+1} \right| = \ln|cx| \Rightarrow \frac{u}{u+1} = cx.$$

u yerine $\frac{y}{x}$ koyar ve pay ile paydayı x ile çarpalım:

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + 1} = cx \Rightarrow \frac{y}{y+x} = cx.$$

İçler dışlar çarpımı yapıp y 'yi yalnız bırakalım:

$$y = cx(y+x) = cxy + cx^2 \Rightarrow y(1-cx) = cx^2,$$

$$y = \frac{cx^2}{1-cx}, \quad c \text{ sabit}.$$

Son olarak ayırma sırasında dışarıda bıraktığımız $u(u+1) = 0$ durumuna bakalım. $u = 0$, yani $y = 0$ fonksiyonu denklemi sağlar ve genel çözümde $c = 0$ alınarak elde edilir. $u = -1$, yani $y = -x$ doğrusu da denklemi sağlar: bu doğruda $\frac{dy}{dx} = -1$ ve

$$\frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \frac{x^2 - 2x^2}{x^2} = -1$$

olur. $y = -x$ doğrusu genel çözüm ailesinde hiçbir c değeriyle elde edilemez; dolayısıyla ayrıca yazılması gereken bir tekil çözümdür.

■

6.3 Homojene İndirgenbilen Denklemler

Şimdi katsayıları birinci dereceden polinom olan

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

denklemlerini ele alalım; burada a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$) sabitlerdir.

Sabit terimler yoksa, yani $c_1 = c_2 = 0$ ise, her iki katsayı da birinci dereceden homojendir; [Teorem 6.1](#) gereği denklem homojendir ve bir önceki kısımdaki yöntemle çözülür. Asıl soru, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ olduğunda ne yapılacağıdır.

Şu geometrik gözlem yol gösterir: c_1 ve c_2 sabitleri, $a_1x + b_1y = 0$ ve $a_2x + b_2y = 0$ doğrularını orijinden kaydırır. İki doğru bir noktada kesişiyorsa, **orijini o kesişim noktasına taşıyan** bir öteleme sabit terimleri yok eder ve geriye homojen bir denklem kalır.

Teorem 6.3 (Öteleme ile Homojene İndirgeme). $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ olsun.

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$$

sisteminin (tek olan) çözümü (h, k) olmak üzere $x = X + h, y = Y + k$ ötelemesi, denklemi

$$(a_1X + b_1Y)dX + (a_2X + b_2Y)dY = 0$$

homojen denkleme dönüştürür.

İspat.

h ile k sabit olduğundan $dx = dX$ ve $dy = dY$ 'dir. Katsayıları yeni değişkenlerle yazalım:

$$a_1x + b_1y + c_1 = a_1X + b_1Y + (a_1h + b_1k + c_1),$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = a_2X + b_2Y + (a_2h + b_2k + c_2).$$

Denklem böylece

$$(a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1)dX + (a_2X + b_2Y + a_2h + b_2k + c_2)dY = 0$$

hâline gelir. Parantez içindeki sabit gruplarının ikisi de sıfır olursa geriye yalnızca birinci dereceden homojen katsayılar kalır; istenen denklemi elde etmek için h ile k 'yi tam olarak teoremdaki sistemi sağlayacak biçimde seçmek yeterlidir.

Böyle bir (h, k) ikilisinin var ve tek olduğunu görmek için sistemi matris biçiminde yazalım:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Bu sistemin her sağ taraf için tek çözümü olmasının koşulu $\det A \neq 0$, yani

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

olmasıdır; varsayımımız tam da budur.

■

Yani $\det A \neq 0$ iken yapılacak şey, iki doğrunun kesişim noktasını bulup orijini oraya taşımaktır. Adımlar şöyledir:

1. Denklemi yukarıdaki standart biçime getir ve $a_1b_2 - a_2b_1$ determinantını hesapla. Denklem $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$ kesir biçiminde verilmişse standart biçim $Pdx - Qdy = 0$ 'dır; katsayılar buradan okunur.
2. Determinant sıfırdan farklıysa $a_1h + b_1k + c_1 = 0$, $a_2h + b_2k + c_2 = 0$ sistemini çözüp h ile k 'yi bul.
3. $x = X + h$, $y = Y + k$ koy; ortaya çıkan homojen denklemi $u = \frac{Y}{X}$ ile çöz.
4. Bulduğun çözümde önce u yerine $\frac{Y}{X}$, sonra $X = x - h$ ve $Y = y - k$ yazarak özgün değişkenlere geri dön.

Örnek 6.10 (Öteleme ile Çözülen Bir Denklem). $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 9}{x - 3y + 2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Bu hâliyle denklem homojen değildir: pay ve paydadaki 9 ile 2 sabitleri, sağ tarafın yalnızca $\frac{y}{x}$ oranına bağlı olmasını engeller. Sabitleri yok etmek için öteleme yapalım.

Önce yöntemin işleyip işlemediğine bakalım. Denklemin standart biçimi

$$(2x - y + 9)dx - (x - 3y + 2)dy = 0$$

olduğundan katsayılar $a_1 = 2$, $b_1 = -1$, $a_2 = -1$, $b_2 = 3$ 'tür ve determinant

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) = 5 \neq 0$$

olur; demek ki [Teorem 6.3](#) uygulanabilir.

$x = X + h$, $y = Y + k$ alırsak $dx = dX$, $dy = dY$ olur ve denklem

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - Y + 2h - k + 9}{X - 3Y + h - 3k + 2}$$

hâline gelir. Determinant sıfırdan farklı olduğu için sabit grupları sıfırlayan tek bir (h, k) vardır:

$$\begin{cases} 2h - k + 9 = 0 \\ h - 3k + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = -5, \quad k = -1.$$

(İkinci denklemden $h = 3k - 2$; bunu birinciye koyunca $5k + 5 = 0$, yani $k = -1$ ve $h = -5$ bulunur.)
Böylece öteleme

$$x = X - 5, \quad y = Y - 1$$

olur ve denklem beklenen homojen biçime iner:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - Y}{X - 3Y} = \frac{2 - \frac{Y}{X}}{1 - 3\frac{Y}{X}}.$$

Şimdi $u = \frac{Y}{X}$, yani $Y = uX$ koyalım:

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{2 - u}{1 - 3u}.$$

u 'yu sağa geçirip ortak paydada toplayalım:

$$X \frac{du}{dX} = \frac{2 - u - u(1 - 3u)}{1 - 3u} = \frac{3u^2 - 2u + 2}{1 - 3u}.$$

Değişkenleri ayırırız:

$$\frac{(1 - 3u) du}{3u^2 - 2u + 2} = \frac{dX}{X}.$$

Sol taraftaki integral için paydayı $v = 3u^2 - 2u + 2$ ile adlandıralım. O zaman

$$dv = (6u - 2) du = -2(1 - 3u) du \Rightarrow (1 - 3u) du = -\frac{dv}{2}$$

olur, yani sol taraftaki pay tam da v 'nin diferansiyelinin bir katıdır:

$$-\int \frac{dv}{2v} = \int \frac{dX}{X} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln |v| = \ln |X| + \ln |c| = \ln |cX|.$$

İki tarafı -2 ile çarpıp üstel alalım:

$$\ln |v| = -2 \ln |cX| \Rightarrow v = \frac{1}{c^2 X^2}.$$

v yerine $3u^2 - 2u + 2$, ardından u yerine $\frac{Y}{X}$ yazarız:

$$\frac{3Y^2}{X^2} - \frac{2Y}{X} + 2 = \frac{1}{c^2 X^2}.$$

Son adım geri ötelemedir: $x = X - 5$ ve $y = Y - 1$ eşitliklerinden $X = x + 5$, $Y = y + 1$ bulunur. Bunları yerine koyarsak çözüm kapalı biçimde

$$\frac{3(y+1)^2}{(x+5)^2} - \frac{2(y+1)}{x+5} + 2 = \frac{1}{c^2(x+5)^2}$$

olur. İki tarafı $(x+5)^2$ ile çarpıp $C = \frac{1}{c^2}$ yazarsak aynı çözüm polinom biçiminde de verilebilir:

$$3(y+1)^2 - 2(y+1)(x+5) + 2(x+5)^2 = C, \quad C > 0 \text{ sabit}.$$

■

Geriye tek bir durum kaldı: determinant sıfırsa ne olur? O zaman iki doğru paraleldir (ya da çakışıktır), kesişim noktası yoktur ve öteleme işe yaramaz. Ama bu kez başka bir kolaylık ortaya çıkar: iki katsayının değişkenli kısımları birbirinin sabit katıdır, dolayısıyla denklemden x ile y aslında tek bir $a_1x + b_1y$ ifadesi içinde geçer.

Teorem 6.4 (Determinant Sıfırken Kullanılan Değişken Değiştirme). $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ve $b_1 \neq 0$ olsun. O zaman

$$u = a_1x + b_1y$$

değişken değiştirmesi,

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

denklemini u ile x değişkenlerine ayrılabilen bir denkleme dönüştürür.

İspat.

$b_1 \neq 0$ olduğundan $m := \frac{b_2}{b_1}$ sabitini tanımlayabiliriz; buradan $b_2 = mb_1$ olur. Bunu $a_1b_2 = a_2b_1$ eşitliğinde yerine koyup b_1 ile sadeleştirirsek a_2 de belirlenir:

$$a_2b_1 = a_1b_2 = m a_1b_1 \Rightarrow a_2 = ma_1, \quad b_2 = mb_1.$$

Demek ki ikinci katsayının değişkenli kısmı birincisinin m katıdır. Denklem böylece

$$[(a_1x + b_1y) + c_1]dx + [m(a_1x + b_1y) + c_2]dy = 0$$

biçimine girer; iki katsayı da yalnızca $a_1x + b_1y$ ifadesine bağlıdır. $u = a_1x + b_1y$ diyelim ve x 'e göre türev alalım:

$$\frac{du}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx}.$$

Öte yandan denklemden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u + c_1}{mu + c_2}$$

olur. Bunu bir önceki eşitlikte yerine koyarsak

$$\frac{du}{dx} = a_1 - b_1 \frac{u + c_1}{mu + c_2} = \frac{a_1(mu + c_2) - b_1(u + c_1)}{mu + c_2}$$

elde edilir. Sağ taraf yalnızca u 'ya bağlıdır, x hiç geçmez; dolayısıyla denklem değişkenlerine ayrılabilir. ■

Yani determinant sıfırken öteleme aramayız; doğrudan $u = a_1x + b_1y$ koyup ayrılabilen denklemini çözeriz.

Teoremdaki $b_1 \neq 0$ koşulu bir kısıtlama gibi görünse de dışarıda kalan durum zaten kolaydır: $a_1 \neq 0$ olmak üzere $b_1 = 0$ ise $a_1b_2 = a_2b_1 = 0$ eşitliğinden $b_2 = 0$ çıkar, denklem $(a_1x + c_1)dx + (a_2x + c_2)dy = 0$ hâline gelir ve hiçbir değişken değiştirmeye gerek kalmadan değişkenlerine ayrılır.

Örnek 6.11 (Determinantı Sıfır Olan Bir Denklem).

$$(2x + 3y + 1)dx + (4x + 6y + 1)dy = 0$$

denklemini çözümlü.

Çözüm.

Denklem homojen değildir; sabit terimleri öteleme ile yok etmeyi deneyebilmek için önce determinanta bakalım. Katsayılar

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 3, \quad a_2 = 4, \quad b_2 = 6$$

olduğundan

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

Determinant sıfır olduğu için öteleme yöntemi kullanılamaz; $b_1 = 3 \neq 0$ olduğundan Teorem 6.4 devreye girer. Nitekim ikinci katsayının değişkenli kısmı birincisinin tam iki katıdır:

$$[(2x + 3y) + 1]dx + [2(2x + 3y) + 1]dy = 0.$$

Denklemleri eğim biçiminde yazalım:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x + 3y) + 1}{2(2x + 3y) + 1}.$$

$u = 2x + 3y$ diyelim ve x 'e göre türev alalım:

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 2\right).$$

Bunu denklemlerde yerine koyarsak x tamamen kaybolur:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 2\right) = -\frac{u + 1}{2u + 1}.$$

$\frac{du}{dx}$ 'i yalnız bırakalım:

$$\frac{du}{dx} = 2 - \frac{3(u + 1)}{2u + 1} = \frac{2(2u + 1) - 3(u + 1)}{2u + 1} = \frac{u - 1}{2u + 1}.$$

Bu, değişkenlerine ayrılabilen bir denklemdir. $u \neq 1$ olduğu sürece

$$\frac{2u + 1}{u - 1} du = dx$$

yazıp iki tarafı integralleyebiliriz. Sol taraftaki kesirde bölme yaparız: $2(u - 1) + 3 = 2u + 1$ olduğundan

$$\frac{2u + 1}{u - 1} = 2 + \frac{3}{u - 1}.$$

Böylece

$$\int \left(2 + \frac{3}{u - 1}\right) du = \int dx \Rightarrow 2u + 3 \ln|u - 1| = x + c.$$

u yerine $2x + 3y$ yazarsak çözüm kapalı biçimde

$$2(2x + 3y) + 3 \ln|2x + 3y - 1| = x + c$$

olur. Sol taraftaki $4x$ ile sağ taraftaki x sadeleştirilip iki taraf 3'e bölünürse aynı çözüm daha derli toplu biçimde

$$x + 2y + \ln|2x + 3y - 1| = c_1, \quad c_1 \text{ sabit}$$

olarak yazılabilir.

Son olarak dışarıda bıraktığımız $u = 1$ durumuna bakalım. $2x + 3y = 1$ doğrusunda $y = \frac{1 - 2x}{3}$, dolayısıyla $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$, tür; denklemin sağ tarafı da bu doğru

$$-\frac{u + 1}{2u + 1} = -\frac{2}{3}$$

değerini alır. Demek ki $2x + 3y = 1$ doğrusu da bir çözümdür ve genel çözümdeki logaritma bu doğruya tanımsız olduğundan hiçbir c_1 değeriyle elde edilemez; tekil bir çözümdür. ■

6.4 Alıştırmalar

Alıştırma 6.1 (Öteleme Gerektiren Bir Denklem). $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Pay ve paydadaki sabitler yüzünden denklem homojen değildir. Determinanta bakmak için denklemi önce standart biçimde yazalım:

$$(x - y + 1) dx - (x + y - 3) dy = 0.$$

Katsayılar $a_1 = 1, b_1 = -1, a_2 = -1, b_2 = -1$ olduğundan

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) = -2 \neq 0.$$

Öyleyse öteleme yöntemi işler. $x = X + h, y = Y + k$ koyalım:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y + (h - k + 1)}{X + Y + (h + k - 3)}.$$

Sabit gruplarını sıfırlayan sistemi çözelim:

$$\begin{cases} h - k + 1 = 0 \\ h + k - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 1, \quad k = 2.$$

(İki denklemi toplayınca $2h - 2 = 0$, yani $h = 1$; buradan $k = 2$.) Böylece $x = X + 1, y = Y + 2$ ve denklem homojen hâle gelir:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}.$$

$u = \frac{Y}{X}, Y = uX$ koyarız:

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{1 - u}{1 + u} \Rightarrow X \frac{du}{dX} = \frac{1 - u - u(1 + u)}{1 + u} = \frac{1 - 2u - u^2}{1 + u}.$$

Değişkenleri ayıralım:

$$\frac{(1 + u) du}{1 - 2u - u^2} = \frac{dX}{X}.$$

$v = 1 - 2u - u^2$ dersek

$$dv = (-2 - 2u) du = -2(1 + u) du$$

olur; yani pay yine paydanın diferansiyelinin bir katıdır:

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dX}{X} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln |v| = \ln |cX|.$$

İki tarafı -2 ile çarpıp üstel alırsak

$$v = \frac{1}{c^2 X^2} \Rightarrow 1 - 2u - u^2 = \frac{1}{c^2 X^2}.$$

$u = \frac{Y}{X}$ yazıp iki tarafı X^2 ile çarpalım; $C = \frac{1}{c^2}$ diyelim:

$$X^2 - 2XY - Y^2 = C.$$

Türetme sırasında $C = \frac{1}{c^2}$ pozitif çıktı; ama iki tarafın X 'e göre türevi alındığında sabit kaybolduğundan bu bağıntı her gerçel C değeri için denklemi sağlar. Dolayısıyla bundan sonra C 'yi serbest bir sabit olarak alabiliriz.

Son olarak $X = x - 1$, $Y = y - 2$ koyarak özgün değişkenlere döneriz:

$$(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 2) - (y - 2)^2 = C, \quad C \text{ sabit .}$$

$C = 0$ değeri, ayırma sırasında dışarıda kalan $1 - 2u - u^2 = 0$ köklerine, yani $Y = (-1 \pm \sqrt{2})X$ doğrularına karşılık gelir; onlar da çözüm ailesinin içindedir.

■

Alıştırma 6.2 (Arktanjan Veren Bir Denklem).

$$(x - y - 1) dx + (x + 4y - 1) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

Katsayılar $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 4$ olduğundan determinant

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) = 5 \neq 0$$

olur; öteleme yapabiliriz. $x = X + h$, $y = Y + k$ için sabit grupları

$$\begin{cases} h - k - 1 = 0 \\ h + 4k - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 1, \quad k = 0$$

denklemleriyle belirlenir. (Birinciden $h = k + 1$; ikinciye koyunca $5k = 0$.) Demek ki $x = X + 1$, $y = Y$ ve denklem

$$(X - Y) dX + (X + 4Y) dY = 0$$

homojen denklemine dönüşür. Eğim biçiminde yazalım ve $u = \frac{Y}{X}$ koyalım:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y - X}{X + 4Y} = \frac{u - 1}{1 + 4u}.$$

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{u - 1}{1 + 4u} \Rightarrow X \frac{du}{dX} = \frac{u - 1 - u(1 + 4u)}{1 + 4u} = -\frac{4u^2 + 1}{1 + 4u}.$$

Değişkenleri ayırırız:

$$\frac{(1 + 4u) du}{4u^2 + 1} = -\frac{dX}{X}.$$

Sol taraftaki integrali iki parçaya bölmek gerekir; birinci parça arkatanjan, ikinci parça logaritma verir:

$$\int \frac{du}{4u^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan(2u), \quad \int \frac{4u du}{4u^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(4u^2 + 1).$$

Buna göre

$$\frac{1}{2} \arctan(2u) + \frac{1}{2} \ln(4u^2 + 1) = -\ln|X| + c_0.$$

İki tarafı 2 ile çarpıp logaritmaları bir araya toplayalım:

$$\arctan(2u) + \ln(4u^2 + 1) + \ln X^2 = C.$$

Son iki logaritma tek bir logaritmada toplanır ve $u = \frac{Y}{X}$ olduğundan parantez içi sadeleşir:

$$\ln(4u^2 + 1) + \ln X^2 = \ln \left[X^2 \left(4 \frac{Y^2}{X^2} + 1 \right) \right] = \ln(X^2 + 4Y^2).$$

Böylece çözüm

$$\arctan \frac{2Y}{X} + \ln(X^2 + 4Y^2) = C$$

olur. Geri ötelemede $X = x - 1$, $Y = y$ yazarız:

$$\arctan \frac{2y}{x-1} + \ln[(x-1)^2 + 4y^2] = C, \quad C \text{ sabit .}$$

■

Alıştırma 6.3 (Determinantı Sıfır Olan Bir Alıştırma).

$$(2y - 4x - 1) dx - (y - 2x + 1) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

Önce denklemi standart biçimde yazalım; ikinci katsayıdaki eksi işaretini parantezin içine dağıtırız:

$$(-4x + 2y - 1) dx + (2x - y - 1) dy = 0.$$

Katsayılar $a_1 = -4$, $b_1 = 2$, $a_2 = 2$, $b_2 = -1$ olduğundan determinant

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = (-4)(-1) - (2)(2) = 4 - 4 = 0$$

olur. Öyleyse öteleme değil, [Teorem 6.4](#) yöntemi gerekir: iki katsayı da $y - 2x$ ifadesine bağlıdır. Hesabı sadeleştirmek için doğrudan

$$w = y - 2x$$

diyelim; o zaman $2y - 4x = 2w$ ve $2x - y = -w$ olur, denklem de

$$(2w - 1) dx - (w + 1) dy = 0$$

hâline gelir. Buradan $w + 1 \neq 0$ iken

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2w - 1}{w + 1}.$$

$w = y - 2x$ olduğundan $\frac{dw}{dx} = \frac{dy}{dx} - 2$ 'dir; bunu kullanalım:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2w - 1}{w + 1} - 2 = \frac{2w - 1 - 2(w + 1)}{w + 1} = -\frac{3}{w + 1}.$$

Sağ tarafta x yok; değişkenleri ayırıp integralleyebiliriz:

$$(w + 1) dw = -3 dx \Rightarrow \frac{w^2}{2} + w = -3x + c_0.$$

İki tarafı 2 ile çarpar ve w yerine $y - 2x$ yazarız:

$$w^2 + 2w + 6x = C \Rightarrow (y - 2x)^2 + 2(y - 2x) + 6x = C.$$

Ortadaki terimi açıp x 'li terimleri toplarsak çözüm

$$(y - 2x)^2 + 2x + 2y = C, \quad C \text{ sabit}$$

biçimini alır.

Dışarıda bıraktığımız $w = -1$, yani $y = 2x - 1$ doğrusu bu denklemin çözümü **değildir**: o doğrudaki $dy = 2 dx$ olur ve denklemin sol tarafı

$$(2w - 1) dx - (w + 1) dy = (-3) dx - 0 = -3 dx \neq 0$$

değerini alır. Dolayısıyla kaybedilen bir çözüm yoktur.

■

Alıştırma 6.4 (Başlangıç Koşullu Homojen Denklem). $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, $y(1) = -2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm.

Pay ve paydanın her iki terimi de ikinci dereceden homojendir, dolayısıyla denklem homojendir. Pay ve paydayı x^2 'ye bölelim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

$u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ koyarız:

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{u}.$$

Sağ tarafı $u + \frac{1}{u}$ biçiminde yazabiliriz; u 'lar sadeleşince çok sade bir denklem kalır:

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{u} - u = \frac{1 + u^2 - u^2}{u} = \frac{1}{u}.$$

Değişkenleri ayırıp integralleyelim:

$$u du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln |x| + c.$$

Şimdi başlangıç koşulunu kullanalım. $x = 1$ için $y = -2$, yani $u = \frac{y}{x} = -2$ 'dir:

$$\frac{(-2)^2}{2} = \ln 1 + c \Rightarrow c = 2.$$

Böylece $u^2 = 2 \ln |x| + 4$ ve $u = \frac{y}{x}$ olduğundan çözüm kapalı biçimde

$$y^2 = x^2(2 \ln |x| + 4)$$

olur. Açık çözümü elde etmek için karekök alırken işaret seçilmelidir: $y(1) = -2 < 0$ ve çözüm sürekli olduğundan başlangıç noktasını içeren aralıkta $y < 0$ kalır. $x > 0$ bölgesinde çalıştığımızdan $\ln |x| = \ln x$ yazıp

$$y = -x\sqrt{2 \ln x + 4}$$

buluruz. Bu ifadenin tanımlı olması için $2 \ln x + 4 > 0$, yani $x > e^{-2}$ olmalıdır; ayrıca $x = e^{-2}$ noktasında $y = 0$ olacağı ve özgün denklemde payda xy sıfırlanacağı için bu uç nokta dışarıda kalır. Çözümün geçerli olduğu aralık

$$x \in (e^{-2}, \infty)$$

aralığıdır.



6.5 Kapanış

Bu bölümde iki fikri birlikte kullandık: bir denklemi doğrudan çözmek yerine **uygun bir değişken değiştirmeye** bildiğimiz bir sınıfa taşımak ve gerekiyorsa önce koordinat sistemini **ötelemek**. Homojen denklemlerde $y = ux$, determinantı sıfır olan denklemlerde $u = a_1x + b_1y$, sabit terimli denklemlerde ise $x = X + h, y = Y + k$ hamlesi bizi her seferinde değişkenlerine ayrılabilen bir denkleme götürdü.

Bir sonraki bölümde bambaşka bir açıdan bakacağız: denklemi dönüştürmeye çalışmadan önce, $M dx + N dy$ ifadesinin zaten bir $F(x, y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli olup olmadığını soracağız. Öyleyse çözüm doğrudan $F(x, y) = c$ eğrileridir; bunu nasıl anlayacağımızı ve F' 'yi nasıl kuracağımızı [Tam Diferansiyel Denklemler](#) bölümünde göreceğiz.

7. Tam Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeli denklemleri çözmenin şimdiye kadar gördüğümüz yollarında ortak bir mantık vardı: değişkenlerine ayrılabilen denklemlerde x 'li ve y 'li parçaları eşitliğin iki yanına ayırıp her iki tarafı ayrı ayrı integralledik; homojen denklemlerde ise $y = ux$ değişken değiştirilmesiyle denklemi önce ayrılabilir kalıba soktuk, sonra aynı şeyi yaptık. Her iki durumda da hedef, denklemi **doğrudan integrallenebilen** bir biçime getirmektir.

Bu bölümde bambaşka bir fikir işliyoruz. Denklemi $y' = f(x, y)$ biçiminde değil, x ile y 'nin simetrik görüldüğü **diferansiyel biçimde** yazalım:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Çok değişkenli analizden şunu biliyoruz: kısmi türevleri sürekli olan bir $F(x, y)$ fonksiyonunun **tam diferansiyeli** $dF = F_x dx + F_y dy$ ifadesidir. Eğer yukarıdaki denklemin sol yanı tam olarak böyle bir F 'nin tam diferansiyeliyse, denklem aslında $dF = 0$ demektir; bu da F 'nin çözüm eğrileri boyunca sabit kaldığını, yani

$$F(x, y) = c$$

olduğunu söyler. Çözüm, hiçbir dönüşüm yapmadan, sol yanı “tanıyarak” elde edilir.

Geriye iki soru kalıyor: verilen bir denklemin sol yanının böyle bir F 'den geldiğini nasıl anlarız ve anladıktan sonra F 'yi nasıl kurarız? Bölümün ana teoremi ikisini birden yanıtlar: ölçüt $M_y = N_x$ eşitliğidir; teoremin ispatı ise F 'yi adım adım inşa ettiği için aynı zamanda bir çözüm yöntemidir.

7.1 Tam Diferansiyel

Önce diferansiyel biçimin nereden geldiğini hatırlayalım. $F(x, y)$ bir fonksiyon olsun ve $y = y(x)$ eğrisi boyunca F 'nin değerine bakalım. Zincir kuralı, bu değer x 'e göre değişimini

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

biçiminde verir. Her iki tarafı dx ile “çarparsak” karşımıza çıkan ifade, F 'nin tam diferansiyelidir.

Tanım 7.1 (Tam Diferansiyel). $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bir bölge ve $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri D üzerinde sürekli olsun.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

ifadesine F fonksiyonunun **tam diferansiyeli** (total differential) denir.

Yani dF , bağımsız değişkenlerde yapılan küçük dx ve dy değişikliklerinin F 'nin değerinde yol açtığı değişimi birinci mertebeden ölçen ifadedir.

Örnek 7.1 (Bir Tam Diferansiyelin Hesabı). $F(x, y) = x^2 e^y + \sin y$ fonksiyonunun tam diferansiyelini yazınız.

Çözüm.

Kısmi türevleri sırayla alalım. y sabitken x 'e göre türev:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x e^y.$$

x sabitken y 'ye göre türev (e^y 'nin türevi yine e^y , $\sin y$ 'nin $\cos y$):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 e^y + \cos y.$$

Bunları tanımda yerine koyarsak

$$dF = 2xe^y dx + (x^2 e^y + \cos y) dy$$

bulunur. Bu ifadeyi aklımızda tutalım: birazdan tam olarak bu diferansiyelin sıfıra eşitlendiği bir denklemi çözeceğiz.

■

7.2 Tam Diferansiyel Denklem

Birinci merteye bir denklem $y' = f(x, y)$ biçiminde verilmiş olsa bile, $y' = \frac{dy}{dx}$ yazıp paydayı karşıya atarak her zaman

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

kalıbına getirilebilir. Bu kalıpta x ile y eşit haklıdır; hangisinin bağımlı hangisinin bağımsız değişken olduğu önceden dayatılmaz. Asıl kazanç ise şudur: sol yan, bir fonksiyonun tam diferansiyeli olabilir.

Tanım 7.2 (Tam Diferansiyel Denklem). M ve N fonksiyonları $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesinde tanımlı olsun. Eğer D üzerinde

$$dF = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

olacak biçimde bir $F(x, y)$ fonksiyonu varsa,

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

denkleminin D üzerinde **tam diferansiyel denklem** (exact differential equation) denir. Bu F fonksiyonuna denklemin **potansiyel fonksiyonu** (potential function) adı verilir.

Yani bir denklemin tam olması, sol yanının parçalı bir yığın değil, tek bir fonksiyonun diferansiyeli olması demektir.

Tanım gereği, denklem tamsa

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dF = 0$$

yazılır ve buradan

$$F(x, y) = c$$

elde edilir. Bu, denklemin **kapalı biçimdeki genel çözümüdür**; c keyfi sabittir.

i $dF = 0$ neden $F(x, y) = c$ demektir?

Bir çözüm eğrisi $y = y(x)$ boyunca $\varphi(x) = F(x, y(x))$ fonksiyonunu tanımlayalım. Zincir kuralı

$$\varphi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = M + N \frac{dy}{dx}$$

verir. Denklemin kendisi $M + N \frac{dy}{dx} = 0$ olduğundan bir aralık üzerinde $\varphi'(x) = 0$ olur. Türevi bir aralıkta özdeş sıfır olan fonksiyon ise sabittir; dolayısıyla $F(x, y(x)) = c$.

Örnek 7.2 (Gözle Tanınan Bir Tam Denklem). $y dx + x dy = 0$ denkleminin tam olduğunu gösterip genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Burada $M(x, y) = y$ ve $N(x, y) = x$ 'tir. Çarpım kuralını tersten okuyalım: $F(x, y) = xy$ alırsak

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x = N$$

olur, yani

$$dF = y dx + x dy.$$

Demek ki denklemin sol yanısı $F(x, y) = xy$ fonksiyonunun tam diferansiyelidir; denklem tamdır ve $dF = 0$ olduğundan genel çözüm

$$xy = c$$

kapalı biçimlidir. İstenirse $x \neq 0$ bölgesinde $y = \frac{c}{x}$ açık çözümü yazılır; çözüm eğrileri eşkenar hiperbollerdir.

■

Bu örnekte F 'yi gözle bulduk. Ama

$$(6xy^2 - 3x^2) dx + (6x^2y + 3y^2 - 7) dy = 0$$

gibi bir denklemin sol yanısının bir tam diferansiyel olup olmadığını gözle kestirmek kolay değildir. Bize mekanik bir ölçüt gerekiyor.

7.3 Tamlık Ölçütü

Ölçütün nereden geleceğini tahmin etmek zor değil: denklem tamsa $F_x = M$ ve $F_y = N$ olacaktır. Karışık ikinci mertebeye kısmi türevlerin eşitliği ($F_{xy} = F_{yx}$) ise M ile N arasında zorunlu bir bağ doğurur. Şaşırtıcı olan, bu zorunlu koşulun aynı zamanda **yeterli** olmasıdır.

Teorem 7.1 (Tamlık Ölçütü). *D dikdörtgensel bir bölge olsun ve $M(x, y)$ ile $N(x, y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevleri D 'nin her (x, y) noktasında sürekli olsun.*

- $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ denklemini D üzerinde tam ise, her $(x, y) \in D$ için

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (M_y = N_x)$$

olur.

- Karşıt olarak, her $(x, y) \in D$ için $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ ise, denklem D üzerinde tamdır.

İspat.

Gerekliklik ($\Rightarrow$). $M dx + N dy = 0$ denklemini tam olsun. Tanım gereği öyle bir $F(x, y)$ vardır ki

$$dF = F_x dx + F_y dy = M dx + N dy,$$

yani

$$F_x = M \quad \text{ve} \quad F_y = N.$$

Bu eşitliklerin birincisini y 'ye, ikincisini x 'e göre türetelim:

$$F_{xy} = M_y, \quad F_{yx} = N_x.$$

M ve N 'nin birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan F 'nin karışık ikinci mertebeye türevleri de sürekli; süreklilik durumunda karışık türevler sıradan bağımsızdır:

$$F_{xy} = F_{yx}.$$

Buradan doğrudan $M_y = N_x$ çıkar.

Yeterlilik ($\Leftarrow$). Şimdi her $(x, y) \in D$ için $M_y = N_x$ olduğunu varsayalım. Denklemin tam olduğunu göstermek için

$$dF = F_x dx + F_y dy = M dx + N dy, \quad F_x = M \text{ ve } F_y = N$$

koşullarını sağlayan bir F fonksiyonu **bulmamız** gerekir. Kuralım.

Önce $F_x = M$ eşitliğini ele alıp y 'yi sabit tutarak x 'e göre integralleyelim:

$$F(x, y) = \int M(x, y) \partial x + h(y) \quad (*)$$

Buradaki ∂x yazımı, integralin y sabit tutularak x 'e göre alındığını vurgular. Dikkat edilecek nokta şudur: y sabit tutulduğu için integral sabiti gerçek bir sayı değil, yalnızca y 'ye bağlı **bilinmeyen bir fonksiyondur**; onu $h(y)$ ile gösterdik. (D 'nin dikdörtgensel olması, integralde kullanılan yatay doğru parçalarının bölgeden dışarı taşmamasını güvenceye alır.)

F fonksiyonu ikinci koşulu, yani $F_y = N$ eşitliğini de sağlamak zorundadır. O hâlde $(*)$ ifadesinin y 'ye göre türevini alalım:

$$N = F_y = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) \partial x + h'(y) = \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x + h'(y)$$

(son adımda, kısmi türevlerin sürekliliği sayesinde türev integralin içine alınabilir). Buradan $h'(y)$ yalnız bırakılır:

$$h'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \quad (**)$$

$h(y)$ 'yi bulmak için bu eşitliği y 'ye göre integrallemeliyiz. Ama bunu yapabilmek için sağ yanın yalnızca y 'ye bağlı olması, içinde x kalmaması gerekir; aksi hâlde h tek değişkenli bir fonksiyon olamaz. Bunu sınamanın yolu sağ yanın x 'e göre türevine bakmaktır: türev sıfır çıkıyorsa ifade x 'ten bağımsızdır. Hesaplayalım:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \right] = N_x - M_y = 0.$$

(Burada ilk terimin türevi N_x , ikincisinin türevi ise integralin x 'e göre alınmış olması nedeniyle doğrudan M_y 'dir; son eşitlik ise $M_y = N_x$ varsayımımızdan gelir.)

Demek ki $(**)$ ifadesinin sağ yanı x 'e bağlı değildir ve y 'ye göre integrallenebilir:

$$h(y) = \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \right] \partial y.$$

Bu $h(y)$ 'yi $(*)$ içinde yerine koyduğumuzda $F_x = M$ ve $F_y = N$ koşullarının ikisini birden sağlayan bir $F(x, y)$ fonksiyonu elde etmiş oluruz. O hâlde $dF = M dx + N dy$ olup denklem D üzerinde tamdır. ■

Yani $M_y = N_x$ eşitliği, “sol yan bir tam diferansiyeldir” cümlesinin iki türev hesabıyla yapılabilen denetimidir. Üstelik ispatın ikinci yarısı bize bir bonus verdi: F 'yi nasıl kuracağımızı da gösterdi.

7.4 Potansiyel Fonksiyonun Bulunması

İspatın ($\Leftarrow$) yönünde yaptığımız inşayı tek satırda toplayabiliriz.

i Potansiyel fonksiyonu veren formül

$$F(x, y) = \int M(x, y) \partial x + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \right] \partial y$$

Uygulamada bu formülü ezberlemek yerine, onu üreten adımları izlemek hem daha kolay hem daha az hata yapılan yoldur:

1. Denklemleri $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ biçimine getirin; M ile N 'yi **işaretleriyle birlikte** okuyun.
2. M_y ve N_x türevlerini hesaplayın. Eşit değillerse denklem tam değildir ve bu yöntem uygulanamaz.
3. Eşitse denklem tamdır. $F_x = M$ yazıp y 'yi sabit tutarak x 'e göre integralleyin: $F(x, y) = \int M \partial x + h(y)$.
4. Bulduğunuz F 'yi y 'ye göre türetip $F_y = N$ eşitliğine koyun. $h'(y)$ yalnız bırakıldığında içinde x kalmaması gerekir; kalıyorsa bir hesap hatası var demektir.
5. $h'(y)$ 'yi y 'ye göre integralleyip $h(y)$ 'yi, oradan da $F(x, y)$ 'yi yazın. Genel çözüm $F(x, y) = c$ kapalı biçimdir.
6. Başlangıç koşulu verilmişse koşulu kapalı çözümde yerine koyup c sabitini belirleyin.

Üçüncü adımda $F_x = M$ yerine $F_y = N$ ile başlamak da serbesttir: bu kez y 'ye göre integral alınır ve bilinmeyen fonksiyon $h(x)$ olur. Hangi integralin daha kolay olduğuna bakıp seçim yapmak akıllıca olur.

💡 Sabitlerin yutulması

$h(y)$ bulunurken çıkan c_1 integral sabitini ayrıca taşımaya gerek yoktur. Çünkü $F(x, y) + c_1 = c$ eşitliği $F(x, y) = c - c_1$ demektir ve $c - c_1$ de keyfi bir sabittir. Bu yüzden çözümlerde c_1 'i doğrudan sağ taraftaki keyfi sabite katarız.

7.5 Örnekler

Örnek 7.3 (Başlangıç Koşullu Tam Denklem).

$$2xe^y dx + (x^2e^y + \cos y) dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm.

Tamlık denetimi. Denklem zaten diferansiyel biçimdedir:

$$M = 2xe^y, \quad N = x^2e^y + \cos y.$$

Kısmi türevler:

$$M_y = 2xe^y, \quad N_x = 2xe^y.$$

$M_y = N_x$ olduğundan denklem tamdır. O hâlde öyle bir $F(x, y)$ vardır ki

$$dF = F_x dx + F_y dy = M dx + N dy = 0$$

olur ve $F(x, y) = c$ çözümü verir.

Potansiyel fonksiyonun kurulması. Aranan koşullar

$$F_x = M = 2xe^y, \quad F_y = N = x^2e^y + \cos y$$

eşitlikleridir. Birincisini y sabitken x 'e göre integralleyelim (e^y bu integralde sabit gibi davranır):

$$F(x, y) = \int 2xe^y \partial x + h(y) = x^2e^y + h(y).$$

Bilinmeyen fonksiyonun belirlenmesi. Bu F 'yi y 'ye göre türetip $F_y = N$ ile eşitleyelim:

$$F_y = x^2e^y + h'(y) = x^2e^y + \cos y.$$

İki tarafta da bulunan x^2e^y terimleri sadeleşir; geriye yalnızca y 'ye bağlı bir eşitlik kalır (adım 4'te beklediğimiz tam olarak buydu):

$$h'(y) = \cos y \Rightarrow h(y) = \sin y.$$

Genel çözüm. Bulduğumuz h' 'yi yerine koyarsak potansiyel fonksiyon $F(x, y) = x^2 e^y + \sin y$ olur ve genel çözüm

$$x^2 e^y + \sin y = c$$

kapalı biçimlidir.

Sabitin belirlenmesi. $y(0) = \frac{\pi}{2}$ koşulunda $x = 0$ ve $y = \frac{\pi}{2}$ alınır:

$$0^2 \cdot e^{\pi/2} + \sin \frac{\pi}{2} = c \Rightarrow 0 + 1 = c \Rightarrow c = 1.$$

Aranan özel çözüm

$$x^2 e^y + \sin y = 1$$

kapalı denklemdir. Bu ifadeden y 'yi x cinsinden açıkça çekmek mümkün değildir; birinci mertebe denklemlerde çözümün kapalı kalması olağan bir durumdur.

■

Örnek 7.4 (Polinom Katsayılı Tam Denklem).

$$(6xy^2 - 3x^2) dx - (7 - 6x^2y - 3y^2) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

Katsayıların okunması. Denklemi $M dx + N dy = 0$ kalıbıyla karşılaştırırken eksi işaretini parantezin içine dağıtmayı unutmamalıyız:

$$M = 6xy^2 - 3x^2, \quad N = -(7 - 6x^2y - 3y^2) = -7 + 6x^2y + 3y^2.$$

Tamlık denetimi.

$$M_y = 12xy, \quad N_x = 12xy.$$

$M_y = N_x$ olduğundan denklem tamdır; $F_x = M$, $F_y = N$ koşullarını sağlayan bir F vardır.

Potansiyel fonksiyon. $F_x = M$ eşitliğini x 'e göre integralleyelim:

$$F(x, y) = \int (6xy^2 - 3x^2) dx + h(y) = 3x^2y^2 - x^3 + h(y).$$

Şimdi y 'ye göre türetip $F_y = N$ ile eşitleyelim:

$$F_y = 6x^2y + h'(y) = -7 + 6x^2y + 3y^2.$$

$6x^2y$ terimleri gider ve

$$h'(y) = -7 + 3y^2 \Rightarrow h(y) = -7y + y^3$$

bulunur.

Genel çözüm. Potansiyel fonksiyon $F(x, y) = 3x^2y^2 - x^3 - 7y + y^3$ olduğundan genel çözüm

$$3x^2y^2 - x^3 + y^3 - 7y = c$$

kapalı biçimlidir.

Denetleme. Bulduğumuz F 'nin kısmi türevlerini alırsak $F_x = 6xy^2 - 3x^2 = M$ ve $F_y = 6x^2y + 3y^2 - 7 = N$ olur; çözüm doğrudur.

■

Örnek 7.5 (Ortak Çarpan Sadeleştirilerek Tam Hâle Gelen Denklem).

$$2yy'x(x+y^2) - (x^2 - y^2x) = 0$$

denklemini çözüyoruz.

Çözüm.

Diferansiyel biçime geçiş. $y' = \frac{dy}{dx}$ yazıp her iki tarafı dx ile çarpalım:

$$2yx(x+y^2)dy - (x^2 - y^2x)dx = 0.$$

$Mdx + Ndy = 0$ kalıbına göre

$$M(x, y) = -x^2 + y^2x, \quad N(x, y) = 2yx(x+y^2) = 2x^2y + 2xy^3.$$

Tamlık denetimi.

$$M_y = 2yx, \quad N_x = 4xy + 2y^3.$$

$M_y \neq N_x$ olduğundan denklem bu hâliyle **tam değildir**.

Ortak çarpanın sadeleştirilmesi. Buna karşın M ile N 'nin her ikisi de x çarpanını taşıyor:

$$M = x(-x + y^2), \quad N = x \cdot 2y(x + y^2).$$

$x \neq 0$ olan bölgede denklemin iki yanını x 'e bölebiliriz:

$$(-x + y^2)dx + 2y(x + y^2)dy = 0.$$

Yeni katsayılar

$$M(x, y) = -x + y^2, \quad N(x, y) = 2y(x + y^2) = 2xy + 2y^3$$

olup

$$M_y = 2y, \quad N_x = 2y$$

bulunur. Artık $M_y = N_x$; denklem tamdır. Aynı denklemin tam olup olmaması, onu hangi çarpanla yazdığınıza bağlıdır.

Potansiyel fonksiyon. Bu kez $F_y = N$ ile başlayalım; y 'ye göre integral almak burada daha kolay:

$$F(x, y) = \int (2xy + 2y^3) dy + h(x) = xy^2 + \frac{y^4}{2} + h(x).$$

Şimdi x 'e göre türetilip $F_x = M$ ile eşitleyelim:

$$F_x = y^2 + h'(x) = -x + y^2.$$

y^2 terimleri sadeleşir:

$$h'(x) = -x \Rightarrow h(x) = -\frac{x^2}{2}.$$

Genel çözüm.

$$xy^2 + \frac{y^4}{2} - \frac{x^2}{2} = c$$

kapalı biçimlidir; istenirse iki tarafı 2 ile çarpıp $2xy^2 + y^4 - x^2 = c_2$ yazılabilir.

Bölmenin bedeli. x 'e bölme işlemi yalnızca $x \neq 0$ bölgesinde geçerlidir. $x = 0$ doğrusu başlangıçtaki diferansiyel biçimi sağlar (bu doğru üzerinde hem $dx = 0$ hem de $N = 0$ olur), ama bir $y(x)$ fonksiyonu belirtmediğinden yukarıdaki çözüm ailesinin dışında kalır.

■

Son örnek, bölümün sonundaki asıl soruyu da gündeme getiriyor: tam olmayan bir denklemi uygun bir çarpanla çarparak (ya da bölerek) tam hâle getirebiliyorsak, bu çarpanı her durumda bulmanın bir yolu var mıdır?

7.6 Alıştırmalar

Alıştırma 7.1 (Polinom Katsayılı Alıştırma).

$$(3x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 2y) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$M = 3x^2 + 4xy$ ve $N = 2x^2 + 2y$ için

$$M_y = 4x, \quad N_x = 4x$$

olduğundan denklem tamdır. $F_x = M$ eşitliğini x 'e göre integralleyelim:

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 4xy) dx + h(y) = x^3 + 2x^2y + h(y).$$

y 'ye göre türetilip $F_y = N$ ile eşitleyelim:

$$F_y = 2x^2 + h'(y) = 2x^2 + 2y \Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2.$$

Genel çözüm

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c$$

kapalı biçimlidir.

■

Alıştırma 7.2 (Başlangıç Koşullu Alıştırma).

$$(2x \cos y + 3x^2y) dx + (x^3 - x^2 \sin y - y) dy = 0, \quad y(0) = 2$$

başlangıç değeri problemini çözünüz.

Çözüm.

$M = 2x \cos y + 3x^2y$ ve $N = x^3 - x^2 \sin y - y$ olsun. Kısmi türevler:

$$M_y = -2x \sin y + 3x^2, \quad N_x = 3x^2 - 2x \sin y.$$

İkisi eşittir, denklem tamdır. $F_x = M$ eşitliğini x 'e göre integralleyelim ($\cos y$ ile y bu integralde sabittir):

$$F(x, y) = \int (2x \cos y + 3x^2y) dx + h(y) = x^2 \cos y + x^3y + h(y).$$

y 'ye göre türetilip $F_y = N$ ile eşitleyelim:

$$F_y = -x^2 \sin y + x^3 + h'(y) = x^3 - x^2 \sin y - y.$$

Ortak terimler sadeleşir:

$$h'(y) = -y \Rightarrow h(y) = -\frac{y^2}{2}.$$

Genel çözüm

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$$

kapalı biçimlidir. Başlangıç koşulunda $x = 0, y = 2$ alalım:

$$0 + 0 - \frac{4}{2} = c \Rightarrow c = -2.$$

Aranan özel çözüm

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = -2$$

ya da iki tarafı 2 ile çarparak $2x^2 \cos y + 2x^3 y - y^2 = -4$ biçimindedir.

■

Alıştırma 7.3 (Sinüs ve Üstel Terimli Alıştırma).

$$(y \cos x + 2xe^y) dx + (\sin x + x^2 e^y - 1) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$M = y \cos x + 2xe^y$ ve $N = \sin x + x^2 e^y - 1$ için

$$M_y = \cos x + 2xe^y, \quad N_x = \cos x + 2xe^y$$

olduğundan denklem tamdır. x 'e göre integralleyelim:

$$F(x, y) = \int (y \cos x + 2xe^y) dx + h(y) = y \sin x + x^2 e^y + h(y).$$

y 'ye göre türev alıp $F_y = N$ ile eşitleyelim:

$$F_y = \sin x + x^2 e^y + h'(y) = \sin x + x^2 e^y - 1.$$

Buradan

$$h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$$

ve genel çözüm

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c$$

kapalı biçimlidir.

■

Alıştırma 7.4 (Üstel Çarpım İçeren Alıştırma).

$$(2 + ye^{xy}) dx - (2y - xe^{xy}) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

Eksi işaretini parantezin içine dağıtarak katsayıları okuyalım:

$$M = 2 + ye^{xy}, \quad N = -2y + xe^{xy}.$$

Kısmi türevleri çarpım kuralıyla alalım. M 'yi y 'ye göre türetirken e^{xy} 'nin y 'ye göre türevi xe^{xy} 'dir:

$$M_y = e^{xy} + y \cdot xe^{xy} = e^{xy} (1 + xy).$$

N 'yi x 'e göre türetirken e^{xy} 'nin x 'e göre türevi ye^{xy} 'dir:

$$N_x = e^{xy} + x \cdot ye^{xy} = e^{xy} (1 + xy).$$

$M_y = N_x$ olduğundan denklem tamdır. $F_x = M$ eşitliğini x 'e göre integralleyelim; y sabit olduğundan $\int ye^{xy} \partial x = e^{xy}$ olur:

$$F(x, y) = \int (2 + ye^{xy}) \partial x + h(y) = 2x + e^{xy} + h(y).$$

y 'ye göre türetilip $F_y = N$ ile eşitleyelim:

$$F_y = xe^{xy} + h'(y) = -2y + xe^{xy} \Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2.$$

Genel çözüm

$$2x + e^{xy} - y^2 = c$$

kapalı biçimdir.

■

Alıştırma 7.5 (Toplamin Kosinüsünü İçeren Alıştırma).

$$\cos(x + y) dx + (3y^2 + 2y + \cos(x + y)) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$M = \cos(x + y)$ ve $N = 3y^2 + 2y + \cos(x + y)$ olsun. Zincir kuralıyla

$$M_y = -\sin(x + y), \quad N_x = -\sin(x + y)$$

bulunur; denklem tamdır. $F_x = M$ eşitliğini x 'e göre integralleyelim (içerideki $x + y$ ifadesinin x 'e göre türevi 1 olduğundan ek bir katsayı gerekmez):

$$F(x, y) = \int \cos(x + y) \partial x + h(y) = \sin(x + y) + h(y).$$

y 'ye göre türev alıp $F_y = N$ ile eşitleyelim:

$$F_y = \cos(x + y) + h'(y) = 3y^2 + 2y + \cos(x + y).$$

Buradan

$$h'(y) = 3y^2 + 2y \Rightarrow h(y) = y^3 + y^2$$

ve genel çözüm

$$\sin(x + y) + y^3 + y^2 = c$$

kapalı biçimdir.

■

7.7 Tam Olmayan Denklemler Ne Olacak?

$M dx + N dy = 0$ denkleminde $M_y \neq N_x$ ise denklem tam değildir ve bu bölümün yöntemi doğrudan işlemez. Oysa **Örnek 7.5** bize bir ipucu verdi: denklemi uygun bir çarpanla çarpmak (orada $\frac{1}{x}$ ile çarpmıştık) tamlığı geri getirebiliyor. Böyle bir çarpanın her zaman var olup olmadığı ve sistemli biçimde nasıl aranacağı, **İntegrasyon Çarpanı** bölümünün konusudur.

8. İntegrasyon Çarpanı

Bir önceki bölümde **tam diferansiyel denklemleri** inceledik: $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ denkleminin tam olması için gerek ve yeter koşulun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğunu gördük ve denklem tam olduğunda $F_x = M$, $F_y = N$ koşullarını sağlayan potansiyel fonksiyonu bularak genel çözümü $F(x, y) = c$ biçiminde yazdık.

Peki bu koşul sağlanmıyorsa ne olacak? Yani $M_y \neq N_x$ ise denklemi çöpe mi atacağız? Hayır. Bir denklemin “tam olması”, aslında denklemin kendisinden çok **yazılış biçimiyle** ilgili bir özelliktir: aynı çözüm eğrilerini veren iki farklı yazılıştan biri tam olmayabilirken öbürü tam olabilir. Çünkü denklemin sağ tarafı sıfırdır; her iki tarafı sıfırdan farklı bir $\mu(x, y)$ fonksiyonuyla çarparsak çözüm eğrileri değişmez, ama M ile N değişir, dolayısıyla M_y ile N_x de değişir.

İşte bu bölümün fikri budur: tam olmayan bir denklemi, uygun bir $\mu(x, y)$ ile çarparak **tam hâle getirmek**. Böyle bir çarpma integrasyon çarpanı diyeceğiz. Önce çarpanın sağlaması gereken denklemi çıkaracak, sonra bu denklemin pratikte çözülebildiği üç durumu (yalnız x 'e bağlı çarpan, yalnız y 'ye bağlı çarpan ve $x^2 + y^2$ 'ye bağlı çarpan) tek tek işleyeceğiz.

8.1 Neden Bir Çarpma İhtiyaç Duyarız?

Fikri en yalın örnekte görelim. Şu denkleme bakalım:

$$y dx - x dy = 0.$$

Burada $M = y$ ve $N = -x$ olduğundan

$$M_y = 1, \quad N_x = -1$$

bulunur; $M_y \neq N_x$, yani denklem tam değildir. Ama denklemi $\frac{1}{y^2}$ ile çarparsak ($y \neq 0$ bölgesinde) sol taraf tanıdık bir tam diferansiyele dönüşür:

$$\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

Yani denklem $d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ hâlini alır ve bir önceki bölümün yöntemiyle çözülebilir; tam olmayan bir denklemi tek bir çarpma ile çözülebilir hâle getirdik. Tamlık denetimini ve genel çözümü az sonra **Örnek 8.1**'da adım adım yapacağız; şimdi bu gözlemi tanım hâline getirelim.

8.2 İntegrasyon Çarpanı

Tanım 8.1 (İntegrasyon Çarpanı). D bölgesinde tanımlı

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

denklemi D 'de tam olmasın. Eğer D üzerinde sıfırdan farklı ve sürekli türevlenebilir bir $\mu(x, y)$ fonksiyonu için

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0$$

denklemi D 'de **tam** oluyorsa, $\mu(x, y)$ fonksiyonuna verilen diferansiyel denklemin bir **integrasyon çarpanı** (integrating factor) denir.

Yani integrasyon çarpanı, denklemi tam olmayan yazılışından tam yazılışına geçiren bir düzeltme katsayısıdır; onunla çarptıktan sonra bir önceki bölümün yöntemi aynen uygulanır.

Örnek 8.1 (Bir Çarpanın Doğrulanması). $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$ fonksiyonunun, $y > 0$ bölgesinde

$$y dx - x dy = 0$$

denkleminin bir integrasyon çarpanı olduğunu gösteriniz ve denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Önce verilen denklemin tam olmadığını görelim: $M = y$, $N = -x$ için

$$M_y = 1, \quad N_x = -1$$

olup $M_y \neq N_x$ 'tir.

Şimdi denklemi $\mu = \frac{1}{y^2}$ ile çarpalım. $y > 0$ olduğundan μ tanımlı, sürekli türevlenebilir ve sıfırdan farklıdır:

$$\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0.$$

Yeni katsayılar $\tilde{M} = \frac{1}{y}$ ve $\tilde{N} = -\frac{x}{y^2}$ olmak üzere

$$\tilde{M}_y = -\frac{1}{y^2}, \quad \tilde{N}_x = -\frac{1}{y^2}$$

bulunur. İki kısmi türev eşit olduğundan yeni denklem tamdır; demek ki $\mu = \frac{1}{y^2}$ bir integrasyon çarpanıdır.

Genel çözümü bulmak için $F_x = \tilde{M}$ koşulundan başlayalım:

$$F(x, y) = \int \frac{1}{y} \partial x + h(y) = \frac{x}{y} + h(y).$$

Bunu y 'ye göre türetilip $\tilde{N}$ 'ye eşitleyelim:

$$F_y = -\frac{x}{y^2} + h'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1.$$

Böylece $F(x, y) = \frac{x}{y}$ ve genel çözüm

$$\frac{x}{y} = c$$

olur. Bu aile, $c \neq 0$ için orijinden geçen $y = kx$ ($k = 1/c$) doğrularını, $c = 0$ için ise $x = 0$ doğrusunu verir. Gerçekten de $y = kx$ için $dy = k dx$ olup $y dx - x dy = kx dx - kx dx = 0$ 'dır; $x = 0$ doğrusu üzerinde de $x = 0$ ve $dx = 0$ olduğundan $y dx - x dy = 0$ sağlanır.

■

i İntegrasyon çarpanı tek değildir

Yukarıdaki denklem için $\frac{1}{y^2}$ tek seçenek değildir. Örneğin $\frac{1}{x^2}$ ile çarparsak

$$\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0 \Rightarrow -d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

elde edilir; $\frac{1}{xy}$ ile çarparsak

$$\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0 \Rightarrow \ln|x| - \ln|y| = c$$

çıkar. Üçü de aynı çözüm ailesini verir. Bu yüzden “İntegrasyon çarpanı” derken “**bir**” İntegrasyon çarpanı kastedilir; amacımız en kolay bulunanı yakalamaktır.

8.3 Çarpanın Sağladığı Denklem

Tanım güzel ama kullanışlı değil: μ 'yü nasıl bulacağımızı söylemiyor. μ 'nün sağlaması gereken koşulu, tamlik ölçütünü çarpılmış denkleme uygulayarak çıkaralım.

Teorem 8.1 (İntegrasyon Çarpanının Denklemi). *D dikdörtgensel bir bölge olsun; M, N ve μ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevleri D 'nin her noktasında sürekli ve μ, D 'de sıfırdan farklı olsun. Bu durumda $\mu(x, y)$ fonksiyonu, $M dx + N dy = 0$ denkleminin bir İntegrasyon çarpanıdır ancak ve ancak*

$$\mu_y M - \mu_x N + \mu(M_y - N_x) = 0$$

eşitliği D 'nin her noktasında sağlanırsa. Bu eşitliğe kısalık olsun diye (*) diyeceğiz.

İspat.

μ, M ve N 'nin birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan μM ile μN 'nin kısmi türevleri de D 'de süreklidir; D dikdörtgensel olduğundan tamlik ölçütü (Teorem 7.1) çarpılmış denkleme uygulanabilir. Ölçüte göre $\mu M dx + \mu N dy = 0$ denkleminin D 'de tam olması,

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu M) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu N)$$

eşitliğinin D 'nin her noktasında sağlanmasıyla aynı şeydir. Her iki tarafa çarpım kuralını uygulayalım:

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x.$$

Bütün terimleri sol tarafa toplarsak

$$\mu_y M - \mu_x N + \mu(M_y - N_x) = 0$$

bulunur. Adımların hepsi denklik olduğundan ters yönde de yürünebilir: (*) sağlanıyorsa $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ olur; ölçütün yeterlilik yönü gereği D 'nin dikdörtgensel olması tam burada kullanılır – çarpılmış denklem D 'de tamdır.

■

Yani μ 'yü bulmak, (*) ile verilen bir **kısmi diferansiyel denklemi** (Tanım 1.3) çözmek demektir. Bu iyi bir haber değildir: (*), çözmek istediğimiz adi diferansiyel denklemden daha zor bir denklemdir; bilinmeyen μ iki değişkene bağlıdır ve genel çözümü elde etmenin sistematik bir yolu yoktur. Buradan çıkış yolu, μ 'nün biçimi üzerine bir **varsayım** yapmaktır. En doğal varsayım, μ 'nün tek bir değişkene bağlı olmasıdır: ya yalnız x 'e ya da yalnız y 'ye. Bu varsayımlardan her biri, (*) denklemini değişkenlerine ayrılabilen basit bir adi denkleme indirger.

8.4 Yalnız x 'e Bağlı Çarpan

Teorem 8.2 (x 'e Bağlı İntegrasyon Çarpanı).

$$\frac{M_y - N_x}{N}$$

oranı sadeleştiğinde yalnız x 'e bağlı bir $p(x)$ fonksiyonuna eşit oluyorsa,

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

fonksiyonu $M dx + N dy = 0$ denkleminin bir integrasyon çarpanıdır.

İspat.

$\mu = \mu(x)$ olduğunu varsayalım. O hâlde $\mu_y = 0$ ve $\mu_x = \frac{d\mu}{dx}$ tir. Bunları (*) denkleminde yerine koyalım:

$$-\frac{d\mu}{dx} N + \mu (M_y - N_x) = 0 \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu.$$

Bu, μ için değişkenlerine ayrılabilen bir denklemdir. Sağ taraftaki kesir yalnız x 'e bağlı $p(x)$ ise değişkenleri ayırabiliriz:

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(x) dx \Rightarrow \ln |\mu| = \int p(x) dx.$$

İntegral sabitini sıfır seçip her iki tarafın üstelini alırsak

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

bulunur. Bu fonksiyonun gerçekten bir integrasyon çarpanı olduğunu doğrulayalım. $\mu' = p \mu$ olduğundan

$$(\mu N)_x = \mu' N + \mu N_x = p \mu N + \mu N_x = \mu (M_y - N_x) + \mu N_x = \mu M_y$$

ve öte yandan μ yalnız x 'e bağlı olduğundan

$$(\mu M)_y = \mu M_y$$

olur. İki ifade eşittir, yani çarpılmış denklem tamdır.

■

Yani $\frac{M_y - N_x}{N}$ oranında y tamamen sadeleşiyorsa, aradığımız çarpanı tek bir integrale buluruz.

i İntegral sabiti neden sıfır seçiliyor?

$\ln |\mu| = \int p dx + c_0$ alsaydık μ yerine $e^{c_0} \mu$ elde ederdik. Bir denklemin μ ile çarpmakla $e^{c_0} \mu$ ile çarpmak arasında hiçbir fark yoktur: sabit katsayı tamlık koşulunu da çözümü de değiştirmez. Aynı nedenle $\ln |\mu|$ yerine $\ln \mu$ yazıp $\mu > 0$ seçmek de serbesttir. Bize **bir** çarpan yettiği için en yalınını alırız.

Yöntemi uygulamadan önce adımları toplu hâlde yazalım.

1. M ile N 'yi belirle, M_y ve N_x kısmi türevlerini hesapla. Eşitse denklem zaten tamdır, çarpana gerek yoktur.
2. $\frac{M_y - N_x}{N}$ oranını **sadeleştir**. Sonuç yalnız x 'e bağlıysa $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ çarpanını hesapla.
3. Denklemin iki tarafını da μ ile çarp ve yeni M , N için $M_y = N_x$ eşitliğini doğrula.
4. Artık tam olan denklemin bir önceki bölümün yöntemiyle çöz: $F_x = M$, $F_y = N$ koşullarından potansiyel fonksiyonu bul, genel çözümü $F(x, y) = c$ olarak yaz.

Örnek 8.2 (Çarpanı x Olan Bir Denklem). $x > 0$ olmak üzere

$$(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$$

denklemini çözüyoruz.

Çözüm.

Tamlık denetimi. $M = 3xy + y^2$ ve $N = x^2 + xy$ için

$$M_y = 3x + 2y, \quad N_x = 2x + y.$$

$M_y \neq N_x$ olduğundan denklem tam değildir; bir integrasyon çarpanı arayacağız.

Hangi çarpanı deneyelim? Önce $\mu = \mu(y)$ denesek ne olurdu, ona bakalım:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2x + y - 3x - 2y}{3xy + y^2} = \frac{-(x + y)}{y(3x + y)}.$$

Bu ifadede x sadeleşmiyor; oran x 'e de bağlı kaldığından $\mu = \mu(y)$ varsayımı bizi

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-(x+y)}{y(3x+y)} dy}$$

gibi, x 'i içinde taşıdığı için hesaplayamayacağımız bir integrale götürür. Demek ki bu yol kapalı; $\mu = \mu(x)$ deneyelim.

Çarpanın hesabı.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}.$$

Oran yalnız x 'e bağlı çıktı. O hâlde

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

bir integrasyon çarpanıdır ($x > 0$ olduğu için mutlak değere gerek kalmadı).

Denklemi çarpalım. Her iki tarafı $\mu(x) = x$ ile çarparsak

$$(3x^2y + xy^2) dx + (x^3 + x^2y) dy = 0$$

olur. Yeni katsayılar $M = 3x^2y + xy^2$ ve $N = x^3 + x^2y$ için

$$M_y = 3x^2 + 2xy, \quad N_x = 3x^2 + 2xy$$

bulunur. Kısmi türevler eşit: denklem artık tamdır.

Potansiyel fonksiyon. Öyle bir $F(x, y)$ vardır ki

$$F_x = 3x^2y + xy^2, \quad F_y = x^3 + x^2y.$$

İkinci koşulu y 'ye göre integralleyelim (burada x sabit tutulur):

$$F(x, y) = \int (x^3 + x^2y) dy + h(x) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(x).$$

Şimdi bunu x 'e göre türetilip birinci koşula eşitleyelim:

$$F_x = 3x^2y + xy^2 + h'(x) = 3x^2y + xy^2 \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c_1.$$

Genel çözüm. $F(x, y) = c$ yazıp sabitleri birleştirirsek

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c$$

kapalı genel çözümünü elde ederiz.

■

8.5 Yalnız y 'ye Bağlı Çarpan

Aynı hesabı bu kez x yerine y için yapalım.

Teorem 8.3 (y'ye Bağlı İntegrasyon Çarpanı).

$$\frac{N_x - M_y}{M}$$

oranı sadeleştğinde yalnız y 'ye bağlı bir $q(y)$ fonksiyonuna eşit oluyorsa,

$$\mu(y) = e^{\int q(y) dy}$$

fonksiyonu $M dx + N dy = 0$ denkleminin bir integrasyon çarpanıdır.

İspat.

$\mu = \mu(y)$ olsun. Bu durumda $\mu_x = 0$ ve $\mu_y = \frac{d\mu}{dy}$ 'dir. (*) denkleminde yerine koyalım:

$$\frac{d\mu}{dy} M + \mu (M_y - N_x) = 0 \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M} \mu.$$

Sağ taraftaki kesir yalnız y 'ye bağlı $q(y)$ ise değişkenleri ayırıp integralleyebiliriz:

$$\frac{d\mu}{\mu} = q(y) dy \Rightarrow \ln |\mu| = \int q(y) dy.$$

İntegral sabitini yine sıfır alarak

$$\mu(y) = e^{\int q(y) dy}$$

buluruz. Doğrulaması bir önceki teoremdedekinin aynadaki görüntüsüdür: $\mu' = q \mu$ olduğundan

$$(\mu M)_y = \mu' M + \mu M_y = \mu (N_x - M_y) + \mu M_y = \mu N_x = (\mu N)_x$$

olur, yani çarpılmış denklem tamdır. ■

Yani bu kez $\frac{N_x - M_y}{M}$ oranında x 'in tamamen sadeleşmesini bekliyoruz; payın sırası da x 'e bağlı duruma göre terstir.

⚠ Çarpanın sıfır olduğu yerlere dikkat

İntegrasyon çarpanıyla çarpmak, $\mu \neq 0$ olan bölgede çözümleri değiştirmez. Ama μ 'nün sıfır olduğu eğriler üzerinde durum farklıdır: orada çarpılmış denklem, özgün denklemden daha fazla eğriyi "çözüm" gibi gösterebilir. Bu yüzden çarpan $\mu(y) = y^2$ gibi bir yerde sıfır oluyorsa, $y = 0$ eğrisinin özgün denklemi sağlayıp sağlamadığı ayrıca denetlenir.

Örnek 8.3 (Çarpanı y Kare Olan Bir Denklem).

$$y dx + (3 + 3x - y) dy = 0$$

denklemini çözüünüz.

Çözüm.

Tamlık denetimi. $M(x, y) = y$ ve $N(x, y) = 3 + 3x - y$ için

$$M_y = 1, \quad N_x = 3$$

olup $M_y \neq N_x$ 'tir; denklem tam değildir.

Çarpanın hesabı. M yalnız y 'ye bağlı olduğundan $\mu = \mu(y)$ denemek akıllıcadır:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{3 - 1}{y} = \frac{2}{y}.$$

Oran yalnız y 'ye bağlı çıktı. O hâlde

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln |y|} = y^2$$

bir integrasyon çarpanıdır.

Denklemleri çarpalım. Her iki tarafı y^2 ile çarparsak

$$y^3 dx + (3y^2 + 3xy^2 - y^3) dy = 0$$

olur. Yeni katsayılar $M = y^3$ ve $N = 3y^2 + 3xy^2 - y^3$ için

$$M_y = 3y^2, \quad N_x = 3y^2$$

bulunur; denklem artık tamdır.

Potansiyel fonksiyon. Öyle bir $F(x, y)$ vardır ki

$$F_x = y^3, \quad F_y = 3y^2 + 3xy^2 - y^3.$$

Birinci koşulu x 'e göre integralleyelim:

$$F(x, y) = \int y^3 dx + h(y) = xy^3 + h(y).$$

Bunu y 'ye göre türetilip ikinci koşula eşitleyelim:

$$F_y = 3xy^2 + h'(y) = 3y^2 + 3xy^2 - y^3 \Rightarrow h'(y) = 3y^2 - y^3.$$

Buradan

$$h(y) = y^3 - \frac{y^4}{4} + c_1$$

elde edilir.

Genel çözüm. $F(x, y) = c$ yazıp sabitleri birleştirirsek

$$xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = c$$

kapalı genel çözümüne ulaşırız. Son olarak çarpanın sıfır olduğu $y = 0$ durumunu denetleyelim: $y \equiv 0$ alındığında $dy = 0$ ve $y dx = 0$ olduğundan özgün denklem sağlanır; bu çözüm de kapalı çözümde $c = 0$ değerine karşılık gelir.

■

8.6 Hangi Çarpanı Denemeli?

Elimizde iki formül var; hangisiyle başlayacağımıza nasıl karar vereceğiz? Karar ölçütü basittir: **hesapladığımız oranın sadeleşip tek değişkene inmesi**. Oran iki değişkeni de taşımaya devam ediyorsa o varsayım yanlış ve formüldeki integral hesaplanamaz – nitekim [Örnek 8.2](#)'te $\mu(y)$ denemesi tam olarak bu yüzden çıkmaz sokağa girmişti.

Varsayım	Hesaplanan oran	Aranan koşul	Çarpan
$\mu = \mu(x)$	$\frac{M_y - N_x}{N}$	yalnız x 'e bağlı	$e^{\int p(x) dx}$
$\mu = \mu(y)$	$\frac{N_x - M_y}{M}$	yalnız y 'ye bağlı	$e^{\int q(y) dy}$

Pratikte şu sırayı izlemek zaman kazandırır:

1. Önce $M_y - N_x$ farkını bir kez hesapla; bu ifade iki formülde de ortaktır (yalnızca işareti ve bölen değişir).
2. Farkı N 'ye böl ve sadeleştir. Sonuçta y kalmıyorsa $\mu(x)$ ile devam et.
3. Kalıyorsa farkın işaretini çevirip M 'ye böl. Sonuçta x kalmıyorsa $\mu(y)$ ile devam et.
4. İkisi de olmuyorsa tek değişkenli varsayımdan vazgeçip özel biçimli bir çarpan ara.

Küçük bir sezgi kuralı da işe yarar: N sade bir çarpanlara ayrılmış ifadeyse $\mu(x)$, M sadeyse $\mu(y)$ denemek genellikle daha çabuk sonuç verir.

Örnek 8.4 (Doğru Varsayımı Seçme). $x > 0$ olmak üzere

$$(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

Tamlık denetimi. $M = x^2 + y^2 + 1$ ve $N = -2xy$ için

$$M_y = 2y, \quad N_x = -2y$$

olup denklem tam değildir. Ortak fark

$$M_y - N_x = 2y - (-2y) = 4y$$

olarak bir kez hesaplanır.

Varsayımın seçimi. Farkı önce N 'ye bölelim:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

y sadeleşti; oran yalnız x 'e bağlı. (Meraklısı için: farkın tersini M 'ye bölseydik $\frac{-4y}{x^2 + y^2 + 1}$ ifadesi çıkardı ve bu x 'ten kurtulmazdı; yani $\mu(y)$ varsayımı burada işe yaramaz.)

Çarpanın hesabı.

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Denklemi çarpalım.

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0.$$

Yeni katsayılar için

$$M_y = \frac{2y}{x^2}, \quad N_x = \frac{2y}{x^2}$$

olduğundan denklem tamdır.

Potansiyel fonksiyon. $F_y = -\frac{2y}{x}$ koşulunu y 'ye göre integralleyelim:

$$F(x, y) = -\frac{y^2}{x} + h(x).$$

Bunu x 'e göre türetilip F_x koşuluna eşitleyelim:

$$\frac{y^2}{x^2} + h'(x) = 1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Buradan $h(x) = x - \frac{1}{x}$ bulunur.

Genel çözüm.

$$-\frac{y^2}{x} + x - \frac{1}{x} = c.$$

İstenirse iki taraf x ile çarpılıp daha derli toplu biçimde

$$x^2 - y^2 - 1 = c x$$

yazılabilir.

■

8.7 Özel Biçimli Çarpanlar: $\mu(x^2 + y^2)$

Bazen ne $\frac{M_y - N_x}{N}$ ne de $\frac{N_x - M_y}{M}$ tek değişkene iner; ama denklemin yapısına bakınca x ile y 'nin hep $x^2 + y^2$ öbeği içinde görüldüğü fark edilir. Böyle durumlarda μ 'nün yalnız x 'e ya da yalnız y 'ye değil, doğrudan

$$z = x^2 + y^2$$

büyüklüğüne bağlı olduğunu varsaymak işe yarar. Bu varsayım altında μ yine **tek değişkenli** bir fonksiyondur; tek fark, μ_x ve μ_y kısmi türevlerini zincir kuralıyla yazmamız gerekmesidir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu(x^2 + y^2) = 2x \mu'(z), \quad \frac{\partial}{\partial y} \mu(x^2 + y^2) = 2y \mu'(z),$$

burada $\mu' = \frac{d\mu}{d(x^2 + y^2)}$ olarak, yani μ 'nün kendi tek değişkenine göre türevi olarak anlaşılır.

Teorem 8.4 (x Kare Artı y Kareye Bağlı Çarpan). $z = x^2 + y^2$ olmak üzere, $2yM - 2xN$ ifadesinin sıfırdan farklı olduğu bir bölgede

$$\frac{N_x - M_y}{2yM - 2xN}$$

oranı sadeleştiğinde yalnız z 'ye bağlı bir $r(z)$ fonksiyonuna eşit oluyorsa,

$$\mu(z) = e^{\int r(z) dz}$$

fonksiyonu $M dx + N dy = 0$ denkleminin bir integrasyon çarpanıdır.

İspat.

$\mu = \mu(z)$ varsayımını ve zincir kuralını (*) denkleminde kullanalım. $\mu_y = 2y\mu'$ ve $\mu_x = 2x\mu'$ olduğundan

$$2y\mu' M - 2x\mu' N + \mu(M_y - N_x) = 0$$

olur. μ' terimlerini bir yana toplarsak

$$\mu'(2yM - 2xN) = \mu(N_x - M_y)$$

bulunur. Parantez içindeki ifade sıfırdan farklı olduğu bölgede iki tarafı $\mu(2yM - 2xN)$ ile bölelim:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{2yM - 2xN} dz = r(z) dz.$$

Sağ taraf yalnız z 'ye bağlı olduğundan bu, değişkenlerine ayrılabilen bir denklemdir; integralleyip sabiti sıfır seçersek

$$\ln |\mu| = \int r(z) dz \Rightarrow \mu(z) = e^{\int r(z) dz}$$

elde edilir. Bu μ için (*) eşitliği adım adım geri yürünerek sağlanır, dolayısıyla [Teorem 8.1](#) gereği μ bir integrasyon çarpanıdır. ■

Yani tek değişkenli varsayım yine geçerlidir; değişen tek şey, “tek değişken”in artık x ya da y değil, $x^2 + y^2$ öbeği olmasıdır. Uygulamada formülü ezberlemek yerine, aşağıdaki örnekteki gibi tamlık koşulunu doğrudan yazıp μ' ile μ 'yü ayırmak daha güvenlidir.

Örnek 8.5 (Öbeğe Bağlı Çarpanla Çözüm).

$$y dx - (x^2 + y^2 + x) dy = 0$$

denklemi tam mıdır? Değilse $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ biçiminde bir integrasyon çarpanı bulunuz ve denklemi çözünüz.

Çözüm.

Tamlık denetimi. $M = y$ ve $N = -x^2 - y^2 - x$ için

$$M_y = 1, \quad N_x = -2x - 1.$$

$M_y \neq N_x$ olduğundan denklem tam değildir.

Varsayım. $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ olsun; yani μ , x ile y 'ye yalnızca $x^2 + y^2$ öbeği üzerinden bağlı olsun. Bu bir integrasyon çarpanıysa

$$\mu(x^2 + y^2) y dx - \mu(x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + x) dy = 0$$

denklemi tamdır. Yeni katsayılar

$$M = \mu(x^2 + y^2) \cdot y, \quad N = -\mu(x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + x)$$

olmak üzere $M_y = N_x$ yazacağız. Zincir kuralını hatırlayalım:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2y \mu', \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = 2x \mu', \quad \mu' = \frac{d\mu}{d(x^2 + y^2)}.$$

Tamlık koşulunu yazalım. Çarpım kuralıyla

$$M_y = \mu + 2y^2 \mu', \quad N_x = -(2x + 1) \mu - (x^2 + y^2 + x) 2x \mu'$$

olur. Bunları eşitleyelim:

$$\mu + 2y^2 \mu' = -(2x + 1) \mu - 2x(x^2 + y^2 + x) \mu'.$$

μ için denklemi sadeleştirelim. μ' terimlerini solda, μ terimlerini sağda toplarsak

$$\mu' (2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 + 2x^2) = -(2x + 2) \mu$$

bulunur. Sol taraftaki parantezi çarpanlarına ayıralım:

$$2[y^2(x + 1) + x^2(x + 1)] = 2(x + 1)(x^2 + y^2).$$

Sağ taraf da $-2(x + 1)\mu$ olduğundan, $x \neq -1$ bölgesinde $2(x + 1)$ çarpanı sadeleşir:

$$\mu' (x^2 + y^2) = -\mu.$$

Görüldüğü gibi x ve y , denklemde yalnızca $x^2 + y^2$ öbeği olarak kaldı; varsayımımız tutarlı.

Çarpanı bulalım. $z = x^2 + y^2$ yazıp değişkenleri ayıralım:

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dz}{z} \Rightarrow \ln \mu = -\ln z \Rightarrow \mu(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Denklemi çarpalım. $x^2 + y^2 \neq 0$ bölgesinde

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0$$

elde edilir. Denetleyelim:

$$M_y = \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$N_x = -\frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$M_y = N_x$: denklem artık tamdır.

Potansiyel fonksiyon. $y \neq 0$ bölgesinde çalışalım ve $F_x = M$ koşulunu integralleyelim:

$$F(x, y) = \int \frac{y}{x^2 + y^2} \partial x + h(y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + h(y).$$

Bunu y 'ye göre türetelim:

$$F_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + h'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + h'(y).$$

Bunu N 'ye eşitlersek

$$-\frac{x}{x^2 + y^2} + h'(y) = -1 - \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y.$$

Genel çözüm.

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - y = c.$$

■

i Başka öbekler de denenebilir

Aynı düşünce $x^2 + y^2$ 'ye özel değildir. Denklemin yapısına göre $\mu(xy)$, $\mu(x + y)$ ya da $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$ biçiminde çarpanlar da aranabilir. Yöntem her seferinde aynıdır: öbeğe z adını ver, μ_x ile μ_y 'yi zincir kuralıyla $\mu'(z)$ cinsinden yaz, $(*)$ denkleminde yerine koy ve x ile y 'nin yalnız z üzerinden kalıp kalmadığına bak. Kalıyorsa μ için değişkenlerine ayrılabilen bir denklem elde edilir.

8.8 Alıştırmalar

Alıştırma 8.1 (Üstel Terimli Bir Denklem).

$$y dx + (2x - ye^y) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$M = y$ ve $N = 2x - ye^y$ için

$$M_y = 1, \quad N_x = 2$$

olup denklem tam değildir. M sade olduğundan $\mu = \mu(y)$ deneyelim:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2 - 1}{y} = \frac{1}{y}.$$

Oran yalnız y 'ye bağlı; öyleyse

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

bir integrasyon çarpanıdır. Denklemi y ile çarpalım:

$$y^2 dx + (2xy - y^2 e^y) dy = 0.$$

Denetleyelim: $M_y = 2y$ ve $N_x = 2y$; denklem tamdır.

$F_x = y^2$ koşulundan

$$F(x, y) = xy^2 + h(y)$$

yazılır. y 'ye göre türetilip N 'ye eşitleyelim:

$$F_y = 2xy + h'(y) = 2xy - y^2 e^y \Rightarrow h'(y) = -y^2 e^y.$$

Sağ taraftaki integrali iki kez kısmi integrasyonla hesaplayalım:

$$\int y^2 e^y dy = y^2 e^y - 2 \int y e^y dy = y^2 e^y - 2(y e^y - e^y).$$

Buradan

$$h(y) = -e^y(y^2 - 2y + 2)$$

bulunur. Genel çözüm:

$$xy^2 - e^y(y^2 - 2y + 2) = c.$$

■

Alıştırma 8.2 (Negatif Kuvvetli Çarpan).

$$2xy dx + (y^2 - 3x^2) dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$M = 2xy$ ve $N = y^2 - 3x^2$ için

$$M_y = 2x, \quad N_x = -6x$$

olup denklem tam değildir. Önce $\mu(x)$ varsayımını sınavalım:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{8x}{y^2 - 3x^2}.$$

Bu ifade y 'den kurtulmuyor; varsayım işe yaramaz. Şimdi $\mu(y)$ varsayımını sınavalım:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-6x - 2x}{2xy} = \frac{-8x}{2xy} = -\frac{4}{y}.$$

Oran yalnız y 'ye bağlı çıktı. O hâlde

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{4}{y} dy} = e^{-4 \ln |y|} = \frac{1}{y^4}$$

bir integrasyon çarpanıdır. Denklemi çarpalım ($y \neq 0$):

$$\frac{2x}{y^3} dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \right) dy = 0.$$

Denetleyelim:

$$M_y = -\frac{6x}{y^4}, \quad N_x = -\frac{6x}{y^4};$$

denklem tamdır. F_x koşulunu integralleyelim:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + h(y).$$

y 'ye göre türetip N 'ye eşitleyelim:

$$-\frac{3x^2}{y^4} + h'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \Rightarrow h'(y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow h(y) = -\frac{1}{y}.$$

Genel çözüm:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c,$$

ya da iki taraf y^3 ile çarpılarak

$$x^2 - y^2 = c y^3.$$

Ayrıca çarpanın tanımsız olduğu $y = 0$ durumu özgün denklemi sağlar; bu doğru da bir çözümdür.

■

Alıştırma 8.3 (Çarpanı x Olan Bir Alıştırma). $x > 0$ olmak üzere

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xy dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

$M = x^2 + y^2 + x$ ve $N = xy$ için

$$M_y = 2y, \quad N_x = y$$

olup denklem tam değildir. N çarpanlara ayrılmış biçimde olduğundan $\mu(x)$ deneyelim:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Oran yalnız x 'e bağlı; öyleyse

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

bir integrasyon çarpanıdır. Denklemi x ile çarpalım:

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y dy = 0.$$

Denetleyelim: $M_y = 2xy$ ve $N_x = 2xy$; denklem tamdır.

$F_y = x^2y$ koşulunu y 'ye göre integralleyelim:

$$F(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + h(x).$$

x 'e göre türetip M 'ye eşitleyelim:

$$xy^2 + h'(x) = x^3 + xy^2 + x^2 \Rightarrow h'(x) = x^3 + x^2.$$

Buradan

$$h(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$$

bulunur. Genel çözüm:

$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = c,$$

ya da paydaları gidermek için iki taraf 12 ile çarpılarak

$$6x^2y^2 + 3x^4 + 4x^3 = c_2.$$

■

Alıştırma 8.4 (Öbeğe Bağlı Çarpan Alıştırması). $y > 0$ olmak üzere

$$(x + y) dx + (y - x) dy = 0$$

denklemini için $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ biçiminde bir integrasyon çarpanı bulup denklemini çözünüz.

Çözüm.

$M = x + y$ ve $N = y - x$ için

$$M_y = 1, \quad N_x = -1$$

olup denklemin tam değildir. Ayrıca

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2}{y - x}, \quad \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-2}{x + y}$$

oranlarının ikisi de iki değişkene birden bağlıdır; tek değişkenli varsayımlar işe yaramaz. Öbeğe bağlı çarpanı deneyelim: $z = x^2 + y^2$ ve $\mu = \mu(z)$ olsun. Çarpılmış denklemin katsayıları

$$M = \mu(x + y), \quad N = \mu(y - x)$$

olmak üzere zincir kuralıyla

$$M_y = 2y\mu'(x + y) + \mu, \quad N_x = 2x\mu'(y - x) - \mu$$

bulunur. Tamlik koşulu $M_y = N_x$ şunu verir:

$$2y\mu'(x + y) + \mu = 2x\mu'(y - x) - \mu.$$

μ' terimlerini bir yana toplayalım:

$$\mu'[2y(x + y) - 2x(y - x)] = -2\mu.$$

Köşeli parantezi açalım:

$$2xy + 2y^2 - 2xy + 2x^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Böylece μ için şu yalın denklem kalır:

$$\mu'(x^2 + y^2) = -\mu.$$

x ile y yalnızca z öbeği olarak kaldı; değişkenleri ayıralım:

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dz}{z} \Rightarrow \mu(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Denklemleri bu çarpanla çarpalım:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy = 0.$$

Potansiyel fonksiyon için F_x koşulunu integralleyelim; integrali iki parçaya ayırmak kolaylık sağlar:

$$\int \frac{x}{x^2+y^2} \partial x = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2), \quad \int \frac{y}{x^2+y^2} \partial x = \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Böylece

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + h(y)$$

yazılır. y 'ye göre türetelim:

$$F_y = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} + h'(y).$$

Bunu N 'ye eşitlersek $h'(y) = 0$ çıkar. Genel çözüm:

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = c.$$

■

Böylece birinci mertebeden denklemler için ilk araç kutumuz tamamlanmış oldu: değişkenlerine ayrılabilen denklemler, homojen denklemler, tam diferansiyel denklemler ve bu bölümde gördüğümüz gibi uygun bir çarpanla tam hâle getirilebilen denklemler. Bu dört yöntem, birinci mertebeden denklemlerin çoğunu bir “tam diferansiyeli integralleme” problemine indirger; geriye kalan sınıflar ise (lineer denklemler, Bernoulli ve Riccati denklemleri ile yüksek mertebeden lineer denklemler) kendi özel yöntemlerini gerektirir.