Diferansiyel Geometri

Diferansiyel Geometri 1 — Eğriler ve Öklid Geometrisi

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

Giriş 8

1 Öklid Uzayı 9
1.1 Öklid 3-Uzayı ve Noktalar 9
1.2 Doğal Koordinat Fonksiyonları 13
1.3 Kısmi Türevler ve Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar 15
1.4 Türev Yerel Bir İşlemdir: Açık Kümeler 21
1.5 Boyut Üzerine: Öklid Düzlemi ve n-Uzayı 22
1.6 Alıştırmalar 22

2 Teğet Vektörler 27
2.1 Ok kavramını kesinleştirmek: teğet vektör 27
2.2 Teğet uzayı 32
2.3 Vektör alanları 38
2.4 Doğal çatı alanı 42
2.5 Diferansiyellenebilir vektör alanları 47
2.6 Alıştırmalar 48

3 Yönlü Türevler 54
3.1 Bir Doğru Boyunca Türev 54
3.2 Kısmi Türevlerle Hesaplama 59
3.3 Lineerlik ve Leibniz Kuralı 62
3.4 Vektör Alanı Boyunca Türev 63
3.5 Vektör Alanı Boyunca Türevin Özellikleri 68
3.6 Gösterim Üzerine 70
3.7 Alıştırmalar 70

4 Uzayda Eğriler 77
4.1 Hareket Eden Nokta ve Eğri 77
4.2 Hız Vektörü 83
4.3 Yeniden Parametrelendirme 88
4.4 Eğri Boyunca Türev 91
4.5 Birebir ve Periyodik Eğriler 93
4.6 Düzgün Eğriler 94
4.7 Düzlemde Seviye Kümeleri 95
4.8 Alıştırmalar 99

 CC BY-NC-SA 4.0

5 1-Formlar . . . 107
5.1 Diferansiyel Ne Demek? . . . 107
5.2 1-Formun Tanımı . . . 108
5.3 Bir 1-Formu Bir Vektör Alanında Değerlendirmek . . . 112
5.4 Bir Fonksiyonun Diferansiyeli . . . 116
5.5 Koordinat Fonksiyonlarının Diferansiyelleri . . . 117
5.6 Her 1-Form Koordinatlarla Yazılır . . . 120
5.7 Diferansiyelin Koordinat Formülü . . . 122
5.8 Çarpım ve Bileşke Kuralları . . . 124
5.9 Alıştırmalar . . . 127

6 Diferansiyel Formlar . . . 141
6.1 Formları Çarpmak ve Ters Değişme Kuralı . . . 141
6.2 p-Formlar ve Standart Yazımları . . . 143
6.3 Kama Çarpımı Hesapları . . . 146
6.4 Dış Türev . . . 151
6.5 Dış Türev ve Kama Çarpımı . . . 156
6.6 Dış Türev ve Vektör Analizi . . . 157
6.7 Alıştırmalar . . . 158

7 Dönüşümler . . . 172
7.1 Öklid n-Uzayında Aynı Araçlar . . . 172
7.2 Dönüşüm Nedir? . . . 173
7.3 Bir Eğrinin Görüntüsü . . . 174
7.4 İki Örnek Dönüşüm . . . 176
7.5 Lineer Yaklaşım ve Teğet Dönüşümü . . . 179
7.6 Bir Noktadaki Teğet Dönüşümü . . . 181
7.7 Jacobi Matrisi . . . 183
7.8 Düzgün Dönüşümler . . . 185
7.9 Aynı Boyutta Birebirlik ve Örtenlik . . . 188
7.10 Difeomorfizmalar . . . 189
7.11 Ters Fonksiyon Teoremi . . . 190
7.12 Alıştırmalar . . . 192

8 Öklid Uzayında Analizin Özeti . . . 205
8.1 Nesneler ve Türevleri . . . 205
8.2 Vektör Alanları ve 1-Formlar . . . 206
8.3 Fonksiyonlar ve Eğriler Birer Dönüşümdür . . . 206
8.4 Zincir Kuralının Üç Yüzü . . . 208
8.5 Koordinatlar ve Tanımlar . . . 209
8.6 Tekrar Soruları . . . 209

 CC BY-NC-SA 4.0

9 İç Çarpım . . . 213
9.1 Noktaların İç Çarpımı . . . 213
9.2 Norm ve Schwarz Eşitsizliği . . . 215
9.3 Öklid Uzaklığı . . . 218
9.4 Teğet Vektörlerin İç Çarpımı . . . 220
9.5 Açı, Diklik ve Birim Vektör . . . 221
9.6 Çatılar . . . 223
9.7 Ortonormal Açılım . . . 225
9.8 Duruş Matrisi . . . 229
9.9 Vektörel Çarpım . . . 231
9.10 Üçlü Skaler Çarpım . . . 237
9.11 Alıştırmalar . . . 238

10 Eğriler: Yay Uzunluğu ve Birim Hız . . . 252
10.1 Sürat ve Yay Uzunluğu . . . 252
10.2 Birim Hızlı Yeniden Parametrelendirme . . . 256
10.3 Eğri Üzerinde Vektör Alanları . . . 261
10.4 Türev ve İvme . . . 265
10.5 Paralel Alanlar ve Sıfır Türevler . . . 269
10.6 Alıştırmalar . . . 273

11 Frenet Formülleri . . . 286
11.1 Birim Teğet Alanı ve Eğrilik . . . 286
11.2 Asli Normal ve Binormal . . . 289
11.3 Burulma . . . 291
11.4 Frenet Formülleri . . . 291
11.5 Noktalarla Vektörleri Özdeşleştirmek . . . 296
11.6 Frenet Yaklaşımı ve Üç Düzlem . . . 297
11.7 Eğriliği Sıfır Olan Eğriler . . . 300
11.8 Burulma Sıfırsa Eğri Düzlemseldir . . . 300
11.9 Sabit Eğrilikli Düzlem Eğrileri Çemberdir . . . 301
11.10 Küre Üzerindeki Eğriler . . . 303
11.11 Alıştırmalar . . . 304

12 Keyfi Hızlı Eğriler . . . 325
12.1 Aparatın Aktarılması . . . 325
12.2 Keyfi Hızda Frenet Formülleri . . . 327
12.3 Hız ve İvme . . . 328
12.4 Aparatın Hesaplanabilir Formülleri . . . 330
12.5 Küresel Görüntü . . . 334
12.6 Silindirik Helisler . . . 335
12.7 Eğri Türlerinin Özeti . . . 339
12.8 Alıştırmalar . . . 339

 CC BY-NC-SA 4.0

13 Kovaryant Türev . . . 351
13.1 Bir Vektör Alanının Bir Yöndeki Türevi . . . 351
13.2 Koordinat Formülü . . . 356
13.3 Lineerlik ve Leibniz Kuralları . . . 358
13.4 Bir Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev . . . 360
13.5 Alıştırmalar . . . 364

14 Çatı Alanları . . . 374
14.1 Vektör Alanlarının İç Çarpımı ve Normu . . . 374
14.2 Çatı Alanı . . . 376
14.3 Silindirik Çatı Alanı . . . 379
14.4 Küresel Çatı Alanı . . . 382
14.5 Çatı Alanına Göre Koordinat Fonksiyonları . . . 386
14.6 Alıştırmalar . . . 389

15 Bağlantı Formları . . . 399
15.1 Çatının Türevleri Çatının Kendisi Cinsinden . . . 399
15.2 Bağlantı Denklemleri . . . 404
15.3 Duruş Matrisi ve Bağlantı Formlarının Hesabı . . . 409
15.4 Küresel ve Toroidal Çatılar . . . 414
15.5 Alıştırmalar . . . 417

16 Cartan Yapı Denklemleri . . . 425
16.1 Dual 1-Formlar . . . 425
16.2 Bir 1-Formun Dual Formlarla Açılımı . . . 428
16.3 Dual Formlar ve Duruş Matrisi . . . 430
16.4 Girdileri Form Olan Matrisler . . . 434
16.5 Yapı Denklemleri . . . 436
16.6 Yapı Denklemleriyle Çalışmak . . . 440
16.7 Alıştırmalar . . . 440

17 Çatı Alanlarının Özeti . . . 447
17.1 Nesneler ve Türevleri . . . 447
17.2 Cartan ve Frenet Yan Yana . . . 448
17.3 Ortak Örüntüler . . . 451
17.4 Tekrar Soruları . . . 451

18 Öklid Uzayının İzometrileri . . . 458
18.1 Uzaklığı Koruyan Fonksiyonlar . . . 458
18.2 Ötelemeler . . . 460
18.3 İzometrilerin Bileşkesi . . . 462
18.4 Dönmeler ve Ortogonal Dönüşümler . . . 463
18.5 Orijini Sabit Bırakan İzometriler . . . 466
18.6 Ayrıştırma Teoremi . . . 467

 CC BY-NC-SA 4.0

18.7 İzometrilerin Matrisleri . . . 470
18.8 Bir Eksen Çevresinde Dönmeler . . . 473
18.9 Sabit Noktalar . . . 475
18.10 İzometriler ve Eğriler . . . 476
18.11 İzometri Grubu . . . 479
18.12 Alıştırmalar . . . 480

19 Bir İzometrinin Teğet Dönüşümü . . . 489
19.1 Teğet Dönüşümünün Formülü . . . 489
19.2 İç Çarpımlar ve Çatılar Korunur . . . 494
19.3 İki Çatı Bir İzometri Belirler . . . 499
19.4 Alıştırmalar . . . 503

20 Yönlendirme . . . 509
20.1 Pozitif ve Negatif Yönlü Çatılar . . . 509
20.2 Bir İzometrinin İşareti . . . 514
20.3 Ötelemeler, Dönmeler ve Yansımalar . . . 516
20.4 Vektörel Çarpım ve İzometriler . . . 521
20.5 Alıştırmalar . . . 526

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Diferansiyel geometri, eğrileri ve yüzeyleri analizin araçlarıyla inceler: bir eğrinin ne kadar büküldüğünü, bir yüzeyin bir noktada hangi yönlere eğildiğini, bir yüzeyin üzerinde yaşayan birinin yalnızca ölçüm yaparak neleri öğrenebileceğini kesin tanımlara ve hesaplanabilir büyüklüklere dönüştürür. Bu notlar iki dönemlik bir ders olarak düzenlenmiştir.

Diferansiyel Geometri 1, $\mathbb{R}^3$'te analizin dilini kurar ve bu dili eğrilere uygular: teğet vektörler, yönlü türevler, 1-formlar, eğrilik ve burulma, hareketli çatılar ve Öklid uzayının izometrileri. **Diferansiyel Geometri 2** aynı araçları yüzeylere taşır: şekil operatörü, Gauss eğriliği, yüzeylerin içsel geometrisi, jeodezikler ve Gauss–Bonnet teoremi. Her kavram önce bir motivasyonla sunulur, ardından sade bir dille açıklanır; her örnek ve her alıştırma kendi kutusunda, adım adım çözümüyle verilir.

> **i** Not
>
> Diferansiyel Geometri 1'in ilk iki kısmı, Öklid uzayında analiz ve Çatı Alanları, tamamlanmıştır. Hepsine aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Kalan konular hazırlanma aşamasındadır; tamamlandıkça bu sayfadan bağlantılanacaktır.

CC BY-NC-SA 4.0

1. Öklid Uzayı

Diferansiyel geometri, eğrileri ve yüzeyleri analizin araçlarıyla inceler. Bu araçları kullanabilmek için önce üzerinde çalışacağımız sahneyi, yani üç boyutlu uzayı kesin biçimde tanımlamamız gerekir. Bu bölümde uzayı bir küme olarak kuruyor, sonra bu küme üzerindeki fonksiyonların türevinden söz edebilmek için gereken dili hazırlıyoruz.

Bölümün ana fikri şudur: bir noktayı "konumunu üç sayıyla tarif ettiğimiz bir şey" olarak değil, doğrudan üç sayıdan oluşan bir sıralı üçlü olarak tanımlıyoruz. Ardından her noktaya kendi koordinatlarını veren x, y, z koordinat fonksiyonlarını tanımlıyor ve bir noktanın koordinatı olan sayı ile o koordinatı okuyan fonksiyonu birbirinden titizlikle ayırıyoruz. Bölümün sonunda sonsuz kere türevlenebilen fonksiyonlara "diferansiyellenebilir" diyor, türevin yerel bir işlem olduğunu görüp açık küme kavramını tanıtıyoruz.

Bu ders temel analiz (türev, kısmi türev, zincir kuralı) ile lineer cebir (vektör uzayları, lineer dönüşümler) bilgisini varsayar; fonksiyon dilini — tanım kümesi, görüntü, bileşke, kısıtlama, birebir ve örten olma, ters fonksiyon — bilinen kabul ediyoruz. Yalnız şunu vurgulayalım: burada fonksiyon denince analizdeki gerçel değerli fonksiyonlardan fazlası kastedilir; noktaları sayıya götüren fonksiyonlar, sayıları noktaya götüren eğriler ve uzayı uzaya götüren dönüşümler de aynı çatı altındadır. Ayrıca f ile $f(x)$ ayrımını ders boyunca koruyacağız: f fonksiyonun kendisi, $f(x)$ ise yalnızca bir değerdir.

Bu derste kullanılacak başlıca harfleri şimdiden söyleyelim:

harfler	ne gösterir	nerede
$\mathbf{p}, \mathbf{q}$	noktalar	bu bölüm
f, g, h	gerçel değerli fonksiyonlar	bu bölüm
$\mathbf{v}, \mathbf{w}$	teğet vektörler	Teğet Vektörler bölümü
V, W	vektör alanları	Teğet Vektörler bölümü
α, β	eğriler	ileride
ϕ, ψ	diferansiyel formlar	ileride
F, G	uzaydan uzaya dönüşümler	ileride

Bütün kavramları üç boyutlu Öklid uzayı için tanımlıyoruz; daha yüksek boyutlara geçişi bölümün sonunda kısaca ele alıyoruz.

1.1 Öklid 3-Uzayı ve Noktalar

Üç boyutlu uzayı hepimiz tanırız, ama matematikte çoğu zaman tanımlanmadan kullanılır. Alışılmış resim şudur: bir odanın köşesinde birbirine dik üç kenar çizgisi vardır; bunları eksen sayarsak odadaki her noktanın yeri, eksenler boyunca ölçülen üç uzunlukla söylenir. Bu resimde nokta önce vardır, üç sayı onu sonradan tarif eder. Kesin bir tanım için sırayı ters çeviriyoruz: noktanın tarifini değil, doğrudan üç sayıdan oluşan listeyi nokta olarak tanımlıyoruz. Böylece "nokta nedir?" sorusunu hiç sormadan uzayı kurmuş oluruz.

Tanım 1.1 (Öklid 3-Uzayı ve Nokta). Gerçel sayıların bütün **sıralı üçlülerinin** (ordered triple) kümesine **Öklid 3-uzayı** (Euclidean 3-space) denir ve $\mathbb{R}^3$ ile gösterilir:

$$\mathbb{R}^3 = \{\, (p_1, p_2, p_3) : p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \,\}.$$

Böyle bir üçlü $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$'e $\mathbb{R}^3$'ün bir **noktası** (point) denir.

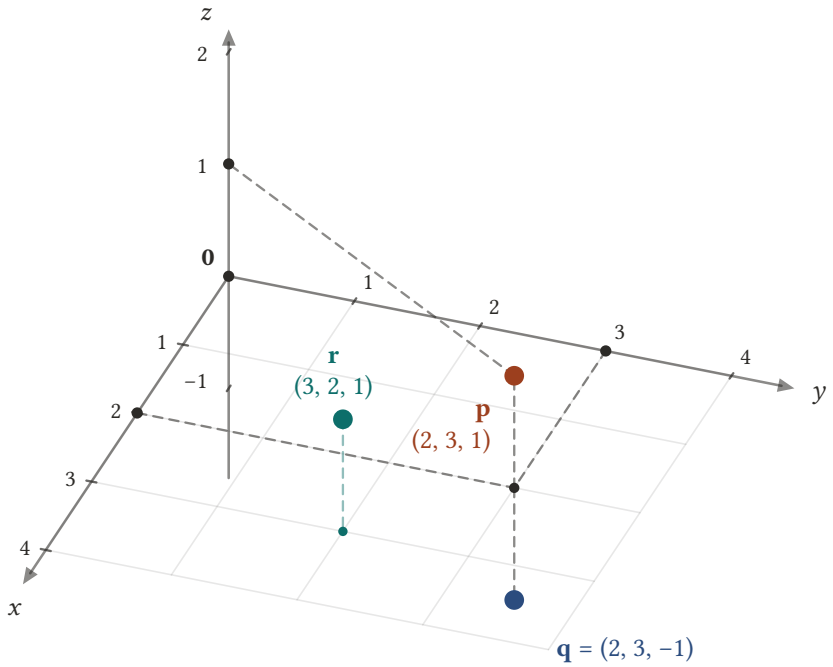
Yani uzay, üç sayıdan oluşan listelerin kümesidir ve "bu nokta nerede?" sorusunun cevabı noktanın kendisidir. "Sıralı" sözcüğü önemlidir: $(1, 2, 3)$ ile $(2, 1, 3)$ farklı noktalardır; $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ ancak $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$ ise doğrudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 1.1 (Sıralı Üçlüleri Karşılaştırmak). $\mathbf{p} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{q} = (2, 3, -1)$ ve $\mathbf{r} = (3, 2, 1)$ noktalarını ele alalım. Bunlar birbirinden farklı mıdır?

> **Çözüm.**
> Üçü de farklıdır: $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$ yalnızca üçüncü koordinatta ($1 \neq -1$), $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{r}$ ise sıra yüzünden birinci koordinatta ($2 \neq 3$) ayrılır.
> ■

Örnek 1.2 (Noktaları Uzayda Okumak). $\mathbf{p} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{q} = (2, 3, -1)$ ve $\mathbf{r} = (3, 2, 1)$ noktaları uzayda nerede durur?



Şekil 1.1: Üç nokta ve koordinatları: **p** = (2, 3, 1) noktasına ulaşmak için başlangıç noktasından x ekseni boyunca 2, y ekseni boyunca 3, sonra yukarı 1 birim gidilir; kesikli koordinat kutusu bu üç adımı eksenlerden okutur. **q** = (2, 3, −1), **p**'nin tam altında ve zeminin 1 birim aşağısındadır; yalnızca üçüncü koordinat değişmiştir. **r** = (3, 2, 1) ise aynı sayıları farklı sırayla taşır ve bu yüzden bambaşka bir yerde durur.

> **Çözüm.**
> Yukarıdaki şekilde $\mathbf{p}$'ye ulaşmak için başlangıç noktasından x ekseni boyunca 2, y ekseni boyunca 3, sonra yukarı 1 birim gidilir; kesikli koordinat kutusu bu üç adımı gösterir. $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$'nin tam altında ve zeminin 1 birim aşağısındadır. $\mathbf{r}$ ise $\mathbf{p}$ ile aynı yükseklikte durur; ona ulaşmak için x ekseni boyunca 3, y ekseni boyunca 2 birim, sonra yukarı 1 birim gidilir.
> ■

Lineer cebirden bildiğimiz gibi $\mathbb{R}^3$, doğal bir biçimde gerçel sayılar üzerinde bir vektör uzayıdır; bunun için gereken iki işlem koordinat koordinat yapılır.

Tanım 1.2 (Nokta Toplamı, Skaler Kat ve Başlangıç Noktası). $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ve $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbb{R}^3$'ün iki noktası ve a bir gerçel sayı olsun. $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$'nun **toplamı** (sum)

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$

noktası, $\mathbf{p}$'nin a sayısıyla **skaler katı** (scalar multiple)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a\mathbf{p} = (ap_1, ap_2, ap_3)$$

noktasıdır. $\mathbf{0} = (0,0,0)$ noktasına $\mathbb{R}^3$'ün **başlangıç noktası** (orijin, origin) denir.

Yani noktalar bileşen bileşen toplanır ve bileşen bileşen ölçeklenir; sonuç yine bir noktadır. $-\mathbf{p}$ ile $(-1)\mathbf{p} = (-p_1, -p_2, -p_3)$ noktasını, $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ile $\mathbf{p} + (-\mathbf{q})$ noktasını gösteririz.
Bu iki işlemin vektör uzayı aksiyomlarını sağladığını gerçekten denetleyelim; her aksiyom, gerçel sayıların bilinen bir kuralının üç koordinatta ayrı ayrı uygulanmasından ibarettir.

Önerme 1.1 (Öklid Uzayı Bir Vektör Uzayıdır). *Nokta toplamı ve skaler kat işlemleriyle $\mathbb{R}^3$, gerçel sayılar üzerinde bir vektör uzayıdır. Yani her $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için şunlar sağlanır:*

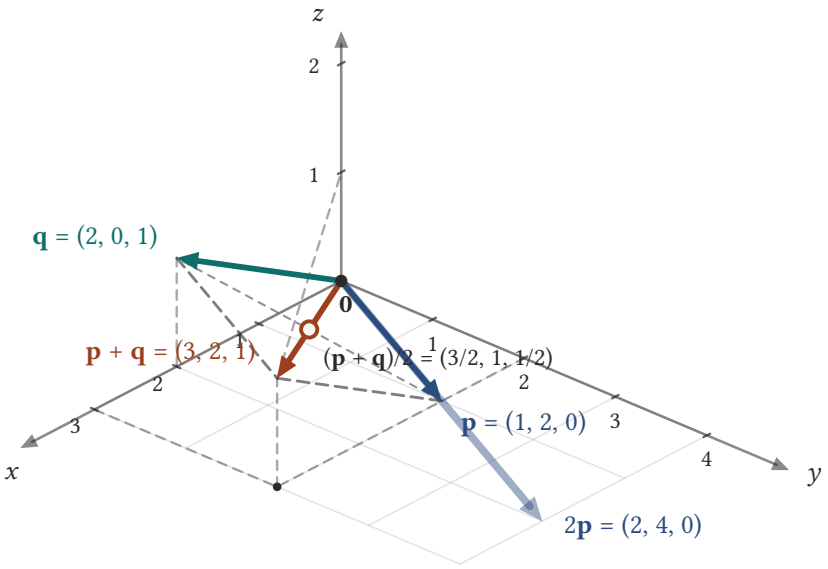
1. $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$;
2. $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r} = \mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r})$;
3. $\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}$;
4. $\mathbf{p} + (-\mathbf{p}) = \mathbf{0}$;
5. $a(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = a\mathbf{p} + a\mathbf{q}$;
6. $(a + b)\mathbf{p} = a\mathbf{p} + b\mathbf{p}$;
7. $(ab)\mathbf{p} = a(b\mathbf{p})$;
8. $1\mathbf{p} = \mathbf{p}$.

> ***İspat.***
> *Her eşitliğin iki yanı birer noktadır ve iki nokta ancak üç koordinatı da eşitse eşittir; dolayısıyla her aksiyomu $i = 1, 2, 3$ için i-inci koordinatta denetlemek yeterlidir. Tanıma göre iki yanın i-inci koordinatları sırasıyla şunlardır:*
> *(1) $p_i + q_i$ ve $q_i + p_i$; (2) $(p_i + q_i) + r_i$ ve $p_i + (q_i + r_i)$; (3) $p_i + 0$ ve p_i; (4) $p_i + (-p_i)$ ve 0; (5) $a(p_i + q_i)$ ve $ap_i + aq_i$; (6) $(a + b)p_i$ ve $ap_i + bp_i$; (7) $(ab)p_i$ ve $a(bp_i)$; (8) $1 \cdot p_i$ ve p_i.*
> *Her çiftteki iki sayı, gerçel sayıların bilinen bir kuralı gereği eşittir: sırasıyla toplamanın değişme ve birleşme özelliği, 0'ın toplamada etkisiz olması, toplamaya göre ters elemanın varlığı, çarpmanın toplama üzerine dağılması (iki kez), çarpmanın birleşme özelliği ve 1'in çarpmada etkisiz olması. Sekiz aksiyom da her koordinatta sağlandığından $\mathbb{R}^3$ bir vektör uzayıdır.*
> ■

İspatın özü şudur: koordinat koordinat tanımlanan işlemler, gerçel sayıların bütün cebirsel kurallarını olduğu gibi devralır.

Örnek 1.3 (Toplam ve Skaler Kat Hesabı). $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ ve $\mathbf{q} = (2, 0, 1)$ olsun. $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $2\mathbf{p}$, $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ve $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ noktalarını bulalım.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.2: $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ ve $\mathbf{q} = (2, 0, 1)$ için toplam ve skaler kat. $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (3, 2, 1)$, başlangıç noktasından çıkan $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ oklarının gerdiği paralelkenarın karşı köşesidir; kesikli kenarlar paralelkenarı tamamlar, kesikli koordinat kutusu ise $(3, 2, 1)$ koordinatlarını eksenlerden okutur. $2\mathbf{p} = (2, 4, 0)$, $\mathbf{p}$ okunun aynı doğrultuda iki katına uzatılmışıdır. $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$'yu birleştiren ince parçanın orta noktası $(\mathbf{p} + \mathbf{q})/2 = (3/2, 1, 1/2)$, toplam okunun tam ortasında durur.

Çözüm.
Tanıma göre koordinat koordinat hesaplarız:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} + \mathbf{q} &= (1 + 2, 2 + 0, 0 + 1) = (3, 2, 1), \\ 2\mathbf{p} &= (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 0) = (2, 4, 0), \\ \mathbf{p} - \mathbf{q} &= (1 - 2, 2 - 0, 0 - 1) = (-1, 2, -1), \\ \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) &= \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Yukarıdaki şekilde $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, başlangıç noktasından çıkan $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ oklarının gerdiği paralelkenarın karşı köşesi, $2\mathbf{p}$ ise $\mathbf{p}$ okunun iki katına uzatılmışıdır; $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ de $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$'yu birleştiren parçanın orta noktasıdır.
Önermedeki beşinci aksiyomu bu sayılarla denetleyelim: $2(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = 2(3, 2, 1) = (6, 4, 2)$ ve $2\mathbf{p} + 2\mathbf{q} = (2, 4, 0) + (4, 0, 2) = (6, 4, 2)$; iki yan aynı noktadır.
■

Örnek 1.4 (Düzlemde Aynı Hesap). Öklid düzlemi (Euclidean plane) $\mathbb{R}^2$'de noktalar sıralı ikilidir ve işlemler yine koordinat koordinat yapılır. $\mathbf{p} = (1, 2)$ ve $\mathbf{q} = (3, -1)$ için $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ noktalarını bulalım; sonra $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ noktasının $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ ve $t = 1$ için nereye düştüğünü görelim.

Çözüm.
$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (4, 1)$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (2, -3)$ olur. Buradan

$$\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + 2t, 2 - 3t)$$

ve $t = 0$ için $\mathbf{p}$, $t = \frac{1}{2}$ için $(2, \frac{1}{2})$, $t = 1$ için $\mathbf{q}$ bulunur. t bütün gerçel sayıları dolaştığında bu noktalar $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$'dan geçen doğruyu, $t \in [0, 1]$ ise $\mathbf{p}$'den $\mathbf{q}$'ya giden doğru parçasını çizer. $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ biçimindeki doğru fikri ileride yönlü türevleri tanımlarken temel araç olacak.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Doğal Koordinat Fonksiyonları

Diferansiyel hesabın $\mathbb{R}^3$'te ilgilendiği şey noktaların kendisi değil, uzay üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonlardır. Böyle bir fonksiyon her noktaya bir sayı verir; sıcaklık, basınç, başlangıç noktasına uzaklık gibi. En basit fonksiyonlar bir noktanın koordinatlarından birini okuyanlardır. Bunlar o kadar basittir ki çoğu zaman fonksiyon oldukları unutulur; oysa öteki bütün fonksiyonlar bunlardan kurulur. Bu yüzden onlara ad verip dikkatle tanımlıyoruz.

Tanım 1.3 (Doğal Koordinat Fonksiyonları). $\mathbb{R}^3$ üzerinde, her $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ noktası için

$$x(\mathbf{p}) = p_1, \qquad y(\mathbf{p}) = p_2, \qquad z(\mathbf{p}) = p_3$$

kuralıyla tanımlanan gerçel değerli x, y, z fonksiyonlarına $\mathbb{R}^3$'ün **doğal koordinat fonksiyonları** (natural coordinate functions) denir. Aynı fonksiyonlar için indisli yazım da kullanılır:

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z.$$

Yani x fonksiyonu bir noktayı alır, birinci koordinatı olan sayıyı verir; x_i'nin $\mathbf{p}$'deki değeri p_i sayısıdır. Dolayısıyla her nokta koordinat fonksiyonlarının değerlerinden geri kurulur:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) = \big(\, x_1(\mathbf{p}), x_2(\mathbf{p}), x_3(\mathbf{p}) \,\big)\,.$$

Sol yanda noktanın üç koordinatı, sağ yanda üç koordinat fonksiyonunun aynı noktadaki değerleri vardır; bunlar aynı sayılardır. Fonksiyon olan x_1, x_2, x_3'tür; $x_i(\mathbf{p})$ yalnızca bir sayıdır.

> ⚠ Nokta mı, sayı mı, fonksiyon mu?
>
> Üç ayrı nesne var, hepsi benzer harflerle yazılıyor:
>
> - $\mathbf{p}$ bir noktadır: uzayın bir elemanı.
> - p_1 bir sayıdır: $\mathbf{p}$ noktasının birinci koordinatı.
> - x_1 bir fonksiyondur: uzayın her noktasını bir sayıya götüren kural. $x_1(\mathbf{p}) = p_1$ eşitliği bu üçünü birbirine bağlar.
>
> Temel analizde x harfinin hem sayı hem değişken olarak kullanılması sorun çıkarmaz, çünkü sayı doğrusunda bir nokta ile koordinatı zaten aynı sayıdır; üç boyutta ise p_1 sayısı ile x_1 fonksiyonunu karıştırmak gerçek belirsizlikler doğurur. Örneğin "$x = 2$" yazısı bir sayı eşitliği değil, x fonksiyonunun 2 değerini aldığı noktaların kümesinin, yani x eksenini dik kesen bir düzlemin adıdır.
> Aynı disiplini bütün fonksiyonlara uyguluyoruz: f fonksiyonun kendisidir, $f(\mathbf{p})$ ise onun $\mathbf{p}$ noktasındaki değeri olan sayıdır.

Örnek 1.5 (Koordinat Fonksiyonlarının Değerleri). $\mathbf{p} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{q} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{r} = (2, 0, 0)$ noktalarında x, y ve z fonksiyonlarının değerlerini bulalım.

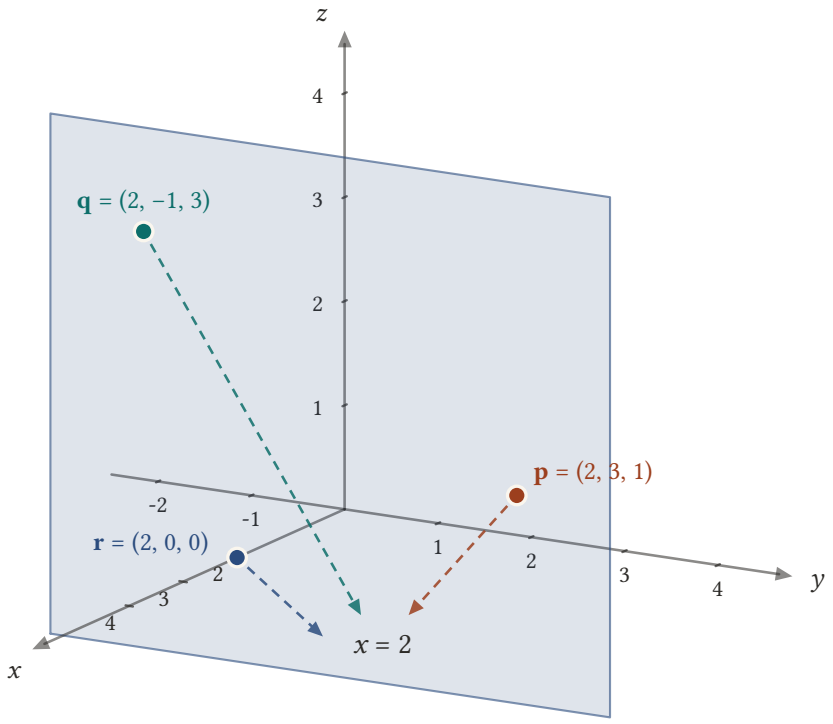
Çözüm.
Tanıma göre değerler doğrudan koordinatlardır:

nokta	x değeri	y değeri	z değeri
$\mathbf{p} = (2, 3, 1)$	2	3	1
$\mathbf{q} = (2, -1, 3)$	2	-1	3
$\mathbf{r} = (2, 0, 0)$	2	0	0

■

Örnek 1.6 (Aynı x Değerini Alan Noktalar). $\mathbf{p} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{q} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{r} = (2, 0, 0)$ noktalarının üçünde de x fonksiyonunun değeri 2'dir. $x(\mathbf{p}) = 2$ eşitliğini sağlayan bütün noktaların kümesi nedir?

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.3: Mavi taralı parça, x eksenini 2 noktasında dik kesen $x = 2$ düzleminin bir kesitidir; $\mathbf{p}$ = (2, 3, 1), $\mathbf{q}$ = (2, −1, 3) ve $\mathbf{r}$ = (2, 0, 0) noktalarının üçü de bu düzlem üzerindedir. Kesikli oklar x koordinat fonksiyonunun yaptığı işi gösterir: birbirinden farklı üç noktayı aynı 2 sayısına götürür. $x(\mathbf{p}) = 2$ koşulunu sağlayan noktaların tamamı işte bu düzlemdir.

Çözüm.
Üç nokta farklı olduğu hâlde x fonksiyonu üçünü de aynı 2 sayısına götürür; yukarıdaki şekil bunu gösterir. $x(\mathbf{p}) = 2$ koşulunu sağlayan noktalar, birinci koordinatı 2 olan bütün $(2, p_2, p_3)$ noktalarıdır; bu küme x eksenini 2 noktasında dik kesen bir düzlemdir, şekildeki taralı parça onun bir kesitidir. Kısaca "$x = 2$ düzlemi" deriz; burada x bir fonksiyon, 2 onun aldığı değerdir. Düzlemde aynı şey bir boyut aşağıda görünür: $\mathbb{R}^2$'nin iki koordinat fonksiyonu x, y vardır ve "$y = 0$" kümesi, ikinci koordinatı sıfır olan noktalardan oluşan x eksenidir.
■

Koordinat fonksiyonlarının asıl gücü, öteki fonksiyonların bunlar cinsinden yazılabilmesidir; $f = x^2y$ yazımını açıklayalım.

i f = x²y yazımı ne demektir?

x ve y birer fonksiyon olduğundan x^2y ifadesi, değeri her noktada koordinatlardan hesaplanan bir fonksiyondur: $f = x^2y$ yazmak,

$$f(\mathbf{p}) = x(\mathbf{p})^2\, y(\mathbf{p}) = p_1^2\, p_2 \quad (\text{her} \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{için})$$

demektir. Genel olarak x, y, z ile kurulmuş her formül $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir fonksiyon tanımlar; değeri, formülde x, y, z yerine p_1, p_2, p_3 konarak bulunur. "$f = x^2y$" ile "$f(x, y, z) = x^2y$" aynı şeyi söyler.

Örnek 1.7 (Koordinatlardan Kurulan Fonksiyonların Değerleri). $f = x^2y$ ve $g = y \sin z$ fonksiyonlarının $\mathbf{p} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{r} = (1, 2, \pi/2)$ ve $\mathbf{0}$ noktalarındaki değerlerini bulalım.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(\mathbf{p}) = p_1^2 p_2$ ve $g(\mathbf{p}) = p_2 \sin p_3$ kuralını her noktaya uygularız:

$$\begin{aligned} f(2,3,1) &= 4 \cdot 3 = 12, & g(2,3,1) &= 3\sin 1, \\ f(1,2,\pi/2) &= 1 \cdot 2 = 2, & g(1,2,\pi/2) &= 2\sin(\pi/2) = 2, \\ f(0,0,0) &= 0, & g(0,0,0) &= 0. \end{aligned}$$

f üçüncü, g birinci koordinata bağlı değildir; yine de ikisi de $\mathbb{R}^3$'ün tamamında tanımlıdır.
■

1.3 Kısmi Türevler ve Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar

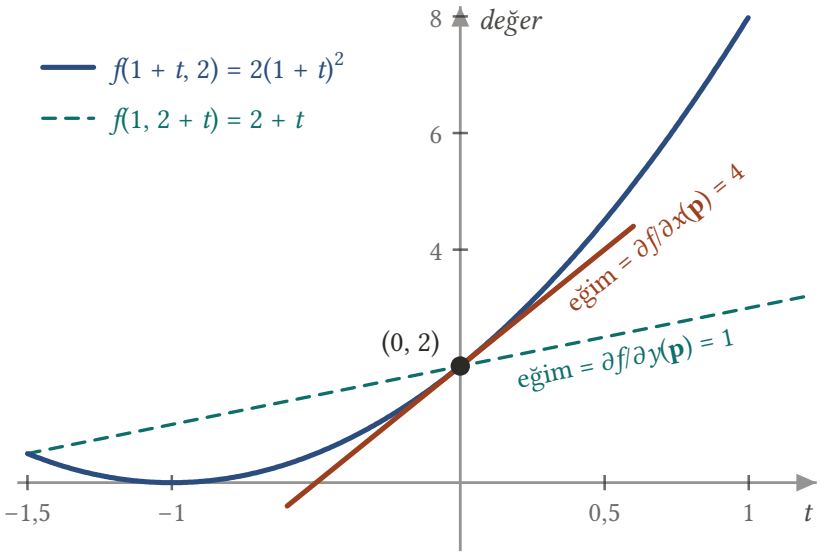
Kısmi türev almayı ve bileşke fonksiyonun türevi için zincir kuralını (chain rule) bildiğinizi varsayıyoruz; zincir kuralının ispatını yeniden yapmayacak, onu bir araç olarak kullanacağız. Yine de kısmi türevin tanımını koordinat diliyle bir kez hatırlatalım, çünkü sonraki bölümlerde bu tanımın üzerine yeni kavramlar kuracağız.

f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir fonksiyon ve $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ bir nokta olsun. f'nin $\mathbf{p}$ noktasındaki x'e göre **kısmi türevi** (partial derivative), öteki iki koordinat sabit tutularak yalnızca birinci koordinat değiştirildiğinde f'nin değişim hızıdır:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + t, p_2, p_3) - f(p_1, p_2, p_3)}{t}.$$

$\partial f/\partial y$ ve $\partial f/\partial z$ aynı biçimde, ikinci ve üçüncü koordinat değiştirilerek tanımlanır. Bu türevler yine $\mathbb{R}^3$ üzerinde birer fonksiyondur; onların da türevi alınarak $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x \partial y$ gibi ikinci mertebeden (second-order) türevler (burada $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ yazımı, önce y'ye sonra x'e göre türev almak demektir), sonra daha yüksek mertebeden türevler elde edilir. Hesapta en çok birinci ve ikinci mertebeden türevler geçer; ara sıra üçüncü, hatta dördüncü mertebeden türevler de gerekir.

Örnek 1.8 (Kısmi Türevin Anlamı). Öklid düzleminde $f = x^2 y$ olsun; kısmi türevin tanımı düzlemde de aynıdır, yalnızca değiştirilecek iki koordinat vardır. $\mathbf{p} = (1, 2)$ noktasında $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$ değerlerini bulalım ve bunların birer eğim olduğunu görelim.



Şekil 1.4: $f = x^2 y$ fonksiyonunun $\mathbf{p} = (1, 2)$ noktasından geçen iki koordinat doğrusuna kısıtlanışı; yatay eksen t, düşey eksen görülen değer. Mavi eğri, birinci koordinatı değiştirince görülen $f(1 + t, 2) = 2(1 + t)^2$ parabolüdür; $(0, 2)$ noktasındaki turuncu teğetinin eğimi $\partial f/\partial x(\mathbf{p}) = 4$'tür. Yeşil kesikli doğru ikinci koordinat boyunca görülen $f(1, 2 + t) = 2 + t$ değerleridir; eğimi $\partial f/\partial y(\mathbf{p}) = 1$'dir. Kısmi türev, fonksiyonu bir koordinat doğrultusundaki doğruya kısıtlayıp alınan sıradan türevden başka bir şey değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$\partial f/\partial x = 2xy$ ve $\partial f/\partial y = x^2$ birer fonksiyondur; $\mathbf{p} = (1,2)$'deki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = 1^2 = 1$$

sayılarıdır. Anlamları şudur: $\mathbf{p}$'den yalnızca birinci koordinatı t kadar değiştirirsek $f(1+t,2) = 2(1+t)^2$ değerini görürüz; bu tek değişkenli fonksiyonun $t=0$'daki türevi 4'tür. Yukarıdaki şekil bu parabolü ve $t=0$'daki eğimi 4 olan teğetini gösterir. İkinci koordinat boyunca ilerlersek $f(1,2+t) = 2+t$ görürüz; eğimi 1'dir. Kısmi türev, fonksiyonu bir koordinat doğrultusundaki doğruya kısıtlayıp sıradan türev almaktır.
■

Kaç türev alabileceğimizi her seferinde düşünmemek için fonksiyonların istediğimiz kadar türevlenebilir olmasını baştan isteyeceğiz.

Tanım 1.4 (Diferansiyellenebilir Fonksiyon). $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli bir f fonksiyonunun her mertebeden bütün kısmi türevleri varsa ve bunların hepsi sürekliyse f'ye **diferansiyellenebilir** (differentiable) denir. Aynı anlamda **sonsuz kere türevlenebilir** (infinitely differentiable), **düzgün** (smooth) ya da C^∞ **sınıfından** da denir.

Yani diferansiyellenebilir bir fonksiyonun türevini istediğimiz kadar, istediğimiz sırayla alabiliriz; hiçbir aşamada türevin varlığı ya da sürekliliği için kaygılanmayız. Bu, temel analizdeki "türevlenebilir" sözcüğünden daha güçlüdür: orada bir kere yeterliydi, burada her mertebeyi istiyoruz. Süreklilik koşulunun bir kazancı da karışık türevlerin (mixed partial derivatives) sıradan bağımsız olmasıdır: $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$.

Örnek 1.9 (Bir Polinomun Diferansiyellenebilirliği). $f = x^2 y$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğunu görelim.

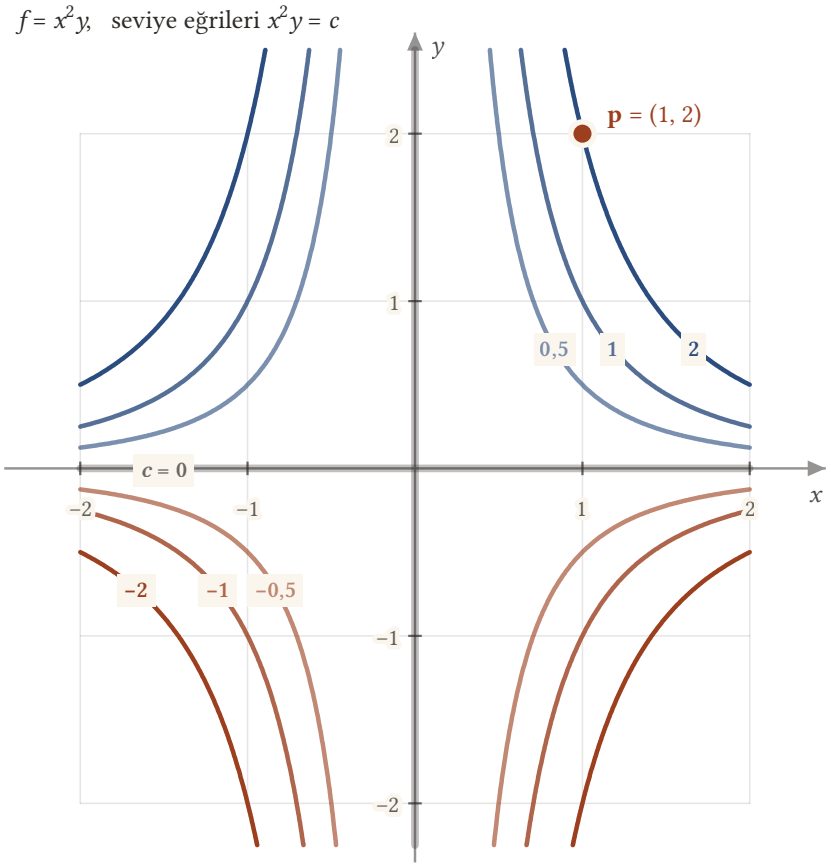
Çözüm.
$f = x^2 y$ bir polinomdur ve bir polinomun her kısmi türevi yine bir polinomdur: $\partial f/\partial x = 2xy$, $\partial f/\partial y = x^2$, $\partial f/\partial z = 0$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 2y$, $\partial^2 f/\partial x \partial y = 2x$, sonunda hepsi sıfır. Polinomlar sürekli olduğundan bütün türevler vardır ve süreklidir; f ve her polinom diferansiyellenebilirdir.
■

Örnek 1.10 (Sinüslü Bir Fonksiyonun Diferansiyellenebilirliği). $g = y \sin z$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğunu görelim.

Çözüm.
$g = y \sin z$ için türevler $\partial g/\partial x = 0$, $\partial g/\partial y = \sin z$, $\partial g/\partial z = y \cos z$, $\partial^2 g/\partial y\, \partial z = \cos z$, $\partial^2 g/\partial z^2 = -y \sin z$ gibi, her biri $\pm y \sin z$, $\pm y \cos z$, $\pm \sin z$, $\pm \cos z$ biçiminde ya da sıfır olan fonksiyonlardır. Sinüs ve kosinüsün türevleri yine sinüs ve kosinüs olduğundan bu döngü hiç bozulmaz; bütün türevler vardır ve süreklidir. Genel olarak polinomlar, üstel fonksiyon, sinüs, kosinüs ve bunların toplam, çarpım ve bileşkeleri diferansiyellenebilirdir; bu derste karşılaşacağımız fonksiyonların hemen hepsi bu türdendir.
■

Örnek 1.11 (Bir Polinomun Seviye Eğrileri). Öklid düzleminde $f = x^2 y$ fonksiyonunun seviye eğrilerini (level curves) çizelim.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.5: $f = x^2y$ fonksiyonunun düzlemdeki seviye eğrileri $x^2y = c$: $c = 0{,}5$; 1; 2 için maviler, $c = -0{,}5$; -1; -2 için turuncular; $|c|$ büyüdükçe ton koyulaşır. $c \neq 0$ iken seviye kümesi iki dallı $y = c/x^2$ eğrisidir; $c = 0$ seviye kümesi ise iki koordinat ekseninin birleşimidir (kalın gri). $\mathbf{p} = (1, 2)$ noktası $c = 2$ eğrisinin üzerindedir, çünkü $f(1, 2) = 1^2 \cdot 2 = 2$.

Çözüm.
Yukarıdaki şekilde düzlemdeki $f = x^2y$ fonksiyonunun seviye eğrileri, yani $x^2y = c$ kümeleri görülüyor: $c \neq 0$ için iki dallı $y = c/x^2$ eğrisi, $c = 0$ için iki koordinat ekseninin birleşimi. $\mathbf{p} = (1, 2)$ noktası $c = 2$ eğrisinin üzerindedir, çünkü $f(1, 2) = 2$.
■

Örnek 1.12 (Mutlak Değer Diferansiyellenebilir Değildir). $f = |\,x\,|$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olmadığını gösterelim.

Çözüm.
$f = |\,x\,|$ için $\mathbf{p} = (0, p_2, p_3)$ biçimindeki bir noktada birinci kısmi türevi denetleyelim. Tanıma göre

$$\frac{f(t, p_2, p_3) - f(0, p_2, p_3)}{t} = \frac{|\,t\,|}{t}$$

oranı $t > 0$ için 1, $t < 0$ için -1'dir; $t \to 0$ iken limiti yoktur. Dolayısıyla $\partial f/\partial x$ bu noktalarda tanımsızdır ve f diferansiyellenebilir değildir; sorun yalnızca $x = 0$ düzlemindedir ama tanım her noktada türev ister.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 1.13 (Türevi Sürekli Ama Diferansiyellenebilir Olmayan Bir Fonksiyon). $g = x \mid x \mid$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olmadığını gösterelim.

> **Çözüm.**
> $g = x \mid x \mid$ fonksiyonu mutlak değer örneğinden (Örnek 1.12) daha inceliklidir. $p_1 > 0$ için $g = x^2$, $p_1 < 0$ için $g = -x^2$; buralarda $\partial g/\partial x = 2 \mid x \mid$'tir. $p_1 = 0$ noktalarında ise
>
> $$\frac{g(t, p_2, p_3) - g(0, p_2, p_3)}{t} = \frac{t \mid t \mid}{t} = \mid t \mid \to 0$$
>
> olduğundan türev vardır ve 0'dır. Böylece $\partial g/\partial x = 2 \mid x \mid$ her yerde vardır ve süreklidir. Ama ikinci mertebede mutlak değer örneğine döneriz: $2 \mid x \mid$'in x'e göre türevi $p_1 = 0$ noktalarında yoktur. Birinci türevi var ve sürekli olan g, ikinci türevi olmadığı için bizim anlamımızda diferansiyellenebilir değildir; tanımda "her mertebeden" demenin nedeni budur.
> ■

Diferansiyellenebilir iki fonksiyonu toplayıp çarpabiliriz; sonuç yine diferansiyellenebilirdir. İşlemler değerlerin her noktada ayrı ayrı toplanıp çarpılmasıyla yapılır.

Tanım 1.5 (Fonksiyonların Toplamı ve Çarpımı). f ve g, $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli fonksiyonlar olsun. **Toplam** $f + g$ ve **çarpım** fg, her $\mathbf{p}$ noktası için

$$(f + g)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p}), \qquad (fg)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\, g(\mathbf{p})$$

kuralıyla tanımlanan fonksiyonlardır. Bu tür işlemlere **noktasal** (pointwise) işlem denir.

Yani iki fonksiyonu toplamak ya da çarpmak için her noktadaki değerlerini toplar ya da çarparız. Aynı düşünceyle sayıyla çarpım $(cf)(\mathbf{p}) = c\, f(\mathbf{p})$ ve g'nin sıfırlanmadığı yerde bölüm $(f/g)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})/g(\mathbf{p})$ tanımlanır.

Önerme 1.2 (Toplam ve Çarpım Diferansiyellenebilirliği Korur). *f ve g diferansiyellenebilir ise $f + g$ ve fg de diferansiyellenebilirdir.*

> ***İspat.***
> *Her $k \geq 0$ için şu iddiayı tümevarımla gösteriyoruz: $f + g$'nin k-ıncı mertebeden her kısmi türevi vardır ve f ile g'nin aynı türevlerinin toplamıdır; fg'nin k-ıncı mertebeden her kısmi türevi vardır ve f'nin bir kısmi türevi ile g'nin bir kısmi türevinin çarpımlarından oluşan sonlu bir toplamdır (sıfırıncı mertebeden türev fonksiyonun kendisidir). $k = 0$ için iddia tanımın kendisidir.*
> *İddia k için doğru olsun ve k-ıncı mertebeden bir türevin x_i'ye göre türevini alalım. Toplam kuralına göre toplamın türevi türevlerin toplamıdır; f ve g'nin $(k+1)$-inci mertebeden türevleri var olduğundan sonuç vardır ve aynı biçimdedir. Çarpım için: sonlu toplamın türevi terimlerin türevlerinin toplamıdır ve her FG teriminin türevi çarpım kuralına göre $(\partial F/\partial x_i)\, G + F\, (\partial G/\partial x_i)$'dir; F ve G, f ile g'nin türevleri olduğundan bu türevler vardır ve yeni ifade yine istenen biçimdedir. Böylece iddia $k+1$ için de doğrudur. Her mertebedeki türev, f ve g'nin sürekli türevlerinin sonlu toplam ve çarpımı olduğundan süreklidir. Dolayısıyla $f + g$ ve fg diferansiyellenebilirdir.*
> ■

İspatın özü şudur: toplam ve çarpım kuralı her türev mertebesinde aynı biçimi korur, bu yüzden hiçbir mertebede yeni bir şey olmaz.
Bu önerme, koordinat fonksiyonlarıyla yazılan formüllerin neden diferansiyellenebilir olduğunu da açıklar. x fonksiyonu diferansiyellenebilirdir: $\partial x/\partial x = 1$, öteki bütün türevleri 0'dır; y ve z için de aynı şey geçerlidir. $x^2 y = x \cdot x \cdot y$ ise üç diferansiyellenebilir fonksiyonun noktasal çarpımıdır. Genel olarak x, y, z ile yazılmış her polinom, koordinat fonksiyonlarının ve sabit fonksiyonların noktasal toplam ve çarpımlarından kurulur; dolayısıyla önermeye göre diferansiyellenebilirdir.

Örnek 1.14 (Noktasal Toplam ve Çarpımın Değerleri). $f = x^2 y$ ve $g = y \sin z$ olsun. $f + g$ ve fg fonksiyonlarını x, y, z cinsinden yazalım ve $\mathbf{p} = (1, 2, \pi/2)$ noktasındaki değerlerini bulalım.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım gereği $f+g = x^2y + y\sin z$ ve $fg = x^2y^2 \sin z$'dir. Noktadaki değerler: $f(\mathbf{p}) = 2$ ve $g(\mathbf{p}) = 2\sin(\pi/2) = 2$; dolayısıyla $(f+g)(\mathbf{p}) = 4$ ve $(fg)(\mathbf{p}) = 4$. Aynı sonuç formüllerden de çıkar: $1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4$ ve $1\cdot 4\cdot 1 = 4$.
■

Örnek 1.15 (Çarpımın Türevi İki Yolla). $f = x^2y$ ve $g = y\sin z$ olsun. $\partial(fg)/\partial z$ türevini iki yolla hesaplayalım.

Çözüm.
Türev için iki yol var. Birincisinde $fg = x^2y^2\sin z$ formülünü doğrudan kullanır ve $\partial(fg)/\partial z = x^2y^2\cos z$ buluruz. İkincisinde çarpım kuralını uygularız:

$$\partial(fg)/\partial z = f\,\partial g/\partial z + g\,\partial f/\partial z = x^2y\cdot y\cos z + y\sin z\cdot 0 = x^2y^2\cos z$$

İki yol uyuşur.
■

> **i** Sözleşme: fonksiyon sözcüğü
>
> Bundan sonra her seferinde "diferansiyellenebilir gerçel değerli fonksiyon" demek yerine kısaca **fonksiyon** diyeceğiz. Yani aksi söylenmedikçe bir fonksiyonun değerleri gerçel sayıdır ve fonksiyon diferansiyellenebilirdir. Bu kısaltma yalnızca yazımı hafifletmek içindir. Bir fonksiyonun diferansiyellenebilir olup olmadığının tartışıldığı yerlerde ya da vurgu gerektiğinde iki sıfatı yine açıkça yazacağız; örneğin $|\,x\,|$ gibi bir fonksiyondan söz ederken diferansiyellenebilir olmadığını ayrıca belirtiriz.

Birden çok fonksiyonu başka bir fonksiyonun içine yerleştirmek bu derste sık yapacağımız bir işlemdir; yerleştirmeyi kesin bir tanımla, türevini de zincir kuralıyla veriyoruz.

Tanım 1.6 (Fonksiyonların Yerleştirilmesi). g_1, g_2, g_3 ve h, $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli fonksiyonlar olsun. Her $\mathbf{p}$ noktası için

$$f(\mathbf{p}) = h\,\big(\,g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), g_3(\mathbf{p})\,\big)$$

kuralıyla tanımlanan f fonksiyonu $f = h(g_1, g_2, g_3)$ ile gösterilir.

Yani h'nin üç girişine sırasıyla g_1, g_2, g_3'ün değerleri konur; bu, $\mathbf{p} \mapsto (g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), g_3(\mathbf{p}))$ ile h'nin bileşkesidir. Özel olarak $g_1 = x$, $g_2 = y$, $g_3 = z$ alınırsa

$$f(x,y,z)(\mathbf{p}) = f\,\big(\,x(\mathbf{p}), y(\mathbf{p}), z(\mathbf{p})\,\big) = f(p_1,p_2,p_3) = f(\mathbf{p})$$

olur; yani $f = f(x,y,z)$ özdeşliği geçerlidir. Bu, "$f = x^2y$" ile "$f(x,y,z) = x^2y$" yazımlarının neden aynı şeyi söylediğinin kesin gerekçesidir.

Teorem 1.1 (Zincir Kuralı). *h ve g_1, g_2, g_3 diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $f = h(g_1, g_2, g_3)$ olsun. O zaman f diferansiyellenebilirdir ve*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i}(g_1, g_2, g_3)\,\frac{\partial g_i}{\partial x}$$

eşitliği geçerlidir; $\partial f/\partial y$ ve $\partial f/\partial z$ için de aynı formül, sağ yanda $\partial g_i/\partial y$ ve $\partial g_i/\partial z$ ile geçerlidir. Burada $(\partial h/\partial x_i)(g_1,g_2,g_3)$, h'nin i-inci kısmi türevine g_1, g_2, g_3'ün yerleştirilmesidir.

İspat.
Formülün kendisi, birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar için analiz derslerinden bilinen zincir kuralıdır; onu ispatsız, bir araç olarak kabul ediyoruz. Analizden iki olguyu daha kullana-

 CC BY-NC-SA 4.0

cağız: kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon süreklidir ve sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir. Gösterilecek olan, f'nin her mertebeden kısmi türevinin var ve sürekli olduğudur.
g_1, g_2, g_3'ü sabit tutalım ve iki tür çarpana izin verelim: diferansiyellenebilir bir fonksiyon ya da diferansiyellenebilir bir k için $k(g_1, g_2, g_3)$ biçiminde bir yerleştirme. Böyle çarpanların sonlu çarpımlarının sonlu toplamlarına kısaca izinli ifade diyelim. $f = h(g_1, g_2, g_3)$ tek çarpanlı, tek terimli bir izinli ifadedir; iki izinli ifadenin toplamı ve çarpımı da izinlidir.
Önce süreklilik. Diferansiyellenebilir bir çarpan süreklidir. $k(g_1, g_2, g_3)$ çarpanı, $\mathbf{p} \mapsto (g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), g_3(\mathbf{p}))$ ile k'nin bileşkesi olduğundan süreklidir. Sürekli fonksiyonların sonlu toplam ve çarpımı sürekli olduğundan her izinli ifade süreklidir.
Şimdi türev. $k(g_1, g_2, g_3)$ çarpanının x_j'ye göre kısmi türevi, birinci mertebeden zincir kuralına göre

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial k}{\partial x_i}(g_1, g_2, g_3)\, \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

toplamıdır. $\partial k/\partial x_i$ diferansiyellenebilir olduğundan $(\partial k/\partial x_i)(g_1, g_2, g_3)$ yine ikinci türden bir çarpan, $\partial g_i/\partial x_j$ ise birinci türden bir çarpandır; yani bu türev izinli bir ifadedir. Diferansiyellenebilir bir çarpanın türevi diferansiyellenebilirdir, o da izinlidir. Çarpım kuralına göre bir çarpımın türevi, çarpanlardan birinin türevi ile ötekilerin çarpımlarının toplamıdır; toplam kuralına göre bir toplamın türevi terimlerin türevlerinin toplamıdır. İzinli ifadeler toplam ve çarpım altında kapalı olduğundan sonuç şudur: her izinli ifadenin her birinci mertebeden kısmi türevi vardır ve yine izinli bir ifadedir.
Bu iki gözlemi birleştirelim. f izinli olduğundan birinci mertebeden türevleri vardır ve izinlidir; izinli olduklarından onların da türevleri vardır ve izinlidir; bu hiç durmaz. Yani f'nin her mertebeden bütün kısmi türevleri vardır ve her biri izinli bir ifade olarak süreklidir. f diferansiyellenebilirdir.
■

Yani dıştaki fonksiyonun her girişine göre türevi, o girişe yerleştirilen fonksiyonun türeviyle çarpılır ve çarpımlar toplanır. Tek girişli özel durum en sık kullanılanıdır: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ise $\partial(\varphi \circ g)/\partial x = \varphi'(g)\, \partial g/\partial x$; örneğin $\partial(\sin g)/\partial x = \cos g\, \partial g/\partial x$.
İspatın özü şudur: bir yerleştirmenin türevi yine yerleştirmelerle diferansiyellenebilir fonksiyonların toplam ve çarpımıdır; bu biçim türev alınca bozulmadığından türevleme hiçbir mertebede tıkanmaz.

Örnek 1.16 (Zincir Kuralıyla Hesap). $h = xy + z$ ve $f = h(x^2, y + z, xz)$ olsun. $\partial f/\partial x$ türevini önce zincir kuralıyla, sonra f'yi açıkça yazarak bulalım.

Çözüm.
h'nin kısmi türevleri $\partial h/\partial x_1 = y, \partial h/\partial x_2 = x, \partial h/\partial x_3 = 1$'dir. $g_1 = x^2, g_2 = y + z, g_3 = xz$ yerleştirilince bu türevler sırasıyla $g_2 = y + z, g_1 = x^2$ ve 1 olur. Zincir kuralı:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+z) \cdot \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + x^2 \cdot \frac{\partial (y+z)}{\partial x} + 1 \cdot \frac{\partial (xz)}{\partial x} = (y+z)\, 2x + x^2 \cdot 0 + z = 2x(y+z) + z.$$

Denetleme: $f = x^2(y + z) + xz$ olduğundan doğrudan $\partial f/\partial x = 2x(y + z) + z$; iki yol uyuşur. Örneğin $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ noktasında $(\partial f/\partial x)(\mathbf{p}) = 2 \cdot 1 \cdot (2 + 3) + 3 = 13$ bulunur.
■

Örnek 1.17 (Düzlemde Zincir Kuralı). Öklid düzleminde yerleştirme iki fonksiyonla yapılır: h, g_1 ve g_2 düzlem üzerinde fonksiyonlar ise $f = h(g_1, g_2)$ fonksiyonu $f(\mathbf{p}) = h\,\big(\, g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p})\,\big)$ ile tanımlanır ve zincir kuralı iki terimli olur: giriş sayısı kadar terim. $h = xy$ ve $f = h(x + y, x - y)$ olsun. $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$ türevlerini bulalım, sonra $\mathbf{p} = (3, 1)$ noktasındaki değerlerini hesaplayalım.

Çözüm.
h'nin türevleri $\partial h/\partial x_1 = y$ ve $\partial h/\partial x_2 = x$'tir; $g_1 = x + y$ ve $g_2 = x - y$ yerleştirilince bunlar sırasıyla $g_2 = x - y$ ve $g_1 = x + y$ olur. g_1'in iki türevi de 1, g_2'nin x'e göre türevi 1, y'ye göre türevi -1'dir. Zincir kuralına göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x-y)\cdot 1 + (x+y)\cdot 1 = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)\cdot 1 + (x+y)\cdot(-1) = -2y$$

bulunur. Denetleme: $f = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ olduğundan doğrudan $\partial f/\partial x = 2x$ ve $\partial f/\partial y = -2y$; iki yol uyuşur. $\mathbf{p} = (3,1)$ noktasında $f(\mathbf{p}) = h(4,2) = 8$, $(\partial f/\partial x)(\mathbf{p}) = 6$ ve $(\partial f/\partial y)(\mathbf{p}) = -2$ olur.
■

1.4 Türev Yerel Bir İşlemdir: Açık Kümeler

Kısmi türevin tanımına bir kez daha bakalım: $\partial f/\partial x$'in $\mathbf{p}$ noktasındaki değeri, $f(p_1 + t, p_2, p_3)$ sayılarının $t \to 0$ iken nasıl değiştiğinden hesaplanır. Limitte yalnızca küçük t değerleri rol oynadığından, f'nin $\mathbf{p}$'den uzaktaki noktalarda ne yaptığı sonucu hiç etkilemez; f'yi $\mathbf{p}$'nin çevresindeki küçük bir bölgede bilmek yeter. Türev bu anlamda **yerel** (local) bir işlemdir.
O hâlde diferansiyellenebilir fonksiyonu yalnızca $\mathbb{R}^3$'ün tamamında tanımlı fonksiyonlar için tanımlamak gereksiz bir kısıtlamadır. Örneğin $\log x$ yalnızca $x > 0$ olan noktalarda anlamlıdır; yine de bu noktaların her birinin çevresinde küçük bir bölgede tanımlıdır ve orada türevi alınabilir. Bir fonksiyonun tanım kümesinden istediğimiz tek şey, her noktasının çevresinde türev almaya yetecek "biraz yer" bırakmasıdır. Bu özelliği taşıyan kümelere ad veriyoruz.

Tanım 1.7 (Açık Küme). $\mathbb{R}^3$'ün bir O alt kümesi şu özelliği taşıyorsa **açık küme** (open set) denir: O'nun her $\mathbf{p}$ noktası için, $\mathbf{p}$'ye yeterince yakın olan bütün noktalar da O'nun içindedir. Burada "yeterince yakın" şu demektir: $\mathbf{p}$'ye bağlı bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ve $\mathbf{p}$'ye uzaklığı ε'dan küçük olan her $\mathbf{q}$ noktası O'dadır. İki noktanın uzaklığı

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + (q_3-p_3)^2}$$

ile ölçülür.

Yani açık kümenin hiçbir noktası "kenarda" değildir: her noktasının etrafına, tamamen kümenin içinde kalan küçük bir top sığar. Topun yarıçapı ε noktadan noktaya değişebilir; kenara yaklaştıkça küçülür ama hiçbir noktada sıfır olmaz.
Tanımı bir açık kümeye şöyle taşırız: O açık ve $f : O \to \mathbb{R}$ olsun; f'nin O'nun her noktasında her mertebeden bütün kısmi türevleri varsa ve süreklilerse f'ye O üzerinde diferansiyellenebilir denir. Bir noktada türev almak için f'nin o noktanın etrafındaki küçük bir topta tanımlı olması yeter, açıklık da tam bunu sağlar. Bu bölümün bütün sonuçları $\mathbb{R}^3$ yerine herhangi bir açık O kümesi alındığında da geçerlidir.

Örnek 1.18 (Yarı Uzayda Diferansiyellenebilir Bir Fonksiyon). $O = \{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : p_1 > 0 \,\}$ yarı uzayı açıktır: bir $\mathbf{p} \in O$ noktası için $\varepsilon = p_1$ seçilirse, $\mathbf{p}$'ye uzaklığı ε'dan küçük her $\mathbf{q}$ noktası da $q_1 > 0$ sağlar. Bu açık küme üzerinde $f = yz\log x$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğunu görelim.

Çözüm.
$f = yz\log x$ fonksiyonu O üzerinde tanımlıdır, çünkü O'da $x > 0$'dır. Kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z\log x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y\log x$$

olur; daha yüksek mertebeden her türev y, z, $\log x$ ve $1/x$'in kuvvetlerinin çarpımlarından oluşan bir toplamdır ve $x > 0$ olduğu sürece tanımlı ve süreklidir. Dolayısıyla f, O üzerinde diferansiyellenebilirdir; tanım kümesinin $\mathbb{R}^3$'ün tamamı olmaması sorun yaratmaz.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Boyut Üzerine: Öklid Düzlemi ve n-Uzayı

Bu bölümde boyutu üç seçtik; bunun tek nedeni, eğriler ve yüzeyler incelenirken en çok bu boyuta ihtiyaç duyulmasıdır. Tanımların hiçbiri "üç" sayısına gerçekten bağlı değildir. n herhangi bir pozitif tam sayı olsun. Gerçel sayıların bütün sıralı n-lilerinin kümesine **Öklid n-uzayı** (Euclidean n-space) denir ve $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir; elemanları $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ noktalarıdır. Toplam ve skaler kat yine koordinat koordinat yapılır, $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır ve $x_i(\mathbf{p}) = p_i$ kuralıyla n tane doğal koordinat fonksiyonu $x_1, \ldots, x_n$ vardır. Kısmi türev, diferansiyellenebilirlik, noktasal işlemler, yerleştirme ve zincir kuralı, açık küme tanımları da harfi harfine aynı kalır; yalnızca "üç" yerine "n" okunur. Dolayısıyla bu bölümün bütün sonuçları her n için geçerlidir.

Bu genellikten iki özel durumu kullanacağız. Birincisi Öklid düzlemi $\mathbb{R}^2$'dir: düzlemde nokta (p_1, p_2) biçimindedir, koordinat fonksiyonları x, y'dir ve düzlem örnekleri, uzaydaki kavramları kâğıda çizip görmenin en kolay yoludur; bu bölümde de birkaç kez düzleme indik. İkincisi $n = 1$ durumu, yani gerçel sayı doğrusu $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$'dir. Burada tanımlar geçerli kalır ama gereğinden ağır düşer: tek koordinat fonksiyonu x_1 özdeşlik fonksiyonudur ($x_1(p) = p$), kısmi türev sıradan türeve indirgenir ve nokta ile koordinatı ayırmanın bir anlamı kalmaz. Bu kavramlar yüksek boyutlar için tasarlanmıştır; bir boyutta gösterdikleri hantallık bundandır.

1.6 Alıştırmalar

Alıştırma 1.1 (Bir Çarpımı Koordinatlarla Yazmak). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $f = x^2 y$ ve $g = y \sin z$ olsun. fg^2 fonksiyonunu x, y, z cinsinden yazın.

> **Çözüm.**
> Çarpım noktasal olduğundan formüller doğrudan çarpılır: $g^2 = y^2 \sin^2 z$ ve
>
> $$fg^2 = x^2 y \cdot y^2 \sin^2 z = x^2 y^3 \sin^2 z.$$
>
> ■

Alıştırma 1.2 (Türevli Bir Toplamı Koordinatlarla Yazmak). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $f = x^2 y$ ve $g = y \sin z$ olsun. $(\partial f/\partial x)\, g + (\partial g/\partial y)\, f$ fonksiyonunu x, y, z cinsinden yazın.

> **Çözüm.**
> $\partial f/\partial x = 2xy$ ve $\partial g/\partial y = \sin z$; dolayısıyla
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}\, g + \frac{\partial g}{\partial y}\, f = 2xy \cdot y \sin z + \sin z \cdot x^2 y = 2xy^2 \sin z + x^2 y \sin z = xy(2y + x) \sin z.$$
>
> ■

Alıştırma 1.3 (İkinci Mertebeden Bir Türevi Koordinatlarla Yazmak). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $f = x^2 y$ ve $g = y \sin z$ olsun. $\partial^2(fg)/\partial y\, \partial z$ fonksiyonunu x, y, z cinsinden yazın.

> **Çözüm.**
> Önce $fg = x^2 y^2 \sin z$ yazalım. $\partial^2/\partial y\, \partial z$ yazımı "önce z'ye, sonra y'ye göre türev al" demektir; diferansiyellenebilir fonksiyonlarda sıra sonucu değiştirmez. z'ye göre türev $x^2 y^2 \cos z$, ardından y'ye göre türev
>
> $$\frac{\partial^2(fg)}{\partial y\, \partial z} = 2x^2 y \cos z$$
>
> verir; öteki sırayla da aynı sonuç çıkar.
> ■

Alıştırma 1.4 (Bir Bileşkenin Türevini Koordinatlarla Yazmak). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $f = x^2 y$ olsun. $\partial(\sin f)/\partial y$ fonksiyonunu x, y, z cinsinden yazın.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Zincir kuralının tek girişli biçimine göre $\partial(\sin f)/\partial y = \cos f \cdot \partial f/\partial y$. $\partial f/\partial y = x^2$ olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin f) = x^2 \cos(x^2 y).$$

■

Alıştırma 1.5 (Bir Fonksiyonun Köşegen Üzerindeki Bir Değeri). $f = x^2y - y^2z$ fonksiyonunun $(1,1,1)$ noktasındaki değerini bulun.

Çözüm.
$f(\mathbf{p}) = p_1^2 p_2 - p_2^2 p_3$ kuralını uygularız.
$f(1,1,1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$.
■

Alıştırma 1.6 (Bir Fonksiyonun Kesirli Koordinatlı Bir Noktadaki Değeri). $f = x^2y - y^2z$ fonksiyonunun $(3, -1, \frac{1}{2})$ noktasındaki değerini bulun.

Çözüm.
$f(\mathbf{p}) = p_1^2 p_2 - p_2^2 p_3$ kuralını uygularız.
$f(3,-1,\frac{1}{2}) = 9 \cdot (-1) - 1 \cdot \frac{1}{2} = -9 - \frac{1}{2} = -\frac{19}{2}$.
■

Alıştırma 1.7 (Bir Fonksiyonun Parametreli Noktalardaki Değeri). $f = x^2y - y^2z$ fonksiyonunun $(a, 1, 1-a)$ noktasındaki değerini bulun.

Çözüm.
$f(\mathbf{p}) = p_1^2 p_2 - p_2^2 p_3$ kuralını uygularız.
$f(a,1,1-a) = a^2 \cdot 1 - 1 \cdot (1-a) = a^2 + a - 1$; sonuç a'ya bağlı bir sayıdır.
■

Alıştırma 1.8 (Bir Fonksiyonun Bir Eğri Boyunca Değerleri). $f = x^2y - y^2z$ fonksiyonunun (t, t^2, t^3) noktasındaki değerini bulun.

Çözüm.
$f(\mathbf{p}) = p_1^2 p_2 - p_2^2 p_3$ kuralını uygularız.
$f(t,t^2,t^3) = t^2 \cdot t^2 - t^4 \cdot t^3 = t^4 - t^7$. Bu, $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ eğrisi boyunca f'nin aldığı değerleri veren tek değişkenli fonksiyondur; $t = 1$ için $(1,1,1)$ noktasına döneriz.
■

Alıştırma 1.9 (Çarpım ve Bileşke İçeren Bir Kısmi Türev). $f = x\sin(xy) + y\cos(xz)$ olsun. $\partial f/\partial x$ türevini x, y, z cinsinden yazın.

Çözüm.
İlk terim bir çarpımdır; çarpım kuralı ve zincir kuralıyla $\partial\,\big(\,x\sin(xy)\,\big)/\partial x = \sin(xy) + x\cos(xy)\cdot y$. İkinci terimde y sabittir: $\partial\,\big(\,y\cos(xz)\,\big)/\partial x = -y\sin(xz)\cdot z$. Toplarsak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy) - yz\sin(xz).$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 1.10 (İç İçe Bileşkenin Kısmi Türevi). $f = \sin g,\ g = e^h$ ve $h = x^2 + y^2 + z^2$ olsun. $\partial f/\partial x$ türevini x, y, z cinsinden yazın.

Çözüm.
Zincir kuralını iki kez uygularız:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos g \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \cos g \cdot e^h \frac{\partial h}{\partial x} = \cos\left(\ e^h\ \right) e^h \cdot 2x.$$

$h = x^2 + y^2 + z^2$ yerine yazılınca

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2+y^2+z^2} \cos\left(\ e^{x^2+y^2+z^2}\ \right).$$

■

Alıştırma 1.11 (Toplamların Yerleştirilmesi ve Zincir Kuralı). $h = x^2 - yz$ ve $f = h(x + y, y^2, x + z)$ olsun. $\partial f/\partial x$ türevini x, y, z cinsinden yazın.

Çözüm.
h'nin üç girişine göre türevleri $\partial h/\partial x_1 = 2x$, $\partial h/\partial x_2 = -z$, $\partial h/\partial x_3 = -y$'dir; yerleştirme yapıldığında bu türevlerdeki x, y, z yerine g_1, g_2, g_3 konur. Zincir kuralına göre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} - g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} - g_2 \frac{\partial g_3}{\partial x}.$$

$g_1 = x + y$, $g_2 = y^2$, $g_3 = x + z$; türevleri $\partial g_1/\partial x = 1$, $\partial g_2/\partial x = 0$, $\partial g_3/\partial x = 1$. Formül:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x + y) \cdot 1 - (x + z) \cdot 0 - y^2 \cdot 1 = 2(x + y) - y^2.$$

Denetleme: $f = (x + y)^2 - y^2(x + z)$, doğrudan $\partial f/\partial x = 2(x + y) - y^2$.
■

Alıştırma 1.12 (Üstel Fonksiyonların Yerleştirilmesi ve Zincir Kuralı). $h = x^2 - yz$ ve $f = h(e^z, e^{x+y}, e^x)$ olsun. $\partial f/\partial x$ türevini x, y, z cinsinden yazın.

Çözüm.
h'nin üç girişine göre türevleri $\partial h/\partial x_1 = 2x$, $\partial h/\partial x_2 = -z$, $\partial h/\partial x_3 = -y$'dir; yerleştirme yapıldığında bu türevlerdeki x, y, z yerine g_1, g_2, g_3 konur. Zincir kuralına göre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} - g_3 \frac{\partial g_2}{\partial x} - g_2 \frac{\partial g_3}{\partial x}.$$

$g_1 = e^z$, $g_2 = e^{x+y}$, $g_3 = e^x$; türevleri 0, e^{x+y}, e^x. Formül:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^z \cdot 0 - e^x \cdot e^{x+y} - e^{x+y} \cdot e^x = -2e^{2x+y}.$$

Denetleme: $f = e^{2z} - e^{x+y}e^x = e^{2z} - e^{2x+y}$, doğrudan $\partial f/\partial x = -2e^{2x+y}$.
■

Alıştırma 1.13 (Aynı Koordinatın Yerleştirilmesi ve Zincir Kuralı). $h = x^2 - yz$ ve $f = h(x, -x, x)$ olsun. $\partial f/\partial x$ türevini x, y, z cinsinden yazın.

Çözüm.
h'nin üç girişine göre türevleri $\partial h/\partial x_1 = 2x$, $\partial h/\partial x_2 = -z$, $\partial h/\partial x_3 = -y$'dir; yerleştirme yapıldığında bu türevlerdeki x, y, z yerine g_1, g_2, g_3 konur. Zincir kuralına göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2g_1\frac{\partial g_1}{\partial x} - g_3\frac{\partial g_2}{\partial x} - g_2\frac{\partial g_3}{\partial x}.$$

$g_1 = x$, $g_2 = -x$, $g_3 = x$; türevleri $1, -1, 1$. Formül:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot 1 - x \cdot (-1) - (-x) \cdot 1 = 2x + x + x = 4x.$$

Denetleme: $f = x^2 - (-x)(x) = 2x^2$, doğrudan $\partial f/\partial x = 4x$.
■

Alıştırma 1.14 (İfadeleri Nokta, Sayı ve Fonksiyon Diye Ayırmak). $\mathbf{p} = (3, -2, 5)$ ve $f = xz - y^2$ olsun. Şu ifadelerin her birinin nokta mı, sayı mı, fonksiyon mu olduğunu söyleyin: $\mathbf{p}$, p_2, x_2, $x_2(\mathbf{p})$, f, $f(\mathbf{p})$, $x^2 + z$, $2\mathbf{p}$, $\partial f/\partial z$, $(\partial f/\partial z)(\mathbf{p})$.

Çözüm.
Nokta: $\mathbf{p}$ ve $2\mathbf{p}$. Sayı: p_2, $x_2(\mathbf{p})$, $f(\mathbf{p})$ ve $(\partial f/\partial z)(\mathbf{p})$. Fonksiyon: x_2, f, $x^2 + z$ ve $\partial f/\partial z$. Kural şudur: x, y, z (ya da x_1, x_2, x_3) ile yazılıp hiçbir noktada değerlendirilmemiş bir formül fonksiyondur; böyle bir fonksiyonun bir noktadaki değeri de bir noktanın koordinatı da sayıdır; koordinatları verilmiş ya da noktalardan toplam ve skaler katla kurulmuş bir ifade noktadır.
■

Alıştırma 1.15 (Sayıların Değerleri ve Noktaların Koordinatları). $\mathbf{p} = (3, -2, 5)$ ve $f = xz - y^2$ olsun. $\mathbf{p}$, p_2, x_2, $x_2(\mathbf{p})$, f, $f(\mathbf{p})$, $x^2 + z$, $2\mathbf{p}$, $\partial f/\partial z$, $(\partial f/\partial z)(\mathbf{p})$ ifadelerinden sayı olanların değerini, nokta olanların koordinatlarını bulun.

Çözüm.
Bu ifadelerden sayı olanlar p_2, $x_2(\mathbf{p})$, $f(\mathbf{p})$ ve $(\partial f/\partial z)(\mathbf{p})$; nokta olanlar $\mathbf{p}$ ve $2\mathbf{p}$'dir.
$p_2 = -2$ ve $x_2(\mathbf{p}) = p_2 = -2$; bu iki yazım aynı sayıdır. $f(\mathbf{p}) = p_1p_3 - p_2^2 = 15 - 4 = 11$. $\partial f/\partial z = x$ fonksiyonu olduğundan $(\partial f/\partial z)(\mathbf{p}) = x(\mathbf{p}) = 3$. $2\mathbf{p} = (6, -4, 10)$.
■

Alıştırma 1.16 (Üç Koordinat Değeri Noktayı Belirler). $x_1(\mathbf{q}) = x_2(\mathbf{q}) = x_3(\mathbf{q}) = 1$ koşulunu sağlayan bütün $\mathbf{q}$ noktalarını bulun.

Çözüm.
$x_i(\mathbf{q}) = q_i$ olduğundan üç koşul $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ demektir; tek çözüm $\mathbf{q} = (1, 1, 1)$'dir. Üç koordinat fonksiyonunun değeri noktayı belirler; bu, $\mathbf{q} = (x_1(\mathbf{q}), x_2(\mathbf{q}), x_3(\mathbf{q}))$ özdeşliğidir.
■

Alıştırma 1.17 (Tek Koordinat Koşulunun Belirlediği Küme). Başka koşul konmadan $x_1(\mathbf{q}) = 1$ eşitliğini sağlayan bütün $\mathbf{q}$ noktalarının kümesi nedir?

Çözüm.
$x_1(\mathbf{q}) = q_1$ olduğundan koşul $q_1 = 1$ demektir. Yalnızca $x_1(\mathbf{q}) = 1$ koşulu q_2 ve q_3'ü serbest bırakır; çözüm kümesi $\{(1, q_2, q_3)\}$, yani $x = 1$ düzlemidir.
■

Alıştırma 1.18 (Bir Polinomun Diferansiyellenebilirlik Denetimi). $f = x^2y - y^2z + 7$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir olup olmadığına karar verin.

Çözüm.
Polinom; bütün türevleri polinomdur, dolayısıyla var ve süreklidir. Diferansiyellenebilir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 1.19 (Paydası Sıfırlanmayan Bir Kesrin Denetimi). $g = 1/(1+x^2+y^2+z^2)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir olup olmadığına karar verin.

> **Çözüm.**
> Payda her noktada ≥ 1'dir. $\partial g/\partial x = -2x/(1+x^2+y^2+z^2)^2$; genel olarak her türev, payı polinom ve paydası $(1+x^2+y^2+z^2)$'nin bir kuvveti olan bir kesirdir ve payda hiç sıfırlanmadığından her yerde süreklidir. Diferansiyellenebilir.
> ■

Alıştırma 1.20 (Mutlak Değerli Bir Çarpımın Denetimi). $k(\mathbf{p}) = |\, p_2 \,|\, p_1$, yani $k = x \mid y \mid$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir olup olmadığına karar verin.

> **Çözüm.**
> $p_2 = 0$ ve $p_1 \neq 0$ olan bir noktada, örneğin $\mathbf{p} = (1,0,0)$'da, y'ye göre kısmi türevi denetleyelim:
>
> $$\frac{k(1,t,0) - k(1,0,0)}{t} = \frac{|\, t \,|}{t},$$
>
> ve bu oranın $t \to 0$ iken limiti yoktur. $\partial k/\partial y$ bu noktada tanımsızdır; k diferansiyellenebilir değildir. Buna karşılık k, $p_2 > 0$ açık yarı uzayına kısıtlanırsa orada $k = xy$ olur ve diferansiyellenebilirdir.
> ■

Uzayı, noktalarını ve üzerindeki fonksiyonları kesin biçimde tanımladık; sonraki bölümde bu noktalara bağlı okları, yani teğet vektörleri ve onların oluşturduğu vektör alanlarını inceliyoruz: Teğet Vektörler.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Teğet Vektörler

Öklid Uzayı bölümünde $\mathbb{R}^3$'ün noktalarını, doğal koordinat fonksiyonlarını ve diferansiyellenebilir fonksiyonları tanıdık. Orada her şey "nokta" ve "fonksiyon" diliyle yazıldı. Bu bölümde sahneye üçüncü bir nesne giriyor: ok. Fizikte bir kuvvet, bir hız ya da bir yer değiştirme hep bir okla gösterilir; okun çıktığı bir nokta, bir doğrultusu ve bir uzunluğu vardır.
Okun yalnızca doğrultusu ve uzunluğu değil, nereden çıktığı da önemlidir. Aynı kuvvet bir kapının menteşesine ya da koluna uygulandığında çok farklı sonuçlar verir. Bu yüzden bir oku, uygulama noktası ile vektör kısmından oluşan bir çift olarak tanımlayacak ve ona teğet vektör diyeceğiz. Bir noktadan çıkan bütün okları bir araya getirince o noktanın teğet uzayı, her noktaya bir ok yerleştirince bir vektör alanı ortaya çıkar.
Bölümün sonunda her vektör alanının üç fonksiyonla, $V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3$ biçiminde yazılabildiğini göreceğiz. Bu yazım, sonraki bölümde yönlü türevi hesaplarken ve ilerideki bütün eğri ve yüzey hesaplarında kullanacağımız temel araçtır.

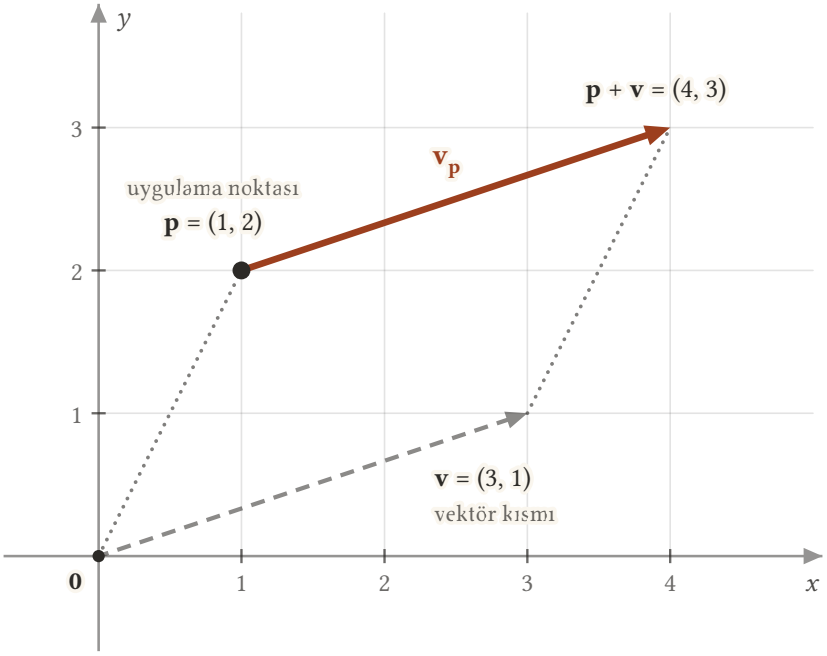
2.1 Ok kavramını kesinleştirmek: teğet vektör

Lisede vektör deyince aklımıza bir ok gelir: bir yerden çıkar, bir yöne bakar, belli bir uzunluğu vardır. Ama "ok" bir tanım değildir; okla hesap yapabilmek için onu sayılarla anlatmamız gerekir. O hâlde şunu sormalıyız: bir oku ne belirler?
Bir oku iki şey tamamen belirler: çıktığı nokta $\mathbf{p}$ ve bu noktadan okun ucuna varmak için gereken yer değiştirme $\mathbf{v}$. Okun ucu $\mathbf{p} + \mathbf{v}$ noktasıdır; başka hiçbir bilgiye gerek yoktur. Burada dikkat edilecek nokta şudur: $\mathbf{v}$'yi "yer değiştirme" diye okusak da o, kesin konuşursak, $\mathbb{R}^3$'ün sıradan bir noktasıdır; yani üç sayıdan oluşan sıralı bir üçlüdür. Oku, iki noktadan oluşan bir çift olarak tanımlıyoruz.

Tanım 2.1 (Teğet Vektör). $\mathbb{R}^3$'e bir **teğet vektör** (tangent vector) $\mathbf{v}_\mathbf{p}$, $\mathbb{R}^3$'ün iki noktasından oluşur: **vektör kısmı** (vector part) $\mathbf{v}$ ve **uygulama noktası** (point of application) $\mathbf{p}$.
İki teğet vektör $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{q}$ ancak ve ancak vektör kısımları aynı ($\mathbf{v} = \mathbf{w}$) ve uygulama noktaları aynı ($\mathbf{p} = \mathbf{q}$) ise eşittir.

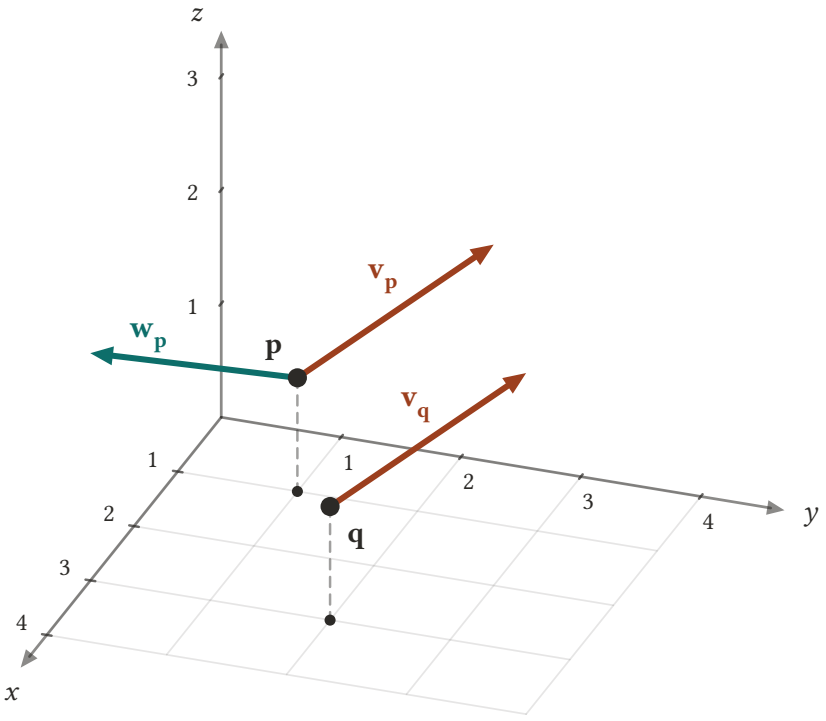
Tanımı iki resimle somutlaştıralım. İlk şekil bir teğet vektörün iki parçasını, ikincisi ise eşitlik kuralının neden iki koşulu birden istediğini gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.1: Bir teğet vektör iki bilgiden oluşur: nereden çıktığını söyleyen uygulama noktası $\mathbf{p} = (1, 2)$ ve ne kadar yer değiştirdiğini söyleyen vektör kısmı $\mathbf{v} = (3, 1)$. Teğet vektör $\mathbf{v}_\mathbf{p}$, $\mathbf{p}$'den $\mathbf{p} + \mathbf{v} = (4, 3)$ noktasına giden ok olarak resmedilir; kesikli gri ok aynı yer değiştirmeyi $\mathbf{0}$ noktasından yapar. Noktalı kenarlar bu iki okun bir paralelkenarın karşılıklı kenarları olduğunu gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.2: $\mathbf{v_p}$ ile $\mathbf{v_q}$'nun vektör kısmı aynı $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ olduğundan oklar paralel ve eşit uzunluktadır; ancak uygulama noktaları $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$ ile $\mathbf{q} = (3, 2, 1)$ farklı olduğu için bunlar farklı teğet vektörlerdir. $\mathbf{v_p}$ ile $\mathbf{w_p}$ aynı $\mathbf{p}$ noktasında durur, fakat vektör kısımları $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w} = (2, -1, 1)$ farklı olduğundan onlar da farklıdır. İki teğet vektörün eşit olması için vektör kısımlarının ve uygulama noktalarının ikisinin birden aynı olması gerekir.

Yani $\mathbf{v_p}$, "$\mathbf{p}$ noktasından çıkıp $\mathbf{p}+\mathbf{v}$ noktasında biten ok"tur; teğet vektörü her zaman böyle resmedeceğiz. Vektör kısmı $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ açıkça yazılacaksa $(v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ gösterimini kullanırız; örneğin $(1, 0, -3)_{\mathbf{p}}$, vektör kısmı $(1, 0, -3)$ olan ve $\mathbf{p}$'de uygulanan teğet vektördür.
Tanımdaki "teğet" sözcüğü şimdilik yalnızca bir addır; ileride eğriler ve yüzeyler konusunda doğrudan bir geometrik anlam kazanacaktır.

⚠ Bir ok, iki nokta

Teğet vektör tek bir nokta değil, sıralı bir nokta çiftidir: $\mathbf{v_p}$ yazımında hem $\mathbf{v}$ hem $\mathbf{p}$ birer $\mathbb{R}^3$ noktasıdır. Eşitlik kuralı bu yüzden iki koşul ister. Vektör kısımları aynı ama uygulama noktaları farklı iki ok da, uygulama noktaları aynı ama vektör kısımları farklı iki ok da farklı teğet vektörlerdir. Bu bölümde "başlangıç noktası" sözü her zaman orijin $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ anlamına gelir; okun çıktığı nokta için "uygulama noktası" ya da "çıkış noktası" deriz.

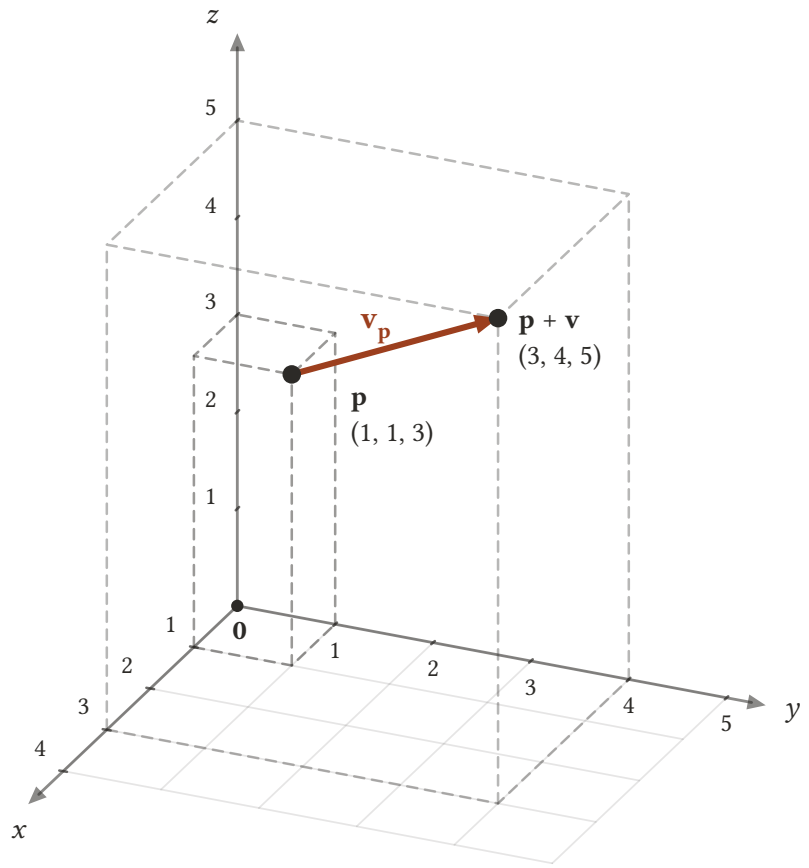
Örnek 2.1 (Uzayda Bir Teğet Vektörün Çizimi). $\mathbf{p} = (1, 1, 3)$ ve $\mathbf{v} = (2, 3, 2)$ olsun. $\mathbf{v_p}$ teğet vektörünün çıkış noktasını ve bitiş noktasını bulalım, oku çizelim ve aynı vektör kısmının başlangıç noktası $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$'da uygulanmasıyla elde edilen $\mathbf{v_0}$ ile karşılaştıralım.

Çözüm.
Ok $\mathbf{p} = (1, 1, 3)$ noktasından çıkar. Bitiş noktası, uygulama noktasına vektör kısmının eklenmesiyle bulunur:

$$\mathbf{p} + \mathbf{v} = (1 + 2, 1 + 3, 3 + 2) = (3, 4, 5).$$

Yani $\mathbf{v_p} = (2, 3, 2)_{(1,1,3)}$, $(1, 1, 3)$ noktasından $(3, 4, 5)$ noktasına giden oktur. Aşağıdaki şekilde her iki nokta kesikli koordinat kutularıyla, ok ise bu iki noktayı birleştiren doğru parçası olarak görülür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.3: Teğet vektör $\mathbf{v_p} = (2, 3, 2)_{(1,1,3)}$: uygulama noktası $\mathbf{p} = (1, 1, 3)$, bitiş noktası ise $\mathbf{p} + \mathbf{v} = (3, 4, 5)$. Kesikli koordinat kutuları her iki noktanın koordinatlarını eksenlerden okutur; ok, iki noktayı birleştiren yönlü doğru parçasıdır. Aynı vektör kısmı $\mathbf{0}$ noktasında uygulansaydı ok orijinden $(2, 3, 2)$ noktasına giderdi.

$\mathbf{v_0} = (2,3,2)_{(0,0,0)}$ ise başlangıç noktası $\mathbf{0}$'dan $(2,3,2)$ noktasına giden oktur. İki okun vektör kısmı aynıdır ($\mathbf{v} = (2,3,2)$), ama uygulama noktaları farklıdır ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$). Tanım gereği $\mathbf{v_p} \neq \mathbf{v_0}$: bunlar aynı uzunlukta ve aynı doğrultuda, ama uzayın farklı yerlerinde duran iki farklı oktur.
■

Düzlemde aynı şey şöyle görünür.

Örnek 2.2 (Düzlemde Bir Teğet Vektörün Oku). Öklid düzlemi $\mathbb{R}^2$'de teğet vektör tamamen aynı biçimde tanımlanır: iki nokta, biri vektör kısmı biri uygulama noktası. $\mathbf{p} = (2,1)$ ve $\mathbf{v} = (1,3)$ için $\mathbf{v_p}$ okunu bulalım.

Çözüm.
Ok $(2,1)$ noktasından çıkar ve $\mathbf{p} + \mathbf{v} = (2+1, 1+3) = (3,4)$ noktasında biter. Yani $\mathbf{v_p} = (1,3)_{(2,1)}$, $(2,1)$'den $(3,4)$'e giden oktur.
■

Tersini de yapabiliriz: bize ok verildiğinde, onun hangi teğet vektör olduğunu okuyalım.

Örnek 2.3 (Düzlemde Oktan Teğet Vektöre). Öklid düzlemi $\mathbb{R}^2$'de $(-1,2)$ noktasından $(3,0)$ noktasına giden ok hangi teğet vektördür?

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Uygulama noktası okun çıktığı noktadır: $\mathbf{p} = (-1, 2)$. Vektör kısmı, bitiş noktasından çıkış noktasının çıkarılmasıyla bulunur, çünkü $\mathbf{p} + \mathbf{v}$ bitiş noktası olmalıdır:

$$\mathbf{v} = (3, 0) - (-1, 2) = (3 - (-1), 0 - 2) = (4, -2).$$

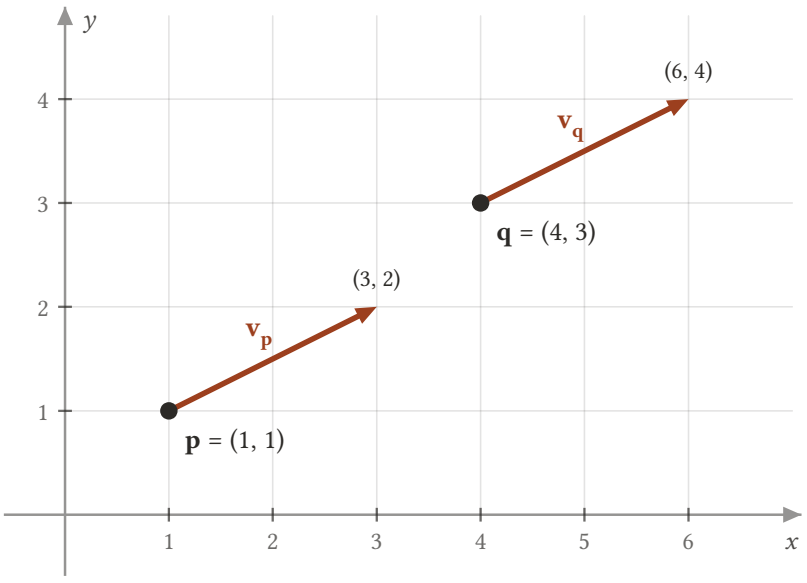
Aranan teğet vektör $(4, -2)_{(-1,2)}$'dir. Genel kural: $\mathbf{a}$'dan $\mathbf{b}$'ye giden ok, $(\mathbf{b} - \mathbf{a})_{\mathbf{a}}$ teğet vektörüdür.
■

2.1.1 Paralel teğet vektörler

İlk örnekte aynı vektör kısmına sahip, ama farklı noktalarda uygulanan iki okla karşılaştık: $\mathbf{v_p}$ ve $\mathbf{v_0}$. Bu duruma bir ad verelim: vektör kısımları aynı, uygulama noktaları farklı olan $\mathbf{v_p}$ ve $\mathbf{v_q}$ teğet vektörlerine **paralel** (parallel) denir. Paralel iki ok aynı uzunlukta ve aynı yöndedir; yalnızca uzayda durdukları yer farklıdır.
Paralel oklar birbirinin kopyası gibi görünse de $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ olduğu sürece $\mathbf{v_p}$ ile $\mathbf{v_q}$ farklı nesnelerdir; eşitlik kuralı bunu açıkça söyler.
Bu ayrımın neden gerekli olduğunu bir somun anahtarıyla görebiliriz. Anahtarı önce somuna yakın bir yerinden, sonra sapının ucundan aynı $\mathbf{v}$ kuvvetiyle itelim. Kuvvet aynıdır, yani okun vektör kısmı aynıdır; ama ikinci durumda somun çok daha kolay döner. Sonucu değiştiren, kuvvetin uygulandığı yerdir. Fizikte bu etkiyi kuvvet momenti ölçer ve moment yalnızca kuvvete değil, uygulama noktasına da bağlıdır. Teğet vektörün uygulama noktasını kendi üzerinde taşıması tam da bu bilgiyi korumak içindir.

Örnek 2.4 (Düzlemde Paralel İki Ok). Düzlemde $\mathbf{v} = (2, 1)$, $\mathbf{p} = (1, 1)$ ve $\mathbf{q} = (4, 3)$ olsun. $\mathbf{v_p}$ ve $\mathbf{v_q}$ oklarını bulalım.

Çözüm.
$\mathbf{v_p}$, $(1, 1)$'den $(1, 1) + (2, 1) = (3, 2)$'ye; $\mathbf{v_q}$, $(4, 3)$'ten $(4, 3) + (2, 1) = (6, 4)$'e giden oktur. Vektör kısımları aynı, uygulama noktaları farklıdır; iki ok paraleldir. Aşağıdaki şekilde iki ok aynı uzunlukta ve aynı yönde, ama düzlemin farklı yerlerinde görülür.



Şekil 2.4: Aynı vektör kısmı $\mathbf{v} = (2, 1)$, iki farklı noktaya uygulanmıştır: $\mathbf{v_p}$ oku $\mathbf{p} = (1, 1)$'den $(3, 2)$'ye, $\mathbf{v_q}$ oku $\mathbf{q} = (4, 3)$'ten $(6, 4)$'e gider. İki ok aynı uzunlukta ve aynı yöndedir; yalnızca uygulama noktaları farklıdır. Bu yüzden paraleldirler, ama teğet vektör olarak birbirine eşit değildirler.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Uzayda da paralelliği yalnızca vektör kısımlarını karşılaştırarak anlarız.

Örnek 2.5 (Uzayda Paralellik Denetimi). Uzayda $(0,1,2)$'den $(2,2,2)$'ye giden ok ile $(3,3,3)$'ten $(5,4,3)$'e giden ok paralel midir?

> **Çözüm.**
> İlk okun vektör kısmı $(2,2,2)-(0,1,2)=(2,1,0)$, ikincisininki $(5,4,3)-(3,3,3)=(2,1,0)$'dır. Vektör kısımları aynı, uygulama noktaları $(0,1,2)\neq(3,3,3)$ farklıdır. Evet, paraleldirler; teğet vektör olarak $(2,1,0)_{(0,1,2)}$ ve $(2,1,0)_{(3,3,3)}$ yazılırlar ve birbirine eşit değildirler.
> ■

Örnek 2.6 (Aynı Doğru Üzerinde Duran İki Ok). Başlangıç noktası $\mathbf{0}$'dan $(1,1,1)$'e giden ok ile yine $\mathbf{0}$'dan $(2,2,2)$'ye giden ok paralel midir?

> **Çözüm.**
> İki okun vektör kısımları $(1,1,1)$ ve $(2,2,2)$'dir; bunlar farklıdır. Dolayısıyla tanımımıza göre bu oklar paralel değildir; üstelik uygulama noktaları da aynıdır ($\mathbf{0}$). Bu iki ok aynı doğru üzerinde durur, ama biri diğerinin iki katı uzunluktadır.
> ■

> ⚠ Paralel sözcüğü burada dar anlamlıdır
>
> Lise geometrisinde aynı doğrultudaki bütün oklara "paralel" denir. Bizim tanımımız daha dardır: paralellik için vektör kısımlarının tamamen aynı olması gerekir, yalnızca orantılı olması yetmez. Yukarıdaki son örnekteki iki ok bu anlamda paralel değildir. Bu dar tanım, ileride "bir oku başka bir noktaya taşımak" fikrini kesin biçimde ifade etmemizi sağlayacak.

2.2 Teğet uzayı

Bir noktayı sabitleyelim ve o noktadan çıkan bütün okları bir araya toplayalım. Böylece elde edilen kümenin özel bir yapısı vardır: uygulama noktaları ortak olduğundan bu oklar birbiriyle toplanabilir ve sayılarla çarpılabilir. Önce kümeyi adlandıralım.

Tanım 2.2 (Teğet Uzayı). $\mathbf{p}$, $\mathbb{R}^3$'ün bir noktası olsun. Uygulama noktası $\mathbf{p}$ olan bütün teğet vektörlerin kümesine $\mathbb{R}^3$'ün $\mathbf{p}$ noktasındaki **teğet uzayı** (tangent space) denir ve $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ ile gösterilir:

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)=\left\{\,\mathbf{v}_{\mathbf{p}} : \mathbf{v}\in\mathbb{R}^3\,\right\}.$$

Yani $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$, "$\mathbf{p}$'den çıkan oklar demeti"dir; her $\mathbf{v}$ noktası için bir ok içerir, dolayısıyla $\mathbb{R}^3$'ün noktaları kadar elemanı vardır.
Şunu vurgulayalım: $\mathbb{R}^3$'ün her noktasında ayrı bir teğet uzayı vardır. $\mathbf{p}\neq\mathbf{q}$ ise $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ ile $T_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^3)$ ortak eleman içermez, çünkü bir teğet vektör uygulama noktasını kendi üzerinde taşır: $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ birinci kümeye, $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}$ ikinci kümeye aittir ve bunlar farklı teğet vektörlerdir. Uzayın her noktasına, o noktaya iliştirilmiş kendi "ok deposu" eşlik eder.

Örnek 2.7 (Bir Noktadaki Oklar Demeti). Düzlemde $\mathbf{p}=(2,2)$ ve $\mathbf{q}=(0,0)$ olsun. Aşağıdaki teğet vektörlerden hangileri $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2)$'ye aittir? Ait olanların bitiş noktalarını bulalım:

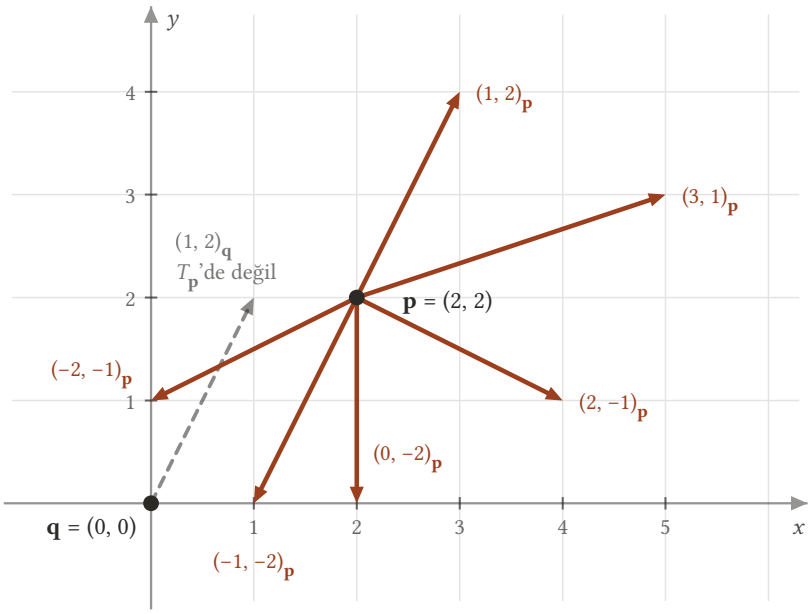
$$(1,2)_{\mathbf{p}},\ (3,1)_{\mathbf{p}},\ (2,-1)_{\mathbf{p}},\ (-2,-1)_{\mathbf{p}},\ (-1,-2)_{\mathbf{p}},\ (0,-2)_{\mathbf{p}},\ (1,2)_{\mathbf{q}}.$$

> **Çözüm.**
> Teğet uzayına aitlik yalnızca uygulama noktasına bakar. İlk altı teğet vektörün uygulama noktası $\mathbf{p}$'dir; hepsi $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2)$'nin elemanıdır. Sonuncusunun uygulama noktası $\mathbf{q}=(0,0)\neq\mathbf{p}$'dir; o $T_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2)$'ye aittir, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2)$'ye değil. Vektör kısmının $(1,2)_{\mathbf{p}}$ ile aynı olması bunu değiştirmez.
> Bitiş noktaları, $\mathbf{p}=(2,2)$'ye vektör kısımlarının eklenmesiyle bulunur:

 CC BY-NC-SA 4.0

teğet vektör	bitiş noktası
$(1,2)_{\mathbf{p}}$	$(3,4)$
$(3,1)_{\mathbf{p}}$	$(5,3)$
$(2,-1)_{\mathbf{p}}$	$(4,1)$
$(-2,-1)_{\mathbf{p}}$	$(0,1)$
$(-1,-2)_{\mathbf{p}}$	$(1,0)$
$(0,-2)_{\mathbf{p}}$	$(2,0)$

Aşağıdaki şekilde altı ok da $\mathbf{p} = (2,2)$ noktasından çıkar; teğet uzayı, bu okların (ve $\mathbf{p}$'den çıkan bütün diğerlerinin) oluşturduğu demettir.



Şekil 2.5: $\mathbf{p} = (2, 2)$ noktasından çıkan altı ok, $(1, 2)_{\mathbf{p}}$, $(3, 1)_{\mathbf{p}}$, $(2, -1)_{\mathbf{p}}$, $(-2, -1)_{\mathbf{p}}$, $(-1, -2)_{\mathbf{p}}$ ve $(0, -2)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörleridir; bitiş noktaları sırasıyla $(3, 4)$, $(5, 3)$, $(4, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ ve $(2, 0)$'dır. Teğet uzayı $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2)$, bu okların ve $\mathbf{p}$'den çıkan bütün diğer okların oluşturduğu demettir. Kesikli gri ok $(1, 2)_{\mathbf{q}}$ ise $\mathbf{q} = (0, 0)$'dan çıkar: vektör kısmı $(1, 2)_{\mathbf{p}}$ ile aynı olduğu hâlde uygulama noktası farklı olduğundan $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2)$'ye ait değildir.

■

Uzayda ölçüt aynıdır: aitlik yalnızca uygulama noktasına bakar. Bir okun uygulama noktası çıktığı noktadır; vektör kısmı ise bitiş noktasından çıkış noktasının çıkarılmasıyla bulunur. Aşağıdaki beş örnekte hep $\mathbf{p} = (1, 3, 2)$ noktasının demetine bakıyoruz; bu kez vektör kısmı sıfır olan ok ile aynı doğru parçasının iki zıt yönde okunması da işin içine giriyor.

Örnek 2.8 (Doğrudan Verilen Bir Teğet Vektör). $\mathbf{p} = (1, 3, 2)$ olsun. $(3, -1, 4)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e ait midir?

Çözüm.
Uygulama noktası $\mathbf{p}$'dir; ok $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e aittir. Bitiş noktası $(1, 3, 2) + (3, -1, 4) = (4, 2, 6)$'dır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.9 (Çıkış ve Bitiş Noktası Aynı Olan Ok). $\mathbf{p} = (1,3,2)$ olsun. $(1,3,2)$'den yine $(1,3,2)$'ye giden oku, yani çıkış ve bitiş noktası aynı olan oku, teğet vektör olarak yazalım ve $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e ait olup olmadığını belirleyelim.

> **Çözüm.**
> Vektör kısmı $(1,3,2)-(1,3,2)=(0,0,0)$'dır; ok $\mathbf{0}_{\mathbf{p}}$'dir, yani $\mathbf{p}$'deki sıfır okudur. Uygulama noktası $\mathbf{p}$ olduğundan $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e aittir. Her demetin kendi sıfır oku vardır: $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ ise $\mathbf{0}_{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$, çünkü uygulama noktaları farklıdır.
> ■

Örnek 2.10 (Başlangıç Noktasından Çıkan Ok). $\mathbf{p} = (1,3,2)$ olsun. Başlangıç noktası $\mathbf{0}$'dan $(1,3,2)$'ye giden oku teğet vektör olarak yazalım ve $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e ait olup olmadığını belirleyelim.

> **Çözüm.**
> Uygulama noktası $\mathbf{0}$, vektör kısmı $(1,3,2)-(0,0,0)=(1,3,2)$'dir; ok $(1,3,2)_{\mathbf{0}}$'dır ve $T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^3)$'e aittir, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e değil. Okun ucunun $\mathbf{p}$'de olması onu $\mathbf{p}$'nin demetine sokmaz; demeti okun ucu değil, çıktığı nokta belirler.
> ■

Örnek 2.11 (Başlangıç Noktasına Giden Ok). $\mathbf{p} = (1,3,2)$ olsun. $(1,3,2)$'den başlangıç noktası $\mathbf{0}$'a giden oku teğet vektör olarak yazalım ve $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e ait olup olmadığını belirleyelim.

> **Çözüm.**
> Uygulama noktası $\mathbf{p}$, vektör kısmı $(0,0,0)-(1,3,2)=(-1,-3,-2)$'dir; ok $(-1,-3,-2)_{\mathbf{p}}$'dir ve $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e aittir. $\mathbf{0}$'dan $\mathbf{p}$'ye giden ok (Örnek 2.10) ile bu ok aynı doğru parçasının iki zıt yönde okunmasıdır; ama biri $\mathbf{0}$'ın, diğeri $\mathbf{p}$'nin demetindedir.
> ■

Örnek 2.12 (Başka Bir Noktadan Çıkan Ok). $\mathbf{p} = (1,3,2)$ olsun. $(2,1,1)$'den $(3,4,3)$'e giden oku teğet vektör olarak yazalım ve $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e ait olup olmadığını belirleyelim.

> **Çözüm.**
> Uygulama noktası $(2,1,1) \neq \mathbf{p}$, vektör kısmı $(3,4,3)-(2,1,1)=(1,3,2)$'dir; ok $(1,3,2)_{(2,1,1)}$'dir ve $T_{(2,1,1)}(\mathbb{R}^3)$'e aittir. Vektör kısmı, $\mathbf{0}$'dan $\mathbf{p}$'ye giden okunkiyle (Örnek 2.10) aynıdır, dolayısıyla bu iki ok paraleldir; ama ikisi de $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'te değildir.
> ■

Beş oku birlikte düşünürsek $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e ait olanlar $\mathbf{p}$'den çıkan üç oktur: $(3,-1,4)_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{0}_{\mathbf{p}}$ ve $(-1,-3,-2)_{\mathbf{p}}$.

2.2.1 Teğet uzayında toplama ve skalerle çarpma

Bir teğet uzayındaki bütün oklar aynı noktadan çıkar. Bu sayede $\mathbb{R}^3$'ün toplama ve skalerle çarpma işlemlerini ödünç alıp $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'e taşıyabiliriz: iki okun vektör kısımları toplanır, sonuç yine $\mathbf{p}$'de uygulanır.

Tanım 2.3 (Teğet Uzayında İşlemler). $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ ve $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'ün elemanları ve c bir gerçel sayı olsun. **Toplam** ve **skalerle çarpım** (scalar multiplication) şöyle tanımlanır:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + \mathbf{w}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{v}+\mathbf{w})_{\mathbf{p}}, \qquad c\,(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (c\mathbf{v})_{\mathbf{p}}.$$

Yani toplama, vektörler için alışık olduğumuz **paralelkenar kuralından** (parallelogram law) başka bir şey değildir: $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ ve $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$ oklarının gerdiği paralelkenarın $\mathbf{p}$'den çıkan köşegeni $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + \mathbf{w}_{\mathbf{p}}$'dir. Skalerle çarpma ise okun uzunluğunu $|\,c\,|$ ile çarpar: $|\,c\,| > 1$ ise ok uzar, $|\,c\,| < 1$ ise kısalır, $c = 0$ ise sıfırlanır; $c < 0$ ise ok ayrıca yönünü ters çevirir. Toplamın da çarpımın da uygulama noktası yine $\mathbf{p}$'dir; oklar demetten çıkmaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Farklı noktalardaki oklar toplanmaz

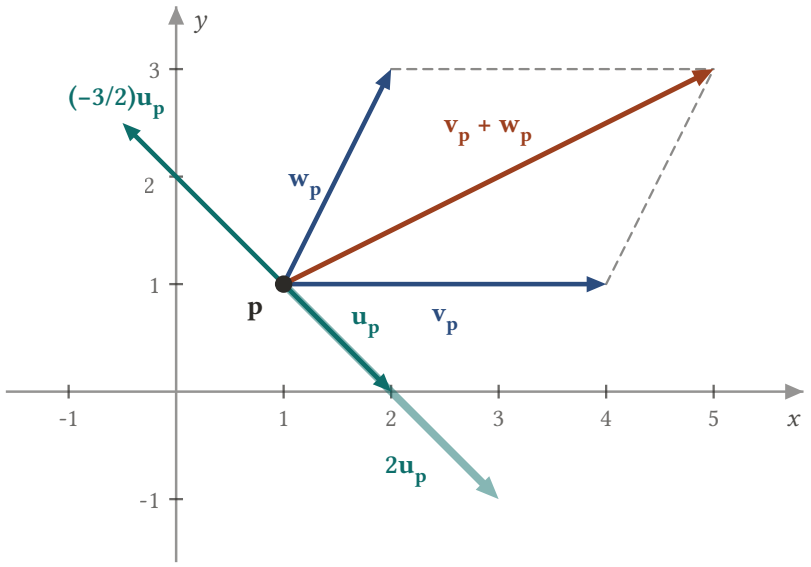
$\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ ise $\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{q}$ tanımsızdır. Toplama yalnızca aynı teğet uzayı içinde yapılır. Örneğin $(1,0,0)_{(0,0,0)} + (0,1,0)_{(5,5,5)}$ ifadesinin bir anlamı yoktur; iki okun ortak bir uygulama noktası olmadığından sonucun nerede uygulanacağı söylenemez. Bu yüzden tanımladığımız toplama, $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3) \cup T_\mathbf{q}(\mathbb{R}^3)$ birleşimi üzerinde bir işlem değildir; birazdan göreceğimiz vektör uzayı yapısı her teğet uzayının kendi içinde kurulur, birleşim üzerinde değil.

Örnek 2.13 (Paralelkenar Kuralı ve Skaler Katlar). Düzlemde $\mathbf{p} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (3,0)$, $\mathbf{w} = (1,2)$ ve $\mathbf{u} = (1,-1)$ olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p}$, $2\mathbf{u}_\mathbf{p}$ ve $-\frac{3}{2}\mathbf{u}_\mathbf{p}$ teğet vektörlerini hesaplayıp okları çizelim.

Çözüm.
Tanıma göre vektör kısımlarıyla işlem yapılır, uygulama noktası $\mathbf{p}$ olarak kalır:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p} &= (3+1, 0+2)_\mathbf{p} = (4,2)_\mathbf{p}, \\ 2\mathbf{u}_\mathbf{p} &= (2\cdot 1, 2\cdot(-1))_\mathbf{p} = (2,-2)_\mathbf{p}, \\ -\frac{3}{2}\mathbf{u}_\mathbf{p} &= \left(-\frac{3}{2}\cdot 1, -\frac{3}{2}\cdot(-1)\right)_\mathbf{p} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)_\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Bitiş noktaları: $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ için $(4,1)$, $\mathbf{w}_\mathbf{p}$ için $(2,3)$, $\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p}$ için $(5,3)$, $\mathbf{u}_\mathbf{p}$ için $(2,0)$, $2\mathbf{u}_\mathbf{p}$ için $(3,-1)$, $-\frac{3}{2}\mathbf{u}_\mathbf{p}$ için $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.
Aşağıdaki şekilde $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}$'nin gerdiği paralelkenar kesikli çizgilerle tamamlanmıştır; $\mathbf{p}$'den çıkan köşegen toplamdır. $2\mathbf{u}_\mathbf{p}$, $\mathbf{u}_\mathbf{p}$ ile aynı yönde ve iki kat uzun; $-\frac{3}{2}\mathbf{u}_\mathbf{p}$ ise ters yönde ve bir buçuk kat uzundur.



Şekil 2.6: $\mathbf{p} = (1, 1)$ noktasındaki teğet vektörler ok olarak çizilmiştir. $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (3, 0)_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p} = (1, 2)_\mathbf{p}$ bir paralelkenar gerer; kesikli kenarlarla tamamlanan bu paralelkenarın $\mathbf{p}$'den çıkan köşegeni toplam $\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p} = (4, 2)_\mathbf{p}$'dir. Yeşil oklar skaler katı gösterir: $2\mathbf{u}_\mathbf{p}$, $\mathbf{u}_\mathbf{p} = (1, -1)_\mathbf{p}$ ile aynı yönde ve iki kat uzun, $-(3/2)\mathbf{u}_\mathbf{p}$ ise ters yönde ve bir buçuk kat uzundur.

■

Örnek 2.14 (Uzayda Teğet Vektörlerle Hesap). $\mathbf{p} = (1,0,2)$, $\mathbf{v} = (2,-1,3)$ ve $\mathbf{w} = (0,4,1)$ olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p}$, $3\mathbf{v}_\mathbf{p}$, $-2\mathbf{w}_\mathbf{p}$ ve $2\mathbf{v}_\mathbf{p} - \mathbf{w}_\mathbf{p}$ teğet vektörlerini bulalım; sonuncusunun bitiş noktasını yazalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Her işlem vektör kısımlarında yapılır:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p} &= (2+0, -1+4, 3+1)_\mathbf{p} = (2,3,4)_\mathbf{p},\\ 3\mathbf{v}_\mathbf{p} &= (6,-3,9)_\mathbf{p},\\ -2\mathbf{w}_\mathbf{p} &= (0,-8,-2)_\mathbf{p},\\ 2\mathbf{v}_\mathbf{p} - \mathbf{w}_\mathbf{p} &= (4,-2,6)_\mathbf{p} + (0,-4,-1)_\mathbf{p} = (4,-6,5)_\mathbf{p}.\end{aligned}$$

Burada $2\mathbf{v}_\mathbf{p} - \mathbf{w}_\mathbf{p}$ ifadesi, tanım gereği $2\mathbf{v}_\mathbf{p} + (-1)\mathbf{w}_\mathbf{p}$ demektir. Sonuncu okun bitiş noktası $\mathbf{p} + (4,-6,5) = (5,-6,7)$'dir.
■

Aynı vektör kısımlarını bu kez farklı noktalara uygularsak durum değişir.

Örnek 2.15 (İki Ayrı Demetten Gelen Oklar). $\mathbf{p} = (1,0,2)$, $\mathbf{q} = (0,0,0)$, $\mathbf{v} = (2,-1,3)$ ve $\mathbf{w} = (0,4,1)$ olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{q}$ nedir?

Çözüm.
$\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{q}$ tanımsızdır: $\mathbf{p} = (1,0,2) \neq \mathbf{q} = (0,0,0)$ olduğundan iki ok farklı teğet uzaylarındadır ve aralarında toplama tanımlanmamıştır.
■

Bu işlemlerle $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$'ün bir vektör uzayı olduğunu ve aslında $\mathbb{R}^3$'ün "$\mathbf{p}$'ye taşınmış bir kopyası"ndan başka bir şey olmadığını göstermek istiyoruz. Bunu kesin söylemenin yolu, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_\mathbf{p}$ eşlemesinin bir **lineer izomorfizma** (linear isomorphism), yani birebir ve örten bir lineer dönüşüm olduğunu göstermektir.

Önerme 2.1 (Teğet Uzayı Bir Vektör Uzayıdır). *$\mathbf{p}$, $\mathbb{R}^3$'ün sabit bir noktası olsun.*
1. $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$, yukarıdaki toplama ve skalerle çarpma ile bir vektör uzayıdır. Sıfır vektörü $\mathbf{0}_\mathbf{p}$, $\mathbf{v}_\mathbf{p}$'nin toplamsal tersi $(-\mathbf{v})_\mathbf{p}$'dir.
2. $\varphi_\mathbf{p} : \mathbb{R}^3 \to T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\mathbf{p}$ fonksiyonu bir lineer izomorfizmadır.
3. $(1,0,0)_\mathbf{p}$, $(0,1,0)_\mathbf{p}$, $(0,0,1)_\mathbf{p}$ teğet vektörleri $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$'ün bir tabanıdır; dolayısıyla $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$ üç boyutludur.

İspat.
Önce $\varphi_\mathbf{p}$'nin özelliklerini, sonra vektör uzayı aksiyomlarını gösterelim; ikisi de doğrudan işlemlerin tanımından çıkar.
$\varphi_\mathbf{p}$ birebirdir. *$\varphi_\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \varphi_\mathbf{p}(\mathbf{w})$, yani $\mathbf{v}_\mathbf{p} = \mathbf{w}_\mathbf{p}$ olsun. Teğet vektörlerin eşitlik kuralı gereği vektör kısımları eşittir: $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.*
$\varphi_\mathbf{p}$ örtendir. *$T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$'ün her elemanı tanım gereği bir $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ için $\mathbf{v}_\mathbf{p} = \varphi_\mathbf{p}(\mathbf{v})$ biçimindedir.*
$\varphi_\mathbf{p}$ işlemleri korur. *Teğet uzayındaki işlemlerin tanımı doğrudan şunu söyler:*

$$\varphi_\mathbf{p}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{v}+\mathbf{w})_\mathbf{p} = \mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p} = \varphi_\mathbf{p}(\mathbf{v}) + \varphi_\mathbf{p}(\mathbf{w}), \qquad \varphi_\mathbf{p}(c\mathbf{v}) = (c\mathbf{v})_\mathbf{p} = c\,\mathbf{v}_\mathbf{p} = c\,\varphi_\mathbf{p}(\mathbf{v}).$$

Vektör uzayı aksiyomları. *$\mathbf{v}_\mathbf{p}, \mathbf{w}_\mathbf{p}, \mathbf{u}_\mathbf{p} \in T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$ ve a, b gerçel sayılar olsun. Her aksiyom, işlemlerin tanımıyla $\mathbb{R}^3$'teki karşılığına indirgenir; $\mathbb{R}^3$'ün bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Adım adım:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p} &= (\mathbf{v}+\mathbf{w})_\mathbf{p} = (\mathbf{w}+\mathbf{v})_\mathbf{p} = \mathbf{w}_\mathbf{p} + \mathbf{v}_\mathbf{p} && \text{(değişme)},\\
(\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p}) + \mathbf{u}_\mathbf{p} &= \big(\,(\mathbf{v}+\mathbf{w}) + \mathbf{u}\big)_\mathbf{p} = \big(\,\mathbf{v} + (\mathbf{w}+\mathbf{u})\big)_\mathbf{p} = \mathbf{v}_\mathbf{p} + (\mathbf{w}_\mathbf{p} + \mathbf{u}_\mathbf{p}) && \text{(birleşme)},\\
\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{0}_\mathbf{p} &= (\mathbf{v}+\mathbf{0})_\mathbf{p} = \mathbf{v}_\mathbf{p} && \text{(sıfır)},\\
\mathbf{v}_\mathbf{p} + (-\mathbf{v})_\mathbf{p} &= (\mathbf{v}-\mathbf{v})_\mathbf{p} = \mathbf{0}_\mathbf{p} && \text{(ters)},\\
a\,(b\,\mathbf{v}_\mathbf{p}) &= a\,(b\mathbf{v})_\mathbf{p} = \big(\,a(b\mathbf{v})\big)_\mathbf{p} = \big(\,(ab)\mathbf{v}\big)_\mathbf{p} = (ab)\,\mathbf{v}_\mathbf{p} && \text{(skaler birleşme)},\\
1 \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} &= (1\mathbf{v})_\mathbf{p} = \mathbf{v}_\mathbf{p} && \text{(birim)},\\
a\,(\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p}) &= \big(\,a(\mathbf{v}+\mathbf{w})\big)_\mathbf{p} = (a\mathbf{v} + a\mathbf{w})_\mathbf{p} = a\,\mathbf{v}_\mathbf{p} + a\,\mathbf{w}_\mathbf{p} && \text{(dağılma 1)},\\
(a+b)\,\mathbf{v}_\mathbf{p} &= \big(\,(a+b)\mathbf{v}\big)_\mathbf{p} = (a\mathbf{v} + b\mathbf{v})_\mathbf{p} = a\,\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\,\mathbf{v}_\mathbf{p} && \text{(dağılma 2)}\ .
\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Her satırdaki ortadaki eşitlik $\mathbb{R}^3$'ün ilgili aksiyomudur; diğer eşitlikler işlemlerin tanımıdır. Böylece (1) ve (2) ispatlanmıştır.
Taban. *Lineer bağımsızlık:* $a_1(1,0,0)_{\mathbf{p}} + a_2(0,1,0)_{\mathbf{p}} + a_3(0,0,1)_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$ *olsun. İşlemlerin tanımıyla sol taraf* $(a_1,a_2,a_3)_{\mathbf{p}}$*'dir; eşitlik kuralı gereği* $(a_1,a_2,a_3) = (0,0,0)$*. Germe: herhangi bir* $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (v_1,v_2,v_3)_{\mathbf{p}}$ *için, yine işlemlerin tanımıyla,*

$$(v_1,v_2,v_3)_{\mathbf{p}} = v_1(1,0,0)_{\mathbf{p}} + v_2(0,1,0)_{\mathbf{p}} + v_3(0,0,1)_{\mathbf{p}}.$$

Üç elemanlı bir taban bulunduğundan boyut üçtür; (3) ispatlanmıştır.
■

İspatın özü: $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ ile $\mathbf{v}$ arasında hiçbir bilgi kaybetmeyen birebir ve örten bir eşleme vardır ve işlemler bu eşlemeyle taşınmıştır; $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'te yaptığımız her hesap aslında $\mathbb{R}^3$'te yapılan bir hesaptır. Bu yüzden ilerideki hesaplarda teğet vektörlerin vektör kısımlarıyla rahatça çalışacağız; uygulama noktası yalnızca "hangi demetteyiz" bilgisini taşır.
Aşağıdaki üç örnekte bu gözlemi kullanıyoruz: Önerme 2.1 gereği teğet uzayındaki her soru, vektör kısımları için $\mathbb{R}^3$'te sorulan bir soruya dönüşür.

Örnek 2.16 (Orantılı İki Teğet Vektör). $\mathbf{p} = (0,0,5)$ olsun. $(1,2,0)_{\mathbf{p}}$ ve $(2,4,0)_{\mathbf{p}}$ lineer bağımsız mıdır?

Çözüm.
$(2,4,0) = 2\,(1,2,0)$ olduğundan $(2,4,0)_{\mathbf{p}} = 2\,(1,2,0)_{\mathbf{p}}$; yani $2\,(1,2,0)_{\mathbf{p}} - (2,4,0)_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$ sıfır olmayan katsayılı bir bağıntıdır. Lineer bağımlıdırlar.
■

Örnek 2.17 (Teğet Uzayında Lineer Bağımsızlık). $\mathbf{p} = (0,0,5)$ olsun. $(1,2,0)_{\mathbf{p}}$ ve $(0,1,1)_{\mathbf{p}}$ lineer bağımsız mıdır?

Çözüm.
$a\,(1,2,0)_{\mathbf{p}} + b\,(0,1,1)_{\mathbf{p}} = (a,2a+b,b)_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$ ise birinci bileşenden $a=0$, üçüncüden $b=0$ çıkar. Lineer bağımsızdırlar.
■

Örnek 2.18 (Teğet Vektörü Yeni Bir Tabanda Yazmak). $\mathbf{p} = (0,0,5)$ olsun. $(3,7,1)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörünü $(1,2,0)_{\mathbf{p}}$, $(0,1,1)_{\mathbf{p}}$, $(0,0,1)_{\mathbf{p}}$ cinsinden yazalım.

Çözüm.
Şu denklemi çözelim:

$$a\,(1,2,0) + b\,(0,1,1) + c\,(0,0,1) = (a,2a+b,b+c) = (3,7,1)$$

Buradan $a=3$; $2\cdot 3 + b = 7$ verir $b=1$; $1+c=1$ verir $c=0$. Dolayısıyla

$$(3,7,1)_{\mathbf{p}} = 3\,(1,2,0)_{\mathbf{p}} + (0,1,1)_{\mathbf{p}} + 0\cdot(0,0,1)_{\mathbf{p}}.$$

Bu üç teğet vektör lineer bağımsızdır da. Bunu görmek için şu bağıntıyı ele alalım:

$$a\,(1,2,0)_{\mathbf{p}} + b\,(0,1,1)_{\mathbf{p}} + c\,(0,0,1)_{\mathbf{p}} = (a,2a+b,b+c)_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$$

Birinci bileşenden $a=0$, sonra ikinciden $b=0$, sonra üçüncüden $c=0$ çıkar. Dolayısıyla bunlar $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'ün bir tabanıdır ve yukarıdaki yazım tektir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Vektör alanları

Bir nehrin yüzeyine bakalım: suyun her noktasında akıntı belli bir yöne, belli bir hızla gider. Her noktaya oradaki akış hızını gösteren bir ok yerleştirsek nehrin "hız alanı" dediğimiz resmini elde ederiz. Aynı resim yerçekiminde de vardır: uzayın her noktasında, oraya konan bir cismi yerkürenin merkezine doğru çeken bir kuvvet vardır; bu kuvvetleri ok olarak çizersek yerkürenin çekim alanını, fiziğin diliyle bir kuvvet alanını görürüz. Bir mıknatısın çevresinde gezdirilen pusula iğnesi de her noktada belli bir yöne döner. Bu örneklerin ortak yapısı şudur: her noktada, o noktadan çıkan bir ok. Bu yapıyı teğet vektör diliyle kesinleştirelim.

Tanım 2.4 (Vektör Alanı). $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir **vektör alanı** (vector field) V, $\mathbb{R}^3$'ün her $\mathbf{p}$ noktasına, $\mathbb{R}^3$'ün $\mathbf{p}$ noktasındaki bir $V(\mathbf{p})$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Başka bir deyişle, her $\mathbf{p}$ için

$$V(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3).$$

Yani vektör alanı, kabaca, uzaya yayılmış kocaman bir oklar topluluğudur: her noktada tam olarak bir ok, o da o noktadan çıkar. Tanımdaki kritik koşul budur: $\mathbf{p}$'ye karşılık gelen ok $\mathbf{p}$'de uygulanmış olmalıdır; alan, bir noktaya başka bir yerden çıkan bir ok veremez.

Örnek 2.19 (Aşağı Bakan Sabit Alan). Her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p}) = (0,0,-1)_{\mathbf{p}}$ olsun. Bu kuralın bir vektör alanı tanımladığını görelim ve V'nin $(1,2,3)$ ile $(-5,0,0)$ noktalarındaki değerlerini bulalım.

> **Çözüm.**
> Her $\mathbf{p}$'ye, $\mathbf{p}$'de uygulanan bir teğet vektör karşılık geliyor; bu bir vektör alanıdır. $V(1,2,3) = (0,0,-1)_{(1,2,3)}$, yani $(1,2,3)$'ten $(1,2,2)$'ye giden ok; $V(-5,0,0) = (0,0,-1)_{(-5,0,0)}$, yani $(-5,0,0)$'dan $(-5,0,-1)$'e giden ok. Her noktada aşağı yönlü, uzunluğu 1 olan bir ok: bu, "düzgün yerçekimi" alanının bir modelidir. Bütün okları birbirine paraleldir, ama hiçbiri diğerine eşit değildir.
> ■

Örnek 2.20 (Dışarı Bakan Radyal Alan). Her $\mathbf{p}$ için $W(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_{\mathbf{p}}$, yani vektör kısmı da $\mathbf{p}$ olan teğet vektör olsun. Bu kuralın bir vektör alanı tanımladığını görelim ve W'nin $(1,2,3)$ ile $\mathbf{0}$ noktalarındaki değerlerini bulalım.

> **Çözüm.**
> Her $\mathbf{p}$'ye $\mathbf{p}$'de uygulanan bir teğet vektör karşılık geliyor; W bir vektör alanıdır. $W(1,2,3) = (1,2,3)_{(1,2,3)}$, yani $(1,2,3)$'ten $(1,2,3)+(1,2,3) = (2,4,6)$'ya giden ok. $W(\mathbf{0}) = \mathbf{0}_{\mathbf{0}}$, başlangıç noktası $\mathbf{0}$'daki sıfır vektörü. Her ok, başlangıç noktası $\mathbf{0}$'dan "dışarı doğru" bakar ve noktanın $\mathbf{0}$'a uzaklığı arttıkça uzar; buna radyal alan denir.
> ■

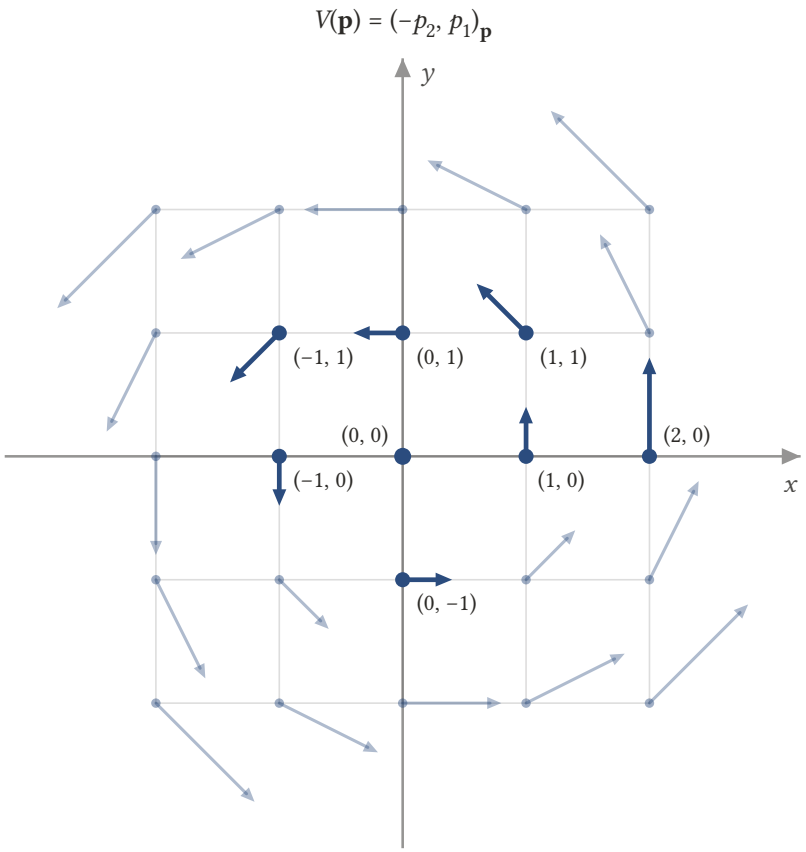
Örnek 2.21 (Düzlemde Dönen Alan). Öklid düzleminde her $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ için $V(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1)_{\mathbf{p}}$ olsun. V'nin $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,0)$ ve $(0,0)$ noktalarındaki değerlerini bulalım ve okları çizelim.

> **Çözüm.**
> Her noktada vektör kısmı için önce koordinatların yeri değiştirilir, sonra yeni birinci bileşenin işareti çevrilir: $(p_1,p_2) \mapsto (-p_2,p_1)$. Sonuçlar şöyledir:
>
> | $\mathbf{p}$ | $V(\mathbf{p})$ | bitiş noktası |
> |---|---|---|
> | $(1,0)$ | $(0,1)_{\mathbf{p}}$ | $(1,1)$ |
> | $(0,1)$ | $(-1,0)_{\mathbf{p}}$ | $(-1,1)$ |
> | $(-1,0)$ | $(0,-1)_{\mathbf{p}}$ | $(-1,-1)$ |
> | $(0,-1)$ | $(1,0)_{\mathbf{p}}$ | $(1,-1)$ |

 CC BY-NC-SA 4.0

$\mathbf{p}$	$V(\mathbf{p})$	bitiş noktası
$(1,1)$	$(-1,1)_{\mathbf{p}}$	$(0,2)$
$(-1,1)$	$(-1,-1)_{\mathbf{p}}$	$(-2,0)$
$(2,0)$	$(0,2)_{\mathbf{p}}$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)_{\mathbf{p}}$	$(0,0)$

Aşağıdaki şekil bu okları (ve bir ızgaradaki başka noktalarda hesaplanmış birkaçını daha) gösterir. Oklar başlangıç noktası **0**'ın etrafında saat yönünün tersine döner; **0**'dan uzaklaştıkça uzar; **0**'da ok sıfırdır. Bu, sabit açısal hızla dönen bir diskin hız alanıdır.



Şekil 2.7: Düzlemde $V(\mathbf{p}) = (-p_2,\ p_1)_{\mathbf{p}}$ alanının $-2..2$ tam sayı ızgarasındaki okları; örnekteki sekiz nokta koyu, ızgaranın geri kalanı açık mavidir. Okunaklılık için her ok gerçek uzunluğunun 0,4 katıyla çizilmiştir; yönler ve uzunluk oranları doğrudur. Oklar başlangıç noktasının etrafında saat yönünün tersine döner, **0**'dan uzaklaştıkça uzar ve **0**'da sıfır olduğundan orada yalnızca nokta görünür.

■

Tanımdaki koşulların neden gerekli olduğunu, onları sağlamayan kurallarda görelim.

Örnek 2.22 (Yanlış Noktada Uygulanan Oklar). $\mathbf{p} \mapsto (1,0,0)_{2\mathbf{p}}$ kuralı $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı tanımlar mı?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ için karşılık gelen teğet vektörün uygulama noktası $2\mathbf{p} \neq \mathbf{p}$'dir; yani değer $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'te değil, $T_{2\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'tedir. Tanımın "$\mathbf{p}$'de uygulanmış" koşulu sağlanmaz; bu bir vektör alanı değildir. Kural bir fonksiyon olarak kusursuzdur, ama yanlış demetlerden ok seçmektedir.
■

Örnek 2.23 (Noktaya Nokta Karşılık Getiren Kural). Her noktaya kendisini karşılık getiren $\mathbf{p} \mapsto (p_1, p_2, p_3)$ kuralı $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı tanımlar mı?

Çözüm.
Bu kural her noktaya bir teğet vektör değil, bir nokta karşılık getirir; $\mathbb{R}^3$'ten $\mathbb{R}^3$'e bir fonksiyondur, vektör alanı değildir. Ancak "bu noktayı $\mathbf{p}$'de uygulanan vektör kısmı olarak oku" dersek radyal alan $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}_{\mathbf{p}}$ elde edilir. Aradaki fark tam olarak uygulama noktası bilgisidir: $\mathbf{p}$ noktası tek başına nerede uygulandığını söylemez, $\mathbf{p}_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü söyler.
■

Örnek 2.24 (Her Yerde Tanımlı Olmayan Kural). $\mathbf{p} \mapsto (1/p_1, 0, 0)_{\mathbf{p}}$ kuralı $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı tanımlar mı?

Çözüm.
$p_1 = 0$ olan noktalarda $1/p_1$ tanımsızdır; kural bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı değildir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı değildir. Tanım kümesi $p_1 \neq 0$ açık kümesiyle sınırlanırsa o küme üzerinde bir vektör alanı elde edilir; biz bu bölümde bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı alanlarla çalışıyoruz.
■

2.3.1 Noktasal ilke: vektör alanlarında cebir

İki vektör alanını toplamak ne demektir? Önce bildiğimiz bir şeye bakalım: iki fonksiyonu nasıl topluyoruz? $f + g$ fonksiyonunu, her $\mathbf{p}$ noktasındaki değerini $(f+g)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})$ olarak belirleyerek tanımlarız. Bunu yapabilmemizin tek nedeni, $f(\mathbf{p})$ ile $g(\mathbf{p})$'nin toplanabilen nesneler, yani sayılar, olmasıdır. Şimdi iki vektör alanı V ve W alalım. Bir $\mathbf{p}$ noktasında $V(\mathbf{p})$ ve $W(\mathbf{p})$, aynı teğet uzayı $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ içinde duran iki oktur; bu okları toplamayı bir önceki kesimde öğrendik. O hâlde $V + W$'yi de aynı yolla kurabiliriz: her noktada oradaki iki ok toplanır, sonuç o noktaya yerleştirilir.

i Noktasal ilke

Az önce yaptığımız şey genel bir tariftir ve ileride defalarca kullanılacaktır; ona **noktasal ilke** (pointwise principle) diyeceğiz. İki fonksiyonun bir $\mathbf{p}$ noktasındaki değerleri üzerinde yapılabilen bir işlem varsa, aynı işlem fonksiyonların kendisi için de tanımlanır: yeni fonksiyonun $\mathbf{p}$'deki değeri, eski fonksiyonların $\mathbf{p}$'deki değerlerine o işlemin uygulanmasıyla bulunur. Fonksiyonların toplamı ve çarpımı, vektör alanlarının toplamı ve birazdan tanımlayacağımız fonksiyonla çarpım hep bu ilkenin örnekleridir.

Tanım 2.5 (Vektör Alanlarının Toplamı ve Fonksiyonla Çarpımı). V ve W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları, f de $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli bir fonksiyon olsun. $V + W$ ve fV, her $\mathbf{p}$ için

$$(V + W)(\mathbf{p}) = V(\mathbf{p}) + W(\mathbf{p}), \qquad (fV)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\, V(\mathbf{p})$$

ile tanımlanan vektör alanlarıdır.

Yani $V + W$'nin $\mathbf{p}$'deki oku, V ile W'nin $\mathbf{p}$'deki oklarının paralelkenar kuralıyla toplamıdır; fV'nin $\mathbf{p}$'deki oku ise V'nin $\mathbf{p}$'deki okunun $f(\mathbf{p})$ sayısıyla çarpılmışıdır. İkinci tanım, noktasal ilkenin teğet uzaylarındaki skalerle çarpmaya uygulanmasıdır; skaler, noktadan noktaya değişen $f(\mathbf{p})$ sayısıdır. Sağ taraflardaki işlemler $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ içinde yapıldığından sonuçlar yine $\mathbf{p}$'de uygulanır; dolayısıyla $V + W$ ve fV gerçekten vektör alanıdır. f sabit bir c sayısıysa cV yazarız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.25 (Alanların Toplamı ve Fonksiyonla Çarpımı). $V(\mathbf{p}) = (p_1, 0, p_3)_{\mathbf{p}}$, $W(\mathbf{p}) = (1, p_2, -1)_{\mathbf{p}}$ ve $f = x^2 + z$ olsun. Burada $f = x^2 + z$ yazımı, her $\mathbf{p}$ için $f(\mathbf{p}) = p_1^2 + p_3$ demektir. $(V + W)(\mathbf{p})$ ve $(fV)(\mathbf{p})$'yi genel bir $\mathbf{p}$ için, sonra $\mathbf{p} = (1, 2, -1)$ ve $\mathbf{q} = (2, 1, 1)$ için hesaplayalım.

Çözüm.
Genel formüller, teğet uzayındaki işlemlerin tanımından:

$$(V + W)(\mathbf{p}) = (p_1 + 1, p_2, p_3 - 1)_{\mathbf{p}}, \qquad (fV)(\mathbf{p}) = (p_1^2 + p_3)\,(p_1, 0, p_3)_{\mathbf{p}} = \big(\,(p_1^2 + p_3)p_1,\, 0,\, (p_1^2 + p_3)p_3\big)_{\mathbf{p}}.$$

$\mathbf{p} = (1, 2, -1)$ için $V(\mathbf{p}) = (1, 0, -1)_{\mathbf{p}}$, $W(\mathbf{p}) = (1, 2, -1)_{\mathbf{p}}$; dolayısıyla $(V + W)(\mathbf{p}) = (2, 2, -2)_{\mathbf{p}}$. Ayrıca $f(\mathbf{p}) = 1^2 + (-1) = 0$, dolayısıyla $(fV)(\mathbf{p}) = 0 \cdot (1, 0, -1)_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$: bu noktada fV'nin oku sıfırdır.
$\mathbf{q} = (2, 1, 1)$ için $f(\mathbf{q}) = 4 + 1 = 5$, $V(\mathbf{q}) = (2, 0, 1)_{\mathbf{q}}$, $W(\mathbf{q}) = (1, 1, -1)_{\mathbf{q}}$; dolayısıyla

$$(V + W)(\mathbf{q}) = (3, 1, 0)_{\mathbf{q}}, \qquad (fV)(\mathbf{q}) = 5\,(2, 0, 1)_{\mathbf{q}} = (10, 0, 5)_{\mathbf{q}}, \qquad (fW)(\mathbf{q}) = (5, 5, -5)_{\mathbf{q}}.$$

Aynı f, farklı noktalarda farklı çarpanlar üretir: $\mathbf{p}$'de 0, $\mathbf{q}$'da 5.
■

Düzlemde aynı şey şöyle görünür.

Örnek 2.26 (Düzlemde Dönen Alan ile Sabit Alanın Toplamı). Öklid düzleminde $V(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1)_{\mathbf{p}}$ dönen alan, $W(\mathbf{p}) = (1, 0)_{\mathbf{p}}$ her noktada sağa bakan sabit alan ve $f = x$ olsun; yani $f(\mathbf{p}) = p_1$. $(V + W)(\mathbf{p})$ ve $(fV)(\mathbf{p})$'yi genel bir $\mathbf{p}$ için yazalım; sonra $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(1, -1)$ ve $(-1, 2)$ noktalarında hesaplayalım.

Çözüm.
Tanıma göre her noktada vektör kısımlarıyla işlem yapılır, uygulama noktası $\mathbf{p}$ olarak kalır:

$$(V + W)(\mathbf{p}) = (1 - p_2, p_1)_{\mathbf{p}}, \qquad (fV)(\mathbf{p}) = p_1\,(-p_2, p_1)_{\mathbf{p}} = (-p_1 p_2, p_1^2)_{\mathbf{p}}.$$

Dört noktadaki değerler şöyledir:

$\mathbf{p}$	$V(\mathbf{p})$	$W(\mathbf{p})$	$(V + W)(\mathbf{p})$	$f(\mathbf{p})$	$(fV)(\mathbf{p})$
$(0, 1)$	$(-1, 0)_{\mathbf{p}}$	$(1, 0)_{\mathbf{p}}$	$(0, 0)_{\mathbf{p}}$	0	$(0, 0)_{\mathbf{p}}$
$(2, 1)$	$(-1, 2)_{\mathbf{p}}$	$(1, 0)_{\mathbf{p}}$	$(0, 2)_{\mathbf{p}}$	2	$(-2, 4)_{\mathbf{p}}$
$(1, -1)$	$(1, 1)_{\mathbf{p}}$	$(1, 0)_{\mathbf{p}}$	$(2, 1)_{\mathbf{p}}$	1	$(1, 1)_{\mathbf{p}}$
$(-1, 2)$	$(-2, -1)_{\mathbf{p}}$	$(1, 0)_{\mathbf{p}}$	$(-1, -1)_{\mathbf{p}}$	-1	$(2, 1)_{\mathbf{p}}$

fV için çarpan $f(\mathbf{p}) = p_1$ noktadan noktaya değişir. $p_1 > 0$ olan noktalarda ok V ile aynı yöne bakar ve uzunluğu p_1 katına çıkar ($(2, 1)$'de iki kat); $p_1 = 0$ olan y ekseni üzerinde ok sıfırlanır; $p_1 < 0$ olan noktalarda ise yön tersine döner: $(-1, 2)$'de $V(\mathbf{p}) = (-2, -1)_{\mathbf{p}}$ iken $(fV)(\mathbf{p}) = (2, 1)_{\mathbf{p}}$'dir.
■

Tablonun ilk satırında $V + W$ sıfır çıktı. Bu toplamın sıfır olduğu başka noktalar da var mı, bakalım.

Örnek 2.27 (Dönen Alan ile Sabit Alanın Toplamı Nerede Sıfır?). Öklid düzleminde $V(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1)_{\mathbf{p}}$ dönen alan ve $W(\mathbf{p}) = (1, 0)_{\mathbf{p}}$ her noktada sağa bakan sabit alan olsun. $V + W$ hangi noktalarda sıfırdır?

Çözüm.
Tanıma göre her noktada vektör kısımlarıyla işlem yapılır, uygulama noktası $\mathbf{p}$ olarak kalır:

$$(V + W)(\mathbf{p}) = (1 - p_2, p_1)_{\mathbf{p}}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$(0,1)$ noktasında dönen alanın oku sola, sabit alanın oku sağa bakar ve ikisi birbirini götürür: $(V+W)(\mathbf{p}) = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$. Genel formülden $V+W$'nin sıfır olması için $1-p_2=0$ ve $p_1=0$ gerekir; yani $V+W$ yalnızca $(0,1)$ noktasında sıfırdır. Dönen alana sabit bir alan eklenince tam bir noktada durgunluk oluşur.
■

⚠ Vektör alanı mı, teğet vektör mü, sayı mı?

Üç ayrı düzeydeki nesneleri karıştırmamak gerekir. V bir vektör alanıdır: bütün uzaya yayılmış bir oklar topluluğu. $V(\mathbf{p})$ tek bir teğet vektördür: $\mathbf{p}$'deki ok. $f(\mathbf{p})$ bir sayıdır. fV yine bir vektör alanıdır, $f(\mathbf{p})V(\mathbf{p})$ ise tek bir teğet vektör. Bir eşitliğin iki yanındaki nesnelerin aynı türden olup olmadığını denetlemek, hataların çoğunu daha baştan önler.

2.4 Doğal çatı alanı

Buraya kadar vektör alanlarını hep "her noktaya bir ok" diye, kural vererek tanımladık. Bu tanım doğru ama hesap için hantaldır; bir alanı üç fonksiyonla yazabilseydik onu toplamak, çarpmak, karşılaştırmak ve ileride türevini almak çok kolaylaşırdı. Bunun yolu, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'ün tabanı olan $(1,0,0)_{\mathbf{p}}, (0,1,0)_{\mathbf{p}}, (0,0,1)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörlerini tek tek noktalarda değil, bütün noktalarda birden seçmektir. Böylece üç özel vektör alanı elde ederiz; birazdan her vektör alanının bu üçünün fonksiyon katsayılı bir birleşimi olduğunu göreceğiz.

Tanım 2.6 (Doğal Çatı Alanı). U_1, U_2, U_3, $\mathbb{R}^3$'ün her $\mathbf{p}$ noktası için

$$U_1(\mathbf{p}) = (1,0,0)_{\mathbf{p}}, \qquad U_2(\mathbf{p}) = (0,1,0)_{\mathbf{p}}, \qquad U_3(\mathbf{p}) = (0,0,1)_{\mathbf{p}}$$

olan vektör alanları olsun. U_1, U_2, U_3 üçlüsüne $\mathbb{R}^3$'ün **doğal çatı alanı** (natural frame field) denir.

Yani U_i $(i=1,2,3)$, pozitif x_i yönündeki, uzunluğu 1 olan **birim vektör** (unit vector) alanıdır: her noktada aynı yöne bakan, aynı uzunluktaki bir ok. Vektör kısmı noktadan noktaya değişmediği için U_i'nin farklı noktalardaki değerleri birbirine paraleldir; ama uygulama noktaları farklı olduğundan bunlar farklı teğet vektörlerdir. U_1 bir vektör alanıdır; $U_1(\mathbf{p})$ ise $\mathbf{p}$'deki tek bir oktur.
Düzlemde aynı şey şöyle görünür: $\mathbb{R}^2$'nin doğal çatı alanı iki alandan oluşur, her $\mathbf{p}$ için $U_1(\mathbf{p}) = (1,0)_{\mathbf{p}}$ ve $U_2(\mathbf{p}) = (0,1)_{\mathbf{p}}$. Örneğin $\mathbf{p}=(3,-1)$'de $U_1(\mathbf{p})$, $(3,-1)$'den $(4,-1)$'e giden yatay birim ok; $U_2(\mathbf{p})$ ise $(3,-1)$'den $(3,0)$'a giden dikey birim oktur. Bundan sonraki düzlem örneklerinde U_1, U_2 yazdığımızda bu iki alanı kastediyoruz; düzlemdeki her vektör alanının $v_1U_1 + v_2U_2$ biçiminde yazılabildiği, aşağıdaki lemmanın iki bileşenli hâlidir.

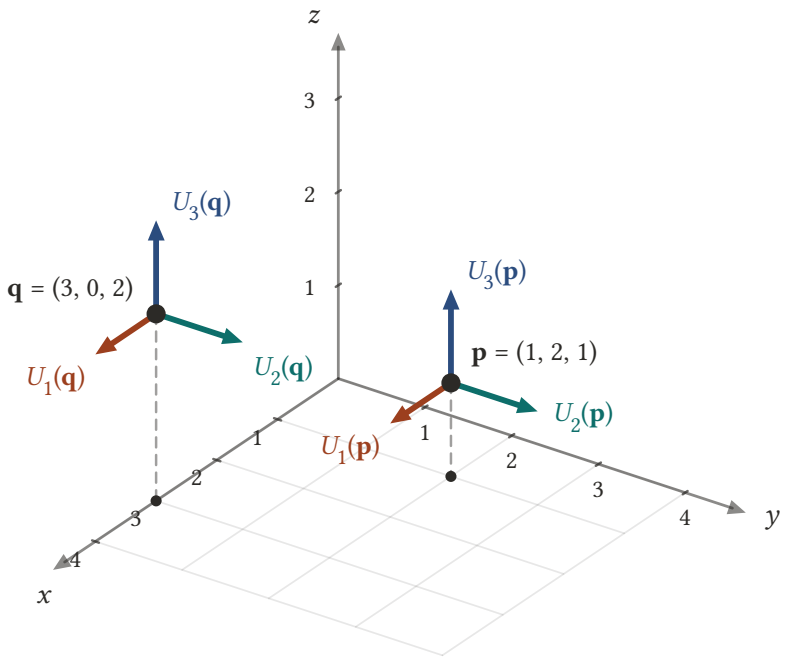
Örnek 2.28 (Doğal Çatının İki Noktadaki Değerleri). $\mathbf{p}=(1,2,1)$ ve $\mathbf{q}=(3,0,2)$ noktalarında U_1, U_2, U_3'ün değerlerini ve bu okların bitiş noktalarını bulalım.

Çözüm.
Tanıma göre vektör kısımları her noktada aynıdır; yalnızca uygulama noktası değişir:

alan	$\mathbf{p}=(1,2,1)$'deki değeri	bitiş	$\mathbf{q}=(3,0,2)$'deki değeri	bitiş
U_1	$(1,0,0)_{\mathbf{p}}$	$(2,2,1)$	$(1,0,0)_{\mathbf{q}}$	$(4,0,2)$
U_2	$(0,1,0)_{\mathbf{p}}$	$(1,3,1)$	$(0,1,0)_{\mathbf{q}}$	$(3,1,2)$
U_3	$(0,0,1)_{\mathbf{p}}$	$(1,2,2)$	$(0,0,1)_{\mathbf{q}}$	$(3,0,3)$

Aşağıdaki şekilde her iki noktada eksenlere paralel üçer birim ok görülür: her noktada küçük bir "koordinat çatısı".

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.8: Doğal çatı U_1, U_2, U_3'ün $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ ve $\mathbf{q} = (3, 0, 2)$ noktalarındaki değerleri. Her noktada eksenlere paralel üç birim ok vardır: U_1 için $(1, 0, 0)$, U_2 için $(0, 1, 0)$, U_3 için $(0, 0, 1)$; aynı renk aynı alanı gösterir. $U_1(\mathbf{p})$ ile $U_1(\mathbf{q})$ paraleldir ama uygulama noktaları farklı olduğundan eşit değildir.

■

Örnek 2.29 (Farklı Noktalarda Aynı Çatı Alanı). $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ ve $\mathbf{q} = (3, 0, 2)$ olsun. $U_1(\mathbf{p})$ ile $U_1(\mathbf{q})$ teğet vektörleri eşit midir?

Çözüm.
$U_1(\mathbf{p})$ ve $U_1(\mathbf{q})$'nun vektör kısımları aynı $((1, 0, 0))$, uygulama noktaları farklıdır; paraleldirler ama eşit değildirler.
■

2.4.1 Bir vektör alanının koordinat fonksiyonları

Bir vektör alanı V verilsin. $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $\mathbf{p}$'ye bağlı bir üçlüdür; üçlünün her bileşeni, $\mathbf{p}$'ye bir sayı karşılık getirdiğinden, bir gerçel değerli fonksiyondur. Bu gözlem, her vektör alanının üç fonksiyonla tamamen belirlendiğini söyler ve vektör alanlarını hesaplanabilir nesnelere dönüştürür. Aşağıdaki lemma bu bölümün ana sonucudur.

Lemma 2.1 (Vektör Alanının Koordinat Fonksiyonları). *V, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı olsun. $\mathbb{R}^3$ üzerinde tek türlü belirlenmiş v_1, v_2, v_3 gerçel değerli fonksiyonları vardır ve*

$$V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3$$

*olur. v_1, v_2, v_3 fonksiyonlarına V'nin **Öklid koordinat fonksiyonları** (Euclidean coordinate functions) denir.*

İspat.
Varlık. *Tanım gereği V, her $\mathbf{p}$ noktasına $\mathbf{p}$'de uygulanan bir $V(\mathbf{p})$ teğet vektörü karşılık getirir. Dolayısıyla $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $\mathbf{p}$'ye bağlı bir üçlüdür; bu üçlüyü $\big(\, v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p}) \,\big)$ diye yazalım. Bu yazım*

v_1, v_2, v_3'ü $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli fonksiyonlar olarak tanımlar: $v_i(\mathbf{p})$, $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının i-inci bileşenidir. Şimdi her $\mathbf{p}$ için

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}) &= \big(v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} \\ &= v_1(\mathbf{p})\,(1,0,0)_{\mathbf{p}} + v_2(\mathbf{p})\,(0,1,0)_{\mathbf{p}} + v_3(\mathbf{p})\,(0,0,1)_{\mathbf{p}} \\ &= v_1(\mathbf{p})\,U_1(\mathbf{p}) + v_2(\mathbf{p})\,U_2(\mathbf{p}) + v_3(\mathbf{p})\,U_3(\mathbf{p}) \\ &= (v_1U_1)(\mathbf{p}) + (v_2U_2)(\mathbf{p}) + (v_3U_3)(\mathbf{p}) \\ &= (v_1U_1 + v_2U_2 + v_3U_3)(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Adımların gerekçeleri sırasıyla şunlardır:

- *birinci satır: v_i'lerin tanımı;*
- *ikinci satır: $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'teki toplama ve skalerle çarpmanın tanımı (Önerme 2.1'nın ispatındaki germe adımı);*
- *üçüncü satır: U_i'lerin tanımı;*
- *dördüncü satır: fV çarpımının noktasal tanımı ($f = v_i$ ile);*
- *beşinci satır: $V + W$ toplamının noktasal tanımı (iki kez uygulanmış).*

Böylece V ile $v_1U_1 + v_2U_2 + v_3U_3$ vektör alanları her noktada aynı teğet vektör değerini alır. İki fonksiyon her noktada aynı değeri alıyorsa eşittir; dolayısıyla $V = v_1U_1 + v_2U_2 + v_3U_3$.
Teklik. *$V = w_1U_1 + w_2U_2 + w_3U_3$ de sağlansın. Yukarıdaki hesap w_i'ler için de geçerlidir; dolayısıyla her $\mathbf{p}$ için*

$$\big(v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} = V(\mathbf{p}) = \big(w_1(\mathbf{p}), w_2(\mathbf{p}), w_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}}.$$

Teğet vektörlerin eşitlik kuralı gereği vektör kısımları eşittir: her $\mathbf{p}$ ve her i için $v_i(\mathbf{p}) = w_i(\mathbf{p})$. Yani $v_i = w_i$; koordinat fonksiyonları tek türlü belirlidir.
■

İspatın özü: $v_i(\mathbf{p})$, $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının i-inci bileşeninden başka bir şey değildir; lemma, bu bileşenleri "$\mathbf{p}$'nin fonksiyonu" olarak okumaktan ibarettir. Koordinat fonksiyonlarını bulmak için $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmına bakmak ve her bileşeni p_1, p_2, p_3 cinsinden yazıp x, y, z koordinat fonksiyonlarıyla (bkz. Tanım 1.3) ifade etmek yeter.

> **i** Toplam yazımı ve ispat sonu işareti
>
> Bundan sonra $\sum_{i=1}^{3} v_iU_i$ toplamını kısaca $\sum_i v_iU_i$, hatta yalnızca $\sum v_iU_i$ diye yazacağız; indeksin $i = 1, 2, 3$ üzerinden dolaştığı her zaman anlaşılır. Lemma bu yazımla $V = \sum v_iU_i$ biçimini alır; buna V'nin **standart biçimi** diyeceğiz. İkinci bir yazım sözleşmesini de burada belirtelim: ispatların ve çözümlerin sonundaki ■ işareti, ispatın ya da çözümün bittiğini gösterir; kitap boyunca bu işareti kullanacağız.

İspatın içinde geçen özdeşliği ayrıca kaydedelim; çok sık kullanılacaktır.

Sonuç 2.1 (Teğet Vektörün Doğal Çatıda Ayrışımı). *Her $\mathbf{p}$ noktası ve her (a_1, a_2, a_3) üçlüsü için*

$$(a_1, a_2, a_3)_{\mathbf{p}} = a_1U_1(\mathbf{p}) + a_2U_2(\mathbf{p}) + a_3U_3(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} a_i\,U_i(\mathbf{p}).$$

İspat.
$T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'teki işlemlerin tanımıyla sağ taraf $(a_1, 0, 0)_{\mathbf{p}} + (0, a_2, 0)_{\mathbf{p}} + (0, 0, a_3)_{\mathbf{p}} = (a_1, a_2, a_3)_{\mathbf{p}}$'dir; $U_i(\mathbf{p})$'lerin yerine tanımlarındaki teğet vektörler yazılmıştır.
■

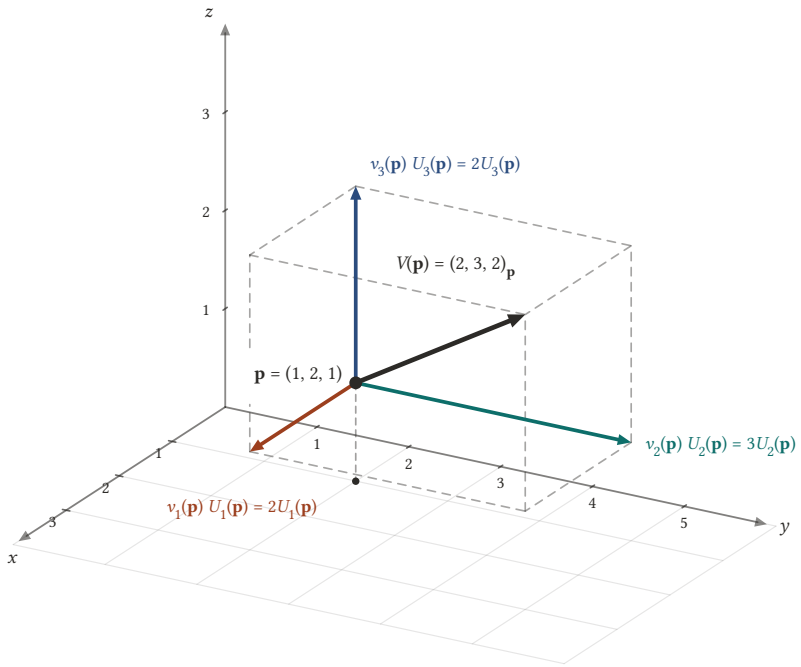
Örnek 2.30 (Bir Alanın Bir Noktadaki Ayrışımı). $V = xy\,U_1 + (y+z)\,U_2 + 2z\,U_3$ olsun. $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ ve $\mathbf{q} = (0, -1, 1)$ noktalarında V'nin değerini, koordinat fonksiyonlarının değerlerini ve okun bitiş noktasını bulalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $v_1 = xy$, $v_2 = y + z$, $v_3 = 2z$'dir; $v_1(\mathbf{p}) = p_1p_2$, $v_2(\mathbf{p}) = p_2 + p_3$, $v_3(\mathbf{p}) = 2p_3$ demektir.
$\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ için $v_1(\mathbf{p}) = 1 \cdot 2 = 2$, $v_2(\mathbf{p}) = 2 + 1 = 3$, $v_3(\mathbf{p}) = 2 \cdot 1 = 2$. Dolayısıyla

$$V(\mathbf{p}) = 2\,U_1(\mathbf{p}) + 3\,U_2(\mathbf{p}) + 2\,U_3(\mathbf{p}) = (2, 3, 2)_{\mathbf{p}},$$

yani $(1, 2, 1)$'den $(3, 5, 3)$'e giden ok. Aşağıdaki şekil bu oku, üç bileşen oku $2U_1(\mathbf{p})$, $3U_2(\mathbf{p})$, $2U_3(\mathbf{p})$ ile birlikte gösterir: $V(\mathbf{p})$, kenarları bu üç ok olan dikdörtgen kutunun $\mathbf{p}$'den çıkan köşegenidir.



Şekil 2.9: Kalın ok, $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ noktasındaki $V(\mathbf{p}) = (2, 3, 2)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörüdür: (1, 2, 1)'den (3, 5, 3)'e gider. Eksenlere paralel üç bileşen oku $2U_1(\mathbf{p})$, $3U_2(\mathbf{p})$, $2U_3(\mathbf{p})$ toplandığında $V(\mathbf{p})$'yi verir; $V(\mathbf{p})$, kenarları bu üç ok olan $2\times3\times2$ kutunun $\mathbf{p}$'den çıkan köşegenidir. Koordinat fonksiyonlarının $\mathbf{p}$'deki değerleri $v_1(\mathbf{p}) = 2$, $v_2(\mathbf{p}) = 3$, $v_3(\mathbf{p}) = 2$ kutunun kenar uzunluklarıdır.

$\mathbf{q} = (0, -1, 1)$ için $v_1(\mathbf{q}) = 0 \cdot (-1) = 0$, $v_2(\mathbf{q}) = -1 + 1 = 0$, $v_3(\mathbf{q}) = 2$; $V(\mathbf{q}) = (0, 0, 2)_{\mathbf{q}} = 2U_3(\mathbf{q})$, yani $(0, -1, 1)$'den $(0, -1, 3)$'e giden dikey ok.
■

Tersine, bir alan noktalardaki değerleriyle verildiğinde standart biçimini okuyabiliriz. Yöntem her zaman aynıdır: $v_i(\mathbf{p})$, vektör kısmının i-inci bileşenidir; bunu x, y, z ile yazarız ($x(\mathbf{p}) = p_1$, $y(\mathbf{p}) = p_2$, $z(\mathbf{p}) = p_3$).

Örnek 2.31 (Değerlerden Standart Biçime Geçiş). Her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p}) = (p_2, -p_1, p_3^2)_{\mathbf{p}}$ olsun. V'nin koordinat fonksiyonlarını bulup V'yi $\sum v_iU_i$ standart biçiminde yazalım.

Çözüm.
$v_1(\mathbf{p}) = p_2 = y(\mathbf{p})$, $v_2(\mathbf{p}) = -p_1 = -x(\mathbf{p})$, $v_3(\mathbf{p}) = p_3^2 = z^2(\mathbf{p})$. Dolayısıyla $V = y\,U_1 - x\,U_2 + z^2\,U_3$.
■

Örnek 2.32 (Bitiş Noktalarıyla Verilen Alan). Her $\mathbf{p}$ için $W(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}$'den $(p_1 + p_2, 2p_2, p_3 - 1)$ noktasına giden ok olsun. W'nin koordinat fonksiyonlarını bulup W'yi standart biçimde yazalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Vektör kısmı, bitiş noktasından $\mathbf{p}$'nin çıkarılmasıyla bulunur: $(p_1 + p_2 - p_1, 2p_2 - p_2, p_3 - 1 - p_3) = (p_2, p_2, -1)$. Dolayısıyla $W = y\,U_1 + y\,U_2 - U_3$.
■

Örnek 2.33 (Eksene Doğru Bakan Oklar). Her $\mathbf{p}$ için $Z(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}$'den z ekseni üzerindeki $(0, 0, p_3)$ noktasına giden ok olsun. Z'nin koordinat fonksiyonlarını bulup Z'yi standart biçimde yazalım.

Çözüm.
Vektör kısmı $(0, 0, p_3) - (p_1, p_2, p_3) = (-p_1, -p_2, 0)$'dır. Dolayısıyla $Z = -x\,U_1 - y\,U_2$; üçüncü koordinat fonksiyonu sıfır fonksiyonudur. Her ok, noktadan z eksenine doğru, eksene dik olarak bakar.
■

Örnek 2.34 (Dönen Alanın Standart Biçimi). Düzlemdeki dönen alan her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1)_{\mathbf{p}}$ ile verilir (Örnek 2.21). V'nin koordinat fonksiyonlarını bulup V'yi standart biçimde yazalım.

Çözüm.
Düzlemde iki koordinat fonksiyonu vardır: $v_1(\mathbf{p}) = -p_2$, $v_2(\mathbf{p}) = p_1$; yani $V = -y\,U_1 + x\,U_2$. Bu, dönen alanın standart biçimidir.
■

Vektör alanlarıyla yapılan hesaplar her zaman koordinat fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Toplama ve fonksiyonla çarpma için formüller şunlardır.

Önerme 2.2 (Koordinatlarla Toplama ve Çarpma). *$V = \sum v_i U_i$ ve $W = \sum w_i U_i$ vektör alanları, f bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$\sum v_i U_i + \sum w_i U_i = \sum (v_i + w_i)\, U_i, \qquad f\left(\sum v_i U_i\right) = \sum (f v_i)\, U_i.$$

Yani $V + W$'nin koordinat fonksiyonları $v_i + w_i$, fV'ninkiler fv_i'dir.

İspat.
Her iki eşitlik de vektör alanları arasında olduğundan, her $\mathbf{p}$ noktasında değerlerin eşit olduğunu göstermek yeter. Toplama için, noktasal tanımlar ve Sonuç 2.1 ile

$$\begin{aligned}(V + W)(\mathbf{p}) &= V(\mathbf{p}) + W(\mathbf{p}) = \big(\, v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} + \big(\, w_1(\mathbf{p}), w_2(\mathbf{p}), w_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} \\ &= \big(\, v_1(\mathbf{p}) + w_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}) + w_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p}) + w_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} = \sum (v_i + w_i)(\mathbf{p})\, U_i(\mathbf{p}),\end{aligned}$$

ve son ifade $\sum (v_i + w_i) U_i$ alanının $\mathbf{p}$'deki değeridir; ikinci satırdaki ilk eşitlik $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'teki toplamanın tanımı, ikincisi ise fonksiyon toplamının noktasal tanımı ile ayrışım özdeşliğidir. Çarpma için benzer biçimde

$$(fV)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\, V(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\, \big(\, v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} = \big(\, f(\mathbf{p}) v_1(\mathbf{p}), f(\mathbf{p}) v_2(\mathbf{p}), f(\mathbf{p}) v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} = \sum (f v_i)(\mathbf{p})\, U_i(\mathbf{p}),$$

burada üçüncü eşitlik $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'teki skalerle çarpmanın tanımı, dördüncüsü fonksiyon çarpımının noktasal tanımı ile ayrışım özdeşliğidir. Son ifade $\sum (f v_i) U_i$ alanının $\mathbf{p}$'deki değeridir.
■

Bu önerme, vektör alanlarıyla yapılan cebiri "koordinat koordinat" yapmamıza izin verir: U_1, U_2, U_3 sembolleri sanki birer değişkenmiş gibi toplanır, fonksiyonlarla çarpılır ve benzer terimler birleştirilir.

Örnek 2.35 (Standart Biçimde Hesap). $V = x\,U_1 + y\,U_2 + z\,U_3$, $W = -y\,U_1 + x\,U_2$ ve $f = z$ olsun. $V + W$, fW ve $2V - 3W$ alanlarını standart biçimde yazalım; sonra $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$'teki değerlerini bulalım.

Çözüm.

Önerme 2.2 ile benzer terimleri birleştiririz:

$$\begin{aligned} V+W &= (x-y)\,U_1 + (y+x)\,U_2 + z\,U_3,\\ fW &= z(-y\,U_1 + x\,U_2) = -yz\,U_1 + xz\,U_2,\\ 2V-3W &= (2x+3y)\,U_1 + (2y-3x)\,U_2 + 2z\,U_3. \end{aligned}$$

$\mathbf{p}=(1,2,3)$ için $x(\mathbf{p})=1, y(\mathbf{p})=2, z(\mathbf{p})=3$; koordinat fonksiyonlarını bu sayılarda değerlendiririz:

$$(V+W)(\mathbf{p}) = (-1,3,3)_{\mathbf{p}}, \qquad (fW)(\mathbf{p}) = (-6,3,0)_{\mathbf{p}}, \qquad (2V-3W)(\mathbf{p}) = (8,1,6)_{\mathbf{p}}.$$

Denetim için sonuncusunu doğrudan hesaplayalım: $V(\mathbf{p})=(1,2,3)_{\mathbf{p}}$, $W(\mathbf{p})=(-2,1,0)_{\mathbf{p}}$; $2V(\mathbf{p})-3W(\mathbf{p}) = (2,4,6)_{\mathbf{p}} - (-6,3,0)_{\mathbf{p}} = (8,1,6)_{\mathbf{p}}$. İki yol aynı sonucu verir.
■

2.5 Diferansiyellenebilir vektör alanları

Bir sonraki bölümde fonksiyonların vektör alanları boyunca türevini alacağız; türev hesabına giren her nesnenin diferansiyellenebilir olması gerekir. Peki bir vektör alanının diferansiyellenebilir olması ne demektir? Lemma sayesinde cevap hazırdır: bir vektör alanı üç koordinat fonksiyonundan ibarettir; öyleyse alanın diferansiyellenebilirliğini bu üç fonksiyonun diferansiyellenebilirliğine bağlamak en doğal seçimdir.

Tanım 2.7 (Diferansiyellenebilir Vektör Alanı). Bir $V=\sum v_i U_i$ vektör alanının Öklid koordinat fonksiyonları v_1, v_2, v_3'ün her biri Tanım 1.4 anlamında diferansiyellenebilir ise V'ye **diferansiyellenebilir** (differentiable) vektör alanı denir.

Yani V'nin diferansiyellenebilir olması, üç koordinat fonksiyonunun her birinin her mertebeden bütün kısmi türevlerinin var ve sürekli olması demektir.

> **! Bundan sonra**
>
> Bundan böyle "vektör alanı" sözünden diferansiyellenebilir vektör alanı anlaşılacaktır. Şimdiye kadar verdiğimiz vektör alanı örneklerinin tamamı (koordinat fonksiyonları polinom olan alanlar) bu koşulu sağlar.

Örnek 2.36 (Üstel ve Trigonometrik Katsayılı Alan). $V = e^{x}\,U_1 + \sin(yz)\,U_2 + (x^2+y^2+z^2)\,U_3$ diferansiyellenebilir bir vektör alanı mıdır?

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları e^{x}, $\sin(yz)$ ve $x^2+y^2+z^2$'dir. Üstel, sinüs ve polinom fonksiyonlarının bileşkeleri ve toplamları her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir; üçü de diferansiyellenebilirdir. V diferansiyellenebilir bir vektör alanıdır.
■

Örnek 2.37 (Mutlak Değer Katsayılı Alan). Her $\mathbf{p}$ için $W(\mathbf{p}) = (\,|\,p_1\,|\,, 0, 0)_{\mathbf{p}}$ olsun. W diferansiyellenebilir bir vektör alanı mıdır?

Çözüm.
$W = |\,x\,|\,U_1$ olduğundan $w_1 = |\,x\,|$, $w_2 = w_3 = 0$. Ama $|\,x\,|$ fonksiyonunun x'e göre kısmi türevi $p_1 = 0$ olan noktalarda yoktur: $h \to 0$ için $\big(\,|\,h\,|-0\,\big)/h$ oranı sağdan 1, soldan -1'e gider. Dolayısıyla w_1 diferansiyellenebilir değildir; W, teğet vektör atama anlamında bir vektör alanıdır ama diferansiyellenebilir değildir. Sözleşmemize göre bundan böyle W'ye "vektör alanı" demeyeceğiz.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.38 (Radyal Alanın Diferansiyellenebilirliği). Radyal alan $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}_\mathbf{p}$ diferansiyellenebilir bir vektör alanı mıdır?

> **Çözüm.**
> Radyal alanın vektör kısmı (p_1, p_2, p_3)'tür; koordinat fonksiyonları x, y, z'dir. Bunlar polinomdur, dolayısıyla diferansiyellenebilirdir: $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}_\mathbf{p} = x\,U_1 + y\,U_2 + z\,U_3$ diferansiyellenebilir bir vektör alanıdır.
> ■

Örnek 2.39 (Uzunluğu Uzaklığa Eşit Yatay Oklar). Düzlemde her $\mathbf{p}$ için $Z(\mathbf{p}) = \big(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}, 0\big)_\mathbf{p}$ olsun; yani $Z(\mathbf{p})$, sağa bakan ve uzunluğu noktanın $\mathbf{0}$'a uzaklığı kadar olan oktur. Z diferansiyellenebilir bir vektör alanı mıdır?

> **Çözüm.**
> Z'nin koordinat fonksiyonları $\sqrt{x^2 + y^2}$ ve 0'dır. Birincisi başlangıç noktası dışında her yerde her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir; ama $\mathbf{0} = (0, 0)$ noktasında x'e göre kısmi türevi yoktur, çünkü x ekseni üzerinde $\sqrt{x^2 + 0} = |\,x\,|$ olur ve $|\,x\,|$ fonksiyonunda gördüğümüz $|\,h\,|/h$ oranı (Örnek 2.37) yine karşımıza çıkar. Tek bir noktadaki bu kusur yeter: Z bir vektör alanıdır, ama diferansiyellenebilir bir vektör alanı değildir. Düzlemdeki dönen alan $-y\,U_1 + x\,U_2$ ise polinom katsayılı olduğundan diferansiyellenebilirdir.
> ■

Diferansiyellenebilir alanlarla yaptığımız cebir bizi bu sınıfın dışına çıkarmaz: V ve W diferansiyellenebilir vektör alanları, f diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $V + W$ ve fV de diferansiyellenebilirdir. Çünkü Önerme 2.2 gereği bunların koordinat fonksiyonları $v_i + w_i$ ve $f v_i$'dir; diferansiyellenebilir fonksiyonların toplamı ve çarpımı, toplam ve çarpım kurallarıyla her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olduğundan, yine diferansiyellenebilirdir.

2.6 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (Çatı Vektörleriyle Lineer Birleşim). $\mathbf{v} = (-2, 1, -1)$ ve $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$ olsun. Herhangi bir $\mathbf{p}$ noktasında $3\mathbf{v}_\mathbf{p} - 2\mathbf{w}_\mathbf{p}$ teğet vektörünü $U_1(\mathbf{p}), U_2(\mathbf{p}), U_3(\mathbf{p})$'nin lineer birleşimi olarak yazın.

> **Çözüm.**
> Önce vektör kısmıyla işlem yapalım: $3\mathbf{v} = (-6, 3, -3)$ ve $2\mathbf{w} = (0, 2, 6)$, dolayısıyla $3\mathbf{v} - 2\mathbf{w} = (-6, 1, -9)$. Teğet uzayındaki işlemlerin tanımıyla $3\mathbf{v}_\mathbf{p} - 2\mathbf{w}_\mathbf{p} = (-6, 1, -9)_\mathbf{p}$ ve Sonuç 2.1 ile
>
> $$3\mathbf{v}_\mathbf{p} - 2\mathbf{w}_\mathbf{p} = -6\,U_1(\mathbf{p}) + U_2(\mathbf{p}) - 9\,U_3(\mathbf{p}).$$
>
> Katsayılar $\mathbf{p}$'ye bağlı değildir; $\mathbf{p}$ yalnızca okun nereden çıktığını belirler.
> ■

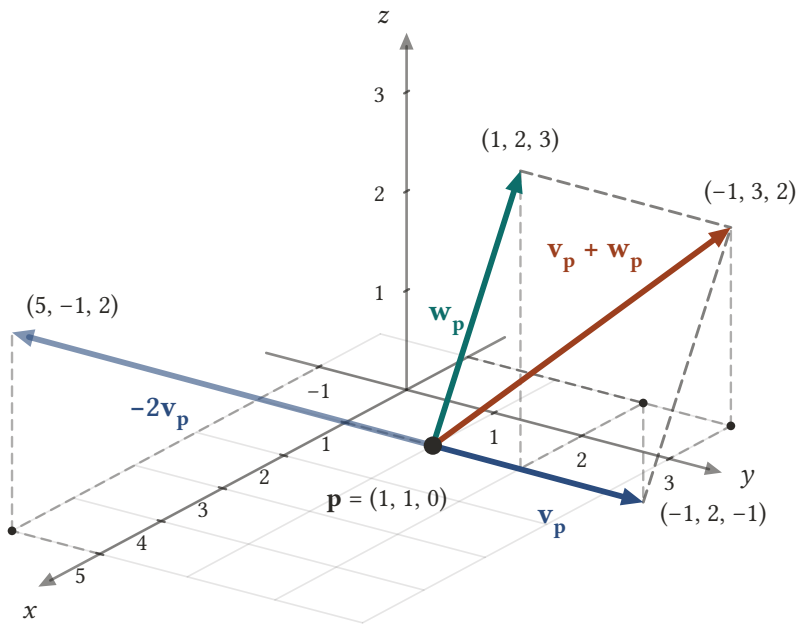
Alıştırma 2.2 (Bir Noktadan Çıkan Dört Okun Çizimi). $\mathbf{v} = (-2, 1, -1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$ ve $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$ olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p}$, $\mathbf{w}_\mathbf{p}$, $-2\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p}$ teğet vektörlerini gösteren ölçekli ve dikkatli bir çizim yapın.

> **Çözüm.**
> Dört okun vektör kısımları $\mathbf{v} = (-2, 1, -1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$, $-2\mathbf{v} = (4, -2, 2)$ ve $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (-2, 2, 2)$'dir. Hepsi $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$'dan çıkar; bitiş noktaları $\mathbf{p}$'ye vektör kısımlarının eklenmesiyle bulunur:
>
teğet vektör	vektör kısmı	bitiş noktası
$\mathbf{v}_\mathbf{p}$	$(-2, 1, -1)$	$(-1, 2, -1)$
$\mathbf{w}_\mathbf{p}$	$(0, 1, 3)$	$(1, 2, 3)$

 CC BY-NC-SA 4.0

teğet vektör	vektör kısmı	bitiş noktası
$-2\mathbf{v_p}$	$(4,-2,2)$	$(5,-1,2)$
$\mathbf{v_p}+\mathbf{w_p}$	$(-2,2,2)$	$(-1,3,2)$

Aşağıdaki şekilde $-2\mathbf{v_p}$'nin $\mathbf{v_p}$ ile ters yönde ve iki kat uzun olduğu, $\mathbf{v_p}+\mathbf{w_p}$'nin ise $\mathbf{v_p}$ ve $\mathbf{w_p}$'nin gerdiği paralelkenarın köşegeni olduğu görülür.



Şekil 2.10: $\mathbf{p}$ = (1, 1, 0) noktasından çıkan dört teğet vektör: $\mathbf{v_p}$ = (−2, 1, −1)$_\mathbf{p}$, $\mathbf{w_p}$ = (0, 1, 3)$_\mathbf{p}$, $-2\mathbf{v_p}$ ve $\mathbf{v_p}$ + $\mathbf{w_p}$. Her okun ucu, $\mathbf{p}$'ye vektör kısmının eklenmesiyle bulunur; kesikli kılavuzlar uç noktaların koordinatlarını okutur. $-2\mathbf{v_p}$, $\mathbf{v_p}$ ile aynı doğru üzerinde ters yönde ve iki kat uzundur; $\mathbf{v_p}$ + $\mathbf{w_p}$ ise $\mathbf{v_p}$ ile $\mathbf{w_p}$'nin gerdiği paralelkenarın köşegenidir.

■

Alıştırma 2.3 (Bir Alan Hesabı). $V = x\,U_1 + y\,U_2$ ve $W = 2x^2\,U_2 - U_3$ olsun. $W - xV$ vektör alanını hesaplayın ve $\mathbf{p} = (-1,0,2)$ noktasındaki değerini bulun.

Çözüm.
Önce $xV = x(x\,U_1 + y\,U_2) = x^2\,U_1 + xy\,U_2$ (Önerme 2.2). Sonra benzer terimleri birleştirerek

$$W - xV = 2x^2\,U_2 - U_3 - x^2\,U_1 - xy\,U_2 = -x^2\,U_1 + (2x^2 - xy)\,U_2 - U_3.$$

$\mathbf{p} = (-1,0,2)$ için $x(\mathbf{p}) = -1$, $y(\mathbf{p}) = 0$: koordinat fonksiyonlarının değerleri $-(-1)^2 = -1$, $2\cdot 1 - (-1)\cdot 0 = 2$ ve -1'dir. Dolayısıyla

$$(W - xV)(\mathbf{p}) = -U_1(\mathbf{p}) + 2\,U_2(\mathbf{p}) - U_3(\mathbf{p}) = (-1,2,-1)_\mathbf{p},$$

yani $(-1,0,2)$'den $(-2,2,1)$'e giden ok.
■

Alıştırma 2.4 (Bir Denklemden Standart Biçim). V vektör alanı $2z^2\,U_1 = 7V + xy\,U_3$ eşitliğini sağlasın. V'yi $\sum v_i U_i$ standart biçiminde yazın.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Denklemi V için çözelim: $7V = 2z^2\,U_1 - xy\,U_3$, dolayısıyla

$$V = \frac{2z^2}{7}\,U_1 - \frac{xy}{7}\,U_3;$$

yani $v_1 = 2z^2/7$, $v_2 = 0$, $v_3 = -xy/7$. Bölme, koordinat fonksiyonlarının sabit $1/7$ ile çarpılmasıdır. ■

Alıştırma 2.5 (Değerleriyle Verilen Bir Alan). Her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p}) = (p_1, p_3 - p_1, 0)_{\mathbf{p}}$ olsun. V'yi $\sum v_i U_i$ standart biçiminde yazın.

Çözüm.
$v_1(\mathbf{p}) = p_1$, $v_2(\mathbf{p}) = p_3 - p_1$, $v_3(\mathbf{p}) = 0$; koordinat fonksiyonlarıyla $v_1 = x$, $v_2 = z - x$, $v_3 = 0$. Dolayısıyla $V = x\,U_1 + (z - x)\,U_2$. ■

Alıştırma 2.6 (Parantezleri Açarak Standart Biçim). $V = 2(x\,U_1 + y\,U_2) - x(U_1 - y^2\,U_3)$ vektör alanını $\sum v_i U_i$ standart biçiminde yazın.

Çözüm.
Dağıtıp benzer terimleri birleştirelim:

$$V = 2x\,U_1 + 2y\,U_2 - x\,U_1 + xy^2\,U_3 = x\,U_1 + 2y\,U_2 + xy^2\,U_3.$$

■

Alıştırma 2.7 (Bitiş Noktası Noktaya Bağlı Oklar). Her $\mathbf{p}$ noktasında $V(\mathbf{p})$, (p_1, p_2, p_3) noktasından $(1 + p_1, p_2 p_3, p_2)$ noktasına giden vektör olsun. V'yi $\sum v_i U_i$ standart biçiminde yazın.

Çözüm.
Vektör kısmı, bitiş noktasından $\mathbf{p}$'nin çıkarılmasıyla bulunur: $(1 + p_1 - p_1, p_2 p_3 - p_2, p_2 - p_3) = (1, p_2 p_3 - p_2, p_2 - p_3)$. Dolayısıyla

$$V = U_1 + (yz - y)\,U_2 + (y - z)\,U_3.$$

■

Alıştırma 2.8 (Başlangıç Noktasına Doğru Bakan Alan). Her $\mathbf{p}$ noktasında $V(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}$'den başlangıç noktası $\mathbf{0}$'a giden vektör olsun. V'yi $\sum v_i U_i$ standart biçiminde yazın.

Çözüm.
$\mathbf{p}$'den başlangıç noktası $\mathbf{0}$'a giden vektörün vektör kısmı $\mathbf{0} - \mathbf{p} = (-p_1, -p_2, -p_3)$'tür. Dolayısıyla $V = -x\,U_1 - y\,U_2 - z\,U_3$; bu, radyal alanın -1 katıdır ve her ok $\mathbf{0}$'a doğru bakar. ■

Alıştırma 2.9 (Yalnızca İki Çatı Alanı). $V = y^2\,U_1 - x^2\,U_3$ ve $W = x^2\,U_1 - z\,U_2$ olsun. $fV + gW$ vektör alanının yalnızca U_2 ve U_3 cinsinden yazılabileceği f ve g fonksiyonlarını bulun.

Çözüm.
Önerme 2.2 ile

$$fV + gW = (fy^2 + gx^2)\,U_1 - gz\,U_2 - fx^2\,U_3.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Alanın yalnızca U_2 ve U_3 cinsinden yazılabilmesi, koordinat fonksiyonlarının tekliği gereği, U_1'in katsayısının sıfır fonksiyonu olması demektir: her noktada $fy^2 + gx^2 = 0$. Bu, $f = x^2$ ve $g = -y^2$ seçimiyle sağlanır, çünkü $x^2y^2 - y^2x^2 = 0$. Bu seçimle

$$fV + gW = y^2 z\, U_2 - x^4\, U_3.$$

Daha genel olarak, herhangi bir h fonksiyonu için $f = x^2 h$ ve $g = -y^2 h$ da işe yarar; $h = 0$ ise sıfır alanı elde edilir. $f = g = 0$ da bir çözümdür, ama ilginç olan sıfırdan farklı çözümlerdir.
■

Alıştırma 2.10 (Her Noktada Lineer Bağımsız Üç Alan). $V_1 = U_1 - x\,U_3$, $V_2 = U_2$ ve $V_3 = x\,U_1 + U_3$ olsun. $V_1(\mathbf{p}), V_2(\mathbf{p}), V_3(\mathbf{p})$ teğet vektörlerinin $\mathbb{R}^3$'ün her noktasında lineer bağımsız olduğunu gösterin.

Çözüm.
$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ noktasında koordinat fonksiyonlarını değerlendirerek

$$V_1(\mathbf{p}) = (1, 0, -p_1)_{\mathbf{p}}, \qquad V_2(\mathbf{p}) = (0, 1, 0)_{\mathbf{p}}, \qquad V_3(\mathbf{p}) = (p_1, 0, 1)_{\mathbf{p}}.$$

$a\,V_1(\mathbf{p}) + b\,V_2(\mathbf{p}) + c\,V_3(\mathbf{p}) = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$ olsun. Sol taraf $(a + cp_1,\, b,\, -ap_1 + c)_{\mathbf{p}}$'dir; eşitlik kuralı gereği üç bileşen de sıfırdır:

$$a + cp_1 = 0, \qquad b = 0, \qquad -ap_1 + c = 0.$$

Birinci denklemden $a = -cp_1$; bunu üçüncüde yerine koyunca $cp_1^2 + c = c(1 + p_1^2) = 0$ olur. $1 + p_1^2 \geq 1 > 0$ olduğundan $c = 0$, dolayısıyla $a = 0$; ikinci denklemden $b = 0$. Bütün katsayılar sıfıra zorlandığından üç teğet vektör lineer bağımsızdır. Bu, $\mathbf{p}$'nin ne olduğuna bağlı olmadan geçerlidir. Üç boyutlu $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'te üç lineer bağımsız vektör bir taban oluşturur; dolayısıyla her noktada her teğet vektör bunların birleşimi olarak yazılabilir.
■

Alıştırma 2.11 (Radyal Alanı Yeni Bir Üçlüyle Yazmak). $V_1 = U_1 - x\,U_3$, $V_2 = U_2$ ve $V_3 = x\,U_1 + U_3$ olsun. $x\,U_1 + y\,U_2 + z\,U_3$ vektör alanını V_1, V_2, V_3'ün lineer birleşimi olarak yazın.

Çözüm.
$x\,U_1 + y\,U_2 + z\,U_3 = f_1 V_1 + f_2 V_2 + f_3 V_3$ olacak f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarını arıyoruz. Sağ tarafı standart biçime getirelim:

$$f_1 V_1 + f_2 V_2 + f_3 V_3 = (f_1 + x f_3)\,U_1 + f_2\,U_2 + (-x f_1 + f_3)\,U_3.$$

Koordinat fonksiyonlarının tekliği gereği katsayılar eşleşmelidir:

$$f_1 + x f_3 = x, \qquad f_2 = y, \qquad -x f_1 + f_3 = z.$$

Birinci denklemden $f_1 = x - x f_3$. Üçüncüde yerine koyalım: $-x(x - x f_3) + f_3 = z$, yani $-x^2 + x^2 f_3 + f_3 = z$, yani $(1 + x^2) f_3 = z + x^2$. $1 + x^2$ hiçbir noktada sıfır olmadığından

$$f_3 = \frac{x^2 + z}{1 + x^2}, \qquad f_1 = x - \frac{x(x^2 + z)}{1 + x^2} = \frac{x(1 + x^2) - x(x^2 + z)}{1 + x^2} = \frac{x(1 - z)}{1 + x^2}, \qquad f_2 = y.$$

Denetleyelim: $f_1 + x f_3 = \frac{x(1-z) + x(x^2+z)}{1+x^2} = \frac{x + x^3}{1+x^2} = x$ ve $-x f_1 + f_3 = \frac{-x^2(1-z) + x^2 + z}{1+x^2} = \frac{x^2 z + z}{1+x^2} = z$. Dolayısıyla

$$x\,U_1 + y\,U_2 + z\,U_3 = \frac{x(1 - z)}{1 + x^2}\,V_1 + y\,V_2 + \frac{x^2 + z}{1 + x^2}\,V_3.$$

Paydalar hiçbir noktada sıfırlanmadığından f_1, f_2, f_3 bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 2.12 (Eşit mi, Paralel mi, Aynı Demette mi?). Aşağıdaki dört oku $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ biçiminde yazın; hangi teğet uzayına ait olduklarını söyleyin; eşit çiftleri, paralel çiftleri ve aynı teğet uzayında bulunan çiftleri belirleyin.

- **A:** $(1,2,3)$'ten $(2,4,6)$'ya giden ok.
- **B:** $(0,0,0)$'dan $(1,2,3)$'e giden ok.
- **C:** $(1,2,3)$'ten $(3,6,9)$'a giden ok.
- **D:** $(2,1,0)$'dan $(3,3,3)$'e giden ok.

Çözüm.
Her okun uygulama noktası çıktığı noktadır; vektör kısmı ise bitiş noktasından çıkış noktası çıkarılarak bulunur:

ok	uygulama noktası	vektör kısmı	teğet vektör	teğet uzayı
A	$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3)_{(1,2,3)}$	$T_{(1,2,3)}(\mathbb{R}^3)$
B	$(0,0,0)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3)_{\mathbf{0}}$	$T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^3)$
C	$(1,2,3)$	$(2,4,6)$	$(2,4,6)_{(1,2,3)}$	$T_{(1,2,3)}(\mathbb{R}^3)$
D	$(2,1,0)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3)_{(2,1,0)}$	$T_{(2,1,0)}(\mathbb{R}^3)$

Eşit çiftler: hiçbiri. Eşitlik hem vektör kısmının hem uygulama noktasının aynı olmasını ister; A, B, D'nin uygulama noktaları birbirinden farklı, C'nin vektör kısmı ise A'nınkinden farklıdır.
Paralel çiftler: A–B, A–D ve B–D; üçünün de vektör kısmı $(1,2,3)$'tür ve uygulama noktaları farklıdır. C'nin vektör kısmı $(2,4,6)$ hiçbirininkiyle aynı olmadığından C hiçbir okla paralel değildir.
Aynı teğet uzayında bulunan çift: yalnızca A ile C. Bu ikisi toplanabilir ve skalerle çarpılabilir; gerçekten $C = 2A$, çünkü $(2,4,6)_{(1,2,3)} = 2\,(1,2,3)_{(1,2,3)}$. A ile B ise, aynı vektör kısmına sahip olsalar da, farklı demetlerde bulunur ve toplanamazlar.
■

Alıştırma 2.13 (Uzayda Dönen Alanın Üç Değeri). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ olsun. V'nin $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ve $(2,3,5)$ noktalarındaki değerlerini bulun.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $v_1 = -y$, $v_2 = x$, $v_3 = 0$'dır; yani her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, 0)_{\mathbf{p}}$. Koordinat fonksiyonlarını verilen noktalarda değerlendirirsek $V(1,0,0) = (0,1,0)_{(1,0,0)}$, $V(0,1,0) = (-1,0,0)_{(0,1,0)}$ ve $V(2,3,5) = (-3,2,0)_{(2,3,5)}$ bulunur. Oklar her zaman yataydır ($v_3 = 0$) ve z ekseni etrafında döner.
■

Alıştırma 2.14 (Dönen Alanın Sıfır Olduğu Noktalar). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ olsun. $V(\mathbf{p}) = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$ olan bütün $\mathbf{p}$ noktalarını belirleyin.

Çözüm.
$V(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, 0)_{\mathbf{p}}$'nin sıfır olması için $-p_2 = 0$ ve $p_1 = 0$ gerekir; p_3 serbesttir. Yani V tam olarak z ekseni üzerindeki noktalarda, $\mathbf{p} = (0,0,p_3)$, sıfırdır. Dönme ekseni üzerinde hız yoktur.
■

Alıştırma 2.15 (Dönen Alanın Katı Olarak Bir Çatı Alanı). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ olsun. $fV = U_2$ olacak bir f fonksiyonu var mıdır?

Çözüm.
$fV = -yf\,U_1 + xf\,U_2$. Bunun $U_2 = 0\cdot U_1 + 1\cdot U_2 + 0\cdot U_3$ olması için koordinat fonksiyonlarının tekliği gereği her noktada $-yf = 0$ ve $xf = 1$ olmalıdır. Ama $\mathbf{p} = (0,0,0)$ noktasında ikinci koşul $0\cdot$

$f(\mathbf{0}) = 1$ der; bu olanaksızdır. Böyle bir f yoktur. Daha genel bir gözlem: V bir noktada sıfırsa fV de o noktada sıfırdır; U_2 ise hiçbir noktada sıfır değildir.
■

Alıştırma 2.16 (Dönen Alanı Uzatan Fonksiyon). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ olsun. $gV = -y(x^2+y^2)\,U_1 + x(x^2+y^2)\,U_2$ olacak bir g fonksiyonu bulun.

Çözüm.
$gV = -yg\,U_1 + xg\,U_2$ ile istenen alanın koordinat fonksiyonlarını eşleştirelim: $-yg = -y(x^2+y^2)$ ve $xg = x(x^2+y^2)$. $g = x^2+y^2$ her iki eşitliği her noktada sağlar. Dolayısıyla $g = x^2+y^2$ aranan fonksiyondur; gV, dönen alanın z eksenine uzaklığın karesiyle uzatılmış hâlidir.
■

Alıştırma 2.17 (Üstel Bileşenli Bir Kural). Her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p}) = (p_1^2,\, e^{p_2},\, p_1p_3)_{\mathbf{p}}$ kuralı $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı tanımlar mı? Gerekçeleyin.

Çözüm.
Her $\mathbf{p}$'ye $\mathbf{p}$'de uygulanan bir teğet vektör karşılık gelir; bir vektör alanıdır ve standart biçimi $V = x^2\,U_1 + e^y\,U_2 + xz\,U_3$'tür. Koordinat fonksiyonları polinom ve üstel fonksiyonlardır, her mertebeden sürekli kısmi türevleri vardır. Diferansiyellenebilir bir vektör alanıdır.
■

Alıştırma 2.18 (Mutlak Değer İçeren Bir Alan). $W = |\,x\,|\,U_1 + z\,U_3$ kuralı $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı tanımlar mı? Gerekçeleyin.

Çözüm.
Bir vektör alanıdır, ama $w_1 = |\,x\,|$ fonksiyonu $p_1 = 0$ olan noktalarda x'e göre kısmi türeve sahip değildir (Örnek 2.37). Diferansiyellenebilir değildir.
■

Alıştırma 2.19 (Düzleme Dik İnen Oklar). Her $\mathbf{p}$ için $Z(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}$'den $(p_1, p_2, 0)$ noktasına giden ok olsun. Bu kural $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı tanımlar mı? Gerekçeleyin.

Çözüm.
Vektör kısmı $(p_1,p_2,0) - (p_1,p_2,p_3) = (0,0,-p_3)$'tür; $Z = -z\,U_3$. Koordinat fonksiyonları $0, 0, -z$ diferansiyellenebilirdir. Diferansiyellenebilir bir vektör alanıdır; her ok, noktadan xy düzlemine dik olarak, noktanın düzlem üzerindeki izdüşümüne kadar uzanır: $p_3 > 0$ ise aşağı, $p_3 < 0$ ise yukarı bakar, düzlem üzerindeki noktalarda sıfırdır.
■

Alıştırma 2.20 (İki Katı Noktada Uygulanan Oklar). $\mathbf{p} \mapsto (1,0,0)_{2\mathbf{p}}$ kuralı $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı tanımlar mı? Gerekçeleyin.

Çözüm.
$\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ için karşılık gelen teğet vektör $2\mathbf{p}$'de uygulanmıştır, $\mathbf{p}$'de değil. Bu kural bir vektör alanı bile değildir; diferansiyellenebilirlik sorusu sorulamaz.
■

Bu bölümde oku bir nokta çiftine, bir noktadan çıkan okları bir vektör uzayına, uzaya yayılmış okları üç fonksiyona indirgedik; bir sonraki adım, bir fonksiyonun bir ok yönünde nasıl değiştiğini ölçmektir: Yönlü Türevler.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Yönlü Türevler

Önceki bölümde (Teğet Vektörler) bir $\mathbf{p}$ noktasına bağlı $\mathbf{v_p}$ teğet vektörünü, bu vektörlerin oluşturduğu teğet uzayını ve her noktaya bir teğet vektör atayan vektör alanlarını tanımladık. Bu nesneler şimdilik yalnızca durdukları yerde duran oklardır. Bu bölümde onları çalıştırıyoruz: bir teğet vektör, bir fonksiyonun türevini almanın bir yolu olacak.

Fikir tek değişkenli hesaptan tanıdıktır. Sayı doğrusu üzerinde bir f fonksiyonunun a noktasındaki türevi, a'dan ayrılırken f'nin ne hızla değiştiğini söyler. Öklid 3-uzayında ise bir $\mathbf{p}$ noktasından ayrılmanın sonsuz sayıda yönü vardır; "f ne hızla değişiyor?" sorusu ancak bir yön seçildikten sonra anlamlıdır. Bir teğet vektör tam olarak bu seçimi taşır: $\mathbf{p}$ nerede durduğumuzu, $\mathbf{v}$ hangi yöne ve hangi hızla gideceğimizi söyler. Sorduğumuz soru şudur: $\mathbf{p}$'de duran biri $\mathbf{v}$ yönünde yola çıkarsa f'nin değeri ilk anda ne hızla değişir?

Bölümün planı şöyledir. Önce bu sayıyı, $\mathbf{p}$'den geçen bir doğru boyunca türev alarak tanımlayacağız. Sonra onu f'nin kısmi türevleriyle hesaplayan formülü ispatlayacağız. Ardından her türev işleminin taşıdığı iki özelliği, lineerliği ve Leibniz kuralını, ispatlayacağız. Son olarak tek bir teğet vektör yerine bir vektör alanı alıp f'nin bu alan boyunca türevi olan $V[f]$ fonksiyonunu kuracak ve özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1 Bir Doğru Boyunca Türev

Bir f fonksiyonunun bir $\mathbf{p}$ noktasındaki değişimini ölçmek istiyoruz. Bir teğet vektör $\mathbf{v_p}$ (Tanım 2.1) bize hem noktayı hem yönü verir. $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde gitmenin en basit yolu bir doğru üzerinde yürümektir. Her t gerçel sayısı için

$$\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$$

noktasını düşünelim. $t = 0$ anında $\mathbf{p}$'deyiz, $t = 1$ anında $\mathbf{p} + \mathbf{v}$'deyiz; t büyüdükçe $\mathbf{v}$ yönünde, t negatif olduğunda ters yönde ilerleriz. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ise $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ eşlemesi, $\mathbf{p}$'den geçen ve $\mathbf{v}$ doğrultusundaki **doğrudur** (straight line); $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ise her t için $\mathbf{p}$'de kalırız ve aşağıda tanımlanacak türev her f için 0 çıkar. Eğriler konusunda bu doğru, en basit eğri örneği olarak yeniden karşımıza çıkacak.

Şimdi f'yi bu doğru boyunca okuyalım: $t \mapsto f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$. Bu, gerçel sayılardan gerçel sayılara giden sıradan bir tek değişkenli fonksiyondur. f diferansiyellenebilir (Tanım 1.4) ve doğrunun her koordinatı t'nin en çok birinci dereceden bir polinomu $(p_i + tv_i)$ olduğundan, zincir kuralı gereği bu bileşke de her mertebeden türevlenebilir. Tek değişkenli fonksiyonlar için kısaca "türevlenebilir" diyeceğiz; kastedilen, uzaydaki fonksiyonlar için kullandığımız "diferansiyellenebilir" ile aynı şeydir, yani her mertebeden türevin var olmasıdır. Bu bileşkenin $t = 0$'daki türevi, $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde yola çıkıldığı andaki değişim hızıdır. Tanım tam olarak budur.

Tanım 3.1 (Bir Teğet Vektöre Göre Türev). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir gerçel değerli fonksiyon ve $\mathbf{v_p}$, $\mathbb{R}^3$'e bir teğet vektör olsun.

$$\mathbf{v_p}[f] = \frac{d}{dt}\left(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \right)|_{t=0}$$

sayısına ***f*'nin $\mathbf{v_p}$'ye göre türevi** (derivative of f with respect to $\mathbf{v_p}$) ya da **yönlü türev** (directional derivative) denir.

Yani $\mathbf{v_p}[f]$, "$\mathbf{p}$'de dururken $\mathbf{v}$ yönünde harekete geçersem f ilk anda ne hızla değişir?" sorusunun cevabı olan tek bir sayıdır.

Üç şeye dikkat edelim. Birincisi, $\mathbf{v_p}[f]$ bir sayıdır, fonksiyon değil: $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ ve f verildiğinde tek bir gerçel sayı elde ederiz. İkincisi, köşeli parantez yeni bir gösterimdir: $\mathbf{v_p}$, f fonksiyonuna uygulanır ve bir sayı üretir. Böylece bir teğet vektörü, fonksiyonlara uygulanan bir işlem olarak görmeye başlıyoruz. Üçüncüsü, tanımda $\mathbf{v}$'nin uzunluğu hakkında hiçbir koşul yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Birim vektör koşulu neden yok?

Temel hesap derslerinde yönlü türev, $\mathbf{v}$'nin bir **birim vektör** (unit vector) olması koşuluyla tanımlanır; böylece sayı yalnızca yöne bağlı olur. Burada bu koşulu koymuyoruz: $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ her teğet vektör için tanımlıdır ve $\mathbf{v}$'nin uzunluğuna da bağlıdır (aşağıdaki örneklerde görülecek). Buna rağmen ona yönlü türev demeyi sürdüreceğiz. Birim vektörlü sürüm, bizim tanımımızın özel hâlidir.

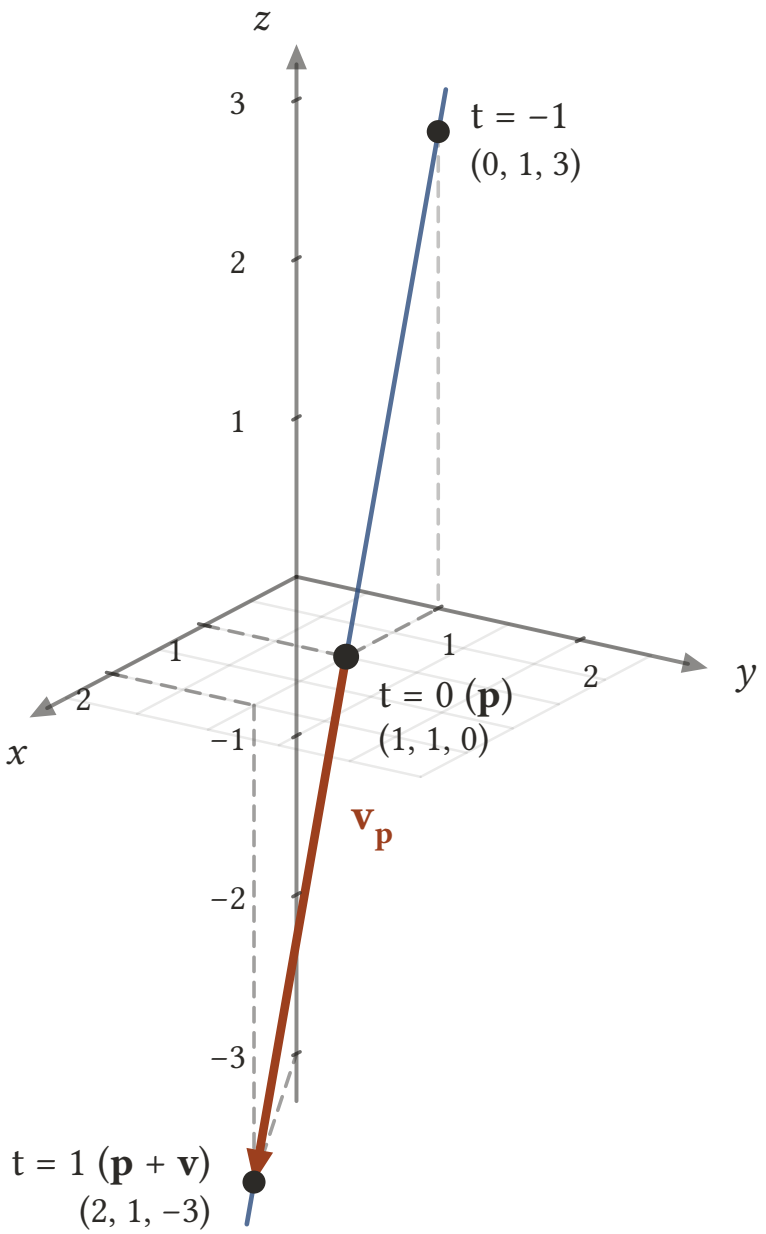
Örnek 3.1 (Tanımdan Hesap). $f = x^2yz$, $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$ ve $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$ olsun; $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını hesaplayalım. Burada $f = x^2yz$ yazımı, x, y, z doğal koordinat fonksiyonları (Tanım 1.3) olmak üzere, her $\mathbf{q}$ noktası için $f(\mathbf{q}) = q_1^2 q_2 q_3$ demektir.

Çözüm.
Önce doğruyu yazalım:

$$\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1, 1, 0) + t(1, 0, -3) = (1 + t, 1, -3t).$$

Bu, $\mathbf{p}$'den geçen ve $\mathbf{v}$ doğrultusundaki doğrudur; aşağıdaki şekilde $t = -1$, $t = 0$ ve $t = 1$ anlarındaki noktalarıyla çizilmiştir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.1: $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$ noktasından geçen ve $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$ doğrultusundaki $t \mapsto (1 + t, 1, -3t)$ doğrusu. $t = -1, 0, 1$ anlarında doğru $(0, 1, 3)$, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{v} = (2, 1, -3)$ noktalarından geçer; $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ oku $\mathbf{p}$'den $\mathbf{p} + \mathbf{v}$'ye uzanır. Yönlü türev $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ yalnızca f'nin bu doğru üzerindeki değerlerine bağlıdır: $t = 0$ anındaki değişim hızıdır.

f'yi bu doğru üzerinde değerlendirelim. Birinci koordinatın karesi, ikinci koordinat ve üçüncü koordinat çarpılır:

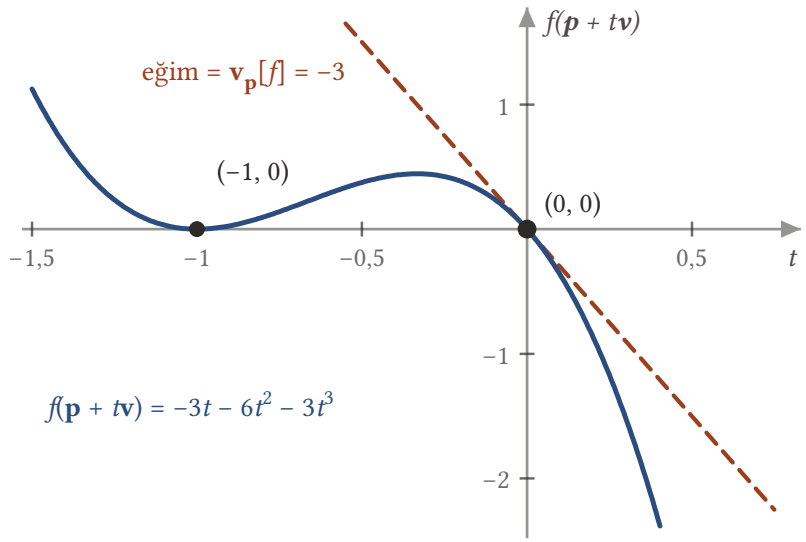
$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1 + t)^2 \cdot 1 \cdot (-3t) = -3t(1 + 2t + t^2) = -3t - 6t^2 - 3t^3.$$

Bu, t'nin bir polinomudur; türevi

$$\frac{d}{dt}\left(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \right) = -3 - 12t - 9t^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $t = 0$ koyunca $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = -3$ bulunur.
Sayının işareti anlamlıdır: $f(\mathbf{p}) = 0$'dır ve $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde harekete geçildiğinde f ilk anda azalır; küçük $t > 0$ için $f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \approx -3t < 0$ olur. Aşağıdaki şekil, $t \mapsto f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ fonksiyonunun grafiğini ve $t = 0$'daki eğimi -3 olan teğetini gösterir.



Şekil 3.2: $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu boyunca f'nin değeri: yatay eksen t, düşey eksen $f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = -3t - 6t^2 - 3t^3$. Grafik $(0, 0)$ noktasından geçer ve oradaki teğetinin eğimi $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = -3$'tür; $t > 0$ olur olmaz eğri yatay eksenin altına iner, yani $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde yola çıkınca f azalır. $t = -1$'de değer yine 0'dır: doğrunun o noktası $(0, 1, 3)$'tür ve birinci koordinatı sıfır olduğundan f orada sıfırlanır.

■

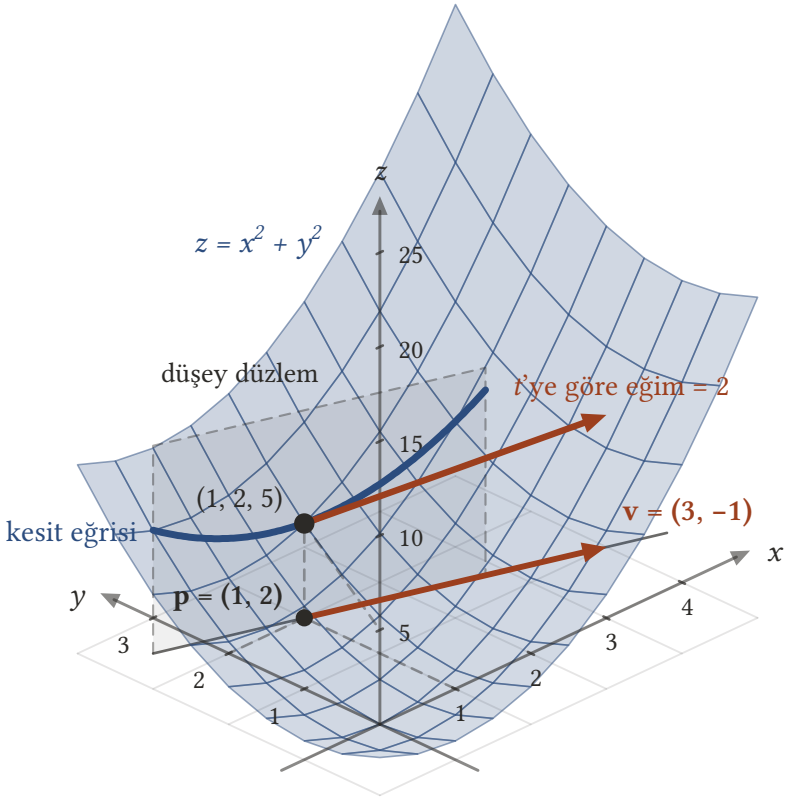
Örnek 3.2 (Düzlemde Aynı Tanım). Tanım iki boyutta da aynen çalışır: Öklid düzlemi $\mathbb{R}^2$'de $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ alınır, doğru yine $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$'dir. $f = x^2 + y^2$, $\mathbf{p} = (1, 2)$ ve $\mathbf{v} = (3, -1)$ için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını bulalım.

Çözüm.
Doğru $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + 3t, 2 - t)$ olur. Bunu f'ye koyalım:

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1 + 3t)^2 + (2 - t)^2 = (1 + 6t + 9t^2) + (4 - 4t + t^2) = 5 + 2t + 10t^2.$$

Türev $2 + 20t$, $t = 0$'da 2; dolayısıyla $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 2$.
Bunu geometrik olarak görelim. $z = x^2 + y^2$ yüzeyi f'nin grafiğidir. Düzlemde $\mathbf{p}$'den geçen $\mathbf{v}$ doğrultusundaki doğrunun üzerinde yükselen düşey düzlem, bu yüzeyi bir eğri boyunca keser; $t \mapsto f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ tam olarak bu kesit eğrisinin yüksekliğidir. $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 2$ sayısı, kesit eğrisinin $\mathbf{p}$ üzerindeki $(1, 2, 5)$ noktasında t'ye göre eğimidir. Aşağıdaki şekil yüzeyi, kesit eğrisini ve $(1, 2, 5)$ noktasındaki teğeti gösterir; şekildeki eğim yatay uzaklığa göre değil, t'ye göre ölçülmüştür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.3: $z = x^2 + y^2$ yüzeyi, düzlemde $\mathbf{p} = (1, 2)$'den geçen $\mathbf{v} = (3, -1)$ doğrultusundaki doğru ve bu doğru üzerinde yükselen düşey düzlem. Düzlem yüzeyi kesit eğrisi $t \mapsto (1 + 3t,\ 2 - t,\ 5 + 2t + 10t^2)$ boyunca keser; $(1, 2, 5)$ noktasındaki turuncu ok bu eğrinin teğetidir: yatay bileşeni $\mathbf{v}$, düşey bileşeni 2'dir, yani t bir birim artarken teğet 2 birim yükselir ve $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 2$ olur. Eğim yatay uzaklığa göre değil t'ye göre ölçülür; z ekseni okunaklılık için 1/5 ölçekte çizilmiştir.

■

Örnek 3.3 (Uygulama Noktası Önemlidir). $f = x^2yz$ için Örnek 3.1'taki vektörü koruyup noktayı değiştirelim: aynı $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$, farklı nokta $\mathbf{q} = (1, 1, 1)$. $\mathbf{v}_\mathbf{q}[f]$ sayısını hesaplayalım.

Çözüm.
$\mathbf{q} + t\mathbf{v} = (1 + t, 1, 1 - 3t)$ olduğundan

$$f(\mathbf{q} + t\mathbf{v}) = (1 + t)^2(1 - 3t) = (1 + 2t + t^2)(1 - 3t) = 1 - t - 5t^2 - 3t^3.$$

Türev $-1 - 10t - 9t^2$, $t = 0$'da -1: $\mathbf{v}_\mathbf{q}[f] = -1$. Oysa Örnek 3.1'ta $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = -3$ bulmuştuk. Aynı vektör kısmı, farklı uygulama noktası, farklı sayı. Tanımın $\mathbf{v}$ yerine $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ teğet vektörünü kullanmasının nedeni budur: uygulama noktası cevabın parçasıdır.
■

Örnek 3.4 (Vektörün Uzunluğu Önemlidir). $f = x^2yz$ için Örnek 3.1'taki noktayı koruyup vektörü büyütelim: aynı nokta $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$, iki katı vektör $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} = (2, 0, -6)$. Orada $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$ için $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = -3$ bulunmuştu. $\mathbf{w}_\mathbf{p}[f]$ sayısını hesaplayalım.

Çözüm.
$\mathbf{p} + t\mathbf{w} = (1 + 2t, 1, -6t)$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(\mathbf{p}+t\mathbf{w}) = (1+2t)^2(-6t) = -6t(1+4t+4t^2) = -6t-24t^2-24t^3.$$

Türev $t=0$'da -6: $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}[f] = -6 = 2\,\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$. Vektörü iki katına çıkarmak türevi iki katına çıkardı. Nedeni şudur: $t \mapsto \mathbf{p}+t\mathbf{w}$ aynı doğrudur ama iki kat hızla katedilir; f de zamana göre iki kat hızlı değişir. Temel hesapta birim vektör istenmesinin sebebi bu bağımlılığı ortadan kaldırmaktır.
■

Örnek 3.5 (Sabit Fonksiyonun Yönlü Türevi). Sabit fonksiyon $g=5$ ve herhangi bir $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[g]$ sayısını bulalım.

Çözüm.
$g=5$ sabit fonksiyonu için $g(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) = 5$ her t için aynıdır; sabitin türevi sıfır olduğundan her teğet vektör için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[g] = 0$. Değişmeyen bir fonksiyonun hiçbir yönde değişim hızı yoktur.
■

3.2 Kısmi Türevlerle Hesaplama

Tanımdan hesap yapmak her seferinde dört adım ister: doğruyu yaz, f'ye koy, türev al, $t=0$ koy. Aynı noktada başka bir $\mathbf{v}$ için hepsi baştan yapılır. Oysa f'nin $\mathbf{p}$'den ayrılırken ilk anda nasıl değiştiğine ilişkin bütün bilgi üç sayıda toplanmıştır: $\mathbf{p}$'deki üç kısmi türev. Aşağıdaki lemma, $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısının bu üç sayının v_1, v_2, v_3 ağırlıklarıyla alınmış toplamı olduğunu söyler.

Lemma 3.1 (Yönlü Türevin Kısmi Türevlerle Hesabı). *$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (v_1,v_2,v_3)_{\mathbf{p}}$, $\mathbb{R}^3$'e bir teğet vektör ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise*

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

Burada $\partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$, $\partial f/\partial x_i$ kısmi türev fonksiyonunun $\mathbf{p}$ noktasındaki değeridir.

İspat.
$\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3)$ yazalım. Doğrunun t anındaki noktası

$$\mathbf{p}+t\mathbf{v} = (p_1+tv_1,\, p_2+tv_2,\, p_3+tv_3)$$

olduğundan, türevini alacağımız tek değişkenli fonksiyon

$$F(t) = f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) = f(p_1+tv_1,\, p_2+tv_2,\, p_3+tv_3)$$

biçimindedir. Bu, f ile üç tek değişkenli fonksiyonun bileşkesidir: $i=1,2,3$ için $\alpha_i(t) = p_i + tv_i$ koyarsak $F(t) = f\,(\,\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)\,)$ olur. Burada $\alpha_i(t)$, doğrunun t anındaki noktasının i-inci koordinatıdır: $\alpha_i(t) = x_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$. Ona $x_i(t)$ demiyoruz; x_i harfi doğal koordinat fonksiyonuna ayrılmıştır ve o, t sayısına değil $\mathbb{R}^3$'ün noktalarına uygulanır. Çok değişkenli zincir kuralı şunu söyler: f diferansiyellenebilir ve $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ türevlenebilir ise F türevlenebilirdir ve

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(\,\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)\,)\,\alpha_i'(t).$$

Şimdi $\alpha_i'(t)$ türevlerini hesaplayalım: p_i sabit olduğundan türevi 0, tv_i teriminin türevi v_i'dir; dolayısıyla $\alpha_i'(t) = v_i$ her t için aynıdır. Ayrıca $(\,\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)\,) = \mathbf{p}+t\mathbf{v}$'dir. Yerine koyunca

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$$

bulunur. $t=0$ için $\mathbf{p}+0\cdot\mathbf{v} = \mathbf{p}$ olduğundan $F'(0) = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$; tanım gereği $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = F'(0)$ olduğundan ispat tamamlanır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

İspatın özü: doğru boyunca her koordinat sabit v_i hızıyla değişir; zincir kuralı bu hızları f'nin kısmi türevleriyle tartıp toplar.

> **Gradyanla bağlantı**
>
> Lemmadaki toplam, temel hesaptan tanıdık bir iç çarpımdır. $\nabla f(\mathbf{p}) = \big(\, \partial f/\partial x(\mathbf{p}), \partial f/\partial y(\mathbf{p}), \partial f/\partial z(\mathbf{p}) \,\big)$ **gradyan** (gradient) vektörü ise $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$'dir. $\mathbf{v}$ birim vektör olduğunda bu, temel hesabın yönlü türevidir; lemma, tanımımızın o tanımla uyuştuğunu ve onu her uzunluktaki vektöre genişlettiğini gösterir.
> Gradyanın sıfır olmadığı bir noktada, sabit uzunluktaki $\mathbf{v}$ vektörleri arasında en büyük türevi gradyan yönündeki verir; çünkü iç çarpım $\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$, iki vektör arasındaki açının kosinüsüyle orantılıdır ve kosinüs açı sıfırken en büyüktür. Bunu Alıştırma 3.16'de sayılarla göreceğiz.

Örnek 3.6 (Aynı Örnek, Lemma ile). Örnek 3.1'taki $f = x^2yz$, $\mathbf{p} = (1,1,0)$, $\mathbf{v} = (1,0,-3)$ verisi için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını Lemma 3.1 ile yeniden hesaplayalım; sonra aynı noktada $\mathbf{w} = (0,2,1)$ ve $\mathbf{u} = (4,-5,2)$ için de bulalım.

Çözüm.
Kısmi türevler fonksiyon olarak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y$$

olur. $\mathbf{p} = (1,1,0)$ noktasında değerleri, sırasıyla, $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$ ve $1 \cdot 1 = 1$'dir. Lemma ile

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = -3;$$

tanımdan bulduğumuz sayıyla aynıdır.
Lemmanın gücü burada görülür: $\mathbf{p}$'deki üç kısmi türev bir kez hesaplandıktan sonra aynı noktadaki her teğet vektör için cevap tek satırdır. $\mathbf{w} = (0,2,1)$ için $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}[f] = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$; $\mathbf{u} = (4,-5,2)$ için $\mathbf{u}_{\mathbf{p}}[f] = 0 + 0 + 2 = 2$. Bu noktada, $\mathbf{v}$ ne olursa olsun, $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = v_3$'tür: değişim hızı yalnızca $\mathbf{v}$'nin z bileşenine bağlıdır. $v_3 = 0$ olan her vektör için, yani xy düzlemine paralel her yönde $\mathbf{p}$'den ayrılırken, f ilk anda değişmez.
Örnek 3.3'daki sonuç da lemma ile doğrulanır: $\mathbf{q} = (1,1,1)$'de kısmi türevler $2,1,1$'dir ve $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}[f] = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -1$.
■

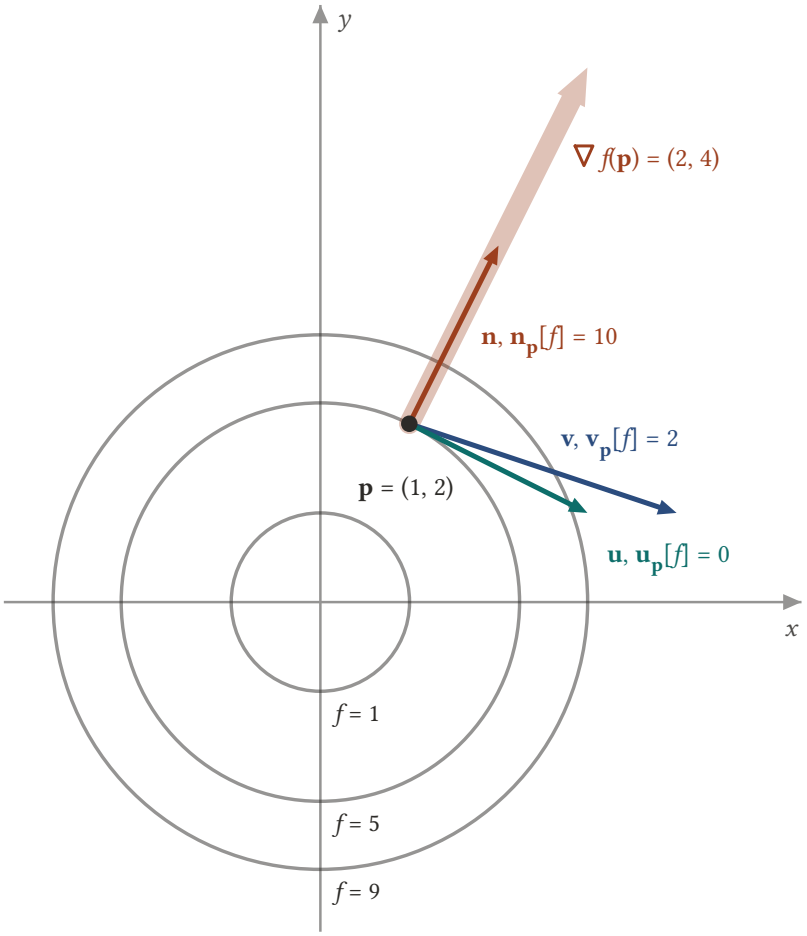
Örnek 3.7 (Düzlemde Seviye Eğrileri ve Gradyan). Düzlemde lemma iki terimli olur: $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = v_1\, \partial f/\partial x(\mathbf{p}) + v_2\, \partial f/\partial y(\mathbf{p})$. Örnek 3.2'deki $f = x^2 + y^2$, $\mathbf{p} = (1,2)$ verisiyle $\mathbf{v} = (3,-1)$, $\mathbf{u} = (2,-1)$ ve $\mathbf{n} = (1,2)$ için yönlü türevleri hesaplayalım.

Çözüm.
$\partial f/\partial x = 2x$ ve $\partial f/\partial y = 2y$; $\mathbf{p} = (1,2)$'de değerleri 2 ve 4'tür. Buradan

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 2, \qquad \mathbf{u}_{\mathbf{p}}[f] = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 0, \qquad \mathbf{n}_{\mathbf{p}}[f] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10.$$

İlk sayı tanımdan bulduğumuzla aynıdır. Diğer ikisinin geometrik anlamı vardır. f'nin seviye eğrileri, başlangıç noktası merkezli çemberlerdir; $\mathbf{p}$, $x^2 + y^2 = 5$ çemberi üzerindedir. $\mathbf{u} = (2,-1)$ bu çembere $\mathbf{p}$'de teğettir: çember boyunca yürürken f değişmez, dolayısıyla türev 0'dır. $\mathbf{n} = (1,2)$ ise gradyan $(2,4)$ ile aynı yöndedir: çembere diktir ve f'nin en hızlı arttığı yönü gösterir. Aşağıdaki şekil üç vektörü ve gradyanı seviye çemberleri üzerinde gösterir; $\mathbf{n}$ oku gradyan okuyla aynı doğrultudadır, onun yarısı uzunluğundadır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.4: $f = x^2 + y^2$ fonksiyonunun $f = 1, 5, 9$ seviye çemberleri ve $f = 5$ çemberi üzerindeki $\mathbf{p} = (1, 2)$ noktası. $\mathbf{u} = (2, -1)$ çembere teğettir ve $\mathbf{u}_\mathbf{p}[f] = 0$; $\mathbf{n} = (1, 2)$ gradyan $(2, 4)$ ile aynı doğrultudadır, çembere diktir, f'nin en hızlı arttığı yönü gösterir ve türevi üçü arasında en büyük olan 10'dur. $\mathbf{v} = (3, -1)$ ikisinin arasında kalır: türevi 2, gradyanla iç çarpımıdır. Kalın yarı saydam ok gradyandır; $\mathbf{n}$ onun yarısı uzunluğunda olduğundan üstüne düşer.

■

Örnek 3.8 (İki Yoldan Aynı Sayı). $f = xy + yz + zx$, $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ ve $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ için $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ sayısını hem lemma ile hem tanımdan hesaplayalım.

Çözüm.
Lemma ile: kısmi türevler $\partial f/\partial x = y + z$, $\partial f/\partial y = x + z$, $\partial f/\partial z = x + y$; $\mathbf{p}$'de değerleri $5, 4, 3$. Böylece $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 12$.
Tanımdan: $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 2 + t, 3 + t)$ ve

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1 + t)(2 + t) + (2 + t)(3 + t) + (3 + t)(1 + t) = (2 + 3t + t^2) + (6 + 5t + t^2) + (3 + 4t + t^2) = 11 + 12t + 3t^2.$$

Türev $12 + 6t$, $t = 0$'da 12. İki yol aynı sayıyı verdi; bundan sonra hesaplarda çoğunlukla lemmayı kullanacağız.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Lineerlik ve Leibniz Kuralı

Bir işlemi türev yapan iki davranış vardır. Birincisi lineerliktir: toplamın türevi türevlerin toplamı, sabit katın türevi türevin sabit katıdır. İkincisi Leibniz kuralıdır: çarpımın türevi, çarpım kuralıyla bulunur. $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ ifadesinde iki "yuva" vardır, teğet vektör $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve fonksiyon f; lineerlik her ikisinde ayrı ayrı sorulmalıdır. Aşağıdaki teorem bu üç özelliği kaydeder. Teoremin (1) şıkkında $a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p}$, teğet uzayının (Tanım 2.2) işlemleriyle kurulmuş, aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki $(a\mathbf{v} + b\mathbf{w})_\mathbf{p}$ teğet vektörüdür.

Teorem 3.1 (Yönlü Türevin Temel Özellikleri). *f ve g, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar; $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}$ aynı $\mathbf{p}$ noktasında teğet vektörler; a ve b sayılar olsun. O zaman*
(1) $(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p})[f] = a\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] + b\,\mathbf{w}_\mathbf{p}[f]$,
(2) $\mathbf{v}_\mathbf{p}[af + bg] = a\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] + b\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[g]$,
(3) $\mathbf{v}_\mathbf{p}[fg] = \mathbf{v}_\mathbf{p}[f]\cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}[g]$.

İspat.
Üç özelliği de Lemma 3.1'nden türeteceğiz. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olsun.
(1) *$a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p}$ teğet vektörünün vektör kısmı $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$'dir ve i-inci koordinatı $av_i + bw_i$'dir. Lemmayı bu teğet vektöre uygularsak*

$$(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p})[f] = \sum_{i=1}^{3}(av_i + bw_i)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = a\sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) + b\sum_{i=1}^{3} w_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

olur; burada toplamı iki toplama ayırdık ve a, b sabitlerini toplamın dışına aldık. Sağdaki iki toplam, yine lemma gereği, $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}[f]$'dir.
(2) *Kısmi türev alma işlemi lineerdir: a ve b sabit olduğundan $\partial(af + bg)/\partial x_i = a\,\partial f/\partial x_i + b\,\partial g/\partial x_i$. Bu eşitliği $\mathbf{p}$'de değerlendirip lemmaya koyarsak*

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[af + bg] = \sum_{i=1}^{3} v_i\left(a\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) + b\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right) = a\sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) + b\sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p}),$$

yani $a\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] + b\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[g]$ bulunur.
(3) *Kısmi türevin çarpım kuralı, fonksiyonlar arasında bir eşitlik olarak,*

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

biçimindedir. Lemma gereği $\mathbf{v}_\mathbf{p}[fg] = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\partial(fg)/\partial x_i(\mathbf{p})$; çarpım kuralını $\mathbf{p}$'de değerlendirip yerine koyarsak

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[fg] = \sum_{i=1}^{3} v_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right) = \left(\sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right)g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right)$$

olur. Burada $g(\mathbf{p})$ ve $f(\mathbf{p})$ birer sayıdır ve toplama indisi i'ye bağlı değildir; bu yüzden toplamın dışına alınabilir. Parantez içindeki toplamlar lemma gereği $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ ve $\mathbf{v}_\mathbf{p}[g]$'dir; istenen eşitlik çıkar.
■

İspatın özü: yönlü türev, kısmi türevlerin bir lineer birleşimidir; kısmi türevin lineerliği ve çarpım kuralı bu birleşimden geçerek yönlü türeve taşınır.
İlk iki özellik şöyle özetlenir: $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ hem $\mathbf{v}_\mathbf{p}$'de hem f'de **lineerdir** (linearity). Üçüncü özellik, ispatının da gösterdiği gibi, çarpımın türevi için bilinen **Leibniz kuralının** (Leibniz rule) ta kendisidir.

> **i** Türev nasıl görünürse görünsün
>
> Bu derste türev alma işlemi birçok biçimde karşımıza çıkacak: bir teğet vektöre göre türev, bir vektör alanı boyunca türev, ileride eğrilerin ve vektör alanlarının türevleri. Hangi biçimde gelirse gelsin, her türev işlemi uygun bir lineerlik ve uygun bir Leibniz özelliği taşır. Yeni bir türev kavramıyla karşılaştığınızda ilk sorulacak iki soru bunlardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 3.9 (Leibniz Kuralı Sayılarla). $f = x^2$, $g = yz$, $\mathbf{p} = (1,1,0)$ ve $\mathbf{v} = (1,0,-3)$ olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ ve $\mathbf{v}_\mathbf{p}[g]$ sayılarını bulup $\mathbf{v}_\mathbf{p}[fg]$'yi Leibniz kuralıyla hesaplayalım.

> **Çözüm.**
> $f = x^2$ için kısmi türevler $2x, 0, 0$; $\mathbf{p}$'de $2, 0, 0$. Lemma ile $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 1 \cdot 2 = 2$. $g = yz$ için kısmi türevler $0, z, y$; $\mathbf{p}$'de $0, 0, 1$. Lemma ile $\mathbf{v}_\mathbf{p}[g] = (-3) \cdot 1 = -3$. Ayrıca $f(\mathbf{p}) = 1$ ve $g(\mathbf{p}) = 0$. Leibniz kuralı,
>
> $$\mathbf{v}_\mathbf{p}[fg] = \mathbf{v}_\mathbf{p}[f] \cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}[g] = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = -3$$
>
> verir. $fg = x^2yz$ olduğundan bu, Örnek 3.1'taki sonuçla uyuşur.
> Yanlış bir kısayola dikkat: türevlerin çarpımı $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}[g] = 2 \cdot (-3) = -6$, doğru cevap -3 değildir. Çarpımın türevi, türevlerin çarpımı değildir.
> ■

Örnek 3.10 (Teğet Vektörde Lineerlik). $f = x^2yz$ ve $\mathbf{p} = (1,1,0)$ için $\mathbf{v} = (1,0,-3)$, $\mathbf{w} = (0,2,1)$ olsun. $(2\mathbf{v}_\mathbf{p} - \mathbf{w}_\mathbf{p})[f]$ sayısını iki yoldan hesaplayalım.

> **Çözüm.**
> Örnek 3.6'de $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = -3$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}[f] = 1$ bulmuştuk. Teoremin (1) şıkkı ile
>
> $$(2\mathbf{v}_\mathbf{p} - \mathbf{w}_\mathbf{p})[f] = 2 \cdot (-3) - 1 = -7.$$
>
> Doğrudan: $2\mathbf{v} - \mathbf{w} = (2,-2,-7)$ ve $\mathbf{p}$'deki kısmi türevler $0, 0, 1$ olduğundan lemma ile $2 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-7) \cdot 1 = -7$. Aynı sayı.
> Genel gözlem: $\mathbf{p}$ ve f sabit tutulduğunda $\mathbf{v}_\mathbf{p} \mapsto \mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ eşlemesi, teğet uzayı $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$'ten $\mathbb{R}$'ye bir lineer dönüşümdür. Bu örnekte o dönüşüm $\mathbf{v}_\mathbf{p} \mapsto v_3$ izdüşümüdür.
> ■

Örnek 3.11 (Fonksiyonda Lineerlik). Düzlemde $f = x^2 + y^2$, $g = xy$, $\mathbf{p} = (1,2)$ ve $\mathbf{v} = (3,-1)$ olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p}[3f - 2g]$ sayısını iki yoldan bulalım.

> **Çözüm.**
> Örnek 3.7'de $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 2$ bulmuştuk. $g = xy$ için kısmi türevler y, x; $\mathbf{p}$'de $2, 1$; dolayısıyla $\mathbf{v}_\mathbf{p}[g] = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 5$. Teoremin (2) şıkkı ile $\mathbf{v}_\mathbf{p}[3f - 2g] = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4$.
> Doğrudan: $h = 3f - 2g = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$ için kısmi türevler $6x - 2y$ ve $6y - 2x$; $\mathbf{p}$'de 2 ve 10; lemma ile $3 \cdot 2 + (-1) \cdot 10 = -4$. Aynı sayı.
> ■

Örnek 3.12 (Sabit Çarpanın Dışarı Alınması). f diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ bir teğet vektör ve c sabit bir sayı olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p}[cf] = c\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ eşitliğinin Teorem 3.1'nin hem (2) hem (3) şıkkından çıktığını görelim.

> **Çözüm.**
> c sabit fonksiyonunun bütün kısmi türevleri sıfırdır, dolayısıyla $\mathbf{v}_\mathbf{p}[c] = 0$ (Örnek 3.5). (3) şıkkı, $\mathbf{v}_\mathbf{p}[cf] = \mathbf{v}_\mathbf{p}[c] \cdot f(\mathbf{p}) + c \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 0 + c\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ verir; (2) şıkkı ise $b = 0$ ile aynı eşitliği doğrudan verir. İki şık tutarlıdır.
> ■

3.4 Vektör Alanı Boyunca Türev

Tek değişkenli hesapta önce bir noktadaki türev $f'(a)$ tanımlanır; sonra her noktaya o noktadaki türevi karşılık getiren **türev fonksiyonu** df/dx kurulur. Aynı adımı burada da atacağız. Bir vektör alanı V (Tanım 2.4), her $\mathbf{p}$ noktasına bir $V(\mathbf{p})$ teğet vektörü verir. Bu teğet vektöre göre f'nin türevi $V(\mathbf{p})[f]$ bir sayıdır. Noktasal ilke, bu sayıları bir fonksiyonda toplamamızı söyler.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 3.2 (Fonksiyonun Bir Vektör Alanı Boyunca Türevi). V, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $\mathbf{p}$ noktasına $V(\mathbf{p})[f]$ sayısını karşılık getiren gerçel değerli fonksiyona ***f*'nin *V* boyunca türevi** denir ve $V[f]$ ile gösterilir:

$$V[f](\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})[f] \qquad (\text{her } \mathbf{p} \text{ için}).$$

Yani $V[f]$, "V'nin gösterdiği yönde f ne hızla değişiyor?" sorusunun her noktadaki cevabını bir araya getiren fonksiyondur.
Bu fonksiyonu koordinatlarla yazalım. V'nin Öklid koordinat fonksiyonları v_1, v_2, v_3 ise Lemma 2.1 gereği $V = \sum_{i=1}^{3} v_i U_i$, yani her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p}) = \big(v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}}$'dir. Lemma 3.1'ne göre $V[f](\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} v_i(\mathbf{p})\, \partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$; bu her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan fonksiyonlar arasında

$$V[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eşitliği geçerlidir.
Sağ taraf, diferansiyellenebilir fonksiyonların çarpım ve toplamıdır: V bir vektör alanı olduğundan (önceki bölümdeki sözleşme gereği koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilirdir) v_i'ler, f diferansiyellenebilir olduğundan $\partial f/\partial x_i$'ler diferansiyellenebilirdir. Dolayısıyla $V[f]$ yine diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ve onun da türevi alınabilir: $W[V[f]]$ gibi ifadeler anlamlıdır.
Formülün en basit hâli, doğal çatı alanı için ortaya çıkar.

Önerme 3.1 (Doğal Çatı Alanı Boyunca Türev Kısmi Türevdir). *U_1, U_2, U_3, $\mathbb{R}^3$'ün doğal çatı alanı ise her diferansiyellenebilir f fonksiyonu için*

$$U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

> ***İspat.***
> *$i = 1$ için gösterelim; diğerleri aynıdır. Tanım 2.6 gereği $U_1(\mathbf{p}) = (1, 0, 0)_{\mathbf{p}}$'dir. $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ için doğru $\mathbf{p} + t(1, 0, 0) = (p_1 + t, p_2, p_3)$ olur; tanımdan*
>
> $$U_1(\mathbf{p})[f] = \frac{d}{dt} f(p_1 + t, p_2, p_3)|_{t=0} \ .$$
>
> *Sağ taraf, ikinci ve üçüncü koordinatı sabit tutup birinciye göre türev almaktır; bu, $\partial f/\partial x_1(\mathbf{p})$ kısmi türevinin tanımının ta kendisidir. Eşitlik her $\mathbf{p}$ noktasında doğru olduğundan $U_1[f] = \partial f/\partial x_1$ fonksiyon eşitliğidir.*
> *Aynı sonuç lemmadan da çıkar: $U_i(\mathbf{p})$'nin koordinatları, $j = i$ için 1, $j \neq i$ için 0'dır; toplamdaki üç terimden yalnızca i-incisi kalır ve $U_i(\mathbf{p})[f] = 1 \cdot \partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$ olur.*
> ■

Bu özdeşlik hesapları kolaylaştırır: U_i boyunca türev, x_i'ye göre kısmi türevdir. Yönlü türevi bundan sonra tek tek teğet vektörlerden çok vektör alanları için kullanacağız.

> ⚠ Sayı mı, fonksiyon mu?
>
> Önceki bölümlerdeki nokta–sayı–fonksiyon ayrımı burada yeniden karşımızdadır. $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ bir sayıdır. $V[f]$ bir fonksiyondur; $V[f](\mathbf{p})$ ise bu fonksiyonun $\mathbf{p}$'deki değeri olan sayıdır ve tanım gereği $V(\mathbf{p})[f]$'ye eşittir. Aynı biçimde $\partial f/\partial x$ bir fonksiyon, $\partial f/\partial x(\mathbf{p})$ bir sayıdır. Parantezlerin yeri, hangisinden söz edildiğini söyler.

Örnek 3.13 (Bir Vektör Alanı Boyunca Türev Hesabı). $V = xU_1 - y^2 U_3$ ve $f = x^2 y + z^3$ olsun. $V[f]$ fonksiyonunu hesaplayalım ve $\mathbf{p} = (1, 2, -1)$ noktasındaki değerini iki yoldan doğrulayalım.

> **Çözüm.**
> V'nin koordinat fonksiyonları $v_1 = x$, $v_2 = 0$, $v_3 = -y^2$'dir. f'nin kısmi türevleri $\partial f/\partial x = 2xy$, $\partial f/\partial y = x^2$, $\partial f/\partial z = 3z^2$. Formülle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$V[f] = x\cdot 2xy + 0\cdot x^2 + (-y^2)\cdot 3z^2 = 2x^2y - 3y^2z^2.$$

Aynı hesabı $U_i[f] = \partial f/\partial x_i$ özdeşliği ve lineerlikle adım adım da yazabiliriz:

$$V[f] = x\,U_1[x^2y] + x\,U_1[z^3] - y^2\,U_3[x^2y] - y^2\,U_3[z^3] = x(2xy) + 0 - 0 - y^2(3z^2) = 2x^2y - 3y^2z^2.$$

$\mathbf{p} = (1,2,-1)$'de bu fonksiyonun değeri $2\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 4\cdot 1 = 4 - 12 = -8$'dir. Doğrulama: $V(\mathbf{p}) = (1,0,-4)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörüdür ve f'nin $\mathbf{p}$'deki kısmi türevleri $4, 1, 3$'tür; lemma ile $V(\mathbf{p})[f] = 1\cdot 4 + 0\cdot 1 + (-4)\cdot 3 = -8$. İki sayı uyuşur: $V[f](\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})[f]$.
■

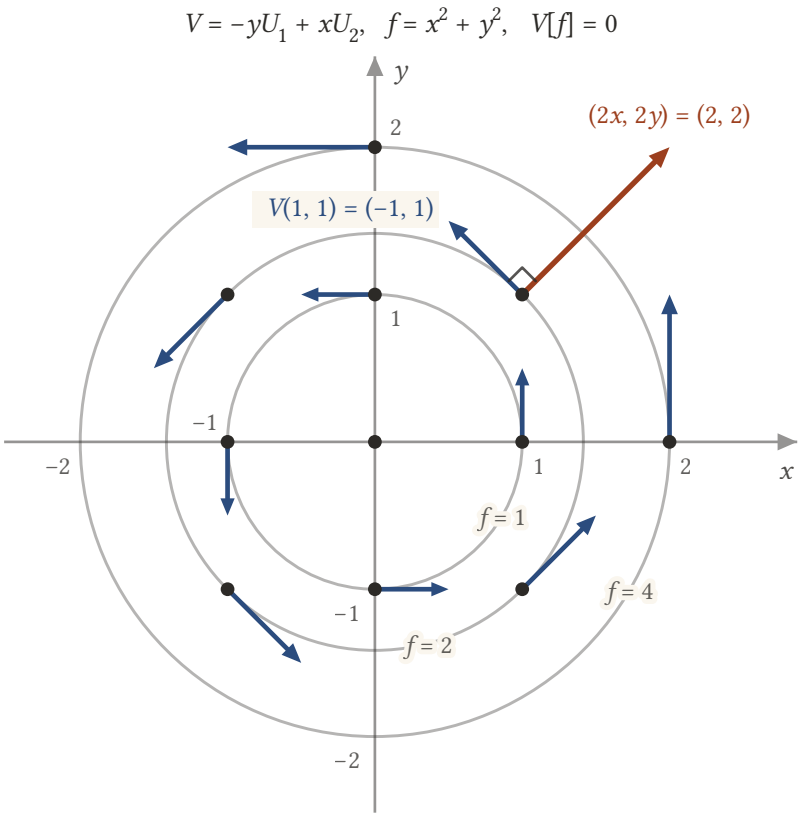
Örnek 3.14 (Düzlemde Dönen Alan ve Seviye Çemberleri). Düzlemde $V = -yU_1 + xU_2$ vektör alanını ve $f = x^2 + y^2$ fonksiyonunu alalım. $V[f]$ fonksiyonunu hesaplayıp yorumlayalım.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $v_1 = -y$, $v_2 = x$'tir. f için $\partial f/\partial x = 2x$, $\partial f/\partial y = 2y$; dolayısıyla

$$V[f] = (-y)(2x) + x(2y) = 0.$$

$V[f]$ her noktada sıfırdır. Geometrik açıklama şudur: başlangıç noktası dışındaki her $\mathbf{p}$ için $V(\mathbf{p})$ vektörü, $\mathbf{p}$'den geçen başlangıç noktası merkezli çembere teğettir (bu alan düzlemi başlangıç noktası çevresinde döndürür); f ise bu çemberler üzerinde sabittir. Çember boyunca giderken f değişmez, türev sıfırdır. Başlangıç noktasında ise $V(\mathbf{0})$ sıfır vektörüdür; sıfır vektöre göre türev her fonksiyon için sıfırdır, çünkü lemmadaki toplamda bütün katsayılar sıfırdır. Aşağıdaki şekilde okların seviye çemberlerine teğet olduğu görülür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.5: $f = x^2 + y^2$ fonksiyonunun $f = 1, 2, 4$ seviye çemberleri (gri) ve $V = -yU_1 + xU_2$ alanının on noktadaki okları (mavi); okunaklılık için her ok gerçek uzunluğunun yarısıyla çizilmiştir. Her ok bulunduğu seviye çemberine teğettir: çember boyunca ilerlerken f değişmez, bu yüzden $V[f] = 0$. $(1, 1)$ noktasında $(2x, 2y) = (2, 2)$ gradyanı (turuncu) çembere dik çıkar; $V(1, 1) = (-1, 1)$ ise ona diktir, aradaki dik açı işareti bunu vurgular.

■

Örnek 3.15 (Dönen Alan Boyunca Bir Koordinat Fonksiyonu). Düzlemde $V = -yU_1 + xU_2$ vektör alanını ve $g = x$ fonksiyonunu alalım. $V[g]$ fonksiyonunu hesaplayıp yorumlayalım.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $v_1 = -y$, $v_2 = x$'tir. $g = x$ için $\partial g/\partial x = 1$, $\partial g/\partial y = 0$; dolayısıyla $V[g] = -y$. Örneğin $\mathbf{q} = (0, 1)$ noktasında $V(\mathbf{q})$'nun vektör kısmı $(-1, 0)$'dır, sola bakar; sola giderken x koordinatı birim hızla azalır ve gerçekten $V[g](\mathbf{q}) = -1$'dir.
■

Örnek 3.16 (Her Noktada Bir Sayı). Düzlemde $W = xU_1 + yU_2$ (başlangıç noktasından dışarı bakan alan) ve $f = x^2 + y^2$ olsun. $W[f]$ fonksiyonunu bulup birkaç noktadaki değerini görelim.

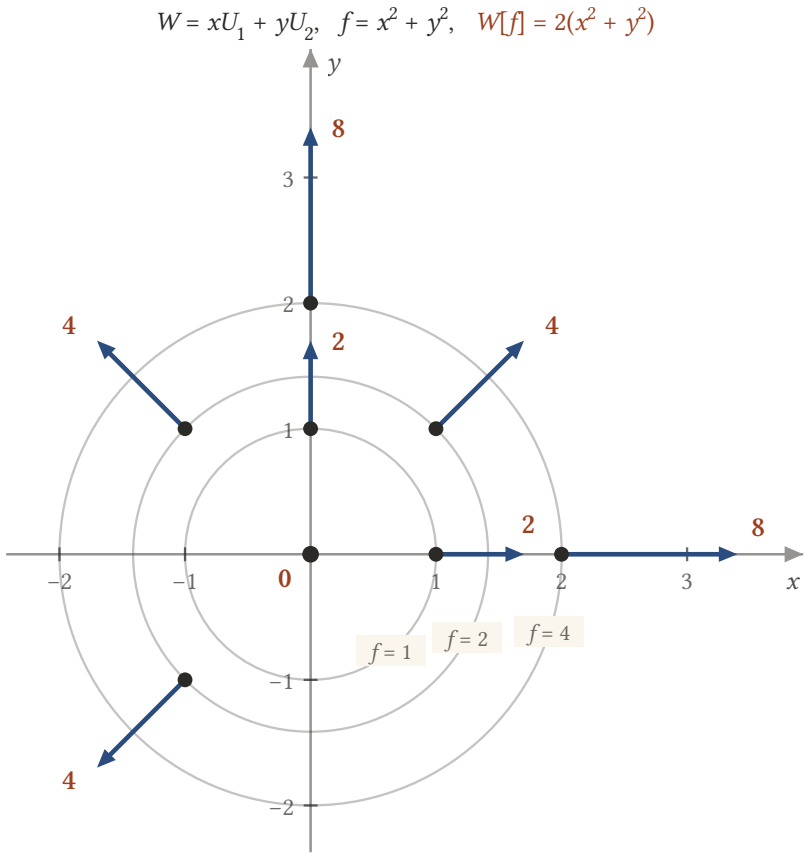
Çözüm.
$w_1 = x$, $w_2 = y$ ve kısmi türevler $2x, 2y$ olduğundan $W[f] = x \cdot 2x + y \cdot 2y = 2(x^2 + y^2) = 2f$. Bu kez türev sıfır değildir: başlangıç noktası dışındaki her $\mathbf{p}$ noktasında $W(\mathbf{p})$, o noktadan geçen seviye çemberine diktir ve dışarı bakar; f bu yönde artar. Başlangıç noktasından uzaklaştıkça hem W'nin oku hem de gradyan $(2x, 2y) = 2(x, y)$ uzar; $W[f]$ bu ikisinin iç çarpımıdır ve ikisi aynı yönde oldu-

 CC BY-NC-SA 4.0

ğundan uzunluklarının çarpımına, $\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2\sqrt{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)$ sayısına eşittir; dolayısıyla dışarı doğru büyür.
Aynı f için Örnek 3.14'da $V[f] = 0$ bulmuştuk: $V[f]$ fonksiyonu yalnızca f'ye değil, alana da bağlıdır. Değerler tablosu:

nokta	W vektörü	$W[f]$ değeri
$(1,0)$	$(1,0)$	2
$(0,1)$	$(0,1)$	2
$(1,1)$	$(1,1)$	4
$(2,0)$	$(2,0)$	8
$(-1,1)$	$(-1,1)$	4
$(0,0)$	$(0,0)$	0

Başlangıç noktasında $W(\mathbf{0})$ da sıfır vektörüdür ve Örnek 3.14'daki gerekçeyle $W[f](\mathbf{0}) = 0$'dır. Aşağıdaki şekil, $W[f]$'nin "her noktada bir sayı" olduğunu gösterir: her okun yanında o noktadaki değer yazılıdır.



Şekil 3.6: Düzlemde $W = xU_1 + yU_2$ alanının örnekteki sekiz noktadaki okları (mavi) ve her okun ucunda o noktadaki $W[f] = 2(x^2+y^2)$ değeri (turuncu); gri çemberler $f = x^2+y^2$ fonksiyonunun $f = 1, 2, 4$ seviye çemberleridir (yarıçapları $1, \sqrt{2}, 2$). Okunaklılık için her ok gerçek uzunluğunun 0,7 katıyla çizilmiştir. Her ok kendi seviye çemberine dik ve dışarı doğrudur; başlangıç noktasından uzaklaştıkça ok uzar ve yanındaki sayı büyür, başlangıç noktasında ise $W(\mathbf{0})$ sıfır vektörü olduğundan yalnızca nokta ve 0 değeri görünür. Böylece $W[f]$, her noktaya bir sayı veren bir fonksiyondur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 3.17 (Uzayda Sabit Alan). $V = U_1 + U_2 + U_3$ ve $f = xyz$ olsun. $V[f]$ fonksiyonunu bulup $\mathbf{p} = (1,2,3)$'teki değerini tanımla doğrulayalım.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları sabit $1,1,1$'dir: her noktada aynı $(1,1,1)$ vektör kısmı. f'nin kısmi türevleri yz, xz, xy olduğundan

$$V[f] = yz + xz + xy.$$

$\mathbf{p} = (1,2,3)$'te değer $6+3+2 = 11$. Tanımla: $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $\mathbf{v} = (1,1,1)$ olduğundan $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1+t, 2+t, 3+t)$ ve

$$f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) = (1+t)(2+t)(3+t) = (2+3t+t^2)(3+t) = 6 + 11t + 6t^2 + t^3;$$

türev $t=0$'da 11. Uyuşur.
■

3.5 Vektör Alanı Boyunca Türevin Özellikleri

Teorem 3.1'ndeki üç özellik, noktasal ilke sayesinde $V[f]$'ye taşınır. Tek yenilik, (1) şıkkında sayılar yerine fonksiyonların skaler görevi görmesidir: $fV + gW$ vektör alanı, önceki bölümde tanımlandığı gibi, noktasal olarak $f(\mathbf{p})V(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})W(\mathbf{p})$ ile verilir.

Sonuç 3.1 (Vektör Alanı Boyunca Türevin Özellikleri). *V ve W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları; f, g, h diferansiyellenebilir gerçel değerli fonksiyonlar; a, b sayılar olsun. O zaman*
(1) $(fV + gW)[h] = f\,V[h] + g\,W[h]$,
(2) $V[af + bg] = a\,V[f] + b\,V[g]$,
(3) $V[fg] = V[f]\cdot g + f\cdot V[g]$.

İspat.
İki fonksiyonun eşit olması, her $\mathbf{p}$ noktasında aynı değeri almaları demektir. Bu yüzden her formülü herhangi bir $\mathbf{p}$ noktasında değerlendirip Teorem 3.1'ni uygulayacağız. Noktasal ilke gereği tek dikkat edilecek şey parantezlerin yeridir: $V[h](\mathbf{p})$, "önce fonksiyonu kur, sonra $\mathbf{p}$'de değerlendir" demektir ve tanım gereği $V(\mathbf{p})[h]$ sayısına eşittir.
(1) *$(fV+gW)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\,V(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\,W(\mathbf{p})$'dir; burada $f(\mathbf{p})$, $g(\mathbf{p})$ birer sayı, $V(\mathbf{p})$, $W(\mathbf{p})$ ise $\mathbf{p}$'deki birer teğet vektördür. Teorem 3.1'nin (1) şıkkını $a = f(\mathbf{p})$, $b = g(\mathbf{p})$ sayılarıyla uygularsak*

$$(fV+gW)[h](\mathbf{p}) = \big(\, f(\mathbf{p})V(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})W(\mathbf{p}) \,\big)\,[h] = f(\mathbf{p})\,V(\mathbf{p})[h] + g(\mathbf{p})\,W(\mathbf{p})[h]$$

olur. $V(\mathbf{p})[h] = V[h](\mathbf{p})$ ve $W(\mathbf{p})[h] = W[h](\mathbf{p})$ yazılırsa sağ taraf $f(\mathbf{p})\,V[h](\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\,W[h](\mathbf{p}) = (f\,V[h] + g\,W[h])(\mathbf{p})$ olur. Bu her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan iki fonksiyon eşittir.
(2) *Tanım ve teoremin (2) şıkkı ile*

$$V[af+bg](\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})[af+bg] = a\,V(\mathbf{p})[f] + b\,V(\mathbf{p})[g] = a\,V[f](\mathbf{p}) + b\,V[g](\mathbf{p}) = (a\,V[f] + b\,V[g])(\mathbf{p}).$$

(3) *Tanım ve teoremin (3) şıkkı ile*

$$V[fg](\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})[fg] = V(\mathbf{p})[f]\cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\cdot V(\mathbf{p})[g] = V[f](\mathbf{p})\cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\cdot V[g](\mathbf{p}),$$

ve son ifade $(V[f]\cdot g + f\cdot V[g])(\mathbf{p})$'dir.
■

İspatın özü: her noktada teoremi uygula, sonra parantezleri "sayı" tarafından "fonksiyon" tarafına kaydır. Parantezlerin bu kadar titizce taşınması abartılı görünebilir. Ama tek değişkenli Leibniz formülünün

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}\cdot g + f\cdot\frac{dg}{dx}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

titiz bir ispatı da aynı kaydırmaları içerir: iki taraf da fonksiyondur ve eşitlik her x noktasında sayıların eşitliği olarak denetlenir.

> ⚠ Skaler olarak fonksiyon mu, sayı mı?
>
> Sonucun (1) şıkkında $V[f]$'nin V'ye göre lineerliği fonksiyonları skaler olarak kabul eder: $(fV)[h] = f\,V[h]$. (2) şıkkında ise f'ye göre lineerlik yalnızca sayıları skaler olarak kabul eder: $V[af] = a\,V[f]$ sayılar için doğrudur, ama fonksiyonlar için $V[fg] = f\,V[g]$ genelde yanlıştır. Nedeni şudur: fV yalnızca bir çarpmadır, oysa $V[f]$ bir türevdir ve türev çarpanı dışarı almaz; Leibniz kuralı gereği fazladan bir $V[f]\cdot g$ terimi çıkar. Somut örnek: $V = U_1$ ve $f = g = x$ için $V[fg] = U_1[x^2] = 2x$, ama $f\,V[g] = x\,U_1[x] = x$. Aradaki fark tam olarak $V[f]\cdot g = 1\cdot x = x$'tir.

Örnek 3.18 (Leibniz Kuralı Fonksiyonlarla). $V = U_1 + zU_2$, $f = x$ ve $g = y$ olsun. $V[f]$, $V[g]$ ve $V[fg]$ fonksiyonlarını hesaplayıp sonucun (3) şıkkını doğrulayalım.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $1, z, 0$'dır; dolayısıyla her h için $V[h] = \partial h/\partial x + z\,\partial h/\partial y$. Buradan $V[f] = V[x] = 1$, $V[g] = V[y] = z$ ve

$$V[fg] = V[xy] = y + z\cdot x = y + xz.$$

Öte yandan $V[f]\cdot g + f\cdot V[g] = 1\cdot y + x\cdot z = y + xz$. İki taraf aynı fonksiyondur. Bir kez daha, $f\,V[g] = xz$ tek başına $V[fg]$'ye eşit değildir.
■

Örnek 3.19 (Türevin Türevi). Düzlemde $V = xU_1 + yU_2$ ve $f = x^2y$ olsun. $V[f]$ ve $V[V[f]]$ fonksiyonlarını hesaplayalım.

Çözüm.
$V[h] = x\,\partial h/\partial x + y\,\partial h/\partial y$ olduğundan

$$V[f] = x\cdot 2xy + y\cdot x^2 = 3x^2y = 3f.$$

$V[f]$ yine bir fonksiyondur; ona da V uygulanabilir:

$$V[V[f]] = V[3x^2y] = 3\,V[x^2y] = 3\cdot 3x^2y = 9x^2y.$$

Burada 3 sabit olduğu için (2) şıkkı ile dışarı alındı. Genel gözlem: x^ay^b tek terimlisi için $V[x^ay^b] = x\cdot ax^{a-1}y^b + y\cdot bx^ay^{b-1} = (a+b)\,x^ay^b$; yani bu alan, derecesi k olan her homojen polinomu (bütün terimleri aynı k dereceden olan polinomu) k katına çıkarır. $f = x^2y$ için $k = 3$'tür.
■

Örnek 3.20 (Fonksiyon Skalerli Lineerlik). $V = U_1, W = U_3, f = y, g = x^2$ ve $h = xz$ olsun. $(fV + gW)[h]$ fonksiyonunu hem doğrudan hem sonucun (1) şıkkıyla hesaplayalım.

Çözüm.
Doğrudan: $fV + gW = yU_1 + x^2U_3$ alanının koordinat fonksiyonları $y, 0, x^2$'dir; $h = xz$ için kısmi türevler $z, 0, x$. Dolayısıyla $(fV + gW)[h] = y\cdot z + x^2\cdot x = yz + x^3$.
Sonuçla: $V[h] = U_1[xz] = z$ ve $W[h] = U_3[xz] = x$; buradan $f\,V[h] + g\,W[h] = yz + x^2\cdot x = yz + x^3$. Aynı fonksiyon. Fonksiyonlar burada gerçekten skaler gibi davrandı, çünkü fV yalnızca bir çarpmadır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Gösterim Üzerine

i Uygulama noktasını atlamak

Her teğet vektörü $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ diye alt indisiyle yazmak, uzun hesaplarda formülleri kalabalıklaştırır. Bundan sonra uygulama noktası bağlamdan belliyse onu yazmayacak, teğet vektöre kısaca $\mathbf{v}$ diyeceğiz. Harflerin görevi sabit kalacağı için bu bir belirsizlik yaratmaz: $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ daima teğet vektör, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ daima $\mathbb{R}^3$'ün noktasıdır. Örneğin "$\mathbf{p}$ noktasında $\mathbb{R}^3$'e teğet bir $\mathbf{v}$ vektörü için $\mathbf{v}[f] = 2$" cümlesi, $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 2$ demektir.
Uygulama noktasının hesabın parçası olduğu yerlerde ise alt indisli yazıma geri döneriz. Tanım 3.1'de ve Örnek 3.3'da olduğu gibi, aynı vektör kısmı iki farklı noktada iki farklı türev verebilir; orada $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ ile $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}$ ayrımı vazgeçilmezdir.

3.7 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (Tanımdan Hesap ve Sıfır Çıkan Türev). $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$ olsun. Doğrudan Tanım 3.1'den çalışarak $f = y^2 z$ fonksiyonu için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm.
Önce doğruyu yazalım: $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (2 + 2t, -t, -1 + 3t)$.
İkinci koordinatın karesi ile üçüncü koordinat çarpılır: $f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (-t)^2(-1 + 3t) = -t^2 + 3t^3$.
Türev $-2t + 9t^2$, $t = 0$'da 0. Dolayısıyla $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 0$.
■

Alıştırma 3.2 (Tanımdan Hesap ve Zincir Kuralı). $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$ olsun. Doğrudan Tanım 3.1'den çalışarak $f = x^7$ fonksiyonu için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm.
Önce doğruyu yazalım: $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (2 + 2t, -t, -1 + 3t)$.
$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (2 + 2t)^7$. Zincir kuralıyla türev $7(2 + 2t)^6 \cdot 2 = 14(2 + 2t)^6$; $t = 0$'da $14 \cdot 2^6 = 14 \cdot 64 = 896$. Dolayısıyla $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 896$.
■

Alıştırma 3.3 (Tanımdan Hesap ve Çarpım Kuralı). $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$ olsun. Doğrudan Tanım 3.1'den çalışarak $f = e^x \cos y$ fonksiyonu için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm.
Önce doğruyu yazalım: $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (2 + 2t, -t, -1 + 3t)$.
$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = e^{2+2t}\cos(-t) = e^{2+2t}\cos t$, çünkü kosinüs çift fonksiyondur. Çarpım kuralıyla türev $2e^{2+2t}\cos t - e^{2+2t}\sin t$; $t = 0$'da $2e^2 \cdot 1 - e^2 \cdot 0 = 2e^2$. Dolayısıyla $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 2e^2$.
■

Alıştırma 3.4 (Sıfır Çıkan Türev Lemma ile). $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$ ve $f = y^2 z$ olsun. Alıştırma 3.1'da tanımdan hesaplanan $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını bu kez Lemma 3.1 ile hesaplayınız.

Çözüm.
$\mathbf{p} = (2, 0, -1)$'deki üç kısmi türev bulunur ve $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ile ağırlıklı toplam alınır.
$f = y^2 z$: $\partial f/\partial x = 0$, $\partial f/\partial y = 2yz$, $\partial f/\partial z = y^2$. $\mathbf{p}$'de $y = 0$ olduğundan üçü de 0'dır; toplam 0. Uyuşur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 3.5 (Zincir Kuralı Yerine Lemma). $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$ ve $f = x^7$ olsun. Alıştırma 3.2′de tanımdan hesaplanan $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını bu kez Lemma 3.1 ile hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$'deki üç kısmi türev bulunur ve $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ile ağırlıklı toplam alınır.
> $f = x^7$: $\partial f/\partial x = 7x^6$, diğer ikisi 0. $\mathbf{p}$'de $7 \cdot 2^6 = 448$; toplam $2 \cdot 448 = 896$. Uyuşur.
> ■

Alıştırma 3.6 (Çarpım Kuralı Yerine Lemma). $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$ ve $f = e^x \cos y$ olsun. Alıştırma 3.3′de tanımdan hesaplanan $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını bu kez Lemma 3.1 ile hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$'deki üç kısmi türev bulunur ve $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ile ağırlıklı toplam alınır.
> $f = e^x \cos y$: $\partial f/\partial x = e^x \cos y$, $\partial f/\partial y = -e^x \sin y$, $\partial f/\partial z = 0$. $\mathbf{p}$'de $e^2 \cos 0 = e^2$, $-e^2 \sin 0 = 0$ ve 0; toplam $2 \cdot e^2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2e^2$. Uyuşur.
> ■

Alıştırma 3.7 (Bir Çarpımın Alan Boyunca Türevi). $V = y^2 U_1 - x U_3$ ve $f = xy$ olsun. $V[f]$ fonksiyonunu hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> V'nin koordinat fonksiyonları $y^2, 0, -x$ olduğundan her h için $V[h] = y^2\,\partial h/\partial x - x\,\partial h/\partial z$.
> Buradan $V[f] = y^2 \cdot y - x \cdot 0 = y^3$.
> ■

Alıştırma 3.8 (Bir Kuvvetin Alan Boyunca Türevi). $V = y^2 U_1 - x U_3$ ve $g = z^3$ olsun. $V[g]$ fonksiyonunu hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> V'nin koordinat fonksiyonları $y^2, 0, -x$ olduğundan her h için $V[h] = y^2\,\partial h/\partial x - x\,\partial h/\partial z$.
> Buradan $V[g] = y^2 \cdot 0 - x \cdot 3z^2 = -3xz^2$.
> ■

Alıştırma 3.9 (Alan Boyunca Leibniz Kuralı). $V = y^2 U_1 - x U_3$, $f = xy$ ve $g = z^3$ olsun. $V[fg]$ fonksiyonunu hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> V'nin koordinat fonksiyonları $y^2, 0, -x$ olduğundan her h için $V[h] = y^2\,\partial h/\partial x - x\,\partial h/\partial z$.
> Buradan, Alıştırma 3.7 ve Alıştırma 3.8′deki gibi, $V[f] = y^3$ ve $V[g] = -3xz^2$ bulunur.
> Leibniz kuralı (Sonuç 3.1, (3)) şunu verir:
>
> $$V[fg] = V[f] \cdot g + f \cdot V[g] = y^3 z^3 + xy(-3xz^2) = y^3 z^3 - 3x^2 y z^2$$
>
> Doğrudan denetim: $fg = xyz^3$ için $V[fg] = y^2 \cdot yz^3 - x \cdot 3xyz^2 = y^3 z^3 - 3x^2 y z^2$.
> ■

Alıştırma 3.10 (Türevlerle Kurulan Bir Fark). $V = y^2 U_1 - x U_3$, $f = xy$ ve $g = z^3$ olsun. $f\,V[g] - g\,V[f]$ fonksiyonunu hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> V'nin koordinat fonksiyonları $y^2, 0, -x$ olduğundan her h için $V[h] = y^2\,\partial h/\partial x - x\,\partial h/\partial z$.
> Buradan, Alıştırma 3.7 ve Alıştırma 3.8′deki gibi, $V[f] = y^3$ ve $V[g] = -3xz^2$ bulunur.
> $f\,V[g] - g\,V[f] = xy(-3xz^2) - z^3 \cdot y^3 = -3x^2 y z^2 - y^3 z^3$.
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 3.11 (Karelerin Toplamının Alan Boyunca Türevi). $V = y^2 U_1 - x U_3$, $f = xy$ ve $g = z^3$ olsun. $V[f^2 + g^2]$ fonksiyonunu hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> V'nin koordinat fonksiyonları $y^2, 0, -x$ olduğundan her h için $V[h] = y^2\,\partial h/\partial x - x\,\partial h/\partial z$.
> Buradan, Alıştırma 3.7 ve Alıştırma 3.8'deki gibi, $V[f] = y^3$ ve $V[g] = -3xz^2$ bulunur.
> Lineerlik ve Leibniz kuralı ile $V[f^2] = 2f\,V[f]$ ve $V[g^2] = 2g\,V[g]$; dolayısıyla $V[f^2 + g^2] = 2xy \cdot y^3 + 2z^3(-3xz^2) = 2xy^4 - 6xz^5$. Doğrudan denetim: $f^2 + g^2 = x^2y^2 + z^6$ için $V[f^2 + g^2] = y^2 \cdot 2xy^2 - x \cdot 6z^5 = 2xy^4 - 6xz^5$.
> ■

Alıştırma 3.12 (Alan Boyunca Türevin Yeniden Türevi). $V = y^2 U_1 - x U_3$ ve $f = xy$ olsun. $V[V[f]]$ fonksiyonunu hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> V'nin koordinat fonksiyonları $y^2, 0, -x$ olduğundan her h için $V[h] = y^2\,\partial h/\partial x - x\,\partial h/\partial z$.
> Alıştırma 3.7 gereği $V[f] = y^3$; bu fonksiyonun x'e ve z'ye göre kısmi türevleri sıfırdır. Dolayısıyla $V[V[f]] = V[y^3] = y^2 \cdot 0 - x \cdot 0 = 0$.
> ■

Alıştırma 3.13 (Koordinat Fonksiyonları Türevle Geri Alınır). x_1, x_2, x_3 doğal koordinat fonksiyonları olmak üzere her V vektör alanı için

$$V = \sum_{i=1}^{3} V[x_i]\, U_i$$

özdeşliğini ispatlayınız. (İpucu: $V = \sum_{i=1}^{3} v_i U_i$ yazıp x_j üzerinde değerlendiriniz.)

> **Çözüm.**
> Lemma 2.1 gereği $V = \sum_{i=1}^{3} v_i U_i$ olacak biçimde v_1, v_2, v_3 koordinat fonksiyonları vardır. Gösterilecek olan, her j için $V[x_j] = v_j$ eşitliğidir; bu sağlanırsa $\sum_i V[x_i]U_i = \sum_i v_i U_i = V$ olur.
> Önce $U_i[x_j]$ hesaplanır. Önerme 3.1 gereği $U_i[x_j] = \partial x_j/\partial x_i$'dir. x_j fonksiyonu, bir noktanın j-inci koordinatını verir; $i = j$ ise kendisine göre türevi 1, $i \neq j$ ise (x_j fonksiyonunun değeri i-inci koordinata bağlı olmadığından) 0'dır. Yani $U_i[x_j]$, $i = j$ için 1, aksi hâlde 0 olan sabit fonksiyondur.
> Şimdi Sonuç 3.1'nin (1) şıkkını kullanalım. Bu şık, $fV + gW$ biçimindeki iki terimli toplamlar için yazılmıştır; üç terimli $V = v_1U_1 + v_2U_2 + v_3U_3$ toplamına ulaşmak için onu iki kez uygularız. Önce $V = v_1U_1 + 1 \cdot (v_2U_2 + v_3U_3)$ ayrışımına uygularız; burada 1 sabit fonksiyondur ve fonksiyonlar skaler görevi görür. Sonra parantez içindeki iki terimli $v_2U_2 + v_3U_3$ alanına bir kez daha uygularız. Böylece
>
> $$V[x_j] = \Big(\sum_{i=1}^{3} v_i U_i\Big)\,[x_j] = v_1\,U_1[x_j] + v_2\,U_2[x_j] + v_3\,U_3[x_j] = \sum_{i=1}^{3} v_i\,U_i[x_j] = v_j$$
>
> bulunur; toplamda yalnızca $i = j$ terimi sıfırdan farklıdır. Özdeşlik ispatlanmıştır.
> Sayısal denetim: $V = xU_1 - y^2U_3$ için $V[x] = x$, $V[y] = 0$, $V[z] = -y^2$; gerçekten $V = V[x]U_1 + V[y]U_2 + V[z]U_3$.
> ■

Alıştırma 3.14 (Türevleri Aynı Olan Alanlar Aynıdır). V ve W vektör alanları için, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki her f fonksiyonu için $V[f] = W[f]$ ise $V = W$ olduğunu ispatlayınız.

> **Çözüm.**
> $V = \sum_i v_i U_i$ ve $W = \sum_i w_i U_i$ olsun. Varsayımı özel olarak $f = x_j$ koordinat fonksiyonlarına uygulayalım. Alıştırma 3.13 gereği $V[x_j] = v_j$ ve $W[x_j] = w_j$; varsayım $V[x_j] = W[x_j]$ dediğinden $v_j =$

 CC BY-NC-SA 4.0

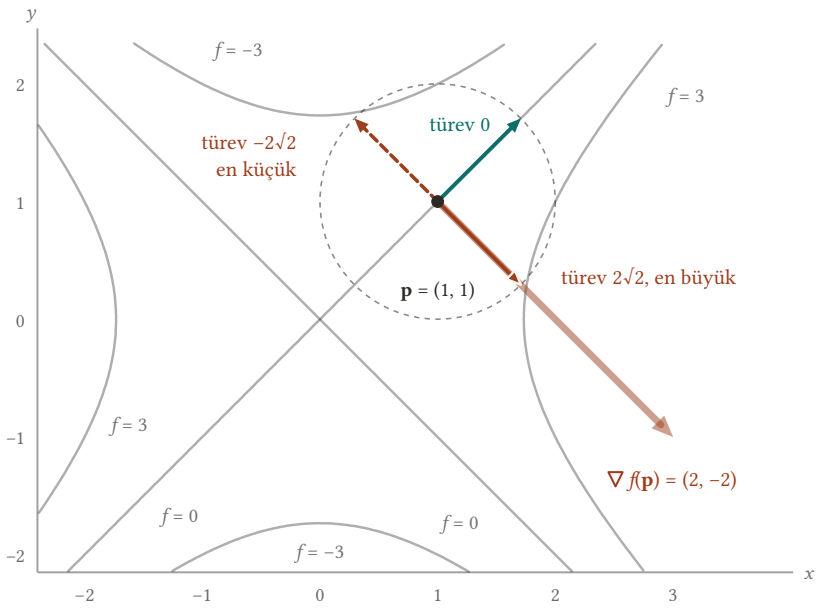
w_j olur ($j = 1, 2, 3$). Öklid koordinat fonksiyonları eşit olan iki vektör alanı her noktada aynı teğet vektörü verir: $V(\mathbf{p}) = \big(v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} = W(\mathbf{p})$. Dolayısıyla $V = W$.
Dikkat: ispatta bütün fonksiyonlar değil, yalnızca x, y, z doğal koordinat fonksiyonları kullanıldı. Bir vektör alanı, bu üç fonksiyonu nasıl türevlediğiyle tamamen belirlenir. Tersi de doğrudur: $V = W$ ise tanım gereği her f için $V[f] = W[f]$'dir.
■

Alıştırma 3.15 (Eyer Yüzeyinde İki Yön). Düzlemde $f = x^2 - y^2$ ve $\mathbf{p} = (1, 1)$ olsun. $\mathbf{v} = (1, 1)$ ve $\mathbf{w} = (1, -1)$ için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ ve $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}[f]$ sayılarını bulunuz.

Çözüm.
$\partial f/\partial x = 2x$ ve $\partial f/\partial y = -2y$; $\mathbf{p}$'de 2 ve -2. Lemma ile $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0$ ve $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}[f] = 1 \cdot 2 + (-1)(-2) = 4$.
■

Alıştırma 3.16 (Eyer Yüzeyinde Birim Yönler). Düzlemde $f = x^2 - y^2$ ve $\mathbf{p} = (1, 1)$ olsun. $\mathbf{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ birim vektörleri için $(\mathbf{u}_\theta)_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını θ cinsinden yazınız; en büyük, en küçük ve sıfır olduğu yönleri belirleyiniz.

Çözüm.
$\partial f/\partial x = 2x$ ve $\partial f/\partial y = -2y$ olduğundan $\mathbf{p}$'deki kısmi türevler 2 ve -2'dir. Lemma ile $(\mathbf{u}_\theta)_{\mathbf{p}}[f] = 2\cos\theta - 2\sin\theta = 2\sqrt{2}\cos\big(\theta + \tfrac{\pi}{4}\big)$; son eşitlik $\cos(\theta + \pi/4) = (\cos\theta - \sin\theta)/\sqrt{2}$ özdeşliğinden gelir.
Bu ifade $\theta = -\pi/4$'te en büyük değeri $2\sqrt{2}$'yi alır: yön $(1, -1)/\sqrt{2}$, yani gradyan $(2, -2)$'nin yönü. $\theta = 3\pi/4$'te en küçük değer $-2\sqrt{2}$: gradyanın tersi. $\theta = \pi/4$ ve $\theta = 5\pi/4$'te sıfırdır: yönler $\pm(1, 1)/\sqrt{2}$, yani $\mathbf{p}$'den geçen $x^2 - y^2 = 0$ seviye eğrisinin (burada $y = x$ doğrusunun) teğet yönü. Alıştırma 3.15'daki $\mathbf{v} = (1, 1)$ vektörü bu teğet yöndedir ve türevi sıfır çıkmıştı. Aşağıdaki şekil seviye eğrilerini ve bu yönleri gösterir.



Şekil 3.7: $f = x^2 - y^2$ fonksiyonunun $f = -3, 0, 3$ seviye eğrileri ve $\mathbf{p} = (1, 1)$ noktası çevresindeki birim çember. Yönlü türev, gradyan $\nabla f(\mathbf{p}) = (2, -2)$ yönündeki $(1, -1)/\sqrt{2}$ birim vektörü için en büyük değeri $2\sqrt{2}$'yi, ters yön $(-1, 1)/\sqrt{2}$ için en küçük değeri $-2\sqrt{2}$'yi alır. $\mathbf{p}$'den geçen $f = 0$ seviye eğrisine ($y = x$ doğrusuna) teğet olan $(1, 1)/\sqrt{2}$ yönünde türev sıfırdır; gradyan bu seviye eğrisine diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 3.17 (Yönlü Türev Teğet Uzayında Lineerdir). f bir fonksiyon ve $\mathbf{p}$ bir nokta olsun. $\mathbf{v}_\mathbf{p} \mapsto \mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ eşlemesinin $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$'ten $\mathbb{R}$'ye bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Lineer dönüşüm olmak, toplamı ve skaler katı korumak demektir. Teorem 3.1'nin (1) şıkkı tam olarak bunu söyler: $(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p})[f] = a\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] + b\,\mathbf{w}_\mathbf{p}[f]$. Eşlemenin tanım kümesi teğet uzayı, değer kümesi gerçel sayılardır.
■

Alıştırma 3.18 (Doğal Çatıda Sıfırsa Her Yönde Sıfır). f bir fonksiyon ve $\mathbf{p}$ bir nokta olsun. $U_1(\mathbf{p})[f] = U_2(\mathbf{p})[f] = U_3(\mathbf{p})[f] = 0$ ise her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ için $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her teğet vektör doğal çatıda açılır: $\mathbf{v}_\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{3} v_i\, U_i(\mathbf{p})$, çünkü $U_i(\mathbf{p})$'ler $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$'ün bir tabanıdır (Tanım 2.6). Alıştırma 3.17'daki lineerlik ile $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i\, U_i(\mathbf{p})[f] = 0$. Aynı sonuç lemmadan da görülür: $U_i(\mathbf{p})[f] = \partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$ olduğundan varsayım, $\mathbf{p}$'deki üç kısmi türevin sıfır olması demektir.
■

Alıştırma 3.19 (Türevi Sıfır Olan Teğet Vektörler). $f = x^2yz$ ve $\mathbf{p} = (1,1,1)$ için $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 0$ koşulunu sağlayan bütün teğet vektörleri bulunuz.

Çözüm.
$\mathbf{p} = (1,1,1)$'de kısmi türevler $2xyz, x^2z, x^2y$ değerleri $2,1,1$'dir. Koşul $2v_1 + v_2 + v_3 = 0$ olur. Bu, $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$ içinde bir düzlemdir; örneğin $(1,-2,0)_\mathbf{p}$ ve $(0,1,-1)_\mathbf{p}$ vektörleri onu gerer ve genel çözüm $a(1,-2,0)_\mathbf{p} + b(0,1,-1)_\mathbf{p}$ biçimindedir. Geometrik anlamı şudur: $\mathbf{p}$, f'nin $x^2yz = 1$ seviye yüzeyi üzerindedir ve bu düzlem o yüzeye $\mathbf{p}$'de yaslanan düzlemdir; ileride ona yüzeyin $\mathbf{p}$'deki teğet düzlemi denecek, burada yalnızca sezgi için anıyoruz.
■

Alıştırma 3.20 (Dönen Alan Boyunca Uzaklığın Karesi). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V = -yU_1 + xU_2$ ve $f = x^2 + y^2 + z^2$ olsun. $V[f]$ fonksiyonunu hesaplayınız; sonucu geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $-y, x, 0$ olduğundan her k fonksiyonu için $V[k] = -y\,\partial k/\partial x + x\,\partial k/\partial y$.
Buradan $V[f] = -y(2x) + x(2y) = 0$.
Yorum: V, her noktada z eksenine dik düzlemde, z ekseni çevresindeki çembere teğet bir vektör verir; alan uzayı z ekseni etrafında döndürür. Bu dönme sırasında başlangıç noktasına uzaklık (f'nin karekökü) değişmez; bu yüzden $V[f] = 0$.
■

Alıştırma 3.21 (Dönen Alan Boyunca Bir Çarpım). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V = -yU_1 + xU_2$ ve $g = xy$ olsun. $V[g]$ fonksiyonunu hesaplayınız; sonucu geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $-y, x, 0$ olduğundan her k fonksiyonu için $V[k] = -y\,\partial k/\partial x + x\,\partial k/\partial y$.
Buradan $V[g] = -y \cdot y + x \cdot x = x^2 - y^2$.
Yorum: V, her noktada z eksenine dik düzlemde, z ekseni çevresindeki çembere teğet bir vektör verir; alan uzayı z ekseni etrafında döndürür. $g = xy$ bu dönme sırasında değişir: $V[g] = x^2 - y^2$, örneğin

 CC BY-NC-SA 4.0

$(1,0,0)$ noktasında 1'dir. Orada V'nin vektör kısmı $(0,1,0)$'dır; bu yönde ilerlerken $x=1$ sabit kalır, y artar ve xy artar.
■

Alıştırma 3.22 (Dönen Alan Boyunca İkinci Türev). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V=-yU_1+xU_2$ ve $g=xy$ olsun. $V[V[g]]$ fonksiyonunu hesaplayınız.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $-y,x,0$ olduğundan her k fonksiyonu için $V[k]=-y\,\partial k/\partial x+x\,\partial k/\partial y$.
Alıştırma 3.21'deki gibi $V[g]=-y\cdot y+x\cdot x=x^2-y^2$. Bu fonksiyona bir kez daha V uygulanır: $V[V[g]]=V[x^2-y^2]=-y(2x)+x(-2y)=-4xy=-4g$.
■

Alıştırma 3.23 (Dönen Alan Boyunca Yükseklik). $\mathbb{R}^3$ üzerinde $V=-yU_1+xU_2$ ve $h=z$ olsun. $V[h]$ fonksiyonunu hesaplayınız; sonucu geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $-y,x,0$ olduğundan her k fonksiyonu için $V[k]=-y\,\partial k/\partial x+x\,\partial k/\partial y$.
Buradan $V[h]=0$, çünkü z'nin x'e ve y'ye göre kısmi türevleri sıfırdır.
Yorum: V, her noktada z eksenine dik düzlemde, z ekseni çevresindeki çembere teğet bir vektör verir; alan uzayı z ekseni etrafında döndürür. Bu dönme sırasında yükseklik (h) değişmez; bu yüzden $V[h]=0$.
■

Alıştırma 3.24 (Doğru Boyunca Her Anda Yönlü Türev). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{v}$ sabitken $F(t)=f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ fonksiyonunun her t_0 için $F'(t_0)=\mathbf{v}_{\mathbf{q}}[f]$ sağladığını gösteriniz; burada $\mathbf{q}=\mathbf{p}+t_0\mathbf{v}$.

Çözüm.
Lemma 3.1'nün ispatında $F'(t)=\sum_{i=1}^{3} v_i\,\partial f/\partial x_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ eşitliğini her t için elde etmiştik; oradaki zincir kuralı hesabı $t=0$'a özel değildir. $t=t_0$ koyunca $F'(t_0)=\sum_{i=1}^{3} v_i\,\partial f/\partial x_i(\mathbf{q})$ olur ve lemma gereği sağ taraf $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}[f]$'dir. Yani doğru boyunca herhangi bir anda türev, o andaki noktaya taşınmış aynı vektöre göre yönlü türevdir.
■

Alıştırma 3.25 (Her Yönde Türevi Sıfır Olan Fonksiyon Sabittir). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun ve her $\mathbf{p}$ noktası ile her $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]=0$ sağlansın. f'nin sabit olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Herhangi iki nokta $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ alalım; $f(\mathbf{p})=f(\mathbf{q})$ göstereceğiz. $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$ koyalım; $t\mapsto\mathbf{p}+t\mathbf{v}$ doğrusu $t=0$'da $\mathbf{p}$'den, $t=1$'de $\mathbf{q}$'dan geçer. $F(t)=f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ için Alıştırma 3.24 ve varsayım gereği $F'(t_0)=\mathbf{v}_{\mathbf{p}+t_0\mathbf{v}}[f]=0$, her t_0 için. Türevi her yerde sıfır olan tek değişkenli bir fonksiyon sabittir (ortalama değer teoremi). Dolayısıyla $F(0)=F(1)$, yani $f(\mathbf{p})=f(\mathbf{q})$. $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ herhangi iki nokta olduğundan f sabittir.
Aynı sonuç şöyle de söylenir: $U_1[f]=U_2[f]=U_3[f]=0$ ise, yani üç kısmi türev de özdeş olarak sıfırsa, f sabittir; çünkü Alıştırma 3.18 gereği o zaman her yönlü türev sıfırdır.
■

Bu bölümle Öklid uzayında hesabın temel dili (noktalar ve koordinat fonksiyonları, teğet vektörler ve vektör alanları, bir fonksiyonun bir teğet vektöre ya da bir vektör alanına göre türevi) tamamlandı; bir

 CC BY-NC-SA 4.0

sonraki Uzayda Eğriler bölümünde bu dili uzayda hareket eden bir noktanın izlediği eğrilere uygulayacağız ve bu bölümde kullandığımız $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu bu eğrilerin en basiti olarak yeniden karşımıza çıkacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Uzayda Eğriler

Önceki bölümde (Yönlü Türevler) bir fonksiyonun bir teğet vektöre göre türevini, $\mathbf{p}$ noktasından $\mathbf{v}$ doğrultusunda giden $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu boyunca türev alarak tanımladık. Orada doğru yalnızca bir araçtı: bir noktadan bir yöne doğru yola çıkmanın en basit yolu. Bu bölümde doğrunun yerine her türlü yolu koyuyoruz. Dönerek yükselen, bir kürenin üzerinde dolaşan ya da aynı rotayı yeniden yeniden dolaşan yolları inceleyeceğiz.
Eğriye bir şekil olarak değil, bir yolculuk olarak bakacağız. Uzayda hareket eden bir nokta düşünelim; her t anında bulunduğu yere $\alpha(t)$ diyelim. Bu bakış hemen yeni bir nesne doğurur: noktanın o andaki hızı. Hızın, önceki bölümlerden tanıdığımız bir teğet vektör olduğunu göreceğiz. Böylece yönlü türevin bütün araçları eğrilere de uygulanabilir hâle gelir.
Bölümün planı şöyledir. Önce eğrinin tanımını ve ileride geometrisini inceleyeceğimiz beş temel örneği vereceğiz. Sonra hız vektörünü tanımlayıp onu kesen vektörlerin limiti olarak yorumlayacağız. Aynı rotayı farklı biçimde dolaşan eğrileri, yani yeniden parametrelendirmeleri, ve bunların hızlarını karşılaştıracağız. Bir fonksiyonun bir eğri boyunca değişim hızını veren lemmayı ispatlayıp birebir, periyodik ve düzgün eğrileri tanımlayacağız. Son olarak düzlemde bir denklemle verilen eğrilere, yani seviye kümelerine, bakacağız.

4.1 Hareket Eden Nokta ve Eğri

Uzayda hareket eden bir nokta düşünelim. Bir I açık aralığındaki her t "anında" nokta $\mathbb{R}^3$'te belli bir yerdedir; bu yere $\alpha(t)$ diyelim. $\alpha(t)$, $\mathbb{R}^3$'ün bir noktası olduğundan üç koordinatı vardır ve bu koordinatlar t ile değişir. Böylece her $i = 1, 2, 3$ için I üzerinde gerçel değerli bir α_i fonksiyonu elde ederiz: $\alpha_i(t)$, noktanın t anındaki i-inci koordinatıdır. Her $t \in I$ için

$$\alpha(t) = \big(\ \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\ \big)$$

yazarız. Kısaca $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ diyeceğiz. Doğal koordinat fonksiyonları (Tanım 1.3) cinsinden $\alpha_i(t) = x_i(\alpha(t))$'dir: α_i, önce α'yı sonra x_i'yi uygulayan bileşkedir. α_i'ye $x_i(t)$ demiyoruz, çünkü x_i harfi $\mathbb{R}^3$'ün noktalarına uygulanan fonksiyona ayrılmıştır.
Hareketin sarsıntısız olmasını istiyoruz: noktanın konumu her an türevlenebilir biçimde değişmeli, hızı ve hızının değişimi de anlamlı olmalıdır. $\mathbb{R}^3$ üzerindeki fonksiyonlar için yaptığımız gibi (Tanım 1.4), tek değişkenli bir fonksiyon için de "türevlenebilir" derken her mertebeden türevinin var olmasını kastediyoruz. Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonuna, gerçel değerli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ koordinat fonksiyonlarının hepsi türevlenebilirse **diferansiyellenebilir** diyeceğiz.

Tanım 4.1 (Uzayda Eğri). Bir I açık aralığından $\mathbb{R}^3$'e giden diferansiyellenebilir bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$'te bir **eğri** (curve) denir. $\alpha(t) = \big(\ \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\ \big)$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarına α'nın **Öklid koordinat fonksiyonları** (coordinate functions) denir.

Yani bir eğri, her t anında nerede bulunduğumuzu söyleyen ve koordinatları istediğimiz kadar türevlenebilen bir kuraldır. Eğri bu kuralın kendisidir; kuralın uğradığı noktaların kümesi değildir.

> ⚠ Eğri ile rotası aynı şey değildir
>
> α'nın uğradığı noktaların kümesine, yani $\alpha(I) = \{\alpha(t) : t \in I\}$ görüntü kümesine, α'nın **rotası** diyeceğiz. Farklı eğrilerin rotası aynı olabilir. Örneğin $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$ ve $t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t, 0)$ eğrilerinin ($t \in \mathbb{R}$) rotası, xy düzlemindeki birim dairedir. Ama ikincisi daireyi iki kat hızlı dolaşır: $t = \pi$ anında birincisi $(-1, 0, 0)$'da, ikincisi ise tam turunu bitirmiş, $(1, 0, 0)$'dadır. Bir eğri, rotayı hangi sırayla ve hangi hızla dolaştığımızı da taşır.

Aşağıdaki beş örnek, ileride eğrilerin geometrisini incelerken tekrar tekrar kullanacağımız eğrilerdir. Ardından eğri olmayan bir eşleme göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.1 (Doğru). $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ bir nokta ve $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \neq \mathbf{0}$ olsun. $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu

$$\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q} = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, p_3 + tq_3)$$

kuralıyla verilsin. α'nın bir eğri olduğunu gösterelim; $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ ve $\mathbf{q} = (2, -1, 3)$ için $t = -1, 0, 1, 2$ anlarındaki noktaları hesaplayalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $\alpha_i(t) = q_i t + p_i$ biçimindedir. Her biri t'nin en çok birinci dereceden bir polinomudur ve polinomlar her mertebeden türevlenebilir. Dolayısıyla α bir eğridir. Buradaki koordinat fonksiyonları $t \mapsto ct + d$ anlamında lineerdir; $t \mapsto ct$ gibi sabit terimsiz olmaları gerekmez. Sabit terim olmasaydı ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$) doğru orijinden geçmek zorunda kalırdı.
$t = 0$ anında $\alpha(0) = \mathbf{p}$'dir. Ayrıca her t için $\alpha(t+1) - \alpha(t) = \mathbf{q}$: nokta her birim zamanda $\mathbf{q}$ kadar yer değiştirir. Bu yüzden α'ya $\mathbf{p} = \alpha(0)$ noktasından geçen, $\mathbf{q}$ doğrultusundaki doğru (straight line) diyoruz.
Sayısal durumda $\alpha(t) = (1 + 2t, 2 - t, 3t)$ olur:

t	$\alpha(t)$
-1	$(-1, 3, -3)$
0	$(1, 2, 0)$
1	$(3, 1, 3)$
2	$(5, 0, 6)$

Ardışık iki satırdaki noktaların farkı hep $(2, -1, 3) = \mathbf{q}$'dur.
$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ koşulunun nedeni şudur: $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ olsaydı her t için $\alpha(t) = \mathbf{p}$ olurdu. Bu sabit fonksiyon da türevlenebilir olduğundan tanıma göre bir eğridir, ama rotası tek bir noktadır; doğru değildir.
■

Örnek 4.2 (Helis). $a > 0$ ve $b \neq 0$ sayıları için $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

ile verilsin. α'nın $x^2 + y^2 = a^2$ silindirinin üzerinde kaldığını gösterelim ve $a = 1$, $b = 1/2$ için bir tam turda ne kadar yükseldiğini bulalım.

Çözüm.
Önce yalnızca ilk iki koordinata bakalım: $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, 0)$, xy düzleminde merkezi orijin, yarıçapı a olan daireyi saatin tersi yönünde dolaşır. Üçüncü koordinat bt ise sabit bir hızla artar ($b < 0$ ise azalır). Dairesel harekete sabit hızla yükselmenin eklenmesiyle elde edilen bu eğriye **helis** (helix) denir. Koordinat fonksiyonları cos, sin ve bir polinom olduğundan her mertebeden türevlenebilir; α bir eğridir.
Her t için

$$\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$$

olduğundan $\alpha(t)$ noktası, xy düzlemindeki dairenin üzerine dikilen $x^2 + y^2 = a^2$ silindirinin üzerindedir; yükseklik ne olursa olsun nokta silindirden ayrılmaz.
t bir 2π arttığında cos ve sin değişmez, üçüncü koordinat $2\pi b$ artar:

$$\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t) + (0, 0, 2\pi b).$$

Yani nokta her tam turda aynı dikey doğru üzerine, $2\pi \mid b \mid$ kadar yukarıda (ya da aşağıda) geri gelir. $a = 1$, $b = 1/2$ için bir turdaki yükselme $2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$'dir:

t	$\alpha(t)$
0	$(1, 0, 0)$

 CC BY-NC-SA 4.0

t	$\alpha(t)$
$\pi/2$	$(0, 1, \pi/4)$
π	$(-1, 0, \pi/2)$
$3\pi/2$	$(0, -1, 3\pi/4)$
2π	$(1, 0, \pi)$

$b \neq 0$ koşulu önemlidir: $b = 0$ olsaydı nokta hiç yükselmez, xy düzlemindeki daireyi dolaşıp dururdu. ■

Örnek 4.3 (Silindir ile Kürenin Kesişimindeki Eğri). $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi

$$\alpha(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

ile verilsin. C, xy düzleminde merkezi $(1, 0, 0)$ ve yarıçapı 1 olan dairenin üzerine dikilen silindir; Σ ise merkezi orijin, yarıçapı 2 olan küre olsun:

$$C : (x-1)^2 + y^2 = 1, \qquad \Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

α'nın rotasının tam olarak C ile Σ'nın kesişimi olduğunu, yani α'nın her noktasının iki yüzeyde de bulunduğunu ve kesişimin her noktasından α'nın geçtiğini gösterelim.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları cos ve sin ile kurulduğundan her mertebeden türevlenebilir; α bir eğridir.
Silindir. Her t için

$$\big(\,\alpha_1(t) - 1\big)^2 + \alpha_2(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

olduğundan $\alpha(t)$ noktası C'dedir.
Küre. Koordinatların karelerini toplayalım:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 + \alpha_3(t)^2 &= (1+\cos t)^2 + \sin^2 t + 4\sin^2\frac{t}{2} \\ &= 1 + 2\cos t + (\cos^2 t + \sin^2 t) + 4\sin^2\frac{t}{2} \\ &= 2 + 2\cos t + 4\sin^2\frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Yarım açı özdeşliği $\cos t = 1 - 2\sin^2(t/2)$ gereği $4\sin^2(t/2) = 2 - 2\cos t$'dir. Yerine koyunca toplam $2 + 2\cos t + 2 - 2\cos t = 4$ olur; yani $\alpha(t)$ noktası Σ'dadır.
Kesişimin tamamı. Şimdi (x, y, z) noktası hem C'de hem Σ'da olsun. Silindir denklemini açarsak $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, yani $x^2 + y^2 = 2x$ bulunur. Bunu küre denklemine koyunca $2x + z^2 = 4$, yani $z^2 = 4 - 2x$ olur.
$(x-1, y)$ çifti birim dairenin üzerinde olduğundan $x - 1 = \cos t_0$ ve $y = \sin t_0$ olacak biçimde bir $0 \le t_0 < 2\pi$ açısı vardır. O zaman

$$z^2 = 4 - 2(1 + \cos t_0) = 2 - 2\cos t_0 = 4\sin^2\frac{t_0}{2},$$

yani $z = 2\sin(t_0/2)$ ya da $z = -2\sin(t_0/2)$. İlk durumda $(x, y, z) = \alpha(t_0)$'dır. İkinci durumda $t = t_0 + 2\pi$ alalım: cos ve sin değişmez, üçüncü koordinat ise

$$2\sin\frac{t_0 + 2\pi}{2} = 2\sin\left(\frac{t_0}{2} + \pi\right) = -2\sin\frac{t_0}{2}$$

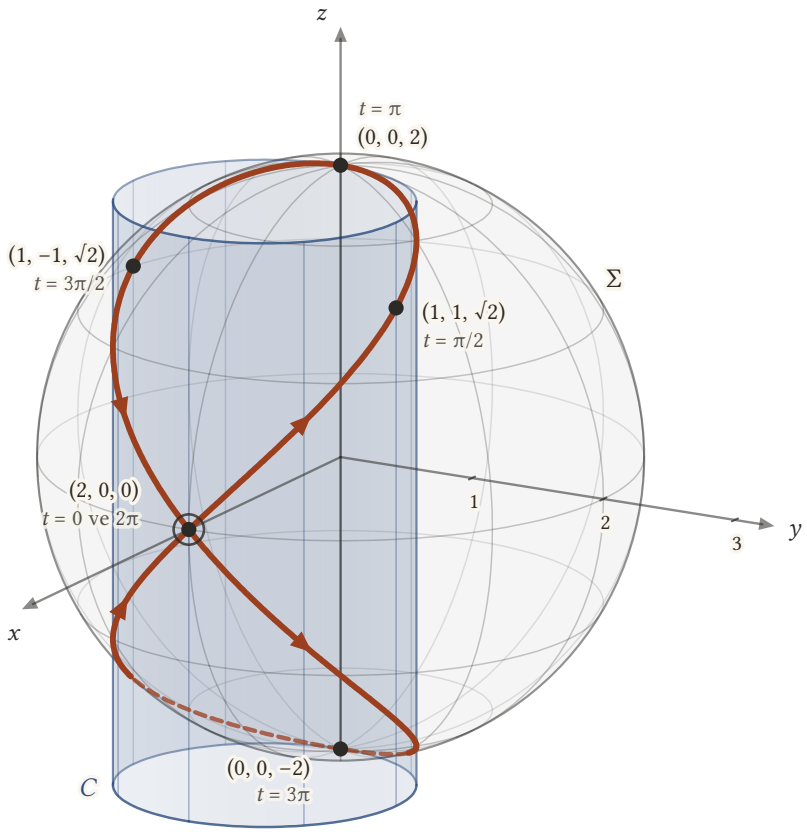
olur; yani $(x, y, z) = \alpha(t_0 + 2\pi)$. Her iki durumda da nokta α'nın rotasındadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sürekli dolaşma. $\cos t$ ve $\sin t$ fonksiyonları 2π, $2\sin(t/2)$ fonksiyonu 4π artışında kendini tekrarlar; dolayısıyla her t için $\alpha(t+4\pi)=\alpha(t)$'dir. Nokta 4π uzunluğundaki her zaman diliminde aynı kapalı rotayı bir kez dolaşır ve bunu durmadan tekrarlar. Birkaç nokta:

t	$\alpha(t)$	konum
0	$(2,0,0)$	kürenin ekvatorunda
$\pi/2$	$(1,1,\sqrt{2})$	üst yarıda
π	$(0,0,2)$	kuzey kutbunda
$3\pi/2$	$(1,-1,\sqrt{2})$	üst yarıda
2π	$(2,0,0)$	ilk noktaya dönüş
3π	$(0,0,-2)$	güney kutbunda

$0\le t\le 2\pi$ iken $\sin(t/2)\ge 0$ olduğundan nokta kürenin $z\ge 0$ yarısında, $2\pi\le t\le 4\pi$ iken $z\le 0$ yarısında ilerler. Rota $(2,0,0)$ noktasında kendini keser: nokta oraya $t=0$ ve $t=2\pi$ anlarında, iki farklı yönde gelir.



Şekil 4.1: Merkezi orijin, yarıçapı 2 olan Σ küresi (gri) ile $(x-1)^2+y^2=1$ silindiri C (mavi) ve bu iki yüzeyin kesişimi olan turuncu $\alpha(t)=(1+\cos t,\sin t,2\sin(t/2))$ rotası. $0\le t\le 2\pi$ iken nokta üst yarıda $(1,1,\sqrt{2})$, $(0,0,2)$ ve $(1,-1,\sqrt{2})$ üzerinden, $2\pi\le t\le 4\pi$ iken alt yarıda $(0,0,-2)$ üzerinden dolaşır; kesikli parça kürenin arka yüzündedir. Rota $(2,0,0)$ noktasında kendini keser: nokta oraya $t=0$ ve $t=2\pi$ anlarında, okların gösterdiği gibi iki farklı yönde gelir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

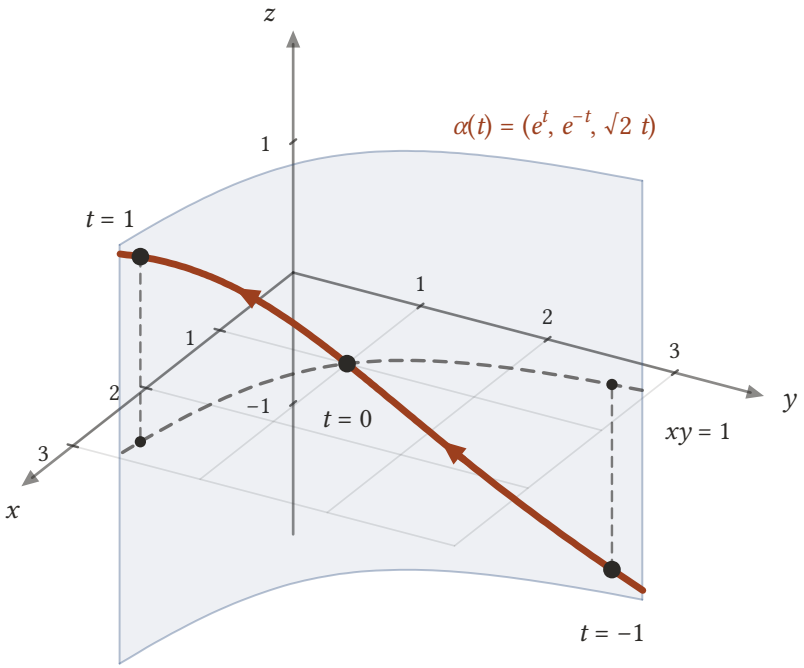
Örnek 4.4 (Hiperbolün Üzerinde Yükselen Eğri). $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi

$$\alpha(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\right)$$

ile verilsin. α'nın, xy düzlemindeki $xy = 1$ hiperbolünün $x > 0$ kolunun üzerinde ilerlediğini, bu kolun her noktasının üstünden tam bir kez geçtiğini ve helis gibi sabit hızla yükseldiğini gösterelim.

Çözüm.
Üstel fonksiyon ve polinomlar her mertebeden türevlenebilir olduğundan α bir eğridir.
İlk iki koordinatın çarpımı her t için $e^t e^{-t} = e^0 = 1$'dir. Yani $\alpha(t)$'nin xy düzlemine izdüşümü olan (e^t, e^{-t}) noktası $xy = 1$ hiperbolünün üzerindedir. Bu hiperbolün iki kolu vardır: biri $x > 0$, $y > 0$ bölgesinde, öteki $x < 0$, $y < 0$ bölgesindedir. $e^t > 0$ olduğundan izdüşüm daima birinci koldadır; eğri bu kolun üzerine dikilen dik bir "duvarın" üzerinde ilerler.
Kolun her noktası tam bir kez ziyaret edilir. $x_0 > 0$ olmak üzere $(x_0, 1/x_0)$ bu koldan bir nokta olsun. $e^t = x_0$ denkleminin tek çözümü $t = \log x_0$'dır; burada log doğal logaritmadır. Bu t için $e^{-t} = 1/x_0$ de sağlanır. Yani izdüşüm kolun her noktasından geçer, her birinden de yalnızca bir anda. $t \to -\infty$ iken $x = e^t$ sıfıra yaklaşır, $y = e^{-t}$ sınırsız büyür; $t \to \infty$ iken tersi olur.
Üçüncü koordinat $\sqrt{2}\,t$ ise her birim zamanda $\sqrt{2}$ artar. Helisteki bt koordinatı gibi, eğri sabit hızla yükselir; fark, altındaki eğrinin daire yerine hiperbol olmasıdır. Birkaç nokta ($e \approx 2{,}718$, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$):

t	$x = e^t$	$y = e^{-t}$	$z = \sqrt{2}\,t$
-1	0,368	2,718	$-1{,}414$
0	1	1	0
1	2,718	0,368	1,414



Şekil 4.2: $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)$ eğrisi, $xy = 1$ hiperbolünün $x > 0$ kolu üzerine dikilen soluk mavi duvarda ilerler; kesikli dikey kılavuzlar, noktaların xy düzlemine izdüşümlerinin bu kolda olduğunu gösterir. $t = -1, 0, 1$ anlarında yükseklik $-1{,}414$; 0; 1,414 olur, yani her birim zamanda $\sqrt{2}$ kadar artar: eğri helis gibi sabit hızla yükselir, yalnızca altındaki eğri daire değil hiperboldür. Oklar hareket yönünü gösterir; t arttıkça izdüşüm kolun y eksenine yakın ucundan x eksenine yakın ucuna doğru kayar; eğri de kolun her noktasının üstünden tam bir kez geçer.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 4.5 (Kübik Koordinatlı Eğri). $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi

$$\alpha(t) = (3t - t^3,\, 3t^2,\, 3t + t^3)$$

ile verilsin. Koordinat fonksiyonları basit olduğunda bir eğrinin biçimi birkaç nokta hesaplanarak kabaca bulunabilir. Bu eğrinin $0 \le t \le 1$ parçasının kaba resmini $t = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, 1$ anlarındaki noktalardan çıkaralım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları en çok üçüncü dereceden polinomlardır; α bir eğridir. İstenen anlarda noktalar şunlardır:

t	$x = 3t - t^3$	$y = 3t^2$	$z = 3t + t^3$
0	0	0	0
$1/10$	$0{,}299$	$0{,}03$	$0{,}301$
$1/2$	$1{,}375$	$0{,}75$	$1{,}625$
$9/10$	$1{,}971$	$2{,}43$	$3{,}429$
1	2	3	4

Örneğin $t = 9/10$ için $3t = 2{,}7$, $t^2 = 0{,}81$ ve $t^3 = 0{,}729$ olduğundan $x = 2{,}7 - 0{,}729 = 1{,}971$, $y = 3 \cdot 0{,}81 = 2{,}43$ ve $z = 2{,}7 + 0{,}729 = 3{,}429$ bulunur.
Şimdi tablodan resmi okuyalım. $t = 0$ ile $t = 1/10$ arasında x ile z neredeyse eşit ve yaklaşık $3t$ kadardır, y ise çok küçüktür. Yani eğri orijinden $y = 0$ düzlemindeki $x = z$ doğrusuna teğet biçimde, $(1, 0, 1)$ doğrultusunda çıkar. t büyüdükçe $y = 3t^2$ hızla artar ve z ile x arasındaki fark açılır: eğri hem y yönüne kıvrılır hem de z bakımından x'i geride bırakır. $t = 1$'de $(2, 3, 4)$ noktasına varır. Sonuç, orijinden $(2, 3, 4)$'e doğru bükülerek yükselen bir yaydır.
Bu okumayı kesinleştiren iki özdeşlik vardır:

$$x + z = 6t, \qquad z - x = 2t^3.$$

Birincisi, $x + z$ toplamının zamanla sabit hızla arttığını söyler. İkincisi, eğrinin $t > 0$ için $z > x$ bölgesinde kaldığını ve aradaki farkın başta çok küçük kaldığını gösterir: $t = 1/10$ anında fark yalnızca $2/1000$'dir, $t = 1$ anında ise 2 olur.
Negatif t değerleri için yeni hesap gerekmez. Her t için

$$\alpha(-t) = \big(-(3t - t^3),\, 3t^2,\, -(3t + t^3) \big)$$

olur. Yani $\alpha(-t)$, $\alpha(t)$'nin x ve z koordinatlarının işareti değiştirilerek elde edilir; bu da y ekseni etrafında π açılık dönmedir. $-1 \le t \le 0$ parçası, çizdiğimiz yayın bu dönmeyle elde edilen kopyasıdır.
■

Örnek 4.6 (Eğri Olmayan Bir Eşleme). $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(t) = (t, \mid t \mid, 0)$ eşlemesinin neden bir eğri olmadığını açıklayalım.

Çözüm.
$\beta_1(t) = t$ ve $\beta_3(t) = 0$ koordinatları sorunsuzdur; sorun ikinci koordinat $\beta_2(t) = \mid t \mid$'dedir. $t = 0$'daki fark oranı

$$\frac{\mid 0 + \Delta t \mid - \mid 0 \mid}{\Delta t} = \frac{\mid \Delta t \mid}{\Delta t}$$

$\Delta t > 0$ için 1, $\Delta t < 0$ için -1'dir. İki yanlı limit yoktur, dolayısıyla β_2'nin 0'da türevi yoktur. β diferansiyellenebilir değildir ve bir eğri değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

β'nın rotası xy düzlemindeki $y = \mid x \mid$ grafiğidir: orijinde köşesi olan bir "V". Hareket eden nokta orijine $(1, -1, 0)$ doğrultusunda gelir ve oradan ani bir dönüşle $(1, 1, 0)$ doğrultusunda ayrılır. Türevin olmaması bu ani dönüşün izidir.
Tanım kümesi de önemlidir: aynı kural yalnızca $0 < t$ açık aralığında düşünülürse $\mid t \mid = t$ olur ve $t \mapsto (t, t, 0)$ bir eğridir; hatta bir doğrunun parçasıdır. Köşeli rotalara düzgün eğrileri tanımlarken döneceğiz. ■

4.2 Hız Vektörü

Eğriyi hareket eden bir nokta olarak düşündüğümüzde her t anında sorulacak doğal bir soru vardır: nokta şu an hangi yöne ve ne hızla gidiyor? Cevap bir oktur. Ok, noktanın o anda bulunduğu $\alpha(t)$ yerinden çıkmalı, hareketin yönünü göstermeli ve uzunluğu hareketin hızını yansıtmalıdır. Bir noktadan çıkan ok ise tam olarak bir teğet vektördür (Tanım 2.1). Okun vektör kısmını, koordinatların zamana göre değişim hızları olarak alırız.

Tanım 4.2 (Hız Vektörü). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

teğet vektörüne α'nın t anındaki **hız vektörü** (velocity vector) denir. Uygulama noktası $\alpha(t)$, vektör kısmı ise koordinat fonksiyonlarının t'deki türevlerinden oluşan üçlüdür.

Yani $\alpha'(t)$, hareket eden noktanın t anında bulunduğu yerden çıkan ve o anki hareketin yönünü ve hızını gösteren oktur.
Burada $d\alpha_i/dt$, tek değişkenli α_i fonksiyonunun sıradan türevidir; kısaca α_i' de yazacağız. Tanımda uygulama noktasının $\alpha(t)$ olması keyfe bağlı bir seçim değildir; aşağıdaki limit yorumu bunun nedenini gösterir.

4.2.1 Kesen vektörlerden hız vektörüne

Gerçel değerli bir f fonksiyonunun t'deki türevi

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

limitidir. Aynı fark oranı, f yerine bir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eğrisi konduğunda da anlamlıdır. $\mathbb{R}^3$'te fark ve sayıyla çarpma koordinat koordinat yapıldığından

$$\frac{1}{\Delta t}\,\big(\,\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)\,\big) = \Big(\frac{\alpha_1(t + \Delta t) - \alpha_1(t)}{\Delta t}, \frac{\alpha_2(t + \Delta t) - \alpha_2(t)}{\Delta t}, \frac{\alpha_3(t + \Delta t) - \alpha_3(t)}{\Delta t} \Big)$$

olur. Paydaki $\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)$ farkı, eğrinin $\alpha(t)$ noktasından $\alpha(t + \Delta t)$ noktasına giden okun vektör kısmıdır; bu oka, rotayı iki noktada kestiği için **kesen vektör** (secant vector) diyelim. $1/\Delta t$ ile çarpmak onun doğrultusunu korur, yalnızca boyunu ölçekler. $\Delta t < 0$ ise ok geriye, noktanın az önce bulunduğu yere bakar; ama negatif bir sayıya bölmek onu çevirir. Dolayısıyla ölçeklenmiş kesen vektörler her iki durumda da hareket yönüne bakar.
Δt küçüldükçe $\alpha(t + \Delta t)$ noktası $\alpha(t)$'ye yaklaşır ve iki noktayı birleştiren doğrultu, eğrinin $\alpha(t)$'deki gidiş doğrultusuna yaklaşır. $\Delta t \to 0$ iken her koordinattaki fark oranı ilgili türeve gider; limitte

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)$$

üçlüsü, eğriye $\alpha(t)$ noktasında teğet olan bir vektör olarak elde edilir. Bütün kesen vektörler $\alpha(t)$'den çıktığı için limitin uygulama noktası da $\alpha(t)$ olmalıdır. Böylece türevin alışılmış limit tanımı, hız vektörünün tanımına kendiliğinden götürür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.7 (Kesen Vektörlerin Hız Vektörüne Yaklaşması). $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ eğrisi için $t = 1$ anında, $\Delta t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$ değerleriyle ölçeklenmiş kesen vektörleri hesaplayalım ve $\Delta t \to 0$ iken vektör kısımlarının $\alpha'(1)$'in vektör kısmına yaklaştığını gösterelim.

Çözüm.
Rota xy düzlemindeki $y = x^2$ parabolüdür ve $\alpha(1) = (1, 1, 0)$'dır. Sıfırdan farklı her Δt için

$$\alpha(1 + \Delta t) - \alpha(1) = \big(\ \Delta t, (1 + \Delta t)^2 - 1, 0\ \big) = \big(\ \Delta t, 2\Delta t + (\Delta t)^2, 0\ \big)$$

olur; Δt'ye bölünce

$$\frac{1}{\Delta t}\ \big(\ \alpha(1 + \Delta t) - \alpha(1)\ \big) = (1, 2 + \Delta t, 0)$$

bulunur. İstenen değerler için:

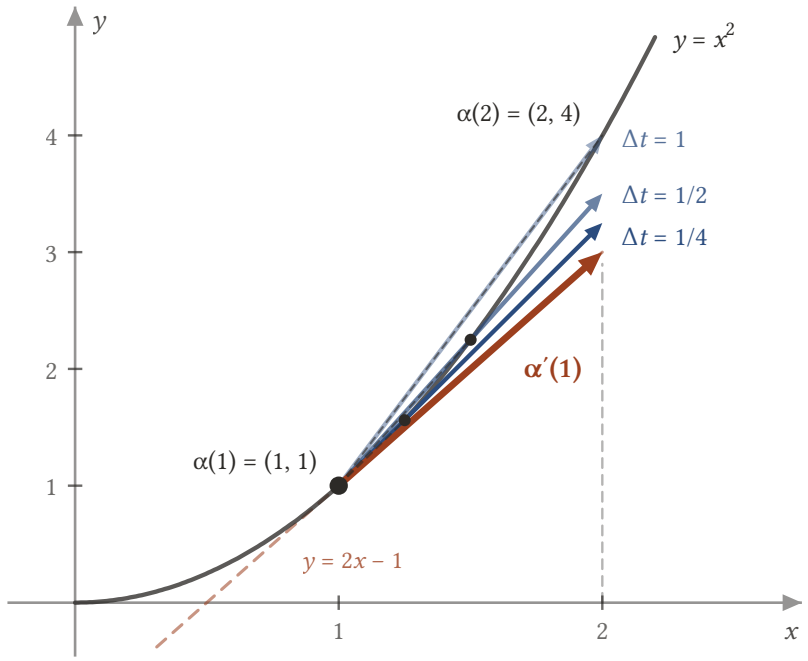
Δt	$\alpha(1 + \Delta t)$	ölçeklenmiş kesen vektör
1	$(2, 4, 0)$	$(1, 3, 0)$
$1/2$	$(3/2, 9/4, 0)$	$(1, 5/2, 0)$
$1/4$	$(5/4, 25/16, 0)$	$(1, 9/4, 0)$
$-1/2$	$(1/2, 1/4, 0)$	$(1, 3/2, 0)$

Son satıra dikkat edelim: $\alpha(1)$'den $\alpha(1/2)$'ye giden farkın vektör kısmı $(-1/2, -3/4, 0)$'dır ve geriye bakar; $-1/2$'ye bölünce $(1, 3/2, 0)$ olur ve ileriye döner.
$(1, 2 + \Delta t, 0)$ üçlüsü $\Delta t \to 0$ iken $(1, 2, 0)$'a gider. Tanımdan hesaplarsak $\alpha_1'(t) = 1$, $\alpha_2'(t) = 2t$, $\alpha_3'(t) = 0$ ve

$$\alpha'(1) = (1, 2, 0)_{(1,1,0)}$$

bulunur: limit, hız vektörünün vektör kısmıdır. Bu vektörün doğrultusundaki doğru, xy düzleminde $y = 2x - 1$ doğrusudur; eğimi 2 olduğundan $y = x^2$ parabolünün $(1, 1)$'deki teğetidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.3: xy düzlemindeki $y = x^2$ rotası üzerinde, $\alpha(1) = (1, 1)$ noktasından çıkan ve soluktan belirgine giden mavi oklar, $\Delta t = 1, 1/2, 1/4$ için ölçeklenmiş kesen vektörlerdir; vektör kısımları $(1, 2 + \Delta t)$'dir. Her ok, $\alpha(1)$'i parabol üzerindeki $\alpha(1 + \Delta t)$ noktasına, yani (2, 4), (3/2, 9/4) ya da (5/4, 25/16) noktasına bağlayan kesikli gri kesen boyunca uzanır. Δt küçüldükçe kesenler kısalıp sıfıra gider, ama $1/\Delta t$ ile büyütülen okların uçları $x = 2$ doğrusu üzerinde (2, 4), (2, 7/2), (2, 13/4) diye inerek (2, 3)'e yaklaşır. Limit, vektör kısmı (1, 2) olan turuncu hız vektörü $\alpha'(1)$'dir; bu ok, parabolün (1, 1)'deki teğeti olan $y = 2x - 1$ doğrusu üzerinde yatar.

■

4.2.2 Doğal çatı cinsinden yazılış

Hız vektörü bir teğet vektör olduğundan doğal çatı alanı U_1, U_2, U_3 (Tanım 2.6) cinsinden yazılabilir. $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ teğet uzayında (Tanım 2.2) toplama ve sayıyla çarpma vektör kısımları üzerinden yapıldığından, her $\mathbf{p}$ noktası ve her (v_1, v_2, v_3) üçlüsü için

$$(v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}} = v_1(1,0,0)_{\mathbf{p}} + v_2(0,1,0)_{\mathbf{p}} + v_3(0,0,1)_{\mathbf{p}} = \sum_i v_i\, U_i(\mathbf{p})$$

olur; ikinci eşitlik U_i'lerin tanımıdır. Bu özdeşliği $\mathbf{p} = \alpha(t)$ noktasındaki $\alpha'(t)$ vektörüne uygularsak

$$\alpha'(t) = \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt}(t)\, U_i(\alpha(t))$$

bulunur. Bu yazımda U_i'ler hareket eden $\alpha(t)$ noktasında değerlendirilir; katsayılar ise t'nin fonksiyonlarıdır. Doğal çatının okları her noktada aynı yöne baktığından, hız vektörünün hangi yöne ne kadar uzandığı bu katsayılardan doğrudan okunur.

Örnek 4.8 (Doğrunun Hızı). $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ doğrusunun hız vektörünü bulalım; $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ ve $\mathbf{q} = (2, -1, 3)$ için $t = 0$ ve $t = 1$ anlarındaki hız vektörlerini karşılaştıralım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $\alpha_i(t) = p_i + tq_i$ olduğundan türevleri sabittir: $\alpha_i'(t) = q_i$. Dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\alpha'(t) = (q_1, q_2, q_3)_{\alpha(t)} = \mathbf{q}_{\alpha(t)}, \qquad \alpha'(t) = \sum_i q_i\, U_i(\alpha(t)).$$

Hız vektörünün vektör kısmı t'ye bağlı değildir. Doğrunun bütün hız vektörleri paraleldir; t değiştikçe değişen yalnızca uygulama noktasıdır. Doğrunun doğru olması, yani gidiş yönünün hiç değişmemesi, tam olarak bu paralellikte kendini gösterir.
Sayısal durumda $\alpha(0) = (1,2,0)$ ve $\alpha(1) = (3,1,3)$ olduğundan

$$\alpha'(0) = (2,-1,3)_{(1,2,0)}, \qquad \alpha'(1) = (2,-1,3)_{(3,1,3)}.$$

İki vektörün vektör kısımları aynı, uygulama noktaları farklıdır; teğet vektörlerin eşitlik kuralı gereği paraleldirler ama eşit değildirler. Doğal çatıyla

$$\alpha'(1) = 2U_1(\alpha(1)) - U_2(\alpha(1)) + 3U_3(\alpha(1))$$

yazılır.
Doğruya özgü bir ayrıntı daha: $\alpha'(t)$ okunun ucu $\alpha(t) + \mathbf{q} = \alpha(t+1)$ noktasıdır; yani hız oku, noktanın bir birim zaman sonra varacağı yeri gösterir. Eğri büküldüğünde bu özellik kaybolur; hız oku yalnızca o anki gidiş yönünü gösterir.
■

Örnek 4.9 (Helisin Hızı). $a > 0, b \neq 0$ olmak üzere $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ helisinin hız vektörünü bulalım; $a = 1, b = 1/2$ için $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ anlarında hesaplayalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonlarının türevleri $(a\cos t)' = -a\sin t$, $(a\sin t)' = a\cos t$ ve $(bt)' = b$'dir. Dolayısıyla

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)_{\alpha(t)},$$

doğal çatıyla

$$\alpha'(t) = -a\sin t U_1(\alpha(t)) + a\cos t U_2(\alpha(t)) + bU_3(\alpha(t)).$$

İki gözlem yapalım. Birincisi, hız vektörünün z koordinatı her an b'dir. Helisin sabit hızla yükselmesi, hızın bu sabit üçüncü koordinatında görülür.
İkincisi, hızın yatay kısmı $(-a\sin t, a\cos t)$, konumun yatay kısmı $(a\cos t, a\sin t)$ ile dik açı yapar; çünkü iç çarpımları

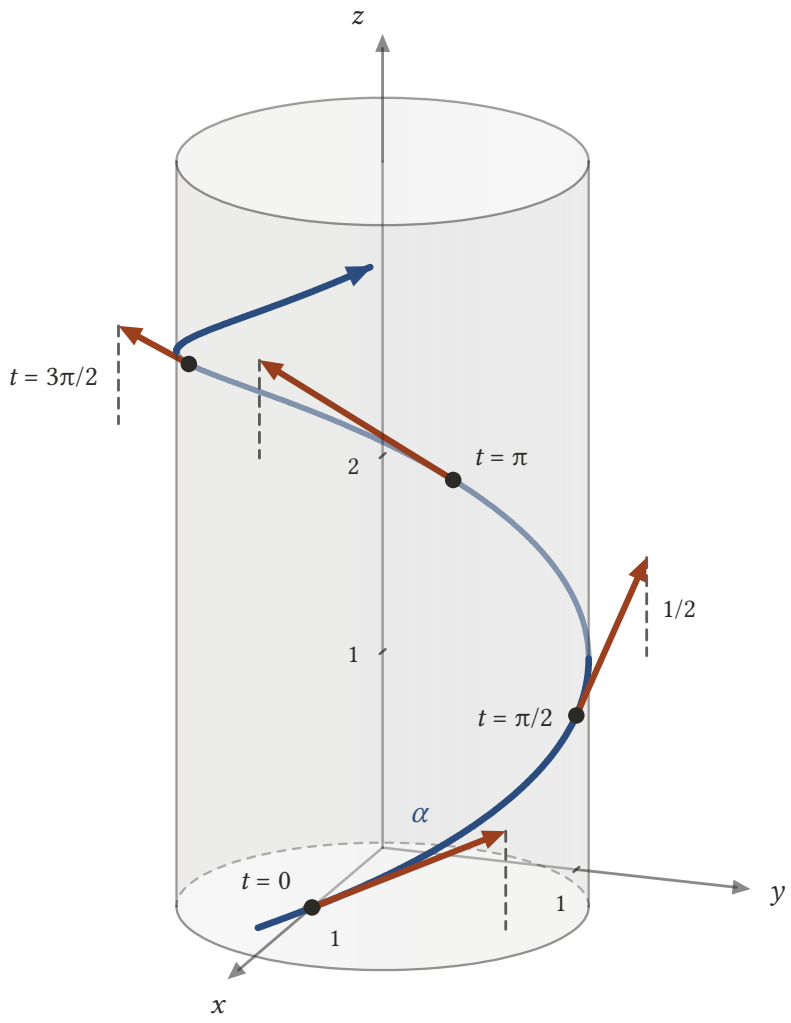
$$(-a\sin t)(a\cos t) + (a\cos t)(a\sin t) = 0$$

olur. Yani yukarıdan bakıldığında nokta daireye teğet olarak ilerler; silindirden ne dışarı ne içeri doğru bir hareketi yoktur.
$a = 1, b = 1/2$ için:

t	$\alpha(t)$	$\alpha'(t)$'nin vektör kısmı
0	$(1,0,0)$	$(0,1,1/2)$
$\pi/2$	$(0,1,\pi/4)$	$(-1,0,1/2)$
π	$(-1,0,\pi/2)$	$(0,-1,1/2)$
$3\pi/2$	$(0,-1,3\pi/4)$	$(1,0,1/2)$

Yatay kısımlar dönerek yön değiştirir, düşey kısım hep $1/2$ kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.4: $x^2 + y^2 = 1$ silindirine sarılan $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t/2)$ helisi ve $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ anlarındaki hız vektörleri (turuncu oklar). Okların yatay kısmı, nokta silindiri dolandıkça dönerek yön değiştirir; her okun ucundan inen kesikli düşey parça ise hep aynı boydadır, çünkü hız vektörünün z koordinatı her an $1/2$'dir. Helisin sabit hızla yükselmesi, hızın bu değişmeyen düşey kısmında görülür.

■

Örnek 4.10 (Kübik Eğrinin Hızı). $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisinin hız vektörünü doğal çatı cinsinden yazalım ve $t = 0$ ile $t = 1$ anlarında yorumlayalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonlarının türevleri $3 - 3t^2$, $6t$ ve $3 + 3t^2$'dir. Dolayısıyla

$$\alpha'(t) = (3 - 3t^2)\, U_1(\alpha(t)) + 6t\, U_2(\alpha(t)) + (3 + 3t^2)\, U_3(\alpha(t)).$$

$t = 0$'da $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ ve $\alpha'(0) = 3U_1(\mathbf{0}) + 3U_3(\mathbf{0})$, yani $(3, 0, 3)_{\mathbf{0}}$'dır. Eğrinin orijinden $(1, 0, 1)$ doğrultusunda çıktığını kaba çizimde tablodan tahmin etmiştik; hız vektörü bunu doğrular.
$t = 1$'de $\alpha(1) = (2, 3, 4)$'tür. Doğal çatı alanlarını bu noktada değerlendirerek

$$\alpha'(1) = 0 \cdot U_1(2, 3, 4) + 6\, U_2(2, 3, 4) + 6\, U_3(2, 3, 4),$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yani $\alpha'(1) = (0,6,6)_{(2,3,4)}$ bulunur. Birinci katsayının sıfır olması, noktanın bu anda x yönünde hareket etmediğini söyler. Gerçekten $x = 3t - t^3$ fonksiyonunun türevi $3 - 3t^2$, $-1 < t < 1$ için pozitif, $\mid t \mid > 1$ için negatiftir. Dolayısıyla x koordinatı $t = 1$'de bir yerel maksimuma ulaşır ve sonra azalmaya başlar; $t \geq 0$ anlarında alabileceği en büyük değer bu 2 değeridir. Bütün $\mathbb{R}$ üzerinde ise x'in en büyük değeri yoktur: $t \to -\infty$ iken $3t - t^3$ sınırsız büyür.
Üçüncü katsayı $3 + 3t^2$ hiçbir t için sıfır olmaz. Bu yüzden bu eğrinin hız vektörü hiçbir anda sıfır vektör değildir; bu gözlemi düzgün eğriler konusunda kullanacağız.
■

4.3 Yeniden Parametrelendirme

Bir eğri verildiğinde aynı rotayı izleyen yeni eğriler kurmak kolaydır: saati değiştirmek yeter. Yeni saatin gösterdiği her s anına eski saatin bir $h(s)$ anını karşılık getirelim ve s anında, eski yolculuğun $h(s)$ anında bulunduğu yerde olalım. Yeni yolculuk eski yerlerden geçer, ama onlara başka zamanlarda, başka hızlarla, belki ters sırayla ya da birkaç kez uğrar.

Tanım 4.3 (Yeniden Parametrelendirme). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri, J bir açık aralık ve $h : J \to I$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Her $s \in J$ için $\beta(s) = \alpha(h(s))$ kuralıyla tanımlanan

$$\beta = \alpha(h) : J \to \mathbb{R}^3$$

bileşke fonksiyonuna α'nın h ile **yeniden parametrelendirmesi** (reparametrization) denir.

Yani β, α'nın uğradığı yerlere başka bir saatle uğrayan yolculuktur: yeni saat s'yi gösterdiğinde, α'nın eski saat $h(s)$'yi gösterdiği andaki yerindeyiz.
β'nın gerçekten bir eğri olduğunu görelim. β'nın koordinat fonksiyonları $\beta_i(s) = \alpha_i(h(s))$ bileşkeleridir. Tek değişkenli zincir kuralı gereği $\beta_i' = \alpha_i'(h) \cdot h'$ olur; sağ taraf yine türevlenebilir fonksiyonların bileşkesi ve çarpımıdır, dolayısıyla bir kez daha türevlenebilir. Bu akıl yürütmeyi tekrarlayarak β_i'nin her mertebeden türevinin var olduğunu görürüz. J açık aralık olduğundan β bir eğridir.
β'nın koordinatlarını bulmak için $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ ifadelerinde t yerine $h(s)$ koymak yeter. β'nın rotası $\alpha(h(J))$ kümesidir ve α'nın rotasının içindedir. $h(J) = I$ ise iki rota aynıdır; aksi hâlde β, α'nın rotasının yalnızca bir kısmını dolaşır.

Örnek 4.11 (Kareköklü Bir Eğrinin Yeniden Parametrelendirmesi). $I : 0 < t < 4$ aralığında $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1 - t)$ eğrisi ve $J : 0 < s < 2$ aralığında $h(s) = s^2$ fonksiyonu verilsin. $\beta = \alpha(h)$ yeniden parametrelendirmesinin koordinat fonksiyonlarını bulalım ve iki yolculuğu karşılaştıralım.

Çözüm.
Önce tanımın koşullarını denetleyelim. $t > 0$ için $\sqrt{t} = t^{1/2}$ ve $t\sqrt{t} = t^{3/2}$ her mertebeden türevlenebilir, $1 - t$ ise bir polinomdur; α bir eğridir. h bir polinomdur ve $0 < s < 2$ ise $0 < s^2 < 4$ olur; yani h, J'yi I'nın içine götürür ve bileşke tanımlıdır.
t yerine s^2 koyalım:

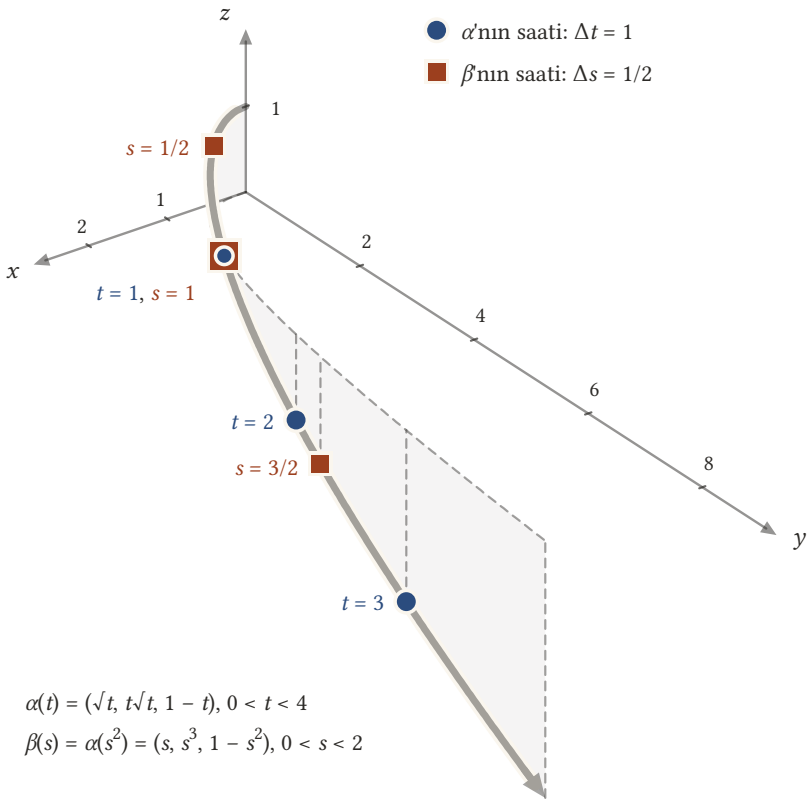
$$\beta(s) = \alpha(s^2) = \left(\sqrt{s^2}, s^2\sqrt{s^2}, 1 - s^2 \right) = (s, s^3, 1 - s^2).$$

Son adımda $\sqrt{s^2} = \mid s \mid = s$ yazdık; bu, J'de $s > 0$ olduğu için doğrudur.
Rotalar aynıdır: $0 < t < 4$ aralığındaki her t, $0 < \sqrt{t} < 2$ olduğundan $t = h(\sqrt{t})$ biçiminde yazılır; yani $h(J) = I$'dır. Üstelik h artan olduğundan β rotayı α ile aynı yönde dolaşır. Fark zamanlamadadır. Yeni saatle eşit adımlarla ilerleyelim:

s	$t = s^2$	$\beta(s) = \alpha(s^2)$
$1/2$	$1/4$	$(1/2, 1/8, 3/4)$
1	1	$(1, 1, 0)$
$3/2$	$9/4$	$(3/2, 27/8, -5/4)$

 CC BY-NC-SA 4.0

β toplam sürenin ilk yarısında ($0 < s < 1$), α'nın kendi süresinin yalnızca ilk çeyreğinde ($0 < t < 1$) katettiği parçayı dolaşır; ikinci yarıda ise geri kalan uzun parçayı. Yani β, α'ya göre yolculuğun başında yavaş, sonunda hızlıdır.



Şekil 4.5: Gri çizgi, α ile onun yeniden parametrelendirmesi $\beta(s) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1 - s^2)$ eğrilerinin ortak rotasıdır; kesikli eğri bu rotanın $z = 0$ düzlemindeki izdüşümüdür. Mavi yuvarlaklar α'nın saatiyle eşit aralıklı $t = 1, 2, 3$ anlarını, turuncu kareler β'nın saatiyle eşit aralıklı $s = 1/2, 1, 3/2$ anlarını gösterir; iki saat $(1, 1, 0)$ noktasında buluşur. Başlangıçtan bu noktaya kadarki kısa parçaya β toplam süresinin yarısını, α ise yalnızca çeyreğini ayırır; bu yüzden turuncu işaretler başta sık, sonda seyrektir: β yolculuğun başında yavaş, sonunda hızlıdır.

■

Örnek 4.12 (Rotanın Yalnızca Bir Kısmını Dolaşan Yolculuk). x ekseni boyunca giden $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ doğrusunu ($t \in \mathbb{R}$) $h(s) = s^2$ ($s \in \mathbb{R}$) ile yeniden parametrelendirelim. Yeni eğrinin rotası nedir ve nokta bu rotayı nasıl dolaşır?

Çözüm.
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olduğundan $\beta(s) = \alpha(s^2) = (s^2, 0, 0)$ bir eğridir. $s^2 \geq 0$ olduğundan β'nın rotası x ekseninin yalnızca $x \geq 0$ yarısıdır; α'nın rotasının bir kısmıdır.
Hareketi izleyelim:

s	-2	-1	0	1	2
$\beta(s)$'nin x koordinatı	4	1	0	1	4

 CC BY-NC-SA 4.0

s, $-\infty$'dan 0'a giderken nokta sağdan orijine yaklaşır; $s = 0$'da orijine varır ve oradan geri dönüp yeniden sağa gider. Böylece β, pozitif yarı ekseni iki kez, biri gidiş biri dönüş olmak üzere dolaşır. Dönüş anında nokta bir an durmak zorundadır; bunu aşağıdaki lemmayla hız vektörü üzerinden göreceğiz. ■

Başka basit seçimler de tanıdık hareketler verir. $h(s) = -s$ ile $\beta(s) = \alpha(-s)$ aynı rotayı ters yönde dolaşır; $h(s) = 2s$ ile $\beta(s) = \alpha(2s)$ aynı yolculuğu iki kat hızlı yapar; $h(s) = s + c$ ise yalnızca saati c kadar kaydırır.

4.3.1 Yeniden parametrelendirmenin hızı

$\beta(s) = \alpha(h(s))$ olduğundan β'nın s anındaki hız vektörü ile α'nın $h(s)$ anındaki hız vektörü aynı noktadan çıkar. Aralarındaki tek fark bir sayı çarpanıdır ve bu çarpan, iki saatin birbirine göre ne hızla aktığını ölçen $h'(s)$'dir.

Lemma 4.1 (Yeniden Parametrelendirmenin Hızı). *$\beta = \alpha(h)$, bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $h : J \to I$ ile yeniden parametrelendirmesi ise her $s \in J$ için*

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}(s)\, \alpha'(h(s))$$

olur.

İspat.
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ olsun. Tanım gereği

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \big(\, \alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \alpha_3(h(s)) \,\big),$$

yani β'nın koordinat fonksiyonları $\beta_i = \alpha_i(h)$ bileşkeleridir.
Türevleri üs işaretiyle gösterirsek, gerçel değerli f ve g fonksiyonları için tek değişkenli zincir kuralı $\big(\, g(f)\big)' = g'(f) \cdot f'$ biçimindedir. Bunu $g = \alpha_i$ ve $f = h$ ile uygularsak her $i = 1, 2, 3$ için

$$\beta_i'(s) = \big(\, \alpha_i(h)\big)'(s) = \alpha_i'(h(s)) \cdot h'(s)$$

bulunur. Şimdi $\beta'(s)$'yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \big(\, \beta_1'(s), \beta_2'(s), \beta_3'(s)\big)_{\beta(s)} \\ &= \big(\, \alpha_1'(h(s))\, h'(s), \alpha_2'(h(s))\, h'(s), \alpha_3'(h(s))\, h'(s)\big)_{\alpha(h(s))} \\ &= h'(s)\, \big(\, \alpha_1'(h(s)), \alpha_2'(h(s)), \alpha_3'(h(s))\big)_{\alpha(h(s))} \\ &= h'(s)\, \alpha'(h(s)). \end{aligned}$$

Adımların gerekçeleri sırasıyla şunlardır:

- *birinci satır: β için hız vektörünün tanımı (Tanım 4.2);*
- *ikinci satır: yukarıdaki $\beta_i'(s)$ formülü ve $\beta(s) = \alpha(h(s))$ eşitliği;*
- *üçüncü satır: $T_{\beta(s)}(\mathbb{R}^3)$ teğet uzayında (Tanım 2.2) bir sayıyla çarpma vektör kısmı üzerinden yapılır, $c\,(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = (c\mathbf{v})_\mathbf{p}$; burada çarpan $c = h'(s)$'dir;*
- *dördüncü satır: α için hız vektörünün $h(s)$ anındaki tanımı.*

$h'(s) = (dh/ds)(s)$ olduğundan lemma ispatlanmıştır. ■

Lemma bir tarif verir: yeniden parametrelendirmenin hızını bulmak için önce α''yu h ile yeniden parametrelendir, yani $\alpha'(t)$ ifadesinde t yerine $h(s)$ koy; sonra sonucu h'nin türeviyle çarp. Geometrik anlamı da açıktır. $\beta'(s)$ ile $\alpha'(h(s))$ aynı noktadan çıkar ve paraleldir. $|\, h'(s)\, | > 1$ ise β o noktadan α'dan daha hızlı, $|\, h'(s)\, | < 1$ ise daha yavaş geçer. $h'(s) < 0$ ise yönü terstir. $h'(s) = 0$ ise β o anda durur. Örneğin Örnek 4.12'ndeki $\beta(s) = (s^2, 0, 0)$ için $\beta'(s) = 2s\, U_1(\beta(s))$ olur ve dönüş anı $s = 0$'da hız sıfırdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.13 (Hız Formülünün Sayısal Denetimi). Örnek 4.11'deki $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$, $h(s) = s^2$ ve $\beta(s) = (s, s^3, 1-s^2)$ için $\beta'(s)$'yi hem doğrudan hem Lemma 4.1 ile hesaplayalım ve $s = 1$'deki değerini yorumlayalım.

Çözüm.
Doğrudan. β'nın koordinatlarının türevleri 1, $3s^2$ ve $-2s$'dir:

$$\beta'(s) = (1, 3s^2, -2s)_{\beta(s)}.$$

Lemma ile. $\alpha_1 = t^{1/2}$, $\alpha_2 = t^{3/2}$, $\alpha_3 = 1 - t$ olduğundan

$$\alpha'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{3}{2}\sqrt{t}, -1\right)_{\alpha(t)}.$$

t yerine $h(s) = s^2$ koyup $\sqrt{s^2} = s$ kullanırsak

$$\alpha'(h(s)) = \left(\frac{1}{2s}, \frac{3}{2}s, -1\right)_{\alpha(s^2)}$$

olur. $h'(s) = 2s$ ile çarpalım:

$$h'(s)\,\alpha'(h(s)) = \left(2s \cdot \frac{1}{2s}, 2s \cdot \frac{3s}{2}, 2s \cdot (-1)\right)_{\beta(s)} = (1, 3s^2, -2s)_{\beta(s)}.$$

İki hesap aynı teğet vektörü verir; uygulama noktaları da aynıdır, çünkü $\alpha(s^2) = \beta(s)$.
Yorum. $s = 1$'de ortak nokta $(1,1,0)$'dır; $\beta'(1) = (1,3,-2)_{(1,1,0)}$ ve $\alpha'(1) = (1/2, 3/2, -1)_{(1,1,0)}$ olur. $h'(1) = 2$ olduğundan $\beta'(1) = 2\alpha'(1)$: β bu noktadan aynı yönde, iki kat hızla geçer. Buna karşılık $s = 1/4$'te $h'(1/4) = 1/2$'dir ve β, $\alpha(1/16)$ noktasından α'nın yarı hızıyla geçer. Önceki örnekteki "başta yavaş, sonda hızlı" gözlemi böylece sayıya dönüşür.
■

4.4 Eğri Boyunca Türev

Hız vektörleri teğet vektör olduğundan, bir fonksiyonun bir hız vektörüne göre türevini alabiliriz. $\alpha'(t)[f]$ sayısı, yönlü türevin tanımı (Tanım 3.1) gereği, f'nin $\alpha(t)$ noktasından geçen ve $\alpha'(t)$ doğrultusundaki doğru boyunca ilk andaki değişim hızıdır. Öte yandan hareket eden bir nokta için daha doğal bir soru vardır: nokta eğrinin kendisi üzerinde ilerlerken f'nin değeri ne hızla değişir? Bu, tek değişkenli $t \mapsto f(\alpha(t))$ fonksiyonunun türevidir. Aşağıdaki lemma, iki sayının her zaman eşit olduğunu söyler.

Lemma 4.2 (Bir Fonksiyonun Eğri Boyunca Türevi). *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri ve f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $t \in I$ için*

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d\,(\,f(\alpha)\,)}{dt}(t)$$

olur. Burada $f(\alpha)$, $t \mapsto f(\alpha(t))$ kuralıyla verilen tek değişkenli bileşke fonksiyondur.

İspat.
İki tarafı iki farklı yoldan hesaplayıp aynı ifadeye ulaşacağız.
Birinci yol: sol taraf, yönlü türev formülüyle. *Hız vektörünün tanımına göre $\alpha'(t)$'nin uygulama noktası $\alpha(t)$, vektör kısmının i-inci koordinatı $(d\alpha_i/dt)(t)$'dir. Lemma 3.1'yü $\mathbf{p} = \alpha(t)$ ve $v_i = (d\alpha_i/dt)(t)$ ile uygularsak*

$$\alpha'(t)[f] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))\,\frac{d\alpha_i}{dt}(t)$$

bulunur.
İkinci yol: sağ taraf, zincir kuralıyla. *Bileşke fonksiyon $f(\alpha(t)) = f\,(\,\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\,)$ biçimindedir. f diferansiyellenebilir ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ türevlenebilir olduğundan çok değişkenli zincir kuralı*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{d}{dt} f\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right) \frac{d\alpha_i}{dt}(t)$$

verir. $\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right) = \alpha(t)$ *olduğundan sağdaki toplam, birinci yolda bulduğumuz toplamın aynısıdır. İki taraf eşittir.*
■

İspatın özü: iki hesap da f'nin kısmi türevlerini, koordinatların zamana göre değişim hızlarıyla tartıp toplar.
Lemmanın yorumu şudur. $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ ise $\alpha(t)$'den geçen ve $\alpha'(t)$ doğrultusundaki doğru, $u \mapsto \alpha(t) + u\,\alpha'(t)$, eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki **teğet doğrusudur** (tangent line); onu Alıştırma 4.13'nda helis için hesaplayacağız. Lemma, f'nin bu teğet doğrusu boyunca ilk andaki değişim hızının, f'nin eğrinin kendisi boyunca değişim hızıyla aynı olduğunu söyler. İlk mertebede f, eğri ile teğet doğrusunu birbirinden ayırt edemez. $\alpha'(t) = \mathbf{0}$ ise doğru tek noktaya dönüşür ve iki taraf da sıfırdır: sol taraf sıfır vektöre göre türevdir, sağ taraftaki toplamın bütün katsayıları da sıfırdır.

Örnek 4.14 (Helis Boyunca Orijine Uzaklığın Karesi). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t/2)$ helisi ve $f = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonu için $\alpha'(t)[f]$ sayısını lemmanın iki tarafından ayrı ayrı hesaplayalım; $t = \pi$'deki değerini bulup yorumlayalım.

Çözüm.
Sağ taraf. $f(\alpha(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2/4$, yani $1 + t^2/4$ olduğundan türev $t/2$'dir.
Sol taraf. Kısmi türevler $2x, 2y, 2z$'dir; $\alpha(t)$'de değerleri $2\cos t$, $2\sin t$ ve t olur. Hız vektörünün vektör kısmı $(-\sin t, \cos t, 1/2)$'dir. Lemma 3.1 ile

$$\alpha'(t)[f] = 2\cos t\,(-\sin t) + 2\sin t\cos t + t \cdot \frac{1}{2} = \frac{t}{2}$$

bulunur. İki taraf uyuşur.
$t = \pi$'de $\alpha(\pi) = (-1, 0, \pi/2)$ ve $\alpha'(\pi)[f] = \pi/2$'dir. f orijine uzaklığın karesidir; nokta bu anda orijinden uzaklaşmaktadır ve uzaklığın karesi $\pi/2$ hızıyla artar. Türev $t < 0$ için negatif, $t > 0$ için pozitif, $t = 0$'da sıfırdır: helis orijine en çok $t = 0$ anında, $(1, 0, 0)$ noktasında yaklaşır ve oradaki uzaklık 1'dir.
■

Örnek 4.15 (Eğri Boyunca Sabit Kalan Bir Fonksiyon). $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)$ eğrisi ve $f = xy$ fonksiyonu için her t'de $\alpha'(t)[f] = 0$ olduğunu lemmanın iki tarafından gösterelim ve sonucu $t = 0$ anında teğet doğrusu üzerinde yorumlayalım.

Çözüm.
Sağ taraf. $f(\alpha(t)) = e^t e^{-t} = 1$ sabittir; türevi her t için 0'dır.
Sol taraf. $\partial f/\partial x = y$, $\partial f/\partial y = x$, $\partial f/\partial z = 0$; $\alpha(t)$'de değerleri e^{-t}, e^t ve 0'dır. Hız vektörünün vektör kısmı $(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ olduğundan

$$\alpha'(t)[f] = e^{-t} \cdot e^t + e^t \cdot (-e^{-t}) + 0 \cdot \sqrt{2} = 1 - 1 = 0.$$

Yorum. Eğri $xy = 1$ yüzeyinin üzerinde kaldığı için f eğri boyunca hiç değişmez. Lemma, f'nin hız vektörü doğrultusundaki doğru boyunca da ilk anda değişmediğini söyler. $t = 0$'da $\alpha(0) = (1, 1, 0)$ ve $\alpha'(0) = (1, -1, \sqrt{2})_{(1,1,0)}$'dır; teğet doğrusu $u \mapsto (1 + u, 1 - u, \sqrt{2}\,u)$ olur. Bu doğru boyunca

$$f(1 + u, 1 - u, \sqrt{2}\,u) = (1 + u)(1 - u) = 1 - u^2$$

bulunur. Değer doğru üzerinde değişir, ama bu fonksiyonun türevi $-2u$ olduğundan $u = 0$'daki türevi 0'dır: değişim ancak ikinci mertebede başlar. Eğri yüzeyin üzerinde kalır, teğet doğrusu ise yüzeyden ancak ikinci mertebede ayrılır.
■

4.5 Birebir ve Periyodik Eğriler

Bir eğri bir fonksiyon olduğundan fonksiyonlar için bildiğimiz kavramlar ona da uygulanır. Hareket eden nokta açısından en doğal soru şudur: nokta, farklı iki anda aynı yerde bulunabilir mi?

Tanım 4.4 (Birebir Eğri). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\alpha(t) = \alpha(t_1)$ eşitliği yalnızca $t = t_1$ olduğunda sağlanıyorsa α'ya **birebir** (one-to-one) eğri denir.

Yani birebir bir eğri, rotasının hiçbir noktasından iki kez geçmez: kendini kesmez, bir yeri yeniden ziyaret etmez.
Doğru birebirdir: $\mathbf{p} + t\mathbf{q} = \mathbf{p} + t_1\mathbf{q}$ ise $(t - t_1)\mathbf{q} = \mathbf{0}$ olur ve $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ olduğundan $t = t_1$'dir. Buna karşılık silindir ile kürenin kesişimindeki eğri (Örnek 4.3) birebir değildir, çünkü $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (2, 0, 0)$'dır. Örnek 4.12'ndeki $\beta(s) = (s^2, 0, 0)$ da birebir değildir: $\beta(-1) = \beta(1)$.

Örnek 4.16 (Helis Birebirdir). $a > 0$, $b \neq 0$ olmak üzere $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ helisinin birebir olduğunu gösterelim. Helisin xy düzlemine izdüşümü olan daire hareketinin birebir olmadığına dikkat edelim.

> **Çözüm.**
> $\alpha(t) = \alpha(t_1)$ olsun. Üçüncü koordinatlar eşit olduğundan $bt = bt_1$'dir; $b \neq 0$ olduğundan iki tarafı b'ye bölerek $t = t_1$ buluruz. Dolayısıyla helis birebirdir.
> İzdüşüm $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, 0)$ ise birebir değildir: t ve $t + 2\pi$ anlarında aynı noktadadır. Helisin bu iki andaki noktaları aynı dikey doğru üzerindedir ama yükseklikleri $2\pi b$ kadar farklıdır. Sabit yükseliş, dairenin tekrar eden noktalarını birbirinden ayırır.
> ■

Birebirliğin tam karşıtı, aynı yolculuğun sonsuza kadar tekrarlanmasıdır.

Tanım 4.5 (Periyodik Eğri ve Periyot). $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. Her t için $\alpha(t + p) = \alpha(t)$ olacak biçimde bir $p > 0$ sayısı varsa α'ya **periyodik** (periodic) eğri denir. Bu özellikteki pozitif sayıların en küçüğüne α'nın **periyodu** (period) denir.

Yani periyodik bir eğri, belli bir süre sonunda bütün yolculuğu aynen tekrarlar; periyot, bir tam tekrarın süresidir.
Tanımda eğrinin bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olması gerekir; böylece her t için $t + p$ de tanım kümesindedir. p işe yarıyorsa $2p$, $3p$, ... da işe yarar; periyot, işe yarayan bütün pozitif sayıların en küçüğüdür. Sabit bir eğride her pozitif sayı işe yarar ve en küçükleri yoktur; bu yüzden sabit eğrinin periyodundan söz edilmez. Aşağıdaki örneklerde en küçük sayıyı hesapla bulacağız. Helis periyodik değildir: üçüncü koordinat bt sürekli arttığından (ya da azaldığından) nokta hiçbir zaman eski bir yerine dönmez; zaten birebir bir eğri hiçbir yere ikinci kez uğramaz.

Örnek 4.17 (Dairenin Periyodu). $r > 0$ için $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$ eğrisinin periyodik olduğunu ve periyodunun 2π olduğunu gösterelim.

> **Çözüm.**
> cos ve sin fonksiyonları 2π artışında değişmediğinden her t için $\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t)$'dir; α periyodiktir. Daha küçük bir sayının işe yaramadığını gösterelim. $p > 0$ ve her t için $\alpha(t + p) = \alpha(t)$ olsun. Özel olarak $t = 0$ için $(r\cos p, r\sin p, 0) = (r, 0, 0)$, yani $\cos p = 1$ olmalıdır. $\cos p = 1$ eşitliğini sağlayan pozitif sayılar $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$'dir; en küçüğü 2π'dir. Dolayısıyla periyot 2π'dir. Periyodik olduğu için bu eğri birebir değildir.
> ■

Örnek 4.18 (Silindir ile Kürenin Kesişimindeki Eğrinin Periyodu). $\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$ eğrisinin periyodunun 2π değil 4π olduğunu gösterelim.

> **Çözüm.**
> $p > 0$ sayısının işe yaraması için her t için şu üç eşitlik birlikte sağlanmalıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cos(t+p)=\cos t, \qquad \sin(t+p)=\sin t, \qquad \sin\frac{t+p}{2}=\sin\frac{t}{2}.$$

İlk ikisini $t=0$'da yazarsak $\cos p=1$ ve $\sin p=0$ bulunur; yani $p=2\pi k$, k pozitif bir tam sayıdır. Bu durumda üçüncü koordinat için

$$\sin\frac{t+2\pi k}{2}=\sin\left(\frac{t}{2}+\pi k\right)=(-1)^k\sin\frac{t}{2}$$

olur. Bunun her t için $\sin(t/2)$'ye eşit olması gerekir. $t=\pi$ alırsak $\sin(\pi/2)=1$ olduğundan $(-1)^k=1$, yani k çift olmalıdır. Tersine k çiftse üç eşitlik de her t için sağlanır. İşe yarayan sayılar $4\pi, 8\pi, 12\pi, \ldots$'dir ve en küçüğü 4π'dir.
$p=2\pi$'nin neden işe yaramadığına bakalım: $\alpha(2\pi)=\alpha(0)$ olduğu hâlde $\alpha(3\pi)=(0,0,-2)$ iken $\alpha(\pi)=(0,0,2)$'dir. Noktanın bir kez başladığı yere dönmesi periyot için yetmez; yolculuğun her anı tekrarlanmalıdır. 2π süresinde nokta rotanın yalnızca üst yarısını dolaşmış olur.
■

4.6 Düzgün Eğriler

Analiz açısından bir eğri üzerine konan en önemli koşul, hareket eden noktanın hiçbir an durmamasıdır. Hız vektörü sıfır olduğu anda nokta, türevlenebilirliği bozmadan gidiş yönünü birden değiştirebilir; rotada köşeler ve sivri uçlar ancak böyle anlarda ortaya çıkar.

Tanım 4.6 (Düzgün Eğri). $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ eğrisinin bütün hız vektörleri sıfırdan farklıysa, yani her $t\in I$ için $\alpha'(t)\neq\mathbf{0}$ ise α'ya **düzgün** ya da **regüler** (regular) eğri denir.

Burada $\alpha'(t)\neq\mathbf{0}$, hız vektörünün vektör kısmının $(0,0,0)$ olmaması demektir. Yani düzgün bir eğride hareket eden nokta hiçbir an durmaz.
Köşe sezgisi şöyledir. Hız vektörünün koordinatları t'nin sürekli fonksiyonlarıdır. Hız sıfırdan farklı kaldıkça gidiş doğrultusu da sürekli değişir; ani bir dönüş yapamaz. Doğrultunun birden değişebilmesi için hızın o anda sıfırdan geçmesi gerekir. Bu yüzden düzgün bir eğrinin rotasında köşe (corner) ya da sivri uç (cusp) bulunmaz.
Şimdiye kadarki örnek eğrilerimizin hepsi düzgündür:

eğri	hız vektörünün vektör kısmı	neden hiç sıfır olmaz
doğru $\mathbf{p}+t\mathbf{q}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{q}\neq\mathbf{0}$
helis	$(-a\sin t, a\cos t, b)$	üçüncü koordinat $b\neq 0$
silindir ile küre	$(-\sin t, \cos t, \cos(t/2))$	ilk ikisinin kareleri toplamı 1
hiperbol üzerinde	$(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$	üçüncü koordinat $\sqrt{2}$
kübik	$(3-3t^2, 6t, 3+3t^2)$	üçüncü koordinat en az 3

Silindir ile küre satırındaki üçüncü koordinat, $\alpha_3(t)=2\sin(t/2)$ fonksiyonunun türevi olan $\cos(t/2)$'dir.

Örnek 4.19 (Sivri Uçlu Bir Eğri). $\alpha(t)=(t^3,t^2,0)$ eğrisinin ($t\in\mathbb{R}$) düzgün olmadığını gösterelim ve rotasında hızın sıfırlandığı yerde ne olduğunu inceleyelim.

Çözüm.
Koordinatlar polinom olduğundan α bir eğridir. Hız vektörü

$$\alpha'(t)=(3t^2,2t,0)_{\alpha(t)}$$

olup ikinci koordinat yalnızca $t=0$'da sıfırdır ve o anda birinci koordinat da sıfırdır. Dolayısıyla $\alpha'(0)=\mathbf{0}$ ve α düzgün değildir.
Rotayı bulalım: $x=t^3$ ise $t=\sqrt[3]{x}$ (gerçel küp kök) ve $y=t^2=\sqrt[3]{x}^{\,2}$ olur. Bu, $y\geq 0$ olan ve y eksenine göre simetrik bir eğridir. Birkaç nokta:

 CC BY-NC-SA 4.0

t	$\alpha(t)$
-1	$(-1,1,0)$
$-1/2$	$(-1/8,1/4,0)$
0	$(0,0,0)$
$1/2$	$(1/8,1/4,0)$
1	$(1,1,0)$

Orijine yakın noktalarda $|\ y\ |, |\ x\ |$'e göre çok büyüktür: $t \neq 0$ için orijinden $\alpha(t)$'ye giden doğrultunun eğimi $y/x = t^2/t^3 = 1/t$'dir ve $t \to 0$ iken bu eğimin mutlak değeri sınırsız büyür. Yani iki kol da orijine y eksenine teğet olarak, yukarıdan gelir; rota orijinde aşağı bakan bir sivri uç oluşturur.
Hareketi izleyelim. $t < 0$ iken $2t < 0$ olduğundan nokta aşağı doğru, orijine iner; $t > 0$ iken yukarı doğru çıkar. Gidiş doğrultusu orijinde aşağıdan yukarıya birden döner. Bu ani dönüş, tam olarak hızın sıfır olduğu $t = 0$ anında gerçekleşir: nokta sivri uca yavaşlayarak gelir, bir an durur ve geri döner.
■

Örnek 4.20 (Rotası Doğru Olan Düzgün Olmayan Bir Eğri). $\beta(s) = (s^3, 2s^3, 0)$ eğrisinin ($s \in \mathbb{R}$) rotasında köşe olmadığı hâlde düzgün olmadığını gösterelim; Lemma 4.1 ile nedenini açıklayalım.

Çözüm.
$\beta'(s) = (3s^2, 6s^2, 0)_{\beta(s)}$ olduğundan $\beta'(0) = \mathbf{0}$'dır; β düzgün değildir.
Öte yandan $s \mapsto s^3$ fonksiyonu bütün gerçel sayıları birebir olarak dolaştığından β'nın rotası $\{(u, 2u, 0) : u \in \mathbb{R}\}$ doğrusudur, yani xy düzlemindeki $y = 2x$ doğrusu. Bu rotada köşe yoktur.
Açıklama şudur: β, düzgün $\alpha(t) = (t, 2t, 0)$ doğrusunun $h(s) = s^3$ ile yeniden parametrelendirmesidir. Lemma gereği

$$\beta'(s) = h'(s)\,\alpha'(h(s)) = 3s^2\,(1,2,0)_{\beta(s)}$$

olur ve bu, yalnızca $h'(0) = 0$ olduğu için $s = 0$'da sıfırlanır. Nokta aynı doğru üzerinde yavaşlar, $s = 0$ anında bir an durur ve aynı yönde yeniden hızlanır. Düzgün olmama bir rota özelliği değil, bir yolculuk özelliğidir: hızın sıfırlandığı anlarda köşe oluşabilir, ama oluşmak zorunda değildir.
■

> **i** Türevlenebilir ama köşeli bir eğri
>
> Hızın sıfırlandığı bir anda gerçek bir köşe de oluşabilir. $\varphi(t) = e^{-1/t^2}$ ($t \neq 0$) ve $\varphi(0) = 0$ fonksiyonu, analizden bilinen bir örnektir: $\mathbb{R}$ üzerinde her mertebeden türevlenebilir ve 0'daki bütün türevleri sıfırdır. $t \geq 0$ için $\alpha(t) = (\varphi(t), \varphi(t), 0)$ ve $t < 0$ için $\alpha(t) = (-\varphi(t), \varphi(t), 0)$ kuralıyla verilen eğrinin koordinatları her mertebeden türevlenebilirdir; ama rotası $y = |\ x\ |$ grafiğinin orijin çevresindeki parçasıdır ve orijinde bir köşesi vardır. Bu köşede $\alpha'(0) = \mathbf{0}$'dır. Düzgünlük koşulu, eğrileri bu tür köşelerden kurtaran koşuldur.

4.7 Düzlemde Seviye Kümeleri

Bu bölümde söylediğimiz her şey düzlemde de aynen geçerlidir. Düzlemde bir eğri, bir I açık aralığından $\mathbb{R}^2$'ye giden diferansiyellenebilir bir $\alpha(t) = (\ \alpha_1(t), \alpha_2(t)\ )$ fonksiyonudur; hız vektörü $\alpha'(t) = (\ \alpha_1'(t), \alpha_2'(t))_{\alpha(t)}$'dir; birebir, periyodik ve düzgün eğri tanımları da değişmeden kalır. Ama düzlemde bir eğriyi çoğu zaman hareket eden bir noktayla değil bir denklemle tanırız: "$x^2 + y^2 = r^2$ dairesi" deriz. Bu kısım iki bakışı birbirine bağlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 4.7 (Seviye Kümesi). f, $\mathbb{R}^2$ üzerinde diferansiyellenebilir gerçel değerli bir fonksiyon ve a bir sayı olsun. $f(\mathbf{p}) = a$ eşitliğini sağlayan bütün $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ noktalarının kümesine f'nin a değerindeki **seviye kümesi** (level set) denir ve bu küme kısaca $C : f = a$ diye yazılır.

Yani $C : f = a$, f'nin değerinin tam olarak a olduğu yerlerin haritasıdır; bir dağın belli yükseklikteki eşyükselti çizgisi gibi.
Her seviye kümesi eğriye benzemez; bazıları tek bir noktadır, bazıları kendini keser. İyi davranışı güvenceye alan koşul kısmi türevlerle ilgilidir. $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$ kısmi türevleri C'nin hiçbir noktasında aynı anda sıfır olmuyorsa şunlar doğrudur:

- C, birbirinden ayrık bir ya da daha fazla parçadan oluşur; bu parçalara C'nin **bileşenleri** (components) denir;
- her bileşen, her noktasının yakınında türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğine (y'yi x'in ya da x'i y'nin fonksiyonu olarak veren) benzer; köşesi, kendini kestiği bir yeri ya da tek başına duran bir noktası yoktur;
- her bileşen, birçok düzgün eğrinin rotasıdır. Rotası tam olarak bir bileşen olan düzgün bir eğriye o bileşenin bir **parametrelendirmesi** (parametrization) denir.

Bileşenler birer nokta kümesidir, α gibi parametrelendirilmiş eğriler ise fonksiyondur. İkisini karıştırmamak için bir bileşenden söz ederken "geometrik eğri" ya da doğrudan "bileşen" diyeceğiz.

> **i** Bu olgular nereden gelir?
>
> Yukarıdaki olguların genel ispatı, analizdeki kapalı fonksiyon teoremine (implicit function theorem) dayanır ve bu bölümün kapsamı dışındadır. Aşağıdaki her örnekte iddiaları açık parametrelendirmelerle doğrudan denetleyeceğiz. Koşulun rolü şöyle sezilebilir: $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ çifti bir noktada sıfır değilse, $f = a$ denklemi o noktanın yakınında değişkenlerden biri için çözülebilir ve küme orada düzgün bir yay gibi görünür. İki kısmi türevin birlikte sıfırlandığı yerlerde ise küme kendini kesebilir ya da tek bir noktaya çökebilir (Örnek 4.23).

Örnek 4.21 (Daire Bir Seviye Kümesidir). $r > 0$ ve $f = x^2 + y^2$ olsun. $C : x^2 + y^2 = r^2$ seviye kümesinde kısmi türevlerin aynı anda sıfırlanmadığını ve $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ eğrisinin C'nin periyodik, düzgün bir parametrelendirmesi olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Koşul. $\partial f/\partial x = 2x$ ve $\partial f/\partial y = 2y$ yalnızca $(0,0)$ noktasında birlikte sıfırdır. $f(0,0) = 0 \neq r^2$ olduğundan bu nokta C'de değildir; koşul C'nin her noktasında sağlanır.
Rota. Her t için $(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 = r^2$ olduğundan $\alpha(t)$ noktası C'dedir. Tersine $(x,y) \in C$ ise $(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1$'dir, yani $(x/r, y/r)$ birim dairenin üzerindedir; $\cos t = x/r$ ve $\sin t = y/r$ olan bir t açısı vardır ve bu t için $\alpha(t) = (x,y)$ olur. Dolayısıyla α'nın rotası C'nin tamamıdır. C tek bir kesintisiz halka olarak dolaşıldığı için tek bileşenlidir.
Düzgünlük. $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)_{\alpha(t)}$ vektör kısmının koordinatlarının kareleri toplamı $r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t = r^2 > 0$'dır; hız hiçbir anda sıfır olmaz.
Periyot. $\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t)$'dir. $\alpha(t+p) = \alpha(t)$ her t için sağlanıyorsa $t = 0$'da $\cos p = 1$ bulunur, yani p en az 2π'dir. Periyot 2π'dir.
C'nin başka parametrelendirmeleri de vardır: $(r\cos 2t, r\sin 2t)$ daireyi iki kat hızla dolaşır ve periyodu π'dir; $(r\cos t, -r\sin t)$ ise daireyi saat yönünde dolaşır. Bir bileşenin parametrelendirmesi tek değildir.
■

Örnek 4.22 (Hiperbolün İki Kolu). $r > 0$ ve $f = x^2 - y^2$ olsun. $C : x^2 - y^2 = r^2$ seviye kümesinin, $x > 0$ bölgesindeki C_1 ve $x < 0$ bölgesindeki C_2 olmak üzere iki bileşene ayrıldığını ve $\beta(t) = (r\cosh t, r\sinh t)$ eğrisinin C_1'in birebir, düzgün bir parametrelendirmesi olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Hiperbolik fonksiyonları hatırlayalım: $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ ve $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$. Türevleri $(\cosh t)' = \sinh t$ ve $(\sinh t)' = \cosh t$'dir; ayrıca

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

olur, çünkü paydaki iki kare arasındaki fark $4e^t e^{-t} = 4$'tür.
Koşul. $\partial f/\partial x = 2x$ ve $\partial f/\partial y = -2y$ yalnızca orijinde birlikte sıfırdır; $f(0,0) = 0 \neq r^2$ olduğundan orijin C'de değildir.
İki bileşen. C'nin her noktasında $x^2 = r^2 + y^2 \geq r^2$, yani $\mid x \mid \geq r$'dir. C'nin hiçbir noktası $-r < x < r$ şeridine girmez. Bu yüzden C, şeridin sağında kalan C_1 ($x \geq r$) ve solunda kalan C_2 ($x \leq -r$) parçalarına ayrılır ve C üzerinde kalarak birinden ötekine geçmek mümkün değildir. Her parçanın gerçekten tek bir bileşen olduğu aşağıda görülür: C_1'in tamamı tek bir eğrinin rotasıdır, yani nokta C_1'in her yerine kesintisiz bir yolculukla ulaşır; C_2 için de aynısı geçerlidir.
Rota. $\beta(t)$ noktası C'dedir, çünkü

$$(r\cosh t)^2 - (r\sinh t)^2 = r^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = r^2;$$

üstelik $r\cosh t > 0$ olduğundan C_1'dedir. Tersine $(x,y) \in C_1$ olsun. sinh fonksiyonunun türevi $\cosh t > 0$ olduğundan sinh kesin artandır ve $-\infty$'dan ∞'a bütün değerleri alır; dolayısıyla $r\sinh t = y$ olan tek bir t vardır. Bu t için

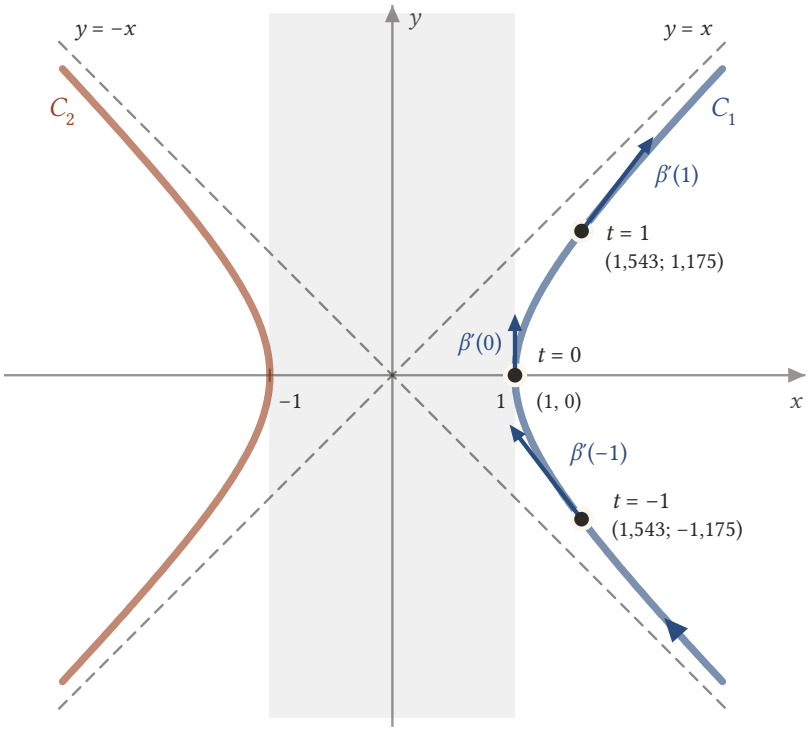
$$(r\cosh t)^2 = r^2 + r^2\sinh^2 t = r^2 + y^2 = x^2$$

olur; $r\cosh t$ ile x ikisi de pozitif olduğundan $r\cosh t = x$'tir. Yani $\beta(t) = (x,y)$: β'nın rotası C_1'in tamamıdır.
Birebirlik ve düzgünlük. $\beta(t) = \beta(t_1)$ ise $r\sinh t = r\sinh t_1$'dir ve sinh kesin artan olduğundan $t = t_1$ bulunur. Hız vektörü $\beta'(t) = (r\sinh t, r\cosh t)_{\beta(t)}$'dir ve ikinci koordinatı en az r olduğundan hiç sıfır olmaz.
Öteki kol C_2 için $t \mapsto (-r\cosh t, r\sinh t)$ aynı özelliklere sahip bir parametrelendirmedir. $r = 1$ için $\cosh 1 \approx 1{,}543$ ve $\sinh 1 \approx 1{,}175$ olduğundan $\beta(-1) \approx (1{,}543; -1{,}175)$, $\beta(0) = (1,0)$ ve $\beta(1) \approx (1{,}543; 1{,}175)$ olur. Kolun asimptotlara yaklaşması da bu parametrelendirmeden okunur. $\cosh t - \sinh t = e^{-t}$ ve $\cosh t + \sinh t = e^t$ olduğundan $\beta(t) = (x,y)$ için

$$x - y = re^{-t}, \qquad x + y = re^t$$

bulunur. $t \to \infty$ iken $x - y$ farkı sıfıra gider, yani kol $y = x$ doğrusuna yaklaşır; $t \to -\infty$ iken $x + y$ toplamı sıfıra gider, yani kol $y = -x$ doğrusuna yaklaşır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.6: $r = 1$ için $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü, kesikli çizilen $y = x$ ve $y = -x$ asimptotlarına yaklaşan iki koldan oluşur: sağdaki C_1 (mavi) ve soldaki C_2 (turuncu). $-1 < x < 1$ şeridine (gri) hiperbolün hiçbir noktası girmez; bu yüzden hiperbol üzerinde kalarak bir koldan ötekine geçilemez. $\beta(t) = (\cosh t, \sinh t)$ noktası C_1'i aşağıdan yukarı dolaşır; $t = -1, 0, 1$ anlarındaki hız vektörleri yarı ölçekte çizilmiştir. Hızın ikinci koordinatı $\cosh t \geq 1$ olduğundan hız hiçbir anda sıfır olmaz.

■

Örnek 4.23 (Koşulun Bozulduğu Bir Seviye Kümesi). $f = x^2 - y^2$ fonksiyonunun 0 değerindeki $C : x^2 - y^2 = 0$ seviye kümesinde kısmi türev koşulunun bozulduğunu ve kümenin ayrık, düzgün parçalara bölünmediğini gösterelim.

Çözüm.
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ olduğundan C, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularının birleşimidir. Kısmi türevler $2x$ ve $-2y$ orijinde birlikte sıfırdır ve orijin C'dedir; koşul bozulur.
Kümenin biçimi de bozulur: iki doğru orijinde kesişir ve orijinin yakınında C bir "X" gibi görünür; orijinden dört kol çıkar. Orijinin hiçbir küçük çevresinde C, tek bir türevlenebilir fonksiyonun grafiği değildir: y'yi x'in fonksiyonu olarak yazmaya çalışırsak her $x \neq 0$ için iki değer (x ve $-x$) bulunur, x'i y'nin fonksiyonu olarak yazmaya çalışırsak da aynı sorun çıkar. Orijin çıkarılırsa C dört ayrık açık yarı doğruya ayrılır; ama orijinin kendisi hiçbir bileşene düzgün biçimde yerleştirilemez. Sorun tam olarak koşulun bozulduğu noktada ortaya çıkar.
■

Benzer biçimde $C : x^2 + y^2 = 0$ seviye kümesi yalnızca orijinden oluşur ve orada iki kısmi türev de sıfırdır. Tek bir nokta hiçbir düzgün eğrinin rotası olamaz: rotası tek nokta olan bir eğri sabittir ve sabit bir eğrinin hızı her an sıfırdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

4.8 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (Silindir ile Kürenin Kesişimindeki Eğrinin Hızı). $\alpha(t) = (1+\cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$ eğrisinin hız vektörünü genel t için ve $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$ anlarında bulunuz. Bu vektörlerin rota üzerinde nereden çıktığını ve hangi yöne baktığını açıklayınız.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonlarının türevleri $(1+\cos t)' = -\sin t$ ve $(\sin t)' = \cos t$'dir. Üçüncü koordinatta zincir kuralı gerekir: $2\sin(t/2)$ fonksiyonunun türevi $2\cos(t/2)\cdot\frac{1}{2}$, yani $\cos(t/2)$'dir. Dolayısıyla

$$\alpha'(t) = \left(-\sin t, \cos t, \cos\frac{t}{2}\right)_{\alpha(t)}.$$

İstenen anlarda:

t	$\alpha(t)$	$\alpha'(t)$'nin vektör kısmı
0	$(2,0,0)$	$(0,1,1)$
$\pi/2$	$(1,1,\sqrt{2})$	$(-1,0,\sqrt{2}/2)$
π	$(0,0,2)$	$(0,-1,0)$

Bu vektörleri rota üzerinde düşünelim.

- $t=0$'da nokta kürenin ekvatorundaki $(2,0,0)$ noktasındadır. Hızın y ve z koordinatları eşittir: nokta pozitif y yönüne giderken aynı oranda yükselir, ekvatordan 45° eğimle kalkar.
- $t=\pi/2$'de nokta $(1,1,\sqrt{2})$'dedir. x koordinatı azalmaktadır; $y=\sin t$ bu anda en büyük değeri 1'dedir ve değişmez; z hâlâ artar ama daha yavaş.
- $t=\pi$'de nokta kuzey kutbu $(0,0,2)$'dedir. Hız yataydır: $z=2\sin(t/2)$ en büyük değerine ulaşmıştır ve bu anda değişmez. Nokta negatif y yönünde ilerleyerek rotanın $y<0$ tarafına geçer.

Bir denetim yapalım. Eğri hem kürenin hem silindirin üzerinde kaldığına göre hızı iki yüzeye de teğet olmalıdır. Konumla hızın iç çarpımını hesaplayalım; son terimde $2\sin(t/2)\cos(t/2) = \sin t$ özdeşliğini kullanırız:

$$\begin{aligned}(1+\cos t)(-\sin t) + \sin t\cos t + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ = -\sin t - \sin t\cos t + \sin t\cos t + \sin t = 0\end{aligned}$$

bulunur; hız, kürenin merkezinden gelen yarıçapa diktir. Silindirin yatay yarıçapı $(\cos t, \sin t, 0)$ ile iç çarpım da $-\sin t\cos t + \cos t\sin t = 0$'dır.
■

Alıştırma 4.2 (Hızından Bulunan Eğri). $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, $\alpha(0)=(1,0,5)$ koşulunu sağlayan ve her t için hız vektörünün vektör kısmı (t^2, t, e^t) olan eğriyi bulunuz; böyle tek bir eğri bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Hız vektörünün vektör kısmı, koordinat fonksiyonlarının türevlerinden oluşur. Dolayısıyla

$$\alpha_1'(t) = t^2, \qquad \alpha_2'(t) = t, \qquad \alpha_3'(t) = e^t$$

olmalıdır. Türevi t^2 olan fonksiyonlar $t^3/3 + c_1$ biçimindedir; benzer biçimde $\alpha_2(t) = t^2/2 + c_2$ ve $\alpha_3(t) = e^t + c_3$ olur. Başlangıç koşulu $\alpha(0) = (c_1, c_2, 1+c_3) = (1,0,5)$ olduğundan $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ve $c_3 = 4$ bulunur:

$$\alpha(t) = \left(1 + \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, e^t + 4\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Denetim: türevler (t^2, t, e^t) ve $\alpha(0) = (1, 0, 5)$'tir.
Teklik. β da aynı iki koşulu sağlasın ve $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ diyelim. O zaman her t için $\gamma_i'(t) = 0$ ve $\gamma_i(0) = 0$'dır. Ortalama değer teoremi gereği her $t \neq 0$ için 0 ile t arasında bir c sayısı vardır ve $\gamma_i(t) - \gamma_i(0) = \gamma_i'(c)\, t = 0$ olur. Yani her t için $\gamma_i(t) = 0$, dolayısıyla $\beta = \alpha$'dır.
Bu akıl yürütmede tanım kümesinin bir aralık olması önemlidir. Tanım kümesi arada boşluk bırakan iki parçadan oluşsaydı, türevi sıfır olan bir fonksiyon iki parçada farklı sabitler alabilirdi ve teklik bozulurdu.
■

Alıştırma 4.3 (Ters Kosinüsle Yeniden Parametrelendirme). $\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$ eğrisinin $J : 0 < s < 1$ üzerinde $h(s) = \cos^{-1} s$ ile yeniden parametrelendirmesi olan $\beta = \alpha(h)$ eğrisinin koordinat fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm.
$\cos^{-1}$, $[0, \pi]$ aralığına kısıtlanmış kosinüsün tersidir. $0 < s < 1$ için $h(s)$ açısı 0 ile $\pi/2$ arasındadır. h, J üzerinde türevlenebilirdir ve $h'(s) = -1/\sqrt{1 - s^2}$ olur; α bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olduğundan bileşke kurulabilir.
$t = h(s)$ diyelim; o zaman $\cos t = s$'dir. Diğer iki ifadeyi s cinsinden yazalım.

- $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - s^2$ ve $0 < t < \pi/2$ olduğundan $\sin t > 0$; dolayısıyla $\sin t = \sqrt{1 - s^2}$.
- Yarım açı özdeşliği $\sin^2(t/2) = (1 - \cos t)/2$, yani $(1 - s)/2$ verir; $0 < t/2 < \pi/4$ olduğundan $\sin(t/2) > 0$'dır.

İkinci maddeden

$$2\sin\frac{t}{2} = 2\sqrt{\frac{1 - s}{2}} = \sqrt{2 - 2s}$$

bulunur. Böylece

$$\beta(s) = \left(1 + s,\, \sqrt{1 - s^2},\, \sqrt{2 - 2s}\right), \qquad 0 < s < 1.$$

Denetim: kareler toplamı $(1 + s)^2 + (1 - s^2) + (2 - 2s)$ açılınca 4 bulunduğundan $\beta(s)$ kürenin üzerindedir; $(\beta_1 - 1)^2 + \beta_2^2 = s^2 + 1 - s^2 = 1$ olduğundan silindirin üzerindedir.
s, 0'dan 1'e giderken $t = \cos^{-1} s$ açısı $\pi/2$'den 0'a azalır. Yani β, α'nın rotasının $\alpha(\pi/2) = (1, 1, \sqrt{2})$ ile $\alpha(0) = (2, 0, 0)$ arasındaki parçasını (uç noktalar hariç) ters yönde dolaşır. Bu, $h'(s) < 0$ olmasıyla ve Lemma 4.1 ile uyumludur.
■

Alıştırma 4.4 (Logaritmayla Yeniden Parametrelendirme ve Hız Formülü). $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t)$ eğrisini $J : s > 0$ üzerinde $h(s) = \log s$ ile yeniden parametrelendiriniz. Lemma 4.1'ndeki eşitliği, iki tarafı ayrı ayrı hesaplayarak bu durumda doğrulayınız.

Çözüm.
h, $(0, \infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $h'(s) = 1/s$'dir. $e^{\log s} = s$ ve $e^{-\log s} = 1/s$ olduğundan

$$\beta(s) = \alpha(\log s) = \left(s,\, \frac{1}{s},\, \sqrt{2}\log s\right).$$

Sol taraf. β'nın koordinatlarının türevleri 1, $-1/s^2$ ve $\sqrt{2}/s$'dir:

$$\beta'(s) = \left(1,\, -\frac{1}{s^2},\, \frac{\sqrt{2}}{s}\right)_{\beta(s)}.$$

Sağ taraf. $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})_{\alpha(t)}$'dir; $t = \log s$ koyarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\alpha'(h(s)) = \left(s, -\frac{1}{s}, \sqrt{2}\right)_{\alpha(\log s)}$$

olur. Bunu $h'(s) = 1/s$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{s}\,\alpha'(h(s)) = \left(1, -\frac{1}{s^2}, \frac{\sqrt{2}}{s}\right)_{\alpha(\log s)}.$$

$\alpha(\log s) = \beta(s)$ olduğundan iki tarafın uygulama noktaları da vektör kısımları da aynıdır; eşitlik doğrulanmıştır.
Yeni parametreyle eğri $x = s$, $y = 1/s$ biçiminde hiperbolün üzerinden geçer ve yüksekliği $\sqrt{2}\log s$ olur. Yükselme hızı $\sqrt{2}/s$, s büyüdükçe azalır. $s = 1$'de $h'(1) = 1$ olduğundan $\beta'(1) = \alpha'(0) = (1, -1, \sqrt{2})_{(1,1,0)}$'dır.
■

Alıştırma 4.5 (İki Noktadan Geçen Doğru). $(1, -3, -1)$ ve $(6, 2, 1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini, yani rotası bu doğru olan bir $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ eğrisini bulunuz.

Çözüm.
$t = 0$'da ilk noktada, $t = 1$'de ikinci noktada olmak isteyelim. O zaman $\mathbf{p} = (1, -3, -1)$ ve

$$\mathbf{q} = (6, 2, 1) - (1, -3, -1) = (5, 5, 2)$$

olmalıdır. Doğru

$$\alpha(t) = (1 + 5t, -3 + 5t, -1 + 2t)$$

olur. Denetim: $\alpha(0) = (1, -3, -1)$ ve $\alpha(1) = (6, 2, 1)$.
Aynı doğrunun başka denklemleri de vardır: $\mathbf{p}$ yerine doğrunun herhangi bir noktası, $\mathbf{q}$ yerine onun sıfırdan farklı herhangi bir katı alınabilir. Bunlar birbirinin yeniden parametrelendirmeleridir. Parametreyi yok ederek rotayı tek bir denklem zinciriyle de yazabiliriz: her koordinattan t çekilirse

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y + 3}{5} = \frac{z + 1}{2}$$

bulunur.
■

Alıştırma 4.6 (İki Doğru Kesişir mi?). $(1, -3, -1)$ ile $(6, 2, 1)$ noktalarından geçen doğru ve $(-1, 1, 0)$ ile $(-5, -1, -1)$ noktalarından geçen doğru kesişir mi? Kesişiyorlarsa kesişim noktasını bulunuz.

Çözüm.
Önce iki doğrunun denklemlerini kuralım. Birinci doğru için $t = 0$'da $(1, -3, -1)$ noktasında, $t = 1$'de $(6, 2, 1)$ noktasında olmak isteyelim: $\mathbf{p} = (1, -3, -1)$ ve

$$\mathbf{q} = (6, 2, 1) - (1, -3, -1) = (5, 5, 2)$$

alırsak birinci doğru

$$\alpha(t) = (1 + 5t, -3 + 5t, -1 + 2t)$$

eğrisi olur. İkinci doğru için $\mathbf{p}' = (-1, 1, 0)$ ve

$$\mathbf{q}' = (-5, -1, -1) - (-1, 1, 0) = (-4, -2, -1)$$

alırsak $\beta(u) = (-1 - 4u, 1 - 2u, -u)$ bulunur. İkinci doğru için ayrı bir u harfi kullanıyoruz, çünkü iki rotanın ortak bir noktası olsa bile iki eğri oraya farklı anlarda varabilir.
Doğrular ancak ve ancak $\alpha(t) = \beta(u)$ olan t ve u sayıları varsa kesişir. Koordinatları eşitleyelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} 1+5t &= -1-4u, \\ -3+5t &= 1-2u, \\ -1+2t &= -u. \end{aligned}$$

İki bilinmeyen için üç denklem vardır; genel olarak çözüm beklenmez. Üçüncü denklemden $u = 1 - 2t$. Bunu birincide yerine koyarsak $1 + 5t = -1 - 4 + 8t$, yani $3t = 6$ ve $t = 2$ bulunur; buradan $u = -3$. İkinci denklemi denetleyelim: sol taraf $-3 + 10 = 7$, sağ taraf $1 + 6 = 7$. Üç denklem de sağlanır. Doğrular kesişir. Kesişim noktası

$$\alpha(2) = (11, 7, 3) = \beta(-3)$$

noktasıdır. Doğrultular $(5, 5, 2)$ ve $(-4, -2, -1)$ birbirinin katı olmadığından doğrular farklıdır ve tek bir noktada kesişir.
Aynı harfi kullansaydık başka bir soru sormuş olurduk: iki hareketli nokta aynı anda aynı yerde mi? $\alpha(t) = \beta(t)$ denkleminin birinci koordinatı $t = -2/9$ verir, ama bu değer için ikinci koordinatlar $-37/9$ ve $13/9$ olur. Rotalar kesişir, noktalar ise hiç çarpışmaz.
■

Alıştırma 4.7 (Yönlü Türevde Doğru Yerine Eğri). $\mathbf{v_p}$ bir teğet vektör ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $0 \in I$ olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi $\alpha(0) = \mathbf{p}$ ve $\alpha'(0) = \mathbf{v_p}$ koşullarını sağlasın; böyle bir eğriye başlangıç hızı $\mathbf{v_p}$ olan eğri diyelim. Lemma 4.2'i kullanarak

$$\mathbf{v_p}[f] = \frac{d\,(\,f(\alpha)\,)}{dt}(0)$$

olduğunu gösteriniz. Yani yönlü türevin tanımındaki $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu, başlangıç hızı $\mathbf{v_p}$ olan herhangi bir eğriyle değiştirilebilir.

Çözüm.
$\alpha'(0) = \mathbf{v_p}$ eşitliği iki teğet vektörün eşitliğidir: uygulama noktaları aynıdır ($\alpha(0) = \mathbf{p}$) ve vektör kısımları aynıdır. Dolayısıyla bu iki teğet vektöre göre alınan türevler de aynıdır: $\alpha'(0)[f] = \mathbf{v_p}[f]$.
Öte yandan Lemma 4.2, $t = 0$ anında

$$\alpha'(0)[f] = \frac{d\,(\,f(\alpha)\,)}{dt}(0)$$

der. İki eşitliği birleştirince istenen sonuç çıkar.
Tanımdaki doğru, $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$, bu türden eğrilerden yalnızca biridir: Örnek 4.8 gereği hızının vektör kısmı her an $\mathbf{v}$'dir ve $\alpha(0) = \mathbf{p}$'dir. Sonuç, yönlü türevin yalnızca başlangıç noktasına ve başlangıç hızına bağlı olduğunu, eğrinin geri kalanına bağlı olmadığını söyler.
Kısa bir örnek: $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ ve $f = xy$ olsun. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ dairesi için $\alpha(0) = \mathbf{p}$ ve $\alpha'(0) = (0, 1, 0)_{\mathbf{p}}$'dir. Daire boyunca $f(\alpha(t)) = \cos t \sin t$ olur; türevi $\cos^2 t - \sin^2 t$, $t = 0$'da 1'dir. Doğru boyunca $f(1, t, 0) = t$ olur ve $t = 0$'daki türev yine 1'dir. Lemma 3.1 da aynı sayıyı verir: $\mathbf{p}$'de $\partial f/\partial x = y = 0$ ve $\partial f/\partial y = x = 1$ olduğundan $\mathbf{v_p}[f] = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$.
■

Alıştırma 4.8 (Aynı Başlangıç Hızına Sahip Üç Eğri). $t \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha(t) = (t, 1 + t^2, t), \qquad \beta(t) = (\sin t, \cos t, t), \qquad \gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, t)$$

eğrilerinin başlangıç hızlarının aynı olduğunu, yani üçünün de $t = 0$ anında aynı noktadan aynı hız vektörüyle geçtiğini gösteriniz; bu ortak $\mathbf{v_p}$ teğet vektörünü bulunuz.

Çözüm.
Başlangıç noktaları: $\sin 0 = \sinh 0 = 0$ ve $\cos 0 = \cosh 0 = 1$ olduğundan

$$\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = (0, 1, 0).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Hız vektörleri:

- $\alpha'(t) = (1, 2t, 1)$, dolayısıyla $\alpha'(0) = (1,0,1)_{(0,1,0)}$;
- $\beta'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$, dolayısıyla $\beta'(0) = (1,0,1)_{(0,1,0)}$;
- $\gamma'(t) = (\cosh t, \sinh t, 1)$, dolayısıyla $\gamma'(0) = (1,0,1)_{(0,1,0)}$.

Üç başlangıç hızı da $\mathbf{p} = (0,1,0)$ ve $\mathbf{v} = (1,0,1)$ olmak üzere aynı $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ teğet vektörüdür.
Eğrilerin kendileri ise çok farklıdır: α, $x = z$ düzlemindeki $y = 1 + x^2$ parabolünün üzerindedir; β, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin üzerinde bir helistir; γ ise $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ gereği $y^2 - x^2 = 1$ yüzeyinin üzerindedir. Başlangıç anında birinci mertebeden aynı davranırlar, sonra ayrılırlar.
■

Alıştırma 4.9 (Üç Eğriyle Aynı Yönlü Türev). $f = x^2 - y^2 + z^2$ olsun. $\alpha(t) = (t, 1+t^2, t)$, $\beta(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ve $\gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, t)$ eğrilerinin ortak başlangıç hızı $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (1,0,1)_{(0,1,0)}$ için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını, üç eğrinin her biri boyunca f'nin türevini $t = 0$'da hesaplayarak bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 4.7 gereği üç hesap da $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$'yi vermelidir.
Birinci eğri. Koordinatları f'de yerine koyarsak

$$f(\alpha(t)) = t^2 - (1+t^2)^2 + t^2 = 2t^2 - 1 - 2t^2 - t^4 = -1 - t^4$$

bulunur. Türev $-4t^3$, $t = 0$'da 0.
İkinci eğri. $\sin^2 t - \cos^2 t = -\cos 2t$ olduğundan $f(\beta(t)) = -\cos 2t + t^2$. Türev $2\sin 2t + 2t$, $t = 0$'da 0.
Üçüncü eğri. $f(\gamma(t)) = \sinh^2 t - \cosh^2 t + t^2$, yani $-1 + t^2$. Türev $2t$, $t = 0$'da 0.
Üç yol da $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 0$ verir. Lemma 3.1 ile denetleyelim: kısmi türevler $2x$, $-2y$, $2z$; $\mathbf{p} = (0,1,0)$'da 0, -2, 0. $\mathbf{v} = (1,0,1)$ ile toplam $1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 0$.
Dikkat: üç bileşke fonksiyon farklıdır ($-1 - t^4$, $t^2 - \cos 2t$, $t^2 - 1$) ve $t = 0$'daki ikinci türevleri de farklıdır (0, 6 ve 2). Eğriler yalnızca birinci türevde anlaşır; yönlü türev de tam olarak bu birinci mertebe bilgisidir.
■

Alıştırma 4.10 (Elipsin Çizimi ve Parametrelendirmesi). $\mathbb{R}^2$'de $C : 4x^2 + y^2 = 1$ seviye kümesinin kaba resmini çiziniz ve C için bir parametrelendirme bulunuz.

Çözüm.
Koşul. $f = 4x^2 + y^2$ için kısmi türevler $8x$ ve $2y$ yalnızca orijinde birlikte sıfırdır; $f(0,0) = 0 \neq 1$ olduğundan orijin C'de değildir.
Resim. Denklem $(2x)^2 + y^2 = 1$ biçiminde yazılabilir: C, merkezi orijin olan bir elipstir. $y = 0$ için $x = \pm 1/2$, $x = 0$ için $y = \pm 1$ bulunur; $x = 1/4$ için $y^2 = 3/4$, yani $y \approx \pm 0{,}866$. Elips $|\,x\,| \leq 1/2$, $|\,y\,| \leq 1$ dikdörtgenine sığan, iki eksene göre simetrik, eninden iki kat uzun bir ovaldir; birim dairenin x yönünde yarıya sıkıştırılmış hâlidir.
Parametrelendirme. $2x = \cos t$ ve $y = \sin t$ seçelim:

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \sin t\right).$$

Her t için $4 \cdot \frac{1}{4}\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olduğundan $\alpha(t) \in C$'dir. Tersine $(x,y) \in C$ ise $(2x, y)$ birim daire dedir; $\cos t = 2x$, $\sin t = y$ olan bir t için $\alpha(t) = (x,y)$ olur. Hız vektörü $\alpha'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t, \cos t\right)_{\alpha(t)}$'dir; sıfır olması için $\sin t$ ile $\cos t$'nin birlikte sıfır olması gerekirdi, bu imkânsızdır. α düzgündür ve dairede olduğu gibi periyodu 2π'dir.
■

Alıştırma 4.11 (Düzlemde Bir Doğrunun Parametrelendirmesi). $\mathbb{R}^2$'de $C : 3x + 4y = 1$ seviye kümesinin kaba resmini çiziniz ve C için bir parametrelendirme bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Koşul. $f = 3x + 4y$ için kısmi türevler 3 ve 4 sabittir ve hiç sıfır olmaz.
Resim. C bir doğrudur. $y = 0$ için $x = 1/3$, $x = 0$ için $y = 1/4$ bulunur; doğru eksenleri $(1/3, 0)$ ve $(0, 1/4)$ noktalarında keser ve eğimi $-3/4$'tür. Bir nokta daha: $3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 1$ olduğundan $(-1, 1)$ de C'dedir.
Parametrelendirme. C'nin bir noktası olarak $\mathbf{p} = (-1, 1)$'i alalım. Doğrultu vektörü $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ için $3q_1 + 4q_2 = 0$ olmalıdır ki doğru boyunca f değişmesin; $\mathbf{q} = (4, -3)$ uygundur:

$$\alpha(t) = (-1 + 4t,\, 1 - 3t).$$

Denetim:

$$3(-1 + 4t) + 4(1 - 3t) = -3 + 12t + 4 - 12t = 1.$$

Tersine $(x, y) \in C$ ise $t = (x + 1)/4$ için $\alpha(t)$'nin birinci koordinatı x, ikinci koordinatı $1 - 3(x + 1)/4 = (1 - 3x)/4 = y$ olur. α birebirdir ve hızının vektör kısmı $(4, -3)$ hiç sıfır olmadığından düzgündür. Başka bir seçim $t \mapsto (t,\, (1 - 3t)/4)$'tür.
■

Alıştırma 4.12 (Üstel Fonksiyonun Grafiği). $\mathbb{R}^2$'de $C : y = e^x$ kümesinin kaba resmini çiziniz ve C için bir parametrelendirme bulunuz.

Çözüm.
Koşul. C, $f = y - e^x$ fonksiyonunun 0 değerindeki seviye kümesidir. Kısmi türevler $-e^x$ ve 1'dir; ikincisi hiç sıfır olmadığından koşul her yerde sağlanır.
Resim. C üstel fonksiyonun grafiğidir: $(0, 1)$, $(1, e) \approx (1;\, 2{,}718)$ ve $(-1, 1/e) \approx (-1;\, 0{,}368)$ noktalarından geçer. Daima x ekseninin üstündedir; $x \to -\infty$ iken x eksenine yaklaşır, x büyüdükçe hızla yükselir.
Parametrelendirme. $\alpha(t) = (t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, C'nin her noktasından tam bir kez geçer: $(x, e^x) = \alpha(x)$ ve birinci koordinat t'yi belirler. Hızının vektör kısmı $(1, e^t)$ olup birinci koordinatı 1'dir; α birebir ve düzgündür. Başka bir parametrelendirme $s > 0$ için $\beta(s) = (\log s, s)$'dir; bu, α'nın $h(s) = \log s$ ile yeniden parametrelendirmesidir.
■

Alıştırma 4.13 (Helisin Teğet Doğruları). Düzgün bir α eğrisinin sabit bir t anındaki teğet doğrusu, $\alpha'(t)$'nin uygulama noktası bir yana bırakılıp vektör kısmı kullanılarak yazılan $u \mapsto \alpha(t) + u\,\alpha'(t)$ doğrusudur. $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ helisinin $\alpha(0)$ ve $\alpha(\pi/4)$ noktalarındaki teğet doğrularını bulunuz.

Çözüm.
Hız vektörü $\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1)_{\alpha(t)}$'dir; üçüncü koordinatı 1 olduğundan helis düzgündür ve teğet doğruları her noktada tanımlıdır.
$t = 0$. $\alpha(0) = (2, 0, 0)$ ve vektör kısmı $(0, 2, 1)$'dir. Teğet doğrusu

$$u \mapsto (2, 0, 0) + u\,(0, 2, 1) = (2,\, 2u,\, u)$$

olur.
$t = \pi/4$. $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ olduğundan $\alpha(\pi/4) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$ ve vektör kısmı $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$'dir. Teğet doğrusu

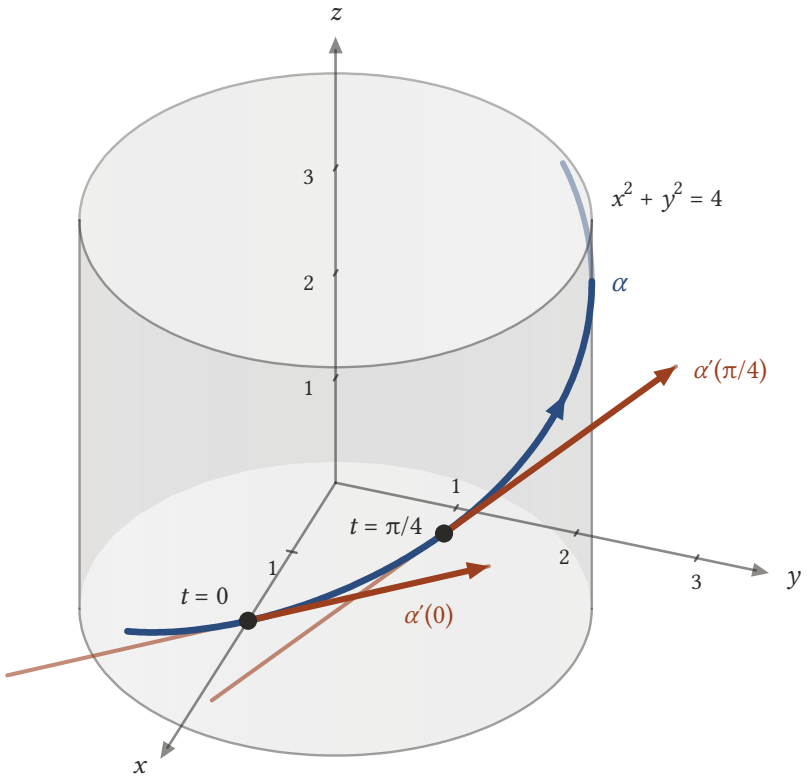
$$u \mapsto \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,u,\, \sqrt{2} + \sqrt{2}\,u,\, \frac{\pi}{4} + u\right)$$

olur.
Her iki doğru da $u = 0$'da eğrinin noktasından geçer ve hızı, eğrinin o andaki hızıdır. İkisi de helisin üzerinde durduğu $x^2 + y^2 = 4$ silindirine yalnızca bu noktada dokunur. Birinci doğru için $x^2 + y^2 = 4 + 4u^2$, ikinci doğru için

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,u\right)^2 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,u\right)^2 = 2(1 - u)^2 + 2(1 + u)^2 = 4 + 4u^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur; $u \neq 0$ için değer 4'ten büyüktür, doğru silindirin dışındadır. Bu, Lemma 4.2'in yorumuyla uyumludur: $f = x^2 + y^2$ helis boyunca sabit 4'tür, teğet doğrusu boyunca ise $4 + 4u^2$'dir; iki fonksiyonun $u = 0$'daki türevi de 0'dır.



Şekil 4.7: $x^2 + y^2 = 4$ silindiri üzerindeki $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ helisi ve $t = 0$, $t = \pi/4$ anlarındaki teğet doğruları ($-1 \le u \le 1$ için açık turuncu). Koyu turuncu oklar hız vektörleridir; vektör kısımları $(0, 2, 1)$ ve $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ olup her biri kendi teğet doğrusunun $0 \le u \le 1$ parçası üzerinde durur. Her doğru eğrinin noktasından eğriyle aynı hızla geçer ama silindire yalnızca o noktada dokunur: doğru boyunca $x^2 + y^2 = 4 + 4u^2$ olduğundan $u \neq 0$ için silindirin dışında kalır. Helisin silindirin arkasına geçen ucu soluk çizilmiştir.

■

Alıştırma 4.14 (Yeniden Parametrelendirme Düzgünlüğü Ne Zaman Korur?). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ düzgün bir eğri, $h : J \to I$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $\beta = \alpha(h)$ olsun. β'nın düzgün olması için gerek ve yeter koşulun her $s \in J$ için $h'(s) \neq 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Lemma 4.1 gereği $\beta'(s) = h'(s)\,\alpha'(h(s))$'dir. α düzgün olduğundan $\alpha'(h(s))$'nin vektör kısmı $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ sıfırdan farklıdır; yani en az bir $w_i \neq 0$'dır. $\beta'(s)$'nin vektör kısmı $h'(s)\,\mathbf{w}$'dir.

- $h'(s) \neq 0$ ise $h'(s)\,w_i \neq 0$ olur; $\beta'(s) \neq \mathbf{0}$.
- $h'(s) = 0$ ise $h'(s)\,\mathbf{w} = \mathbf{0}$ olur; $\beta'(s) = \mathbf{0}$.

Dolayısıyla $\beta'(s) = \mathbf{0}$ olması ile $h'(s) = 0$ olması aynı şeydir. β'nın bütün hız vektörlerinin sıfırdan farklı olması, h''nin hiçbir yerde sıfır olmamasıyla aynıdır.
Örnekler: Örnek 4.20'da $h(s) = s^3$ ve $h'(0) = 0$ olduğundan β düzgün değildir. Alıştırma 4.4'de $h'(s) = 1/s$ hiç sıfır olmaz ve $\beta(s) = (s, 1/s, \sqrt{2}\log s)$ düzgündür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 4.15 (Yeniden Parametrelendirmede Eğri Boyunca Türev). $\beta = \alpha(h)$, α'nın bir yeniden parametrelendirmesi ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her $s \in J$ için

$$\beta'(s)[f] = h'(s)\,\alpha'(h(s))[f]$$

olduğunu gösteriniz ve $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)$, $h(s) = \log s$, $f = z$ için sayısal olarak denetleyiniz.

Çözüm.
Lemma 4.2'i önce β'ya uygulayalım: $\beta'(s)[f] = \dfrac{d}{ds} f(\beta(s))$. $f(\beta(s)) = f(\alpha(h(s)))$ olduğundan bu, $F = f(\alpha)$ tek değişkenli fonksiyonu ile h'nin bileşkesidir. Tek değişkenli zincir kuralıyla

$$\frac{d}{ds} F(h(s)) = F'(h(s))\,h'(s)$$

olur. Lemmayı bu kez α'ya $h(s)$ anında uygularsak $F'(h(s)) = \alpha'(h(s))[f]$ bulunur. Birleştirince istenen eşitlik çıkar.
Aynı sonuca Lemma 4.1 ile de ulaşılır: $\beta'(s) = h'(s)\,\alpha'(h(s))$ ve Teorem 3.1'nin (1) numaralı özelliği ($b = 0$ alınarak) bir teğet vektörün sayı katına göre türevin, türevin o sayı katı olduğunu söyler.
Sayısal denetim. $\beta(s) = (s, 1/s, \sqrt{2}\log s)$ olduğundan $f(\beta(s)) = \sqrt{2}\log s$ ve $\beta'(s)[z] = \sqrt{2}/s$. Öte yandan $f(\alpha(t)) = \sqrt{2}\,t$, dolayısıyla her t için $\alpha'(t)[z] = \sqrt{2}$; $h'(s) = 1/s$ ile çarpınca $\sqrt{2}/s$ bulunur. İki taraf eşittir.
■

Alıştırma 4.16 (Kübik Eğri Birebirdir). $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisinin birebir olduğunu gösteriniz ve bu yüzden periyodik olamayacağını açıklayınız.

Çözüm.
$\alpha(t) = \alpha(t_1)$ olsun. Birinci ve üçüncü koordinatların toplamı eşit olmalıdır:

$$(3t - t^3) + (3t + t^3) = (3t_1 - t_1^3) + (3t_1 + t_1^3),$$

yani $6t = 6t_1$ ve $t = t_1$. Dolayısıyla α birebirdir.
İlk iki koordinat tek başına birebir değildir: $3t^2$ fonksiyonu t ile $-t$'de, $3t - t^3$ fonksiyonu 0 ile $\sqrt{3}$'te aynı değeri alır. Üçüncü koordinat $3t + t^3$ birebirdir (türevi $3 + 3t^2$ pozitif olduğundan kesin artandır) ve onunla da sonuca varılabilirdi; toplam hesabı ise hiçbir türev gerektirmez.
α periyodik olsaydı bir $p > 0$ için $\alpha(p) = \alpha(0)$ olurdu; $p \neq 0$ olduğundan bu, birebirlikle çelişir. Periyodik bir eğri hiçbir zaman birebir olamaz.
■

Bu bölümde eğrileri hareket eden noktalar olarak kurduk ve hızlarını teğet vektörler olarak gördük; bir sonraki bölümde (1-Formlar) teğet vektörlere sayı karşılık getiren lineer işlemleri, yani 1-formları, inceleyecek ve bir fonksiyonun diferansiyelini bu dilde tanımlayacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. 1-Formlar

Önceki bölümde (Uzayda Eğriler) uzayda hareket eden noktaları, yani eğrileri ve onların hız vektörlerini inceledik. O bölümden ve daha öncekilerden elimizde çalışan bir araç var: bir $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ teğet vektörü bir f fonksiyonuna uygulanır ve $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ sayısını, yani f'nin $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde çıkarken ilk andaki değişim hızını verir. Şimdiye kadar bu işlemde teğet vektörü sabit tutup fonksiyonu değiştirdik. Bu bölümde bakışı çeviriyoruz: fonksiyonu sabit tutacak, teğet vektörü değiştireceğiz.
Bu bakış açısı, temel hesaptan tanıdık ama hiçbir zaman tam açıklanmamış bir formülü anlamlı hâle getirir. Bir fonksiyonun diferansiyeli çoğu zaman $df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$ biçiminde yazılır ve "dx, x'teki çok küçük bir değişimdir" diye açıklanır. Ne kadar küçük? df bir sayı mı, bir fonksiyon mu? Bu bölümün sonunda bu soruların kesin cevapları olacak: dx, dy, dz ve df, teğet vektörlere sayı karşılık getiren, her noktada lineer olan fonksiyonlardır. Bunlara 1-form diyeceğiz.
Plan şöyle. Önce diferansiyel formülünün neyi anlatmaya çalıştığını bir örnekle görüp 1-form kavramını tanımlayacağız; 1-formları toplamayı, fonksiyonlarla çarpmayı ve vektör alanlarında değerlendirmeyi öğreneceğiz. Sonra bir fonksiyonun diferansiyelini bir 1-form olarak tanımlayıp koordinat diferansiyellerini dx_1, dx_2, dx_3 inceleyeceğiz. Her 1-formun bu üçüyle yazılabildiğini ispatlayınca başlangıçtaki formül bir sonuç olarak karşımıza çıkacak. Son olarak diferansiyelin toplam, çarpım ve bileşke kurallarını ispatlayacak ve bunlarla hızlı hesap yapmayı öğreneceğiz.

5.1 Diferansiyel Ne Demek?

Temel hesap derslerinde $\mathbb{R}^3$ üzerindeki gerçel değerli bir f fonksiyonunun diferansiyeli şöyle yazılır:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$

Bu eşitlik çok kullanışlıdır, ama biçimseldir: sağ yanda ne tür nesnelerin toplandığı söylenmez. dx bir sayı olsaydı hangi sayı olurdu? Kısmi türevler bir noktada mı değerlendiriliyor? Sol yandaki df neyin eşitidir? Bu soruları cevaplamak için önce f hakkında hangi bilgiyi toplamak istediğimizi soralım.
Bir $\mathbf{p}$ noktasının yakınında f'nin nasıl değiştiğini bilmek, $\mathbf{p}$'den çıkılabilecek her yön için değişim hızını bilmek demektir. Her yön bir teğet vektörle verilir ve o yöndeki değişim hızı $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ sayısıdır. Demek ki aradığımız nesne, $\mathbf{p}$'deki her teğet vektöre bir sayı veren

$$\mathbf{v}_\mathbf{p} \mapsto \mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$$

kuralıdır. Bu kuralın nasıl göründüğüne bir örnekte bakalım.

Örnek 5.1 (Bir Noktadaki Bütün Yönlü Türevler). $f = x^2y + z$ ve $\mathbf{p} = (1, 2, -1)$ olsun. $\mathbf{p}$'deki bir $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ teğet vektörü için $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ sayısının $\mathbf{v}$'ye nasıl bağlı olduğunu bulalım.

Çözüm.
Lemma 3.1'ne göre $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = \sum_i v_i\,\partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$'dir. Kısmi türevler

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

olup $\mathbf{p} = (1, 2, -1)$'de sırasıyla 4, 1 ve 1 değerini alır. Dolayısıyla $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ için

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 4v_1 + v_2 + v_3.$$

Örneğin $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ için $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 8 - 1 + 3 = 10$ bulunur.
Bu formülün üç özelliği göze çarpar. Birincisi, $\mathbf{v}$'nin koordinatlarına lineer biçimde bağlıdır: sabit terim yoktur, v_i'lerin kareleri ya da çarpımları yoktur. İkincisi, bütün kural yalnızca üç sayıyla, 4, 1 ve 1 ile belirlenir; bunlar kuralın $(1,0,0)_\mathbf{p}$, $(0,1,0)_\mathbf{p}$ ve $(0,0,1)_\mathbf{p}$ üzerindeki değerleridir. Gerçekten

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(2,-1,3) = 2(1,0,0) - (0,1,0) + 3(0,0,1)$$

olduğundan lineerlik

$$\mathbf{v_p}[f] = 2\cdot 4 - 1\cdot 1 + 3\cdot 1 = 10$$

sonucunu hiç türev almadan verir. Üçüncüsü, bu üç sayı f'nin $\mathbf{p}$'deki kısmi türevleridir.
Şimdi temel hesaptaki formülü aynı noktada yazalım: $df = 4\,dx + 1\,dy + 1\,dz$. Bu ifadede dx yerine v_1, dy yerine v_2, dz yerine v_3 koyarsak tam olarak yukarıdaki kuralı elde ederiz. Biçimsel formülün gizlice anlattığı şey budur: df, teğet vektörü "yiyip" onun yönündeki değişim hızını veren bir makinedir; dx ise teğet vektörün birinci koordinatını okuyan makinedir.
■

Örnekteki gözlem geneldir. Teorem 3.1'nin birinci özelliği, $\mathbf{p}$ ve f sabitken $\mathbf{v_p} \mapsto \mathbf{v_p}[f]$ kuralının her zaman lineer olduğunu söyler. Öyleyse diferansiyeli anlamak için doğru nesne, her noktada o noktanın teğet vektörlerine lineer biçimde sayı veren bir fonksiyondur. Bu nesneyi, herhangi bir f fonksiyonuna bağlamadan, kendi başına tanımlayarak başlıyoruz.

5.2 1-Formun Tanımı

Tanım 5.1 (Uzayda 1-Form). $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir **1-form** ϕ, $\mathbb{R}^3$'e teğet bütün vektörlerin kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli ve her noktada lineer olan bir fonksiyondur. Her noktada lineer olmak şu demektir: aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki her $\mathbf{v_p}$, $\mathbf{w_p}$ teğet vektörleri ve her a, b sayıları için

$$\phi(a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}) = a\,\phi(\mathbf{v_p}) + b\,\phi(\mathbf{w_p}).$$

ϕ'nin $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ teğet uzayına kısıtlanışı $\phi_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ ile gösterilir.

Yani bir 1-form, uzayın her noktasında o noktadaki oklara lineer biçimde sayı veren bir kuraldır.
Tanımda iki katman vardır. Birinci katmanda ϕ tek bir fonksiyondur: her teğet vektöre, hangi noktada uygulanmış olursa olsun, bir $\phi(\mathbf{v_p})$ sayısı verir. İkinci katmanda lineerlik yalnızca *aynı noktadaki* teğet vektörler için istenir. Bunun nedeni basittir: farklı noktalardaki teğet vektörleri toplamayı tanımlamadık (Tanım 2.2), dolayısıyla $\phi(\mathbf{v_p} + \mathbf{w_q})$ gibi bir ifade anlamsızdır. Böylece her $\mathbf{p}$ için $\phi_{\mathbf{p}}$, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ vektör uzayından $\mathbb{R}$'ye bir lineer dönüşümdür; ama $\phi_{\mathbf{p}}$ ile $\phi_{\mathbf{q}}$ birbirinden tamamen farklı dönüşümler olabilir.
Lineerliğin hemen çıkan bir sonucu, tanım dışı kuralları ayıklamakta işe yarar. Tanımda $a = b = 0$ alınırsa $0\,\mathbf{v_p} + 0\,\mathbf{w_p} = \mathbf{0_p}$ olduğundan

$$\phi(\mathbf{0_p}) = 0\cdot\phi(\mathbf{v_p}) + 0\cdot\phi(\mathbf{w_p}) = 0$$

bulunur: bir 1-form, her noktadaki sıfır vektörüne 0 değerini verir.

i Dual uzay

Doğrusal cebirde bir E vektör uzayından $\mathbb{R}$'ye giden bütün lineer dönüşümlerin kümesine E'nin **dual uzayı** (dual space) denir ve E^* ile gösterilir. İki lineer dönüşüm noktasal olarak toplanıp sayılarla çarpılabildiğinden E^* de bir vektör uzayıdır; E üç boyutluysa E^* de üç boyutludur. $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ üç boyutlu bir vektör uzayı olduğundan, tanım şunu söyler: her $\mathbf{p}$ noktasında $\phi_{\mathbf{p}}$, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'ün dual uzayının bir elemanıdır.
Bir vektör alanı her noktaya $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'ün bir elemanını, bir 1-form ise her noktaya bu uzayın dualinin bir elemanını atar. Vektör alanlarıyla 1-formlar bu yüzden birbirinin eşi gibi davranır: biri okları, öteki oklardan sayı üreten kuralları taşır. Bölüm boyunca bu ikiliğin somut yüzlerini göreceğiz.

Örnek 5.2 (Sabit Katsayılı Bir 1-Form). Her $\mathbf{p}$ noktasındaki her $\mathbf{v_p} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü için

$$\phi(\mathbf{v_p}) = 2v_1 - v_2 + 3v_3$$

olsun. ϕ'nin bir 1-form olduğunu gösterelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
ϕ her teğet vektöre bir sayı verdiğinden, teğet vektörler üzerinde gerçel değerli bir fonksiyondur. Lineerliği denetleyelim. $\mathbf{v_p}$ ve $\mathbf{w_p}$ aynı noktada, a ve b sayılar olsun. Teğet uzayındaki işlemlerin tanımı gereği $a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}$ teğet vektörünün vektör kısmı $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$'dir; bunun i-inci koordinatı $av_i + bw_i$'dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\phi(a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}) &= 2(av_1 + bw_1) - (av_2 + bw_2) + 3(av_3 + bw_3)\\ &= a(2v_1 - v_2 + 3v_3) + b(2w_1 - w_2 + 3w_3)\\ &= a\,\phi(\mathbf{v_p}) + b\,\phi(\mathbf{w_p}).\end{aligned}$$

İkinci satırda yalnızca parantezleri açıp a ve b içeren terimleri ayrı ayrı topladık. ϕ bir 1-formdur.
Bir sayısal örnek: $\mathbf{p} = (5, 0, 2)$ için $\phi\left(\,(1,1,1)_{\mathbf{p}}\,\right) = 2 - 1 + 3 = 4$ ve başlangıç noktasında da $\phi\left(\,(1,1,1)_{\mathbf{0}}\,\right) = 4$. İki değer aynıdır, çünkü formül uygulama noktasını hiç kullanmıyor. Bu 1-formun katsayıları $(2,\,-1,\,3)$ noktadan noktaya değişmez; ileride bu 1-formun $2\,dx - dy + 3\,dz$ olduğunu göreceğiz.
■

Örnek 5.3 (Düzlemde Bir 1-Formun Seviye Doğruları). Öklid düzleminde 1-formlar aynı biçimde tanımlanır; yalnızca teğet vektörlerin iki koordinatı vardır. $\phi\left(\,(v_1, v_2)_{\mathbf{p}}\,\right) = 2p_1v_1 + p_2v_2$ kuralını ele alalım ve $\mathbf{p} = (1, 1)$ noktasında ϕ'nin aynı değeri verdiği teğet vektörlerin uçlarının nasıl bir küme oluşturduğunu bulalım.

Çözüm.
$\mathbf{p} = (1, 1)$'de katsayılar $2p_1 = 2$ ve $p_2 = 1$ sayılarıdır; dolayısıyla bu noktada $\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v_p}) = 2v_1 + v_2$ olur. Bu, Örnek 5.2′dakiyle aynı hesapla lineerdir; $\mathbf{p}$ değişince katsayılar değişir ama her noktada yine iki sayıdır, bu yüzden ϕ bir 1-formdur.
Birkaç teğet vektörü değerleri ve uç noktalarıyla listeleyelim. $\mathbf{v_p}$ okunun ucu $\mathbf{p} + \mathbf{v}$ noktasıdır.

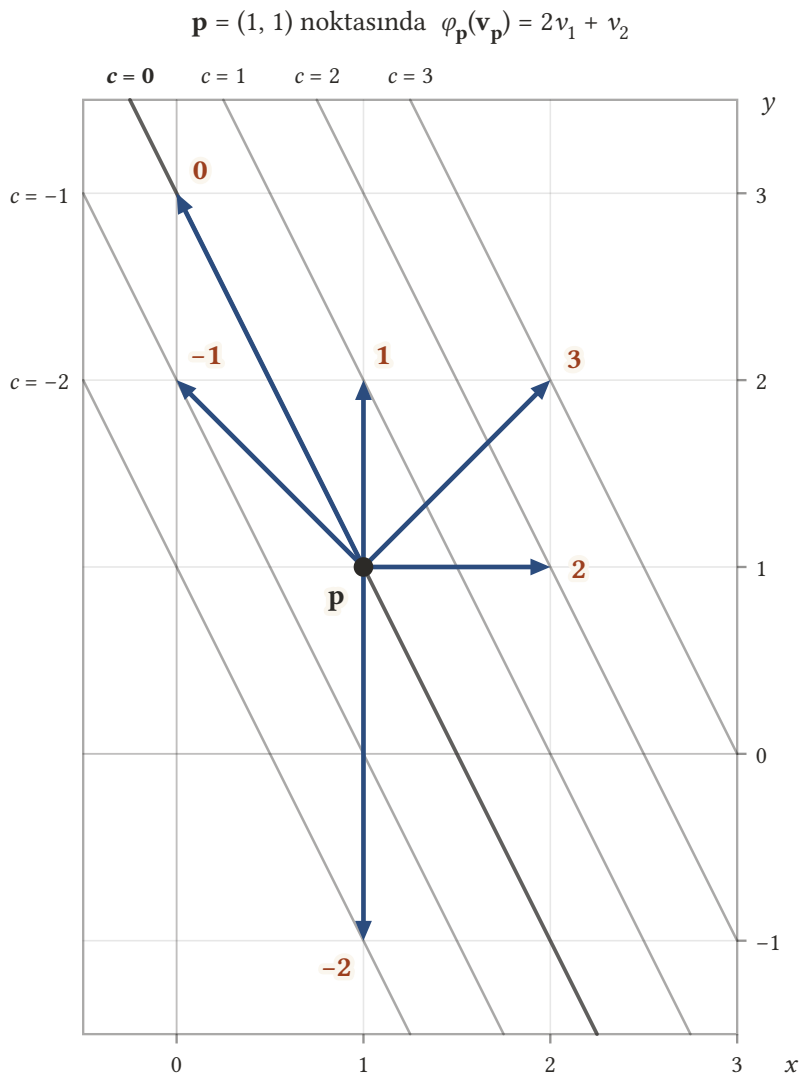
$\mathbf{v}$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,1)$	$(0,-2)$
$\phi(\mathbf{v_p})$	2	1	3	0	-1	-2
uç nokta	$(2,1)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(0,3)$	$(0,2)$	$(1,-1)$

Ucu (x, y) olan ok için $\mathbf{v} = (x - 1, y - 1)$'dir. ϕ'nin bu oka verdiği değerin c olması

$$2(x - 1) + (y - 1) = c, \quad \text{yani} \quad 2x + y = 3 + c$$

demektir. Bu bir doğru denklemidir. Demek ki $\phi_{\mathbf{p}}$'nin seviye kümeleri, uç noktalarıyla çizildiğinde, birbirine paralel doğrulardır: $c = 0$ doğrusu $\mathbf{p}$'nin kendisinden geçer (sıfır vektörünün ucu $\mathbf{p}$'dir ve değeri 0'dır), c bir artınca doğru aynı miktarda kayar. Paralel ve eşit aralıklı doğrular lineerliğin görüntüsüdür: bir okun iki katının değeri iki kat olduğundan, uç iki kat uzaktaki doğruya düşer.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.1: $\mathbf{p} = (1, 1)$ noktasında $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 2v_1 + v_2$ kuralı: $\mathbf{p}$'den çıkan altı okun ucundaki turuncu sayılar, φ'nin o oka verdiği değerlerdir. Değeri c olan her okun ucu $2x + y = 3 + c$ doğrusunun üzerine düşer; gri doğrular $c = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ için bu seviye doğrularıdır ve daha kalın çizilen $c = 0$ doğrusu $\mathbf{p}$'den geçer. Doğruların paralel ve eşit aralıklı olması, $\varphi_{\mathbf{p}}$'nin lineer olmasının görüntüsüdür.

Başka bir noktada tablo değişir. Örneğin $\mathbf{q} = (2, -1)$'de $\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = 4v_1 - v_2$'dir; seviye doğruları yine paraleldir ama doğrultuları ve aralıkları farklıdır.

■

Örnek 5.4 (Katsayıları Noktayla Değişen Bir 1-Form). Her $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ için

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = p_3 v_1 + (p_1 + p_2) v_2 - p_1 p_2 v_3$$

olsun. ϕ'nin bir 1-form olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Bir $\mathbf{p}$ noktası sabitlendiğinde $c_1 = p_3$, $c_2 = p_1 + p_2$ ve $c_3 = -p_1 p_2$ birer sayıdır ve $\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ olur. Aynı noktadaki $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$ ve a, b sayıları için $a\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + b\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$'nin uygulama noktası yine $\mathbf{p}$'dir; bu yüzden katsayılar değişmez ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\phi(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^{3} c_i(av_i + bw_i) \\ &= a\sum_{i=1}^{3} c_i v_i + b\sum_{i=1}^{3} c_i w_i = a\,\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) + b\,\phi(\mathbf{w}_\mathbf{p})\end{aligned}$$

bulunur. ϕ bir 1-formdur.
Katsayıların noktaya bağlı olması lineerliği bozmaz, çünkü lineerlik tek bir noktada sınanır. Ama aynı vektör kısmı farklı noktalarda farklı değer alabilir. $\mathbf{v} = (1,0,2)$ için $\mathbf{p} = (1,2,3)$'te katsayılar 3, 3, -2 olduğundan $\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 3 - 4 = -1$; $\mathbf{q} = (2,-1,0)$'da katsayılar 0, 1, 2 olduğundan $\phi(\mathbf{v}_\mathbf{q}) = 0 + 0 + 4 = 4$.
■

Örnek 5.5 (Lineer Olmayan Bir Kural). Her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ için $\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = v_1 v_2$ olsun. ϕ bir 1-form mudur?

Çözüm.
Hayır. Herhangi bir $\mathbf{p}$ noktasında $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (1,1,0)_\mathbf{p}$ alalım. $\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 1 \cdot 1 = 1$'dir. $2\mathbf{v}_\mathbf{p} = (2,2,0)_\mathbf{p}$ olduğundan $\phi(2\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 2 \cdot 2 = 4$ olur. Oysa lineerlik (tanımda $a = 2$, $b = 0$) $\phi(2\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 2\,\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 2$ gerektirir. $4 \neq 2$ olduğundan ϕ hiçbir noktada lineer değildir; bir 1-form değildir.
Aynı türden başka kurallar da benzer biçimde elenir. Vektör kısmının uzunluğu $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, $\mathbf{v}$ ile $-\mathbf{v}$'ye aynı pozitif değeri verir, oysa lineer bir kural işaret değiştirmelidir. $v_1 + 1$ kuralı sıfır vektörüne 1 verir, oysa her 1-form $\phi(\mathbf{0}_\mathbf{p}) = 0$ sağlar. Bir 1-formun her noktadaki değeri, vektör kısmının koordinatlarının sabit terimsiz, birinci dereceden bir ifadesi olmak zorundadır; bunun tam ifadesini ileride bir lemma olarak ispatlayacağız.
■

1-formlarla cebir yapmak için yine noktasal ilkeyi kullanıyoruz. İki 1-formun aynı teğet vektördeki değerleri iki sayıdır ve toplanabilir; bir fonksiyonun $\mathbf{p}$'deki değeri de bir sayıdır ve bir 1-formun $\mathbf{p}$'deki bir teğet vektörde aldığı değerle çarpılabilir.

Tanım 5.2 (İki 1-Formun Toplamı ve Fonksiyonla Çarpımı). ϕ ve ψ, $\mathbb{R}^3$ üzerinde 1-formlar, f de $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli bir fonksiyon olsun. $\phi + \psi$ ve $f\phi$, her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ teğet vektörü için

$$(\phi + \psi)(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) + \psi(\mathbf{v}_\mathbf{p}), \qquad (f\phi)(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p})$$

ile tanımlanan fonksiyonlardır.

Yani toplamın bir okta aldığı değer iki formun o oktaki değerlerinin toplamıdır; $f\phi$'nin değeri ise ϕ'nin değerinin, okun uygulama noktasındaki $f(\mathbf{p})$ sayısıyla çarpılmışıdır. f sabit bir c sayısıysa $c\phi$ yazarız; $-\phi$, $(-1)\phi$ demektir.
Tanım bu yeni fonksiyonları kurar; onların yine 1-form olduğunu ise ayrıca göstermek gerekir.

Önerme 5.1 (Toplam ve Fonksiyonla Çarpım Yine 1-Formdur). *ϕ ve ψ 1-formlar, f gerçel değerli bir fonksiyon ise $\phi + \psi$ ve $f\phi$ de 1-formdur.*

İspat.
İki fonksiyon da teğet vektörler üzerinde gerçel değerlidir; her noktada lineer olduklarını göstermek yeter. $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}$ aynı $\mathbf{p}$ noktasında, a ve b sayılar olsun.
Toplam için, önce toplamın tanımını, sonra ϕ ve ψ'nin ayrı ayrı lineerliğini, en sonda terimleri yeniden gruplayıp toplamın tanımını geriye doğru kullanırız:

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p}) &= \phi(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p}) + \psi(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p}) \\ &= a\,\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) + b\,\phi(\mathbf{w}_\mathbf{p}) + a\,\psi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) + b\,\psi(\mathbf{w}_\mathbf{p}) \\ &= a\,(\phi + \psi)(\mathbf{v}_\mathbf{p}) + b\,(\phi + \psi)(\mathbf{w}_\mathbf{p}).\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Fonksiyonla çarpım için kritik nokta şudur: $a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}$'nin uygulama noktası da $\mathbf{p}$'dir, dolayısıyla üç teğet vektörün hepsinde çarpan aynı $f(\mathbf{p})$ sayısıdır:

$$\begin{aligned}(f\phi)(a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}) &= f(\mathbf{p})\,\phi(a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}) \\ &= f(\mathbf{p})\,\big(\,a\,\phi(\mathbf{v_p}) + b\,\phi(\mathbf{w_p})\,\big) \\ &= a\,f(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{v_p}) + b\,f(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{w_p}) \\ &= a\,(f\phi)(\mathbf{v_p}) + b\,(f\phi)(\mathbf{w_p}).\end{aligned}$$

İki eşitlik de her $\mathbf{p}$, her $\mathbf{v_p}$, $\mathbf{w_p}$ ve her a, b için geçerlidir.
■

Bu işlemler sayılarla yapılan işlemlerin bütün alışılmış kurallarına uyar: $\phi + \psi = \psi + \phi$, $f(\phi + \psi) = f\phi + f\psi$, $(f + g)\phi = f\phi + g\phi$, $f(g\phi) = (fg)\phi$ ve benzerleri. Her birinin ispatı aynıdır: iki tarafı keyfi bir $\mathbf{v_p}$ üzerinde değerlendirince sayılar arasında bilinen bir özdeşlik elde edilir. Örneğin $f(g\phi)$'nin $\mathbf{v_p}$'deki değeri $f(\mathbf{p})\,g(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{v_p})$'dir, $(fg)\phi$'nin değeri de öyledir. Bundan sonra 1-formlarla hesaplarda parantez açma, ortak çarpan parantezine alma ve fonksiyon katsayılarını toplamın dışına çıkarma işlemlerini bu gerekçeyle serbestçe yapacağız.

Örnek 5.6 (Toplam ve Fonksiyonla Çarpım Sayılarla). $\phi(\mathbf{v_p}) = v_1 + v_3$, $\psi(\mathbf{v_p}) = p_1 v_2$ ve $f = x + y^2$ olsun. $f\phi + \psi$ 1-formunun $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$ noktasındaki $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ vektörü üzerindeki değerini bulalım.

Çözüm.
Tanıma göre

$$(f\phi + \psi)(\mathbf{v_p}) = f(\mathbf{p})\,\phi(\mathbf{v_p}) + \psi(\mathbf{v_p})$$

olur. Parçaları ayrı ayrı hesaplayalım:

$$f(\mathbf{p}) = 2 + 1^2 = 3, \qquad \phi(\mathbf{v_p}) = 3 + 4 = 7, \qquad \psi(\mathbf{v_p}) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Dolayısıyla istenen değer $3 \cdot 7 + (-2) = 19$'dur.
Genel bir teğet vektör için aynı hesap

$$(f\phi + \psi)(\mathbf{v_p}) = (p_1 + p_2^2)(v_1 + v_3) + p_1 v_2$$

formülünü verir. Her noktada katsayılar sayı olduğundan, Önerme 5.1'un söylediği gibi, bu kural gerçekten her noktada lineerdir.
■

> ⚠ **Çarpan okun başında okunur**
>
> $(f\phi)(\mathbf{v_p})$ hesabında f, okun uygulama noktası $\mathbf{p}$'de değerlendirilir; okun ucu $\mathbf{p} + \mathbf{v}$'de değil. Yukarıdaki örnekte ok $(2, 1, 0)$'dan $(5, 0, 4)$'e uzanır. f'yi yanlışlıkla uçta değerlendirmek $f(5, 0, 4) = 5$ ve $(f\phi)(\mathbf{v_p}) = 35$ gibi yanlış bir sonuç verir; doğrusu $3 \cdot 7 = 21$'dir. Uçta değerlendirme ayrıca lineerliği de bozardı: $\mathbf{v}$ büyüdükçe çarpan da değişirdi.

5.3 Bir 1-Formu Bir Vektör Alanında Değerlendirmek

Bir 1-form tek tek teğet vektörlere sayı verir. Bir vektör alanı V ise her $\mathbf{p}$ noktasına bir $V(\mathbf{p})$ teğet vektörü verir (Tanım 2.4). İkisini birleştirince her noktada bir sayı elde ederiz: $\mathbf{p}$'deki ok $V(\mathbf{p})$'dir ve ϕ bu oka $\phi\,\big(\,V(\mathbf{p})\,\big)$ sayısını verir. Noktasal ilke bu sayıları tek bir fonksiyonda toplar.

Tanım 5.3 (Bir 1-Formun Bir Vektör Alanındaki Değeri). ϕ, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir 1-form ve V bir vektör alanı olsun. Her $\mathbf{p}$ noktasındaki değeri

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\phi(V)(\mathbf{p}) = \phi\left(\ V(\mathbf{p})\ \right)$$

olan gerçel değerli fonksiyona **ϕ'nin V üzerindeki değeri** denir ve $\phi(V)$ ile gösterilir.

Yani bir 1-forma bir vektör alanı verince karşılığında bir fonksiyon alırız: form, alanın her noktadaki okunu o noktadaki lineer kuralıyla bir sayıya dönüştürür.
Bu, yönlü türevleri incelerken kurduğumuz $V[f]$ yapısının bir tür aynasıdır. Orada bir vektör alanı, fonksiyonları fonksiyonlara çeviriyordu; burada bir 1-form, vektör alanlarını fonksiyonlara çeviriyor. Türev almak için elimizdeki fonksiyonların diferansiyellenebilir olması gerekir; bu yüzden şu tanımı yapıyoruz.

Tanım 5.4 (Diferansiyellenebilir 1-Form). Diferansiyellenebilir her V vektör alanı için $\phi(V)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir oluyorsa ϕ 1-formuna **diferansiyellenebilir** (differentiable) denir.

Yani diferansiyellenebilir bir 1-form, düzgün alanları düzgün fonksiyonlara çevirir.

> **!** Bundan sonra
>
> Vektör alanlarında yaptığımız gibi, bundan böyle "1-form" sözünden diferansiyellenebilir 1-form anlaşılacaktır. Aşağıdaki örneklerin hepsinde katsayılar polinom olduğundan bu koşul sağlanır; sağlanmadığı bir örneği de ayrıca göreceğiz.

Örnek 5.7 (Bir Vektör Alanında Değer Hesabı). $\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = p_2 v_1 + p_1 v_3$ ve $V = zU_1 + U_2 + yU_3$ olsun. $\phi(V)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm.
Önce V'nin bir $\mathbf{p}$ noktasındaki okunu yazalım. Doğal çatının tanımı (Tanım 2.6) ve alan işlemlerinin noktasal tanımı gereği

$$V(\mathbf{p}) = p_3\,(1,0,0)_\mathbf{p} + (0,1,0)_\mathbf{p} + p_2\,(0,0,1)_\mathbf{p} = (p_3, 1, p_2)_\mathbf{p}.$$

Bu oka ϕ'yi uygularken $v_1 = p_3$, $v_2 = 1$, $v_3 = p_2$ koyarız:

$$\phi\left(\ V(\mathbf{p})\ \right) = p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 = p_2 p_3 + p_1 p_2.$$

Bu her $\mathbf{p}$ için geçerli olduğundan $\phi(V) = yz + xy$ bulunur.
Denetim: $\mathbf{p} = (1,2,3)$'te formül $6 + 2 = 8$ verir. Doğrudan: $V(\mathbf{p}) = (3,1,2)_\mathbf{p}$ ve $\phi\left(\ (3,1,2)_\mathbf{p}\ \right) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$. Uyuşur.
■

Örnek 5.8 (Düzlemde Bir Alanı Fonksiyona Çevirmek). Düzlemde $\phi\left(\ (v_1, v_2)_\mathbf{p}\ \right) = -p_2 v_1 + p_1 v_2$ 1-formunu ve her noktada $(1,1)$ vektör kısmına sahip $V = U_1 + U_2$ alanını ele alalım. $\phi(V)$ fonksiyonunu bulup $x, y \in \{-1, 0, 1\}$ ızgarasındaki değerlerini gösterelim.

Çözüm.
Her $\mathbf{p}$ noktasında $V(\mathbf{p}) = (1,1)_\mathbf{p}$ olduğundan

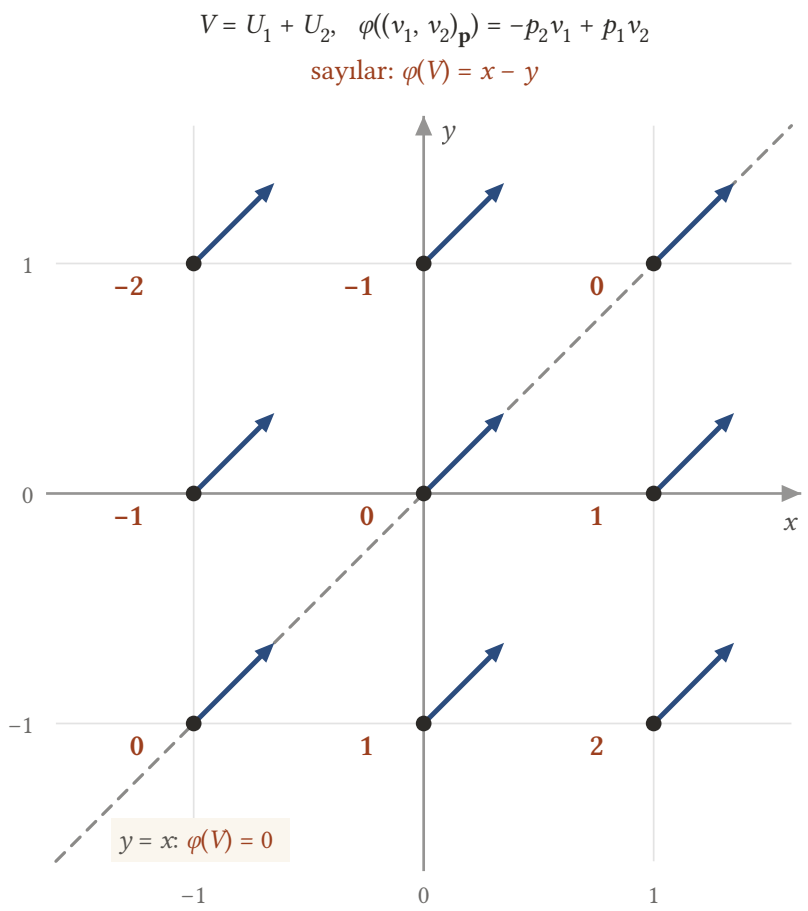
$$\phi(V)(\mathbf{p}) = -p_2 \cdot 1 + p_1 \cdot 1 = p_1 - p_2,$$

yani $\phi(V) = x - y$. Alan her yerde aynı oku çizer, ama ϕ'nin katsayıları noktayla değiştiğinden çıkan sayılar değişir. Izgara değerleri:

	$x=-1$	$x=0$	$x=1$
$y=1$	-2	-1	0
$y=0$	-1	0	1
$y=-1$	0	1	2

 CC BY-NC-SA 4.0

$y = x$ doğrusu üzerinde değer 0'dır: orada $(1, 1)$ oku, ϕ'nin o noktadaki sıfır doğrultusu boyuncadır.



Şekil 5.2: $V = U_1 + U_2$ alanı dokuz ızgara noktasının her birinde aynı $(1, 1)$ okunu çizer (mavi; okunaklılık için her ok gerçek uzunluğunun 0,35 katıyla çizilmiştir). Turuncu sayılar, $\varphi((v_1, v_2)_\mathbf{p}) = -p_2 v_1 + p_1 v_2$ 1-formunun her noktadaki oka verdiği değerlerdir, yani $\varphi(V) = x - y$: ok hiç değişmediği hâlde φ'nin katsayıları noktayla değiştiği için sayılar değişir. Kesikli $y = x$ doğrusu üzerinde ok, φ'nin o noktadaki sıfır doğrultusu boyunca durur ve değer 0 olur.

Aynı 1-formu başka bir alanda değerlendirmek bambaşka bir fonksiyon verir. Örneğin $W = xU_1 + yU_2$ için $W(\mathbf{p}) = (p_1, p_2)_\mathbf{p}$ ve $\phi(W)(\mathbf{p}) = -p_2 p_1 + p_1 p_2 = 0$ olur: bu 1-form, başlangıç noktasından dışarı bakan okların hepsine 0 verir.
■

Örnek 5.9 (Diferansiyellenebilir Olmayan Bir 1-Form). $\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = |\, p_1 \,|\, v_2$ kuralını ele alalım. ϕ diferansiyellenebilir bir 1-form mudur?

Çözüm.
Her $\mathbf{p}$ noktasında $|\, p_1 \,|$ bir sayıdır ve $\phi_\mathbf{p}(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = |\, p_1 \,|\, v_2$ olur; Örnek 5.4'daki hesap aynen geçerlidir, yani ϕ her noktada lineerdir ve bir 1-formdur.
Şimdi ϕ'yi diferansiyellenebilir bir alanda değerlendirelim. U_2'nin koordinat fonksiyonları $0, 1, 0$ sabitleridir, dolayısıyla U_2 diferansiyellenebilir bir vektör alanıdır. $U_2(\mathbf{p}) = (0, 1, 0)_\mathbf{p}$ olduğundan

$$\phi(U_2)(\mathbf{p}) = |\, p_1 \,| \cdot 1 = |\, p_1 \,|,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yani $\phi(U_2) = |\ x\ |$. Bu fonksiyonun $p_1 = 0$ olan noktalarda x'e göre kısmi türevi yoktur: $h \to 0$ iken $\big(\ |\ h\ | - 0\ \big)\ /h$ oranı sağdan 1'e, soldan -1'e yaklaşır. Diferansiyellenebilir bir alan diferansiyellenebilir olmayan bir fonksiyona dönüştüğünden ϕ diferansiyellenebilir değildir.
Sorunun kaynağı katsayıdır: ϕ'nin $\mathbf{p}$'deki katsayıları 0, $|\ p_1\ |$, 0'dır ve $|\ p_1\ |$ düzgün değildir. Aşağıda her 1-formun katsayılarını birer fonksiyon olarak yazdığımızda bu gözlem kesinleşecek.
■

Değerlendirme işlemi iki girdisine göre de lineerdir; üstelik bu kez katsayılar sayı değil, fonksiyon olabilir.

Önerme 5.2 (Değerlendirmenin Lineerliği). *ϕ ve ψ 1-formlar; V ve W vektör alanları; f ve g gerçel değerli fonksiyonlar olsun. O zaman*
(1) *$\phi(fV + gW) = f\,\phi(V) + g\,\phi(W)$,*
(2) *$(f\phi + g\psi)(V) = f\,\phi(V) + g\,\psi(V)$.*

İspat.
Her iki eşitliğin iki yanı da gerçel değerli fonksiyondur. İki fonksiyon, her noktada aynı değeri alıyorlarsa eşittir; bu yüzden keyfi bir $\mathbf{p}$ noktasında değerlendirip karşılaştıracağız.
(1) *Vektör alanı işlemlerinin noktasal tanımı gereği*

$$(fV + gW)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\,V(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\,W(\mathbf{p})$$

olur. Burada $f(\mathbf{p})$ ve $g(\mathbf{p})$ sayı, $V(\mathbf{p})$ ve $W(\mathbf{p})$ ise aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki teğet vektörlerdir. ϕ'nin $\mathbf{p}$'deki lineerliğini $a = f(\mathbf{p})$, $b = g(\mathbf{p})$ ile kullanırsak

$$\begin{aligned}\phi(fV + gW)(\mathbf{p}) &= \phi\,\big(\ f(\mathbf{p})\,V(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\,W(\mathbf{p})\ \big)\\ &= f(\mathbf{p})\,\phi\,\big(\ V(\mathbf{p})\ \big) + g(\mathbf{p})\,\phi\,\big(\ W(\mathbf{p})\ \big)\\ &= f(\mathbf{p})\,\phi(V)(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\,\phi(W)(\mathbf{p})\\ &= \big(\ f\,\phi(V) + g\,\phi(W)\ \big)\,(\mathbf{p})\end{aligned}$$

bulunur. Birinci satır Tanım 5.3'dir; üçüncü satır aynı tanımın geriye doğru kullanılışı, dördüncüsü fonksiyonların noktasal toplam ve çarpımıdır.
(2) *$V(\mathbf{p})$'nin uygulama noktası $\mathbf{p}$ olduğundan, Tanım 5.2'deki çarpanlar $f(\mathbf{p})$ ve $g(\mathbf{p})$'dir:*

$$\begin{aligned}(f\phi + g\psi)(V)(\mathbf{p}) &= (f\phi + g\psi)\,\big(\ V(\mathbf{p})\ \big)\\ &= f(\mathbf{p})\,\phi\,\big(\ V(\mathbf{p})\ \big) + g(\mathbf{p})\,\psi\,\big(\ V(\mathbf{p})\ \big)\\ &= \big(\ f\,\phi(V) + g\,\psi(V)\ \big)\,(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Her iki hesap da her $\mathbf{p}$ için geçerli olduğundan eşitlikler fonksiyonlar arasında doğrudur.
■

İspatın özü: bir noktada her şey sayıdır ve 1-formun o noktadaki lineerliği fonksiyon katsayılarını, o noktadaki değerleri olarak dışarı taşır.

Örnek 5.10 (Fonksiyon Katsayılarla Lineerlik). $\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = p_2 v_1 + p_1 v_3$, $V = U_1$, $W = U_3$, $f = z$ ve $g = x^2$ olsun. $\phi(fV + gW)$ fonksiyonunu doğrudan ve Önerme 5.2 ile hesaplayalım.

Çözüm.
Doğrudan: $fV + gW = zU_1 + x^2 U_3$ alanının $\mathbf{p}$'deki oku $(p_3, 0, p_1^2)_\mathbf{p}$'dir. ϕ'yi uygularsak $p_2 p_3 + p_1 \cdot p_1^2$, yani

$$\phi(fV + gW) = yz + x^3.$$

Önerme ile: $U_1(\mathbf{p}) = (1,0,0)_\mathbf{p}$ olduğundan $\phi(U_1)(\mathbf{p}) = p_2$, yani $\phi(U_1) = y$. Benzer biçimde $U_3(\mathbf{p}) = (0,0,1)_\mathbf{p}$ için $\phi(U_3) = x$. Birinci özellik

$$\phi(zU_1 + x^2 U_3) = z\,\phi(U_1) + x^2\,\phi(U_3) = zy + x^2 \cdot x = yz + x^3$$

verir. İki yol aynı fonksiyona ulaşır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

⚠ Burada fonksiyonlar dışarı çıkar, türevde çıkmaz

Önerme 5.2'nde $\phi(fV) = f\,\phi(V)$'dir: f çarpanı hiçbir düzeltme terimi olmadan dışarı çıkar. Yönlü türevlerde ise durum farklıydı: genelde $V[fg] \neq f\,V[g]$'dir, çünkü Leibniz kuralı fazladan bir $V[f]\,g$ terimi üretir. Fark şuradan gelir: $\phi(V)$'nin $\mathbf{p}$'deki değeri yalnızca V'nin $\mathbf{p}$'deki okuna bağlıdır, dolayısıyla f de yalnızca $\mathbf{p}$'deki değeriyle işe karışır. $V[f]$ ise bir türevdir; $\mathbf{p}$'deki değeri f'nin $\mathbf{p}$ yakınındaki değerlerine bağlıdır ve f'nin değişimi de hesaba girer.

5.4 Bir Fonksiyonun Diferansiyeli

Artık başlangıçtaki gözlemi bir tanıma dönüştürebiliriz. Diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu verildiğinde her teğet vektöre, f'nin o vektöre göre türevini karşılık getirelim.

Tanım 5.5 (Bir Fonksiyonun Diferansiyeli). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\mathbf{v_p}$ teğet vektörü için

$$df(\mathbf{v_p}) = \mathbf{v_p}[f]$$

kuralıyla tanımlanan df 1-formuna f'nin **diferansiyeli** (differential) denir.

Yani df, f'nin her noktadaki her yöndeki değişim hızını bir arada tutan nesnedir: ona bir ok verin, f'nin o ok boyunca ilk anda ne hızla değiştiğini söylesin.
Tanımda df'ye 1-form dedik; bunun doğru olduğunu, üstelik df'nin diferansiyellenebilir olduğunu göstermemiz gerekir.

Önerme 5.3 (Diferansiyel Bir 1-Formdur). *f diferansiyellenebilir ise df diferansiyellenebilir bir 1-formdur ve her V vektör alanı için $df(V) = V[f]$ olur.*

İspat.
Teğet vektörler üzerinde fonksiyon. *Her $\mathbf{v_p}$ için $\mathbf{v_p}[f]$ tek bir gerçel sayıdır (Tanım 3.1); dolayısıyla df, teğet vektörler üzerinde gerçel değerli bir fonksiyondur.*
Her noktada lineerlik. *$\mathbf{v_p}$ ve $\mathbf{w_p}$ aynı noktada, a ve b sayılar olsun. Teorem 3.1'nin birinci özelliği gereği*

$$df(a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}) = (a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p})[f] = a\,\mathbf{v_p}[f] + b\,\mathbf{w_p}[f],$$

ve sağ yan $a\,df(\mathbf{v_p}) + b\,df(\mathbf{w_p})$'dir. Demek ki df bir 1-formdur.
Vektör alanlarındaki değer. *V bir vektör alanı olsun. Her $\mathbf{p}$ için $df(V)(\mathbf{p}) = df\,(\,V(\mathbf{p})\,) = V(\mathbf{p})[f]$'dir ve bu, $V[f]$ fonksiyonunun $\mathbf{p}$'deki değeridir. Böylece $df(V) = V[f]$.*
Diferansiyellenebilirlik. *V'nin Öklid koordinat fonksiyonları v_1, v_2, v_3 olsun (Lemma 2.1). Lemma 3.1 her noktada uygulanınca*

$$df(V) = V[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

bulunur. V diferansiyellenebilir ise v_i'ler, f diferansiyellenebilir olduğundan da $\partial f/\partial x_i$'ler diferansiyellenebilirdir. Diferansiyellenebilir fonksiyonların çarpımları ve toplamı yine diferansiyellenebilir olduğundan $df(V)$ diferansiyellenebilirdir. Bu, Tanım 5.4'in istediği şeydir.
■

f hakkında birinci mertebeden bilinebilecek her şey, yani her noktadaki her yöndeki değişim hızı, df'nin içindedir. Bu yüzden $\mathbb{R}^3$ üzerinde analiz yaparken diferansiyellere sık sık başvuracağız. Tanımı koordinat kullanmadan yaptık; birazdan koordinatlara geçince temel hesaptan bildiğimiz formüllere ulaşacağız. Önce iki örnek.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.11 (Diferansiyelin Bir Teğet Vektördeki Değeri). $f = xyz$, $\mathbf{p} = (1, -1, 2)$ ve $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$ olsun. $df(\mathbf{v_p})$ sayısını önce doğrudan yönlü türevin tanımından, sonra kısmi türevlerle bulalım.

Çözüm.
Tanıma göre $df(\mathbf{v_p}) = \mathbf{v_p}[f]$'dir. $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ doğrultusunda geçen doğrunun t anındaki noktası $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$, yani $(1 + 3t, -1 + t, 2 - 2t)$'dir; bu doğru üzerinde

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1 + 3t)(-1 + t)(2 - 2t).$$

İlk iki çarpanın çarpımı $-1 - 2t + 3t^2$'dir; bunu $2 - 2t$ ile çarparsak

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = -2 - 2t + 10t^2 - 6t^3$$

bulunur. Türev $-2 + 20t - 18t^2$, $t = 0$'da -2'dir. Dolayısıyla $df(\mathbf{v_p}) = -2$.
Kısmi türevlerle: $\partial f/\partial x = yz$, $\partial f/\partial y = xz$, $\partial f/\partial z = xy$; $\mathbf{p}$'de -2, 2, -1. Lemma 3.1 ile

$$df(\mathbf{v_p}) = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = -6 + 2 + 2 = -2.$$

İki yol aynı sayıyı verir. Negatif işaret, $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde çıkarken f'nin ilk anda azaldığını söyler.
■

Örnek 5.12 (Sabit Fonksiyonun Diferansiyeli). c bir sayı ve $f = c$ sabit fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun dc diferansiyelini bulalım.

Çözüm.
Her $\mathbf{v_p}$ için $f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = c$, t'ye bağlı olmayan bir sayıdır; türevi 0'dır. Dolayısıyla $dc(\mathbf{v_p}) = 0$. Her teğet vektöre 0 veren 1-forma **sıfır 1-form** diyelim ve onu 0 ile gösterelim; bulduğumuz şey $dc = 0$ eşitliğidir.
Şimdi herhangi bir diferansiyellenebilir g fonksiyonu için g ile $g + c$'yi karşılaştıralım. Teorem 3.1'nin ikinci özelliği gereği

$$d(g + c)(\mathbf{v_p}) = \mathbf{v_p}[g + c] = \mathbf{v_p}[g] + \mathbf{v_p}[c] = \mathbf{v_p}[g] = dg(\mathbf{v_p}).$$

Yani $d(g + c) = dg$. Örneğin x^2 ile $x^2 + 5$ farklı fonksiyonlardır ama diferansiyelleri aynıdır. Diferansiyel, fonksiyonun değerlerini değil, değişimini kaydeder; sabit bir kaydırma bu değişimi etkilemez. Alıştırmalarda bunun tersini de ispatlayacağız: $\mathbb{R}^3$'ün tamamında diferansiyeli sıfır olan bir fonksiyon sabittir.
■

5.5 Koordinat Fonksiyonlarının Diferansiyelleri

En basit fonksiyonlar doğal koordinat fonksiyonlarıdır (Tanım 1.3): $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Bunlar birinci dereceden polinom olduklarından diferansiyellenebilirdir ve diferansiyelleri dx_1, dx_2, dx_3 (başka yazımla dx, dy, dz) birer 1-formdur. Bu üç 1-formun ne yaptığını bulmak için kısa bir gösterime ihtiyacımız var.

Tanım 5.6 (Kronecker Deltası). $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise,} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

sayısına **Kronecker deltası** (Kronecker delta) denir.

Yani δ_{ij}, 3×3 birim matrisin i-inci satır, j-inci sütunundaki girdidir: köşegende 1, başka her yerde 0. Bu gösterimin en çok kullanılan özelliği toplamları çökertmesidir: a_1, a_2, a_3 sayıları için $\sum_j a_j\,\delta_{ij}$ toplamında yalnızca $j = i$ terimi sıfırdan farklıdır, dolayısıyla

$$\sum_{j=1}^{3} a_j\,\delta_{ij} = a_i.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneğin $i = 2$ için toplam $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = a_2$'dir.

Örnek 5.13 (Koordinat Diferansiyellerinin Değeri). dx_1, dx_2, dx_3 1-formlarının keyfi bir $\mathbf{v_p} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ teğet vektöründeki değerini bulalım.

Çözüm.
Önce x_i'nin kısmi türevlerini hesaplayalım. $x_i(\mathbf{q}) = q_i$ olduğundan, yalnızca j-inci koordinat değiştirildiğinde x_i'nin değeri $j = i$ ise tam o koordinat kadar değişir, $j \neq i$ ise hiç değişmez. Dolayısıyla

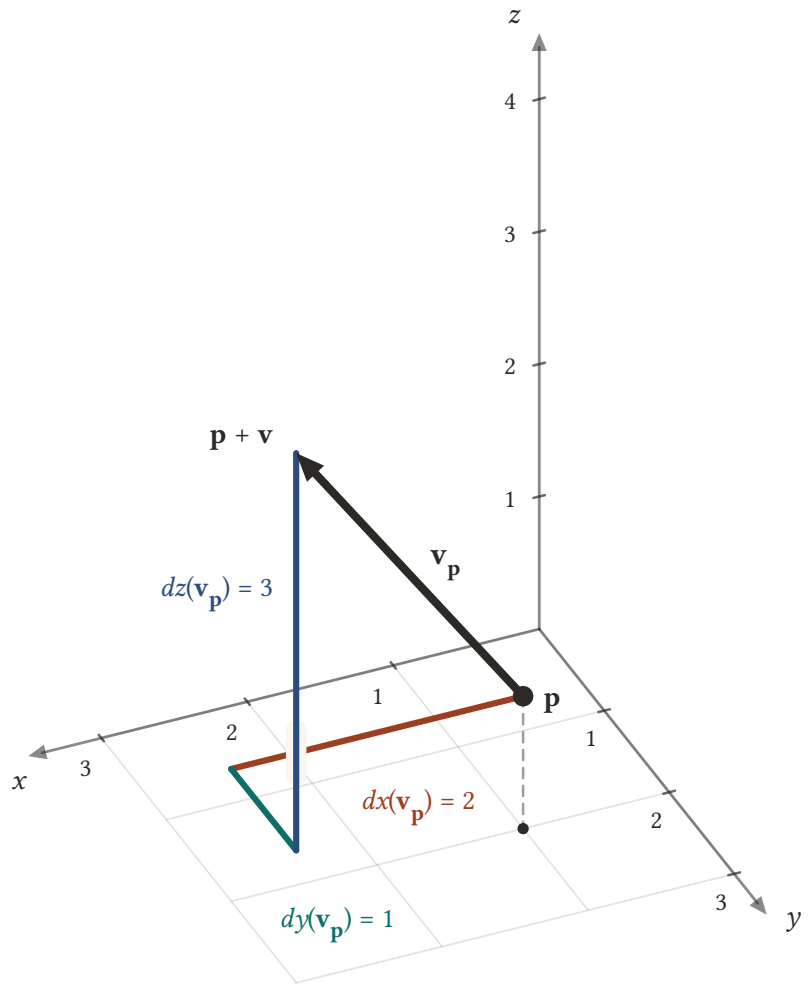
$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

sabit fonksiyonudur. Şimdi diferansiyelin tanımını ve Lemma 3.1'nü kullanalım:

$$dx_i(\mathbf{v_p}) = \mathbf{v_p}[x_i] = \sum_{j=1}^{3} v_j \, \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{3} v_j \, \delta_{ij} = v_i.$$

Son eşitlik Kronecker deltasının toplamı çökertme özelliğidir. Aynı sonuca doğrudan tanımdan da ulaşılır: $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu üzerinde $x_i(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = p_i + tv_i$ olur ve bunun t'ye göre türevi her t için v_i'dir.
Sonuç: *dx_i'nin bir teğet vektördeki değeri, o teğet vektörün vektör kısmının i-inci koordinatıdır* ve uygulama noktasına bağlı değildir.
Sayısal olarak, $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ ve $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ için $dx(\mathbf{v_p}) = 2$, $dy(\mathbf{v_p}) = 1$ ve $dz(\mathbf{v_p}) = 3$'tür. Aynı vektör kısmı başlangıç noktasında uygulansa da üç değer değişmez.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.3: Kalın ok, $\mathbf{p}$ = (1, 2, 1) noktasındaki $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ = $(2, 1, 3)_\mathbf{p}$ teğet vektörüdür ve (1, 2, 1)'den (3, 3, 4)'e gider. Okun başından sonuna eksenlere paralel basamaklarla gidildiğinde önce x yönünde 2 (turuncu), sonra y yönünde 1 (yeşil), en son z yönünde 3 (mavi) birim yürünür. Bu üç uzunluk sırasıyla $dx(\mathbf{v}_\mathbf{p})$, $dy(\mathbf{v}_\mathbf{p})$ ve $dz(\mathbf{v}_\mathbf{p})$ değerleridir: her biri vektör kısmının bir koordinatını okur ve uygulama noktası $\mathbf{p}$'ye bağlı değildir.

■

Noktalar için doğal koordinat fonksiyonları ne işe yarıyorsa, teğet vektörler için dx_1, dx_2, dx_3 o işe yarar: x_i bir *noktanın* i-inci koordinatını okur; dx_i bir *teğet vektörün* (vektör kısmının) i-inci koordinatını okur. Aynı ilişkiye doğal çatı alanı tarafından da bakılabilir. $U_j(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının i-inci koordinatı, $j = i$ ise 1, değilse 0'dır; yani δ_{ij}'dir. Örnekteki sonuç ve Tanım 5.3 gereği her $\mathbf{p}$ için $dx_i(U_j)(\mathbf{p}) = \delta_{ij}$ olur. Dolayısıyla $dx_i(U_j)$ fonksiyonu, değeri δ_{ij} olan sabit fonksiyondur:

	U_1	U_2	U_3
dx_1	1	0	0
dx_2	0	1	0
dx_3	0	0	1

Doğrusal cebirde, bir $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tabanı verildiğinde her birine 1, ötekilere 0 veren üç lineer dönüşüme bu tabanın **dual tabanı** (dual basis) denir. Tablo, her $\mathbf{p}$ noktasında dx_1, dx_2, dx_3'ün $\mathbf{p}$'deki kısıtlanışlarının,

 CC BY-NC-SA 4.0

$U_1(\mathbf{p}), U_2(\mathbf{p}), U_3(\mathbf{p})$ tabanının dual tabanı olduğunu söyler. dx_i'lerin U_i'lerin "dualleri" diye anılmasının nedeni budur.

Örnek 5.14 (Fonksiyon Katsayılı Bir 1-Formun Değeri). f_1, f_2, f_3, $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli fonksiyonlar ve

$$\psi = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3$$

olsun. ψ'nin keyfi bir $\mathbf{v_p} = (v_1, v_2, v_3)_\mathbf{p}$ teğet vektöründeki değerini bulalım.

Çözüm.
Önce ψ'nin gerçekten bir 1-form olduğunu not edelim. Her dx_i bir 1-formdur (Önerme 5.3). Önerme 5.1 gereği her $f_i\,dx_i$ bir 1-formdur; aynı önerme iki 1-formun toplamının 1-form olduğunu söyler. Önce $f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$'ye, sonra buna $f_3\,dx_3$ eklenmesine uygulanınca ψ'nin bir 1-form olduğu çıkar.
Değeri bulmak için toplamın tanımını iki kez, fonksiyonla çarpımın tanımını üç kez ve Örnek 5.13'nin sonucunu kullanırız:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{v_p}) &= \sum_{i=1}^{3}(f_i\,dx_i)(\mathbf{v_p}) = \sum_{i=1}^{3} f_i(\mathbf{p})\,dx_i(\mathbf{v_p}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} f_i(\mathbf{p})\,v_i = f_1(\mathbf{p})\,v_1 + f_2(\mathbf{p})\,v_2 + f_3(\mathbf{p})\,v_3.\end{aligned}$$

Bu formül şunu söyler: $\mathbf{p}$ noktasında ψ, katsayıları $f_1(\mathbf{p})$, $f_2(\mathbf{p})$, $f_3(\mathbf{p})$ sayıları olan sabit katsayılı kuraldır. Katsayılar $\mathbf{p}$'de, okun başında hesaplanır; vektör kısmının koordinatlarıyla çarpılıp toplanır.
■

Örnek 5.15 (Fonksiyon Katsayılı Formun Sayısal Değeri). $\psi = xy\,dx - z\,dy + x^2\,dz$ olsun. ψ'nin $\mathbf{p} = (2, 1, -1)$ noktasındaki $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$ vektörü üzerindeki değerini bulalım.

Çözüm.
Katsayı fonksiyonları $f_1 = xy$, $f_2 = -z$ ve $f_3 = x^2$'dir. $\mathbf{p} = (2, 1, -1)$'de

$$f_1(\mathbf{p}) = 2 \cdot 1 = 2, \qquad f_2(\mathbf{p}) = -(-1) = 1, \qquad f_3(\mathbf{p}) = 2^2 = 4.$$

Örnek 5.14'daki formülle

$$\psi(\mathbf{v_p}) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 2 + 3 + 8 = 13.$$

Karşılaştırma için aynı vektör kısmını başlangıç noktası $\mathbf{0}$'da uygulayalım: orada üç katsayı da 0'dır ve $\psi\left((1,3,2)_\mathbf{0}\right) = 0$ olur. dx_i'lerin tersine, fonksiyon katsayılı bir 1-formun değeri uygulama noktasına bağlıdır.
■

5.6 Her 1-Form Koordinatlarla Yazılır

Örnek 5.14, $\sum f_i\,dx_i$ biçimindeki her ifadenin bir 1-form olduğunu gösterdi. Ters yön de doğrudur ve çok daha kullanışlıdır: hangi 1-formu alırsak alalım, onu bu biçimde yazabiliriz. Bu, bir vektör alanının $V = \sum v_i\,U_i$ biçiminde yazılışının (Lemma 2.1) 1-formlardaki karşılığıdır.

Lemma 5.1 (Bir 1-Formun Öklid Koordinat Fonksiyonları). *ϕ, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir 1-form olsun ve $i = 1, 2, 3$ için $f_i = \phi(U_i)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. O zaman*

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} f_i\,dx_i = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3.$$

*Bu eşitliği sağlayan f_1, f_2, f_3 fonksiyonları tektir. Bunlara **ϕ'nin Öklid koordinat fonksiyonları** (Euclidean coordinate functions of ϕ) denir.*

İspat.
Bir 1-form, teğet vektörler üzerinde bir fonksiyondur. Dolayısıyla ϕ ile $\sum f_i\,dx_i$ ancak ve ancak her teğet vektörde aynı değeri alırlarsa eşittir. Keyfi bir $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (v_1, v_2, v_3)_\mathbf{p}$ alalım ve iki tarafın bu vektördeki değerini hesaplayalım.
Sağ taraf. *Örnek 5.14 gereği*

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} f_i\,dx_i\Big)\,(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} f_i(\mathbf{p})\,v_i.$$

Sol taraf. $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$*'teki toplama ve skalerle çarpmanın tanımı ile doğal çatının tanımı gereği*

$$\mathbf{v}_\mathbf{p} = v_1\,(1,0,0)_\mathbf{p} + v_2\,(0,1,0)_\mathbf{p} + v_3\,(0,0,1)_\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{3} v_i\,U_i(\mathbf{p}).$$

ϕ'nin $\mathbf{p}$'deki lineerliği iki terimli toplamlar için yazılmıştır; üç terime ulaşmak için onu iki kez uygularız: önce $\mathbf{v}_\mathbf{p}$'yi $v_1U_1(\mathbf{p})$ ile kalan iki terimin toplamına ayırarak, sonra bu iki terimli toplamın kendisine. Böylece

$$\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\phi\,\big(\,U_i(\mathbf{p})\,\big) = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\phi(U_i)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} v_i\,f_i(\mathbf{p})$$

bulunur; ikinci eşitlik Tanım 5.3, üçüncüsü f_i'nin tanımıdır. İki taraf aynı sayıyı verdiğinden $\phi = \sum f_i\,dx_i$.
Teklik. *$\phi = \sum g_i\,dx_i$ olacak biçimde başka g_1, g_2, g_3 fonksiyonları da bulunsun. İki tarafı $U_j(\mathbf{p})$ üzerinde değerlendirelim. $U_j(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının i-inci koordinatı δ_{ij} olduğundan Örnek 5.14'daki formül*

$$\phi(U_j)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} g_i(\mathbf{p})\,\delta_{ij} = g_j(\mathbf{p})$$

verir. Bu her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan $g_j = \phi(U_j) = f_j$ olur.
■

Lemmadan sonra $\mathbb{R}^3$ üzerindeki 1-formları $f\,dx + g\,dy + h\,dz$ ifadeleriyle özdeşleştirebiliriz. Temel hesaptaki aynı görünümlü ifadelerden farkı, bunların artık teğet vektörler üzerinde kesin olarak tanımlı fonksiyonlar olmasıdır. Her noktada bir 1-form üç sayıyla belirlenir: $f_1(\mathbf{p})$, $f_2(\mathbf{p})$, $f_3(\mathbf{p})$. Bu da hem dual uzayın üç boyutlu olmasıyla, hem de bir 1-formun her noktada vektör kısmının sabit terimsiz, birinci dereceden bir ifadesi olmasıyla uyumludur.
Lemma diferansiyellenebilirliği de koordinatlara indirir. Bir $V = \sum v_i\,U_i$ vektör alanı için $V(\mathbf{p}) = \big(\,v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_\mathbf{p}$ olduğundan, Örnek 5.14'daki formül her noktada

$$\phi(V)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} f_i(\mathbf{p})\,v_i(\mathbf{p}), \quad \text{yani} \quad \phi(V) = \sum_{i=1}^{3} f_i\,v_i$$

verir. f_i'ler diferansiyellenebilir ise diferansiyellenebilir her V için bu toplam diferansiyellenebilirdir, yani ϕ diferansiyellenebilirdir. Tersine, ϕ diferansiyellenebilir ise U_i alanları (sabit koordinatlı oldukları için) diferansiyellenebilir olduğundan $f_i = \phi(U_i)$ fonksiyonları diferansiyellenebilirdir. Sonuç: *bir 1-form ancak ve ancak Öklid koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir ise diferansiyellenebilirdir.* Örnek 5.9'daki 1-formun koordinat fonksiyonları $0, |\,x\,|, 0$'dır ve ortadaki diferansiyellenebilir değildir.
Vektör alanlarıyla 1-formlar arasındaki ikiliği şimdi tek bir tabloda toplayabiliriz. Son satırdaki $v_i = dx_i(V)$ eşitliği, $dx_i(V)(\mathbf{p})$'nin $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının i-inci koordinatı, yani $v_i(\mathbf{p})$ olmasından gelir.

	vektör alanı V	1-form ϕ
$\mathbf{p}$'de verdiği	bir ok	lineer bir kural
temel nesneler	U_1, U_2, U_3	dx_1, dx_2, dx_3
standart biçim	$V = \sum v_i\,U_i$	$\phi = \sum f_i\,dx_i$

 CC BY-NC-SA 4.0

	vektör alanı V	1-form ϕ
koordinatlar	$v_i = dx_i(V)$	$f_i = \phi(U_i)$

Örnek 5.16 (Koordinat Fonksiyonlarını Bulmak). Örnek 5.4'da her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ için

$$\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = p_3 v_1 + (p_1 + p_2) v_2 - p_1 p_2 v_3$$

kuralıyla verilen ϕ 1-formunu $\sum f_i\, dx_i$ biçiminde yazalım.

Çözüm.
Lemma, $f_i = \phi(U_i)$ fonksiyonlarını hesaplamamızı söyler. $U_1(\mathbf{p}) = (1,0,0)_\mathbf{p}$ olduğundan $v_1 = 1$, $v_2 = v_3 = 0$ koyarız:

$$f_1(\mathbf{p}) = \phi\left(\ (1,0,0)_\mathbf{p}\ \right) = p_3.$$

Benzer biçimde $f_2(\mathbf{p}) = \phi\left(\ (0,1,0)_\mathbf{p}\ \right) = p_1 + p_2$ ve $f_3(\mathbf{p}) = \phi\left(\ (0,0,1)_\mathbf{p}\ \right) = -p_1 p_2$. Fonksiyon olarak $f_1 = z$, $f_2 = x + y$, $f_3 = -xy$. Dolayısıyla

$$\phi = z\, dx + (x + y)\, dy - xy\, dz.$$

Denetim: $\mathbf{p} = (1,2,3)$ ve $\mathbf{v} = (1,0,2)$ için bu yazılış $3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = -1$ verir; Örnek 5.4'da aynı sayıyı bulmuştuk. Koordinat fonksiyonları polinom olduğundan ϕ diferansiyellenebilirdir.
■

Örnek 5.17 (Doğal Çatıda Eşit Olan 1-Formlar). ϕ ve ψ iki 1-form olsun ve her $i = 1, 2, 3$ için $\phi(U_i) = \psi(U_i)$ fonksiyon eşitliği sağlansın. $\phi = \psi$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Lemma 5.1 her iki 1-forma uygulanırsa

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi(U_i)\, dx_i = \sum_{i=1}^{3} \psi(U_i)\, dx_i = \psi$$

bulunur; ortadaki eşitlik varsayımdır. Demek ki bir 1-formu tanımak için onun her teğet vektördeki değerini bilmek gerekmez: üç alan, U_1, U_2 ve U_3 üzerindeki değerleri yeter.
Üç alanın yerine tek bir alan yetmez. dx ve dy 1-formları $V = U_1 + U_2$ alanında aynı sabit fonksiyonu verir: $dx(V) = 1 = dy(V)$. Ama $dx(U_1) = 1$, $dy(U_1) = 0$ olduğundan $dx \neq dy$.
■

5.7 Diferansiyelin Koordinat Formülü

Şimdi bölümün başındaki soruya dönebiliriz. Bir fonksiyonun diferansiyelini (Tanım 5.5) yönlü türevle, koordinat kullanmadan tanımladık. Aşağıdaki sonuç, bu tanımın temel hesaptaki biçimsel formülle aynı şeyi söylediğini gösterir.

Sonuç 5.1 (Diferansiyelin Kısmi Türevlerle Yazılışı). *f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise*

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dx_3.$$

İspat.
İki tarafın keyfi bir $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (v_1, v_2, v_3)_\mathbf{p}$ teğet vektöründe aynı değeri aldığını göstereceğiz. Sağ taraf, katsayıları $f_i = \partial f / \partial x_i$ olan fonksiyon katsayılı bir 1-formdur; Örnek 5.14 gereği değeri

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\right)(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\, v_i$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Sol tarafın değeri tanım gereği $df(\mathbf{v_p}) = \mathbf{v_p}[f]$'dir ve Lemma 3.1 bu sayının tam olarak yukarıdaki toplam olduğunu söyler. İki 1-form her teğet vektörde aynı değeri aldığından eşittir.
Aynı sonuca Lemma 5.1 üzerinden de ulaşılır. df'nin koordinat fonksiyonları $df(U_i)$'dir ve Önerme 5.3 gereği $df(U_i) = U_i[f]$. $U_i(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının j-inci koordinatı δ_{ij} olduğundan

$$U_i[f](\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

Demek ki df'nin Öklid koordinat fonksiyonları f'nin kısmi türevleridir ve lemma istenen eşitliği verir.
■

Böylece başlangıçtaki formül

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

artık bir teoremdir ve her sembolün kesin bir anlamı vardır. Eşitliğin iki yanı da teğet vektörler üzerinde tanımlı fonksiyonlardır, yani 1-formdur. dx, dy, dz "çok küçük sayılar" değil, bir teğet vektörün vektör kısmının koordinatlarını okuyan 1-formlardır. Kısmi türevler birer fonksiyondur ve bir teğet vektörde değerlendirirken okun uygulama noktasında hesaplanır. İki yanı $\mathbf{v_p}$'ye uygulamak, yönlü türevin kısmi türevlerle hesap formülünü verir. Katsayı üçlüsü $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ temel hesaptaki gradyan (gradient) vektörüdür; df bu üçlünün teğet vektörler üzerinde çalışan hâlidir.
İlk kural toplamlarla ilgilidir: bir toplamın diferansiyeli, terimlerin diferansiyellerinin toplamıdır.

Önerme 5.4 (Toplamın Diferansiyeli). *f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar, a ve b sayılar ise*

$$d(af + bg) = a\,df + b\,dg.$$

Özel olarak $d(f+g) = df + dg$ ve $d(-f) = -df$.

İspat.
Keyfi bir $\mathbf{v_p}$ alalım. Diferansiyelin tanımı, Teorem 3.1'nin ikinci özelliği ve Tanım 5.2 (sabit a, b fonksiyonlarıyla) sırasıyla

$$\begin{aligned} d(af+bg)(\mathbf{v_p}) &= \mathbf{v_p}[af+bg] = a\,\mathbf{v_p}[f] + b\,\mathbf{v_p}[g] \\ &= a\,df(\mathbf{v_p}) + b\,dg(\mathbf{v_p}) = (a\,df + b\,dg)(\mathbf{v_p}) \end{aligned}$$

verir. Her teğet vektörde değerler eşit olduğundan 1-formlar eşittir. $a=b=1$ ve $a=-1$, $b=0$ özel hâllerdir.
Formül yoluyla da görülebilir: kısmi türev alma lineer olduğundan $af+bg$'nin i-inci kısmi türevi $a\,\partial f/\partial x_i + b\,\partial g/\partial x_i$ olur. Bunu Sonuç 5.1'ne koyup 1-formlarla cebir kurallarıyla iki toplama ayırırsak yine $a\,df + b\,dg$ bulunur.
■

Örnek 5.18 (Formülle Diferansiyel). $f = x^2 + y\sin z$ olsun. df'yi Sonuç 5.1 ile bulup $\mathbf{p} = (1,2,0)$ noktasındaki $\mathbf{v} = (1,1,1)$ vektörü üzerindeki değerini hesaplayalım.

Çözüm.
Kısmi türevler

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos z$$

olduğundan $df = 2x\,dx + \sin z\,dy + y\cos z\,dz$. $\mathbf{p} = (1,2,0)$'da katsayılar 2, $\sin 0 = 0$ ve $2\cos 0 = 2$'dir. Dolayısıyla

$$df(\mathbf{v_p}) = 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 = 4.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Denetim için doğrudan tanıma gidelim: $\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(1+t,2+t,t)$ ve

$$f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=(1+t)^2+(2+t)\sin t.$$

Türev $2(1+t)+\sin t+(2+t)\cos t$'dir; $t=0$'da $2+0+2=4$. Uyuşur.
■

Örnek 5.19 (Sabit Katsayılı Her 1-Form Bir Diferansiyeldir). a, b, c sayılar olsun. $a\,dx+b\,dy+c\,dz$ 1-formunun bir fonksiyonun diferansiyeli olduğunu gösterelim.

Çözüm.
$f=ax+by+cz$ fonksiyonunu alalım. Önerme 5.4'nı iki kez uygulayınca

$$df=d(ax+by+cz)=a\,dx+b\,dy+c\,dz$$

bulunur. Aynı sonuç Sonuç 5.1'nden de çıkar: f'nin kısmi türevleri a, b, c sabitleridir.
Özel olarak Örnek 5.2'daki $\phi(\mathbf{v_p})=2v_1-v_2+3v_3$ 1-formu, Örnek 5.14 gereği $2\,dx-dy+3\,dz$'dir ve bu da $d(2x-y+3z)$'dir. Bir başka özel hâl tutarlılık denetimidir: $f=x_i$ için formül $dx_i=\sum_j \delta_{ij}\,dx_j$ verir ve toplam çöktüğünde gerçekten dx_i kalır.
Katsayılar fonksiyon olunca durum değişir. Örneğin $y\,dx$ hiçbir fonksiyonun diferansiyeli değildir; bunu alıştırmalarda ispatlayacağız. Her diferansiyel bir 1-formdur, ama her 1-form bir diferansiyel değildir.
■

5.8 Çarpım ve Bileşke Kuralları

Geriye iki soru kalıyor: iki fonksiyonun çarpımının ve bir bileşkenin diferansiyeli, parçaların diferansiyelleri cinsinden nasıl yazılır? Bu iki kural, toplam kuralıyla birlikte, diferansiyelleri kısmi türevlerle tek tek uğraşmadan hesaplamayı sağlar.

Lemma 5.2 (Çarpım Kuralı). *f ve g, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve fg bunların çarpımı ise*

$$d(fg)=g\,df+f\,dg.$$

İspat.
fg diferansiyellenebilir fonksiyonların çarpımı olduğundan diferansiyellenebilirdir. Kısmi türevin çarpım kuralı, öteki iki koordinat sabit tutulup tek değişkenli çarpım kuralı uygulanarak elde edilir:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\,g+f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Bunu Sonuç 5.1'ne koyalım:

$$\begin{aligned} d(fg)&=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}\,dx_i=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,g+f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)dx_i\\ &=g\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i+f\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx_i=g\,df+f\,dg. \end{aligned}$$

İkinci satıra geçerken 1-formlarla cebir kurallarını kullandık: parantezi açtık ve g, f fonksiyon çarpanlarını toplamların dışına aldık. Son eşitlik yine Sonuç 5.1'dür.
■

Alıştırmalarda aynı kuralı koordinat kullanmadan, doğrudan diferansiyelin tanımından ispatlayacağız.

Örnek 5.20 (Çarpım Kuralıyla Diferansiyel). $f=x^2yz$ olsun. df'yi çarpım kuralıyla bulup $\mathbf{p}=(1,1,0)$ noktasındaki $\mathbf{v}=(1,0,-3)$ vektörü üzerindeki değerini hesaplayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$f = (x^2)(yz)$ biçiminde yazalım. Sonuç 5.1 ile $d(x^2) = 2x\,dx$ (kısmi türevler $2x, 0, 0$). yz için çarpım kuralı bir kez daha: $d(yz) = z\,dy + y\,dz$. Dolayısıyla

$$d(x^2yz) = yz\,d(x^2) + x^2\,d(yz) = 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz.$$

Katsayılar gerçekten f'nin kısmi türevleridir: $\partial f/\partial x = 2xyz$, $\partial f/\partial y = x^2z$, $\partial f/\partial z = x^2y$.
$\mathbf{p} = (1, 1, 0)$'da katsayılar 0, 0, 1'dir; bu yüzden

$$df(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = -3.$$

Yönlü türevleri incelerken aynı fonksiyonun aynı teğet vektöre göre türevini, doğru boyunca tek değişkenli türev alarak da -3 bulmuştuk.
Kuralın biçimine dikkat: $d(fg)$, "df ile dg'nin çarpımı" değildir; iki 1-formun çarpımı henüz tanımlı bile değildir. Doğru kural, her diferansiyeli öteki fonksiyonla çarparak toplar.
■

Lemma 5.3 (Bileşke Kuralı). *$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman $h(f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonu da diferansiyellenebilirdir ve*

$$d\,\big(\,h(f)\,\big) = h'(f)\,df.$$

Burada h' tek değişkenli türevdir; $h'(f)$ de her $\mathbf{p}$'yi $h'\,\big(\,f(\mathbf{p})\,\big)$ sayısına götüren bileşke fonksiyondur.

İspat.
Kısmi türevler. *$\mathbf{p}$ noktasını ve bir i indisini sabitleyelim; $F(t)$, f'nin $\mathbf{p}$'nin yalnızca i-inci koordinatına t eklenerek elde edilen noktadaki değeri olsun. Tanım gereği $F'(0) = \partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$ ve $F(0) = f(\mathbf{p})$'dir. Tek değişkenli zincir kuralı $t \mapsto h\,\big(\,F(t)\,\big)$ fonksiyonunun $t = 0$'daki türevini $h'\,\big(\,F(0)\,\big)\,F'(0)$ olarak verir. Bu, $h(f)$'nin $\mathbf{p}$'deki i-inci kısmi türevidir; her $\mathbf{p}$ için geçerli olduğundan*

$$\frac{\partial\, h(f)}{\partial x_i} = h'(f)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Diferansiyellenebilirlik. *Sağ taraf, $h'(f)$ ile $\partial f/\partial x_i$'nin çarpımıdır. h' de diferansiyellenebilir bir tek değişkenli fonksiyon olduğundan $h'(f)$ aynı türden bir bileşkedir; ona aynı formül uygulanınca $\partial\, h'(f)/\partial x_j = h''(f)\,\partial f/\partial x_j$ çıkar. Kısmi türevin çarpım kuralını da kullanarak mertebe üzerinden tümevarımla şunu elde ederiz: $h(f)$'nin her mertebeden kısmi türevi vardır ve $h^{(k)}(f)$ biçimindeki bileşkelerle f'nin kısmi türevlerinin çarpımlarının sonlu bir toplamıdır. Bu çarpanların her biri süreklidir ($h^{(k)}$ ile f sürekli olduğundan bileşkeleri de süreklidir). Dolayısıyla bütün kısmi türevler süreklidir ve $h(f)$ diferansiyellenebilirdir.*
Diferansiyel. *Sonuç 5.1'nü $h(f)$'ye uygulayıp ortak çarpan $h'(f)$'yi dışarı alırsak*

$$d\,\big(\,h(f)\,\big) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\, h(f)}{\partial x_i}\,dx_i = \sum_{i=1}^{3} h'(f)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i = h'(f)\,df$$

bulunur; son adımda f için yine Sonuç 5.1 kullanıldı.
■

> **i** Yalnızca bir aralıkta tanımlı dış fonksiyonlar
>
> İspat, h'nin yalnızca f'nin aldığı değerlerde ve onların yakınında türevlenebilir olmasını kullanır. Bu yüzden h açık bir J aralığında, örneğin $(0, \infty)$'da diferansiyellenebilirse ve f'nin bütün değerleri J'nin içindeyse, aynı formül geçerlidir. f yalnızca $\mathbb{R}^3$'ün açık bir parçasında tanımlıysa da (örneğin başlangıç noktası çıkarılmış uzayda) sonuç o parçada doğrudur. Örnekler: $f > 0$ ise $d(\sqrt{f}) = df/(2\sqrt{f})$ ve $d(\log f) = df/f$; burada log doğal logaritmadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.21 (Bileşke Kuralıyla Diferansiyel). $f = \sin(x^2 + z)$ olsun. df'yi bileşke kuralıyla bulup $\mathbf{p} = (0, 5, \pi)$ noktasındaki $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ vektörü üzerindeki değerini hesaplayalım.

Çözüm.
İç fonksiyon $g = x^2 + z$, dış fonksiyon $h = \sin$'dir; $h' = \cos$. Önce iç fonksiyonun diferansiyeli: $d(x^2)$, Lemma 5.3'nın $h(s) = s^2$ ve iç fonksiyon x ile özel hâlidir, $d(x^2) = 2x\,dx$. Toplam kuralıyla $dg = 2x\,dx + dz$. Bileşke kuralı

$$\begin{aligned} d\left(\sin(x^2 + z)\right) &= \cos(x^2 + z)\,(2x\,dx + dz) \\ &= 2x\cos(x^2 + z)\,dx + \cos(x^2 + z)\,dz \end{aligned}$$

verir. dy terimi yoktur, çünkü f ikinci koordinata bağlı değildir.
$\mathbf{p} = (0, 5, \pi)$'de $x^2 + z = \pi$ ve $\cos\pi = -1$'dir; katsayılar 0, 0, -1 olur. Dolayısıyla

$$df(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = -3.$$

■

> **Diferansiyeli hesaplamanın pratik yolu**
>
> Somut bir fonksiyonun diferansiyeli gerektiğinde, kısmi türevleri tek tek hesaplayıp Sonuç 5.1'ne yerleştirmek yerine toplam, çarpım ve bileşke kurallarıyla ilerlemek genellikle daha az iş çıkarır. Sonucu $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde topladığımızda katsayılar, Lemma 5.1'ndaki teklik sayesinde, f'nin kısmi türevlerinin ta kendisidir. Üstelik iş orada bitmez: bulunan df'yi herhangi bir teğet vektörde değerlendirmek, f'nin o yöndeki türevini verir. Tek bir hesapla bütün yönlü türevler elde edilmiş olur.

Örnek 5.22 (Kurallarla Diferansiyel ve Bütün Yönlü Türevler). $f = (x^2 - 1)y + (y^2 + 2)z$ olsun. df'yi kurallarla bulalım ve buradan f'nin keyfi bir $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ teğet vektörüne göre türevini veren formülü yazalım.

Çözüm.
Toplam kuralı. İki terimin diferansiyelleri ayrı ayrı alınıp toplanır:

$$df = d\left((x^2 - 1)y\right) + d\left((y^2 + 2)z\right).$$

Çarpım kuralı. Her terim bir çarpımdır:

$$\begin{aligned} d\left((x^2 - 1)y\right) &= y\,d(x^2 - 1) + (x^2 - 1)\,dy, \\ d\left((y^2 + 2)z\right) &= z\,d(y^2 + 2) + (y^2 + 2)\,dz. \end{aligned}$$

İç diferansiyeller. Sabitin diferansiyeli sıfır ve $d(x^2) = 2x\,dx$ olduğundan $d(x^2 - 1) = 2x\,dx$; benzer biçimde $d(y^2 + 2) = 2y\,dy$.
Toplama. Yerine koyup dx, dy, dz katsayılarını toplarsak

$$\begin{aligned} df &= (2x\,dx)\,y + (x^2 - 1)\,dy + (2y\,dy)\,z + (y^2 + 2)\,dz \\ &= 2xy\,dx + (x^2 + 2yz - 1)\,dy + (y^2 + 2)\,dz. \end{aligned}$$

Teklik gereği katsayılar kısmi türevlerdir: $\partial f/\partial x = 2xy$, $\partial f/\partial y = x^2 + 2yz - 1$, $\partial f/\partial z = y^2 + 2$. Birini doğrudan denetleyelim: y'ye göre türevde $(x^2 - 1)y$ terimi $x^2 - 1$, $(y^2 + 2)z$ terimi $2yz$ verir; toplam uyuşur.
Bütün yönlü türevler. df'yi $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (v_1, v_2, v_3)_\mathbf{p}$ üzerinde değerlendirmek için katsayıları $\mathbf{p}$'de hesaplayıp v_i'lerle çarparız:

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = df(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 2p_1p_2\,v_1 + (p_1^2 + 2p_2p_3 - 1)\,v_2 + (p_2^2 + 2)\,v_3.$$

Sayısal bir denetim: $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$ ve $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ için formül $2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 6$ verir. Doğrudan tanımdan: $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 1 - t, 1 + 2t)$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) = (2t+t^2)(1-t) + (3-2t+t^2)(1+2t).$$

Birinci terimin $t=0$'daki türevi 2, ikinci terimin türevi $(-2)\cdot 1 + 3\cdot 2 = 4$'tür; toplam 6. Uyuşur.
■

5.9 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Tek Terimli Bir 1-Formun Değeri). $\mathbf{p}=(0,-2,1)$ ve $\mathbf{v}=(1,2,-3)$ olsun. $y^2\,dx$ 1-formunun $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü üzerindeki değerini bulunuz.

Çözüm.
Örnek 5.14 gereği fonksiyon katsayılı bir 1-formun değeri, katsayıların okun uygulama noktasındaki değerleriyle vektör kısmının koordinatlarının çarpımlarının toplamıdır. Burada tek katsayı y^2'dir ve dx ile çarpılmıştır.
Katsayı. $\mathbf{p}=(0,-2,1)$'de $y=-2$ olduğundan $y^2=4$.
Koordinat. $dx(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = v_1 = 1$.
Değer. $(y^2\,dx)(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 4\cdot 1 = 4$.
Katsayı okun başında, $\mathbf{p}$'de hesaplanır. Okun ucu $\mathbf{p}+\mathbf{v}=(1,0,-2)$'de $y^2=0$ olurdu ve yanlış olarak 0 bulunurdu.
■

Alıştırma 5.2 (İki Terimli Bir 1-Formun Değeri). $\mathbf{p}=(0,-2,1)$ ve $\mathbf{v}=(1,2,-3)$ olsun. $z\,dy - y\,dz$ 1-formunun $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü üzerindeki değerini bulunuz.

Çözüm.
Katsayılar. dy'nin katsayısı z, dz'nin katsayısı $-y$'dir. $\mathbf{p}=(0,-2,1)$'de $z=1$ ve $-y=2$.
Koordinatlar. $dy(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = v_2 = 2$ ve $dz(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = v_3 = -3$.
Değer. Terimleri toplarsak

$$(z\,dy - y\,dz)(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) = 2-6 = -4.$$

■

Alıştırma 5.3 (Üç Terimli Bir 1-Formun Değeri). $\mathbf{p}=(0,-2,1)$ ve $\mathbf{v}=(1,2,-3)$ olsun. $(z^2-1)\,dx - dy + x^2\,dz$ 1-formunun $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü üzerindeki değerini bulunuz.

Çözüm.
Katsayılar. Katsayı fonksiyonları $f_1 = z^2-1$, $f_2=-1$ ve $f_3 = x^2$'dir. $\mathbf{p}=(0,-2,1)$'de

$$f_1(\mathbf{p}) = 1-1 = 0, \qquad f_2(\mathbf{p}) = -1, \qquad f_3(\mathbf{p}) = 0.$$

Değer. Vektör kısmının koordinatları 1, 2, -3 olduğundan

$$\big((z^2-1)\,dx - dy + x^2\,dz\big)(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot(-3) = -2.$$

Bu noktada iki katsayı sıfır olduğundan 1-form, $\mathbf{p}$'deki teğet vektörler üzerinde $-dy$ gibi davranır: yalnızca ikinci koordinatı okuyup işaretini değiştirir.
■

Alıştırma 5.4 (Standart Biçimdeki Formu Bir Alanda Değerlendirmek). $\phi = \sum f_i\,dx_i$ bir 1-form ve $V = \sum v_i\,U_i$ bir vektör alanı ise $\phi(V) = \sum f_i\,v_i$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Birinci yol: noktasal. Doğal çatının tanımı ve alan işlemlerinin noktasal tanımı gereği her $\mathbf{p}$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$V(\mathbf{p}) = \big(\ v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}}.$$

Tanım 5.3 ve Örnek 5.14 ile

$$\phi(V)(\mathbf{p}) = \phi\ \big(\ V(\mathbf{p})\ \big) = \sum_{i=1}^{3} f_i(\mathbf{p})\, v_i(\mathbf{p}) = \Big(\sum_{i=1}^{3} f_i\, v_i\Big)\,(\mathbf{p})$$

bulunur; son eşitlik fonksiyonların noktasal toplam ve çarpımıdır. Bu her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan $\phi(V) = \sum f_i\, v_i$.
İkinci yol: lineerlikle. Önerme 5.2'nin birinci özelliğini (iki kez) $V = \sum_j v_j\, U_j$'ye uygularsak $\phi(V) = \sum_j v_j\, \phi(U_j)$ olur. İkinci özellik ve $dx_i(U_j) = \delta_{ij}$ gereği

$$\phi(U_j) = \sum_{i=1}^{3} f_i\, dx_i(U_j) = \sum_{i=1}^{3} f_i\, \delta_{ij} = f_j.$$

Dolayısıyla $\phi(V) = \sum_j v_j\, f_j$; bu, istenen toplamdır.
Sayısal denetim. $\phi = z\,dx + (x+y)\,dy - xy\,dz$ ve $V = U_1 + U_3$ için formül $\phi(V) = z - xy$ verir. $\mathbf{p} = (1,2,3)$'te bu $3 - 2 = 1$'dir. Doğrudan: $V(\mathbf{p}) = (1,0,1)_{\mathbf{p}}$ ve katsayılar $3, 3, -2$ olduğundan değer $3 + 0 - 2 = 1$. Uyuşur.
■

Alıştırma 5.5 (Konum Alanında Değer). $\phi = x^2\,dx - y^2\,dz$ olsun. ϕ'nin $V = xU_1 + yU_2 + zU_3$ vektör alanındaki değerini bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 5.4'deki formülü kullanacağız.
Koordinatlar. ϕ'nin Öklid koordinat fonksiyonları $f_1 = x^2$, $f_2 = 0$, $f_3 = -y^2$; V'nin koordinat fonksiyonları $v_1 = x$, $v_2 = y$, $v_3 = z$'dir.
Değer. Karşılıklı çarpıp toplarsak

$$\phi(V) = x^2 \cdot x + 0 \cdot y + (-y^2) \cdot z = x^3 - y^2 z.$$

Denetim. $\mathbf{p} = (2,1,3)$'te formül $8 - 3 = 5$ verir. Doğrudan: $V(\mathbf{p}) = (2,1,3)_{\mathbf{p}}$; katsayılar $4,\ 0,\ -1$ olduğundan değer $4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 5$.
■

Alıştırma 5.6 (İki Terimli Alanda Değer). $\phi = x^2\,dx - y^2\,dz$ olsun. ϕ'nin $W = xy\,(U_1 - U_3) + yz\,(U_1 - U_2)$ vektör alanındaki değerini bulunuz.

Çözüm.
Standart biçim. Parantezleri açıp aynı U_i'leri toplarsak

$$W = (xy + yz)\,U_1 - yz\,U_2 - xy\,U_3.$$

Değer. ϕ'nin koordinat fonksiyonları x^2, 0, $-y^2$ olduğundan Alıştırma 5.4 ile

$$\phi(W) = x^2(xy + yz) + 0 \cdot (-yz) + (-y^2)(-xy) = x^3y + x^2yz + xy^3.$$

İkinci yol. Önerme 5.2 ile doğrudan da gidilebilir. $\phi(U_1) = x^2$, $\phi(U_2) = 0$, $\phi(U_3) = -y^2$ olduğundan $\phi(U_1 - U_3) = x^2 + y^2$ ve $\phi(U_1 - U_2) = x^2$. Buradan

$$\phi(W) = xy\,(x^2 + y^2) + yz \cdot x^2 = x^3y + xy^3 + x^2yz,$$

aynı sonuç.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 5.7 (Fonksiyon Katsayılı Birleşimde Değer). $\phi = x^2\,dx - y^2\,dz$, $V = xU_1 + yU_2 + zU_3$ ve $W = xy\,(U_1 - U_3) + yz\,(U_1 - U_2)$ olsun. ϕ'nin, $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olan noktalarda tanımlı $(1/x)V + (1/y)W$ vektör alanındaki değerini bulunuz.

Çözüm.
Tanım kümesi. $1/x$ ve $1/y$ katsayıları yalnızca $x \neq 0$, $y \neq 0$ olan noktalarda tanımlıdır. Bu noktaların kümesi açıktır ve orada her şey noktasal tanımlandığından Önerme 5.2 aynı ispatla geçerlidir.
Lineerlik. Önermenin birinci özelliği $f = 1/x$ ve $g = 1/y$ ile

$$\phi\left(\frac{1}{x}V + \frac{1}{y}W\right) = \frac{1}{x}\,\phi(V) + \frac{1}{y}\,\phi(W)$$

verir.
Değer. Alıştırma 5.5 ve Alıştırma 5.6'deki sonuçları yerine koyarsak

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{1}{x}V + \frac{1}{y}W\right) &= \frac{x^3 - y^2 z}{x} + \frac{x^3 y + x^2 yz + xy^3}{y} \\ &= x^2 - \frac{y^2 z}{x} + x^3 + x^2 z + xy^2.\end{aligned}$$

Doğrudan denetim. Alanın koordinat fonksiyonları

$$\left(1 + x + z,\ \frac{y}{x} - z,\ \frac{z}{x} - x\right)$$

olur (birinci koordinat $x/x + (xy + yz)/y$, ötekiler benzer biçimde). ϕ'nin katsayıları x^2, 0, $-y^2$ ile çarpılıp toplanınca $x^2 + x^3 + x^2 z - y^2 z/x + xy^2$ elde edilir; aynı fonksiyon. Örneğin $(1,1,1)$ noktasında değer 3'tür.
■

Alıştırma 5.8 (Beşinci Kuvvetin Diferansiyeli). f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $d(f^5)$'i df cinsinden yazınız.

Çözüm.
Dış fonksiyon. $f^5 = h(f)$ olur; burada $h(s) = s^5$ bütün $\mathbb{R}$ üzerinde diferansiyellenebilirdir ve $h'(s) = 5s^4$.
Bileşke kuralı. Lemma 5.3 ile

$$d(f^5) = h'(f)\,df = 5f^4\,df.$$

Denetim. $f = x + y$ için sonuç

$$d\left(\,(x+y)^5\,\right) = 5(x+y)^4\,(dx + dy)$$

olur. $(x+y)^5$'in x'e ve y'ye göre kısmi türevlerinin ikisi de $5(x+y)^4$, z'ye göre türevi 0'dır; Sonuç 5.1 ile uyuşur.
■

Alıştırma 5.9 (Karekökün Diferansiyeli). f, her noktada $f > 0$ olan diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $d(\sqrt{f})$'yi df cinsinden yazınız.

Çözüm.
Dış fonksiyon. $h(s) = \sqrt{s}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında diferansiyellenebilirdir ve $h'(s) = 1/(2\sqrt{s})$. f'nin bütün değerleri bu aralıkta olduğundan, bileşke kuralının ardındaki nottaki genişletme uygulanır.
Bileşke kuralı.

$$d(\sqrt{f}) = h'(f)\,df = \frac{df}{2\sqrt{f}}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek. $f = 1 + x^2$ için $df = 2x\,dx$ ve $d\left(\sqrt{1+x^2}\right) = x\,dx/\sqrt{1+x^2}$.
■

Alıştırma 5.10 (Logaritmik Bileşkenin Diferansiyeli). f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $d\left(\log(1+f^2)\right)$'yi df cinsinden yazınız; burada log doğal logaritmadır.

Çözüm.
Dış fonksiyon. $1 + s^2 \geq 1 > 0$ olduğundan $h(s) = \log(1+s^2)$ bütün $\mathbb{R}$ üzerinde diferansiyellenebilirdir. Tek değişkenli zincir kuralıyla

$$h'(s) = \frac{2s}{1+s^2}.$$

Bileşke kuralı. Lemma 5.3 doğrudan uygulanır:

$$d\left(\log(1+f^2)\right) = h'(f)\,df = \frac{2f}{1+f^2}\,df.$$

■

Alıştırma 5.11 (Uzaklık Fonksiyonunun Diferansiyeli). Başlangıç noktasına uzaklığı veren $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ fonksiyonunun diferansiyelini, başlangıç noktası dışındaki noktalarda $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Tanım kümesi. x ekseni üzerinde $r(t,0,0) = |\,t\,|$ olduğundan r'nin başlangıç noktasında x'e göre kısmi türevi yoktur. Başlangıç noktası çıkarılmış uzay açık bir kümedir ve orada $g = x^2+y^2+z^2 > 0$'dır.
İç diferansiyel. Toplam kuralı ve $d(x^2) = 2x\,dx$ ile $dg = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$.
Bileşke kuralı. $r = \sqrt{g}$ ve Alıştırma 5.9 gereği

$$dr = \frac{dg}{2\sqrt{g}} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r}.$$

Standart biçim. Katsayıları ayırırsak

$$dr = \frac{x}{r}\,dx + \frac{y}{r}\,dy + \frac{z}{r}\,dz.$$

Yorum. $\mathbf{p} = (3,0,4)$'te $r = 5$ ve $dr(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (3v_1 + 4v_3)/5$ olur. Dışarı doğru $\mathbf{v} = (3,0,4)$ için değer $25/5 = 5$'tir; gerçekten $r(\mathbf{p}+t\mathbf{p}) = 5(1+t)$ ve türevi 5'tir. Küreye teğet $\mathbf{v} = (4,0,-3)$ için değer $(12-12)/5 = 0$'dır: bu yönde uzaklık ilk anda değişmez.
■

Alıştırma 5.12 (Açı Fonksiyonunun Diferansiyeli). $\tan^{-1}(y/x)$ fonksiyonunun diferansiyelini, $x \neq 0$ olan noktalarda $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Tanım kümesi. $x \neq 0$ olan noktaların kümesi açıktır ve y/x orada diferansiyellenebilirdir.
Bölümün diferansiyeli. $h(s) = 1/s$ fonksiyonu $s \neq 0$ olan her noktanın yakınında diferansiyellenebilirdir ve $h'(s) = -1/s^2$; bileşke kuralının ardındaki not gereği $d(1/x) = -dx/x^2$. Çarpım kuralı

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\,dy + y\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

verir.
Ters tanjant. $\tan^{-1}$ bütün $\mathbb{R}$'de diferansiyellenebilirdir ve türevi $1/(1+s^2)$'dir. Bileşke kuralı ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Standart biçim.

$$d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy + 0\,dz.$$

Yorum. $x>0$ olan yarı uzayda $\tan^{-1}(y/x)$, noktanın xy-düzlemine izdüşümünün kutupsal açısıdır. $\mathbf{p}=(1,0,0)$'da birim çember boyunca saat yönünün tersine giden $\mathbf{v}=(0,1,0)$ için değer $1\cdot 1/1 = 1$'dir: açı birim hızla artar. Sonuçtaki 1-formun katsayıları $x=0, y\neq 0$ noktalarında da anlamlıdır, ama $\tan^{-1}(y/x)$ orada tanımlı değildir.
■

Alıştırma 5.13 (Bir Polinomun Diferansiyeli ve Yönlü Türevi). $f = xy^2 - yz^2$ olsun. df'yi bulunuz ve onu kullanarak $\mathbf{p}=(0,-2,1)$ noktasındaki $\mathbf{v}=(1,2,-3)$ vektörü için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm.
Diferansiyel. Çarpım kuralıyla $d(xy^2) = y^2\,dx + 2xy\,dy$ ve $d(yz^2) = z^2\,dy + 2yz\,dz$. Toplam kuralıyla

$$df = y^2\,dx + (2xy - z^2)\,dy - 2yz\,dz.$$

Katsayılar $\mathbf{p}$'de. $\mathbf{p}=(0,-2,1)$ için $y^2 = 4$, $2xy - z^2 = 0 - 1 = -1$ ve $-2yz = -2(-2)(1) = 4$.
Yönlü türev. $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = df(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$ olduğundan

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 4\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 4\cdot(-3) = 4 - 2 - 12 = -10.$$

■

Alıştırma 5.14 (Üstel Bir Çarpımın Diferansiyeli ve Yönlü Türevi). $f = xe^{yz}$ olsun. df'yi bulunuz ve onu kullanarak $\mathbf{p}=(0,-2,1)$ noktasındaki $\mathbf{v}=(1,2,-3)$ vektörü için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm.
Diferansiyel. Bileşke kuralı ($h=\exp$, $h'=\exp$) ve çarpım kuralı ile $d(yz) = z\,dy + y\,dz$ ve $d(e^{yz}) = e^{yz}(z\,dy + y\,dz)$. Bir kez daha çarpım kuralıyla

$$df = e^{yz}\,dx + x\,d(e^{yz}) = e^{yz}\,dx + xze^{yz}\,dy + xye^{yz}\,dz.$$

Katsayılar $\mathbf{p}$'de. $yz = -2$ olduğundan birinci katsayı e^{-2}'dir; $x=0$ olduğundan öteki iki katsayı 0'dır.
Yönlü türev.

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = e^{-2}\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot(-3) = e^{-2}.$$

Denetim. Doğru üzerinde $f = t\,e^{(-2+2t)(1-3t)}$; bir $t\,g(t)$ çarpımının $t=0$'daki türevi $g(0)$ olduğundan türev e^{-2}'dir.
■

Alıştırma 5.15 (Trigonometrik Bir Çarpımın Diferansiyeli ve Yönlü Türevi). $f = \sin(xy)\cos(xz)$ olsun. df'yi bulunuz ve onu kullanarak $\mathbf{p}=(0,-2,1)$ noktasındaki $\mathbf{v}=(1,2,-3)$ vektörü için $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm.
Parçalar. Bileşke kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\,\big(\,\sin(xy)\,\big) = \cos(xy)\,(y\,dx + x\,dy),$$
$$d\,\big(\,\cos(xz)\,\big) = -\sin(xz)\,(z\,dx + x\,dz).$$

Çarpım kuralı. f, $\sin(xy)$ ile $\cos(xz)$'nin çarpımı olduğundan

$$\begin{aligned} df &= \cos(xz)\,d\,\big(\,\sin(xy)\,\big) + \sin(xy)\,d\,\big(\,\cos(xz)\,\big) \\ &= \cos(xy)\cos(xz)\,(y\,dx + x\,dy) \\ &\quad -\sin(xy)\sin(xz)\,(z\,dx + x\,dz). \end{aligned}$$

Standart biçim. dx katsayılarını toplarsak

$$\begin{aligned} df = \big(\; & y\cos(xy)\cos(xz) - z\sin(xy)\sin(xz)\;\big)\,dx \\ & + x\cos(xy)\cos(xz)\,dy - x\sin(xy)\sin(xz)\,dz. \end{aligned}$$

Katsayılar $\mathbf{p}$*'de.* $x = 0$ olduğundan $xy = xz = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Katsayılar $y = -2$, 0 ve 0 olur.
Yönlü türev.

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = (-2)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot(-3) = -2.$$

■

Alıştırma 5.16 (Vektör Kısmının Koordinat Farkı). Her $(v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörüne $v_1 - v_3$ sayısını karşılık getiren ϕ kuralı bir 1-form mudur? Öyleyse ϕ'yi $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Lineerlik. Aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$ ve a, b sayıları için $a\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + b\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$'nin birinci ve üçüncü koordinatları $av_1 + bw_1$ ve $av_3 + bw_3$'tür. Dolayısıyla

$$\phi(a\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + b\mathbf{w}_{\mathbf{p}}) = (av_1 + bw_1) - (av_3 + bw_3) = a(v_1 - v_3) + b(w_1 - w_3),$$

yani $a\,\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) + b\,\phi(\mathbf{w}_{\mathbf{p}})$. ϕ bir 1-formdur.
Koordinat fonksiyonları. Lemma 5.1'na göre $f_i = \phi(U_i)$. $U_1(\mathbf{p}) = (1,0,0)_{\mathbf{p}}$ için değer $1 - 0 = 1$; U_2 için $0 - 0 = 0$; U_3 için $0 - 1 = -1$. Dolayısıyla

$$\phi = dx_1 - dx_3 = dx - dz.$$

Bu 1-form, Örnek 5.19 gereği $x - z$ fonksiyonunun diferansiyelidir.
■

Alıştırma 5.17 (Uygulama Noktasının Koordinat Farkı). Her $(v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörüne $p_1 - p_3$ sayısını karşılık getiren ϕ kuralı bir 1-form mudur? Öyleyse ϕ'yi $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Sıfır vektörü sınaması. Her 1-form her noktadaki sıfır vektörüne 0 verir. $\mathbf{p} = (1,0,0)$ noktasında ise

$$\phi(\mathbf{0}_{\mathbf{p}}) = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Dolayısıyla ϕ bir 1-form değildir.
Lineerliğin doğrudan bozulması. Aynı noktada herhangi bir $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ için $\phi(2\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 1$, oysa $2\,\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 2$.
Not. $p_1 = p_3$ olan noktalarda kural her oka 0 verir ve orada lineerdir. Ama tanım lineerliği her noktada ister; tek bir bozuk nokta yeter. Kuralın sorunu, değerin vektör kısmına hiç bağlı olmamasıdır.
■

Alıştırma 5.18 (Nokta ve Vektör Koordinatlarının Karışık Çarpımı). Her $(v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörüne $v_1 p_3 + v_2 p_1$ sayısını karşılık getiren ϕ kuralı bir 1-form mudur? Öyleyse ϕ'yi $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Lineerlik. $\mathbf{p}$ sabitlenince p_3 ve p_1 birer sayıdır; kural $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ biçimindedir ($c_1 = p_3$, $c_2 = p_1$, $c_3 = 0$). Örnek 5.4′daki hesap aynen geçerlidir: ϕ her noktada lineerdir, dolayısıyla bir 1-formdur.
Koordinat fonksiyonları. $\phi(U_1)(\mathbf{p}) = 1 \cdot p_3 + 0 = p_3$, $\phi(U_2)(\mathbf{p}) = p_1$ ve $\phi(U_3)(\mathbf{p}) = 0$. Fonksiyon olarak $f_1 = z$, $f_2 = x$, $f_3 = 0$; yani

$$\phi = z\,dx + x\,dy.$$

Denetim. $(z\,dx + x\,dy)(\mathbf{v_p}) = p_3 v_1 + p_1 v_2$; verilen kuralla aynıdır.
■

Alıştırma 5.19 (Bir Yönlü Türev Kuralı). Her $\mathbf{v_p}$ teğet vektörüne $\mathbf{v_p}[x^2 + y^2]$ sayısını karşılık getiren ϕ kuralı bir 1-form mudur? Öyleyse ϕ'yi $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Bir diferansiyel. Diferansiyelin tanımı gereği $\mathbf{v_p}[x^2 + y^2] = d(x^2 + y^2)(\mathbf{v_p})$. Yani $\phi = d(x^2 + y^2)$ ve Önerme 5.3 gereği ϕ bir 1-formdur.
Standart biçim. Toplam kuralı ve $d(x^2) = 2x\,dx$, $d(y^2) = 2y\,dy$ ile

$$\phi = 2x\,dx + 2y\,dy.$$

Denetim. Lemma 3.1 ile $\mathbf{v_p}[x^2 + y^2] = 2p_1 v_1 + 2p_2 v_2$; bu, $2x\,dx + 2y\,dy$'nin $\mathbf{v_p}$'deki değeridir.
■

Alıştırma 5.20 (Sıfır Kuralı). Her teğet vektöre 0 sayısını karşılık getiren ϕ kuralı bir 1-form mudur? Öyleyse ϕ'yi $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Lineerlik. Aynı noktadaki her $\mathbf{v_p}$, $\mathbf{w_p}$ ve a, b için

$$\phi(a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p}) = 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = a\,\phi(\mathbf{v_p}) + b\,\phi(\mathbf{w_p}).$$

ϕ bir 1-formdur; Örnek 5.12′daki sıfır 1-formdur.
Koordinat fonksiyonları. Her i için $\phi(U_i) = 0$; dolayısıyla

$$\phi = 0\,dx + 0\,dy + 0\,dz.$$

Bu 1-form her sabit fonksiyonun diferansiyelidir.
■

Alıştırma 5.21 (Birinci Koordinatın Karesi). Her $(v_1, v_2, v_3)_\mathbf{p}$ teğet vektörüne $(p_1)^2$ sayısını karşılık getiren ϕ kuralı bir 1-form mudur? Öyleyse ϕ'yi $\sum f_i\,dx_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Sıfır vektörü sınaması. $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$'da $\phi(\mathbf{0_p}) = 1^2 = 1 \neq 0$. Her 1-form sıfır vektörüne 0 verdiğinden ϕ bir 1-form değildir.
Karşılaştırma. Noktanın koordinatları bir 1-formda yer alabilir, ama yalnızca vektör kısmının koordinatlarının *katsayısı* olarak. Örneğin $(p_1)^2\,v_1$ kuralı bir 1-formdur, $x^2\,dx$'tir. $(p_1)^2$ ise hiçbir v_i ile çarpılmamıştır: sabit bir $\mathbf{p}$ için vektör kısmına bağlı olmayan bir "sabit terim"dir ve bu lineerliği bozar. Alıştırma 5.17′deki kural da aynı nedenle elenmişti.
■

Alıştırma 5.22 (Çarpım Kuralı Doğrudan Tanımdan). Lemma 5.2′nı, Sonuç 5.1′nü kullanmadan, doğrudan diferansiyelin tanımından ispatlayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Ne gösterilecek. $d(fg)$ ve $g\,df + f\,dg$ birer 1-formdur; her teğet vektörde aynı değeri aldıklarını göstermek yeter.
Hesap. Keyfi bir $\mathbf{v_p}$ alalım. Diferansiyelin tanımı, Teorem 3.1'nin üçüncü özelliği (Leibniz kuralı), yine diferansiyelin tanımı ve Tanım 5.2 sırasıyla

$$\begin{aligned} d(fg)(\mathbf{v_p}) &= \mathbf{v_p}[fg] = \mathbf{v_p}[f]\cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\cdot \mathbf{v_p}[g] \\ &= g(\mathbf{p})\,df(\mathbf{v_p}) + f(\mathbf{p})\,dg(\mathbf{v_p}) \\ &= (g\,df)(\mathbf{v_p}) + (f\,dg)(\mathbf{v_p}) = (g\,df + f\,dg)(\mathbf{v_p}) \end{aligned}$$

verir. İkinci satırda sayıların çarpımının değişme özelliğini kullandık; üçüncü satırda fonksiyonla çarpımın tanımına göre g ve f, okun uygulama noktası $\mathbf{p}$'de değerlendirildi. Her teğet vektörde değerler eşit olduğundan $d(fg) = g\,df + f\,dg$.
Yorum. Bu ispat, diferansiyelin çarpım kuralının, yönlü türevin Leibniz kuralının teğet vektörler üzerinde okunuşundan ibaret olduğunu gösterir; koordinatlara hiç ihtiyaç yoktur.
Sayısal denetim. $f = x$, $g = y$, $\mathbf{p} = (2,3,0)$, $\mathbf{v} = (1,1,0)$ olsun. Kural $d(xy) = y\,dx + x\,dy$ verir ve değer $3\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5$ olur. Doğrudan: $(2+t)(3+t) = 6 + 5t + t^2$ ve türevi $t=0$'da 5.
■

Alıştırma 5.23 (Kritik Nokta Ölçütü). Bir ϕ 1-formu, $\mathbf{p}$'deki her teğet vektör için $\phi(\mathbf{v_p}) = 0$ oluyorsa **$\mathbf{p}$ noktasında sıfırdır** denir. Bir f fonksiyonunun diferansiyeli df'nin sıfır olduğu noktalara f'nin **kritik noktaları** (critical point) denir. $\mathbf{p}$'nin f'nin bir kritik noktası olması için gerek ve yeter koşulun

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) = 0$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Araç. Sonuç 5.1 ve Örnek 5.14 gereği her $\mathbf{v_p} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ için

$$df(\mathbf{v_p}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\, v_i.$$

Koşul yeterlidir. Üç kısmi türev $\mathbf{p}$'de sıfırsa toplamın her terimi sıfırdır; dolayısıyla her $\mathbf{v_p}$ için $df(\mathbf{v_p}) = 0$ olur ve $\mathbf{p}$ bir kritik noktadır.
Koşul gereklidir. $\mathbf{p}$ bir kritik nokta olsun. $j = 1,2,3$ için özel olarak $U_j(\mathbf{p})$ teğet vektörünü alalım; vektör kısmının i-inci koordinatı δ_{ij}'dir. Varsayım gereği

$$0 = df\,\big(\,U_j(\mathbf{p})\,\big) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\,\delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}).$$

Böylece üç kısmi türev de $\mathbf{p}$'de sıfırdır.
Yorum. Aynı akıl yürütme genel olarak şunu verir: $\phi = \sum f_i\,dx_i$ 1-formu $\mathbf{p}$'de ancak ve ancak $f_1(\mathbf{p}) = f_2(\mathbf{p}) = f_3(\mathbf{p}) = 0$ ise sıfırdır. Kritik bir noktada f, hiçbir yönde ilk mertebeden değişmez.
■

Alıştırma 5.24 (Kritik Noktaları Bulmak). $f = (1-x^2)y + (1-y^2)z$ fonksiyonunun bütün kritik noktalarını bulunuz. Kısmi türevleri df'yi hesaplayarak elde ediniz.

Çözüm.
Diferansiyel. Çarpım ve toplam kurallarıyla

$$\begin{aligned} d\,\big(\,(1-x^2)y\,\big) &= -2xy\,dx + (1-x^2)\,dy, \\ d\,\big(\,(1-y^2)z\,\big) &= -2yz\,dy + (1-y^2)\,dz. \end{aligned}$$

Toplarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$df = -2xy\,dx + (1 - x^2 - 2yz)\,dy + (1 - y^2)\,dz.$$

Katsayılar f'nin kısmi türevleridir.
Denklemler. Alıştırma 5.23 gereği kritik noktalar

$$-2xy = 0, \qquad 1 - x^2 - 2yz = 0, \qquad 1 - y^2 = 0$$

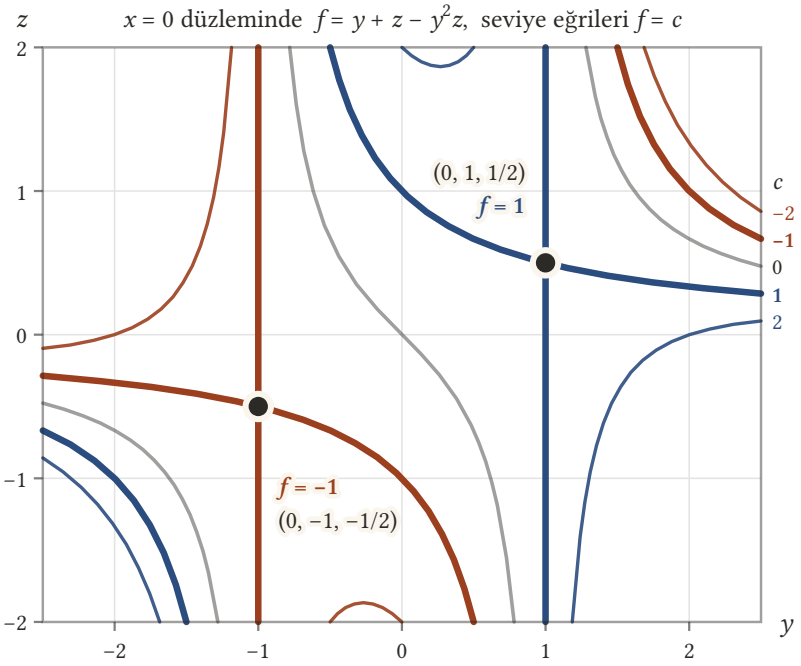
sisteminin çözümleridir.
Çözüm. Üçüncü denklem $y = 1$ ya da $y = -1$ verir. Her iki durumda $y \neq 0$ olduğundan birinci denklem $x = 0$ gerektirir. İkinci denklem bu durumda $1 - 2yz = 0$, yani $z = 1/(2y)$ olur. $y = 1$ için $z = 1/2$, $y = -1$ için $z = -1/2$. Her adımda seçenekler zorunlu olduğundan başka çözüm yoktur. Kritik noktalar

$$\left(\,0, 1, \frac{1}{2}\,\right) \quad \text{ve} \quad \left(\,0, -1, -\frac{1}{2}\,\right),$$

ve f'nin buralardaki değerleri sırasıyla 1 ve -1'dir.
Geometri. İki nokta da $x = 0$ düzlemindedir. Bu düzlemde $f = y + z - y^2 z$ olur ve

$$f - 1 = -(y - 1)(yz + z - 1), \qquad f + 1 = -(y + 1)(yz - z - 1)$$

çarpanlarına ayrılır. Dolayısıyla düzlemdeki $f = 1$ seviye kümesi $y = 1$ doğrusu ile $z = 1/(1 + y)$ eğrisinin birleşimidir ve bu ikisi tam $\left(\,0, 1, \frac{1}{2}\,\right)$'de kesişir. $f = -1$ seviye kümesi de $y = -1$ doğrusu ile $z = 1/(y - 1)$ eğrisinin birleşimidir ve kesişim $\left(\,0, -1, -\frac{1}{2}\,\right)$'dir.



Şekil 5.4: $x = 0$ düzleminde $f = y + z - y^2z$ fonksiyonunun $c = -2, -1, 0, 1, 2$ seviye eğrileri: $c > 0$ için eğriler mavi, $c < 0$ için turuncu, $c = 0$ için gri; sağ kenardaki sayılar eğrilerin c değeridir. Kalın mavi $f = 1$ kümesi $y = 1$ doğrusu ile $z = 1/(1 + y)$ eğrisinin birleşimidir ve ikisi kritik nokta $(0, 1, 1/2)$'de kesişir; kalın turuncu $f = -1$ kümesi $y = -1$ doğrusu ile $z = 1/(y - 1)$ eğrisinden oluşur ve kesişim $(0, -1, -1/2)$'dir. Kesişen iki eğri noktanın çevresini dört bölgeye ayırır; $f - 1$ (ya da $f + 1$) bu bölgelerde sırayla işaret değiştirdiği için kritik noktalar ekstremum değildir.

Ekstremum değil. $\left(\,0, 1, \frac{1}{2}\,\right)$'de f ne yerel maksimum ne yerel minimum değerini alır. x ekseni yönünde $f(s, 1, \frac{1}{2}) = 1 - s^2 < 1$ olur. Öte yandan küçük $s > 0$ için $y = 1 - s$, $z = \frac{1}{2} + s$ koyunca $f = 1 + \frac{3}{2}s^2 - s^3 > 1$ bulunur. Kritik nokta olmak ekstremum olmayı gerektirmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 5.25 (Yerel Ekstremumlar Kritik Noktalardır). Bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunuyor ve $\mathbf{p}$'ye uzaklığı ε'dan küçük her $\mathbf{q}$ için $f(\mathbf{q}) \leq f(\mathbf{p})$ oluyorsa f'nin $\mathbf{p}$'de **yerel maksimumu** (local maximum) vardır denir. Eşitsizlik $f(\mathbf{q}) \geq f(\mathbf{p})$ ise **yerel minimum** (local minimum) söz konusudur. Diferansiyellenebilir bir f'nin yerel maksimum ve yerel minimum noktalarının kritik nokta olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Yerel maksimum. f'nin $\mathbf{p}$'de yerel maksimumu olsun ve ε tanımdaki sayı olsun. df'nin $\mathbf{p}$'de sıfır olduğunu, yani her $\mathbf{v_p}$ için $df(\mathbf{v_p}) = 0$ olduğunu göstereceğiz. $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ise bu doğrudur. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ olsun ve $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ yazalım.
Tek değişkene indirgeme. $g(t) = f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ tek değişkenli ve türevlenebilir bir fonksiyondur ve tanım gereği $g'(0) = \mathbf{v_p}[f] = df(\mathbf{v_p})$. $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ arasındaki uzaklık $| t | \| \mathbf{v} \|$ olduğundan, $\delta = \varepsilon / \| \mathbf{v} \|$ için $| t | < \delta$ iken $g(t) \leq g(0)$.
İşaret incelemesi. $0 < t < \delta$ için

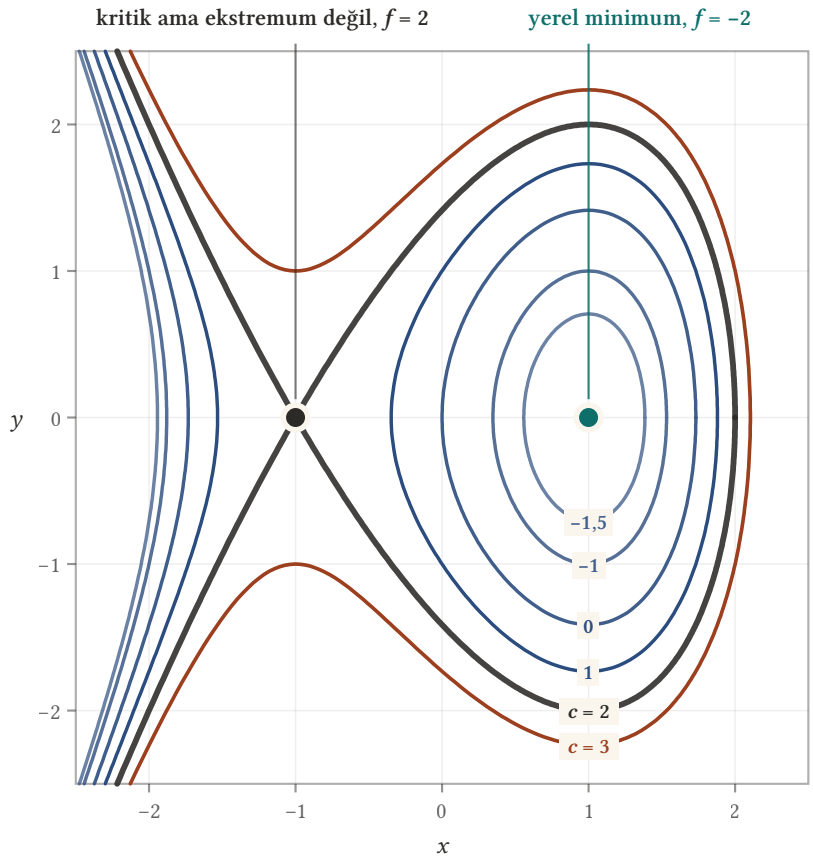
$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \leq 0,$$

çünkü pay sıfırdan büyük değil, payda pozitiftir; $t \to 0^+$ limitinde $g'(0) \leq 0$ bulunur. $-\delta < t < 0$ için pay yine sıfırdan büyük değil ama payda negatiftir; oran ≥ 0 olur ve $t \to 0^-$ limitinde $g'(0) \geq 0$. İki eşitsizlik birlikte $g'(0) = 0$ verir.
Sonuç. Her $\mathbf{v_p}$ için $df(\mathbf{v_p}) = 0$; yani df, $\mathbf{p}$'de sıfırdır ve $\mathbf{p}$ bir kritik noktadır.
Yerel minimum. f'nin $\mathbf{p}$'de yerel minimumu varsa $-f$'nin orada yerel maksimumu vardır. Yukarıdaki sonuç $d(-f)$'nin $\mathbf{p}$'de sıfır olduğunu söyler. Önerme 5.4 gereği $d(-f) = -df$ olduğundan df de $\mathbf{p}$'de sıfırdır.
Tersi yanlıştır. $f = x^3 - 3x + y^2$ fonksiyonu z'ye bağlı değildir ve

$$df = (3x^2 - 3)\, dx + 2y\, dy.$$

Kritik noktalar $x = \pm 1$, $y = 0$ olan noktalardır. $f + 2 = (x-1)^2(x+2) + y^2$ özdeşliği, $x > -2$ iken sağ tarafın negatif olmadığını gösterir; dolayısıyla $x = 1$, $y = 0$ noktalarında yerel minimum vardır ve değer -2'dir. $f - 2 = (x+1)^2(x-2) + y^2$ özdeşliği ise $x = -1$, $y = 0$ noktalarında durumu gösterir: x yönünde $f(-1+s, 0, z) = 2 - 3s^2 + s^3$ küçük $s \neq 0$ için 2'den küçüktür; y yönünde ise $f(-1, s, z) = 2 + s^2$, 2'den büyüktür. Burada df sıfırdır ama f'nin ne yerel maksimumu ne yerel minimumu vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.5: $f = x^3 - 3x + y^2$ fonksiyonunun xy-düzlemindeki seviye eğrileri; f, z'ye bağlı olmadığından her z için aynı resim görülür. Mavi eğrilerin ($c = -1{,}5;\ -1;\ 0;\ 1$) ilmeğin içindeki kapalı parçaları $(1, 0)$'a doğru iç içe küçülür: orada f'nin yerel minimumu vardır ve değeri -2'dir. Kalın $c = 2$ eğrisi $y^2 = (x+1)^2(2-x)$ ise $(-1, 0)$'da kendini keser; bu noktanın solunda ve sağında $f < 2$ (mavi), altında ve üstünde $f > 2$ (turuncu) olduğundan df orada sıfır olduğu hâlde ekstremum yoktur.

■

Alıştırma 5.26 (Lineer Yaklaşımın Anlamı). df için sık kullanılan bir ifade, onun f'deki Δf değişiminin **lineer yaklaşımı** (linear approximation) olduğudur. Bir $\mathbf{p}$ noktası ve bir $\mathbf{v}$ için $\Delta f = f(\mathbf{p}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})$ olsun. $df(\mathbf{v_p})$ sayısının hangi anlamda Δf'nin lineer bir yaklaşımı olduğunu açıklayınız.

Çözüm.
İfade iki ayrı iddia taşır; ikisini de kesinleştirelim. $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ yazalım.
Lineer. $\mathbf{p}$ sabitken $\mathbf{v_p} \mapsto df(\mathbf{v_p})$ bir lineer dönüşümdür (Önerme 5.3). Δf ise genelde $\mathbf{v}$'ye lineer bağlı değildir: $\mathbf{v}$'yi iki katına çıkarmak Δf'yi iki katına çıkarmaz.
Yaklaşım. Hata $R(\mathbf{v}) = \Delta f - df(\mathbf{v_p})$ olsun. İddia, hatanın $\mathbf{v}$'nin kendisinden bile hızlı küçüldüğüdür:

$$\frac{R(\mathbf{v})}{\| \mathbf{v} \|} \to 0 \qquad (\mathbf{v} \to \mathbf{0}).$$

İspat. $g(t) = f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ tek değişkenli türevlenebilir bir fonksiyondur ve $\Delta f = g(1) - g(0)$. Ortalama değer teoremine göre $\Delta f = g'(\theta)$ olacak biçimde bir $\theta \in (0,1)$ vardır. $g(\theta + t) = f\,\big((\mathbf{p}+\theta\mathbf{v}) + t\mathbf{v}\big)$ olduğundan $g'(\theta)$, $\mathbf{v}$ vektör kısmının $\mathbf{p}+\theta\mathbf{v}$'de uygulanmasıyla elde edilen teğet vektöre göre türevdir; Lemma 3.1 ile $g'(\theta) = \sum_i v_i\, \partial f/\partial x_i(\mathbf{p}+\theta\mathbf{v})$. Öte yandan $df(\mathbf{v_p}) = \sum_i v_i\, \partial f/\partial x_i(\mathbf{p})$. Farkları

$$R(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{3} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}+\theta\mathbf{v}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \right)$$

olur. Her i için $\mid v_i \mid \leq \parallel \mathbf{v} \parallel$ olduğundan

$$\frac{\mid R(\mathbf{v}) \mid}{\parallel \mathbf{v} \parallel} \leq \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}+\theta\mathbf{v}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \right|.$$

$\mathbf{v} \to \mathbf{0}$ iken $\mathbf{p}+\theta\mathbf{v}$ noktasının $\mathbf{p}$'ye uzaklığı $\theta \parallel \mathbf{v} \parallel \leq \parallel \mathbf{v} \parallel$ sıfıra gider. f diferansiyellenebilir olduğundan kısmi türevleri süreklidir; sağdaki her fark, dolayısıyla toplam, sıfıra gider.
Teklik. Bu özelliği taşıyan lineer kural yalnızca $df_{\mathbf{p}}$'dir. L, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ üzerinde aynı özelliği taşıyan bir lineer dönüşüm olsun. İki hatanın farkı alınınca $\left(df(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) - L(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \right) / \parallel \mathbf{v} \parallel \to 0$ olur. Sabit bir $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ için $\mathbf{v} = s\mathbf{w}$ alıp $s \to 0^+$ yaklaşalım; lineerlik gereği oran s'ye bağlı olmayan $\left(df(\mathbf{w}_{\mathbf{p}}) - L(\mathbf{w}_{\mathbf{p}}) \right) / \parallel \mathbf{w} \parallel$ sayısıdır. Sıfıra gidiyorsa sıfırdır. Yani $L = df_{\mathbf{p}}$.
Özet. $df(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$, Δf'ye küçük $\mathbf{v}$'ler için, hatası $\parallel \mathbf{v} \parallel$'ye oranla ihmal edilebilir olacak biçimde yaklaşan tek lineer ifadedir.
■

Alıştırma 5.27 (Lineer Yaklaşım Sayılarla). $f = x^2y/z$ olsun. Koordinatları noktalı virgülle ayırarak yazarsak, $f(0{,}9;\,1{,}6;\,1{,}2) - f(1;\,1{,}5;\,1)$ farkının gerçek değerini ve df ile verilen yaklaşık değerini hesaplayınız.

Çözüm.
Tanım kümesi. f, $z \neq 0$ olan noktalarda tanımlı ve diferansiyellenebilirdir; iki nokta da $z > 0$ bölgesindedir.
Nokta ve vektör. $\mathbf{p} = (1;\,1{,}5;\,1)$ ve $\mathbf{p}+\mathbf{v} = (0{,}9;\,1{,}6;\,1{,}2)$ olduğundan $\mathbf{v} = (-0{,}1;\,0{,}1;\,0{,}2)$.
Gerçek fark. İki değer

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{v}) = \frac{0{,}81 \cdot 1{,}6}{1{,}2} = \frac{1{,}296}{1{,}2} = 1{,}08, \qquad f(\mathbf{p}) = \frac{1 \cdot 1{,}5}{1} = 1{,}5$$

olduğundan

$$\Delta f = 1{,}08 - 1{,}5 = -0{,}42.$$

Diferansiyel. $f = x^2 \cdot y \cdot z^{-1}$ çarpımına çarpım kuralı ve $d(1/z) = -dz/z^2$ uygulanırsa

$$df = \frac{2xy}{z}\,dx + \frac{x^2}{z}\,dy - \frac{x^2y}{z^2}\,dz.$$

$\mathbf{p}$'de katsayılar $2 \cdot 1 \cdot 1{,}5 = 3$, 1 ve $-1{,}5$'tir.
Yaklaşık fark.

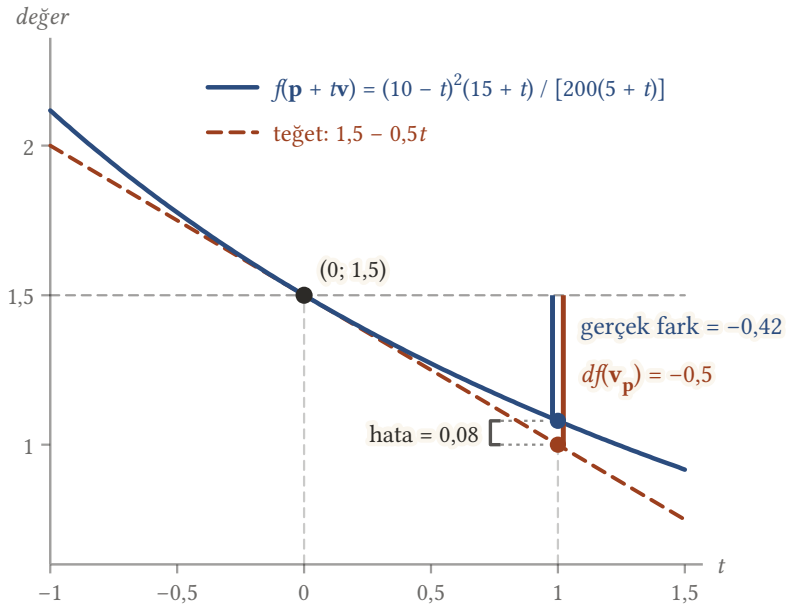
$$df(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 3 \cdot (-0{,}1) + 1 \cdot 0{,}1 + (-1{,}5) \cdot 0{,}2 = -0{,}3 + 0{,}1 - 0{,}3 = -0{,}5.$$

Hata. Gerçek fark ile yaklaşık fark arasındaki hata $-0{,}42 - (-0{,}5) = 0{,}08$'dir. Burada $\parallel \mathbf{v} \parallel = \sqrt{0{,}06} \approx 0{,}245$; adım çok küçük olmadığından hata da göz ardı edilecek kadar küçük değildir.
Adımı küçültmek. Aynı yönde $\mathbf{v}/k$ adımları için değerler şöyledir (df sütunu lineerlik gereği tam olarak $-0{,}5/k$'dır):

k	gerçek Δf	df ile	hata
1	$-0{,}42$	$-0{,}5$	$0{,}08$
2	$-0{,}2283$	$-0{,}25$	$0{,}0217$
10	$-0{,}04907$	$-0{,}05$	$0{,}00093$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım k kez küçülünce yaklaşık değer k kez küçülür, hata ise yaklaşık k^2 kez küçülür (4 kat ve 86 kat civarı). Alıştırma 5.26'daki $R(\mathbf{v})/\,\|\,\mathbf{v}\,\| \to 0$ davranışı budur.



Şekil 5.6: $\mathbf{p}$ = (1; 1,5; 1) noktasından $\mathbf{v}$ = (−0,1; 0,1; 0,2) yönünde giderken $f = x^2y/z$'nin aldığı değerler mavi eğridir; turuncu kesikli doğru, eğrinin t = 0'daki teğeti 1,5 − 0,5t'dir. t = 1'de, yani $\mathbf{p}$ + $\mathbf{v}$ noktasında, eğri 1,5'ten 1,08'e iner ve gerçek fark −0,42 olur; teğet ise 1,0'a iner ve bu düşüş, teğetin eğimi olan $df(\mathbf{v}_\mathbf{p})$ = −0,5'tir. İki nokta arasındaki 0,08'lik aralık lineer yaklaşımın hatasıdır: eğri teğetten ancak bükülerek ayrıldığı için bu aralık, adım küçüldükçe adımın kendisinden çok daha hızlı küçülür.

■

Alıştırma 5.28 (Diferansiyeli Verilen Fonksiyon). Diferansiyeli

$$2xy\,dx + (x^2 + \cos z)\,dy - y\sin z\,dz$$

1-formu olan bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.
Koşullar. Sonuç 5.1 ve Lemma 5.1'ndaki teklik gereği df'nin verilen 1-forma eşit olması, üç kısmi türev koşuluna denktir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \cos z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -y\sin z.$$

Birinci koşul. $g = f - x^2y$ için $\partial g/\partial x = 0$ olur. y ve z sabit tutulunca $t \mapsto g(t, y, z)$ fonksiyonunun türevi her yerde sıfırdır; ortalama değer teoremi gereği sabittir. Demek ki g yalnızca y ve z'ye bağlıdır: $f = x^2y + C(y, z)$.
İkinci koşul. $\partial f/\partial y = x^2 + \partial C/\partial y$ olduğundan $\partial C/\partial y = \cos z$. Aynı akıl yürütmeyle $C = y\cos z + D(z)$.
Üçüncü koşul. $\partial f/\partial z = -y\sin z + D'(z)$ olduğundan $D'(z) = 0$ ve D bir sabit c'dir.
Sonuç ve denetim. $f = x^2y + y\cos z + c$. Kurallarla: $d(x^2y) = 2xy\,dx + x^2\,dy$ ve $d(y\cos z) = \cos z\,dy - y\sin z\,dz$; toplam verilen 1-formdur. Alıştırma 5.30, cevabın bir sabit dışında tek olduğunu gösterir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 5.29 (Diferansiyel Olmayan Bir 1-Form). $y\,dx$ 1-formunun hiçbir diferansiyellenebilir fonksiyonun diferansiyeli olmadığını ispatlayınız.

Çözüm.
Varsayım. Bir f için $df = y\,dx = y\,dx + 0\,dy + 0\,dz$ olsun.
Kısmi türevler. Sonuç 5.1 ve koordinat fonksiyonlarının tekliği gereği

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Çelişki. Birinci eşitliğin y'ye göre türevi $\partial^2 f/\partial y\,\partial x = 1$, ikincisinin x'e göre türevi $\partial^2 f/\partial x\,\partial y = 0$ verir. Oysa Öklid uzayı bölümünde gördüğümüz gibi diferansiyellenebilir bir fonksiyonun karışık kısmi türevleri türev alma sırasına bağlı değildir. $1 \neq 0$ olduğundan böyle bir f yoktur.
Genel ders. $\phi = \sum f_i\,dx_i$ bir diferansiyelse, aynı akıl yürütme her i, j için

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

olmasını gerektirir. Bu koşul, Alıştırma 5.18'deki $z\,dx + x\,dy$ için de bozulur ($\partial z/\partial y = 0$, $\partial x/\partial x = 1$). Alıştırma 5.28'deki 1-form ise koşulu sağlar; örneğin $2xy$'nin y'ye göre türevi de $x^2 + \cos z$'nin x'e göre türevi de $2x$'tir.
■

Alıştırma 5.30 (Diferansiyeli Sıfır Olan Fonksiyon). $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu için $df = 0$ ise f'nin sabit olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Bir doğru parçasına indirgeme. Bir $\mathbf{p}$ noktası sabitleyelim ve $g(t) = f(t\mathbf{p})$ tanımlayalım; $t = 0$'da başlangıç noktasındayız, $t = 1$'de $\mathbf{p}$'deyiz.
Türev. Her s için $g(s + t) = f(s\mathbf{p} + t\mathbf{p})$ olduğundan $g'(s)$, vektör kısmı $\mathbf{p}$ olan ve $s\mathbf{p}$ noktasında uygulanan teğet vektöre göre f'nin türevidir. Diferansiyelin tanımı gereği bu sayı df'nin o teğet vektördeki değeridir ve varsayım gereği 0'dır. Yani her s için $g'(s) = 0$.
Sonuç. Türevi her yerde sıfır olan tek değişkenli bir fonksiyon, ortalama değer teoremi gereği sabittir. Dolayısıyla $f(\mathbf{p}) = g(1) = g(0) = f(\mathbf{0})$. $\mathbf{p}$ keyfi olduğundan f, $f(\mathbf{0})$ değerini alan sabit fonksiyondur.
Teklik. $df = dg$ ise $d(f - g) = df - dg = 0$ (Önerme 5.4) ve $f - g$ sabittir. Aynı diferansiyele sahip iki fonksiyon bir sabitle farklıdır; Alıştırma 5.28'deki cevap bu anlamda tektir.
Uyarı. İspat, başlangıç noktasından $\mathbf{p}$'ye giden doğru parçasının tanım kümesinde kalmasını kullandı. Birbirinden kopuk parçalardan oluşan bir açık kümede sonuç yanlış olabilir: $x \neq 0$ olan noktalarda $x > 0$ için 1, $x < 0$ için -1 değerini alan fonksiyonun diferansiyeli sıfırdır ama fonksiyon sabit değildir.
■

Bu bölümde kurduğumuz 1-formlar, diferansiyel formlar denen daha geniş bir sistemin ilk basamağıdır; bir sonraki Diferansiyel Formlar bölümünde formları kama çarpımıyla birbirleriyle çarpacak ve dış türevle türevleyerek bu sistemi 2-formlara ve 3-formlara genişleteceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. Diferansiyel Formlar

Önceki bölümde (1-Formlar) teğet vektörlere her noktada lineer biçimde sayı veren 1-formları tanımladık ve her 1-formun $f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3$ biçiminde tek türlü yazıldığını gördük. O bölümde 1-formları topladık, fonksiyonlarla çarptık ve bir fonksiyonun diferansiyelini aldık. İki soruyu ise hiç sormadık: iki 1-form birbiriyle çarpılabilir mi, ve bir 1-formun kendisinin bir türevi var mı? Bu bölüm bu iki soruya cevap veriyor.

Cevaplar bizi diferansiyel formlar (differential forms) denen daha geniş bir sisteme götürür. Bu sistemi katlı bir yapı gibi düşünebiliriz. En alt katta fonksiyonlar, bir üst katta 1-formlar, onun üstünde iki diferansiyelin çarpımından kurulan 2-formlar, en üstte de üç diferansiyelin çarpımından kurulan 3-formlar durur. Katlar arasında iki işlem gezinir: kama çarpımı iki formu çarparak dereceleri toplanmış yeni bir form üretir, dış türev ise bir formu bir üst kata taşır.

Bu kadar yapıya neden ihtiyaç duyalım? İlk neden hesap kolaylığıdır. Kama çarpımının kuralları, uzun bir kısmi türev hesabında sonunda birbirini götürecek terimleri daha ilk adımda siler. İkinci neden daha derindir: vektör analizinden tanıdığımız gradyan, rotasyonel ve diverjans işlemleri, aslında tek bir işlemin, dış türevin, farklı katlardaki görünümleridir. Bölümü bu gözlemi ispatlayarak bitireceğiz.

6.1 Formları Çarpmak ve Ters Değişme Kuralı

Elimizde iki tür malzeme var: $\mathbb{R}^3$ üzerindeki fonksiyonlar ve dx_1, dx_2, dx_3 koordinat diferansiyelleri. Bir 1-formu bu malzemeden yalnızca toplama ve fonksiyonla çarpma kullanarak kurarız; $x\,dx + yz\,dy$ böyle bir ifadedir. Diferansiyelleri birbiriyle de çarpmaya izin verirsek $e^x\,dx \wedge dz$ ya da $xy\,dy \wedge dz + dx \wedge dy$ gibi yeni ifadeler ortaya çıkar. Şimdilik kabaca, bu yolla kurulan her ifadeye bir diferansiyel form diyeceğiz. Diferansiyeller arasındaki çarpımı $\wedge$ işaretiyle gösteririz ve ona **kama çarpımı** (wedge product) deriz. Bu çarpımın ne kadar alışılmış, ne kadar alışılmadık davrandığını baştan belirleyelim.

Alışılmış olan kısım şudur. Formların toplamı ve kama çarpımı, sayılardaki gibi birleşme ve dağılma kurallarına uyar: her ϕ, ψ, θ formu için

$$(\phi \wedge \psi) \wedge \theta = \phi \wedge (\psi \wedge \theta), \qquad \phi \wedge (\psi + \theta) = \phi \wedge \psi + \phi \wedge \theta,$$

ve aynı dağılma kuralı soldan toplama için de geçerlidir. Birleşme kuralı sayesinde parantezleri yazmadan $\phi \wedge \psi \wedge \theta$ yazabiliriz. Fonksiyonlar ise her şeyle serbestçe yer değiştirir: bir f fonksiyonu için $f\,\phi = \phi\,f$ ve

$$(f\phi) \wedge \psi = f\,(\phi \wedge \psi) = \phi \wedge (f\psi).$$

Bir fonksiyonla bir formun çarpımını her zaman kama işareti koymadan, $f\phi$ biçiminde yazarız.

Alışılmadık olan kısım değişme özelliğidir: $dx_i \wedge dx_j$ ile $dx_j \wedge dx_i$ genel olarak eşit değildir. Hangi kuralı koymamız gerektiğini görmek için, bu çarpımın ölçmesini istediğimiz bir büyüklüğe bakalım.

Örnek 6.1 (Düzlemde İşaretli Alan). Düzlemde iki vektör $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ için

$$A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

sayısını tanımlayalım. $\mathbf{v} = (3, 1)$ ve $\mathbf{w} = (1, 2)$ için iki vektörün sırasını değiştirmenin $A(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ sayısını nasıl etkilediğini bulalım.

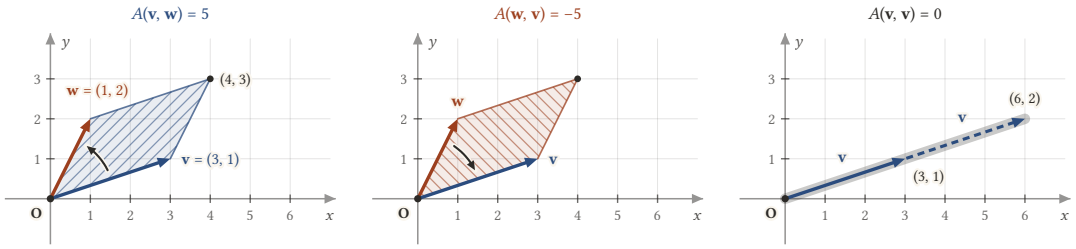
> **Çözüm.**
> *Değer.* Tanımdan $A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$.
> *Geometrik anlamı.* $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$'nin belirlediği paralelkenarın köşeleri $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$ ve $(1, 2)$'dir. Bu paralelkenar $[0, 4] \times [0, 3]$ dikdörtgeninin içindedir; dikdörtgenin alanı 12'dir. Paralelkenarın dışında kalan parçalar, dik kenarları 3 ve 1 olan iki üçgen (her biri $3/2$ alanlı), dik kenarları 1 ve 2 olan iki üçgen (her biri 1 alanlı) ve iki birim karedir. Dolayısıyla paralelkenarın alanı
>
> $$12 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 5$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Demek ki $A(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ bu örnekte paralelkenarın alanıdır.
Sıra değişince. $A(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$. Paralelkenar aynıdır, ama sayının işareti değişmiştir. Bu işaret yönü kaydeder: $\mathbf{v}$'den $\mathbf{w}$'ye saat yönünün tersine dönülürken sayı pozitif, $\mathbf{w}$'den $\mathbf{v}$'ye saat yönünde dönülürken negatiftir.
Genel olarak. Tanımda iki vektörün rolünü değiştirirsek

$$A(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = w_1 v_2 - w_2 v_1 = -(v_1 w_2 - v_2 w_1) = -A(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

buluruz. Özel olarak $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ alınırsa $A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = v_1 v_2 - v_2 v_1 = 0$; örneğin $A\big((3,1),(3,1)\big) = 3 - 3 = 0$. Bu da geometrik olarak beklenir: aynı vektörün iki kopyası bir doğru parçasına çökmüş, alanı sıfır olan bir paralelkenar belirler.



Şekil 6.1: $\mathbf{v}$ = (3, 1) ve $\mathbf{w}$ = (1, 2) vektörlerinin belirlediği, köşeleri (0, 0), (3, 1), (4, 3), (1, 2) olan paralelkenarın alanı 5'tir. Soldaki panelde $\mathbf{v}$'den $\mathbf{w}$'ye saat yönünün tersine dönülür ve $A(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ = 5 olur; ortadaki panelde paralelkenar aynıdır, ama sıra değiştiği için $\mathbf{w}$'den $\mathbf{v}$'ye saat yönünde dönülür ve $A(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ = −5 olur. Sağdaki panelde $\mathbf{v}$ iki kez alınmıştır: paralelkenar (0, 0) ile (6, 2) arasındaki doğru parçasına çöker ve $A(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ = 0 olur.

Özetle bu sayı iki özelliğe sahiptir: sıra değişince işaret değiştirir ve tekrar eden vektörde sıfır olur. $dx \wedge dy$ çarpımının da tam olarak bu tür bir büyüklüğü, iki teğet vektörün belirlediği paralelkenarın xy-düzlemine izdüşümünün işaretli alanını ölçmesini isteyeceğiz.
■

Örneğin gösterdiği davranışı koordinat diferansiyellerine kural olarak koyarız. Kama çarpımı, her i, j için

$$dx_i \wedge dx_j = -\,dx_j \wedge dx_i \qquad (1 \le i, j \le 3)$$

eşitliğine uyar. Bu eşitliğe **ters değişme kuralı** (alternation rule) denir.
Yani iki koordinat diferansiyelinin yerini değiştirmek, çarpımın işaretini değiştirir.
Formların çarpımını her zaman $\wedge$ işaretiyle, sıradan çarpımdan ayırarak yazmamızın nedeni budur: işaret, hesabın her adımında bu kuralın unutulmaması için bir hatırlatmadır. Aynı kural, temel analizde iki değişkenli fonksiyonların Jacobi determinantında da sessizce iş başındadır; bunu alıştırmalarda göreceğiz (Alıştırma 6.21).
Ters değişme kuralı içinde gizli bir ikinci kural taşır; onu hemen çıkaralım.

Sonuç 6.1 (Tekrar Eden Çarpan Sıfırdır). *Her $i = 1, 2, 3$ için $dx_i \wedge dx_i = 0$.*

İspat.
Ters değişme kuralında $j = i$ alalım. Kural bu durumda

$$dx_i \wedge dx_i = -\,dx_i \wedge dx_i$$

der. İki yana $dx_i \wedge dx_i$ ekleyelim: sol yan $2\,dx_i \wedge dx_i$, sağ yan 0 olur. Şimdi iki yanı $1/2$ sabit fonksiyonuyla çarpalım; fonksiyonla çarpım dağılma kuralına uyduğundan sol yan $dx_i \wedge dx_i$, sağ yan yine 0 olur. Böylece $dx_i \wedge dx_i = 0$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonuç kısaca “tekrar eden çarpan sıfırdır” (repeats are zero) diye akılda tutulur. Bir çarpımda sıfır bir çarpan bulunursa çarpımın tamamı sıfırdır: her ω formu için dağılma kuralı $0 \wedge \omega = (0+0) \wedge \omega = 0 \wedge \omega + 0 \wedge \omega$ verir ve iki yandan $0 \wedge \omega$ çıkarılınca $0 \wedge \omega = 0$ bulunur.

> ⚠ Sayılarla karıştırmayın
>
> Fonksiyonlar arasında $x \cdot x = x^2$ sıfır değildir; ama $dx \wedge dx = 0$'dır. Fonksiyonlar formlarla yer değiştirir, $x\,dy \wedge dz = dy \wedge x\,dz$; ama diferansiyeller birbiriyle yer değiştirince işaret değişir, $dy \wedge dz = -\,dz \wedge dy$. Kama çarpımında hesap yaparken hangi çarpanın fonksiyon, hangisinin diferansiyel olduğunu her adımda ayırt etmek gerekir.

Örnek 6.2 (Üç Diferansiyelin Çarpımını Sıraya Koymak). $dz \wedge dy \wedge dx$ çarpımını $dx \wedge dy \wedge dz$ cinsinden yazalım.

Çözüm.
Birleşme kuralı sayesinde ters değişme kuralını her adımda yan yana duran iki çarpana uygulayabiliriz. Her yer değiştirme işareti bir kez değiştirir.
Birinci adım. İlk iki çarpanın yerini değiştirelim: $dz \wedge dy \wedge dx = -\,dy \wedge dz \wedge dx$.
İkinci adım. Son iki çarpanın yerini değiştirelim: $-\,dy \wedge dz \wedge dx = dy \wedge dx \wedge dz$.
Üçüncü adım. Yine ilk iki çarpanın yerini değiştirelim: $dy \wedge dx \wedge dz = -\,dx \wedge dy \wedge dz$.
Sonuç olarak

$$dz \wedge dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Aynı yöntemle üç farklı diferansiyelin altı sıralamasının hepsini yazabiliriz. Bir sıralamayı $dx \wedge dy \wedge dz$'ye çift sayıda yer değiştirmeyle getirebiliyorsak işaret $+$, tek sayıda yer değiştirmeyle getirebiliyorsak $-$ olur:

sıralama	$dx \wedge dy \wedge dz$	$dy \wedge dz \wedge dx$	$dz \wedge dx \wedge dy$	$dx \wedge dz \wedge dy$	$dy \wedge dx \wedge dz$	$dz \wedge dy \wedge dx$
işaret	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

Örneğin $dy \wedge dz \wedge dx$'te önce dx'i dz ile, sonra dy ile yer değiştirerek başa getiririz; iki yer değiştirme işareti iki kez değiştirir ve sonuç $+\,dx \wedge dy \wedge dz$ olur. Bu tabloyu bölüm boyunca sık kullanacağız.
■

Örnek 6.3 (Bitişik Olmayan Bir Tekrar). $dx \wedge dy \wedge dx$ çarpımının sıfır olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Tekrar eden iki dx yan yana değildir, bu yüzden Sonuç 6.1 doğrudan uygulanamaz. Önce onları yan yana getirelim. Son iki çarpanın yerini değiştirirsek

$$dx \wedge dy \wedge dx = -\,dx \wedge dx \wedge dy$$

olur. Sağ yanda $dx \wedge dx = 0$ çarpanı vardır; birleşme kuralı ve sıfır çarpanlı çarpımın sıfır olması gereği $dx \wedge dx \wedge dy = 0 \wedge dy = 0$. Dolayısıyla $dx \wedge dy \wedge dx = 0$.
Aynı akıl yürütme genel bir ilke verir: bir çarpımda aynı diferansiyel nerede olursa olsun iki kez geçiyorsa, aradaki çarpanlarla yer değiştirerek onları yan yana getirebiliriz; bu yalnızca işareti etkiler, sonuç yine sıfırdır.
■

6.2 p-Formlar ve Standart Yazımları

Bir diferansiyel formun her teriminde kaç tane koordinat diferansiyeli bulunduğu, formun hangi katta yaşadığını söyler. $x\,dx + yz\,dy$ ifadesinin her teriminde bir diferansiyel, $e^x\,dx \wedge dz$ teriminde iki diferansiyel vardır. Bu sayımı tanımın merkezine koyuyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 6.1 (Diferansiyel Form ve Derecesi). $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir **diferansiyel form**, diferansiyellenebilir fonksiyonların dx_1, dx_2, dx_3 koordinat diferansiyellerinin kama çarpımlarıyla çarpılıp toplanmasıyla elde edilen bir ifadedir; bu ifadeler birleşme ve dağılma kurallarına, fonksiyonların serbestçe yer değiştirmesine ve ters değişme kuralına göre hesaplanır.
Bir diferansiyel formun her teriminde tam p tane koordinat diferansiyeli bulunuyorsa forma bir ***p*-form** denir; p sayısı formun **derecesidir** (degree). Hiç diferansiyel içermeyen bir 0-form, diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Yani bir p-form, her teriminde bir fonksiyonla p tane koordinat diferansiyelinin çarpımı bulunan bir toplamdır.
$p = 1$ için bu tanım önceki bölümün 1-formlarını verir: bir 1-form $\sum f_i\, dx_i$ biçimindedir. 2-formlar ve 3-formlar için önceki bölümdeki gibi teğet vektörler üzerinde tanımlı fonksiyonlar kurmuyoruz; onları yukarıdaki kurallarla hesap yapılan ifadeler olarak kullanıyoruz. Yine de bu bölümde ispatlayacağımız hesap kuralları, formlara ileride nasıl bir anlam yüklenirse yüklensin değişmeden kullanılır.
Kurallar sayesinde her p-form, hangi sırayla yazılmış olursa olsun, dört kalıptan birine getirilebilir. x_1, x_2, x_3 yerine x, y, z yazarak bu kalıpları sıralayalım.

Önerme 6.1 (Formların Standart Yazımları). *$\mathbb{R}^3$ üzerindeki her p-form, f, g, h diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki biçimlerden birinde yazılabilir:*

$$\begin{aligned}
&0\text{-form: } f,\\
&1\text{-form: } f\,dx + g\,dy + h\,dz,\\
&2\text{-form: } f\,dx\wedge dy + g\,dx\wedge dz + h\,dy\wedge dz,\\
&3\text{-form: } f\,dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

> ***İspat.***
> 0-formlar. *Terimleri fonksiyon olan bir toplam, fonksiyonların toplamıdır; diferansiyellenebilir fonksiyonların toplamı yine diferansiyellenebilirdir.*
> 1-formlar. *Her terim $k\,dx_i$ biçimindedir. Aynı dx_i'yi içeren terimleri dağılma kuralıyla birleştiririz: $k\,dx_i + l\,dx_i = (k+l)\,dx_i$. Sonunda en çok üç terim kalır.*
> 2-formlar. *Her terim $k\,dx_i \wedge dx_j$ biçimindedir. $i = j$ ise terim Sonuç 6.1 gereği sıfırdır ve atılır. $i > j$ ise ters değişme kuralıyla terimi $-k\,dx_j \wedge dx_i$ olarak yazarız; artık küçük indis öndedir. Böylece her terim $dx\wedge dy$, $dx\wedge dz$ ya da $dy\wedge dz$ çarpımlarından birinin bir fonksiyon katıdır. Aynı çarpımı içeren terimleri 1-formlardaki gibi birleştirince istenen biçim çıkar.*
> 3-formlar. *Her terim $k\,dx_i\wedge dx_j\wedge dx_l$ biçimindedir. İndislerden ikisi aynıysa, Örnek 6.3'daki gibi tekrar eden çarpanları yan yana getirip terimin sıfır olduğunu görürüz. Üç indis de farklıysa çarpım $dx\wedge dy\wedge dz$'nin bir yeniden sıralamasıdır; Örnek 6.2'daki tabloya göre $\pm\, dx\wedge dy\wedge dz$'ye eşittir. Kalan terimleri birleştirince $f\,dx\wedge dy\wedge dz$ bulunur.*
> *Her durumda yeni katsayılar, eski katsayıların $\pm$ işaretli toplamlarıdır; bu yüzden diferansiyellenebilirdir.*
> ■

Bu yazımlara formların **standart yazımı** diyeceğiz. 1-formlar için standart yazımdaki katsayıların tek olduğunu önceki bölümde ispatlamıştık (Lemma 5.1). 2-formlar ve 3-formlar için de aynı şeyi sistemin bir kuralı olarak kabul ederiz: iki p-form ancak standart yazımlarındaki karşılıklı katsayılar eşitse eşittir. Kama çarpımı hesaplarına geçtiğimizde bu kuralın neden makul olduğunu bir yorumla göreceğiz.
Aynı dereceden iki formu toplamak için standart yazımlarındaki karşılıklı katsayıları toplarız. 1-formlar için bunu zaten biliyoruz; indis gösterimiyle

$$\sum_{i=1}^{3} f_i\,dx_i + \sum_{i=1}^{3} g_i\,dx_i = \sum_{i=1}^{3} (f_i + g_i)\,dx_i.$$

2-formlarda da aynı kural geçerlidir: dağılma kuralı gereği

$$\begin{aligned}
&(f_1\,dx\wedge dy + g_1\,dx\wedge dz + h_1\,dy\wedge dz)\\
&\quad +(f_2\,dx\wedge dy + g_2\,dx\wedge dz + h_2\,dy\wedge dz)\\
&\quad = (f_1+f_2)\,dx\wedge dy + (g_1+g_2)\,dx\wedge dz + (h_1+h_2)\,dy\wedge dz,
\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve 3-formlar için

$$f\,dx\wedge dy\wedge dz + g\,dx\wedge dy\wedge dz = (f+g)\,dx\wedge dy\wedge dz.$$

Örnek 6.4 (Bir 2-Formu Standart Biçime Getirmek). Aşağıdaki 2-formun standart yazımını bulalım:

$$\eta = 3\,dy\wedge dx + x\,dz\wedge dx + y\,dx\wedge dy + e^{z}\,dz\wedge dz.$$

Çözüm.
Terimleri tek tek ele alalım.
Birinci terim. Ters değişme kuralıyla $3\,dy\wedge dx = -3\,dx\wedge dy$.
İkinci terim. Yine ters değişme kuralıyla $x\,dz\wedge dx = -x\,dx\wedge dz$.
Üçüncü terim. $y\,dx\wedge dy$ zaten standart sıradadır.
Dördüncü terim. $dz\wedge dz = 0$ olduğundan $e^{z}\,dz\wedge dz = 0$.
Birleştirme. $dx\wedge dy$ içeren iki terimi toplarsak

$$\eta = (y-3)\,dx\wedge dy - x\,dx\wedge dz + 0\,dy\wedge dz.$$

Katsayılar $f = y-3$, $g = -x$, $h = 0$'dır. Örneğin $\mathbf{p} = (2,5,0)$ noktasında bu katsayılar 2, -2 ve 0 değerini alır. Dördüncü terimin e^{z} katsayısı ne kadar karmaşık olursa olsun sonucu etkilemedi: tekrar eden çarpan terimi baştan siler.
■

Örnek 6.5 (İki 2-Formun Toplamı). İki 2-form

$$\eta_1 = x\,dx\wedge dy + dy\wedge dz, \qquad \eta_2 = y\,dy\wedge dx - dy\wedge dz + z\,dx\wedge dz$$

olsun. $\eta_1+\eta_2$ toplamının standart yazımını bulalım.

Çözüm.
Önce standart yazım. η_1 standart biçimdedir: katsayıları x, 0, 1. η_2'nin ilk terimi sırasızdır; $y\,dy\wedge dx = -y\,dx\wedge dy$. Böylece

$$\eta_2 = -y\,dx\wedge dy + z\,dx\wedge dz - dy\wedge dz,$$

katsayıları $-y$, z, -1.
Toplam. Karşılıklı katsayıları toplarsak

$$\eta_1+\eta_2 = (x-y)\,dx\wedge dy + z\,dx\wedge dz.$$

$dy\wedge dz$'nin katsayısı $1+(-1)=0$ olduğundan bu terim kaybolur. Katsayıları toplamadan önce standart yazıma geçmek şarttır: η_2'deki $y\,dy\wedge dx$ terimini doğrudan $x\,dx\wedge dy$ ile birleştirip $(x+y)\,dx\wedge dy$ yazmak yanlış olurdu.
■

Örnek 6.6 (Derecesi Olmayan Bir Form). $\omega = x\,dx + dy\wedge dz$ ifadesinin bir p-form olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm.
ω'nın birinci teriminde bir, ikinci teriminde iki koordinat diferansiyeli vardır. Bir p-formun bütün terimlerinde aynı sayıda diferansiyel bulunmalıdır; bu yüzden ω ne bir 1-form ne bir 2-formdur. Terimleri ters değişme kuralıyla yeniden düzenlemek bir terimdeki diferansiyel sayısını değiştirmez (en fazla terimi sıfırlar), dolayısıyla ω'yı bir p-form olarak yazmanın başka bir yolu da yoktur.
ω yine de bir diferansiyel formdur: bir 1-formla bir 2-formun toplamıdır. Bu bölümde yalnızca p-formlarla çalışacağız ve iki formu yalnızca dereceleri aynıysa toplayacağız.
Buna karşılık $dx\wedge dy + dy\wedge dx$ bir 2-formdur ve ters değişme kuralı gereği sıfıra eşittir. Sıfır formu her derecenin bir formu sayılır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanımda p'nin 3'ten büyük olmasına bir engel yoktu; ama üç boyutlu uzayda böyle formlar ilginç değildir.

Önerme 6.2 (Derecesi Üçten Büyük Formlar Sıfırdır). *$\mathbb{R}^3$ üzerinde derecesi 3'ten büyük her p-form sıfırdır.*

> ***İspat.***
> *$p \geq 4$ olsun ve formun bir terimi $k\,dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ olsun.*
> Bir indis tekrar eder. *p tane indisin her biri $1, 2, 3$ sayılarından biridir. Dört ya da daha çok indis yalnızca üç değer alabildiğinden en az iki indis eşittir: $r < s$ konumları için $i_r = i_s$.*
> Tekrarları yan yana getirmek. *s konumundaki çarpanı, solundaki çarpanlarla birer birer yer değiştirerek $r+1$ konumuna taşıyalım. Bu $s - r - 1$ yer değiştirme demektir ve her biri işareti bir kez değiştirir. Sonuçta terim, $\pm$ işaretiyle, içinde yan yana $dx_{i_r} \wedge dx_{i_r}$ bulunan bir çarpıma eşit olur.*
> Sıfır. *Sonuç 6.1 gereği bu çarpan sıfırdır; birleşme kuralı ve sıfır çarpanlı çarpımın sıfır olması gereği bütün terim sıfırdır. Her terim sıfır olduğundan form sıfırdır.*
> ■

Örnek 6.7 (Dört Diferansiyelin Çarpımı). $dx \wedge dy \wedge dx \wedge dz$ çarpımını hesaplayalım.

> **Çözüm.**
> Dört çarpan yalnızca üç farklı diferansiyelden seçildiği için bir tekrar olmalıdır; burada dx birinci ve üçüncü konumdadır. Üçüncü çarpanı ikinci çarpanla yer değiştirerek sola taşıyalım:
>
> $$dx \wedge dy \wedge dx \wedge dz = -\,dx \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$
>
> Sağ yanda $dx \wedge dx = 0$ olduğundan çarpım 0'dır. İspatın adımları bu örnekte tek tek görülüyor: tekrar bulundu, yan yana getirildi, sıfır çarpan her şeyi sildi.
> ■

6.3 Kama Çarpımı Hesapları

Şimdi kuralları iş başında görelim. İki formun kama çarpımını hesaplamanın yolu her zaman aynıdır: dağılma kuralıyla bütün terimleri birbiriyle çarparız, fonksiyon katsayılarını her terimin başına toplarız, diferansiyellerin çarpımlarını ters değişme kuralı ve tekrar eden çarpan kuralıyla sadeleştirir, sonucu standart yazıma getiririz.

> **i** Bir 2-form neyi ölçer?
>
> İspatlarda kullanmayacağımız, ama kuralların neden bunlar olduğunu açıklayan bir yorum vardır. ϕ ve ψ 1-formları ile aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki $\mathbf{v_p}$, $\mathbf{w_p}$ teğet vektörleri için
>
> $$(\phi \wedge \psi)(\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}) = \phi(\mathbf{v_p})\,\psi(\mathbf{w_p}) - \phi(\mathbf{w_p})\,\psi(\mathbf{v_p})$$
>
> sayısını düşünelim ve bunu katsayılarla çarpılmış toplamlara terim terim yayalım. İki vektörün yeri değişince bu sayının işareti değişir, iki vektör aynıysa sayı sıfırdır; ϕ ile ψ'nin yeri değişince de işaret değişir. Özel olarak $dx \wedge dy$, iki vektörün belirlediği paralelkenarın xy-düzlemine izdüşümünün işaretli alanını, yani $v_1 w_2 - v_2 w_1$ sayısını verir (Örnek 6.1).
> Bu yorumda doğal çatının vektörleri standart yazımın katsayılarını tek tek okur. Standart yazımdaki katsayıları f, g, h olan bir η 2-formu için
>
> $$\begin{aligned} \eta\left(\, U_1(\mathbf{p}), U_2(\mathbf{p}) \,\right) &= f(\mathbf{p}), \\ \eta\left(\, U_1(\mathbf{p}), U_3(\mathbf{p}) \,\right) &= g(\mathbf{p}), \\ \eta\left(\, U_2(\mathbf{p}), U_3(\mathbf{p}) \,\right) &= h(\mathbf{p}) \end{aligned}$$
>
> olur; örneğin $dx \wedge dz$, $U_1(\mathbf{p})$ ile $U_2(\mathbf{p})$ çiftine $1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$ değerini verir. Dolayısıyla eşit iki 2-formun katsayıları eşit olmak zorundadır; standart yazımın tekliği kuralı bu yüzden makuldür.

Örnek 6.8 (İki 1-Formun Kama Çarpımı). $\phi = x\,dx - y\,dy$ ve $\psi = z\,dx + x\,dz$ olsun. $\phi \wedge \psi$ 2-formunun standart yazımını bulalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Dağıtma. Her iki terimi birbiriyle çarpıp katsayıları başa alırsak

$$\begin{aligned}\phi \wedge \psi &= (x\,dx - y\,dy) \wedge (z\,dx + x\,dz) \\ &= xz\,dx \wedge dx + x^2\,dx \wedge dz - yz\,dy \wedge dx - xy\,dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Sadeleştirme. $dx \wedge dx = 0$ olduğundan birinci terim düşer. Üçüncü terimde ters değişme kuralı $dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy$ verir; böylece $-yz\,dy \wedge dx = yz\,dx \wedge dy$.
Sonuç.

$$\phi \wedge \psi = yz\,dx \wedge dy + x^2\,dx \wedge dz - xy\,dy \wedge dz.$$

İki 1-formun çarpımı bir 2-formdur. Katsayılar noktadan noktaya değişir; örneğin $\mathbf{p} = (1,2,3)$'te $yz = 6$, $x^2 = 1$ ve $-xy = -2$ olur.
■

Örnek 6.9 (Bir Paralelkenarın Koordinat Düzlemlerine İzdüşümleri). $\phi = x\,dx - y\,dy$, $\psi = z\,dx + x\,dz$, $\mathbf{p} = (1,2,3)$, $\mathbf{v} = (2,0,1)$ ve $\mathbf{w} = (0,3,1)$ olsun. Yukarıdaki notta verilen yorumla $(\phi \wedge \psi)(\mathbf{v}_\mathbf{p}, \mathbf{w}_\mathbf{p})$ sayısını bulalım.

Çözüm.
Doğrudan formülle. $\mathbf{p}$'de $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ olduğundan bu noktada ϕ, $dx - 2\,dy$ gibi; ψ ise $3\,dx + dz$ gibi davranır. Buradan

$$\phi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 2, \qquad \phi(\mathbf{w}_\mathbf{p}) = -6, \qquad \psi(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 7, \qquad \psi(\mathbf{w}_\mathbf{p}) = 1$$

bulunur. Nottaki formül

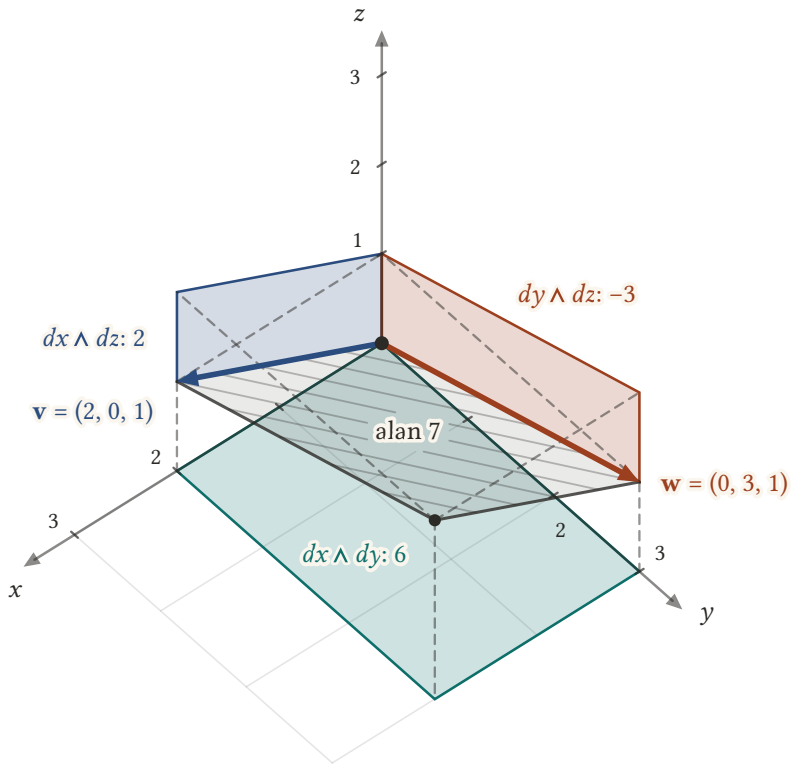
$$(\phi \wedge \psi)(\mathbf{v}_\mathbf{p}, \mathbf{w}_\mathbf{p}) = 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 7 = 44$$

verir.
İzdüşüm alanlarıyla. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$'nin belirlediği paralelkenarı üç koordinat düzlemine izdüşürelim ve her izdüşümün işaretli alanını Örnek 6.1'daki formülle hesaplayalım. xy-düzleminde vektörler $(2,0)$ ve $(0,3)$ olur, işaretli alan $2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 6$. xz-düzleminde $(2,1)$ ve $(0,1)$ olur, alan $2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2$. yz-düzleminde $(0,1)$ ve $(3,1)$ olur, alan $0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -3$. Bunlar sırasıyla $dx \wedge dy$, $dx \wedge dz$ ve $dy \wedge dz$'nin bu vektör çiftine verdiği sayılardır.
Örnek 6.8'da $\phi \wedge \psi$'nin $\mathbf{p}$'deki katsayılarını 6, 1, -2 bulmuştuk. Standart yazımı terim terim değerlendirirsek

$$6 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = 36 + 2 + 6 = 44$$

çıkar; iki yol aynı sayıyı verir. Demek ki bir 2-formun üç katsayısı, paralelkenarın üç koordinat düzlemine düşen gölgelerinin alanlarını tartan ağırlıklardır.
Bir gözlem. Paralelkenarın kendi alanının karesi $|\,\mathbf{v}\,|^2\,|\,\mathbf{w}\,|^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2$ sayısıdır; burada bu sayı $5 \cdot 10 - 1 = 49$, yani alan 7'dir. İzdüşüm alanlarının kareleri toplamı da $36 + 4 + 9 = 49$'dur: alanlar için bir Pitagoras bağıntısı.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.2: Mavi ve turuncu oklar $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ ve $\mathbf{w} = (0, 3, 1)$ vektör kısımlarıdır; gerdikleri gri taralı paralelkenarın alanı 7'dir. Kesikli kılavuzlar köşeleri koordinat düzlemlerine indirir: gölgelerin işaretli alanları xy-düzlemindeki yeşil dikdörtgende 6, xz-düzlemindeki mavi paralelkenarda 2, yz-düzlemindeki turuncu paralelkenarda -3'tür. Bir 2-formun üç katsayısı bu üç alanı tartar; $6^2 + 2^2 + (-3)^2 = 7^2$ eşitliği ise alanlar için bir Pitagoras bağıntısıdır.

■

Örnek 6.10 (Üç 1-Formun Kama Çarpımı). $\phi = x\,dx - y\,dy$, $\psi = z\,dx + x\,dz$ ve $\theta = z\,dy$ olsun. $\theta \wedge \phi \wedge \psi$ 3-formunun standart yazımını bulalım.

Çözüm.
Önceki hesabı kullanmak. Birleşme kuralı gereği $\theta \wedge \phi \wedge \psi = \theta \wedge (\phi \wedge \psi)$ yazabiliriz. Örnek 6.8'dan $\phi \wedge \psi$'yi alıp dağıtırsak

$$\begin{aligned}\theta \wedge \phi \wedge \psi &= z\,dy \wedge (yz\,dx \wedge dy + x^2\,dx \wedge dz - xy\,dy \wedge dz) \\ &= yz^2\,dy \wedge dx \wedge dy + x^2 z\,dy \wedge dx \wedge dz - xyz\,dy \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Tekrarları atmak. Birinci terimde dy, üçüncü terimde de dy iki kez geçer; Örnek 6.3 gereği bu iki terim sıfırdır.
Sıralamak. Ortadaki terimde ilk iki çarpanın yerini değiştirirsek $dy \wedge dx \wedge dz = -\,dx \wedge dy \wedge dz$. Dolayısıyla

$$\theta \wedge \phi \wedge \psi = -x^2 z\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Başka bir gruplamayla denetim. Önce

$$\begin{aligned}\theta \wedge \phi &= z\,dy \wedge (x\,dx - y\,dy) \\ &= xz\,dy \wedge dx - yz\,dy \wedge dy = -xz\,dx \wedge dy\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Bunu ψ ile çarparsak

$$-xz\,dx \wedge dy \wedge (z\,dx + x\,dz) = -xz^2\,dx \wedge dy \wedge dx - x^2 z\,dx \wedge dy \wedge dz,$$

ve birinci terim tekrar yüzünden sıfır olduğundan yine $-x^2 z\,dx \wedge dy \wedge dz$ elde edilir. Üç 1-formun çarpımı bir 3-formdur.
■

Örnek 6.11 (Bir 1-Form ile Bir 2-Formun Kama Çarpımı). $\phi = x\,dx - y\,dy$ ve $\eta = y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz$ olsun. $\phi \wedge \eta$ 3-formunun standart yazımını bulalım.

Çözüm.
Dağıtma. Dört terim çıkar:

$$\begin{aligned}\phi \wedge \eta = {} & xy\,dx \wedge dx \wedge dz + x^2\,dx \wedge dy \wedge dz \\ & -y^2\,dy \wedge dx \wedge dz - xy\,dy \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Tekrarları atmak. Birinci terimde dx, dördüncü terimde dy tekrar eder; ikisi de sıfırdır. Deneyimle bu terimleri yazmadan atlamayı öğreniriz: bir 1-formun dx terimini, dx içeren bir 2-form terimiyle çarpmaya hiç gerek yoktur.
Sıralamak. $dy \wedge dx \wedge dz = -\,dx \wedge dy \wedge dz$ olduğundan üçüncü terim $+y^2\,dx \wedge dy \wedge dz$ olur. Toplarsak

$$\phi \wedge \eta = (x^2 + y^2)\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Bir 1-formla bir 2-formun çarpımı bir 3-formdur. Katsayı $x^2 + y^2$, z ekseni üzerindeki noktalarda sıfırdır, başka her yerde pozitiftir.
■

Bu örneklerde çarpımın derecesi her seferinde çarpanların derecelerinin toplamı çıktı. Bu bir rastlantı değildir.

Önerme 6.3 (Kama Çarpımında Dereceler Toplanır). *ϕ bir p-form ve ψ bir q-form ise $\phi \wedge \psi$ bir $(p+q)$-formdur. Özel olarak $p + q > 3$ ise $\phi \wedge \psi = 0$.*

İspat.
Terim terim. *ϕ'nin bir terimi $k\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, ψ'nin bir terimi $l\,dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$ olsun. Fonksiyonlar serbestçe yer değiştirdiği ve çarpım birleşme kuralına uyduğu için bu iki terimin çarpımı*

$$kl\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$$

olur. Bu terimde kl diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ve tam $p+q$ tane koordinat diferansiyeli vardır.
Toplam. *Dağılma kuralı gereği $\phi \wedge \psi$, ϕ'nin her terimiyle ψ'nin her teriminin çarpımlarının toplamıdır. Her biri $p+q$ diferansiyel içerdiğinden $\phi \wedge \psi$ bir $(p+q)$-formdur.*
Yüksek derece. *$p + q > 3$ ise Önerme 6.2 gereği bu form sıfırdır.*
■

Örnek 6.12 (Derece Sayımıyla Önceden Bilinen Bir Sonuç). $\eta_1 = xy\,dx \wedge dy + dy \wedge dz$ ve $\eta_2 = z\,dx \wedge dz$ 2-formlarının kama çarpımını hesaplayalım.

Çözüm.
Önceden tahmin. Önerme 6.3 gereği iki 2-formun çarpımının derecesi $2 + 2 = 4$'tür; $4 > 3$ olduğundan sonuç sıfır olmalıdır.
Hesap. Dağılma kuralı ve fonksiyonların yer değiştirmesiyle

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = xyz\,dx \wedge dy \wedge dx \wedge dz + z\,dy \wedge dz \wedge dx \wedge dz.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci terimde dx, ikinci terimde dz iki kez geçer. Önerme 6.2'in ispatındaki gibi tekrar eden çarpanları yan yana getirince iki terim de sıfır olur; dolayısıyla $\eta_1 \wedge \eta_2 = 0$.
Derece üç olunca. Tahminin yalnızca $p+q>3$ için geçerli olduğunu görmek için η_2'yi $y\,dy$ 1-formuyla çarpalım. Bu kez derece $1+2=3$'tür ve sonuç sıfır değildir:

$$y\,dy \wedge z\,dx \wedge dz = yz\,dy \wedge dx \wedge dz = -yz\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

■

Sayılarla çarpımda $ab = ba$ olur; formlarda ise sıranın ne etkisi olduğunu ayrıca incelememiz gerekir. İki 1-form için cevap, ters değişme kuralının aynısıdır.

Lemma 6.1 (İki 1-Formun Ters Değişmesi). *ϕ ve ψ 1-formlar ise*

$$\phi \wedge \psi = -\,\psi \wedge \phi.$$

Özel olarak her 1-form için $\phi \wedge \phi = 0$.

İspat.
Koordinatlarla yazmak. *$\phi = \sum_i f_i\,dx_i$ ve $\psi = \sum_j g_j\,dx_j$ olsun. Dağılma kuralı ve fonksiyonların yer değiştirmesi gereği*

$$\phi \wedge \psi = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} f_i\,g_j\,dx_i \wedge dx_j.$$

Ters değişme. *Her terimde ters değişme kuralını uygular ve fonksiyonların çarpımında $f_i g_j = g_j f_i$ yazarsak*

$$\begin{aligned}\phi \wedge \psi &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_j\,f_i\,dx_j \wedge dx_i \\ &= -\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} (g_j\,dx_j) \wedge (f_i\,dx_i) = -\,\psi \wedge \phi.\end{aligned}$$

Son adımda sonlu toplamların sırasını değiştirdik ve dağılma kuralını ters yönde kullandık.
Kendisiyle çarpım. *$\psi = \phi$ alınırsa $\phi \wedge \phi = -\,\phi \wedge \phi$ olur; Sonuç 6.1'ın ispatındaki gibi iki yana $\phi \wedge \phi$ ekleyip $1/2$ ile çarparak $\phi \wedge \phi = 0$ buluruz.*
■

Örnek 6.13 (Ters Sırada Çarpım). $\phi = x\,dx - y\,dy$ ve $\psi = z\,dx + x\,dz$ olsun. $\psi \wedge \phi$'nin Örnek 6.8'daki $\phi \wedge \psi$ ile ilişkisini doğrudan hesapla bulalım.

Çözüm.
Dağıtma.

$$\psi \wedge \phi = xz\,dx \wedge dx - yz\,dx \wedge dy + x^2\,dz \wedge dx - xy\,dz \wedge dy.$$

Sadeleştirme. Birinci terim sıfırdır. $dz \wedge dx = -\,dx \wedge dz$ ve $dz \wedge dy = -\,dy \wedge dz$ olduğundan

$$\psi \wedge \phi = -yz\,dx \wedge dy - x^2\,dx \wedge dz + xy\,dy \wedge dz.$$

Karşılaştırma. Önceki örnekte

$$\phi \wedge \psi = yz\,dx \wedge dy + x^2\,dx \wedge dz - xy\,dy \wedge dz$$

bulmuştuk. Üç katsayının hepsi işaret değiştirmiştir: $\psi \wedge \phi = -\,\phi \wedge \psi$, tam da Lemma 6.1'nin söylediği gibi.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 6.14 (Bir 1-Form ile Bir 2-Form Yer Değiştirince). $\phi = x\,dx - y\,dy$ ve $\eta = y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz$ olsun. $\eta \wedge \phi$'nin Örnek 6.11'daki $\phi \wedge \eta$ ile ilişkisini doğrudan hesapla bulalım.

Çözüm.
Dağıtma.

$$\begin{aligned}\eta \wedge \phi = {} & xy\,dx \wedge dz \wedge dx - y^2\,dx \wedge dz \wedge dy \\ & + x^2\,dy \wedge dz \wedge dx - xy\,dy \wedge dz \wedge dy.\end{aligned}$$

Sadeleştirme. Birinci ve dördüncü terimlerde tekrar vardır, sıfırdırlar. Örnek 6.2'daki tabloya göre $dx \wedge dz \wedge dy = -\,dx \wedge dy \wedge dz$ ve $dy \wedge dz \wedge dx = +\,dx \wedge dy \wedge dz$. Dolayısıyla

$$\eta \wedge \phi = y^2\,dx \wedge dy \wedge dz + x^2\,dx \wedge dy \wedge dz = (x^2 + y^2)\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Karşılaştırma. Bu, $\phi \wedge \eta$'nın ta kendisidir: işaret değişmemiştir. Nedeni sayımdadır. Bir dx_i'yi iki diferansiyelin çarpımının öbür yanına geçirmek iki yer değiştirme gerektirir ve işaret iki kez değişip geri gelir. Lemma 6.1 yalnızca iki 1-form hakkındadır; "kama çarpımında sıra değişince hep eksi gelir" diye genellemek yanlıştır.
■

6.4 Dış Türev

Önceki bölümün d işlemine (Tanım 5.5) katlar gözüyle bakalım: bu işlem en alt kattaki bir f fonksiyonunu, yani bir 0-formu, bir üst kattaki df 1-formuna taşır. Aynı işi her katta yapan bir işlem kurmak zor değildir: bir formun katsayı fonksiyonlarının diferansiyellerini alır ve her birini kendi diferansiyel çarpımının önüne kama çarpımıyla yerleştiririz. Böylece her terime bir diferansiyel eklenir ve bir p-form bir $(p+1)$-forma dönüşür. İlk ve en önemli durum $p = 1$'dir.

Tanım 6.2 (Bir 1-Formun Dış Türevi). $\phi = \sum_{i=1}^{3} f_i\,dx_i$, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir 1-form olsun. ϕ'nin **dış türevi** (exterior derivative)

$$d\phi = \sum_{i=1}^{3} df_i \wedge dx_i$$

2-formudur.

Yani ϕ'nin dış türevini bulmak için her katsayıyı diferansiyeliyle değiştirir ve bu diferansiyeli kendi dx_i'sinin önüne kama çarpımıyla koyarız.
Tanımın anlamlı olması, f_i katsayılarının ϕ tarafından tek türlü belirlenmesine dayanır (Lemma 5.1): aynı 1-formu iki farklı standart yazımla yazamayacağımız için $d\phi$ yalnızca ϕ'ye bağlıdır. df_i'leri kısmi türevlerle açarsak dış türevin koordinatlarla tam bir formülü çıkar.

Önerme 6.4 (Dış Türevin Koordinat Formülü). *$\phi = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3$ ise*

$$\begin{aligned}d\phi = {} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3 \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

İspat.
Diferansiyelleri açmak. *Sonuç 5.1 gereği her i için $df_i = \sum_j (\partial f_i/\partial x_j)\,dx_j$. Bunu tanıma koyup dağıtırsak*

$$d\phi = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,dx_j \wedge dx_i$$

 CC BY-NC-SA 4.0

buluruz. Bu toplamda dokuz terim vardır.
Tekrarlar. *$j = i$ olan üç terimde $dx_i \wedge dx_i = 0$ bulunur; bu terimler sıfırdır.*
Eşleştirme. *Kalan altı terimi, aynı iki indisi içeren çiftler hâlinde toplayalım. $(i,j) = (2,1)$ ve $(i,j) = (1,2)$ terimleri*

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_1 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

verir; burada ters değişme kuralıyla $dx_2 \wedge dx_1 = -\,dx_1 \wedge dx_2$ yazdık. Aynı biçimde $(3,1)$ ile $(1,3)$ terimleri $dx_1 \wedge dx_3$'ün, $(3,2)$ ile $(2,3)$ terimleri de $dx_2 \wedge dx_3$'ün katsayısını verir. Üç katsayı formüldekilerdir.
■

Bu formülün asıl yararı genel akıl yürütmelerdedir; örneğin alıştırmalarda $d(df) = 0$ eşitliğini onunla ispatlayacağız. Somut bir 1-form verildiğinde ise altı kısmi türevi ezberden yerine koymak yerine tanımı uygulayıp kama çarpımının kurallarıyla sadeleştirmek daha az hataya açıktır.

Örnek 6.15 (Tanımla Bir Dış Türev Hesabı). $\phi = xy\,dx + x^2\,dz$ 1-formunun dış türevini bulalım.

Çözüm.
Katsayıların diferansiyelleri. ϕ'nin katsayıları $f_1 = xy$, $f_2 = 0$, $f_3 = x^2$'dir. Lemma 5.2 gereği $d(xy) = y\,dx + x\,dy$; Sonuç 5.1 gereği $d(x^2) = 2x\,dx$.
Tanım. $f_2 = 0$ terimi katkı vermez. Kalan iki terim

$$\begin{aligned} d\phi &= d(xy) \wedge dx + d(x^2) \wedge dz \\ &= (y\,dx + x\,dy) \wedge dx + 2x\,dx \wedge dz \\ &= x\,dy \wedge dx + 2x\,dx \wedge dz \end{aligned}$$

verir; $y\,dx \wedge dx$ terimi tekrar yüzünden düştü.
Standart yazım. $dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy$ olduğundan

$$d\phi = -x\,dx \wedge dy + 2x\,dx \wedge dz.$$

Formülle denetim. Önerme 6.4'ndeki katsayılar: $dx \wedge dy$ için $0 - x = -x$; $dx \wedge dz$ için $2x - 0 = 2x$; $dy \wedge dz$ için $0 - 0 = 0$. Uyuşur.
■

Örnek 6.16 (Bir Diferansiyel ile Bir Dönme Formu). $\psi = -y\,dx + x\,dy$ 1-formunun dış türevinin, $d(xy) = y\,dx + x\,dy$ diferansiyelinin dış türevinden nasıl ayrıldığını bulalım.

Çözüm.
Dönme formu. Katsayılar $-y$ ve x'tir; diferansiyelleri $-dy$ ve dx. Tanımdan

$$d\psi = (-dy) \wedge dx + dx \wedge dy = dx \wedge dy + dx \wedge dy = 2\,dx \wedge dy.$$

Diferansiyel. $y\,dx + x\,dy$ için aynı hesap $dy \wedge dx + dx \wedge dy = 0$ verir.
Karşılaştırma. İki 1-form yalnızca bir işaretle farklıdır, ama dış türevleri çok farklıdır. Bunun bir anlamı var: alıştırmalarda her diferansiyelin dış türevinin sıfır olduğunu ispatlayacağız (Alıştırma 6.8). Buna göre $d\psi \neq 0$ olduğundan ψ hiçbir fonksiyonun diferansiyeli olamaz. Dış türev, bir 1-formun bir diferansiyel olmaktan ne kadar uzak olduğunu ölçen bir araçtır. Dönme adının nereden geldiğini bölümün sonunda göreceğiz: ψ'ye karşılık gelen vektör alanı başlangıç noktası çevresinde döner.
■

Aynı fikir daha yüksek dereceli formlara da uygulanır. 3-formun dış türevi derecesi 4 olan bir form olacağından Önerme 6.2 gereği sıfırdır; asıl yeni durum 2-formlardır.

Tanım 6.3 (Bir 2-Formun ve Bir 3-Formun Dış Türevi). Standart yazımı

$$\eta = f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge dz$$

olan bir 2-formun dış türevi

$$d\eta = df \wedge dx \wedge dy + dg \wedge dx \wedge dz + dh \wedge dy \wedge dz$$

3-formudur. Bir 3-formun dış türevi 0'dır.

Yani burada da katsayılar diferansiyelleriyle değiştirilir. Bu tanımı da koordinatlarla açalım. $df \wedge dx \wedge dy$'de df'nin dx ve dy terimleri tekrar yüzünden düşer ve yalnızca dz terimi kalır; aynı biçimde $dg \wedge dx \wedge dz$'de yalnızca dg'nin dy terimi, $dh \wedge dy \wedge dz$'de yalnızca dh'nin dx terimi kalır. Kalan üç terim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}\,dz \wedge dx \wedge dy &= \frac{\partial f}{\partial z}\,dx \wedge dy \wedge dz,\\
\frac{\partial g}{\partial y}\,dy \wedge dx \wedge dz &= -\frac{\partial g}{\partial y}\,dx \wedge dy \wedge dz,\\
\frac{\partial h}{\partial x}\,dx \wedge dy \wedge dz &= \frac{\partial h}{\partial x}\,dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

olur. Toplarsak

$$d\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

İlk olarak dış türevin, önceki bölümdeki diferansiyel gibi lineer olduğunu gösterelim.

Önerme 6.5 (Dış Türevin Lineerliği). *ϕ ve ψ aynı dereceden iki form (0-, 1-, 2- ya da 3-form), a ve b sayılar ise*

$$d(a\phi + b\psi) = a\,d\phi + b\,d\psi.$$

İspat.
0-formlar. *$\phi = f$ ve $\psi = g$ fonksiyonlar olsun. Kısmi türev almak lineerdir:*

$$\frac{\partial(af + bg)}{\partial x_i} = a\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + b\,\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Sonuç 5.1 ve dağılma kuralıyla

$$d(af + bg) = \sum_{i=1}^{3}\left(a\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + b\,\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx_i = a\,df + b\,dg.$$

1-formlar. *$\phi = \sum f_i\,dx_i$ ve $\psi = \sum g_i\,dx_i$ olsun. $a\phi + b\psi$'nin standart yazımı $\sum(af_i + bg_i)\,dx_i$'dir. Tanım, 0-formlar için az önce ispatladığımız eşitlik ve dağılma kuralı sırasıyla*

$$\begin{aligned}
d(a\phi + b\psi) &= \sum_{i=1}^{3} d(af_i + bg_i) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{3}(a\,df_i + b\,dg_i) \wedge dx_i\\
&= a\sum_{i=1}^{3} df_i \wedge dx_i + b\sum_{i=1}^{3} dg_i \wedge dx_i = a\,d\phi + b\,d\psi
\end{aligned}$$

verir.
2-formlar. *İki 2-formun standart yazımları*

$$\begin{aligned}
\phi &= f_1\,dx \wedge dy + g_1\,dx \wedge dz + h_1\,dy \wedge dz,\\
\psi &= f_2\,dx \wedge dy + g_2\,dx \wedge dz + h_2\,dy \wedge dz
\end{aligned}$$

olsun. Dağılma kuralı ve fonksiyonların yer değiştirmesi gereği $a\phi + b\psi$'nin standart katsayıları $af_1 + bf_2$, $ag_1 + bg_2$ ve $ah_1 + bh_2$'dir. Tanım 6.3, 0-formlar için az önce ispatladığımız eşitlik ve dağılma kuralı sırasıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} d(a\phi+b\psi) &= d(af_1+bf_2)\wedge dx\wedge dy \\ &\quad + d(ag_1+bg_2)\wedge dx\wedge dz \\ &\quad + d(ah_1+bh_2)\wedge dy\wedge dz \\ &= (a\,df_1+b\,df_2)\wedge dx\wedge dy \\ &\quad + (a\,dg_1+b\,dg_2)\wedge dx\wedge dz \\ &\quad + (a\,dh_1+b\,dh_2)\wedge dy\wedge dz \end{aligned}$$

verir. Terimleri a ve b çarpanlarına göre gruplarsak

$$\begin{aligned} d(a\phi+b\psi) &= a\,(df_1\wedge dx\wedge dy + dg_1\wedge dx\wedge dz + dh_1\wedge dy\wedge dz) \\ &\quad + b\,(df_2\wedge dx\wedge dy + dg_2\wedge dx\wedge dz + dh_2\wedge dy\wedge dz) \\ &= a\,d\phi + b\,d\psi \end{aligned}$$

buluruz; son adımda yine Tanım 6.3 kullanıldı.
3-formlar. *$a\phi+b\psi$ de bir 3-formdur. Tanım gereği her 3-formun dış türevi 0 olduğundan sol yan 0, sağ yan $a\cdot 0 + b\cdot 0 = 0$'dır.*
■

Örnek 6.17 (Lineerlikle Dış Türev). $\phi = xy\,dx + x^2\,dz$ ve $\psi = z\,dy$ olsun. $d(2\phi-3\psi)$'yi hem doğrudan hem de Önerme 6.5 ile bulalım.

Çözüm.
Doğrudan. $2\phi-3\psi$'nin dx, dy, dz katsayıları $2xy$, $-3z$ ve $2x^2$'dir. Tanımdan

$$\begin{aligned} d(2\phi-3\psi) &= (2y\,dx + 2x\,dy)\wedge dx - 3\,dz\wedge dy + 4x\,dx\wedge dz \\ &= -2x\,dx\wedge dy + 4x\,dx\wedge dz + 3\,dy\wedge dz. \end{aligned}$$

Lineerlikle. Örnek 6.15'nda $d\phi = -x\,dx\wedge dy + 2x\,dx\wedge dz$ bulmuştuk. $d\psi = dz\wedge dy = -\,dy\wedge dz$. Dolayısıyla

$$2\,d\phi - 3\,d\psi = -2x\,dx\wedge dy + 4x\,dx\wedge dz + 3\,dy\wedge dz.$$

İki sonuç aynıdır.
■

Dış türevi tanımlarken standart yazımı kullandık. Pratikte formlar çoğu zaman standart olmayan bir sırayla karşımıza çıkar; örneğin iki 1-formun çarpımı önce $\sum f_i g_j\,dx_i\wedge dx_j$ biçiminde gelir. Aşağıdaki lemma, dış türevi standart yazıma geçmeden de hesaplayabileceğimizi söyler.

Lemma 6.2 (Dış Türev Her Yazılıştan Hesaplanabilir). *Her $i,j=1,2,3$ için h_{ij} diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve*

$$\eta = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_{ij}\,dx_i\wedge dx_j$$

ise $d\eta = \sum_{i,j} dh_{ij}\wedge dx_i\wedge dx_j$. Benzer biçimde $\phi = \sum_k h_k\,dx_{i_k}$ sonlu bir toplamsa (indisler tekrar edebilir) $d\phi = \sum_k dh_k\wedge dx_{i_k}$.

İspat.
2-formlar için standart yazım. *$i=j$ terimleri sıfırdır. $i>j$ terimlerini ters değişme kuralıyla çevirirsek η'nın standart katsayıları*

$$f = h_{12}-h_{21}, \qquad g = h_{13}-h_{31}, \qquad h = h_{23}-h_{32}$$

olur.
Tanımı uygulamak. *Tanım 6.3 ve 0-formlar için lineerlik gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} d\eta = &(dh_{12} - dh_{21}) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &+(dh_{13} - dh_{31}) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &+(dh_{23} - dh_{32}) \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Geri çevirmek. *Son iki çarpanın yeri değişince işaret değiştiği için, örneğin*

$$-\,dh_{21} \wedge dx_1 \wedge dx_2 = dh_{21} \wedge dx_2 \wedge dx_1$$

olur. Bütün eksi işaretli terimleri böyle çevirince $d\eta$, $i \neq j$ olan altı terimin $dh_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j$ toplamı olur. $i = j$ olan terimler de $dh_{ii} \wedge dx_i \wedge dx_i = 0$ olduğundan toplama eklenebilir; böylece istenen eşitlik çıkar.
1-formlar. *Her i için $i_k = i$ olan h_k'ların toplamı standart katsayı f_i'dir.* 0*-formlar için lineerlik gereği df_i bu h_k'ların diferansiyellerinin toplamıdır; tanıma koyup dağıtınca $\sum_k dh_k \wedge dx_{i_k}$ bulunur.*
Son olarak aynı sıralı (i, j) çiftine ait birden çok terim varsa, önce katsayıları toplanarak lemmadaki biçime getirilir; lineerlik gereği bu, sonucu değiştirmez.
■

Örnek 6.18 (Bir 2-Formun Dış Türevi). Aşağıdaki 2-formun dış türevini bulalım:

$$\eta = x^2\,dx \wedge dy + xyz\,dx \wedge dz + z\,dy \wedge dz.$$

Çözüm.
Tanım. Katsayıların diferansiyelleri $d(x^2) = 2x\,dx$, $d(xyz) = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ ve dz'dir. Buna göre

$$d\eta = 2x\,dx \wedge dx \wedge dy + (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz) \wedge dx \wedge dz + dz \wedge dy \wedge dz.$$

Tekrarlar. Birinci ve üçüncü terimler tekrar yüzünden sıfırdır. Ortadaki terimde dx ve dz zaten var olduğundan yalnızca $xz\,dy$ katkı verir:

$$d\eta = xz\,dy \wedge dx \wedge dz = -xz\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Formülle denetim. $f = x^2$, $g = xyz$, $h = z$ için

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 - xz + 0 = -xz.$$

Uyuşur.
■

Örnek 6.19 (Sırasız Yazılmış Bir 2-Formun Dış Türevi). $\eta = y^2\,dz \wedge dx$ 2-formunun dış türevini, önce standart yazıma geçerek ve sonra doğrudan Lemma 6.2 ile hesaplayıp karşılaştıralım.

Çözüm.
Standart yazımla. $\eta = -y^2\,dx \wedge dz$ olduğundan tanım

$$d\eta = -2y\,dy \wedge dx \wedge dz = 2y\,dx \wedge dy \wedge dz$$

verir.
Lemma ile. Sırayı değiştirmeden

$$d\eta = d(y^2) \wedge dz \wedge dx = 2y\,dy \wedge dz \wedge dx.$$

Örnek 6.2'daki tabloya göre $dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dy \wedge dz$; sonuç yine $2y\,dx \wedge dy \wedge dz$.
İki yol aynı sonucu verir; lemma bize sıralama işini en sona bırakma serbestliği tanır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Dış Türev ve Kama Çarpımı

Fonksiyonlar için $d(fg) = g\,df + f\,dg$ çarpım kuralını biliyoruz. Kama çarpımı da bir çarpım olduğuna göre, dış türevin onunla nasıl etkileştiğini sormak doğaldır. Aşağıdaki teorem bu kuralın üç kattaki biçimini verir; tek yeni ayrıntı, iki 1-formun çarpımında ortaya çıkan bir eksi işaretidir.

Teorem 6.1 (Dış Türevin Çarpım Kuralları). *f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar, ϕ ve ψ 1-formlar olsun. O zaman*
(1) $d(fg) = df\,g + f\,dg$,
(2) $d(f\phi) = df \wedge \phi + f\,d\phi$,
(3) $d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$.
Her zamanki gibi çarpım toplama ve çıkarmadan önce yapılır: üçüncü formülün sağ yanı $(d\phi \wedge \psi) - (\phi \wedge d\psi)$ diye okunur.

> ***İspat.***
> ***(1)*** *Lemma 5.2* $d(fg) = g\,df + f\,dg$ *der. Fonksiyonlar formlarla yer değiştirdiğinden* $g\,df = df\,g$; *bu, istenen eşitliktir.*
> ***(2)*** $\phi = \sum_i f_i\,dx_i$ *olsun.* $f\phi$*'nin standart yazımı* $\sum_i (ff_i)\,dx_i$*'dir. Tanım ve (1) gereği*
>
> $$d(f\phi) = \sum_{i=1}^{3} d(ff_i) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{3} (f_i\,df + f\,df_i) \wedge dx_i.$$
>
> *Dağılma kuralıyla iki toplama ayıralım. Birinci toplamda* f_i *fonksiyonunu* df*'nin sağına geçirebiliriz:*
>
> $$\sum_{i=1}^{3} f_i\,df \wedge dx_i = df \wedge \sum_{i=1}^{3} f_i\,dx_i = df \wedge \phi.$$
>
> *İkinci toplamda* f *ortak çarpandır; dışarı alınınca* $f \sum_i df_i \wedge dx_i = f\,d\phi$ *kalır. İki toplam birlikte (2)'yi verir.*
> ***(3)*** $\phi = \sum_i f_i\,dx_i$ *ve* $\psi = \sum_j g_j\,dx_j$ *olsun.*
> Çarpımın dış türevi. *Lemma 6.1'nin ispatındaki gibi* $\phi \wedge \psi = \sum_{i,j} f_i g_j\,dx_i \wedge dx_j$. *Lemma 6.2 ve (1) gereği*
>
> $$\begin{aligned} d(\phi \wedge \psi) &= \sum_{i,j} d(f_i g_j) \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i,j} g_j\,df_i \wedge dx_i \wedge dx_j + \sum_{i,j} f_i\,dg_j \wedge dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$
>
> Birinci toplam. g_j *fonksiyonunu* dx_j*'nin önüne taşıyıp birleşme ve dağılma kurallarını kullanırsak*
>
> $$\sum_{i,j} (df_i \wedge dx_i) \wedge (g_j\,dx_j) = \Big(\sum_i df_i \wedge dx_i\Big) \wedge \Big(\sum_j g_j\,dx_j\Big) = d\phi \wedge \psi.$$
>
> İkinci toplam ve eksi işareti. *Burada* dg_j, dx_i*'nin önünde duruyor; oysa* ϕ*'nin parçası olan* dx_i*'nin başa,* ψ*'nin parçası olan* dg_j*'nin* dx_j*'nin yanına gitmesi gerekir.* dg_j *ve* dx_i *iki 1-formdur; Lemma 6.1 gereği* $dg_j \wedge dx_i = -\,dx_i \wedge dg_j$. *Dolayısıyla*
>
> $$\sum_{i,j} f_i\,dg_j \wedge dx_i \wedge dx_j = -\sum_{i,j} (f_i\,dx_i) \wedge (dg_j \wedge dx_j) = -\,\phi \wedge d\psi.$$
>
> *İki toplamı birleştirince (3) çıkar.*
> ■

Eksi işaretini hatırlamak için d'yi bir an için formların soluna yazılan bir 1-form gibi düşünebiliriz. $d\phi \wedge \psi$ teriminde d doğrudan ϕ'nin önündedir. $\phi \wedge d\psi$ teriminde ise d, ψ'ye ulaşmak için ϕ ile yer değiştirmek zorunda kalmıştır; iki 1-formun yer değiştirmesi Lemma 6.1 gereği bir eksi işareti getirir. (2)'de d'nin geçtiği f bir 0-formdur, bu yüzden orada işaret değişmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 6.20 (Eksi İşaretinin Rolü). $\phi = z\,dx$ ve $\psi = z\,dy$ olsun. Teorem 6.1'nın üçüncü formülünün iki yanını ayrı ayrı hesaplayalım.

Çözüm.
Sol yan. $\phi \wedge \psi = z^2\,dx \wedge dy$ ve $d(z^2) = 2z\,dz$ olduğundan

$$d(\phi \wedge \psi) = 2z\,dz \wedge dx \wedge dy = 2z\,dx \wedge dy \wedge dz;$$

son adımda $dz \wedge dx \wedge dy$'nin çift sayıda yer değiştirmeyle $dx \wedge dy \wedge dz$'ye geldiğini kullandık.
Birinci terim. $d\phi = dz \wedge dx$ olduğundan

$$d\phi \wedge \psi = z\,dz \wedge dx \wedge dy = z\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

İkinci terim. $d\psi = dz \wedge dy$ olduğundan

$$\phi \wedge d\psi = z\,dx \wedge dz \wedge dy = -z\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Sağ yan. İki terimi yerine koyarsak

$$\begin{aligned} d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi &= z\,dx \wedge dy \wedge dz - (-z\,dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= 2z\,dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

bulunur. İki yan eşittir.
Eksi yerine artı olsaydı sağ yan $z - z = 0$ verirdi ve formül bu örnekte yanlış olurdu. Eksi işareti bir dizgi ayrıntısı değil, formülün doğru olmasının koşuludur.
■

Örnek 6.21 (Fonksiyonla Çarpımın Dış Türevi). $f = x^2$ ve $\phi = y\,dx + dz$ olsun. $d(f\phi)$'yi doğrudan ve Teorem 6.1'nın ikinci formülüyle hesaplayalım.

Çözüm.
Doğrudan. $f\phi = x^2 y\,dx + x^2\,dz$. Tanımdan

$$\begin{aligned} d(f\phi) &= (2xy\,dx + x^2\,dy) \wedge dx + 2x\,dx \wedge dz \\ &= -x^2\,dx \wedge dy + 2x\,dx \wedge dz. \end{aligned}$$

Kuralla. $df = 2x\,dx$ olduğundan

$$df \wedge \phi = 2xy\,dx \wedge dx + 2x\,dx \wedge dz = 2x\,dx \wedge dz.$$

$d\phi = dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy$ olduğundan $f\,d\phi = -x^2\,dx \wedge dy$. Toplam doğrudan hesaptaki sonuçtur.
■

Üçüncü formülün hoş bir sonucu, dış türevi sıfır olan iki 1-formun çarpımının da dış türevinin sıfır olmasıdır. Örneğin Örnek 6.8'daki $\phi = x\,dx - y\,dy$ ve $\psi = z\,dx + x\,dz$ için $d\phi = dx \wedge dx - dy \wedge dy = 0$ ve $d\psi = dz \wedge dx + dx \wedge dz = 0$'dır; kural $d(\phi \wedge \psi) = 0$ der. Doğrudan hesap da bunu doğrular: $yz\,dx \wedge dy + x^2\,dx \wedge dz - xy\,dy \wedge dz$ formunun dış türevinde yalnızca $y\,dz \wedge dx \wedge dy$ ve $-y\,dx \wedge dy \wedge dz$ terimleri kalır ve bunlar birbirini götürür.

6.6 Dış Türev ve Vektör Analizi

Şimdiye kadar gördüklerimizi toparlayalım. Kama çarpımı, hesabın sonunda nasılsa birbirini götürecek terimleri daha dağıtma aşamasında ortadan kaldırarak kısmi türev hesaplarını kısaltır. Dış türevin katkısı ise çok daha büyüktür: vektör analizindeki üç ayrı türev işlemini tek bir işlemde toplar. Bunu görmek için önce iki dili birbirine çevirmemiz gerekir.
Vektör analizinde formlar yerine vektör alanlarıyla çalışılır. $\mathbb{R}^3$'te bir 1-formu da bir 2-formu da, katsayılarını taşıyarak bir vektör alanına dönüştüren birer birebir eşleme vardır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{i=1}^{3} f_i\,dx_i \overset{(1)}{\leftrightarrow} \sum_{i=1}^{3} f_i\,U_i \overset{(2)}{\leftrightarrow} f_3\,dx_1\wedge dx_2 - f_2\,dx_1\wedge dx_3 + f_1\,dx_2\wedge dx_3.$$

Bu dilde kısmi türevlerden kurulan üç işlem vardır: bir f fonksiyonunun **gradyanı** (gradient), bir $V = \sum f_i\,U_i$ vektör alanının **rotasyoneli** (curl) ve **diverjansı** (divergence).

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,U_i, \qquad \operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)U_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)U_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)U_3.$$

Bu üç işlem ilk bakışta birbirinden bağımsız formüller gibi görünür. Oysa dış türev, her birini tek başına üstlenir:

form	derecesi	dış türevi	vektör analizindeki karşılığı
f	0	df, bir 1-form	$\operatorname{grad} f$
$\phi \overset{(1)}{\leftrightarrow} V$	1	$d\phi$, bir 2-form	$\operatorname{rot} V$
$\eta \overset{(2)}{\leftrightarrow} V$	2	$d\eta$, bir 3-form	$(\operatorname{div} V)\,dx\wedge dy\wedge dz$

Tablonun üç satırını alıştırmalarda ispatlayacağız (Alıştırma 6.17, Alıştırma 6.18, Alıştırma 6.19). Vektör analizinde üç ayrı işlem olan şey, formlar dilinde tek bir d işlemidir; hangi kata uygulandığına göre farklı adlar alır.

> **!** Dış türevin karesi sıfırdır
>
> Alıştırmalarda her f fonksiyonu için $d(df) = 0$ (Alıştırma 6.8) ve her ϕ 1-formu için $d(d\phi) = 0$ (Alıştırma 6.16) olduğunu göreceğiz. Bir 2-formun dış türevi bir 3-formdur ve onun dış türevi derece 4 olduğundan zaten sıfırdır. Kısaca her ξ formu için $d(d\xi) = 0$; bu gerçek $d^2 = 0$ diye yazılır. Yukarıdaki tabloyla birlikte okununca bu tek eşitlik, vektör analizindeki $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ ve $\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = 0$ özdeşliklerinin ikisini birden içerir.

6.7 Alıştırmalar

İlk altı alıştırmada aynı üç 1-formu kullanacağız:

$$\phi = yz\,dx + dz, \qquad \psi = \sin z\,dx + \cos z\,dy, \qquad \xi = dy + z\,dz.$$

Alıştırma 6.1 (Birinci ve İkinci Formun Kama Çarpımı). $\phi = yz\,dx + dz$ ve $\psi = \sin z\,dx + \cos z\,dy$ olsun. $\phi\wedge\psi$'nin standart yazımını bulunuz.

> **Çözüm.**
> *Dağıtma.* Dört terim çıkar:
>
> $$\phi\wedge\psi = yz\sin z\,dx\wedge dx + yz\cos z\,dx\wedge dy + \sin z\,dz\wedge dx + \cos z\,dz\wedge dy.$$
>
> *Sadeleştirme.* Birinci terim tekrar yüzünden sıfırdır. Ters değişme kuralı $dz\wedge dx = -\,dx\wedge dz$ ve $dz\wedge dy = -\,dy\wedge dz$ verir.
> *Sonuç.*
>
> $$\phi\wedge\psi = yz\cos z\,dx\wedge dy - \sin z\,dx\wedge dz - \cos z\,dy\wedge dz.$$
>
> *Denetim.* $\mathbf{p} = (0,1,0)$'da ϕ, dz gibi; ψ ise dy gibi davranır. O noktada $\phi\wedge\psi$, $dz\wedge dy = -\,dy\wedge dz$ olmalıdır. Formülde $z = 0$ koyunca katsayılar 0, 0, -1 çıkar; uyuşur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 6.2 (İkinci ve Üçüncü Formun Kama Çarpımı). $\psi = \sin z\,dx + \cos z\,dy$ ve $\xi = dy + z\,dz$ olsun. $\psi \wedge \xi$'nin standart yazımını bulunuz.

Çözüm.
Dağıtma.

$$\psi \wedge \xi = \sin z\,dx \wedge dy + z \sin z\,dx \wedge dz + \cos z\,dy \wedge dy + z \cos z\,dy \wedge dz.$$

Sadeleştirme. Üçüncü terimde $dy \wedge dy = 0$. Kalan terimler zaten standart sıradadır.
Sonuç.

$$\psi \wedge \xi = \sin z\,dx \wedge dy + z \sin z\,dx \wedge dz + z \cos z\,dy \wedge dz.$$

■

Alıştırma 6.3 (Üçüncü ve Birinci Formun Kama Çarpımı). $\xi = dy + z\,dz$ ve $\phi = yz\,dx + dz$ olsun. $\xi \wedge \phi$'nin standart yazımını bulunuz.

Çözüm.
Dağıtma.

$$\xi \wedge \phi = yz\,dy \wedge dx + dy \wedge dz + yz^2\,dz \wedge dx + z\,dz \wedge dz.$$

Sadeleştirme. Son terim sıfırdır. $dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy$ ve $dz \wedge dx = -\,dx \wedge dz$.
Sonuç.

$$\xi \wedge \phi = -yz\,dx \wedge dy - yz^2\,dx \wedge dz + dy \wedge dz.$$

Bir gözlem. Lemma 6.1 gereği $\phi \wedge \xi$ bunun negatifidir:

$$\phi \wedge \xi = yz\,dx \wedge dy + yz^2\,dx \wedge dz - dy \wedge dz.$$

■

Alıştırma 6.4 (Birinci Formun Dış Türevi). $\phi = yz\,dx + dz$ 1-formunun dış türevini bulunuz.

Çözüm.
Katsayılar. $f_1 = yz$, $f_2 = 0$, $f_3 = 1$. Lemma 5.2 gereği $d(yz) = z\,dy + y\,dz$; sabit fonksiyonun diferansiyeli sıfırdır.
Tanım.

$$d\phi = (z\,dy + y\,dz) \wedge dx + 0 = z\,dy \wedge dx + y\,dz \wedge dx.$$

Standart yazım.

$$d\phi = -z\,dx \wedge dy - y\,dx \wedge dz.$$

Formülle denetim. Önerme 6.4'ndeki katsayılar: $dx \wedge dy$ için $0 - z$, $dx \wedge dz$ için $0 - y$, $dy \wedge dz$ için $0 - 0$. Uyuşur.
■

Alıştırma 6.5 (İkinci Formun Dış Türevi). $\psi = \sin z\,dx + \cos z\,dy$ 1-formunun dış türevini bulunuz.

Çözüm.
Katsayıların diferansiyelleri. Lemma 5.3 gereği $d(\sin z) = \cos z\,dz$ ve $d(\cos z) = -\sin z\,dz$.
Tanım.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\psi = \cos z\, dz \wedge dx - \sin z\, dz \wedge dy.$$

Standart yazım. İki terimde de ters değişme kuralını uygularsak

$$d\psi = -\cos z\, dx \wedge dz + \sin z\, dy \wedge dz.$$

Formülle denetim. $f_1 = \sin z$, $f_2 = \cos z$, $f_3 = 0$ için $dx \wedge dz$ katsayısı $0 - \cos z$, $dy \wedge dz$ katsayısı $0 - (-\sin z) = \sin z$, $dx \wedge dy$ katsayısı $0 - 0$. Uyuşur.
■

Alıştırma 6.6 (Üçüncü Formun Dış Türevi). $\xi = dy + z\, dz$ 1-formunun dış türevini bulunuz.

Çözüm.
Tanım. Katsayılar 1 ve z'dir; diferansiyelleri 0 ve dz. Buna göre

$$d\xi = 0 \wedge dy + dz \wedge dz = 0.$$

Yorum. Sonucun sıfır çıkması rastlantı değildir. $\xi = d\left(\, y + z^2/2 \,\right)$ olduğu Sonuç 5.1 ile hemen görülür; bir diferansiyelin dış türevi her zaman sıfırdır (Alıştırma 6.8).
■

Alıştırma 6.7 (Çarpım Kuralını Sayılarla Denetlemek). $y \neq 0$ olan noktalarda $\phi = dx/y$ ve $\psi = z\, dy$ olsun. Teorem 6.1'nın $d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$ formülünü, üç terimi ayrı ayrı hesaplayarak denetleyiniz.

Çözüm.
Tanım kümesi. $1/y$ yalnızca $y \neq 0$ olan açık kümede tanımlıdır; bütün hesaplar bu kümede yapılır ve kurallar orada da geçerlidir.
Sol yan. $\phi \wedge \psi = (z/y)\, dx \wedge dy$. Bileşke ve çarpım kurallarıyla

$$d\left(\frac{z}{y}\right) = -\frac{z}{y^2}\, dy + \frac{1}{y}\, dz.$$

dy terimi $dx \wedge dy$ ile çarpılınca tekrar yüzünden düşer, dolayısıyla

$$d(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{y}\, dz \wedge dx \wedge dy = \frac{1}{y}\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Birinci terim. Tanımdan

$$d\phi = d(1/y) \wedge dx = -\frac{1}{y^2}\, dy \wedge dx = \frac{1}{y^2}\, dx \wedge dy.$$

Bunu $\psi = z\, dy$ ile çarparsak dy tekrar eder: $d\phi \wedge \psi = 0$.
İkinci terim. $d\psi = dz \wedge dy = -\, dy \wedge dz$, dolayısıyla

$$\phi \wedge d\psi = -\frac{1}{y}\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Karşılaştırma. Sağ yan

$$d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi = 0 - \left(-\frac{1}{y}\, dx \wedge dy \wedge dz\right) = \frac{1}{y}\, dx \wedge dy \wedge dz$$

olur; sol yanla aynıdır. Bu örnekte sonucun tamamı eksi işaretli terimden gelir.
■

Alıştırma 6.8 (Bir Diferansiyelin Dış Türevi Sıfırdır). Her diferansiyellenebilir f fonksiyonu için $d(df) = 0$ olduğunu ispatlayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Diferansiyelin katsayıları. Sonuç 5.1 gereği $df = \sum_i f_i\,dx_i$, burada $f_i = \partial f/\partial x_i$.
Dış türev formülü. Önerme 6.4'ne göre $d(df)$'nin $dx_1 \wedge dx_2$ katsayısı

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}$$

olur. Öteki iki katsayı da aynı biçimdedir: $dx_1 \wedge dx_3$ için x_1 ve x_3'e, $dx_2 \wedge dx_3$ için x_2 ve x_3'e göre iki karışık kısmi türevin farkı.
Karışık kısmi türevler. Tanım 1.4 gereği f'nin her mertebeden kısmi türevleri vardır ve süreklidir; bu yüzden karışık kısmi türevler türev alma sırasına bağlı değildir. Üç katsayı da sıfırdır ve $d(df) = 0$.
Sayısal örnek. $f = x^2 y$ için $df = 2xy\,dx + x^2\,dy$ ve

$$d(df) = 2x\,dy \wedge dx + 2x\,dx \wedge dy = 0.$$

■

Alıştırma 6.9 (Bir Fonksiyonla Bir Diferansiyelin Çarpımı). Her diferansiyellenebilir f, g fonksiyonu için $d(f\,dg) = df \wedge dg$ olduğunu, $d(dg) = 0$ eşitliğinden yararlanarak gösteriniz.

Çözüm.
Çarpım kuralı. Teorem 6.1'nın ikinci formülünü $\phi = dg$ 1-formuna uygulayalım:

$$d(f\,dg) = df \wedge dg + f\,d(dg).$$

Sonuç. Alıştırma 6.8 gereği $d(dg) = 0$; ikinci terim düşer ve $d(f\,dg) = df \wedge dg$ kalır.
Sayısal örnek. $f = z$, $g = xy$ için $f\,dg = yz\,dx + xz\,dy$. Tanımdan

$$d(f\,dg) = (z\,dy + y\,dz) \wedge dx + (z\,dx + x\,dz) \wedge dy = -y\,dx \wedge dz - x\,dy \wedge dz,$$

çünkü $z\,dy \wedge dx$ ile $z\,dx \wedge dy$ birbirini götürür. Öte yandan

$$df \wedge dg = dz \wedge (y\,dx + x\,dy) = -y\,dx \wedge dz - x\,dy \wedge dz.$$

Uyuşur.
■

Bundan sonraki dört alıştırmada f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve Alıştırma 6.8 ile Alıştırma 6.9'nin sonuçlarını serbestçe kullanabiliriz.

Alıştırma 6.10 (İki Çapraz Terimin Dış Türevi). f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $d(f\,dg + g\,df)$ formunu sadeleştiriniz.

Çözüm.
Lineerlik. Önerme 6.5 gereği $d(f\,dg + g\,df) = d(f\,dg) + d(g\,df)$.
Her terim. Alıştırma 6.9 gereği $d(f\,dg) = df \wedge dg$ ve $d(g\,df) = dg \wedge df$.
Ters değişme. Lemma 6.1 gereği $dg \wedge df = -\,df \wedge dg$. Toplam

$$d(f\,dg + g\,df) = df \wedge dg - df \wedge dg = 0.$$

Başka bir yol. Lemma 5.2 gereği $f\,dg + g\,df = d(fg)$; bir diferansiyelin dış türevi sıfırdır.
■

Alıştırma 6.11 (Bir Fark ile Bir Toplamın Çarpımının Dış Türevi). f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $d\,\big(\,(f-g)(df+dg)\,\big)$ formunu sadeleştiriniz.

Çözüm.
Çarpım kuralı. Teorem 6.1'nın ikinci formülünü $f - g$ fonksiyonu ve $df + dg$ 1-formuyla uygulayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\,\big(\,(f-g)(df+dg)\,\big) = d(f-g)\wedge(df+dg) + (f-g)\,d(df+dg).$$

İkinci terim. Lineerlik ve $d^2=0$ gereği $d(df+dg)=d(df)+d(dg)=0$.
Birinci terim. $d(f-g)=df-dg$. Dağıtırsak

$$(df-dg)\wedge(df+dg) = df\wedge df + df\wedge dg - dg\wedge df - dg\wedge dg.$$

Lemma 6.1 gereği $df\wedge df = dg\wedge dg = 0$ ve $-\,dg\wedge df = df\wedge dg$.
Sonuç. İki terim birleşince aranan form $2\,df\wedge dg$ olur.
■

Alıştırma 6.12 (İki Diferansiyel Çarpımının Dış Türevi). f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $d(f\,dg\wedge g\,df)$ formunu sadeleştiriniz.

Çözüm.
Çarpım kuralı. $f\,dg$ ve $g\,df$ iki 1-formdur. Teorem 6.1'nın üçüncü formülü

$$d(f\,dg\wedge g\,df) = d(f\,dg)\wedge g\,df - f\,dg\wedge d(g\,df)$$

verir.
Parçalar. Alıştırma 6.9 gereği $d(f\,dg)=df\wedge dg$ ve $d(g\,df)=dg\wedge df$. Yerine koyup fonksiyonları başa alırsak

$$d(f\,dg\wedge g\,df) = g\,df\wedge dg\wedge df - f\,dg\wedge dg\wedge df.$$

Tekrarlar. İkinci terimde $dg\wedge dg=0$. Birinci terimde df iki kez geçer; son iki çarpanın yerini değiştirince $df\wedge dg\wedge df = -\,df\wedge df\wedge dg$ olur ve bu da $df\wedge df=0$ yüzünden sıfırdır.
Sonuç. $d(f\,dg\wedge g\,df)=0$.
Başka bir yol. Fonksiyonları başa alırsak $f\,dg\wedge g\,df = (-fg\,df)\wedge dg$ olur. Üçüncü formülü $-fg\,df$ ve dg 1-formlarına uygulayalım; $d(dg)=0$ olduğundan yalnızca $d(-fg\,df)\wedge dg$ terimi kalır. Alıştırma 6.9 ve lineerlik gereği

$$d(-fg\,df) = -\,d(fg)\wedge df = -(g\,df+f\,dg)\wedge df = -f\,dg\wedge df.$$

Bunu dg ile çarpınca dg tekrar eder; sonuç yine sıfırdır.
■

Alıştırma 6.13 (İki Dış Türevin Toplamı). f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $d(gf\,df)+d(f\,dg)$ formunu sadeleştiriniz.

Çözüm.
Birinci terim. Alıştırma 6.9'nı gf fonksiyonu ve df diferansiyeliyle uygularsak $d(gf\,df)=d(gf)\wedge df$. Çarpım kuralıyla $d(gf)=f\,dg+g\,df$, dolayısıyla

$$d(gf\,df) = f\,dg\wedge df + g\,df\wedge df = f\,dg\wedge df = -f\,df\wedge dg.$$

İkinci terim. $d(f\,dg)=df\wedge dg$.
Sonuç.

$$d(gf\,df)+d(f\,dg) = -f\,df\wedge dg + df\wedge dg = (1-f)\,df\wedge dg.$$

Sayısal denetim. $f=x$, $g=y$ için sonuç $(1-x)\,dx\wedge dy$ olmalıdır. Doğrudan: $d(xy\,dx)=x\,dy\wedge dx$, yani $-x\,dx\wedge dy$; ayrıca $d(x\,dy)=dx\wedge dy$. Toplam $(1-x)\,dx\wedge dy$.
■

Alıştırma 6.14 (Üç 1-Formun Çarpımı ve Determinant). $i=1,2,3$ için $\phi_i=\sum_j f_{ij}\,dx_j$ üç 1-form olsun.

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Dağıtma. Dağılma kuralı ve fonksiyonların yer değiştirmesi gereği

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} f_{1j}\, f_{2k}\, f_{3l}\, dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l.$$

Tekrarlar. j, k, l indislerinden ikisi eşit olan her terim sıfırdır (Örnek 6.3). Geriye (j,k,l)'nin $(1,2,3)$'ün bir sıralaması olduğu altı terim kalır.
İşaretler. Örnek 6.2'daki tabloya göre $dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l$, (j,k,l) sırasıyla $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ ise $+\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$; $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$ ise $-\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$'tür. Dolayısıyla katsayı

$$\begin{aligned} &f_{11}f_{22}f_{33} + f_{12}f_{23}f_{31} + f_{13}f_{21}f_{32} \\ &\quad - f_{11}f_{23}f_{32} - f_{12}f_{21}f_{33} - f_{13}f_{22}f_{31} \end{aligned}$$

olur.
Determinant. Determinantı birinci satıra göre açarsak

$$\begin{aligned} &f_{11}(f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32}) - f_{12}(f_{21}f_{33} - f_{23}f_{31}) \\ &\quad + f_{13}(f_{21}f_{32} - f_{22}f_{31}) \end{aligned}$$

bulunur; parantezler açılınca yukarıdaki altı terimin aynısı çıkar. İspat tamamdır.
■

Alıştırma 6.15 (Silindirik Koordinatlarda Hacim Elemanı). r, ϑ, z silindirik koordinat fonksiyonları (cylindrical coordinates) olsun: $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$. $\mathbb{R}^3$'ün **hacim elemanı** (volume element) $dx \wedge dy \wedge dz$'yi r, ϑ, z fonksiyonları ve bunların diferansiyelleri cinsinden yazınız.

Çözüm.
Tanım kümesi. r ve ϑ bütün uzayda diferansiyellenebilir fonksiyonlar değildir. Örneğin $x \le 0$, $y = 0$ yarım düzlemini çıkardığımız açık kümede $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ ve ϑ, $(-\pi, \pi)$ aralığında değer alan diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Hesabı bu kümede yaparız; kurallar orada da geçerlidir.
Diferansiyeller. Çarpım ve bileşke kurallarıyla

$$\begin{aligned} dx &= \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta, \\ dy &= \sin\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta. \end{aligned}$$

İki diferansiyelin çarpımı. $dr \wedge dr = d\vartheta \wedge d\vartheta = 0$ olduğundan yalnızca karışık terimler kalır:

$$dx \wedge dy = r\cos^2\vartheta\, dr \wedge d\vartheta - r\sin^2\vartheta\, d\vartheta \wedge dr.$$

$d\vartheta \wedge dr = -\,dr \wedge d\vartheta$ ve $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$ olduğundan $dx \wedge dy = r\, dr \wedge d\vartheta$.
Sonuç. dz ile çarparsak

$$dx \wedge dy \wedge dz = r\, dr \wedge d\vartheta \wedge dz.$$

Anlamı. $\mathbf{p}$ noktasının çevresindeki küçük bir silindirik parça, kenarları yaklaşık dr, $r\,d\vartheta$ ve dz olan bir kutudur; hacminin r çarpanı taşıması bu yüzdendir. Örneğin köşesi $(r,\vartheta,z) = (2, \pi/6, 0)$ olan ve r'yi $1/2$, ϑ'yı $\pi/12$, z'yi $3/5$ artırarak elde edilen parçanın bu köşeden çıkan kenarları $1/2$, $2\cdot\pi/12 \approx 0{,}52$ ve $3/5$'tir. Yaklaşık hacim

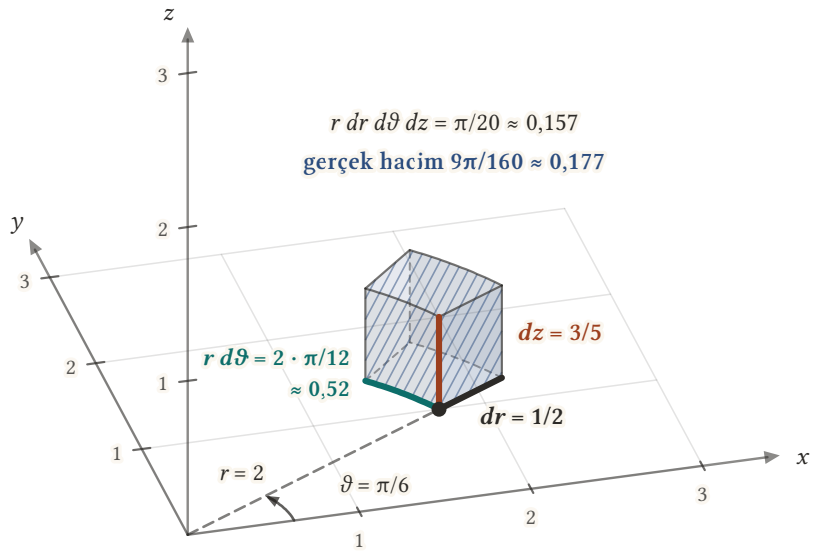
$$r\, dr\, d\vartheta\, dz = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0{,}157$$

olur. Parçanın gerçek hacmi ise taban halka diliminin alanı çarpı yüksekliktir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{2}\left(\,2{,}5^2 - 2^2\,\right)\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9\pi}{160} \approx 0{,}177.$$

Parça küçüldükçe iki değerin oranı 1'e yaklaşır. Aynı sonuca Alıştırma 6.14'deki hesapla da ulaşılır: dx, dy, dz'nin dr, $d\vartheta$, dz cinsinden katsayılarının determinantı $r\cos^2\vartheta + r\sin^2\vartheta = r$'dir.



Şekil 6.3: Mavi taralı küçük parça, $r = 2$ ve $r = 2{,}5$ silindirleri (gri), $\vartheta = \pi/6$ ve $\vartheta = \pi/4$ yarım düzlemleri ile $z = 0$ ve $z = 0{,}6$ düzlemleri arasında kalır; köşesi $(r, \vartheta, z) = (2, \pi/6, 0)$ noktasıdır. Bu köşeden çıkan üç kenar parçayı yaklaşık bir kutu gibi ölçer: radyal kenar $dr = 1/2$, $r = 2$ çemberi üzerindeki yay $r\,d\vartheta = 2 \cdot \pi/12 \approx 0{,}52$ ve dikey kenar $dz = 3/5$. Yay kenarının boyu $d\vartheta$ değil $r\,d\vartheta$ olduğundan kutunun hacmi $r\,dr\,d\vartheta\,dz = \pi/20 \approx 0{,}157$ çıkar; parçanın gerçek hacmi ise $9\pi/160 \approx 0{,}177$'dir. Parça küçüldükçe iki değerin oranı 1'e yaklaşır.

■

Alıştırma 6.16 (Bir Dış Türevin Dış Türevi Sıfırdır). Katsayıları f, g, h olan standart yazımlı bir η 2-formunun dış türevi, katsayılar diferansiyelleriyle değiştirilerek elde edilen

$$d\eta = df \wedge dx \wedge dy + dg \wedge dx \wedge dz + dh \wedge dy \wedge dz$$

3-formudur. Her ϕ 1-formu için $d(d\phi) = 0$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
2-formun dış türevi. Tanımı koordinatlarla açtığımızda

$$d\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

bulmuştuk: df'den yalnızca dz terimi, dg'den yalnızca dy terimi (eksi işaretle), dh'den yalnızca dx terimi kalır.
$d\phi$'nin katsayıları. $\phi = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$ ise Önerme 6.4 gereği $d\phi$'nin standart katsayıları

$$f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad g = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}, \qquad h = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Yerine koymak. $d(d\phi)$'nin katsayısı

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial z}.$$

Karışık kısmi türevler sıraya bağlı olmadığından terimler çiftler hâlinde birbirini götürür: f_2'li iki terim, f_1'li iki terim ve f_3'lü iki terim. Katsayı sıfırdır, yani $d(d\phi) = 0$.
Koordinatsız ikinci yol. $d\phi = \sum_i df_i \wedge dx_i$ iki 1-formun çarpımlarının toplamıdır. Lineerlik ve Teorem 6.1'nın üçüncü formülü gereği

$$d(d\phi) = \sum_{i=1}^{3} \big(\, d(df_i) \wedge dx_i - df_i \wedge d(dx_i) \,\big),$$

ve Alıştırma 6.8 gereği $d(df_i) = 0$, $d(dx_i) = 0$ olduğundan toplam sıfırdır.
■

Vektör analizine ayrılan sıradaki üç alıştırmada şu birebir eşlemeleri kullanıyoruz:

$$\sum_{i=1}^{3} f_i\,dx_i \overset{(1)}{\leftrightarrow} \sum_{i=1}^{3} f_i\,U_i \overset{(2)}{\leftrightarrow} f_3\,dx_1 \wedge dx_2 - f_2\,dx_1 \wedge dx_3 + f_1\,dx_2 \wedge dx_3.$$

Alıştırma 6.17 (Gradyan Bir Dış Türevdir). Birinci eşleme, bir $\sum_i f_i\,dx_i$ 1-formunu katsayıları aynı olan $\sum_i f_i\,U_i$ vektör alanına götürür. Bir f fonksiyonunun gradyanı $\operatorname{grad} f = \sum_i (\partial f/\partial x_i)\,U_i$ vektör alanıdır. Birinci eşleme altında df'nin $\operatorname{grad} f$'ye karşılık geldiğini gösteriniz.

Çözüm.
Diferansiyelin katsayıları. Sonuç 5.1 gereği $df = \sum_i (\partial f/\partial x_i)\,dx_i$; katsayılar $f_i = \partial f/\partial x_i$'dir.
Eşleme. Birinci eşleme her dx_i'yi U_i ile değiştirir ve katsayılara dokunmaz. Dolayısıyla df'nin karşılığı $\sum_i (\partial f/\partial x_i)\,U_i = \operatorname{grad} f$'dir.
Sayısal örnek. $f = x^2 y + z$ için $df = 2xy\,dx + x^2\,dy + dz$ ve $\operatorname{grad} f = 2xy\,U_1 + x^2\,U_2 + U_3$. Gradyanın tanımı yalnızca katsayı üçlüsünü kaydeder; df ise aynı üçlüyü teğet vektörlerde değerlendirilebilen bir form olarak taşır.
■

Alıştırma 6.18 (Rotasyonel Bir Dış Türevdir). Birinci eşleme $\sum_i f_i\,dx_i$ 1-formunu $\sum_i f_i\,U_i$ vektör alanına, ikinci eşleme de $\sum_i f_i\,U_i$ vektör alanını

$$f_3\,dx_1 \wedge dx_2 - f_2\,dx_1 \wedge dx_3 + f_1\,dx_2 \wedge dx_3$$

2-formuna götürür. $V = \sum_i f_i\,U_i$ vektör alanının rotasyoneli

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)U_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)U_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)U_3$$

vektör alanıdır. $\phi = \sum_i f_i\,dx_i$ 1-formu birinci eşleme altında V'ye karşılık geliyorsa, $d\phi$'nin ikinci eşleme altında $\operatorname{rot} V$'ye karşılık geldiğini gösteriniz.

Çözüm.
Dış türev. Önerme 6.4 gereği

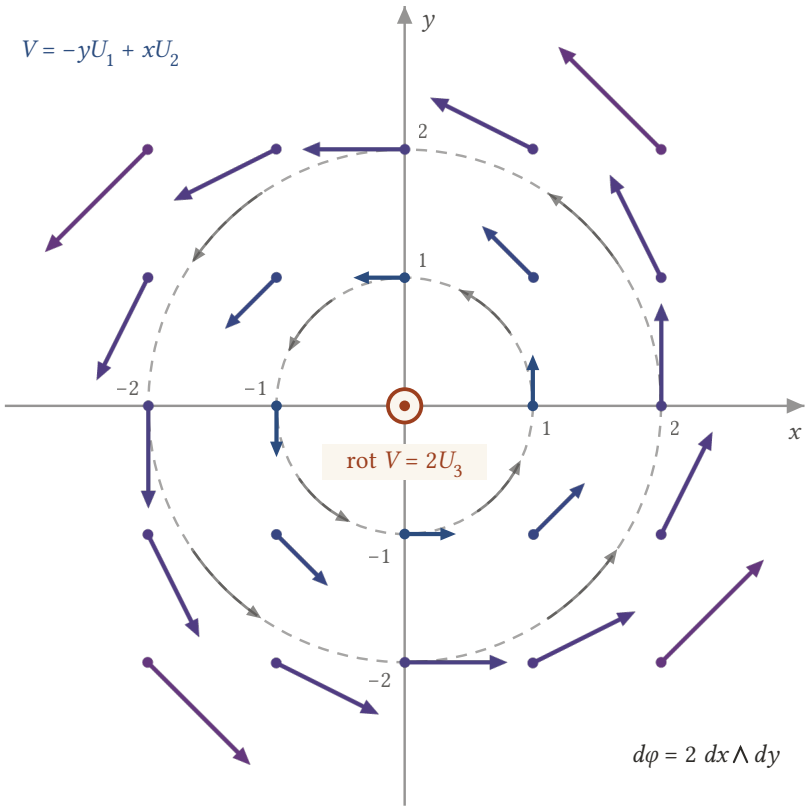
$$d\phi = a\,dx_1 \wedge dx_2 + b\,dx_1 \wedge dx_3 + c\,dx_2 \wedge dx_3,$$

burada

$$a = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \qquad b = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \qquad c = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci eşlemeyi tersine okumak. İkinci eşlemede $dx_1 \wedge dx_2$'nin katsayısı U_3'ün katsayısı, $dx_1 \wedge dx_3$'ün katsayısı U_2'nin katsayısının negatifi, $dx_2 \wedge dx_3$'ün katsayısı U_1'in katsayısıdır. Dolayısıyla $d\phi$'ye karşılık gelen vektör alanı $c\,U_1 - b\,U_2 + a\,U_3$'tür.
Karşılaştırma. c, rot V'nin U_1 katsayısıdır. $-b = \partial f_1/\partial x_3 - \partial f_3/\partial x_1$, U_2 katsayısıdır. a, U_3 katsayısıdır. Böylece $d\phi \overset{(2)}{\leftrightarrow} \operatorname{rot} V$.
Sayısal örnek. $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ için $\phi = -y\,dx + x\,dy$ ve Örnek 6.16'nda $d\phi = 2\,dx \wedge dy$ bulmuştuk. İkinci eşleme altında bu $2\,U_3$'tür. Formülden: U_1 ve U_2 katsayıları 0, U_3 katsayısı $1 - (-1) = 2$. Alan z ekseni çevresinde saat yönünün tersine döner ve rotasyonel, dönme ekseni doğrultusunda sabit bir vektördür.



Şekil 6.4: $V = -yU_1 + xU_2$ alanının $-2..2$ tam sayı ızgarasındaki okları; okunaklılık için her ok gerçek boyunun 0,4 katıyla çizilmiş, boyu arttıkça maviden mora doğru renklendirilmiştir. Her ok, başlangıç noktası merkezli ve kendi noktasından geçen çembere teğettir, gerçek boyu da o çemberin yarıçapına eşittir; yarıçapı 1 ve 2 olan kesikli çemberlerdeki küçük oklar, alanın z ekseni çevresinde saat yönünün tersine döndüğünü gösterir. Okların boyu merkezden uzaklaştıkça artsa da dönmenin ölçüsü her yerde aynıdır: dx ile dy'nin kama çarpımının 2 katı olan $d\varphi$, ikinci eşleme altında sabit rot $V = 2U_3$ alanına karşılık gelir. Başlangıç noktasındaki, ortasında nokta bulunan küçük daire bu vektörün sayfadan dışarıya, dönme ekseni doğrultusunda baktığını gösterir.

■

Alıştırma 6.19 (Diverjans Bir Dış Türevdir). İkinci eşleme, $V = \sum_i f_i\,U_i$ vektör alanını

$$f_3\,dx_1 \wedge dx_2 - f_2\,dx_1 \wedge dx_3 + f_1\,dx_2 \wedge dx_3$$

2-formuna götürür. V'nin diverjansı $\operatorname{div} V = \sum_i \partial f_i/\partial x_i$ fonksiyonudur. η, ikinci eşleme altında V'ye karşılık gelen 2-form ise

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\eta = (\operatorname{div} V)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
2-form. İkinci eşleme gereği

$$\eta = f_3\, dx_1 \wedge dx_2 - f_2\, dx_1 \wedge dx_3 + f_1\, dx_2 \wedge dx_3.$$

Dış türev. Tanım 6.3 gereği

$$d\eta = df_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - df_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + df_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Tekrarları atmak. Birinci terimde df_3'ün yalnızca dx_3 terimi, ikincide df_2'nin yalnızca dx_2 terimi, üçüncüde df_1'in yalnızca dx_1 terimi kalır:

$$d\eta = \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\, dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Sıralamak. $dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$ çarpımı iki yer değiştirmeyle, $dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$ çarpımı bir yer değiştirmeyle $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$'e getirilir; birincinin işareti $+$, ikincininki $-$ olur. İkinci terimdeki eksi, bu eksiyle çarpılıp artıya döner. Böylece

$$d\eta = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\operatorname{div} V)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Sayısal örnek. Konum alanı $V = x\,U_1 + y\,U_2 + z\,U_3$ için ikinci eşleme

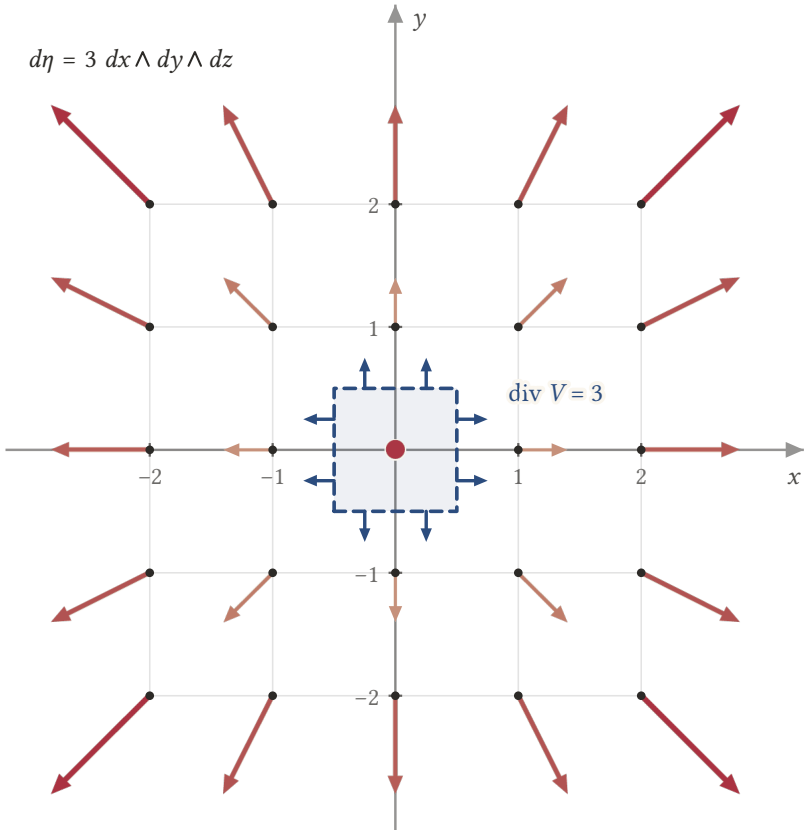
$$\eta = z\, dx \wedge dy - y\, dx \wedge dz + x\, dy \wedge dz$$

2-formunu verir; dış türevi

$$d\eta = dz \wedge dx \wedge dy - dy \wedge dx \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz = 3\, dx \wedge dy \wedge dz;$$

gerçekten $\operatorname{div} V = 1 + 1 + 1 = 3$. Alan her noktadan dışarı doğru yayılır; diverjans bu yayılmanın hızını ölçer.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.5: Konum alanı $V = x\,U_1 + y\,U_2 + z\,U_3$'ün $z = 0$ düzlemindeki kesiti: $-2..2$ tam sayı ızgarasının her noktasındaki ok, o noktanın konum vektörünü okunaklılık için gerçek uzunluğunun 0,4 katıyla gösterir. Oklar, alanın sıfır olduğu başlangıç noktasından (kırmızı nokta) uzaklaştıkça uzar ve turuncudan kırmızıya döner. Köşeleri $(\pm 0{,}5;\ \pm 0{,}5)$ olan kesikli mavi karenin her kenarında alan dışarı doğru akar, içeri aktığı hiçbir yer yoktur; diverjansın ölçtüğü yayılma budur. Düzlemdeki oklar diverjansa 1 + 1 katkısını verir, üçüncü 1 düzleme dik z yönündeki yayılmadan gelir; böylece $\operatorname{div} V = 3$ olur.

■

Alıştırma 6.20 (Düzlemde İki Diferansiyelin Çarpımı). Öklid düzleminde diferansiyel formlar dx ve dy ile aynı kurallarla kurulur. f ve g, $\mathbb{R}^2$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun.

$$df \wedge dg = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} dx \wedge dy$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Diferansiyeller. Düzlemde Sonuç 5.1'nün karşılığı $df = f_x\,dx + f_y\,dy$ ve $dg = g_x\,dx + g_y\,dy$'dir; burada $f_x = \partial f/\partial x$ gibi kısaltmalar kullanıyoruz.
Dağıtma.

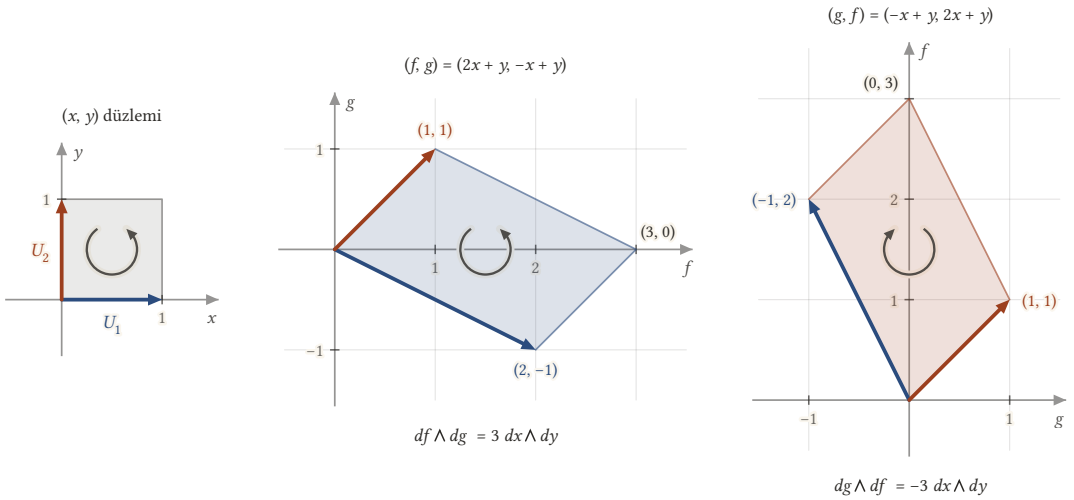
$$df \wedge dg = f_x g_x\,dx \wedge dx + f_x g_y\,dx \wedge dy + f_y g_x\,dy \wedge dx + f_y g_y\,dy \wedge dy.$$

Sadeleştirme. Birinci ve dördüncü terimler sıfırdır; $dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy$. Dolayısıyla

$$df \wedge dg = (f_x g_y - f_y g_x)\,dx \wedge dy,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve parantezdeki ifade tam olarak 2×2 determinanttır. Bu determinanta f ve g'nin **Jacobi determinantı** (Jacobian determinant) denir.
Sayısal örnek. $f = 2x + y$ ve $g = -x + y$ için determinant $2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 3$'tür; $df \wedge dg = 3\,dx \wedge dy$. $(x, y) \mapsto (f, g)$ lineer dönüşümü birim kareyi köşeleri $(0,0)$, $(2,-1)$, $(3,0)$, $(1,1)$ olan, alanı 3 olan bir paralelkenara götürür; U_1'in görüntüsü $(2,-1)$'den U_2'nin görüntüsü $(1,1)$'e saat yönünün tersine dönülür, yani yön korunur.
Sırayı değiştirirsek $dg \wedge df = -3\,dx \wedge dy$ olur. Buna karşılık gelen $(x, y) \mapsto (g, f)$ dönüşümü birim kareyi köşeleri $(0,0)$, $(-1,2)$, $(0,3)$, $(1,1)$ olan paralelkenara götürür. Bu, iki koordinatın yeri değiştiği için öncekinin köşegen doğrusuna göre yansımasıdır: alanı yine 3'tür, ama $(-1,2)$'den $(1,1)$'e saat yönünde dönülür, yani yön ters çevrilmiştir. İşaret alanın büyüklüğünü değil, yönünü kaydeder.



Şekil 6.6: Solda birim kare, ortada ve sağda iki lineer dönüşüm altındaki görüntüleri; üç panel aynı ölçekle çizildiğinden iki paralelkenarın da karenin üç katı alan kapladığı görülür. Mavi oklar U_1'i ve görüntülerini, turuncu oklar U_2'yi ve görüntülerini gösterir. $(f, g) = (2x + y, -x + y)$ altında maviden turuncuya dönüş karedeki gibi saat yönünün tersinedir ve katsayı 3 çıkar; koordinatların yeri değişince paralelkenar yansır, dönüş saat yönüne çevrilir ve katsayı -3 olur. İşaret alanın büyüklüğünü değil, yönünü kaydeder.

■

Alıştırma 6.21 (Jacobi Formülünden Ters Değişme Kuralına). Düzlemdeki diferansiyellenebilir f, g fonksiyonları için

$$df \wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

formülünün her f, g için doğru olduğunu kabul edelim. Bu formülün düzlemdeki ters değişme kuralını gerektirdiğini gösteriniz.

Çözüm.
Amaç. Düzlemde ters değişme kuralı, $i, j \in \{1, 2\}$ için $dx_i \wedge dx_j = -\,dx_j \wedge dx_i$ demektir. $i \neq j$ için bu tek bir eşitliktir: $dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy$. $i = j$ için kural $dx \wedge dx = -\,dx \wedge dx$ ve $dy \wedge dy = -\,dy \wedge dy$ der; bunlar $dx \wedge dx = 0$ ve $dy \wedge dy = 0$ eşitliklerinden hemen çıkar, çünkü $0 = -0$. Dolayısıyla şu üç eşitliği formülden elde etmek yeterlidir: $dy \wedge dx = -\,dx \wedge dy$, $dx \wedge dx = 0$ ve $dy \wedge dy = 0$.
Sıra değiştirme. $f = y$, $g = x$ alalım. $f_x = 0$, $f_y = 1$, $g_x = 1$, $g_y = 0$ olduğundan formül

$$dy \wedge dx = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1)\, dx \wedge dy = -\,dx \wedge dy$$

verir.

Tekrarlar. $f = g = x$ için determinant $1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$, dolayısıyla $dx \wedge dx = 0$. $f = g = y$ için determinant $0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0$, dolayısıyla $dy \wedge dy = 0$.
Genel hâli. Formül daha fazlasını da söyler: bir determinantın iki satırının yeri değişince işareti değişir, bu yüzden her f, g için $dg \wedge df = -\,df \wedge dg$. Temel analizdeki değişken değiştirme formülünde yer alan Jacobi determinantı da bu işaretli büyüklüktür; alan ve hacim hesaplarında onun mutlak değerinin kullanılmasının nedeni budur.
■

Son olarak bölümdeki fikirleri pekiştiren birkaç yeni alıştırma.

Alıştırma 6.22 (Üstel Katsayılı Bir 2-Formun Dış Türevi). Aşağıdaki 2-formun dış türevini $k\,dx \wedge dy \wedge dz$ biçiminde yazdığımızda k katsayısının $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ noktasındaki değerini bulunuz:

$$\eta = xz\,dx \wedge dy + y^2\,dx \wedge dz + e^x\,dy \wedge dz.$$

Çözüm.
Tanım. Katsayıların diferansiyelleri $d(xz) = z\,dx + x\,dz$, $d(y^2) = 2y\,dy$ ve $d(e^x) = e^x\,dx$'tir. Tanım 6.3 gereği

$$d\eta = (z\,dx + x\,dz) \wedge dx \wedge dy + 2y\,dy \wedge dx \wedge dz + e^x\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Tekrarlar ve sıra. Birinci terimde yalnızca $x\,dz \wedge dx \wedge dy = x\,dx \wedge dy \wedge dz$ kalır. İkinci terimde $dy \wedge dx \wedge dz = -\,dx \wedge dy \wedge dz$. Dolayısıyla

$$d\eta = (x - 2y + e^x)\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

Formülle denetim. Katsayı formülü de

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} = x - 2y + e^x$$

verir. Uyuşur.
Noktada. $k = x - 2y + e^x$ olduğundan $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$'da $k = 0 - 2 + 1 = -1$.
■

Alıştırma 6.23 (Gradyanın Rotasyoneli). Her diferansiyellenebilir f fonksiyonu için $\operatorname{rot}\,(\operatorname{grad}\,f) = 0$ olduğunu dış türev yardımıyla gösteriniz.

Çözüm.
Çeviri. Alıştırma 6.17 gereği $\operatorname{grad}\,f$, birinci eşleme altında df 1-formuna karşılık gelir.
Rotasyonel. Alıştırma 6.18'yi $\phi = df$ ve $V = \operatorname{grad}\,f$ ile uygularsak $\operatorname{rot}\,(\operatorname{grad}\,f)$, ikinci eşleme altında $d(df)$ 2-formuna karşılık gelir.
Sonuç. Alıştırma 6.8 gereği $d(df) = 0$. İkinci eşleme birebirdir ve sıfır 2-formu sıfır vektör alanına götürür; dolayısıyla $\operatorname{rot}\,(\operatorname{grad}\,f) = 0$.
Doğrudan denetim. $\operatorname{rot}\,(\operatorname{grad}\,f)$'nin U_1 katsayısı $\partial^2 f/\partial x_2\,\partial x_3 - \partial^2 f/\partial x_3\,\partial x_2 = 0$'dır; öteki iki katsayı da aynı nedenle sıfırdır.
■

Alıştırma 6.24 (Rotasyonelin Diverjansı). Her diferansiyellenebilir V vektör alanı için $\operatorname{div}\,(\operatorname{rot}\,V) = 0$ olduğunu dış türev yardımıyla gösteriniz.

Çözüm.
Çeviri. V'ye birinci eşleme altında karşılık gelen 1-form ϕ olsun. Alıştırma 6.18 gereği $d\phi$, ikinci eşleme altında $\operatorname{rot}\,V$'ye karşılık gelir.
Diverjans. Alıştırma 6.19'yi $\eta = d\phi$ ve $\operatorname{rot}\,V$ alanıyla uygularsak

$$d(d\phi) = \big(\ \operatorname{div}\,(\operatorname{rot}\,V)\ \big)\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. Alıştırma 6.16 gereği sol yan sıfırdır. Standart yazımın tekliği gereği katsayı da sıfırdır: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = 0$.
Sayısal örnek. $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ için $\operatorname{rot} V = 2\,U_3$ ve bunun diverjansı $\partial 2/\partial z = 0$'dır.
■

Alıştırma 6.25 (Determinantla Üçlü Kama Çarpımı). Alıştırma 6.14'deki determinant formülüyle şu çarpımı hesaplayınız:

$$(dx + dy) \wedge (dy + dz) \wedge (dx + dz).$$

Çözüm.
Katsayı matrisi. Üç 1-formun dx, dy, dz katsayıları satır satır $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ ve $(1,0,1)$'dir.
Determinant. Birinci satıra göre açarsak

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(1-0) - 1\cdot(0-1) + 0 = 2.$$

Sonuç. Çarpım $2\,dx \wedge dy \wedge dz$'dir.
Doğrudan denetim. $dy \wedge dy = 0$ olduğundan

$$(dx + dy) \wedge (dy + dz) = dx \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz.$$

Bunu $dx + dz$ ile çarpınca yalnızca $dx \wedge dy \wedge dz$ ve $dy \wedge dz \wedge dx$ terimleri tekrar içermez; ikincisi de $+\,dx \wedge dy \wedge dz$'dir. Toplam $2\,dx \wedge dy \wedge dz$.
■

Bu bölümde fonksiyonları, 1-formları, 2-formları ve 3-formları kama çarpımı ve dış türevle tek bir sisteme bağladık; sıradaki bölümde (Dönüşümler) bakışımızı bir Öklid uzayından ötekine giden fonksiyonlara çevirecek ve türevin bu fonksiyonlar için ne anlama geldiğini soracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Dönüşümler

Önceki bölümde (Diferansiyel Formlar) teğet vektörlere sayı karşılık getiren nesneleri kama çarpımıyla çarpmayı ve dış türevle türevlemeyi öğrendik. Bu bölümde başka bir yöne dönüyoruz. Şimdiye kadar iki tür kuralla çalıştık: $\mathbb{R}^3$ üzerindeki gerçel değerli bir fonksiyon uzayın her noktasına bir sayı verir; bir eğri ise bir aralığın her sayısına uzayın bir noktasını verir. İkisi de aynı kalıbın özel hâlleridir: bir Öklid uzayının noktalarını başka bir Öklid uzayının noktalarına götüren kurallar. Bu kalıba dönüşüm diyeceğiz. Dönüşümler geometride her yerdedir. Düzlemi eğip bükmek, kutupsal ya da silindirik koordinatlara geçmek, bir yüzeyi düzlemin bir parçasıyla parametrelendirmek, hepsi birer dönüşümdür. Bir dönüşümü anlamanın en iyi yolu, türev hesabının her zaman yaptığını yapmaktır: dönüşümü bir noktanın yakınında lineer bir nesneyle yaklaşık olarak temsil etmek. Tek değişkenli bir fonksiyonda bu nesne $\Delta x \mapsto f'(x)\,\Delta x$ lineer fonksiyonuydu. Bir dönüşümde ise teğet vektörleri teğet vektörlere götüren bir lineer dönüşüm olacak: teğet dönüşümü.

Plan şöyle. Önce önceki bölümlerde $\mathbb{R}^3$ için kurduğumuz araçların her boyutta aynen geçerli olduğunu not edeceğiz. Sonra dönüşümü tanımlayıp bir dönüşümün eğrileri nasıl taşıdığına bakacak ve iki örneği ayrıntılı inceleyeceğiz. Ardından teğet dönüşümünü tanımlayacak, koordinat formülünü, lineerliğini ve hızları koruduğunu ispatlayacak, Jacobi matrisine ulaşacağız. Son olarak düzgün dönüşümleri ve difeomorfizmaları tanımlayıp ters fonksiyon teoreminin ne söylediğini örneklerle göreceğiz.

7.1 Öklid n-Uzayında Aynı Araçlar

Bir dönüşümün tanım ve değer kümeleri farklı boyutlarda olabilir: bir eğri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^3$'e, bir fonksiyon $\mathbb{R}^3$'ten $\mathbb{R}$'ye gider. Bu yüzden önceki bölümlerde $\mathbb{R}^3$ için kurduğumuz araçları her boyutta kullanacağız. $\mathbb{R}^n$, n gerçel sayıdan oluşan sıralı n-lilerin kümesidir; noktaları $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ biçiminde yazarız ve doğal koordinat fonksiyonları $x_1, \ldots, x_n$ her noktaya koordinatlarını verir: $x_i(\mathbf{p}) = p_i$.

İyi haber şudur: şimdiye kadarki tanımların hiçbirinde 3 sayısının özel bir rolü yoktu. Üç yerine n yazınca her tanım ve her ispat kelimesi kelimesine taşınır.

$\mathbb{R}^3$'te kurduğumuz	$\mathbb{R}^n$'deki hâli
diferansiyellenebilir fonksiyon	n değişkenli; her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli
teğet vektör $\mathbf{v}_\mathbf{p}$	$\mathbf{v}$ ve $\mathbf{p}$, $\mathbb{R}^n$'nin noktaları; $(v_1, \ldots, v_n)_\mathbf{p}$
teğet uzayı $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$	$T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^n)$, n boyutlu bir vektör uzayı
doğal çatı U_1, U_2, U_3	$U_1, \ldots, U_n$; $U_j(\mathbf{p})$'nin j. koordinatı 1, ötekileri 0
yönlü türev $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$	$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$'nin $t = 0$'daki türevi
eğri $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ve hızı	$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; hızın i. koordinatı $d\alpha_i/dt$

Temel araçlarımız da aynı biçimde genişler. Lemma 3.1 $\mathbb{R}^n$'de

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

biçimini alır; Teorem 3.1 ve Lemma 4.2 de aynen geçerlidir. İspatlarda kullandığımız tek analiz aracı zincir kuralıydı ve zincir kuralı her sayıda girişle çalışır: h, m değişkenli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $g_1, \ldots, g_m$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise $h(g_1, \ldots, g_m)$ yerleştirmesi diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{\partial}{\partial x_j} h(g_1, \ldots, g_m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial x_k}(g_1, \ldots, g_m)\, \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Öklid uzayı bölümünde üç girişli hâlde bu formülü analizden bilinen bir araç olarak kabul etmiş, yerleştirmenin her mertebeden türevlenebilir olduğunu ise ispatlamıştık; o akıl yürütme, terim sayısından başka hiçbir şey değiştirmeden m girişli hâli de kapsar.
Bir sayısal örnek: $\mathbb{R}^2$'de $f = x^2y$, $\mathbf{p} = (1, 2)$ ve $\mathbf{v} = (3, -1)$ olsun. Kısmi türevler $\mathbf{p}$'de $2xy = 4$ ve $x^2 = 1$ olduğundan formül $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 = 11$ verir. Tanımdan da aynı sayı çıkar: $f(1 + 3t, 2 - t) = (1 + 3t)^2(2 - t)$ ifadesinin $t = 0$'daki türevi $2 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 11$'dir.
Düzlemin koordinat fonksiyonlarına çoğu zaman x, y yerine u, v diyeceğiz; bu yalnızca bir ad seçimidir. Karışıklık olmasın diye teğet vektörlerin vektör kısımlarını hep kalın harfle ($\mathbf{v}$) yazacağız; eğik v ise düzlemin ikinci koordinat fonksiyonudur.

7.2 Dönüşüm Nedir?

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. n ve m sayılarına göre bu fonksiyon çok farklı şeyler anlatabilir:

n	m	F ne yapar?	tanıdık ad
3	1	uzayın her noktasına bir sayı verir	gerçel değerli fonksiyon
1	3	her sayıya uzayın bir noktasını verir	eğri
2	2	düzlemi düzleme götürür	düzlemin eğilip bükülmesi, koordinat değişimi
2	3	düzlemi uzaya götürür	yüzey parametrelendirmesi
3	3	uzayı uzaya götürür	uzayın deforme edilmesi, koordinat değişimi

İlk iki satırı biliyoruz. Bu bölümde sonuçları her n ve m için ifade edeceğiz, ama örneklerimiz çoğunlukla son üç satırdan gelecek.
Hepsinin ortak bir yapısı vardır. $F(\mathbf{p})$, $\mathbb{R}^m$'nin bir noktası olduğundan m koordinatı vardır ve bu koordinatların her biri $\mathbf{p}$'ye bağlı bir gerçel sayıdır. Demek ki F'yi vermek, $\mathbb{R}^n$ üzerinde m tane gerçel değerli fonksiyon vermekle aynı şeydir. Bunu eğrilerde zaten görmüştük: bir eğri, üç koordinat fonksiyonuyla verilir.

Tanım 7.1 (Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. $\mathbb{R}^n$'nin her $\mathbf{p}$ noktası için

$$F(\mathbf{p}) = \big(f_1(\mathbf{p}), f_2(\mathbf{p}), \ldots, f_m(\mathbf{p}) \big)$$

eşitliğini sağlayan gerçel değerli $f_1, \ldots, f_m$ fonksiyonlarına F'nin **Öklid koordinat fonksiyonları** denir ve $F = (f_1, \ldots, f_m)$ yazılır. Koordinat fonksiyonlarının hepsi diferansiyellenebilirse F'ye **diferansiyellenebilir** denir. $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye diferansiyellenebilir bir fonksiyona $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir **dönüşüm** (mapping) denir.

Yani bir dönüşüm, $\mathbb{R}^n$'nin her noktasını $\mathbb{R}^m$'nin bir noktasına götüren ve bunu m tane diferansiyellenebilir fonksiyonla, koordinat koordinat yapan bir kuraldır.
Koordinat fonksiyonlarını bileşke olarak da yazabiliriz. $x_1, \ldots, x_m$, $\mathbb{R}^m$'nin doğal koordinat fonksiyonları olsun. $x_i\,\big(\,F(\mathbf{p})\,\big)$ sayısı $F(\mathbf{p})$ noktasının i-inci koordinatıdır ve tanım gereği bu sayı $f_i(\mathbf{p})$'dir. Her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan

$$f_i = x_i \circ F, \qquad i = 1, \ldots, m$$

bulunur. Tersine, $\mathbb{R}^n$ üzerinde verilen herhangi m fonksiyon, $F(\mathbf{p})$'yi koordinatlarıyla tanımlayarak tek bir F belirler. Özel hâlde $m = 1$ için dönüşüm, $\mathbb{R}^n$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur; $n = 1$ için (tanım kümesi bir açık aralık olduğunda) bir eğridir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dönüşümler çoğu zaman koordinat fonksiyonlarını doğal koordinatlarla yazarak verilir. Örneğin $F = (x^2, yz, xy)$ yazımı $f_1 = x^2$, $f_2 = yz$, $f_3 = xy$ demektir. Bu kısa yazımdan noktasal formüle geçmek için her fonksiyonu bir $\mathbf{p}$ noktasında değerlendiririz.

Örnek 7.1 (Noktasal Formül ve Değer Hesabı). $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (x^2, yz, xy)$ dönüşümünün $(1, -2, 0)$ ve $(-3, 1, 3)$ noktalarındaki değerlerini, önce noktasal formüle geçerek bulalım.

Çözüm.
Dönüşüm olması. Koordinat fonksiyonları x^2, yz ve xy polinomlardır; polinomlar diferansiyellenebilir olduğundan F bir dönüşümdür.
Noktasal formül. Tanım gereği her $\mathbf{p}$ için

$$F(\mathbf{p}) = \big(\, x(\mathbf{p})^2,\, y(\mathbf{p})\, z(\mathbf{p}),\, x(\mathbf{p})\, y(\mathbf{p}) \,\big)\,.$$

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ise $x(\mathbf{p}) = p_1$, $y(\mathbf{p}) = p_2$, $z(\mathbf{p}) = p_3$ olduğundan

$$F(p_1, p_2, p_3) = (p_1^2,\, p_2 p_3,\, p_1 p_2)$$

bulunur.
Değerler. $(1, -2, 0)$ için $p_1^2 = 1$, $p_2 p_3 = (-2)\cdot 0 = 0$ ve $p_1 p_2 = -2$ olduğundan $F(1, -2, 0) = (1, 0, -2)$. Aynı biçimde $F(-3, 1, 3) = (9, 3, -3)$.
Bir gözlem. Üç koordinat fonksiyonu da ikinci dereceden terimlerden oluşur. Her koordinatın işaretini değiştirirsek $(-p_1)^2 = p_1^2$, $(-p_2)(-p_3) = p_2 p_3$ ve $(-p_1)(-p_2) = p_1 p_2$ olur; yani her $\mathbf{p}$ için $F(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$. Örneğin $F(3, -1, -3) = (9, 3, -3)$, $F(-3, 1, 3)$ ile aynıdır. F birebir değildir. Bunu birkaç değer hesaplayarak fark etmek şans işidir; bir dönüşümün davranışını sonlu sayıda değerden anlamak ancak dönüşüm çok basitse mümkündür.
■

Örnek 7.2 (Dönüşüm Olmayan Bir Fonksiyon). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = (u, \mid v \mid)$ fonksiyonunun bir dönüşüm olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm.
Birinci koordinat. $f_1 = u$ doğal koordinat fonksiyonudur ve diferansiyellenebilirdir.
İkinci koordinat. $f_2 = \mid v \mid$ fonksiyonunu $(a, 0)$ biçimindeki bir noktada v'ye göre türevlemeye çalışalım. Fark oranı

$$\frac{f_2(a, h) - f_2(a, 0)}{h} = \frac{\mid h \mid}{h}$$

olup $h > 0$ için 1, $h < 0$ için -1'dir. $h \to 0$ iken bu oranın limiti yoktur; $\partial f_2 / \partial v$ bu noktalarda tanımsızdır. Dolayısıyla f_2 diferansiyellenebilir değildir ve F bir dönüşüm değildir.
Geometrik anlam. F, üst yarı düzlemi yerinde bırakıp alt yarı düzlemi u ekseni boyunca katlayarak üst yarının üzerine yapıştırır. F süreklidir; u ekseninin üstünde (u, v), altında $(u, -v)$ gibi çok basit bir formülle verilir. Yine de tek bir kırışık çizgi diferansiyellenebilirliği bozmaya yeter.
Buna karşın $G(u, v) = (u, v^2)$ bir dönüşümdür: o da alt yarı düzlemi üste katlar, ama katlama çizgisinde kırışık yerine yumuşak bir kıvrım vardır. Kıvrımın bedeli ileride göreceğimiz bir özelliktir: v^2'nin türevi $v = 0$'da sıfırdır ve G orada "düzgün" olmayacaktır.
■

7.3 Bir Eğrinin Görüntüsü

Eğri de bir dönüşüm olduğundan, eğrileri dönüşümlerin genel kuramının içinden çıkarmak mümkündü. Biz öteki yolu seçeceğiz. Eğriler iyi tanıdığımız, görece basit nesnelerdir; düzlemden düzleme giden bir dönüşümün ne yaptığını kestirmek ise çoğu zaman zordur. Bu yüzden dönüşümleri incelerken her adımda eğrilerden yararlanacağız: bir dönüşümün ne yaptığını görmenin en somut yolu, onu hareket eden bir noktaya uygulamaktır.
$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : I \to \mathbb{R}^n$ bir eğri ve $F = (f_1, \ldots, f_m)$ bir dönüşüm olsun. $t \mapsto F(\alpha(t))$ bileşkesinin i-inci koordinatı $f_i\,\big(\,\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\,\big)$'dir. Bu, diferansiyellenebilir f_i fonksiyonuna türevlenebilir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonlarının yerleştirilmesidir ve zincir kuralı gereği her mertebeden türevlenebilir. Demek ki bileşke yine bir eğridir.

Tanım 7.2 (Bir Eğrinin Görüntüsü). $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ bir eğri ve $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm olsun. Her $t \in I$ için $\beta(t) = F(\alpha(t))$ kuralıyla tanımlanan

$$\beta = F(\alpha) : I \to \mathbb{R}^m$$

eğrisine α'nın F altındaki **görüntüsü** (image of a curve) denir.

Yani α boyunca hareket eden noktayı her an F ile taşırsak $\mathbb{R}^m$'de hareket eden yeni bir nokta elde ederiz; β bu yeni noktanın hareketidir.
Koordinatlarla yazarsak $\beta = \big(\, f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha) \,\big)$ olur. Aynı açık aralıkta tanımlı olduklarından α ve β aynı saatle çalışır: t anında α nerede ise β o noktanın F altındaki görüntüsündedir.

Örnek 7.3 (Bir Doğrunun Parabole Gitmesi). $F = (x^2, yz, xy)$ dönüşümü ve $\alpha(t) = (t, 1, t)$ doğrusu verilsin. α'nın F altındaki görüntüsünü bulalım.

Çözüm.
Görüntü eğrisi. $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ için $F(\mathbf{p}) = (p_1^2, p_2p_3, p_1p_2)$ formülüne $p_1 = t$, $p_2 = 1$, $p_3 = t$ koyarsak

$$\beta(t) = F(t, 1, t) = (t^2, t, t)$$

bulunur.
Birkaç an. Aşağıdaki tabloda aynı anlardaki noktalar yan yana durur.

t	-1	0	1	2
$\alpha(t)$	$(-1, 1, -1)$	$(0, 1, 0)$	$(1, 1, 1)$	$(2, 1, 2)$
$\beta(t)$	$(1, -1, -1)$	$(0, 0, 0)$	$(1, 1, 1)$	$(4, 2, 2)$

Rota. $\beta(t)$'nin ikinci ve üçüncü koordinatları her an eşittir, dolayısıyla β tamamen $y = z$ düzleminde kalır; bu düzlemde birinci koordinat ikincinin karesidir ($x = y^2$). β'nın rotası bir paraboldür. Bir dönüşüm doğruları doğrulara götürmek zorunda değildir.
Hız. $\beta'(t)$'nin vektör kısmı $(2t, 1, 1)$'dir ve hiçbir t için sıfır olmaz; hem α hem β düzgün eğrilerdir.
■

Örnek 7.4 (Hareket Eden Noktanın Görüntüsü Durabilir). $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $P = (x, y)$ izdüşüm dönüşümü ve $\alpha(t) = (1, 2, t)$ dikey doğrusu verilsin. α düzgün bir eğri iken görüntüsünün düzgün olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm.
Dönüşüm. $P(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2)$ olduğundan P her noktayı xy düzlemine dik olarak indirir; koordinat fonksiyonları doğal koordinat fonksiyonlarıdır ve diferansiyellenebilir.
Görüntü. $\beta(t) = P(1, 2, t) = (1, 2)$ her t için aynı noktadır. α'nın hız vektörünün vektör kısmı $(0, 0, 1)$ olup hiçbir an sıfır değildir; oysa β sabit bir eğridir ve bütün hız vektörleri sıfırdır. Düzgün bir eğrinin görüntüsü düzgün olmayabilir.
Karşılaştırma. Aynı P altında $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisinin görüntüsü $(\cos t, \sin t)$ birim çemberidir ve bu eğri düzgündür: vektör kısmı $(-\sin t, \cos t)$ hiç sıfır olmaz. Fark, hareketin yönündedir. Dikey doğru, P'nin tamamen "ezdiği" doğrultuda ilerler; helisin hareketinin ise ezilmeyen yatay bir bileşeni vardır. Bir dönüşümün hangi doğrultuları ezdiğini ölçen araç, birazdan tanımlayacağımız teğet dönüşümüdür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

7.4 İki Örnek Dönüşüm

Aşağıdaki iki örnek iki uç durumu gösterir. Birincisi o kadar basittir ki birkaç değeri onu tamamen belirler. İkincisinin ne yaptığını ise ancak eğrilerin nasıl taşındığına bakarak görebiliriz.

Örnek 7.5 (Uzayın Lineer Bir Dönüşümü). $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (x - y, x + y, 2z)$ olsun. Bu dönüşümün, birim noktalardaki üç değeriyle tamamen belirlendiğini görelim.

Çözüm.
Noktasal formül. Her p_1, p_2, p_3 için

$$F(p_1, p_2, p_3) = (p_1 - p_2, p_1 + p_2, 2p_3).$$

Lineerlik. $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ iki nokta ve a, b iki sayı olsun. $a\mathbf{p} + b\mathbf{q}$'nun i-inci koordinatı $ap_i + bq_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} F(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) &= \big((ap_1 + bq_1) - (ap_2 + bq_2), \\ &\qquad (ap_1 + bq_1) + (ap_2 + bq_2), 2(ap_3 + bq_3) \big) \\ &= a\,(p_1 - p_2, p_1 + p_2, 2p_3) + b\,(q_1 - q_2, q_1 + q_2, 2q_3) \\ &= a\,F(\mathbf{p}) + b\,F(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

İkinci eşitlikte her koordinatta a içeren terimleri ve b içeren terimleri ayrı ayrı topladık. F, $\mathbb{R}^3$'ten $\mathbb{R}^3$'e bir lineer dönüşümdür.
Birim noktalar. $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$ ve $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ **birim noktalarında** formül

$$F(\mathbf{u}_1) = (1,1,0), \qquad F(\mathbf{u}_2) = (-1,1,0), \qquad F(\mathbf{u}_3) = (0,0,2)$$

verir.
Belirlenme. Her nokta $\mathbf{p} = p_1\mathbf{u}_1 + p_2\mathbf{u}_2 + p_3\mathbf{u}_3$ biçiminde yazılır. Lineerlik (iki kez uygulanarak) şunu verir:

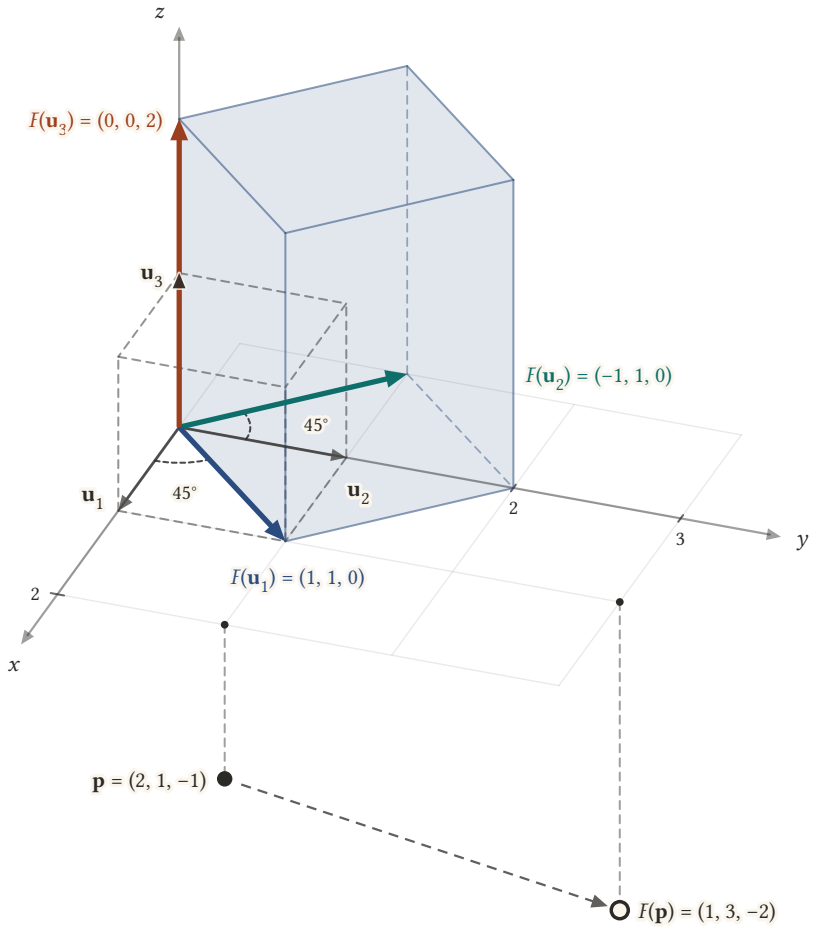
$$F(\mathbf{p}) = p_1\,F(\mathbf{u}_1) + p_2\,F(\mathbf{u}_2) + p_3\,F(\mathbf{u}_3).$$

Sağ yan yalnızca üç değeri kullanır. Birim noktalarda aynı üç değeri alan başka bir lineer dönüşüm de aynı formüle uyacağından F'ye eşittir. Aynı akıl yürütme her lineer dönüşüm için geçerlidir: bir lineer dönüşümü bilmek için bir tabanın elemanlarına ne yaptığını bilmek yeter.
Sayısal denetim. $\mathbf{p} = (2,1,-1)$ için formül

$$F(\mathbf{p}) = 2\,(1,1,0) + (-1,1,0) - (0,0,2) = (1,3,-2)$$

verir; noktasal formülden de $(2-1, 2+1, -2) = (1,3,-2)$ çıkar.
Geometrik anlam. $F(\mathbf{u}_1) = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_1$'in z ekseni çevresinde 45 derece döndürülüp $\sqrt{2}$ katına uzatılmış hâlidir; $F(\mathbf{u}_2) = (-1,1,0)$ da $\mathbf{u}_2$'ye aynı işlemin uygulanmasıdır. $F(\mathbf{u}_3) = (0,0,2)$ ise düşey yönü iki katına çıkarır. Dolayısıyla F, uzayı z ekseni çevresinde 45 derece döndürür, yatay yönlerde $\sqrt{2}$, düşey yönde 2 kat uzatır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.1: $F = (x - y,\ x + y,\ 2z)$ lineer dönüşümü, ince gri oklarla gösterilen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ birim noktalarını sırasıyla $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ ve $(0, 0, 2)$ noktalarına götürür. İki yatay ok z ekseni çevresinde 45 derece döner ve $\sqrt{2}$ katına uzar, düşey ok ise iki katına çıkar; bu yüzden kesikli birim küp, tabanı 45 derece dönmüş bir kare ve yüksekliği 2 olan mavi kutuya gider. Başka her noktanın görüntüsü bu üç değerden okunur: $\mathbf{p} = (2, 1, -1)$ için $F(\mathbf{p}) = 2F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) - F(\mathbf{u}_3) = (1, 3, -2)$.

■

Örnek 7.6 (Düzlemi Kendi Çevresinde İki Kez Saran Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = (u^2 - v^2,\ 2uv)$ olsun; burada u ve v düzlemin koordinat fonksiyonlarıdır. $r > 0$ yarıçaplı, merkezi başlangıç noktasında olan çemberi bir kez dolaşan $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ eğrisinin görüntüsünü bularak F'nin düzlemi nasıl sardığını anlayalım.

Çözüm.
Görüntü eğrisi. $0 \le t \le 2\pi$ için α, çemberi saat yönünün tersine bir kez dolaşır. Görüntüsü

$$\begin{aligned}\beta(t) = F(\alpha(t)) &= F(r\cos t, r\sin t)\\ &= \left(r^2\cos^2 t - r^2\sin^2 t,\ 2r^2\cos t\sin t \right)\end{aligned}$$

olur.
Trigonometri. $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ ve $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ özdeşlikleri bu ifadeyi sadeleştirir:

$$\beta(t) = (r^2\cos 2t,\ r^2\sin 2t).$$

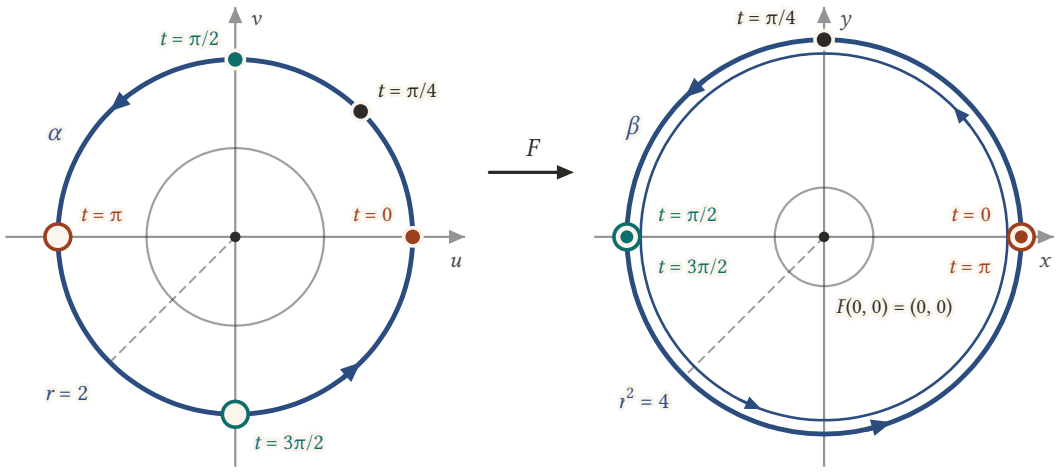
 CC BY-NC-SA 4.0

Yorum. $\beta(t)$ noktası başlangıç noktasına r^2 uzaklıktadır ve açısı $2t$'dir. t, 0'dan 2π'ye giderken $2t$, 0'dan 4π'ye gider: β, r^2 yarıçaplı çemberi saat yönünün tersine **iki kez** dolaşır. $r = 2$ için birkaç an:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\alpha(t)$	$(2,0)$	$(\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(0,2)$	$(-2,0)$	$(0,-2)$
$\beta(t)$	$(4,0)$	$(0,4)$	$(-4,0)$	$(4,0)$	$(-4,0)$

Çeyrek tur, görüntüde yarım tura dönüşür; $t = \pi$'de α çemberin yarısını dolaşmışken β başladığı yere dönmüştür.

Bütün düzlem. $F(0,0) = (0,0)$ olduğundan başlangıç noktası yerinde kalır; öteki her nokta, merkezi başlangıç noktasında olan tek bir çemberin üzerindedir. Hesabımız her $r > 0$ için geçerli olduğundan F'nin bütün düzleme ne yaptığını görmüş oluyoruz: yarıçapı r olan çember, yarıçapı r^2 olan çemberin üzerine iki tur hâlinde yerleşir. Düzlem, başlangıç noktası sabit kalmak üzere, hiçbir yerde yırtılmadan kendi üzerine iki kat sarılır. Birim çemberin içindeki çemberler küçülür ($r^2 < r$), dışındakiler büyür. Tablodaki t ve $t + \pi$ anları, yani birbirinin tam karşısındaki $\mathbf{p}$ ve $-\mathbf{p}$ noktaları, aynı noktaya gider: $F(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$.



Şekil 7.2: Solda $r = 2$ yarıçaplı çemberi saat yönünün tersine bir kez dolaşan $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ eğrisi, sağda onun $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ altındaki görüntüsü $\beta(t) = (4\cos 2t, 4\sin 2t)$ görülüyor. β ise yarıçapı $r^2 = 4$ olan çemberi iki kez dolaşır; ikinci tur, seçilebilsin diye kalın çemberin hemen içine ince çizgiyle çizilmiştir. Aynı renkteki dolu nokta t, halka $t + \pi$ anını gösterir: bu iki an birbirinin tam karşısındaki $\mathbf{p}$ ve $-\mathbf{p}$ noktalarını verir ve $F(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$ olduğundan sağda aynı noktaya düşer. Gri birim çember kendi üzerine gider, başlangıç noktası ise yerinde kalır.

■

Karmaşık sayılarla bakış

Düzlemin (u, v) noktasını $z = u + iv$ karmaşık sayısı olarak düşünelim. $z^2 = u^2 - v^2 + 2uv\,i$ olduğundan F, $z \mapsto z^2$ kare alma işlemidir. Kutupsal yazımda $z = r(\cos t + i \sin t)$ ise $z^2 = r^2(\cos 2t + i \sin 2t)$ olur: kare almak, uzunluğun karesini alır ve açıyı iki katına çıkarır. Örnekte bulduğumuz her şey bu iki kuralın sonucudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

7.5 Lineer Yaklaşım ve Teğet Dönüşümü

Türev almanın özü, karmaşık bir nesnenin yerine, bir noktanın çok yakınında onunla neredeyse aynı davranan lineer bir nesne koymaktır. Bunun ilk örneğini tek değişkenli analizden biliyoruz: türevlenebilir bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için x'in yakınında

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

yaklaşımı geçerlidir ve sağdaki $\Delta x \mapsto f'(x)\,\Delta x$ lineer fonksiyonu, grafiğin x'teki teğet doğrusunu verir. Hata, Δx küçüldükçe Δx'in kendisinden çok daha hızlı küçülür. Amacımız, bir $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümü için $\mathbf{p}$ noktasının yakınında aynı işi yapan bir lineer yaklaşım kurmaktır.
Önce bu yaklaşımın nerede yaşayacağını soralım. Tek değişkenli hâlde Δx, x'ten ayrılışı ölçen bir sayıdır. Birçok değişkende $\mathbf{p}$'den ayrılış bir yer değiştirme vektörüdür, yani $\mathbf{p}$'de uygulanan bir teğet vektör; $F(\mathbf{p})$'den ayrılış da $F(\mathbf{p})$'de uygulanan bir teğet vektördür. Demek ki aradığımız lineer yaklaşım, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$'den $T_{F(\mathbf{p})}(\mathbb{R}^m)$'ye gitmelidir.
Onu nasıl kuracağımızı eğriler söyler. $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{p}$'den çıkan $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrularıyla doludur: her $\mathbf{q}$ noktası, $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ için bu doğrunun $t = 1$ anındaki noktasıdır. Bu doğruların görüntüleri olan $\beta(t) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ eğrileri de $F(\mathbf{p})$'den çıkar ve F'nin $\mathbf{p}$ yakınında yaptığı her şeyi taşır. İlk mertebede bir doğruyu başlangıç hızı $\alpha'(0) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ temsil eder; görüntüsünü de başlangıç hızı $\beta'(0)$. Bu yüzden F'nin $\mathbf{p}$ yakınındaki lineer yaklaşımını şöyle kuracağız: her doğrunun $\alpha'(0)$ başlangıç hızına, o doğrunun görüntü eğrisinin $\beta'(0)$ başlangıç hızını karşılık getireceğiz.

Tanım 7.3 (Teğet Dönüşümü). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm ve $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$, $\mathbb{R}^n$'ye $\mathbf{p}$ noktasında bir teğet vektör olsun. $t \mapsto F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ eğrisinin $t = 0$ anındaki hız vektörünü $F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$ ile gösteririz. $\mathbb{R}^n$'ye teğet her vektörü böylece $\mathbb{R}^m$'ye teğet bir vektöre götüren F_* fonksiyonuna F'nin **teğet dönüşümü** (tangent map) denir.

Yani $F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$, $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ hızıyla yola çıkan noktayı her an F ile taşıdığımızda, taşınan noktanın ilk andaki hızıdır.
Tanımdaki eğri, $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusunun F altındaki görüntüsüdür ve bütün t sayılarında tanımlıdır. Hız vektörü $t = 0$ anındaki noktada, yani $F(\mathbf{p})$'de uygulanır. $F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$'yi "$F$'yi $\mathbf{v}$'ye uygulamak" diye okumamak gerekir: F genellikle lineer değildir ve $F(\mathbf{v})$ ile hiçbir ilişkisi olmayabilir.

Örnek 7.7 (Teğet Dönüşümünü Tanımdan Hesaplamak). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = (u + v, uv)$ olsun. $\mathbf{p} = (1, 2)$ ve $\mathbf{v} = (1, 1)$ için $F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$'yi tanımdan bulalım.

Çözüm.
Doğru. $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 2 + t)$.
Görüntü eğrisi. F'yi bu noktaya uygularsak

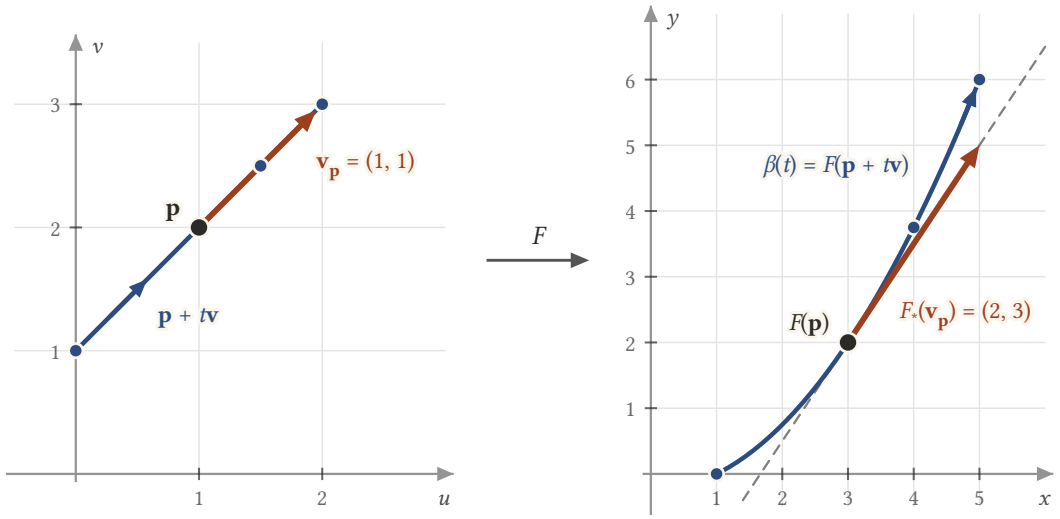
$$\beta(t) = F(1 + t, 2 + t) = \big(\, 3 + 2t,\, (1 + t)(2 + t) \,\big) = (3 + 2t,\, 2 + 3t + t^2).$$

Başlangıç hızı. Koordinatların türevleri 2 ve $3 + 2t$'dir; $t = 0$'da 2 ve 3 olur. $\beta(0) = (3, 2) = F(\mathbf{p})$ olduğundan

$$F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (2, 3)_{(3,2)}.$$

Yaklaşım olarak anlamı. β'nın rotası bir paraboldür ve $(2, 3)$ onun $(3, 2)$'deki teğet doğrultusudur. $t = 0{,}1$ anında gerçek nokta $\beta(0{,}1) = (3{,}2;\, 2{,}31)$ iken lineer yaklaşım $(3, 2) + 0{,}1 \cdot (2, 3) = (3{,}2;\, 2{,}3)$ verir. Aradaki fark $t^2 = 0{,}01$'dir; t yarıya inerse dörtte birine iner.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.3: Solda $\mathbf{p} = (1, 2)$ noktasından $\mathbf{v} = (1, 1)$ hızıyla geçen $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu ve $\mathbf{v_p}$ oku; sağda bu doğrunun $F(u, v) = (u + v, uv)$ altındaki görüntüsü $\beta(t) = (3 + 2t, 2 + 3t + t^2)$ parabolü ve onun $F(\mathbf{p}) = (3, 2)$ noktasındaki başlangıç hızı $F_*(\mathbf{v_p}) = (2, 3)$. Küçük mavi noktalar iki panelde de $t = -1$, $t = 0{,}5$ ve $t = 1$ anlarıdır. Solda okun ucu $t = 1$ noktasına tam oturur; sağda ise ok parabolün kesikli teğet doğrusu üzerinde kalıp (5, 5)'te biter ve $\beta(1) = (5, 6)$ ile arasındaki fark $t^2 = 1$ olur.

■

Örnek 7.8 (Ötelemenin Teğet Dönüşümü). $\mathbf{a}$, $\mathbb{R}^n$'nin sabit bir noktası ve $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, T(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{a}$ öteleme dönüşümü olsun. T_*'ın teğet vektörlere ne yaptığını bulalım.

Çözüm.
Dönüşüm olması. T'nin i-inci koordinat fonksiyonu $x_i + a_i$'dir; diferansiyellenebilirdir.
Görüntü eğrisi. $\mathbf{p}$'deki bir $\mathbf{v_p}$ için

$$T(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (\mathbf{p} + \mathbf{a}) + t\mathbf{v}.$$

Bu, $\mathbf{p} + \mathbf{a}$ noktasından geçen ve $\mathbf{v}$ doğrultusundaki doğrudur. i-inci koordinatı $p_i + a_i + tv_i$ olup türevi v_i'dir.
Sonuç. $T_*(\mathbf{v_p}) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}+\mathbf{a}}$. Öteleme okları paralel olarak taşır: vektör kısmı değişmez, yalnızca uygulama noktası $\mathbf{a}$ kadar kayar. Örneğin $\mathbb{R}^2$'de $\mathbf{a} = (3, -1)$ için $T_*\left((2, 5)_{(1,1)}\right) = (2, 5)_{(4,0)}$.
Karşıt uç olarak her noktayı sabit bir $\mathbf{q}$'ya götüren C dönüşümünü düşünelim. $C(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = \mathbf{q}$ sabit olduğundan her $\mathbf{v_p}$ için $C_*(\mathbf{v_p}) = \mathbf{0_q}$ olur: sabit dönüşüm bütün hareketi ezer. Öteleme hiçbir bilgiyi kaybetmez, sabit dönüşüm hepsini kaybeder; genel bir dönüşüm bu ikisi arasında bir yerdedir ve teğet dönüşümü bunu nokta nokta ölçer.
■

Tanım kavramsal olarak açıktır, ama her hesapta bir eğri yazıp türev almak zahmetlidir. Aşağıdaki önerme, F_*'ı koordinat fonksiyonlarının yönlü türevleriyle açıkça verir.

Önerme 7.1 (Teğet Dönüşümünün Koordinat Formülü). *$F = (f_1, \ldots, f_m)$, $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir dönüşüm ve $\mathbf{v_p}$, $\mathbb{R}^n$'ye bir teğet vektör olsun. O zaman*

$$F_*(\mathbf{v_p}) = \left(\mathbf{v_p}[f_1], \ldots, \mathbf{v_p}[f_m]\right)_{F(\mathbf{p})}.$$

İspat.
Eğrinin koordinatları. *$\beta(t) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ olsun. $F = (f_1, \ldots, f_m)$ olduğundan*

$$\beta(t) = \big(\ f_1(\mathbf{p}+t\mathbf{v}), \ldots, f_m(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\ \big);$$

yani β'nın i-inci koordinat fonksiyonu $\beta_i(t) = f_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$'dir.
Hız. *Hız vektörünün tanımı (Tanım 4.2, m koordinatla) gereği $\beta'(0)$, $\beta(0) = F(\mathbf{p})$ noktasında uygulanır ve i-inci koordinatı*

$$\frac{d\beta_i}{dt}(0) = \frac{d}{dt}\ \big(\ f_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\ \big)|_{t=0}$$

sayısıdır.
Yönlü türev. *Bu sayı, Tanım 3.1 gereği tam olarak $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f_i]$'dir. Tanım gereği $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \beta'(0)$ olduğundan önerme ispatlanmış olur.*
■

İspatın özü: $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$'nin her koordinatı, F'nin ilgili koordinat fonksiyonunun $\mathbf{v}_\mathbf{p}$'ye göre türevidir. Bu türevleri de Lemma 3.1 ile kısmi türevlerden hesaplarız; hiçbir eğri yazmaya gerek kalmaz.

Örnek 7.9 (Formülle Aynı Sonuç). $F(u,v) = (u+v, uv)$ olsun. $\mathbb{R}^2$'nin her $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ noktasındaki her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ için $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$'yi koordinat formülüyle bulalım.

Çözüm.
Kısmi türevler. $f_1 = u+v$ için $\partial f_1/\partial u = 1$ ve $\partial f_1/\partial v = 1$; $f_2 = uv$ için $\partial f_2/\partial u = v$ ve $\partial f_2/\partial v = u$.
Yönlü türevler. $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ için Lemma 3.1

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f_1] = v_1 + v_2, \qquad \mathbf{v}_\mathbf{p}[f_2] = p_2 v_1 + p_1 v_2$$

verir.
Genel formül. $F(\mathbf{p}) = (p_1+p_2, p_1p_2)$ olduğundan önerme gereği

$$F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = (v_1+v_2, p_2v_1+p_1v_2)_{(p_1+p_2,\,p_1p_2)}.$$

Denetim. $\mathbf{p} = (1,2)$ ve $\mathbf{v} = (1,1)$ için $v_1+v_2 = 2$ ve $2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$ bulunur; uygulama noktası $(3,2)$'dir. Sonuç $(2,3)_{(3,2)}$, tanımdan bulduğumuzla aynıdır. Aynı noktada $\mathbf{w} = (2,-1)$ için formül hemen $F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p}) = (1,3)_{(3,2)}$ verir; tanımla bunun için yeni bir parabol yazıp türevlemek gerekirdi.
■

7.6 Bir Noktadaki Teğet Dönüşümü

Bir $\mathbf{p}$ noktası sabitleyelim. Tanım gereği F_*, $\mathbf{p}$'deki teğet vektörleri $F(\mathbf{p})$'deki teğet vektörlere götürür. Bu yüzden her $\mathbf{p}$ için F_*'dan

$$F_{*\mathbf{p}} : T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^n) \to T_{F(\mathbf{p})}(\mathbb{R}^m)$$

fonksiyonu elde edilir; buna F'nin **$\mathbf{p}$ noktasındaki teğet dönüşümü** denir. Durum temel hesaptakine benzer: türevlenebilir bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevi f' bir fonksiyondur, her t noktasındaki değeri $f'(t)$ ise tek bir sayıdır. F_* bütün teğet vektörler üzerinde tanımlı tek bir fonksiyondur; $F_{*\mathbf{p}}$ onun tek bir teğet uzayına kısıtlanışıdır.

Sonuç 7.1 (Teğet Dönüşümü Her Noktada Lineerdir). *$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^n$'nin her $\mathbf{p}$ noktasında $F_{*\mathbf{p}}$ lineer bir dönüşümdür: $\mathbf{p}$'deki her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$, $\mathbf{w}_\mathbf{p}$ teğet vektörleri ve her a, b sayıları için*

$$F_*(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p}) = a\,F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) + b\,F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p}).$$

İspat.
$F = (f_1, \ldots, f_m)$ olsun ve iki yanın koordinatlarını karşılaştıralım.
Sol yan. *Önerme 7.1 gereği sol yan $F(\mathbf{p})$'de uygulanır ve i-inci koordinatı $(a\mathbf{v}_\mathbf{p} + b\mathbf{w}_\mathbf{p})[f_i]$'dir. Teorem 3.1'nin birinci özelliği gereği bu sayı*

$$a\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f_i] + b\,\mathbf{w}_\mathbf{p}[f_i]$$

 CC BY-NC-SA 4.0

sayısına eşittir.
Sağ yan. $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$ *ve* $F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p})$ *ikisi de* $F(\mathbf{p})$*'de uygulanır; bu yüzden* $T_{F(\mathbf{p})}(\mathbb{R}^m)$ *içinde toplanabilirler. Teğet uzayındaki işlemler vektör kısımlarında koordinat koordinat yapıldığından sağ yanın* i*-inci koordinatı da* $a\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[f_i] + b\,\mathbf{w}_\mathbf{p}[f_i]$*'dir.*
Sonuç. *İki yan aynı noktada uygulanır ve bütün* m *koordinatları eşittir; öyleyse iki teğet vektör eşittir.*
■

Sonucun tanımdan doğrudan görülmediğine dikkat edelim: $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$, $F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p})$ ve $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p} + \mathbf{w}_\mathbf{p})$ üç ayrı doğrunun üç ayrı görüntü eğrisinden gelir ve bu eğriler arasında basit bir ilişki yoktur. Lineerlik, koordinat formülünün ve yönlü türevin lineerliğinin bir armağanıdır.

Örnek 7.10 (Lineer Olmayan Dönüşümün Lineer Teğet Dönüşümü). $F(u, v) = (u + v, uv)$ ve $\mathbf{p} = (1, 2)$ olsun. F'nin kendisi lineer olmadığı hâlde $F_{*\mathbf{p}}$'nin lineerliğini sayılarla görelim.

Çözüm.
F *lineer değildir.* Lineer olsaydı $F(2, 4) = 2\,F(1, 2)$ olurdu. Oysa $2\,F(1, 2) = (6, 4)$ iken $F(2, 4) = (6, 8)$'dir.
Teğet dönüşümü. Örnek 7.9'ndeki formül bu noktada

$$F_*\left(\,(v_1, v_2)_\mathbf{p}\,\right) = (v_1 + v_2,\, 2v_1 + v_2)_{(3,2)}$$

biçimini alır. Sağ yan v_1 ve v_2'nin sabit terimsiz birinci dereceden ifadeleridir; bu da lineerliğin ta kendisidir.
Sayısal denetim. $\mathbf{v} = (1, 1)$ ve $\mathbf{w} = (2, -1)$ için $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = (2, 3)$ ve $F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p}) = (1, 3)$ (ikisi de $(3, 2)$'de). $\mathbf{v} + 2\mathbf{w} = (5, -1)$ için formül $(5 - 1,\, 10 - 1) = (4, 9)$ verir; öte yandan $(2, 3) + 2 \cdot (1, 3) = (4, 9)$. İki sonuç aynıdır.
■

> **i** En iyi lineer yaklaşım
>
> $F_{*\mathbf{p}}$, F'yi $\mathbf{p}$ yakınında en iyi temsil eden lineer dönüşümdür. Kesin anlamı şudur: $F(\mathbf{p} + \mathbf{v})$ noktası ile $F(\mathbf{p})$'ye $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$'nin vektör kısmı eklenerek bulunan nokta arasındaki uzaklık, $\mathbf{v}$ küçüldükçe $\mathbf{v}$'nin uzunluğundan çok daha hızlı sıfıra gider. $F(u, v) = (u + v, uv)$ için bu fark açıkça hesaplanabilir:
>
> $$F(\mathbf{p} + \mathbf{v}) - F(\mathbf{p}) = (v_1 + v_2,\, p_2 v_1 + p_1 v_2 + v_1 v_2).$$
>
> İlk iki terim teğet dönüşümünün verdiği vektördür; geriye kalan $(0, v_1 v_2)$ ikinci mertebedendir. $\mathbf{v} = (0{,}1;\, 0{,}1)$ için hata $0{,}01$, $\mathbf{v} = (0{,}05;\, 0{,}05)$ için $0{,}0025$'tir. Bu yaklaşımın kesin kuramı ileri analizde kurulur; bölümün sonunda ifade edeceğimiz ters fonksiyon teoreminin ispatı da ona dayanır.

Önermenin bir başka sonucu, dönüşümlerin eğrilerin hızlarını korumasıdır: bir eğrinin görüntüsünün hızını bulmak için ya görüntü eğrisini türevleriz ya da özgün eğrinin hızını F_* ile taşırız. İki yol aynı sonucu verir.

Sonuç 7.2 (Dönüşümler Hızları Korur). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *bir dönüşüm,* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *bir eğri ve* $\beta = F(\alpha)$*,* α*'nın* F *altındaki görüntüsü olsun. Her* $t \in I$ *için*

$$\beta'(t) = F_*\left(\,\alpha'(t)\,\right).$$

İspat.
$F = (f_1, \ldots, f_m)$ *olsun.*
Görüntünün koordinatları. $\beta = F(\alpha) = \left(\,f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\,\right)$*; yani* β*'nın* i*-inci koordinat fonksiyonu* $t \mapsto f_i(\alpha(t))$*'dir.*
Sağ yan. $\alpha'(t)$*,* $\alpha(t)$ *noktasında uygulanan bir teğet vektördür. Önerme 7.1 gereği*

$$F_*\left(\,\alpha'(t)\,\right) = \left(\,\alpha'(t)[f_1], \ldots, \alpha'(t)[f_m]\right)_{F(\alpha(t))}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Eğri boyunca türev. *Lemma 4.2 ($\mathbb{R}^n$'de) her i için $\alpha'(t)[f_i] = \dfrac{d\ (\ f_i(\alpha)\ )}{dt}(t)$ verir. Yerine koyarsak*

$$F_*\ (\ \alpha'(t)\ ) = \left(\frac{d\ (\ f_1(\alpha)\ )}{dt}(t), \ldots, \frac{d\ (\ f_m(\alpha)\ )}{dt}(t)\right)_{\beta(t)}$$

bulunur; burada $F(\alpha(t)) = \beta(t)$ yazdık.
Sonuç. *Sağdaki teğet vektör, koordinatları β'nın koordinat fonksiyonlarının türevleri olan ve $\beta(t)$'de uygulanan vektördür; Tanım 4.2 gereği bu $\beta'(t)$'dir.*
■

Teğet dönüşümünün tanımı, bu sonucun $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu ve $t = 0$ için özel hâlidir. Sonuç, doğru yerine herhangi bir eğri alınabileceğini söyler; bu gözlemi Alıştırma 7.14'de kullanacağız.

Örnek 7.11 (Helisin Görüntüsünün Hızı). $F = (x^2, yz, xy)$ ve $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi verilsin. $\beta = F(\alpha)$ görüntüsünün $t = \pi/2$ anındaki hızını iki yoldan bulalım.

Çözüm.
Birinci yol: görüntüyü türevleyerek. Noktasal formül $F(p_1, p_2, p_3) = (p_1^2, p_2p_3, p_1p_2)$ olduğundan

$$\beta(t) = (\cos^2 t, t\sin t, \cos t \sin t).$$

Koordinatların türevleri $-2\cos t \sin t$, $\sin t + t\cos t$ ve $\cos^2 t - \sin^2 t$'dir. $t = \pi/2$'de $\cos t = 0$ ve $\sin t = 1$ olduğundan $\beta'(\pi/2)$'nin vektör kısmı $(0, 1, -1)$'dir; uygulama noktası $\beta(\pi/2) = (0, \pi/2, 0)$'dır.
İkinci yol: teğet dönüşümüyle. $\alpha(\pi/2) = (0, 1, \pi/2)$ ve $\alpha'(t)$'nin vektör kısmı $(-\sin t, \cos t, 1)$ olduğundan $\alpha'(\pi/2) = (-1, 0, 1)_{(0,1,\pi/2)}$. Kısmi türevleri bu noktada hesaplayalım:

fonksiyon	$\partial/\partial x$	$\partial/\partial y$	$\partial/\partial z$	$\alpha'(\pi/2)[f_i]$
$f_1 = x^2$	$2x = 0$	0	0	0
$f_2 = yz$	0	$z = \pi/2$	$y = 1$	$0 + 0 + 1 = 1$
$f_3 = xy$	$y = 1$	$x = 0$	0	$-1 + 0 + 0 = -1$

Son sütun, Lemma 3.1 ile $(-1, 0, 1)$ koordinatlarını kısmi türevlerle tartıp toplamaktan gelir. Önerme gereği $F_*(\alpha'(\pi/2)) = (0, 1, -1)_{F(0,1,\pi/2)}$ ve $F(0, 1, \pi/2) = (0, \pi/2, 0)$.
Karşılaştırma. İki yol aynı teğet vektörü verir, Sonuç 7.2'un söylediği gibi. İkinci yolda görüntü eğrisini hiç yazmadık; yalnızca α'nın o andaki konumunu ve hızını, F'nin de kısmi türevlerini kullandık.
■

7.7 Jacobi Matrisi

Lineer bir dönüşüm, bir tabanın elemanlarına ne yaptığıyla belirlenir. $F_{*\mathbf{p}}$ lineer olduğundan, onu $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$'nin doğal tabanında hesaplamak yeter. $\mathbb{R}^n$'nin doğal çatısını $U_1, \ldots, U_n$ ile, $\mathbb{R}^m$'ninkini karışmasın diye $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_m$ ile gösterelim.

Sonuç 7.3 (Doğal Çatının Görüntüsü). *$F = (f_1, \ldots, f_m)$, $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir dönüşüm olsun. Her $\mathbf{p}$ noktası ve her $1 \le j \le n$ için*

$$F_*\ (\ U_j(\mathbf{p})\ ) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\, \overline{U}_i\ (\ F(\mathbf{p})\ ).$$

İspat.
Yönlü türevler. *$U_j(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının j-inci koordinatı 1, ötekileri 0'dır. Lemma 3.1'ndeki toplamda yalnızca j-inci terim kalır:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$U_j(\mathbf{p})[f_i] = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}).$$

Önerme. *Önerme 7.1 gereği $F_*\,(\,U_j(\mathbf{p})\,)$, $F(\mathbf{p})$'de uygulanan ve i-inci koordinatı $\partial f_i/\partial x_j(\mathbf{p})$ olan teğet vektördür.*
Doğal çatıda yazılış. *$\mathbf{q}$'daki bir $(w_1, ..., w_m)_{\mathbf{q}}$ teğet vektörü, teğet uzayındaki işlemlerin tanımı gereği*

$$(w_1, ..., w_m)_{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{m} w_i\,(0, ..., 1, ..., 0)_{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{m} w_i\,\overline{U}_i(\mathbf{q})$$

biçiminde yazılır; burada 1, i-inci konumdadır. Bunu $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$ ve $w_i = \partial f_i/\partial x_j(\mathbf{p})$ ile uygularsak istenen formül çıkar.
■

Formülde görünen m satırlı, n sütunlu sayı tablosuna F'nin $\mathbf{p}$'deki **Jacobi matrisi** (Jacobian matrix) denir:

$$J_F(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\right)_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$$

yani açık yazılışıyla

$$J_F(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

i-inci satır f_i koordinat fonksiyonuna, j-inci sütun x_j değişkenine karşılık gelir. Sonuç, matrisin **j-inci sütununun $F_*(U_j(\mathbf{p}))$'nin vektör kısmı** olduğunu söyler.
Herhangi bir teğet vektörün görüntüsü de buradan çıkar. $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = \sum_j v_j\,U_j(\mathbf{p})$ yazılışına Sonuç 7.1'i uygulayıp Sonuç 7.3'ni yerine koyarsak

$$F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\,v_j\Big)\overline{U}_i\,(\,F(\mathbf{p})\,)$$

bulunur. Parantez içindeki toplam, $J_F(\mathbf{p})$ matrisinin i-inci satırıyla $\mathbf{v}$'nin sütun olarak yazılışının çarpımıdır. Kısacası: **$F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$'nin vektör kısmı $J_F(\mathbf{p})$ v matris çarpımıdır.**
Üç özel hâl tanıdık nesnelere götürür.

- $m = n = 1$: Jacobi matrisi tek bir sayıdır, F'nin p'deki türevi $F'(p)$. Teğet dönüşümü $v_p \mapsto (\,F'(p)\,v)_{F(p)}$ olur; bu, girişte andığımız $\Delta x \mapsto f'(x)\,\Delta x$ lineer yaklaşımıdır.
- $m = 1$: Jacobi matrisi tek satırlıdır ve f'nin kısmi türevlerinden oluşur. Teğet dönüşümü $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \mapsto (\,\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f])_{f(\mathbf{p})}$ olur: yönlü türev.
- $n = 1$: dönüşüm bir eğridir ($\mathbb{R}$ yerine bir açık aralık alınabilir); Jacobi matrisi, elemanları yukarıdan aşağıya $\alpha_1'(t), ..., \alpha_m'(t)$ olan tek sütunlu matristir. Sonuç $\alpha_*(U_1(t)) = \alpha'(t)$ der: hız vektörü, eğrinin teğet dönüşümünü sayı doğrusunun t'deki birim vektörüne uygulayarak elde edilir.

Örnek 7.12 (Jacobi Matrisinin Sütunları). $F(u, v) = (u + v, uv)$ olsun. $\mathbf{p} = (1, 2)$'deki Jacobi matrisinin sütunlarının geometrik anlamını, küçük bir karenin görüntüsü üzerinde görelim.

Çözüm.
Matris. Kısmi türevler Örnek 7.9'nde bulundu. Genel noktada ve $\mathbf{p}$'de

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}, \qquad J_F(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sütunlar. Sonuç gereği $F_*(U_1(\mathbf{p})) = (1, 2)_{(3,2)}$ ve $F_*(U_2(\mathbf{p})) = (1, 1)_{(3,2)}$. Birincisini tanımla da görebiliriz: $F(1 + t, 2) = (3 + t, 2 + 2t)$ doğrusunun hızı $(1, 2)$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

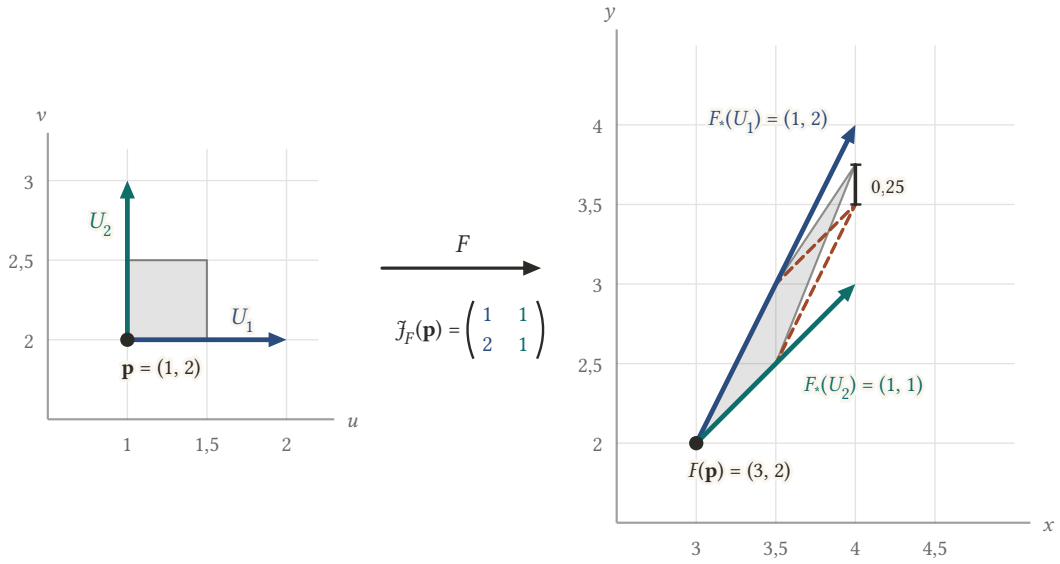
Bir vektörün görüntüsü. $\mathbf{v} = (1,1)$ için matris çarpımı

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verir; bu, Örnek 7.7'da tanımdan bulduğumuz $(2,3)$'tür.
Küçük bir kare. Köşeleri $(1,2)$, $(1{,}5;\,2)$, $(1{,}5;\,2{,}5)$, $(1;\,2{,}5)$ olan kareyi F şu noktalara götürür:

$$F(1,2) = (3,2), \qquad F(1{,}5;\,2) = (3{,}5;\,3),$$
$$F(1{,}5;\,2{,}5) = (4;\,3{,}75), F(1;\,2{,}5) = (3{,}5;\,2{,}5).$$

Kenarların görüntüleri de doğru parçalarıdır; örneğin sağ kenarın görüntüsü $0 \le s \le 0{,}5$ için $s \mapsto (3{,}5 + s,\, 3 + 1{,}5s)$ parçasıdır. Teğet dönüşümünün önerdiği şekil ise $(3,2)$'den çıkan $0{,}5 \cdot (1,2)$ ve $0{,}5 \cdot (1,1)$ oklarının kurduğu paralelkenardır; köşeleri $(3,2)$, $(3{,}5;\,3)$, $(4;\,3{,}5)$, $(3{,}5;\,2{,}5)$'tir. Üç köşe tam uyar; dördüncü köşede gerçek görüntü $(4;\,3{,}75)$, yaklaşım $(4;\,3{,}5)$'tir. Aradaki $0{,}25$'lik fark, kenar uzunluklarının çarpımı $0{,}5 \cdot 0{,}5$'tir: ikinci mertebeden bir hata.



Şekil 7.4: $F(u, v) = (u + v,\, uv)$ altında $U_1(\mathbf{p})$ ve $U_2(\mathbf{p})$ oklarının görüntüleri, $\mathbf{p} = (1, 2)$'deki Jacobi matrisinin sütunları olan $(1, 2)$ ve $(1, 1)$'dir; aynı renk bir oku, görüntüsünü ve matristeki sütununu birbirine bağlar. Soldaki küçük karenin gerçek görüntüsü sağdaki gri dörtgendir; turuncu kesikli paralelkenar ise iki görüntü okunun yarısıyla kurulan, teğet dönüşümünün önerdiği şekildir. Üç köşe tam uyar; dördüncü köşedeki $0{,}25$'lik fark, kenar uzunluklarının çarpımı $0{,}5 \cdot 0{,}5$'tir, yani ikinci mertebeden bir hatadır.

■

7.8 Düzgün Dönüşümler

Bir fonksiyonun türevi fonksiyon hakkında bilgi verir: her yerde pozitif türev, artan fonksiyon demektir. Teğet dönüşümü de dönüşüm hakkında bilgi verir. Sorulacak en önemli soru, $F_{*\mathbf{p}}$'nin bilgi kaybedip kaybetmediğidir: sıfırdan farklı bir teğet vektörü sıfıra, ya da iki farklı teğet vektörü aynı vektöre götürüyor mu? Örnek 7.4'deki izdüşüm dikey yönü ezmişti ve hareket eden bir nokta görüntüde durmuştu. Böyle bir kayıp hiçbir noktada yoksa dönüşüme bir ad veriyoruz.
Bu koşul eğrilerden tanıdıktır. Bir α eğrisinin t anındaki teğet dönüşümü, Sonuç 7.3'nin $n = 1$ hâline göre $a\,U_1(t) \mapsto a\,\alpha'(t)$ kuralıdır. Bu kural ancak ve ancak $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ ise birebirdir. Düzgün eğri tanımı (Tanım 4.6), aşağıdaki tanımın $n = 1$ hâlidir.

Tanım 7.4 (Düzgün Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^n$'nin her $\mathbf{p}$ noktasında $F_{*\mathbf{p}}$ teğet dönüşümü birebirse F'ye **düzgün** ya da **regüler** dönüşüm (regular mapping) denir.

Yani düzgün bir dönüşüm hiçbir noktada hiçbir hareket yönünü ezmez: $\mathbf{p}$'den farklı yönlere çıkan hareketler, görüntüde de ilk mertebede farklı kalır.
Teğet dönüşümleri lineer olduğundan birebirliği lineer cebirle denetleyebiliriz. Aşağıdaki önerme, pratikte en kullanışlı ölçütün Jacobi matrisinin rankı olduğunu gösterir. Hatırlatma: bir matrisin **rankı** (rank), sütunlarının germe yoluyla oluşturduğu alt uzayın, yani sütun uzayının boyutudur.

Önerme 7.2 (Birebirliğin Üç Denk Biçimi). *$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm ve $\mathbf{p}$, $\mathbb{R}^n$'nin bir noktası olsun. Aşağıdaki üç koşul birbirine denktir:*
(1) *$F_{*\mathbf{p}}$ birebirdir.*
(2) *$\mathbf{p}$'deki bir $\mathbf{v_p}$ için $F_*(\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$ ise $\mathbf{v_p} = \mathbf{0_p}$'dir.*
(3) *F'nin $\mathbf{p}$'deki Jacobi matrisinin rankı, tanım uzayının boyutu olan n'dir.*

İspat.
(1)'den (2)'ye. *Lineerlik gereği $F_*(\mathbf{0_p}) = F_*(0 \cdot \mathbf{0_p}) = 0 \cdot F_*(\mathbf{0_p})$, yani $F(\mathbf{p})$'deki sıfır vektörüdür. $F_*(\mathbf{v_p}) = \mathbf{0}$ ise $F_*(\mathbf{v_p}) = F_*(\mathbf{0_p})$ olur ve birebirlik $\mathbf{v_p} = \mathbf{0_p}$ verir.*
(2)'den (1)'e. *$F_*(\mathbf{v_p}) = F_*(\mathbf{w_p})$ olsun. Lineerlik gereği*

$$F_*(\mathbf{v_p} - \mathbf{w_p}) = F_*(\mathbf{v_p}) - F_*(\mathbf{w_p}) = \mathbf{0}.$$

(2) gereği $\mathbf{v_p} - \mathbf{w_p} = \mathbf{0_p}$, yani $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ve $\mathbf{v_p} = \mathbf{w_p}$.

(2) koşulunu sütunlarla yazmak. *$J_F(\mathbf{p})$'nin sütunları $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ olsun; bunlar $\mathbb{R}^m$'nin noktalarıdır. Jacobi matrisinden hemen önce gördüğümüz gibi $F_*(\mathbf{v_p})$'nin vektör kısmı*

$$J_F(\mathbf{p})\,\mathbf{v} = v_1\mathbf{c}_1 + ... + v_n\mathbf{c}_n$$

*toplamıdır. Dolayısıyla (2) şunu söyler: $v_1\mathbf{c}_1 + ... + v_n\mathbf{c}_n = \mathbf{0}$ eşitliği yalnızca bütün v_j'ler sıfırken sağlanır. Bu, sütunların **lineer bağımsız** olmasının tanımıdır.*
Bağımsız sütunlardan rank n'ye. *Sütunlar sütun uzayını tanım gereği gerer. Bağımsızlarsa bu uzayın n elemanlı bir tabanıdır ve sütun uzayının boyutu n'dir.*
Bağımlı sütunlardan rank n'den küçüğe. *Sütunlar bağımlıysa, bazı $v_k \neq 0$ olan bir $v_1\mathbf{c}_1 + ... + v_n\mathbf{c}_n = \mathbf{0}$ eşitliği vardır. Bu eşitlik v_k'ya bölünüp çözülürse $\mathbf{c}_k$ öteki sütunların lineer birleşimi olarak yazılır. O zaman $\mathbf{c}_k$'yı atmak germe kümesini değiştirmez: sütun uzayı $n-1$ vektörle gerilir ve boyutu en çok $n-1$'dir.*
Sonuç. *Son iki adım, sütunların bağımsız olmasının rankın n olmasına denk olduğunu gösterir. Böylece (2) ile (3) denktir; (1) ile (2)'nin denkliğiyle birlikte üç koşul da denktir.*
■

İspatın özü: bir lineer dönüşümün birebirliği çekirdeğinin sıfır olmasıdır, çekirdeğin sıfır olması da matrisin sütunlarının bağımsız olmasıdır.
Önermenin iki hızlı sonucu vardır. Birincisi, sütunlar $\mathbb{R}^m$'de yaşadığından sütun uzayının boyutu en çok m'dir; rank n olabilmesi için $n \leq m$ gerekir. Demek ki $\mathbb{R}^3$'ten $\mathbb{R}^2$'ye hiçbir dönüşüm düzgün olamaz; üç yönü iki boyuta sığdırmak için bir yön mutlaka ezilir. İkincisi, $n = m$ ise Jacobi matrisi karedir ve lineer cebirden bilindiği gibi bir kare matrisin rankının n olması, determinantının sıfırdan farklı olmasına denktir. Dolayısıyla

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ \text{ düzgündür} \Leftrightarrow \text{her } \ \mathbf{p} \ \text{ için } \ \det J_F(\mathbf{p}) \neq 0.$$

Örnek 7.13 (Toplam ve Çarpım Dönüşümü Köşegen Boyunca Katlanır). $F(u, v) = (u + v, uv)$ olsun. $F_{*\mathbf{p}}$'nin birebir olmadığı $\mathbf{p}$ noktalarını bulalım.

Çözüm.
Determinant. Örnek 7.12'ndaki matristen

$$\det J_F(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} = u - v.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

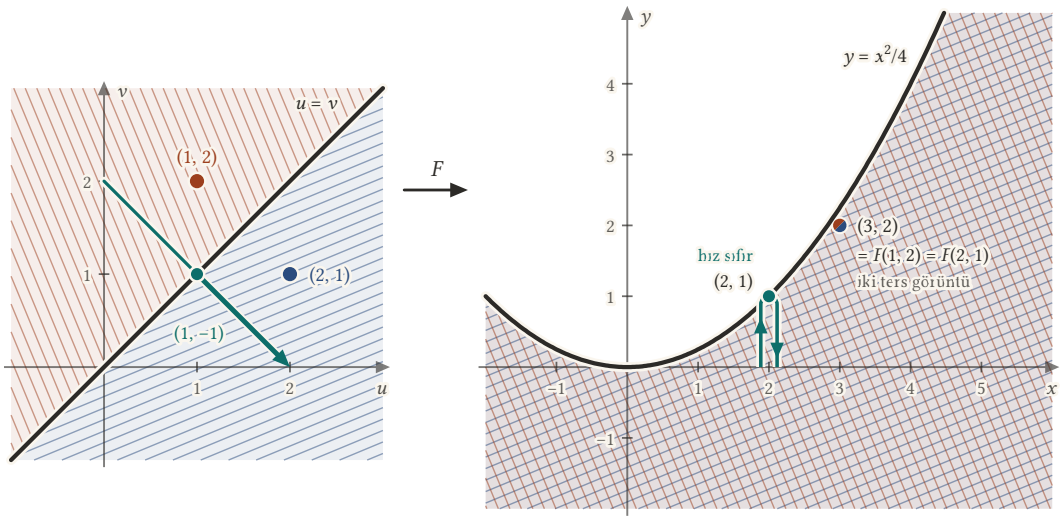
Önerme gereği $F_{*\mathbf{p}}$ ancak ve ancak $p_1 \neq p_2$ ise birebirdir. F, $u = v$ köşegeni üzerindeki her noktada birebirliği kaybeder; düzgün bir dönüşüm değildir.
Ezilen yön. Köşegen üzerindeki $\mathbf{p} = (a, a)$ noktasında matrisin iki sütunu da $(1, a)$'dır. $\mathbf{v} = (1, -1)$ için $J_F(\mathbf{p})\,\mathbf{v} = (1 - 1, a - a) = (0, 0)$; yani $F_*\left(\,(1,-1)_{\mathbf{p}}\,\right) = \mathbf{0}$. Tanımla da görülür: $a = 1$ için

$$F(1 + t, 1 - t) = (2, 1 - t^2)$$

eğrisi $t = 0$'da $(2, 1)$ noktasına varır, orada durur ve geri döner; hızı $t = 0$'da sıfırdır.
Katlanma. $F(u, v) = F(v, u)$ olduğundan köşegene göre simetrik iki nokta aynı yere gider; örneğin $F(1, 2) = F(2, 1) = (3, 2)$. F, düzlemi köşegen boyunca katlayıp iki yarıyı üst üste yapıştırır. Görüntü kümesini de bulabiliriz. $(u + v)^2 - 4uv = (u - v)^2 \geq 0$ olduğundan her görüntü noktası $x^2 \geq 4y$, yani $y \leq x^2/4$ koşulunu sağlar. Tersine bu koşulu sağlayan bir (x, y) için

$$u = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2}, \qquad v = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

seçilirse $u + v = x$ ve $uv = \left(\,x^2 - (x^2 - 4y)\,\right)/4 = y$ olur. Görüntü kümesi $y \leq x^2/4$ bölgesidir ve köşegenin görüntüsü $F(a, a) = (2a, a^2)$ noktalarından oluşan sınır parabolüdür. Birebirliğin kaybolduğu yer, tam olarak katlanma çizgisidir.



Şekil 7.5: $F(u, v) = (u + v, uv)$ dönüşümü düzlemi $u = v$ köşegeni boyunca katlar: köşegenin altındaki mavi ve üstündeki turuncu yarı düzlem aynı $y \leq x^2/4$ bölgesine gider, bu yüzden sağda iki tarama üst üste biner; köşegenin görüntüsü sınırdaki $y = x^2/4$ parabolüdür. Köşegene göre simetrik turuncu $(1, 2)$ ve mavi $(2, 1)$ noktalarının ikisi de iki renkli $(3, 2)$ noktasına düşer. Köşegeni dik kesen yeşil $(1 + t, 1 - t)$ doğru parçasının görüntüsü $(2, 1 - t^2)$ eğrisidir: $(2, 0)$'dan $(2, 1)$'e çıkar, parabol üzerinde durur ve geri iner. $(1, 1)$ noktasındaki $(1, -1)$ hız vektörü sıfıra ezildiği için bu dönüş noktasında hız sıfırdır.

■

Örnek 7.14 (Uzaydan Düzleme İzdüşüm Düzgün Değildir). $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $P = (x, y)$ izdüşümünün hiçbir noktada birebir teğet dönüşümü olmadığını görelim.

Çözüm.
Jacobi matrisi. P'nin koordinat fonksiyonları x ve y'dir; kısmi türevleri sabittir:

$$J_P(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rank. Üçüncü sütun sıfırdır ve ilk iki sütun $\mathbb{R}^2$'yi gerer; sütun uzayının boyutu 2'dir. Tanım uzayının boyutu 3 olduğundan önermenin (3) koşulu bozulur.
Ezilen vektör. $P_*\left(\,U_3(\mathbf{p})\,\right)$'nin vektör kısmı üçüncü sütundur, yani sıfırdır. Her noktada dikey birim vektör ezilir; Örnek 7.4'de dikey doğrunun görüntüsünün durması bundandır.
Karşılaştırma için $G(u,v)=(u,v,uv)$ dönüşümünü alalım. Jacobi matrisinin satırları $(1,0)$, $(0,1)$ ve (v,u)'dur. İlk iki satır yüzünden $a\,\mathbf{c}_1+b\,\mathbf{c}_2=\mathbf{0}$ eşitliği $a=b=0$ gerektirir; sütunlar bağımsız, rank 2'dir. G düzgündür: düzlemi, $z=xy$ eyer yüzeyinin üzerine hiçbir yönü ezmeden yatırır.
■

7.9 Aynı Boyutta Birebirlik ve Örtenlik

Tanım ve değer uzayları aynı boyutta olduğunda teğet dönüşümleri için lineer cebirin güzel bir olgusu devreye girer: birebirlik ile örtenlik aynı şeydir.

Lemma 7.1 (Eşit Boyutta Birebir ile Örten Aynıdır). *V ve W ikisi de n boyutlu vektör uzayları ve $T:V\to W$ lineer bir dönüşüm olsun. T'nin birebir olması için gerek ve yeter koşul örten olmasıdır. Bu durumda T birebir, örten ve lineerdir; böyle bir dönüşüme **lineer izomorfizma** (linear isomorphism) denir.*

İspat.
$\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, V'nin bir tabanı olsun. Her $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{v}=\sum_j a_j\mathbf{e}_j$ biçiminde tek türlü yazılır ve lineerlik $T(\mathbf{v})=\sum_j a_j\,T(\mathbf{e}_j)$ verir. Lineer cebirden iki olgu kullanacağız: n boyutlu bir uzayda lineer bağımsız n vektör bir tabandır; uzayı geren n vektör de bir tabandır.
Birebirden örtene. *Önce $T(\mathbf{e}_1),\dots,T(\mathbf{e}_n)$'nin bağımsız olduğunu gösterelim. $\sum_j c_j\,T(\mathbf{e}_j)=\mathbf{0}$ olsun. Sol yan $T\left(\sum_j c_j\mathbf{e}_j\right)$'dir ve $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ olduğundan birebirlik $\sum_j c_j\mathbf{e}_j=\mathbf{0}$ verir; $\mathbf{e}_j$'ler bağımsız olduğundan bütün $c_j=0$. Böylece $T(\mathbf{e}_j)$'ler W'de n bağımsız vektördür ve W'nin bir tabanıdır. Her $\mathbf{w}\in W$ için $\mathbf{w}=\sum_j b_j\,T(\mathbf{e}_j)=T\left(\sum_j b_j\mathbf{e}_j\right)$ olur; T örtendir.*
Örtenden birebire. *Her $\mathbf{w}\in W$ bir $\mathbf{v}=\sum_j a_j\mathbf{e}_j$ için $\mathbf{w}=T(\mathbf{v})=\sum_j a_j\,T(\mathbf{e}_j)$ biçimindedir; yani $T(\mathbf{e}_j)$'ler W'yi gerer. n boyutlu W'yi geren n vektör bir tabandır, dolayısıyla bağımsızdır. Şimdi $T(\mathbf{v})=T(\mathbf{v}')$ olsun ve $\mathbf{v}=\sum_j a_j\mathbf{e}_j$, $\mathbf{v}'=\sum_j a'_j\mathbf{e}_j$ yazalım. Lineerlik*

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j-a'_j)\,T(\mathbf{e}_j)=T(\mathbf{v}-\mathbf{v}')=\mathbf{0}$$

verir; bağımsızlıktan her j için $a_j=a'_j$, yani $\mathbf{v}=\mathbf{v}'$. T birebirdir.
Ters dönüşüm de lineerdir. *T birebir ve örtense $T^{-1}:W\to V$ vardır. $\mathbf{w},\mathbf{w}'\in W$ ve a,b sayıları için T'nin lineerliği*

$$T\left(\,a\,T^{-1}(\mathbf{w})+b\,T^{-1}(\mathbf{w}')\,\right)=a\mathbf{w}+b\mathbf{w}'$$

verir. İki yana T^{-1} uygulanırsa

$$T^{-1}(a\mathbf{w}+b\mathbf{w}')=a\,T^{-1}(\mathbf{w})+b\,T^{-1}(\mathbf{w}')$$

bulunur.
■

Lemmayı $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ bir dönüşümün teğet dönüşümlerine uygulayalım. $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ ve $T_{F(\mathbf{p})}(\mathbb{R}^n)$ ikisi de n boyutludur. Öyleyse bir noktada şu dört koşul denktir: $F_{*\mathbf{p}}$ birebirdir; $F_{*\mathbf{p}}$ örtendir; $F_{*\mathbf{p}}$ bir lineer izomorfizmadır; $\det J_F(\mathbf{p})\neq 0$. Farklı boyutlarda lemma geçersizdir: Örnek 7.14'deki $P_{*\mathbf{p}}$ örtendir ama birebir değildir.

Örnek 7.15 (Bir Noktadaki Teğet Dönüşümünü Tersine Çevirmek). *$F(u,v)=(u+v,uv)$ ve $\mathbf{p}=(1,2)$ olsun. $F_{*\mathbf{p}}$'nin ters lineer dönüşümünü bulalım.*

Çözüm.
İzomorfizma. Örnek 7.13 gereği $\det J_F(\mathbf{p})=1-2=-1\neq 0$. $F_{*\mathbf{p}}$ birebirdir ve lemma gereği örtendir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Ters. $(3,2)$'deki bir (a,b) teğet vektörünün hangi $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$'den geldiğini bulalım. Matris çarpımı

$$v_1 + v_2 = a, \qquad 2v_1 + v_2 = b$$

denklemlerini verir. İkinciden birinciyi çıkarınca $v_1 = b - a$, sonra $v_2 = a - v_1 = 2a - b$. Her (a,b) için çözüm vardır ve tektir; örtenlik ve birebirlik doğrudan görülür. Ters lineer dönüşüm $(a,b) \mapsto (b-a,\, 2a-b)$ olup matrisi $J_F(\mathbf{p})$'nin tersidir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denetim. $(a,b) = (2,3)$ için $\mathbf{v} = (1,1)$ bulunur; gerçekten $F_*\left(\,(1,1)_{\mathbf{p}}\,\right) = (2,3)$ idi. ∎

7.10 Difeomorfizmalar

Birebir ve örten bir dönüşümün ters fonksiyonu vardır. Ama bu ters fonksiyonun diferansiyellenebilir olması, yani kendisinin de bir dönüşüm olması, ayrı bir koşuldur. Tersi de dönüşüm olan dönüşümler, iki uzay arasında bütün analiz yapısını ileri geri taşımamıza izin verir: bir tarafta türevi alınabilen her şeyin karşılığı öbür tarafta da türevlenebilir.

Tanım 7.5 (Difeomorfizma). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm olsun. F birebir ve örtense ve ters fonksiyonu $F^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de bir dönüşümse, yani diferansiyellenebilirse, F'ye bir **difeomorfizma** (diffeomorphism) denir.

Yani bir difeomorfizma, iki uzayın noktalarını birebir eşleyen ve bu eşlemenin her iki yönde de diferansiyellenebilir olduğu dönüşümdür; uzayı yırtmadan, katlamadan ve hiçbir yerde ezmeden biçimini değiştirir. Bir G dönüşümü için $G \circ F$ ve $F \circ G$ bileşkelerinin ikisi de özdeşlik dönüşümü (identity map) ise, yani her noktayı kendisine götürüyorsa, F birebir ve örtendir ve $G = F^{-1}$'dir. Gerçekten $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{q})$ ise G uygulanınca $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ çıkar; her $\mathbf{y}$ de $\mathbf{y} = F(G(\mathbf{y}))$ olduğundan bir görüntüdür. Bir dönüşümün difeomorfizma olduğunu göstermenin en doğrudan yolu, böyle bir G yazıp diferansiyellenebilir olduğunu görmektir.

> **i** Açık kümeler üzerinde dönüşümler
>
> Bu bölümdeki tanımlar ve sonuçlar, Öklid uzayları yerine Öklid uzaylarının açık kümeleri alındığında da aynen geçerlidir. $\mathcal{O}$, $\mathbb{R}^n$'nin bir açık kümesi ise $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\mathcal{O}$ üzerinde diferansiyellenebilir olduğunda F'ye $\mathcal{O}$ üzerinde bir dönüşüm denir. Teğet dönüşümünün tanımı da bozulmaz: $\mathbf{p} \in \mathcal{O}$ olduğundan $\mathbf{p}$'nin çevresinde $\mathcal{O}$'nun içinde kalan bir top vardır; $|\,t\,|$ yeterince küçükken $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ bu topun içindedir ve $t \mapsto F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ eğrisi 0'ı içeren bir açık aralıkta tanımlıdır. Böylece bir açık kümeden başka bir açık kümeye difeomorfizmadan söz edebiliriz: $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ birebir ve örten, F ile F^{-1} ikisi de diferansiyellenebilir.

Örnek 7.16 (Lineer Dönüşümün Tersi). Örnek 7.5'deki $F = (x - y,\, x + y,\, 2z)$ dönüşümünün bir difeomorfizma olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Tersini bulmak. $F(p_1,p_2,p_3) = (a,b,c)$ denklemleri

$$p_1 - p_2 = a, \qquad p_1 + p_2 = b, \qquad 2p_3 = c$$

olup ilk ikisini toplayıp çıkararak $p_1 = (a+b)/2$, $p_2 = (b-a)/2$, $p_3 = c/2$ bulunur. Aday ters dönüşüm

$$G(a,b,c) = \left(\frac{a+b}{2},\, \frac{b-a}{2},\, \frac{c}{2}\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki bileşke. $F(G(a,b,c))$'nin koordinatları $\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a$, $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b$ ve $2\cdot\frac{c}{2}=c$'dir. $G(F(\mathbf{p}))$'nin koordinatları da $\frac{2p_1}{2}=p_1$, $\frac{2p_2}{2}=p_2$ ve $\frac{2p_3}{2}=p_3$'tür. İki bileşke de özdeşliktir; F birebir ve örtendir ve $F^{-1}=G$.
Diferansiyellenebilirlik. G'nin koordinat fonksiyonları birinci dereceden polinomlardır. F bir difeomorfizmadır.
Teğet dönüşümüyle uyum. Jacobi matrisinin determinantı üçüncü satıra göre açılırsa

$$\det J_F=\det\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2\,(1+1)=4\neq 0$$

bulunur; F her noktada düzgündür.
■

Örnek 7.17 (Tersi Diferansiyellenebilir Olmayan Birebir Örten Dönüşüm). $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(u,v)=(u^3,v)$ olsun. F'nin birebir ve örten bir dönüşüm olduğu hâlde difeomorfizma olmadığını görelim.

Çözüm.
Dönüşüm, birebir ve örten. Koordinat fonksiyonları polinomdur. Her gerçel sayının tek bir gerçel küp kökü olduğundan $G(x,y)=(\sqrt[3]{x},y)$ için $F(G(x,y))=(x,y)$ ve $G(F(u,v))=(u,v)$ olur; F birebir ve örtendir, tersi G'dir.
Ters diferansiyellenebilir değil. G'nin birinci koordinat fonksiyonunu $(0,b)$ noktasında x'e göre türevlemeye çalışalım:

$$\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}.$$

$h\to 0$ iken sağ yan sınırsız büyür; kısmi türev yoktur. G bir dönüşüm değildir, dolayısıyla F bir difeomorfizma değildir.
Engelin kaynağı. Jacobi matrisi ve determinantı

$$J_F(u,v)=\begin{pmatrix}3u^2&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad \det J_F(u,v)=3u^2$$

olup determinant $u=0$ doğrusu üzerinde sıfırdır. Tersin bozulduğu yer, F'nin düzgünlüğü kaybettiği yerdir. Bu rastlantı değildir: bir difeomorfizmanın her noktada düzgün olduğunu Alıştırma 7.17'de genel zincir kuralıyla göreceğiz.
■

7.11 Ters Fonksiyon Teoremi

Az önceki örnek, birebir ve örten olmanın difeomorfizma olmaya yetmediğini gösterdi; eksik olan, teğet dönüşümlerinin birebirliğiydi. Tersine şu soruyu soralım: bir noktada teğet dönüşümü birebirse, dönüşüm hakkında ne söyleyebiliriz? İleri analizin temel sonuçlarından biri, en azından o noktanın yakınında her şeyin yolunda olduğunu söyler.

Teorem 7.1 (Ters Fonksiyon Teoremi). *$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ aynı boyutlu Öklid uzayları arasında bir dönüşüm olsun. Bir $\mathbf{p}$ noktasında $F_{*\mathbf{p}}$ birebirse, $\mathbf{p}$'yi içeren öyle bir $\mathcal{U}$ açık kümesi vardır ki F'nin $\mathcal{U}$'ya kısıtlanışı, $\mathcal{U}$'dan bir $\mathcal{V}$ açık kümesinin üzerine bir difeomorfizmadır.*

Yani bir noktada ilk mertebeden yaklaşım tersine çevrilebiliyorsa, dönüşümün kendisi de o noktanın yakınında diferansiyellenebilir bir tersle geri çevrilebilir. Sonucun ters fonksiyon teoremi (inverse function theorem) diye anılması da bundandır: kısıtlanmış $\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ dönüşümünün, $\mathcal{V}$'den $\mathcal{U}$'ya giden diferansiyellenebilir bir tersi olduğunu güvence altına alır. Aynı boyut koşulu esastır; $F_{*\mathbf{p}}$ ancak o zaman birebirlikle birlikte örten, yani bir lineer izomorfizma olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

i İspat ileri analize aittir

Teoremin ispatı bu dersin kapsamı dışındadır ve ileri analiz derslerinde yapılır. İspatın ana fikri, $F_{*\mathbf{p}}$'nin F'yi $\mathbf{p}$ yakınında en iyi temsil eden lineer dönüşüm olmasıdır: $F(\mathbf{q}) = \mathbf{y}$ denklemi, önce lineer yaklaşımın tersiyle kabaca çözülür, sonra yaklaşık çözüm bir daraltma dönüşümünün sabit noktası olarak adım adım düzeltilir. Bu ders boyunca teoremi ispatsız bir araç olarak kullanacağız.

Teoremin ne söylediğini ve ne söylemediğini örneklerle netleştirelim.
Tek boyutta. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için f_{*a}'nın birebir olması $f'(a) \neq 0$ demektir. Diyelim $f'(a) > 0$. f' sürekli olduğundan a'yı içeren bir $(a-\delta, a+\delta)$ aralığında da $f' > 0$ kalır; bu aralıkta f kesin artandır, dolayısıyla birebirdir, görüntüsü bir açık aralıktır ve tersinin türevi $1/f'$ formülüyle bulunur. Örneğin $f(x) = x^2$ için $a = 1$'de $f'(1) = 2 \neq 0$; $\mathcal{U} = (0, \infty)$ aralığı $\mathcal{V} = (0, \infty)$ aralığına difeomorfik olarak gider ve ters $\sqrt{y}$'dir. $a = 0$'da ise $f'(0) = 0$ ve 0'ı içeren hiçbir aralıkta x^2 birebir değildir, çünkü x ile $-x$ aynı değeri verir.
Varsayım gereklidir. $f(x) = x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin tamamında birebir ve örtendir, ama $f'(0) = 0$'dır ve tersi 0'da türevlenemez; bunu Alıştırma 7.11'da ayrıntılı göreceğiz. Teoremin varsayımı bozulduğunda birebirlik bile kurtulsa ters diferansiyellenebilir olmayabilir.
Teorem yereldir. Teorem, her noktada düzgün bir dönüşümün bütün uzayda birebir olduğunu söylemez. Aşağıdaki örnek bunu gösterir.

Örnek 7.18 (Kare Alma Dönüşümünün Yerel Tersi). $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. Alıştırma 7.9'de, $F_{*\mathbf{p}}$'nin başlangıç noktası dışındaki her noktada birebir olduğunu göstereceğiz. $\mathbf{p} = (1, 0)$ noktası için teoremin söz ettiği $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ açık kümelerini ve ters dönüşümü açıkça bulalım.

Çözüm.
Açık kümeler. $\mathcal{U}$, $u > 0$ olan noktaların oluşturduğu sağ yarı düzlem olsun; $\mathcal{V}$ ise düzlemden $\{(x, 0) : x \leq 0\}$ yarı doğrusunun çıkarılmasıyla elde edilen küme olsun. İkisi de açıktır ve $\mathbf{p} = (1, 0) \in \mathcal{U}$.
F, $\mathcal{U}$'yu $\mathcal{V}$'nin içine götürür. $u > 0$ iken $F(u, v) = (x, 0)$ olsaydı $2uv = 0$'dan $v = 0$ ve $x = u^2 > 0$ çıkardı. Görüntü hiçbir zaman silinen yarı doğruya düşmez.
Aday ters. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ olmak üzere

$$G(x, y) = \left(\sqrt{\frac{\rho + x}{2}},\ \frac{y}{\sqrt{2(\rho + x)}} \right)$$

tanımlayalım. $\rho \geq |\, x \,|$ olduğundan $\rho + x \geq 0$'dır; eşitlik yalnızca $y = 0$ ve $x \leq 0$ iken, yani silinen yarı doğru üzerinde olur. Dolayısıyla $\mathcal{V}$ üzerinde $\rho + x > 0$'dır, G tanımlıdır ve birinci koordinatı pozitiftir: G, $\mathcal{V}$'yi $\mathcal{U}$'nun içine götürür. G'nin birinci koordinatına a dersek ikinci koordinatı $y/(2a)$'dır.
$F \circ G$ özdeşliktir. $a^2 = (\rho + x)/2$ ve $b = y/(2a)$ için

$$a^2 - b^2 = \frac{\rho + x}{2} - \frac{y^2}{2(\rho + x)} = \frac{(\rho + x)^2 - y^2}{2(\rho + x)}.$$

Pay kısmında $\rho^2 = x^2 + y^2$ kullanılırsa

$$(\rho + x)^2 - y^2 = \rho^2 + 2\rho x + x^2 - y^2 = 2x^2 + 2\rho x = 2x(x + \rho)$$

bulunur ve oran x'e eşit olur. Ayrıca $2ab = y$. Yani $F(G(x, y)) = (x, y)$.
$G \circ F$ özdeşliktir. $u > 0$ için $x = u^2 - v^2$ ve $y = 2uv$ ise

$$\rho^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2,$$

yani $\rho = u^2 + v^2$. O zaman $(\rho + x)/2 = u^2$ ve karekökü $u > 0$ olduğundan u'dur; ikinci koordinat $2uv/(2u) = v$ olur.
Sonuç. F'nin $\mathcal{U}$'ya kısıtlanışı $\mathcal{V}$'nin üzerine birebir ve örtendir, tersi G'dir. ρ başlangıç noktası dışında diferansiyellenebilir ve karekök pozitif sayılarda diferansiyellenebilir olduğundan G bir dönüşümdür; kısıtlanış bir difeomorfizmadır. Sayısal denetim: $F(2, 1) = (3, 4)$ ve $\rho = 5$ için $G(3, 4) = \left(\sqrt{4},\ 4/\sqrt{16} \right) = (2, 1)$.
Bütün düzlemde değil. $F(-2, -1) = (3, 4)$ de doğrudur. $(-2, -1)$ noktası $\mathcal{U}$'da değildir, ama bu eşitlik F'nin başlangıç noktası dışındaki bütün kümede birebir olmadığını gösterir. Her noktanın yakınında

 CC BY-NC-SA 4.0

yerel bir ters vardır; tek bir global ters yoktur. Örnek 7.6'da gördüğümüz iki kez sarma bunun geometrik nedenidir.
■

Özetle, teğet dönüşümü bir dönüşümün yerel davranışını çok iyi yakalar: $F_{*\mathbf{p}}$ bir izomorfizma ise F de $\mathbf{p}$ yakınında bir difeomorfizmadır. Global sorular, yani F'nin bütün uzayda birebir ya da örten olup olmadığı, teğet dönüşümünün tek başına cevaplayamayacağı sorulardır; Alıştırma 7.12 bu iki bilgi türünün nasıl birleştirilebileceğini gösterir.

7.12 Alıştırmalar

Alıştırma 7.1 (Başlangıç Noktasına Giden Noktalar). $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. $F(\mathbf{p}) = (0,0)$ eşitliğini sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Denklemler. $\mathbf{p} = (a,b)$ yazalım. $F(\mathbf{p}) = (0,0)$ koşulu

$$a^2 - b^2 = 0, \qquad 2ab = 0$$

denklemlerine denktir.
Durumlar. İkinci denklemden $a = 0$ ya da $b = 0$. $a = 0$ ise birinci denklem $-b^2 = 0$, yani $b = 0$ verir. $b = 0$ ise birinci denklem $a^2 = 0$, yani $a = 0$ verir.
Sonuç. Tek çözüm $\mathbf{p} = (0,0)$'dır.
İkinci bir bakış. Her a, b için

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$$

özdeşliği geçerlidir. Sol yan $F(\mathbf{p})$'nin başlangıç noktasına uzaklığının karesi olduğundan bu, $F(\mathbf{p})$'nin uzaklığının $\mathbf{p}$'nin uzaklığının karesi olduğunu söyler. Uzaklığı sıfır olan tek nokta başlangıç noktasıdır.
■

Alıştırma 7.2 (Bir Noktanın İki Ters Görüntüsü). $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. $F(\mathbf{p}) = (8,6)$ eşitliğini sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Denklemler. $\mathbf{p} = (a,b)$ için $a^2 - b^2 = 8$ ve $2ab = 6$.
Kareler toplamı. Alıştırma 7.1'daki özdeşlik

$$(a^2 + b^2)^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

verir. $a^2 + b^2 \geq 0$ olduğundan $a^2 + b^2 = 10$.
Kareler. $a^2 + b^2 = 10$ ile $a^2 - b^2 = 8$ taraf tarafa toplanırsa $2a^2 = 18$, çıkarılırsa $2b^2 = 2$ bulunur. Yani $a^2 = 9$ ve $b^2 = 1$; $a = \pm 3$ ve $b = \pm 1$.
İşaretler. $2ab = 6 > 0$ olduğundan a ile b aynı işaretlidir. Geriye $(3,1)$ ve $(-3,-1)$ kalır.
Denetim. $F(3,1) = (9-1, 6) = (8,6)$. $(-3,-1)$ noktasında kareler ve çarpım aynı kaldığından $F(-3,-1) = (8,6)$ da doğrudur.
İki çözüm birbirinin tam karşısındadır, $F(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$ özelliğinin gerektirdiği gibi. İkisinin de başlangıç noktasına uzaklığı $\sqrt{10}$'dur ve $(8,6)$'nın uzaklığı 10'dur: uzaklık karesine çıkar.
■

Alıştırma 7.3 (Kendi Üzerine Giden Noktalar). $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ eşitliğini sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Denklemler. $\mathbf{p} = (a,b)$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a^2 - b^2 = a, \qquad 2ab = b.$$

İkinci denklem. $2ab - b = b(2a-1) = 0$ olduğundan $b = 0$ ya da $a = 1/2$.
Birinci durum, $b = 0$. Birinci denklem $a^2 = a$, yani $a(a-1) = 0$ olur; $a = 0$ ya da $a = 1$. Çözümler $(0,0)$ ve $(1,0)$.
İkinci durum, $a = 1/2$. Birinci denklem $1/4 - b^2 = 1/2$, yani $b^2 = -1/4$ olur. Hiçbir gerçel b bunu sağlamaz.
Sonuç. $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ olan noktalar $(0,0)$ ve $(1,0)$'dır. Denetim: $F(1,0) = (1,0)$.
Geometrik denetim. $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ ise uzaklıklar eşittir; uzaklık karesine çıktığından uzaklık 0 ya da 1 olmalıdır. Birim çember üzerinde F açıyı iki katına çıkarır ve 2θ açısı θ ile ancak θ, 2π'nin tam katıyken aynı yönü gösterir. Bu da $(1,0)$ noktasıdır.
■

Alıştırma 7.4 (Yatay Doğrunun Görüntüsü). $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. $v = 1$ yatay doğrusunu ve onun F altındaki görüntüsünü (bir parabol) çiziniz.

Çözüm.
Parametrelendirme. Doğruyu $\alpha(t) = (t, 1)$ eğrisiyle dolaşalım.
Görüntü. $\beta(t) = F(t,1) = (t^2 - 1, 2t)$.
Denklem. $x = t^2 - 1$ ve $y = 2t$ yazarsak $t = y/2$ olur ve $x = y^2/4 - 1$ bulunur. Tersine bu parabolün her (x,y) noktası $t = y/2$ anındaki $\beta(t)$'dir. Görüntü, $x = y^2/4 - 1$ parabolünün tamamıdır.
Çizim için noktalar.

t	-2	-1	0	1	2
$\alpha(t)$	$(-2,1)$	$(-1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$
$\beta(t)$	$(3,-4)$	$(0,-2)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(3,4)$

Parabolün tepesi $(-1,0)$'dır, sağa açılır ve x eksenine göre simetriktir. $y^2 = 4(x+1)$ biçiminde yazılınca odağının başlangıç noktası olduğu görülür. t artarken β parabolü aşağıdan yukarıya dolaşır.
Hız. $\beta'(t)$'nin vektör kısmı $(2t, 2)$'dir ve hiç sıfır olmaz. Sonuç 7.2 gereği bu vektör $F_*(\alpha'(t))$'dir. Çizim Alıştırma 7.6'deki şekilde görülür.
■

Alıştırma 7.5 (Dikey Doğrunun Görüntüsü). $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. $u = 1$ dikey doğrusunu ve onun F altındaki görüntüsünü (bir parabol) çiziniz.

Çözüm.
Parametrelendirme ve görüntü. $\alpha(t) = (1, t)$ için $\beta(t) = F(1,t) = (1 - t^2, 2t)$.
Denklem. $y = 2t$'den $t = y/2$ ve $x = 1 - y^2/4$. Görüntü bu parabolün tamamıdır.
Çizim için noktalar.

t	-2	-1	0	1	2
$\alpha(t)$	$(1,-2)$	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$\beta(t)$	$(-3,-4)$	$(0,-2)$	$(1,0)$	$(0,2)$	$(-3,4)$

Parabolün tepesi $(1,0)$'dır ve sola açılır; $y^2 = -4(x-1)$ yazılışı odağın yine başlangıç noktası olduğunu gösterir.
Yatay doğrunun görüntüsüyle karşılaştırma. Alıştırma 7.4'daki $x = y^2/4 - 1$ parabolüyle bu parabol $(0,2)$ ve $(0,-2)$'de kesişir. $(0,2) = F(1,1)$, iki doğrunun kesişim noktasının görüntüsüdür. $(0,-2)$ ise iki farklı noktanın görüntüsüdür: yatay doğrunun $(-1,1)$ noktasının ve dikey doğrunun $(1,-1)$ noktasının. Bu da $F(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$'nin bir sonucudur.
Kesişim açısı. $(0,2)$'de iki görüntünün hızları $t = 1$ anında $(2,2)$ ve $(-2,2)$'dir. İç çarpımları $-4 + 4 = 0$ olduğundan paraboller dik kesişir, tıpkı özgün doğruların $(1,1)$'de dik kesişmesi gibi.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 7.6 (Birim Karenin Görüntüsü). $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$ birim karesinin F altındaki görüntüsünü betimleyiniz.

Çözüm.
Kenarların görüntüleri. Karenin dört kenarını ayrı ayrı taşıyalım ($0 \le s \le 1$):

kenar	noktası	görüntüsü	görüntünün rotası
alt, $v = 0$	$(s, 0)$	$(s^2, 0)$	$(0,0)$'dan $(1,0)$'a doğru parçası
sol, $u = 0$	$(0, s)$	$(-s^2, 0)$	$(0,0)$'dan $(-1,0)$'a doğru parçası
üst, $v = 1$	$(s, 1)$	$(s^2 - 1, 2s)$	$x = y^2/4 - 1$ parabolünün $(-1,0)$'dan $(0,2)$'ye yayı
sağ, $u = 1$	$(1, s)$	$(1 - s^2, 2s)$	$x = 1 - y^2/4$ parabolünün $(1,0)$'dan $(0,2)$'ye yayı

Aday bölge. Kenarların görüntüleri, x ekseninin $[-1,1]$ parçası ile iki parabol yayının sınırladığı bölgeyi çevreler:

$$R = \left\{ (x,y) : y \ge 0,\ \frac{y^2}{4} - 1 \le x \le 1 - \frac{y^2}{4} \right\}.$$

İki eşitsizlik birlikte $y^2 \le 4$ gerektirdiğinden R'de $0 \le y \le 2$'dir.
Karenin görüntüsü R'nin içindedir. $0 \le a, b \le 1$ ve $(x,y) = F(a,b) = (a^2 - b^2, 2ab)$ olsun. $y = 2ab \ge 0$. Ayrıca $y^2/4 = a^2 b^2$ olduğundan

$$x - \left(\frac{y^2}{4} - 1 \right) = a^2 - b^2 - a^2 b^2 + 1 = (1 + a^2)(1 - b^2) \ge 0,$$

$$\left(1 - \frac{y^2}{4} \right) - x = 1 - a^2 b^2 - a^2 + b^2 = (1 - a^2)(1 + b^2) \ge 0.$$

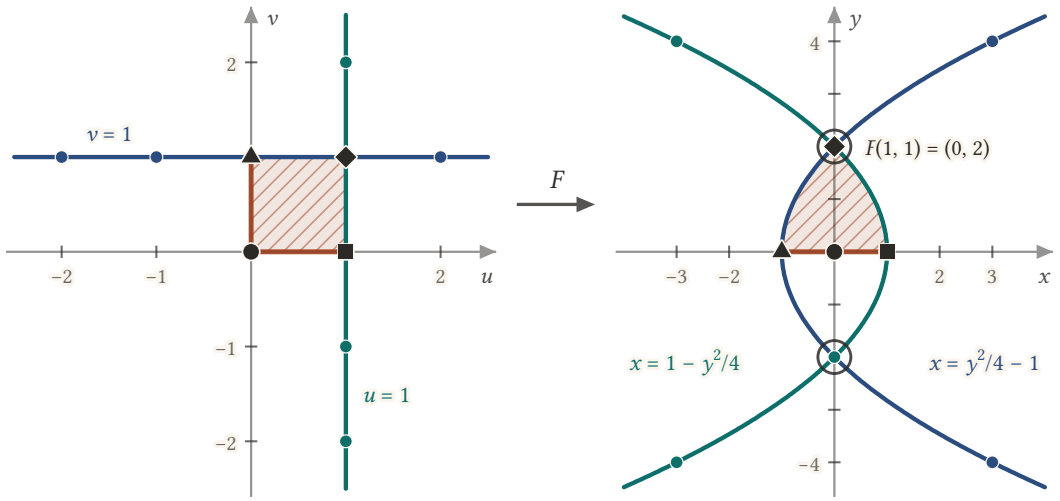
Her iki çarpımda da çarpanlar negatif değildir, çünkü $a^2 \le 1$ ve $b^2 \le 1$.
R'nin her noktası karenin bir noktasının görüntüsüdür. $(x,y) \in R$ olsun ve $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ diyelim. $\rho \ge |\,x\,|$ olduğundan

$$a = \sqrt{\frac{\rho + x}{2}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\rho - x}{2}}$$

sayıları tanımlı ve negatif değildir. $a^2 - b^2 = x$ ve $2ab = \sqrt{\rho^2 - x^2} = \sqrt{y^2} = y$ olur (son adımda $y \ge 0$ kullandık); yani $F(a,b) = (x,y)$. Geriye $a \le 1$ ve $b \le 1$ olduğunu göstermek kalır.
$a \le 1$ koşulu $\rho \le 2 - x$'e denktir. $x \le 1$ olduğundan $2 - x > 0$'dır ve iki yanın karesini almak denkliği bozmaz: $x^2 + y^2 \le 4 - 4x + x^2$, yani $x \le 1 - y^2/4$. Bu R'nin tanımında vardır.
$b \le 1$ koşulu $\rho \le 2 + x$'e denktir. $x \ge y^2/4 - 1 \ge -1$ olduğundan $2 + x > 0$'dır; kare alınca $x^2 + y^2 \le 4 + 4x + x^2$, yani $x \ge y^2/4 - 1$ çıkar. Bu da R'nin tanımındadır.
Sonuç. Birim karenin görüntüsü tam olarak R bölgesidir: tabanı x ekseninin $[-1,1]$ parçası olan, iki yanı birbirinin ayna görüntüsü olan parabol yaylarıyla sınırlanmış ve tepesi $(0,2)$'de olan kemer biçimli bölge.
Köşeler. $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ köşeleri sırasıyla $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(-1,0)$'a gider. $(1,0)$, $(1,1)$ ve $(0,1)$'deki dik açılar görüntüde de dik kalır; örneğin $(0,2)$'de Alıştırma 7.5'de gördüğümüz gibi. $(0,0)$ köşesindeki dik açı ise açılıp düz açıya dönüşür: iki kenar $[-1,1]$ parçasının iki yarısına gider. Bu

 CC BY-NC-SA 4.0

bozulma, Alıştırma 7.9'de göreceğimiz gibi $F_{*\mathbf{p}}$'nin yalnızca başlangıç noktasında birebirliğini kaybetmesiyle ilgilidir.



Şekil 7.6: Solda $v = 1$ yatay doğrusu (mavi), $u = 1$ dikey doğrusu (yeşil) ve taralı birim kare; sağda bunların $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ altındaki görüntüleri: $x = y^2/4 - 1$ ve $x = 1 - y^2/4$ parabolleri ile tepesi $(0, 2)$'de olan kemer biçimli bölge. Karenin üst ve sağ kenarı iki parabol yayına, turuncu çizilen alt ve sol kenarı ise x ekseninin $[-1, 1]$ parçasının iki yarısına gider. Aynı biçimli işaretler her köşeyi görüntüsüyle eşler: $(1, 1)$'deki dik açı $(0, 2)$'de dik kalır, $(0, 0)$'daki dik açı ise düz açıya açılır. Halkalı $(0, -2)$ noktası iki farklı noktanın, $(-1, 1)$ ile $(1, -1)$'in görüntüsüdür.

■

Alıştırma 7.7 (Teğet Dönüşümünü Doğrudan Tanımla Hesaplamak). $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbb{R}^2$'ye $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ noktasında bir teğet vektör olsun. Yalnızca teğet dönüşümünün tanımını kullanarak $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$'yi $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{p}$'nin koordinatlarıyla ifade ediniz.

Çözüm.
Doğru. $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2)$.
Görüntü eğrisinin koordinatları. Kareleri ve çarpımı açıp t'nin kuvvetlerine göre toplarsak

$$(p_1 + tv_1)^2 - (p_2 + tv_2)^2 = (p_1^2 - p_2^2) + 2t\,(p_1v_1 - p_2v_2) + t^2\,(v_1^2 - v_2^2),$$
$$2(p_1 + tv_1)(p_2 + tv_2) = 2p_1p_2 + 2t\,(p_1v_2 + p_2v_1) + 2t^2\,v_1v_2.$$

Başlangıç hızı. $c_0 + c_1t + c_2t^2$ biçimindeki bir polinomun $t = 0$'daki türevi c_1'dir. Dolayısıyla eğrinin $t = 0$'daki hızının koordinatları $2(p_1v_1 - p_2v_2)$ ve $2(p_2v_1 + p_1v_2)$'dir. Hız, $t = 0$ anındaki noktada, $F(\mathbf{p})$'de uygulanır:

$$F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \big(\,2(p_1v_1 - p_2v_2),\, 2(p_2v_1 + p_1v_2)\big)_{(p_1^2 - p_2^2,\, 2p_1p_2)}.$$

Önermeyle denetim. $\mathbf{v}_\mathbf{p}[u^2 - v^2] = 2p_1v_1 - 2p_2v_2$ ve $\mathbf{v}_\mathbf{p}[2uv] = 2p_2v_1 + 2p_1v_2$; Önerme 7.1 aynı sonucu verir.
Sayısal örnek. $\mathbf{p} = (1, 2)$ ve $\mathbf{v} = (3, -1)$ için $p_1v_1 - p_2v_2 = 3 + 2 = 5$ ve $p_2v_1 + p_1v_2 = 6 - 1 = 5$; $F(\mathbf{p}) = (-3, 4)$. Sonuç: $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = (10, 10)_{(-3,4)}$.
■

Alıştırma 7.8 (Kare Alma Dönüşümünün Jacobi Matrisi). $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. F'nin her noktadaki Jacobi matrisinin formülünü bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Kısmi türevler. $f_1 = u^2 - v^2$ ve $f_2 = 2uv$ için

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -2v, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 2v, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = 2u.$$

Matris. Satırlar koordinat fonksiyonlarına, sütunlar değişkenlere karşılık geldiğinden $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ noktasında

$$J_F(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 2p_1 & -2p_2 \\ 2p_2 & 2p_1 \end{pmatrix}.$$

Sütunların anlamı. Sonuç 7.3 gereği $F_*(U_1(\mathbf{p}))$'nin vektör kısmı $(2p_1, 2p_2)$, $F_*(U_2(\mathbf{p}))$'ninki $(-2p_2, 2p_1)$'dir. Matrisi $\mathbf{v}$ ile çarpmak $(2p_1v_1 - 2p_2v_2, 2p_2v_1 + 2p_1v_2)$ verir; bu, Alıştırma 7.7'da tanımdan bulduğumuz vektördür.
Geometrik okuma. $\mathbf{p}$'yi kutupsal olarak $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ biçiminde yazarsak

$$J_F(\mathbf{p}) = 2r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

olur. Sağdaki matris θ açısı kadar dönmedir. $F_{*\mathbf{p}}$, teğet vektörleri θ kadar döndürüp $2r$ katına uzatır. Örneğin $\mathbf{p} = (1,1)$ için $r = \sqrt{2}$ ve $\theta = \pi/4$'tür; matris

$$J_F(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

olur ve teğet vektörleri 45 derece döndürüp $2\sqrt{2}$ katına uzatır.
■

Alıştırma 7.9 (Başlangıç Noktası Dışında Lineer İzomorfizma). $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ olsun. $F_{*\mathbf{p}}$'nin tam olarak başlangıç noktası dışındaki noktalarda bir lineer izomorfizma olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Determinant. Alıştırma 7.8'daki matristen

$$\det J_F(\mathbf{p}) = (2p_1)(2p_1) - (-2p_2)(2p_2) = 4(p_1^2 + p_2^2).$$

Başlangıç noktası dışında. $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ise $p_1^2 + p_2^2 > 0$ ve determinant sıfırdan farklıdır. Kare matrisin rankı 2'dir; Önerme 7.2 gereği $F_{*\mathbf{p}}$ birebirdir. $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^2)$ ve $T_{F(\mathbf{p})}(\mathbb{R}^2)$ ikisi de iki boyutlu olduğundan Lemma 7.1 gereği $F_{*\mathbf{p}}$ örtendir de; yani bir lineer izomorfizmadır.
Başlangıç noktasında. $J_F(\mathbf{0})$ sıfır matristir. Her $\mathbf{v}$ için $F_*(\mathbf{v_0}) = \mathbf{0}$ olur; örneğin $F_*(U_1(\mathbf{0})) = \mathbf{0}$ ve $U_1(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$. $F_{*\mathbf{0}}$ birebir değildir, dolayısıyla izomorfizma değildir.
Sonuç. F düzgün değildir, ama tek kusurlu noktası başlangıç noktasıdır; açık $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ kümesine kısıtlanınca düzgündür. Ters fonksiyon teoremi her $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ noktasının çevresinde yerel bir difeomorfizma verir (Örnek 7.18), ama $F(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$ olduğundan bu küme üzerinde birebir değildir.
■

Alıştırma 7.10 (Lineer Dönüşümün Teğet Dönüşümü). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ise her $\mathbf{v_p}$ için $F_*(\mathbf{v_p}) = F(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
F bir dönüşümdür. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, $\mathbb{R}^n$'nin birim noktaları olsun ve a_{ij}, $F(\mathbf{u}_j)$'nin i-inci koordinatı olsun. $\mathbf{p} = \sum_j p_j \mathbf{u}_j$ ve lineerlik $F(\mathbf{p}) = \sum_j p_j F(\mathbf{u}_j)$ verir; i-inci koordinat $f_i(\mathbf{p}) = \sum_j a_{ij} p_j$ olur. Yani $f_i = \sum_j a_{ij} x_j$, sabit katsayılı birinci dereceden bir polinomdur ve diferansiyellenebilirdir.
Görüntü eğrisi. Lineerlik gereği

$$F(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = F(\mathbf{p}) + t\,F(\mathbf{v}).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu, $F(\mathbf{p})$'den geçen ve $F(\mathbf{v})$ doğrultusundaki doğrudur; i-inci koordinatı $f_i(\mathbf{p}) + t\,f_i(\mathbf{v})$'dir.
Başlangıç hızı. i-inci koordinatın türevi $f_i(\mathbf{v})$'dir ve t'ye bağlı değildir. Hız $t=0$'da $F(\mathbf{p})$'de uygulanır. Dolayısıyla

$$F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \big(\ f_1(\mathbf{v}), \dots, f_m(\mathbf{v})\big)_{F(\mathbf{p})} = F(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})}.$$

Yorum. Lineer bir dönüşüm kendi kendisinin en iyi lineer yaklaşımıdır: teğet dönüşümü vektör kısmına F'nin kendisini uygular, uygulama noktasını da F ile taşır. Jacobi matrisi her noktada aynıdır: $\partial f_i/\partial x_j = a_{ij}$, yani F'nin kendi matrisi.
Sayısal örnek. $F = (x-y,\, x+y,\, 2z)$, $\mathbf{p} = (1,2,3)$ ve $\mathbf{v} = (2,1,-1)$ için $F(\mathbf{v}) = (1,3,-2)$ ve $F(\mathbf{p}) = (-1,3,6)$; sonuç $(1,3,-2)_{(-1,3,6)}$. Önermeyle: $\mathbf{v}_\mathbf{p}[x-y] = 2-1 = 1$, $\mathbf{v}_\mathbf{p}[x+y] = 3$, $\mathbf{v}_\mathbf{p}[2z] = -2$. Uyuşur.
■

Alıştırma 7.11 (Birebir ve Örten Ama Difeomorfizma Olmayan Dönüşüm). Birebir ve örten olduğu hâlde bir difeomorfizma olmayan bir dönüşüm örneği veriniz. İpucu: $m = n = 1$ alınabilir.

Çözüm.
Aday. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$. Polinom olduğundan bir dönüşümdür.
Birebir. $x^3 = y^3$ ise $x^3 - y^3 = 0$ olur ve bu fark $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ biçiminde çarpanlarına ayrılır. İkinci çarpan

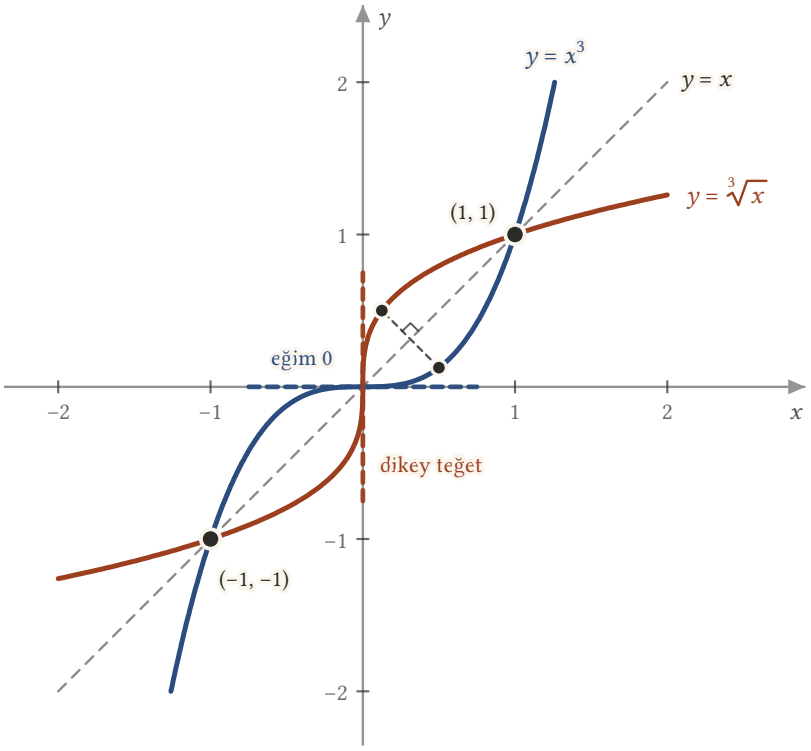
$$x^2 + xy + y^2 = \Big(x + \frac{y}{2}\Big)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

biçiminde yazılır ve yalnızca $x = y = 0$ iken sıfırdır. Her iki durumda da $x = y$.
Örten. Her gerçel c sayısının bir gerçel küp kökü $\sqrt[3]{c}$ vardır ve $F(\sqrt[3]{c}) = c$. (Varlık, x^3'ün sürekli olup $-\infty$ ile $+\infty$ arasındaki her değeri almasından, ara değer teoreminden gelir.)
Tersi 0*'da türevlenemez.* Ters fonksiyon $G(y) = \sqrt[3]{y}$'dir. 0'daki fark oranı

$$\frac{G(h) - G(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

olup $h \to 0$ iken sınırsız büyür. G, 0'da türevlenemez; F bir difeomorfizma değildir.
Hiçbir diferansiyellenebilir ters olamaz. Başka bir gerekçe engelin kaynağını gösterir. G diferansiyellenebilir olsaydı her x için $G(F(x)) = x$ eşitliğini türevleyip zincir kuralını kullanarak $G'(F(x))\,F'(x) = 1$ elde ederdik. $x = 0$'da $F'(0) = 0$ olduğundan sol yan 0 olurdu. Çelişki. Sorun, F_{*0}'ın birebir olmamasıdır: F, 0'da düzgün değildir.
Grafik yorumu. $y = \sqrt[3]{x}$ grafiği, $y = x^3$ grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre yansımasıdır. x^3'ün başlangıç noktasındaki yatay teğeti, yansımada dikey bir teğete dönüşür; dikey teğetin eğimi tanımsızdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.7: $y = x^3$ grafiği (mavi) ile tersi olan küp kök grafiği (turuncu), kesikli $y = x$ doğrusuna göre birbirinin yansımasıdır: mavi eğri üzerindeki (0,5; 0,125) noktası, bu doğruya dik kesikli parça boyunca turuncu eğri üzerindeki (0,125; 0,5) noktasına gider. İki grafik (1, 1), (−1, −1) ve başlangıç noktasında kesişir; orada x^3'ün teğeti yataydır (eğim 0), yansıma ise bu teğeti dikey bir teğete çevirir. Dikey teğetin eğimi tanımsız olduğundan küp kök fonksiyonu 0'da türevlenemez; x^3 birebir ve örten olduğu hâlde bir difeomorfizma değildir.

■

Alıştırma 7.12 (Birebir, Örten ve Düzgün Dönüşüm Difeomorfizmadır). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ birebir, örten ve düzgün bir dönüşüm ise F'nin bir difeomorfizma olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Kurulum. F birebir ve örten olduğundan ters fonksiyonu $G = F^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vardır. Göstermemiz gereken, G'nin koordinat fonksiyonlarının her noktada her mertebeden kısmi türevlerinin var ve sürekli olmasıdır.
Yerel ters. Bir $\mathbf{q}$ noktası sabitleyelim ve $\mathbf{p} = G(\mathbf{q})$ diyelim; $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$. F düzgün olduğundan $F_{*\mathbf{p}}$ birebirdir. Teorem 7.1 gereği $\mathbf{p}$'yi içeren bir $\mathcal{U}$ açık kümesi ve bir $\mathcal{V}$ açık kümesi vardır ki $F, \mathcal{U}$'yu $\mathcal{V}$'nin üzerine difeomorfik olarak götürür. Bu kısıtlanışın diferansiyellenebilir tersine $H : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ diyelim. $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$, $\mathcal{V}$'nin bir noktasıdır.
G ile H, $\mathcal{V}$ üzerinde çakışır. $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ olsun. H'nin tanımı gereği $F(H(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$, G'nin tanımı gereği $F(G(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$. İki nokta aynı görüntüye sahip ve F bütün $\mathbb{R}^n$'de birebir olduğundan $H(\mathbf{y}) = G(\mathbf{y})$.
Türev yereldir. $\mathcal{V}$ açık olduğundan her noktasının çevresinde tamamen $\mathcal{V}$'nin içinde kalan bir top vardır. Kısmi türevleri tanımlayan fark oranları, yeterince küçük adımlarla, yalnızca bu topun noktalarını kullanır. G ve H bu noktalarda aynı değerleri aldığından G'nin koordinat fonksiyonlarının $\mathcal{V}$'nin her noktasında her mertebeden kısmi türevleri vardır, H'ninkilere eşittir ve süreklidir. Özellikle $\mathbf{q}$'da.
Sonuç. $\mathbf{q}$ keyfi olduğundan G, $\mathbb{R}^n$'nin her noktasında diferansiyellenebilirdir. F bir difeomorfizmadır.
Varsayımlar nerede kullanıldı? Örtenlik G'nin bütün $\mathbb{R}^n$'de tanımlı olmasını, birebirlik yerel ters H'nin global G ile çakışmasını, düzgünlük ise teoremin her noktada uygulanabilmesini sağladı. Birebirlik ya

 CC BY-NC-SA 4.0

da örtenlik olmadan ters fonksiyon zaten yoktur; ilginç olan, düzgünlüğün de atılamamasıdır: $x \mapsto x^3$ birebir ve örtendir ama 0'da düzgün değildir ve tersi diferansiyellenebilir değildir (Alıştırma 7.11). Öte yandan düzgünlük tek başına yetmez: Alıştırma 7.20'daki dönüşüm her noktada düzgündür ama ne birebir ne de örtendir.
■

Alıştırma 7.13 (Dönüşümler Yönlü Türevleri Korur). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm, $\mathbf{v_p}$, $\mathbb{R}^n$'ye bir teğet vektör ve g, $\mathbb{R}^m$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $F_*(\mathbf{v_p})[g] = \mathbf{v_p}[g \circ F]$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
$g \circ F$ diferansiyellenebilir. $F = (f_1, \ldots, f_m)$ ise $g \circ F = g(f_1, \ldots, f_m)$ bir yerleştirmedir; zincir kuralı gereği $\mathbb{R}^n$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Bileşke $g(F)$ diye de yazılır.
Ortak eğri. $\beta(t) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ olsun. Teğet dönüşümünün tanımı gereği $\beta(0) = F(\mathbf{p})$ ve $\beta'(0) = F_*(\mathbf{v_p})$.
Sol yan. Lemma 4.2'i ($\mathbb{R}^m$'de) β eğrisine $t = 0$'da uygularsak

$$F_*(\mathbf{v_p})[g] = \beta'(0)[g] = \frac{d}{dt}\, g\,(\,\beta(t)\,)|_{t=0}\ .$$

Sağ yan. Tanım 3.1 gereği

$$\mathbf{v_p}[g \circ F] = \frac{d}{dt}\,(g \circ F)(\mathbf{p} + t\mathbf{v})|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, g\,(\,\beta(t)\,)|_{t=0}\ .$$

Sonuç. İki yan aynı tek değişkenli fonksiyonun $t = 0$'daki türevidir; eşittirler.
Yorum. g'nin taşınmış vektör boyunca değişimini ölçmek, $g \circ F$'nin özgün vektör boyunca değişimini ölçmekle aynıdır: önce taşıyıp sonra ölçmek, önce g'yi geri çekip sonra ölçmekle aynı sonucu verir.
Sayısal denetim. $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $g = x^2 + y^2$, $\mathbf{p} = (1, 2)$ ve $\mathbf{v} = (3, -1)$ alalım. Alıştırma 7.7'dan $F_*(\mathbf{v_p}) = (10, 10)_{(-3,4)}$. g'nin kısmi türevleri $(-3, 4)$'te $2x = -6$ ve $2y = 8$ olduğundan sol yan $10 \cdot (-6) + 10 \cdot 8 = 20$. Öte yandan Alıştırma 7.1'daki özdeşlik $g \circ F = (u^2 + v^2)^2$ verir; kısmi türevler $4u(u^2 + v^2) = 20$ ve $4v(u^2 + v^2) = 40$ olduğundan sağ yan $3 \cdot 20 + (-1) \cdot 40 = 20$.
■

Alıştırma 7.14 (Doğru Yerine Herhangi Bir Eğri). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm ve α, 0'ı içeren bir açık aralıkta tanımlı, $\alpha(0) = \mathbf{p}$ ve $\alpha'(0) = \mathbf{v_p}$ olan bir eğri olsun. $F(\alpha)$ eğrisinin $t = 0$'daki hızının $F_*(\mathbf{v_p})$ olduğunu, yani teğet dönüşümünün tanımında $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu yerine bu başlangıç hızına sahip herhangi bir eğri alınabileceğini gösteriniz.

Çözüm.
Koordinatlar. $F = (f_1, \ldots, f_m)$ olsun. $F(\alpha)$'nın i-inci koordinat fonksiyonu $f_i(\alpha)$'dır ve hızı $t = 0$'da $F(\alpha(0)) = F(\mathbf{p})$ noktasında uygulanır.
Her koordinatın türevi. Lemma 4.2 gereği

$$\frac{d\,(\,f_i(\alpha)\,)}{dt}(0) = \alpha'(0)[f_i] = \mathbf{v_p}[f_i].$$

Sonuç. $F(\alpha)$'nın $t = 0$'daki hızı $(\,\mathbf{v_p}[f_1], \ldots, \mathbf{v_p}[f_m])_{F(\mathbf{p})}$ vektörüdür. Önerme 7.1 gereği bu $F_*(\mathbf{v_p})$'dir. Aynı sonuç Sonuç 7.2'un $t = 0$ hâlidir; ikisi de yalnızca önermeyi ve eğri boyunca türev lemmasını kullandığından bir döngüsellik yoktur.
Sayısal örnek. $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $\mathbf{p} = (1, 0)$ ve $\mathbf{v} = (0, 1)$ olsun.

- Doğru: $(1, t)$'nin görüntüsü $(1 - t^2, 2t)$ parabolüdür; $t = 0$'daki hızı $(0, 2)$.
- Çember: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ için $\alpha(0) = (1, 0)$ ve $\alpha'(0) = (0, 1)$; başlangıç hızı aynıdır. Görüntü $(\cos 2t, \sin 2t)$ birim çemberidir ve $t = 0$'daki hızı $(-2\sin 0, 2\cos 0) = (0, 2)$.

İki görüntü eğrisi çok farklıdır, biri parabol öteki çember, ama $(1, 0)$'daki başlangıç hızları aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Neden önemli? $F_*(\mathbf{v_p})$ yalnızca $\mathbf{v_p}$'ye bağlıdır, $\mathbf{p}$'den hangi yolla ayrıldığımıza bağlı değildir. Böylece hesapta en uygun eğriyi seçebiliriz; genel zincir kuralının ispatı (Alıştırma 7.16) tam olarak bu serbestliğe dayanır.
■

Alıştırma 7.15 (İki Dönüşümün Bileşkesi Bir Dönüşümdür). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ iki dönüşüm olsun. $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ bileşkesinin de bir dönüşüm olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları. $F = (f_1, ..., f_m)$ ve $G = (g_1, ..., g_k)$ olsun. Her $\mathbf{p}$ için

$$(G \circ F)(\mathbf{p}) = G\,\big(\, f_1(\mathbf{p}), ..., f_m(\mathbf{p}) \,\big)$$

noktasının i-inci koordinatı $g_i\,\big(\, f_1(\mathbf{p}), ..., f_m(\mathbf{p}) \,\big)$'dir. Demek ki $G \circ F$'nin i-inci koordinat fonksiyonu $g_i(f_1, ..., f_m) = g_i \circ F$ yerleştirmesidir.
Diferansiyellenebilirlik. g_i, m değişkenli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur; $f_1, ..., f_m$ de $\mathbb{R}^n$ üzerinde diferansiyellenebilirdir. Zincir kuralı gereği $g_i(f_1, ..., f_m)$ diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{\partial(g_i \circ F)}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_l}(f_1, ..., f_m)\,\frac{\partial f_l}{\partial x_j}.$$

Bu $i = 1, ..., k$ için geçerli olduğundan $G \circ F$'nin bütün koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilirdir; $G \circ F$ bir dönüşümdür.
$m = k = 2$ *hâli.* Bileşke $\big(\, g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2) \,\big)$'dir. Örneğin $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ ve $G(x, y) = (x + y, xy)$ için

$$G \circ F = \big(\, u^2 - v^2 + 2uv,\, 2uv\,(u^2 - v^2) \,\big),$$

koordinatları polinom olan bir dönüşüm.
■

Alıştırma 7.16 (Genel Zincir Kuralı). $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ iki dönüşüm olsun. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Kurulum. $\mathbf{v_p}$, $\mathbb{R}^n$'ye bir teğet vektör olsun. Alıştırma 7.15 gereği $G \circ F$ bir dönüşümdür ve teğet dönüşümü tanımlıdır. $\beta(t) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ eğrisi $\mathbb{R}^m$'dedir; tanım gereği $\beta(0) = F(\mathbf{p})$ ve $\beta'(0) = F_*(\mathbf{v_p})$.
Sol yan. $(G \circ F)_*(\mathbf{v_p})$, $t \mapsto (G \circ F)(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ eğrisinin başlangıç hızıdır. Bu eğri $G(\beta)$'dır.
Sağ yan. Alıştırma 7.14'yi G dönüşümüne, $F(\mathbf{p})$ noktasına ve başlangıç hızı $F_*(\mathbf{v_p})$ olan β eğrisine uygulayalım: $G(\beta)$'nın başlangıç hızı $G_*\,\big(\, F_*(\mathbf{v_p}) \,\big)$'dir.
Sonuç. İki yan aynı $G(\beta)$ eğrisinin başlangıç hızıdır:

$$(G \circ F)_*(\mathbf{v_p}) = G_*\,\big(\, F_*(\mathbf{v_p}) \,\big)\,.$$

Bu her teğet vektör için doğru olduğundan $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$; bir noktada yazarsak $(G \circ F)_{*\mathbf{p}} = G_{*F(\mathbf{p})} \circ F_{*\mathbf{p}}$.
Jacobi matrisleriyle. Lineer dönüşümlerin bileşkesine matrislerin çarpımı karşılık gelir; dolayısıyla

$$J_{G\circ F}(\mathbf{p}) = J_G\,\big(\, F(\mathbf{p}) \,\big)\,J_F(\mathbf{p}).$$

Bunu elle de görebiliriz. $J_{G\circ F}(\mathbf{p})$'nin j-inci sütunu $(G \circ F)_*(U_j(\mathbf{p}))$'nin vektör kısmıdır. Sonuç 7.3 ve lineerlikle

$$\begin{aligned} G_*\,\big(\, F_*(U_j(\mathbf{p})) \,\big) &= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\mathbf{p})\, G_*\,\big(\, \overline{U}_l(F(\mathbf{p})) \,\big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_l}(F(\mathbf{p}))\,\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\mathbf{p}) \Big) \hat{U}_i\,\big(\, G(F(\mathbf{p})) \,\big) \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; burada $\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_k$, $\mathbb{R}^k$'nin doğal çatısıdır. Parantez içindeki toplam, matris çarpımının (i,j) elemanıdır ve aynı zamanda zincir kuralının verdiği $\partial(g_i \circ F)/\partial x_j(\mathbf{p})$'dir. Kısa $(G\circ F)_* = G_* \circ F_*$ formülü, boyutlar büyüdükçe matrislerle yazıldığında göz korkutucu hâle gelen bu hesabı tek satırda toplar. Bu formüle **genel zincir kuralı** (chain rule) denir.
■

Alıştırma 7.17 (Difeomorfizmanın Tersi de Difeomorfizmadır). $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir difeomorfizma ise F^{-1}'in de bir difeomorfizma olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
F^{-1} bir dönüşümdür. Difeomorfizma tanımı gereği F^{-1} diferansiyellenebilirdir.
F^{-1} birebir ve örtendir. $F^{-1}(\mathbf{y}) = F^{-1}(\mathbf{y}')$ ise iki yana F uygulanınca $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\mathbf{x} = F^{-1}(F(\mathbf{x}))$ olduğundan $\mathbf{x}$ bir görüntüdür. Ayrıca $F^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ ile $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ aynı ilişki olduğundan F^{-1}'in tersi F'dir.
Tersi diferansiyellenebilirdir. F^{-1}'in tersi olan F bir dönüşümdür. Tanımın bütün koşulları sağlanır: F^{-1} bir difeomorfizmadır.
Teğet dönüşümleri birbirinin tersidir. Özdeşlik dönüşümü $I(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ lineerdir; Alıştırma 7.10 gereği $I_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \mathbf{v}_\mathbf{p}$. $F^{-1}\circ F$, $\mathbb{R}^n$'nin, $F\circ F^{-1}$ de $\mathbb{R}^m$'nin özdeşlik dönüşümüdür. Alıştırma 7.16'yi iki bileşkeye uygularsak

$$(F^{-1})_{*F(\mathbf{p})} \circ F_{*\mathbf{p}} = \text{özdeşlik}, \qquad F_{*\mathbf{p}} \circ (F^{-1})_{*F(\mathbf{p})} = \text{özdeşlik}$$

bulunur. Birincisinden $F_{*\mathbf{p}}$ birebir, ikincisinden örtendir. Demek ki bir difeomorfizmanın teğet dönüşümü her noktada bir lineer izomorfizmadır ve tersi, ters dönüşümün teğet dönüşümüdür. Özellikle her difeomorfizma düzgündür.
Sayısal denetim. Örnek 7.16'daki $F = (x-y, x+y, 2z)$ dönüşümü ve orada bulunan tersi için Jacobi matrislerinin çarpımı

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Alıştırma 7.18 (Üstel Dönüşümün Birebirliği, Örtenliği ve Düzgünlüğü). $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(u,v) = (v\,e^u, 2u)$ olsun. F'nin birebir, örten ve düzgün olduğunu göstererek bir difeomorfizma olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Dönüşüm. Koordinat fonksiyonları $v\,e^u$ ve $2u$, diferansiyellenebilir fonksiyonların çarpımıdır.
Birebir. $F(a,b) = F(a',b')$ olsun. İkinci koordinatlardan $2a = 2a'$, yani $a = a'$. Birinci koordinatlardan $b\,e^a = b'\,e^a$ ve $e^a > 0$ olduğundan $b = b'$.
Örten. Bir (x,y) noktası verilsin. $a = y/2$ ve $b = x\,e^{-y/2}$ seçelim:

$$F(a,b) = \left(x\,e^{-y/2}\,e^{y/2}, 2\cdot\frac{y}{2} \right) = (x,y).$$

Düzgün. Kısmi türevlerden

$$J_F(u,v) = \begin{pmatrix} v\,e^u & e^u \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det J_F(u,v) = 0 - 2e^u = -2e^u.$$

e^u hiçbir zaman sıfır olmadığından determinant her noktada sıfırdan farklıdır; Önerme 7.2 gereği $F_{*\mathbf{p}}$ her noktada birebirdir.
Sonuç. F birebir, örten ve düzgündür; Alıştırma 7.12 gereği bir difeomorfizmadır. Bu yol ters fonksiyon teoremine dayanır ve tersin formülünü vermez; ikinci yol Alıştırma 7.19'dedir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 7.19 (Üstel Dönüşümün Açık Tersi). $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(u,v)=(v\,e^{u},\,2u)$ olsun. F^{-1}'in formülünü bulup iki bileşkeyle denetleyerek F'nin bir difeomorfizma olduğunu ikinci bir yoldan gösteriniz.

Çözüm.
Formülü bulmak. $F(u,v)=(x,y)$ denklemleri $v\,e^{u}=x$ ve $2u=y$'dir. İkinciden $u=y/2$, birinciden $v=x\,e^{-u}=x\,e^{-y/2}$. Aday ters

$$G(x,y)=\left(\,y/2,\,x\,e^{-y/2}\,\right).$$

Diferansiyellenebilirlik. G'nin koordinat fonksiyonları $y/2$ ve $x\,e^{-y/2}$'dir; G bir dönüşümdür.
$F\circ G$ özdeşliktir. Her (x,y) için

$$F(G(x,y))=\left(\,x\,e^{-y/2}\,e^{y/2},\,2\cdot y/2\,\right)=(x,y).$$

$G\circ F$ özdeşliktir. Her (u,v) için

$$G(F(u,v))=G(v\,e^{u},2u)=\left(\,u,\,v\,e^{u}\,e^{-u}\,\right)=(u,v).$$

Sonuç. İki bileşke de özdeşlik olduğundan F birebir ve örtendir ve $F^{-1}=G$. G diferansiyellenebilir olduğundan F bir difeomorfizmadır. Bu yolda ters fonksiyon teoremine gerek kalmadı. Yalnızca $F\circ G$'yi denetlemek F'nin örten olduğunu, yalnızca $G\circ F$'yi denetlemek birebir olduğunu gösterirdi; ikisi birlikte G'nin gerçekten ters olduğunu gösterir.
Teğet dönüşümleriyle denetim. $\mathbf{p}=(0,1)$ için $F(\mathbf{p})=(1,0)$ ve $G(1,0)=(0,1)$. Jacobi matrisleri

$$J_F(0,1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\qquad J_G(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$$

olup çarpımları birim matristir, Alıştırma 7.17'nin öngördüğü gibi. Burada $J_G(x,y)$'nin satırları $(0,\,1/2)$ ve $(e^{-y/2},\,-\tfrac{x}{2}e^{-y/2})$'dir.
■

Alıştırma 7.20 (Düzgün Ama Birebir Olmayan Dönüşüm). $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(u,v)=(e^{u}\cos v,\,e^{u}\sin v)$ olsun. F'nin her noktada düzgün olduğu hâlde bir difeomorfizma olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Jacobi matrisi. Kısmi türevlerden

$$J_F(u,v)=\begin{pmatrix}e^{u}\cos v & -e^{u}\sin v\\ e^{u}\sin v & e^{u}\cos v\end{pmatrix}.$$

Düzgünlük. Determinant

$$\det J_F=e^{2u}\cos^2 v+e^{2u}\sin^2 v=e^{2u}>0$$

olup hiçbir noktada sıfır değildir; F düzgündür.
Birebir değil. Sinüs ve kosinüs 2π periyotlu olduğundan $F(u,v+2\pi)=F(u,v)$; örneğin $F(0,0)=F(0,2\pi)=(1,0)$.
Örten de değil. $F(u,v)$'nin başlangıç noktasına uzaklığı $e^{u}>0$'dır; başlangıç noktası hiçbir zaman görüntü olmaz.
Sonuç. F birebir ve örten olmadığından ters fonksiyonu yoktur, dolayısıyla bir difeomorfizma değildir. Her noktada düzgün olmak global bir ters garanti etmez.
Yerel tersler yine de vardır. Ters fonksiyon teoremi her noktanın çevresinde bir difeomorfizma verir. Örneğin $-\pi<v<\pi$ şeridi, düzlemden $\{(x,0):x\le 0\}$ yarı doğrusu çıkarılarak elde edilen kümenin üzerine birebir gider. Geometrik olarak F, dikey doğruları başlangıç noktası merkezli çemberlere, yatay doğruları başlangıç noktasından çıkan ışınlara götürür; yüksekliği 2π olan her yatay şeridi, başlangıç noktası çıkarılmış düzlemin çevresine bir kez sarar. Karmaşık sayılarla bu, $u+iv\mapsto e^{u+iv}$ üstel fonksiyonudur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 7.21 (Düzlemi Silindire Saran Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ olsun. F'nin düzgün bir dönüşüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Jacobi matrisi. Üç koordinat fonksiyonu ve iki değişken olduğundan matris üç satırlı, iki sütunludur:

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sütunlar bağımsızdır. $\mathbf{c}_1 = (-\sin u, \cos u, 0)$ ve $\mathbf{c}_2 = (0, 0, 1)$ için $a\,\mathbf{c}_1 + b\,\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$ olsun. Üçüncü koordinat $b = 0$ verir. Geriye $a\,(-\sin u, \cos u) = (0, 0)$ kalır; $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ olduğundan bu vektörün koordinatlarından en az biri sıfırdan farklıdır ve $a = 0$ çıkar.
Sonuç. Rank, tanım uzayının boyutu olan 2'dir; Önerme 7.2 gereği $F_{*\mathbf{p}}$ her noktada birebirdir ve F düzgündür.
Geometrik anlam. F'nin görüntüsü $x^2 + y^2 = 1$ silindiridir. $F_*(U_1(\mathbf{p}))$ silindirin yatay çemberine teğet, $F_*(U_2(\mathbf{p}))$ ise düşey doğrultudadır. Örneğin $\mathbf{p} = (\pi/2, 1)$'de $F(\mathbf{p}) = (0, 1, 1)$, $F_*(U_1(\mathbf{p})) = (-1, 0, 0)$ ve $F_*(U_2(\mathbf{p})) = (0, 0, 1)$; iki vektör de $(0, 1, 1)$'de uygulanır.
Düzgün ama birebir değil. $F(u + 2\pi, v) = F(u, v)$ olduğundan F düzlemi silindirin çevresine sonsuz kez sarar. Düzgünlük, bir dönüşümün hiçbir yönü ezmediğini söyler; noktaları birbirinden ayırdığını söylemez.
■

Alıştırma 7.22 (Bileşkenin Jacobi Matrisini İki Yoldan Hesaplamak). $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ ve $H = F \circ F$ olsun. H'nin $\mathbf{p} = (1, 1)$'deki Jacobi matrisini hem genel zincir kuralıyla hem de H'yi açıkça yazarak hesaplayınız.

Çözüm.
Zincir kuralıyla. Alıştırma 7.16 gereği $J_H(\mathbf{p}) = J_F(F(\mathbf{p}))\, J_F(\mathbf{p})$. $F(1, 1) = (0, 2)$ ve Alıştırma 7.8'daki formülden

$$J_F(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J_F(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Çarpım:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Açık formülle. $H(u, v) = F(u^2 - v^2, 2uv)$'nin koordinatları

$$h_1 = (u^2 - v^2)^2 - (2uv)^2 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4,$$
$$h_2 = 2(u^2 - v^2)(2uv) = 4u^3v - 4uv^3.$$

Kısmi türevler $(1, 1)$'de:

	$\partial/\partial u$	$\partial/\partial v$
h_1	$4u^3 - 12uv^2 = -8$	$-12u^2v + 4v^3 = -8$
h_2	$12u^2v - 4v^3 = 8$	$4u^3 - 12uv^2 = -8$

Matris aynıdır.
Yorum. F karmaşık sayılarda kare alma olduğundan H, dördüncü kuvvet alma işlemidir. Matris $8\sqrt{2}$ ile $3\pi/4$ açılı dönmenin çarpımıdır; gerçekten $8\sqrt{2}\cos(3\pi/4) = -8$ ve $8\sqrt{2}\sin(3\pi/4) = 8$. Zincir kuralı açıları toplar $(\pi/4 + \pi/2)$ ve uzatma katsayılarını çarpar $(2\sqrt{2} \cdot 4)$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümle birlikte Öklid uzayında analizin bütün temel nesnelerini ve onların türev işlemlerini kurmuş olduk; bir sonraki bölümde (Öklid Uzayında Analizin Özeti) bu nesneleri ve aralarındaki bağları toplu bir bakışla bir araya getireceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Öklid Uzayında Analizin Özeti

Bu kısma yalnızca $\mathbb{R}^3$'ün noktaları ve gerçel değerli fonksiyonlarla başladık. Öklid Uzayı bölümünden Dönüşümler bölümüne kadar bunların üstüne lineer cebirle yeni katlar ekledik: teğet vektörler ve vektör alanları, onların duali olan 1-formlar, kama çarpımıyla kurulan yüksek dereceli formlar ve dönüşümler. Bu kavramların çoğu özel hâlleriyle analizden tanıdıktır; yeni olan, hepsinin kesin tanımlarla ve ortak bir dille kurulmasıdır.
Her nesneye uygun bir türev de tanımladık: yönlü türev, hız, diferansiyel, dış türev, teğet dönüşümü. Bu bölüm yeni tanım getirmiyor; nesneleri yan yana koyup üç ortak özelliği görünür kılıyor: türevler lineerdir ve bir çarpım ya da zincir kuralına uyar; aynı bilgi farklı nesnelerin diliyle söylenebilir; tanımlar koordinatsızdır ama hesaplar koordinat fonksiyonlarının türevlerine iner.

8.1 Nesneler ve Türevleri

Tabloda toplamlar üç koordinat üzerindendir; a, b sayılar, f, g, h uygun kümelerde diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

nesne	türevi	koordinatlarda	lineerlik ve Leibniz
Fonksiyon ve teğet vektör: f, $\mathbf{v}_\mathbf{p}$	yönlü türev $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$, bir sayı (Tanım 3.1)	$\sum_i v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$ (Lemma 3.1)	$\mathbf{v}_\mathbf{p}$'ye ve f'ye göre lineer; $\mathbf{v}_\mathbf{p}[fg] = \mathbf{v}_\mathbf{p}[f]\,g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\,\mathbf{v}_\mathbf{p}[g]$ (Teorem 3.1)
Vektör alanı: $V = \sum_i v_i U_i$	$V[f]$, bir fonksiyon: $V[f](\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})[f]$	$V[f] = \sum_i v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$	$V[af+bg] = a\,V[f] + b\,V[g]$; $(fV+gW)[h] = f\,V[h] + g\,W[h]$; $V[fg] = V[f]\,g + f\,V[g]$ (Sonuç 3.1)
Eğri: $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$	hız $\alpha'(t)$, $\alpha(t)$'de bir teğet vektör (Tanım 4.2)	$\alpha'(t) = \sum_i \dfrac{d\alpha_i}{dt}(t)\,U_i(\alpha(t))$	vektör kısımlarında $(a\alpha+b\beta)' = a\alpha' + b\beta'$ ve $(g\alpha)' = g'\alpha + g\alpha'$; $\big(\alpha(h)\big)' = h'\,\alpha'(h)$ (Lemma 4.1)
1-form: $\phi = \sum_i f_i\,dx_i$	diferansiyel df, bir 1-form: $df(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ (Tanım 5.5)	$df = \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$ (Sonuç 5.1); $f_i = \phi(U_i)$ (Lemma 5.1)	$d(af+bg) = a\,df + b\,dg$; $d(fg) = g\,df + f\,dg$ (Lemma 5.2); $d(h(f)) = h'(f)\,df$ (Lemma 5.3)
Diferansiyel form: ϕ, ψ, η	dış türev, derecesi bir artmış form (Tanım 6.2)	$d\left(\sum_i f_i\,dx_i\right) = \sum_i df_i \wedge dx_i$; bir 2-formda katsayılar diferansiyelleriyle değiştirilir	$d(a\phi+b\psi) = a\,d\phi + b\,d\psi$; 1-formlar için $d(\phi\wedge\psi) = d\phi\wedge\psi - \phi\wedge d\psi$ (Teorem 6.1); $d(df) = 0$
Dönüşüm: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	teğet dönüşümü F_*: $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$, $F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ eğrisinin başlangıç hızı (Tanım 7.3)	$F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \big(\mathbf{v}_\mathbf{p}[f_1], \ldots, \mathbf{v}_\mathbf{p}[f_m]\big)_{F(\mathbf{p})}$ (Önerme 7.1); Jacobi matrisi (Sonuç 7.3)	F_* lineer (Sonuç 7.1); $\beta' = F_*(\alpha')$ (Sonuç 7.2); $(G\circ F)_* = G_*\circ F_*$

 CC BY-NC-SA 4.0

Son sütunda bir örüntü var: her türev lineerdir ve çarpımın türevi $(uv)' = u'v + uv'$ kuralının bir benzerine uyar. Dış türevde çarpım kama çarpımıdır ve eksi işareti ters değişme kuralından gelir; dönüşümlerde çarpımın yerini bileşke, Leibniz kuralının yerini zincir kuralı alır.
Eğri satırındaki iki özellik, $a\alpha_i + b\beta_i$ ve $g\alpha_i$ koordinatlarını tek değişkenli türev kurallarıyla türevlemekten çıkar; uygulama noktaları genellikle farklı olduğundan eşitlikler yalnızca vektör kısımları arasındadır. Dış türev satırındaki $d(df) = 0$, karışık kısmi türevlerin sıradan bağımsız olmasının form dilindeki karşılığıdır. $df = \sum_j (\partial f/\partial x_j)\, dx_j$ olduğundan dış türevin tanımı ve Sonuç 5.1 gereği

$$d(df) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j.$$

$i = j$ terimleri $dx_i \wedge dx_i = 0$ olduğundan düşer. $i \neq j$ için (i,j) ile (j,i) terimlerinin katsayıları kısmi türevler sürekli olduğundan eşit, formları ise birbirinin eksisidir (Lemma 6.1); bu terimler birbirini götürür.

8.2 Vektör Alanları ve 1-Formlar

Bir $\mathbf{p}$ noktasında teğet uzayı $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ ile onun dual uzayı yan yana durur. Bir vektör alanı her noktada birinci uzaydan (Tanım 2.4), bir 1-form ikincisinden (Tanım 5.1) bir eleman seçer ve doğal tabanlar birbirine uyar:

$$dx_i(U_j) = \delta_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3).$$

Yani her noktada $dx_1, dx_2, dx_3, U_1, U_2, U_3$ tabanının dual tabanıdır. Bunun üç sonucu var.
Koordinatları okumak. $V = \sum_j v_j U_j$ ise $dx_i(V) = \sum_j v_j\, \delta_{ij} = v_i$ olur; bir 1-formun koordinat fonksiyonları da $f_i = \phi(U_i)$'dir (Lemma 5.1). Yani dx_i'ler vektör alanlarının, U_i'ler de 1-formların koordinatlarını okur.
Eşleştirme. $\phi = \sum_i f_i\, dx_i$ ve $V = \sum_i v_i U_i$ için her noktada $\phi(V) = \sum_i f_i\, dx_i(V)$ olduğundan

$$\phi(V) = \sum_{i=1}^{3} f_i\, v_i$$

bulunur: vektör alanıyla 1-form birlikte bir fonksiyon üretir.
Yönlü türev ile diferansiyel. $df(V) = V[f]$ eşitliğinin solunda 1-form vektör alanına, sağında vektör alanı fonksiyona uygulanıyor; iki yan da $\sum_i v_i\, \partial f/\partial x_i$ fonksiyonudur. Bu yüzden tablonun ilk iki satırı ile dördüncü satırı aynı bilgiyi taşır (bkz. Alıştırma 8.5).

8.3 Fonksiyonlar ve Eğriler Birer Dönüşümdür

Dönüşüm kavramı (Tanım 7.1) fonksiyonları da eğrileri de içine alır: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $n = 3, m = 1$ olan; $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ise $n = 1$, $m = 3$ olan, bir açık aralıkta tanımlı bir dönüşümdür. Dönüşüm sonuçları açık kümelerde de geçerli olduğundan teğet dönüşümünü ikisinde de kullanabiliriz. $s \in \mathbb{R}$ noktasında uygulanan ve vektör kısmı c olan teğet vektörü $(c)_s$ ile gösterelim.
Fonksiyonun teğet dönüşümü. Önerme 7.1, $m = 1$ için

$$f_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = \big(\ \mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]\big)_{f(\mathbf{p})} = \big(\ df(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})\big)_{f(\mathbf{p})}$$

verir: teğet dönüşümü ile diferansiyel aynı sayıyı, biri $f(\mathbf{p})$'de bir teğet vektör, öteki yalın sayı olarak üretir. f'nin tek satırlı Jacobi matrisi df'nin $\mathbf{p}$'deki katsayılarıdır:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Eğrinin teğet dönüşümü. α'nın teğet dönüşümünü t noktasındaki $(1)_t$ vektörüne uygulayalım. Formüldeki yönlü türevler tek değişkenlidir: tanım gereği $(1)_t[\alpha_i]$, $u \mapsto \alpha_i(t+u)$ fonksiyonunun $u = 0$'daki türevidir, yani $\alpha_i'(t)$'dir. Böylece

$$\alpha_*\ \big(\ (1)_t\ \big) = \big(\ \alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)\big)_{\alpha(t)} = \alpha'(t).$$

Lineerlik gereği her c için $\alpha_*\ \big(\ (c)_t\ \big) = c\,\alpha'(t)$; α'nın tek sütunlu Jacobi matrisi hızın vektör kısmıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 8.1 (Beş Dilde Aynı Sayı). $f = x^2 + yz$ fonksiyonu, $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ noktası ve $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ vektörü verilsin. f'nin $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde çıkarken ilk andaki değişim hızını yönlü türev, eğri, vektör alanı, 1-form ve dönüşüm dilleriyle ayrı ayrı hesaplayalım.

Çözüm.
Yönlü türevin tanımıyla. $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 2 - t, 3 + 2t)$ olduğundan

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1 + t)^2 + (2 - t)(3 + 2t) = 7 + 3t - t^2.$$

Bu fonksiyonun türevi $3 - 2t$, $t = 0$'daki değeri 3'tür: $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f] = 3$ (Tanım 3.1).
Eğri diliyle. Doğru olmayan $\alpha(t) = (e^t, 2 - \sin t, 3 + 2t)$ eğrisini alalım. $\alpha(0) = (1, 2, 3) = \mathbf{p}$ ve hızın vektör kısmı $(e^t, -\cos t, 2)$ olduğundan $\alpha'(0) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Lemma 4.2 gereği $\alpha'(0)[f]$, aşağıdaki fonksiyonun $t = 0$'daki türevidir:

$$f(\alpha(t)) = e^{2t} + (2 - \sin t)(3 + 2t).$$

Türev $2e^{2t} - \cos t\,(3 + 2t) + 2(2 - \sin t)$ olup $t = 0$'da $2 - 3 + 4 = 3$ değerini alır.
Vektör alanı diliyle. $V = U_1 - U_2 + 2U_3$ sabit vektör alanı $V(\mathbf{p}) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ sağlar. Koordinat formülüyle

$$V[f] = 1 \cdot 2x + (-1) \cdot z + 2 \cdot y = 2x - z + 2y,$$

ve bu fonksiyonun $\mathbf{p}$'deki değeri $2 - 3 + 4 = 3$'tür.
1-form diliyle. Sonuç 5.1 ile $df = 2x\,dx + z\,dy + y\,dz$. $\mathbf{p}$'de katsayılar 2, 3, 2 olduğundan

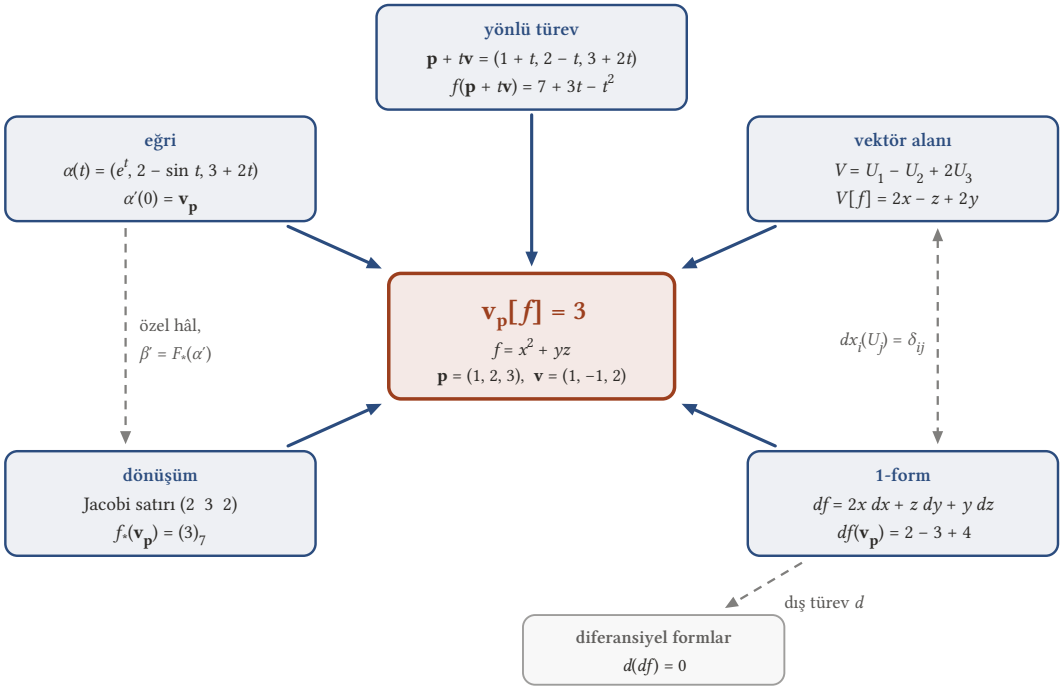
$$df(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3.$$

Dönüşüm diliyle. f'yi $\mathbb{R}^3$'ten $\mathbb{R}$'ye bir dönüşüm sayalım; $f(\mathbf{p}) = 1 + 6 = 7$. Sonuç 7.3 gereği $f_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$'nin vektör kısmı, $\mathbf{p}$'deki tek satırlı Jacobi matrisi ile $\mathbf{v}$ sütununun çarpımıdır:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Dolayısıyla $f_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (3)_7$.
Neden hep 3? Beş hesabın özü aynıdır: kısmi türevler 2, 3, 2 ile $\mathbf{v}$'nin koordinatları 1, -1, 2 terim terim çarpılıp toplanır; nesneler sonucu sayı, fonksiyon değeri, form değeri ya da vektör kısmı olarak sunar. Eğri dili ayrıca sonucun yalnızca başlangıç hızına bağlı olduğunu gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: $f = x^2 + yz$, $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ ve $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ için yönlü türev, eğri, vektör alanı, 1-form ve dönüşüm dilleri (mavi kutular) aynı $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f] = 3$ sayısına varır. Beş hesabın özü aynıdır: kısmi türevler 2, 3, 2 ile $\mathbf{v}$'nin koordinatları 1, −1, 2 terim terim çarpılıp toplanır; 1-form kutusundaki $2 - 3 + 4$ bu toplamdır. Gri kesikli oklar diller arasındaki bağları gösterir: $dx_i(U_j) = \delta_{ij}$ dualitesi vektör alanlarını 1-formlara bağlar, eğri dili $\beta' = F_*(\alpha')$ kuralıyla dönüşüm dilinin özel hâlidir, dış türev ise 1-formları $d(df) = 0$ kuralının geçtiği daha yüksek dereceli diferansiyel formlara taşır.

■

8.4 Zincir Kuralının Üç Yüzü

Kurduğumuz üç sonuç, "bileşkenin türevi türevlerin bileşkesidir" ilkesinin farklı boyutlardaki hâlleridir:

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t), \qquad \beta' = F_*(\alpha'), \qquad (G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

Burada $f \circ \alpha = f(\alpha)$ ve $\beta = F(\alpha)$'dır. Eşitlikler sırasıyla eğriden sonra fonksiyon (Lemma 4.2), eğriden sonra dönüşüm (Sonuç 7.2) ve dönüşümden sonra dönüşüm uygulandığında türevi verir.
Birinci, ikincinin özel hâlidir. İkincide F yerine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ koyalım. $f \circ \alpha$ eğrisinin hızının vektör kısmı $(f \circ \alpha)'(t)$, $f_* \left(\alpha'(t) \right)$'nin vektör kısmı ise $\alpha'(t)[f]$'dir; ikinci eşitlik bunları eşitler.
İkinci, üçüncünün özel hâlidir. α'yı bir dönüşüm sayıp üçüncü eşitliği $F \circ \alpha$ bileşkesine ve $(1)_t$ vektörüne uygulayalım. $\beta = F \circ \alpha$ da bir eğri olduğundan hızı $\beta_* \left((1)_t \right)$'dir ve

$$\beta'(t) = (F \circ \alpha)_* \left((1)_t \right) = F_* \left(\alpha_*((1)_t) \right) = F_* \left(\alpha'(t) \right).$$

Üçüncü, ikinciden çıkar. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dönüşümler olsun. $G \circ F$'nin koordinat fonksiyonları $g_j(f_1, \ldots, f_m)$'dir; zincir kuralı bunların kısmi türevlerini, g_j'nin kısmi türevlerinin F ile bileşkeleriyle f_k'lerin kısmi türevlerinin çarpımlarının toplamı olarak verir. Terimler yine aynı türden olduğundan tümevarımla her mertebeden kısmi türevler vardır ve süreklidir: $G \circ F$ bir dönüşümdür. Bir $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ için $\beta(t) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ olsun. Tanım gereği $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \beta'(0)$ ve $(G \circ F)_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$, $G(\beta)$ eğrisinin $t = 0$'daki hızıdır. Sonuç 7.2'u G ve β'ya uygularsak bu hız $G_* \left(\beta'(0) \right)$ olur. Birleştirince

$$(G \circ F)_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = G_* \left(\beta'(0) \right) = G_* \left(F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) \right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Döngü yoktur: birinci ve ikinci eşitlik kendi bölümlerinde doğrudan ispatlandı, üçüncüyü ikinciden çıkardık; üç eşitlik birbirine denktir.
Aynı kural matrislerle de yazılabilir. Sonuç 7.3'ne göre F'nin $\mathbf{p}$'deki Jacobi matrisi $J_F(\mathbf{p})$, $F_{*\mathbf{p}}$'nin doğal çatılara göre matrisidir. Lineer dönüşümlerin bileşkesinin matrisi matrislerin çarpımı olduğundan

$$J_{G\circ F}(\mathbf{p}) = J_G\,\big(\,F(\mathbf{p})\,\big)\,J_F(\mathbf{p})$$

bulunur.

8.5 Koordinatlar ve Tanımlar

Tablonun üçüncü sütunundaki formüllerin hepsi koordinat fonksiyonlarının adi ya da kısmi türevlerine iner. Buna karşın tanımların çoğu koordinat içermez: $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$, $f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$'nin $t=0$'daki türevidir; $V[f]$ bunu her noktada yapar; df, $df(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ kuralıdır; $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$, $F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ eğrisinin başlangıç hızıdır. Bu tanımlarda yalnızca nokta toplamı, sayıyla çarpma ve tek değişkenli türev var.
Hız vektörünü koordinatlarla tanımladık, ama onun da koordinatsız bir tarifi var: $\alpha'(t)$'nin vektör kısmı, ölçeklenmiş kesen vektörlerin

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}$$

limitidir; burada da yalnızca nokta farkı ve sayıya bölme var.
Dış türevi de koordinatlarla, $d\phi = \sum_i df_i\wedge dx_i$ formülüyle tanımladık. Bu formül ise koordinatsız kurallarca zorunlu kılınır. Formlar üzerinde bir D işlemi düşünelim: fonksiyonlarda diferansiyelle çakışsın ($Df = df$), toplamaya uysun, bir fonksiyonla bir 1-formun çarpımında $D(f\phi) = df\wedge\phi + f\,D\phi$ kuralını sağlasın ve her g fonksiyonu için $D(dg)=0$ olsun. dx_i, x_i fonksiyonunun diferansiyeli olduğundan $D(dx_i)=0$'dır ve

$$D\Big(\sum_i f_i\,dx_i\Big) = \sum_i\big(\,df_i\wedge dx_i + f_i\,D(dx_i)\,\big) = \sum_i df_i\wedge dx_i.$$

Demek ki bu kuralları sağlayan her işlem 1-formlarda dış türevin ta kendisidir; dış türevin kuralları sağladığını da lineerliği, Teorem 6.1 ve yukarıdaki $d(df)=0$ hesabı gösteriyor. Koordinatlar yalnızca hesap aracıdır; bu yüzden ileride eğrilere ve yüzeylere uyarlanmış çatılar seçmekte özgür olacağız.

8.6 Tekrar Soruları

Her soru birden çok bölümün araçlarını birlikte kullanır.

Alıştırma 8.1 (Helis Boyunca Bir Diferansiyel). $f = xyz$ ve $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi verilsin. $df\,\big(\,\alpha'(t)\,\big)$ sayısını hem df 1-formunu hız vektörüne uygulayarak hem de $f(\alpha)$ fonksiyonunu türevleyerek hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> *Neden aynı çıkmalı?* Diferansiyelin tanımı (Tanım 5.5) ve Lemma 4.2 gereği
>
> $$df\,\big(\,\alpha'(t)\,\big) = \alpha'(t)[f] = \frac{d\,\big(\,f(\alpha)\,\big)}{dt}(t).$$
>
> İki yol bu zincirin iki ucunu hesaplar.
> *Birinci yol: 1-form.* Sonuç 5.1 ile $df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ noktasında katsayılar $t\sin t$, $t\cos t$ ve $\sin t\cos t$'dir. Hızın vektör kısmı $(-\sin t, \cos t, 1)$ olduğundan
>
> $$\begin{aligned} df\,\big(\,\alpha'(t)\,\big) &= -t\sin^2 t + t\cos^2 t + \sin t\cos t \\ &= t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t. \end{aligned}$$
>
> Son adımda iki kat açı formüllerini kullandık.
> *İkinci yol: bileşke.* $f(\alpha(t)) = t\cos t\sin t = \frac{t}{2}\sin 2t$. Çarpım kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}\sin 2t + t\cos 2t.$$

İki sonuç aynıdır.
Bir anda. $t = \pi/2$'de değer $\frac{\pi}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\sin\pi = -\frac{\pi}{2}$'dir: helis $x = 0$ düzlemini geçerken x negatife iner, $yz = \pi/2$ pozitif kalır, dolayısıyla f azalır.
■

Alıştırma 8.2 (Görüntü Eğrisinin Hızı İki Yoldan). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (xy, x+y, y^2)$ dönüşümü ve $\alpha(t) = (t, t^2)$ eğrisi verilsin. $\beta = F(\alpha)$ görüntü eğrisinin hızını hem β'yı doğrudan türevleyerek hem de $F_*(\alpha')$ olarak hesaplayınız.

Çözüm.
Birinci yol: doğrudan. Tanım 7.2 gereği $\beta(t) = F(t, t^2) = (t^3, t + t^2, t^4)$. Koordinatları türevleyerek

$$\beta'(t) = \big(\,3t^2, 1 + 2t, 4t^3\big)_{\beta(t)}.$$

İkinci yol: teğet dönüşümü. Koordinat fonksiyonları $f_1 = xy$, $f_2 = x + y$, $f_3 = y^2$ olduğundan Jacobi matrisi (Sonuç 7.3)

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

olur. $\alpha(t) = (t, t^2)$ noktasında satırları (t^2, t), $(1, 1)$ ve $(0, 2t^2)$'dir; $\alpha'(t)$'nin vektör kısmı $(1, 2t)$'dir. Sonuç 7.2 gereği $\beta'(t) = F_*\left(\,\alpha'(t)\,\right)$ ve bunun vektör kısmı matris ile sütunun çarpımıdır:

$$\begin{pmatrix} t^2 & t \\ 1 & 1 \\ 0 & 2t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 + 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}.$$

İki yol aynı vektör kısmını verir; uygulama noktası da ikisinde $F(\alpha(t)) = \beta(t)$'dir. İkinci yol β'nın formülünü değil, yalnızca α'nın o andaki konumunu ve hızını kullanır.
Bir anda. $t = 1$'de $\beta'(1) = (3, 3, 4)_{(1,2,1)}$.
■

Alıştırma 8.3 (Bileşkenin Teğet Dönüşümü Sayılarla). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x+y, xy)$ ve $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G(x,y) = x^2 - 2y$ olsun. $\mathbf{p} = (1,2)$ ve $\mathbf{v} = (3,-1)$ için $(G \circ F)_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$ teğet vektörünü hem bileşkeyi doğrudan türevleyerek hem de $G_*\left(\,F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})\,\right)$ olarak hesaplayınız.

Çözüm.
Birinci yol: bileşke. Bileşke bir fonksiyondur:

$$(G \circ F)(x,y) = (x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2.$$

Teğet dönüşümünün vektör kısmı diferansiyelin değeridir. $d(x^2 + y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy$, $\mathbf{p}$'de katsayılar 2 ile 4; değer $2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 2$. Uygulama noktası $1 + 4 = 5$ olduğundan

$$(G \circ F)_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = (2)_5.$$

İkinci yol, önce F_*. F'nin Jacobi matrisi ve bunun $\mathbf{p} = (1,2)$'deki değeri

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. İkinci matrisin $(3,-1)$ sütunuyla çarpımı $(2,5)$'tir. $F(\mathbf{p}) = (3,2)$ olduğundan $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = (2,5)_{(3,2)}$.
İkinci yol, sonra G_*. G'nin tek satırlı Jacobi matrisi ve bunun $(3,2)$ noktasındaki değeri

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(2x \ \ -2), \qquad (6 \ \ -2)$$

olur. İkincisini $(2,5)$ sütunuyla çarparsak $6\cdot 2 - 2\cdot 5 = 2$ buluruz. $G(3,2) = 9-4 = 5$ olduğundan $G_*\left(\ F_*(\mathbf{v_p})\ \right) = (2)_5$. İki yol uyuşur.
Matrisler düzeyinde. Jacobi matrislerinin çarpımı

$$(6 \ \ -2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ \ 4)$$

verir; bu, x^2+y^2'nin $\mathbf{p}$'deki kısmi türevlerinin satırıdır ve bileşkenin Jacobi matrisi formülünü doğrular.
■

Alıştırma 8.4 (Düzgün Dönüşüm Düzgün Eğriyi Korur). $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ düzgün bir dönüşüm ve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ düzgün bir eğri ise $\beta = F(\alpha)$ görüntü eğrisinin de düzgün olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Hız formülü. Sonuç 7.2 gereği her $t \in I$ için $\beta'(t) = F_*\left(\ \alpha'(t)\ \right)$; yani $\beta'(t)$, $F_{*\alpha(t)}$ lineer dönüşümünün $\alpha'(t)$'deki değeridir.
Birebirlik. F düzgün olduğundan (Tanım 7.4) $F_{*\alpha(t)}$ birebirdir. Lineer olduğundan (Sonuç 7.1) $\alpha(t)$'deki sıfır vektörünü $F(\alpha(t))$'deki sıfır vektörüne götürür. $\beta'(t)$ sıfır vektörü olsaydı, $\alpha'(t)$ ile sıfır vektörü aynı görüntüye sahip olurdu ve birebirlikten $\alpha'(t) = \mathbf{0}$ çıkardı.
Sonuç. α düzgün olduğundan (Tanım 4.6; $\mathbb{R}^n$'deki eğriler için tanım aynıdır) her t için $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$. Demek ki her t için $\beta'(t) \neq \mathbf{0}$ ve β düzgündür. İspatta F'nin yalnızca α'nın noktalarında düzgünlüğü kullanıldı.
Varsayım gerekli. $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ dönüşümünün Jacobi matrisi

$$\begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

orijinde sıfır matrisidir; F orada düzgün değildir. Hızının vektör kısmı hep $(1,0)$ olan düzgün $\alpha(t) = (t,0)$ eğrisinin görüntüsü $\beta(t) = (t^2,0)$'dır ve $\beta'(0) = \mathbf{0}$: görüntü noktası x ekseninin pozitif yarısında orijine gelir, bir an durur ve aynı yoldan geri döner.
■

Alıştırma 8.5 (Çarpım Kuralının İki Yüzü). V bir vektör alanı, f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $d(fg) = g\,df + f\,dg$ kuralını ve $df(V) = V[f]$ eşitliğini kullanarak $V[fg] = V[f]\,g + f\,V[g]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Dualiteye geçiş. $df(V) = V[f]$ eşitliği fg fonksiyonu için de geçerlidir: $V[fg] = d(fg)(V)$. Lemma 5.2 ile bu, $(g\,df + f\,dg)(V)$ fonksiyonudur.
Noktasal değerlendirme. 1-formların toplamı ve fonksiyonla çarpımı noktasal tanımlandığından her $\mathbf{p}$ için

$$(g\,df + f\,dg)(V)(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})\,df\left(\ V(\mathbf{p})\ \right) + f(\mathbf{p})\,dg\left(\ V(\mathbf{p})\ \right).$$

Sağ yan $\left(\ g\,V[f] + f\,V[g]\ \right)(\mathbf{p})$'dir. Bu her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan $V[fg] = V[f]\,g + f\,V[g]$.
Ters yön. Vektör alanlarının çarpım kuralından da 1-formlarınki çıkar; iki yanı U_i üzerinde değerlendirelim:

$$d(fg)(U_i) = U_i[fg] = U_i[f]\,g + f\,U_i[g] = (g\,df + f\,dg)(U_i).$$

Koordinat fonksiyonları aynı olan iki 1-form eşit olduğundan (Lemma 5.1) $d(fg) = g\,df + f\,dg$. İki kural, dualite aracılığıyla aynı gerçeğin iki yüzüdür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 8.6 (Yeniden Parametrelendirme ve Zincir Kuralı). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri, $h : J \to I$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\beta = \alpha(h)$ olsun. Yeniden parametrelendirmenin hız formülünü $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ zincir kuralından çıkarınız.

Çözüm.
Hedef. Göstermek istediğimiz eşitlik (Lemma 4.1)

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}(s)\, \alpha'(h(s)).$$

Eğriler dönüşüm olarak. α, h ve $\beta = \alpha \circ h$ açık aralıklarda tanımlı dönüşümlerdir. Bölümün başındaki hesap her eğri için $\alpha_* \left((c)_t \right) = c\, \alpha'(t)$ verir; $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden h için aynı hesaptan

$$h_* \left((1)_s \right) = \left(h'(s) \right)_{h(s)}$$

çıkar; burada $h'(s) = \dfrac{dh}{ds}(s)$.
Zincir kuralı. Hızı, teğet dönüşümünün birim vektöre uygulanması olarak yazalım:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= (\alpha \circ h)_* \left((1)_s \right) = \alpha_* \left(h_*((1)_s) \right) \\ &= \alpha_* \left((h'(s))_{h(s)} \right) = h'(s)\, \alpha'(h(s)). \end{aligned}$$

Son eşitlikte α_* kuralını $t = h(s)$, $c = h'(s)$ ile kullandık; istenen formül budur.
Sayısal denetim. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ve $h(s) = s^2$ için $\beta(s) = (\cos s^2, \sin s^2, s^2)$. Doğrudan türevle

$$\beta'(s) = \big(-2s \sin s^2,\, 2s \cos s^2,\, 2s \big)_{\beta(s)}.$$

Formül de $h'(s) = 2s$ ile $(-\sin s^2, \cos s^2, 1)$'in çarpımını, yani aynı üçlüyü verir. $h'(0) = 0$ olduğundan $\beta'(0) = \mathbf{0}$: α düzgün olsa da β bu anda durur.
■

Bu kısımda kurduğumuz araçlarla artık geometriye geçebiliriz: sırada uzunluk ve açı ölçmemizi sağlayan iç çarpım, eğrilerin bükülüşünü ve kıvrılışını ölçen eğrilik ile burulma, bir de bunları hesaplamanın doğal aracı olan çatı alanları var.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. İç Çarpım

Önceki kısımda (Öklid Uzayında Analizin Özeti) $\mathbb{R}^3$ üzerinde analizin araçlarını kurduk: teğet vektörler, vektör alanları, eğriler, 1-formlar, dönüşümler ve bunların türevleri. Ama bu araçların hiçbiri henüz bir şey *ölçmüyor*. İki nokta arasındaki uzaklığı, bir okun uzunluğunu ya da iki ok arasındaki açıyı tanımlamadık. Geometri tam burada başlar. Bu bölümle açılan **Çatı Alanları** kısmının ilk işi, bütün bu ölçümlerin tek bir işlemden, iç çarpımdan, çıktığını göstermektir.

Kısmın asıl konusu uzaydaki eğrilerin geometrisidir. Bir eğriyi incelemenin en verimli yolu, eğrinin her noktasına birbirine dik üç birim vektörden oluşan bir çatı yerleştirmek ve eğri boyunca ilerlerken bu çatının nasıl döndüğünü izlemektir. Çatının dönüşünü yine çatının kendi vektörleri cinsinden yazan Frenet formülleri, eğriler kuramının hemen hemen tamamını içinde taşır. Aynı "hareketli çatı" yöntemi ileride yüzeylere de uygulanacaktır: yüzeyi bir tür iki boyutlu eğri gibi görüp Cartan'ın bu yönteme kazandırdığı genel biçimi kullanacağız. Bu yüzden çatı kavramını baştan sağlam kurmak istiyoruz.

Bölümün planı şöyledir. Önce noktaların iç çarpımını tanımlayıp üç temel özelliğini ispatlayacağız; buradan norm, Schwarz eşitsizliği, üçgen eşitsizliği ve Öklid uzaklığı çıkacak. Uzaklıkla açık küme kavramını kesinleştireceğiz. Sonra iç çarpımı teğet uzaylarına taşıyıp açı, diklik ve birim vektör kavramlarını tanımlayacağız. Bölümün kalbi çatı kavramı ve ortonormal açılım teoremidir; onu duruş matrisi izler. Son olarak ikinci bir çarpımı, vektörel çarpımı, ve onunla iç çarpımın birleşimi olan üçlü skaler çarpımı inceleyeceğiz.

9.1 Noktaların İç Çarpımı

$\mathbb{R}^3$'ün noktalarını toplamayı ve bir sayıyla çarpmayı biliyoruz (Öklid Uzayı, Tanım 1.1). Bu iki işlem noktalardan yine nokta üretir. Şimdi başka türden bir işlem tanımlayacağız: iki noktayı alıp bir *sayı* veren bir çarpım. Tanım son derece yalındır, karşılıklı koordinatlar çarpılır ve toplanır; ama bu sayının içinde hem uzunluk hem açı gizlidir. Bölüm boyunca bunları tek tek dışarı çıkaracağız.

Tanım 9.1 (Noktaların İç Çarpımı). $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ve $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbb{R}^3$'ün iki noktası olsun.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

sayısına $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$'nun **iç çarpımı** (dot product, inner product) denir. Aynı işleme **nokta çarpımı** da denir.

Yani iç çarpım, iki noktanın karşılıklı koordinatlarını çarpıp üç çarpımı toplar; sonuç bir nokta değil, tek bir gerçel sayıdır.

Gösterimle ilgili bir uyarı: $a\mathbf{p}$ yazımı bir sayıyla bir noktanın çarpımıdır ve sonucu noktadır; $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ ise iki noktanın iç çarpımıdır ve sonucu sayıdır. İki kalın harf arasındaki nokta her zaman iç çarpımı gösterir; sayılar arasındaki nokta ($2 \cdot 3$ gibi) ya da yan yana yazım ($p_1 q_1$) ise sıradan çarpmadır. Hangisinin kastedildiği, çarpanların nokta mı sayı mı olduğuna bakılarak hep anlaşılır.

Örnek 9.1 (Bir İç Çarpım Hesabı). $\mathbf{p} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{q} = (1, 4, -2)$ için $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ ve $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$ sayılarını hesaplayalım.

Çözüm.
Tanımı doğrudan uygularız:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 2(1) + (-1)(4) + 3(-2) = 2 - 4 - 6 = -8.$$

Noktaların kendileriyle iç çarpımları koordinatların karelerinin toplamıdır:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 14, \qquad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1^2 + 4^2 + (-2)^2 = 21.$$

Bir noktanın kendisiyle iç çarpımı kareler toplamı olduğundan hiçbir zaman negatif çıkmaz. Bu gözlemi biraz sonra uzunluğu tanımlarken kullanacağız.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 9.2 (İç Çarpımla Koordinat Okumak). $\mathbf{p}$ herhangi bir nokta olsun. $\mathbf{p} \cdot (0,1,0)$ sayısını bulalım.

Çözüm.
Tanıma göre

$$\mathbf{p} \cdot (0,1,0) = p_1(0) + p_2(1) + p_3(0) = p_2.$$

Benzer biçimde $(1,0,0)$ ile iç çarpım p_1'i, $(0,0,1)$ ile iç çarpım p_3'ü verir. Yani iç çarpım bir noktanın koordinatlarını "okuyabilir"; bu basit gözlem ileride çatılarla çalışırken çok işe yarayacak.
■

Örnek 9.3 (İç Çarpımı Sıfır Olan Sıfırdan Farklı Noktalar). İkisi de $\mathbf{0}$ olmayan ama iç çarpımları sıfır olan iki nokta gösterelim.

Çözüm.
Şu hesap yeter:

$$(1,1,0) \cdot (1,-1,0) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

İki nokta da sıfırdan farklıdır ama iç çarpımları sıfırdır. Sayılar için geçerli olan "çarpım sıfırsa çarpanlardan biri sıfırdır" kuralı iç çarpım için geçerli değildir. Bunun bir kusur değil, geometrinin ta kendisi olduğunu göreceğiz: iç çarpımın sıfır olması dikliği anlatır.
■

İç çarpımı bir "çarpım" saymamızı haklı çıkaran üç özellik vardır. Üçü de koordinatlarla doğrudan hesaplanır, ama bölümün geri kalanında koordinatlara dönmeden yalnızca bu üç özelliği kullanacağız; bu yüzden onları açıkça yazıp ispatlıyoruz.

Önerme 9.1 (İç Çarpımın Üç Temel Özelliği). *$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$, $\mathbb{R}^3$'ün noktaları ve a, b gerçel sayılar olsun.*
1. ***Bilineerlik*** *(bilinearity):*

$$(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r} = a\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + b\,\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} \cdot (a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = a\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + b\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}.$$

2. ***Simetri*** *(symmetry):* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$.
3. ***Pozitif tanımlılık*** *(positive definiteness):* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \geq 0$*; ayrıca* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0$ *ancak ve ancak* $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ *ise.*

İspat.
Bilineerlik. $a\mathbf{p} + b\mathbf{q}$ *noktasının* i*-inci koordinatı* $ap_i + bq_i$*'dir. Tanıma göre*

$$\begin{aligned}(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r} &= \sum_{i=1}^{3} (ap_i + bq_i)\, r_i = a \sum_{i=1}^{3} p_i r_i + b \sum_{i=1}^{3} q_i r_i \\ &= a\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + b\,\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Burada yalnızca gerçel sayıların dağılma ve birleşme özelliklerini kullandık. İkinci eşitlik aynı hesabın öteki çarpanda yapılmasıdır:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot (a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^{3} r_i\, (ap_i + bq_i) = a \sum_{i=1}^{3} r_i p_i + b \sum_{i=1}^{3} r_i q_i \\ &= a\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + b\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}.\end{aligned}$$

Simetri. *Sayıların çarpımı sıradan bağımsızdır: her* i *için* $p_i q_i = q_i p_i$*. Üç terimi toplayınca* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ *çıkar.*
Pozitif tanımlılık. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$*. Bir gerçel sayının karesi negatif olamaz; negatif olmayan üç sayının toplamı da negatif olamaz. Toplam sıfırsa üç terimin her biri sıfırdır, çünkü biri pozitif olsaydı toplam da pozitif olurdu; o hâlde* $p_1 = p_2 = p_3 = 0$*, yani* $\mathbf{p} = \mathbf{0}$*. Tersine* $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ *ise açıkça* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir vektör uzayı üzerinde bu üç özelliği taşıyan her işleme genel olarak *iç çarpım* denir. Bizim tanımladığımız, $\mathbb{R}^3$'ün doğal iç çarpımıdır; bundan sonra "iç çarpım" sözü hep onu anlatacak.
Bilineerlik şunu söyler: iç çarpım her bir çarpanında toplamı ve sayıyla çarpımı dağıtır. Uygulamada bu, iç çarpımı koordinatlara dönmeden, sıradan cebir kurallarıyla hesaplamamıza izin verir.

Örnek 9.4 (Koordinatlara Dönmeden Hesap). $\mathbf{p} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{q} = (1, 4, -2)$ olsun; yukarıda $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = -8$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 14$ ve $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 21$ bulmuştuk. Yalnızca bu üç sayıyı ve bilineerliği kullanarak $(2\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + 3\mathbf{q})$ sayısını hesaplayalım; sonucu koordinatlarla denetleyelim.

Çözüm.
Önce birinci çarpanda, sonra ikinci çarpanda dağıtırız:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + 3\mathbf{q}) &= 2\,\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} + 3\mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} + 3\mathbf{q}) \\ &= 2\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + 6\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - 3\,\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \\ &= 2(14) + 6(-8) - (-8) - 3(21) = -75.\end{aligned}$$

Üçüncü satıra geçerken simetri sayesinde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = -8$ yazdık.
Denetim. $2\mathbf{p} - \mathbf{q} = (3, -6, 8)$ ve $\mathbf{p} + 3\mathbf{q} = (5, 11, -3)$. İç çarpımları $15 - 66 - 24 = -75$; iki yol aynı sonucu verdi.
■

9.2 Norm ve Schwarz Eşitsizliği

Pozitif tanımlılık, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ sayısının karekökünü almamıza izin verir. Bu karekök, orijinden $\mathbf{p}$'ye çizilen okun uzunluğundan başka bir şey değildir: xy düzlemindeki $(p_1, p_2, 0)$ noktasının orijine uzaklığı Pisagor teoremiyle $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$'dir; bu yatay uzunlukla p_3 yüksekliği dik bir üçgen oluşturur ve Pisagor'u bir kez daha uygularsak $\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ buluruz. Biz tanımı bu geometriye dayandırmayacağız; tersine, uzunluğu iç çarpımla *tanımlayıp* geometriyi ondan türeteceğiz.

Tanım 9.2 (Norm). $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbb{R}^3$'ün bir noktası olsun.

$$\| \mathbf{p} \| = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^{1/2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

sayısına $\mathbf{p}$'nin **normu** (norm) ya da **uzunluğu** denir.

Yani norm, bir noktanın koordinatlarının karelerinin toplamının karekökü; geometrik olarak orijinden o noktaya olan uzaklıktır.
Norm, $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli bir fonksiyondur: her noktaya negatif olmayan bir sayı karşılık getirir.

Örnek 9.5 (Birkaç Norm). $(2, -1, 3)$, $(3, 4, 12)$ ve $(1, 1, 1)$ noktalarının normlarını hesaplayalım.

Çözüm.
Sırayla

$$\| (2, -1, 3) \| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14},$$
$$\| (3, 4, 12) \| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13,$$

ve $\| (1, 1, 1) \| = \sqrt{3}$ bulunur. İkinci örnekte karekök tam çıktı: $(3, 4, 12)$ noktası orijinden tam 13 birim uzaktadır. Genelde norm irrasyonel bir sayıdır; $\sqrt{14} \approx 3{,}74$ gibi ondalık bir yaklaşım yerine kesin değeri kök işaretiyle yazmayı tercih edeceğiz.
■

Örnek 9.6 (Normu Sıfır Olan Noktalar). Normu sıfır olan bütün noktaları bulalım.

Çözüm.
$\| \mathbf{p} \| = 0$ olması $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0$ demektir; pozitif tanımlılığa göre bu yalnızca $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ için olur. Yani normu sıfır olan tek nokta orijindir: uzunluğu sıfır olan tek ok, hiç yer kaplamayan oktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tersine, norm bir noktayı belirlemez. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ve $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ noktalarının hepsinin normu 1'dir. Normu 1 olan bütün noktaların kümesi, merkezi orijin ve yarıçapı 1 olan **birim küre**dir (unit sphere); onunla ileride sık karşılaşacağız.
■

Normla iç çarpım arasındaki en önemli ilişki şudur: iki noktanın iç çarpımı, mutlak değerce, normlarının çarpımını aşamaz. Bu eşitsizlik ilk bakışta bir hesap sınırı gibi görünür; oysa açı kavramının tanımlanabilmesini sağlayan tam da budur.

Lemma 9.1 (Schwarz Eşitsizliği). *Her $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ için*

$$|\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \,| \le \|\, \mathbf{p} \,\|\, \|\, \mathbf{q} \,\|\,.$$

Eşitlik ancak ve ancak $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$ lineer bağımlı olduğunda, yani biri ötekinin bir sayı katı olduğunda, sağlanır.

İspat.
$\mathbf{q} = \mathbf{0}$ durumu. *İki taraf da sıfırdır, eşitlik vardır; ayrıca $\mathbf{q} = 0\,\mathbf{p}$ olduğundan iki nokta lineer bağımlıdır.*
$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ durumu. *Pozitif tanımlılık gereği $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} > 0$. Her t gerçel sayısı için $\mathbf{p} - t\mathbf{q}$ noktasının kendisiyle iç çarpımı negatif değildir. Bilineerlik ve simetriyle açarsak*

$$0 \le (\mathbf{p}-t\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}-t\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - 2t\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + t^2\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}.$$

Bu eşitsizlik her t için doğru olduğundan, işimize en çok yarayan t'yi seçebiliriz:

$$t_0 = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}}.$$

Yerine koyunca

$$0 \le \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - 2\,\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2}{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}} + \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2}{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2}{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}}.$$

Pozitif olan $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}$ ile çarparsak

$$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 \le (\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) = \|\, \mathbf{p} \,\|^2\, \|\, \mathbf{q} \,\|^2\,.$$

İki taraf da negatif olmadığından karekök alabiliriz: $|\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \,| \le \|\, \mathbf{p} \,\|\, \|\, \mathbf{q} \,\|$.
Eşitlik durumu. *Eşitlik varsa yukarıdaki zincirde $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2/(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) = 0$, dolayısıyla $(\mathbf{p} - t_0\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p} - t_0\mathbf{q}) = 0$ olur; pozitif tanımlılıkla $\mathbf{p} - t_0\mathbf{q} = \mathbf{0}$, yani $\mathbf{p} = t_0\mathbf{q}$. Tersine $\mathbf{p} = c\mathbf{q}$ ise*

$$|\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \,| = |\, c\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \,| = |\, c \,|\, \|\, \mathbf{q} \,\|^2, \qquad \|\, \mathbf{p} \,\| = \sqrt{c^2\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}} = |\, c \,|\, \|\, \mathbf{q} \,\|$$

olduğundan $\|\, \mathbf{p} \,\|\, \|\, \mathbf{q} \,\| = |\, c \,|\, \|\, \mathbf{q} \,\|^2 = |\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \,|$ *çıkar.*
■

Yani iki noktanın iç çarpımı, normlarının çarpımı kadar büyük olabilir ama daha büyük olamaz; sınıra ancak noktalar aynı doğru üzerindeyken ulaşılır.

Örnek 9.7 (Schwarz Eşitsizliğinde Boşluk). $\mathbf{p} = (2,-1,3)$ ve $\mathbf{q} = (1,4,-2)$ için Schwarz eşitsizliğinin iki tarafını karşılaştıralım.

Çözüm.
Bu çift için $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = -8$, $\|\, \mathbf{p} \,\| = \sqrt{14}$ ve $\|\, \mathbf{q} \,\| = \sqrt{21}$ bulmuştuk. Sağ taraf $\sqrt{14\cdot 21} = \sqrt{294} \approx 17{,}1$; sol taraf $|\,-8\,| = 8$. Eşitsizlik bol bol sağlanır; lemmaya göre bu, iki noktanın lineer bağımsız olması demektir. Gerçekten, $\mathbf{q}$'nun $\mathbf{p}$'nin bir katı olması için birinci koordinatlardan kat $1/2$ çıkar, ama $(1/2)(-1) = -1/2 \neq 4$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 9.8 (Schwarz Eşitsizliğinde Eşitlik). $\mathbf{p} = (2, -1, 3)$ ve $\mathbf{q} = (-4, 2, -6)$ için Schwarz eşitsizliğinin iki tarafını karşılaştıralım.

Çözüm.
Bu çiftte $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$'dir. İç çarpım

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 2(-4) + (-1)(2) + 3(-6) = -28,$$

normlar $\| \mathbf{p} \| = \sqrt{14}$ ve

$$\| \mathbf{q} \| = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

Sağ taraf $\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14} = 28$. Tam eşitlik; lemmanın söylediği gibi, çünkü noktalar lineer bağımlıdır.
■

Schwarz eşitsizliğinin ilk meyvesi, normun okların uzunluğu gibi davrandığını gösteren iki özelliktir.

Önerme 9.2 (Normun İki Temel Özelliği). *Her $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ ve her a gerçel sayısı için*
1. $\| a\mathbf{p} \| = |\, a \,| \, \| \mathbf{p} \|$*;*
2. $\| \mathbf{p} + \mathbf{q} \| \leq \| \mathbf{p} \| + \| \mathbf{q} \|$ ***(üçgen eşitsizliği**, triangle inequality).*

İspat.
Birincisi. *Bilineerlikle* $(a\mathbf{p}) \cdot (a\mathbf{p}) = a^2 \, (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})$. *Karekök alınca*

$$\| a\mathbf{p} \| = \sqrt{a^2 \, (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})} = \sqrt{a^2} \, \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} = |\, a \,| \, \| \mathbf{p} \|;$$

burada $\sqrt{a^2} = |\, a \,|$ *eşitliğini kullandık (a negatif olsa bile karekök pozitif çıkar).*
İkincisi. *İki taraf da negatif olmadığından karelerini karşılaştırmak yeter. Bilineerlik ve simetriyle*

$$\| \mathbf{p} + \mathbf{q} \|^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \| \mathbf{p} \|^2 + 2\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \| \mathbf{q} \|^2 .$$

Bir sayı mutlak değerini aşamaz, mutlak değer de Schwarz eşitsizliğiyle sınırlıdır: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \leq |\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \,| \leq \| \mathbf{p} \| \, \| \mathbf{q} \|$. *Dolayısıyla*

$$\| \mathbf{p} + \mathbf{q} \|^2 \leq \| \mathbf{p} \|^2 + 2 \, \| \mathbf{p} \| \, \| \mathbf{q} \| + \| \mathbf{q} \|^2 = \big(\| \mathbf{p} \| + \| \mathbf{q} \| \big)^2 .$$

Karekök alınca istenen eşitsizlik çıkar.
■

Yani bir noktayı a ile çarpmak okun uzunluğunu $|\, a \,|$ katına çıkarır (işaret yalnızca yönü etkiler); toplamın uzunluğu ise toplananların uzunlukları toplamını aşamaz, tıpkı bir üçgenin bir kenarının öteki iki kenarın toplamından uzun olamaması gibi.

Örnek 9.9 (Üçgen Eşitsizliğinde Boşluk). $\mathbf{p} = (3, 0, 0)$ ve $\mathbf{q} = (0, 4, 0)$ için üçgen eşitsizliğinin iki tarafını hesaplayalım.

Çözüm.
$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (3, 4, 0)$ ve $\| \mathbf{p} + \mathbf{q} \| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Sağ taraf $\| \mathbf{p} \| + \| \mathbf{q} \| = 3 + 4 = 7$. Gerçekten $5 \leq 7$. Buradaki üçgen, kenarları 3, 4, 5 olan dik üçgendir; üçüncü kenar öteki ikisinin toplamından 2 birim kısadır. İspata bakarsak boşluğun nereden geldiği görülür: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ olduğundan $\| \mathbf{p} + \mathbf{q} \|^2 = 9 + 16$, oysa $(\| \mathbf{p} \| + \| \mathbf{q} \|)^2 = 9 + 24 + 16$; aradaki fark $2 \| \mathbf{p} \| \, \| \mathbf{q} \| - 2\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 24$.
■

Örnek 9.10 (Üçgen Eşitsizliğinde Eşitlik). $\mathbf{p} = (1, 2, 2)$ ve $\mathbf{q} = (2, 4, 4)$ için üçgen eşitsizliğinin iki tarafını hesaplayıp neden eşit çıktıklarını açıklayalım.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\| \mathbf{p} \| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\| \mathbf{q} \| = \sqrt{4+16+16} = 6$ ve $\mathbf{p}+\mathbf{q} = (3,6,6)$, $\| \mathbf{p}+\mathbf{q} \| = \sqrt{9+36+36} = 9$. İki taraf da 9'dur.
Neden: $\mathbf{q} = 2\mathbf{p}$, yani iki ok aynı doğrultuda ve aynı yöndedir. İspattaki tek eşitsizlik $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \le \| \mathbf{p} \| \, \| \mathbf{q} \|$ adımıydı; burada $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 2+8+8 = 18 = 3\cdot 6$ olduğundan o adım da eşitliktir. "Üçgen" yassılmış, üç köşe aynı doğru üzerine dizilmiştir.
■

9.3 Öklid Uzaklığı

İki nokta arasındaki uzaklık, birinden ötekine çizilen okun uzunluğudur; bu ok $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ farkıyla temsil edilir. Norm elimizde olduğundan uzaklığı tek satırda tanımlayabiliriz.

Tanım 9.3 (Öklid Uzaklığı). $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$, $\mathbb{R}^3$'ün noktaları olsun.

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \| \mathbf{p}-\mathbf{q} \|$$

sayısına $\mathbf{p}$'den $\mathbf{q}$'ya **Öklid uzaklığı** (Euclidean distance) denir.

Yani uzaklık, fark noktasının normudur; özel olarak orijine uzaklık normun kendisidir: $d(\mathbf{0},\mathbf{p}) = \| \mathbf{0}-\mathbf{p} \| = \| \mathbf{p} \|$.
Normu açarsak analizden tanıdığımız uzaklık formülü ortaya çıkar.

Lemma 9.2 (Uzaklık Formülü). *$\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3)$ ve $\mathbf{q} = (q_1,q_2,q_3)$ için*

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2}.$$

İspat.
Noktaların farkı koordinat koordinat alınır:

$$\mathbf{p}-\mathbf{q} = (p_1-q_1,\, p_2-q_2,\, p_3-q_3).$$

Bu noktanın normu, tanım gereği, koordinatlarının karelerinin toplamının karekökü'dür; bu da yazılan ifadedir.
■

Yani iki nokta arasındaki uzaklık, kenarları koordinat farklarının mutlak değerleri olan dikdörtgen kutunun köşegenidir; Pisagor teoreminin iki kez uygulanmış hâli.

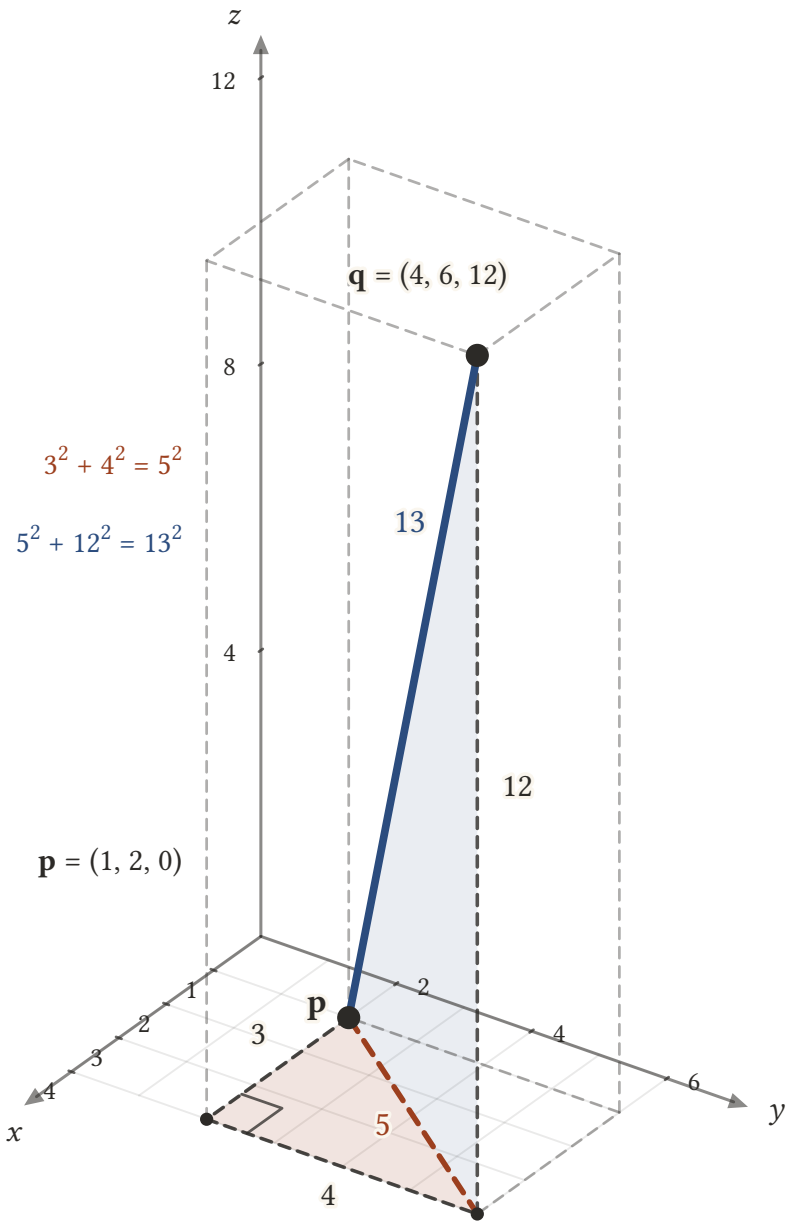
Örnek 9.11 (Kutunun Köşegeni). $\mathbf{p} = (1,2,0)$ ile $\mathbf{q} = (4,6,12)$ arasındaki uzaklığı hesaplayalım ve kenarları koordinat farkları olan kutuyla ilişkilendirelim.

Çözüm.
Koordinat farkları $q_1-p_1 = 3$, $q_2-p_2 = 4$ ve $q_3-p_3 = 12$'dir. Uzaklık formülüyle

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13.$$

Geometrik olarak $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$, kenarları 3, 4 ve 12 olan bir dikdörtgen kutunun karşılıklı köşeleridir. Kutunun tabanındaki dikdörtgenin köşegeni Pisagor'la $\sqrt{3^2+4^2} = 5$; bu köşegenle 12 yüksekliği yeni bir dik üçgen kurar ve kutunun köşegeni $\sqrt{5^2+12^2} = 13$ çıkar. Formül bu iki adımı tek karekökte birleştirir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.1: $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ ile $\mathbf{q} = (4, 6, 12)$, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan kesikli kutunun karşılıklı iki köşesidir; kenar uzunlukları koordinat farkları 3, 4 ve 12′dir. Tabandaki turuncu köşegen Pisagor'la $3^2 + 4^2 = 5^2$ hesabından 5 çıkar; bu 5 ile 12 yüksekliği yeni bir dik üçgen kurduğundan kutunun mavi köşegeni $5^2 + 12^2 = 13^2$ hesabından 13 olur. Uzaklık formülü bu iki Pisagor adımını tek karekökte birleştirir: $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 13$.

■

Örnek 9.12 (Uzaklık Ötelemeyle Değişmez). Her $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ noktası için $d(\mathbf{p}+\mathbf{r}, \mathbf{q}+\mathbf{r}) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$(\mathbf{p}+\mathbf{r})-(\mathbf{q}+\mathbf{r})=\mathbf{p}-\mathbf{q}$ olduğundan iki uzaklık aynı noktanın normudur. İki noktayı aynı $\mathbf{r}$ kadar kaydırmak aralarındaki uzaklığı değiştirmez; bu, uzaklığın noktaların *nerede* durduğuna değil yalnızca *farklarına* bağlı olması demektir.
Sayısal denetim. $\mathbf{p}=(1,2,0)$, $\mathbf{q}=(4,6,12)$ ve $\mathbf{r}=(-1,-2,0)$ alalım: $\mathbf{p}+\mathbf{r}=(0,0,0)$ ve $\mathbf{q}+\mathbf{r}=(3,4,12)$; bu iki nokta arasındaki uzaklık $\parallel(3,4,12)\parallel=13$, önceki örnekte bulduğumuz değerle aynı. ■

Öklid Uzayı bölümünde açık kümeyi tanımlarken (Tanım 1.7) "yeterince yakın" sözünü uzaklık formülüyle açıklamıştık; artık $d(\mathbf{p},\mathbf{q})=\parallel\mathbf{p}-\mathbf{q}\parallel$ yazabildiğimiz için aynı tanımı norm diliyle okuyabiliriz: bir küme, her noktasıyla birlikte o noktanın çevresindeki küçük bir yuvarı da içeriyorsa açıktır. Yarıçapın noktaya bağlı olabileceğine dikkat; kümenin kenarına yakın noktalar için küçük seçilir. Aynı sözcükler $\mathbb{R}^3$ yerine $\mathbb{R}^n$ için, hatta bir uzaklık kavramı bulunan herhangi bir küme için aynen çalışır.

9.4 Teğet Vektörlerin İç Çarpımı

Teğet Vektörler bölümünde bir $\mathbf{p}$ noktasındaki teğet vektörlerin $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ biçiminde yazıldığını görmüştük (Tanım 2.1): $\mathbf{v}$ vektör kısmı, $\mathbf{p}$ uygulama noktasıdır. $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}_\mathbf{p}$ eşlemesi $\mathbb{R}^3$'ten $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$ teğet uzayına (Tanım 2.2) birebir ve örtendir, toplamı ve sayıyla çarpımı korur. Bu eşleme sayesinde $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımladığımız iç çarpımı her teğet uzayına taşıyabiliriz: iki okun iç çarpımı, vektör kısımlarının iç çarpımı olsun.

Tanım 9.4 (Teğet Vektörlerin İç Çarpımı). $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}$, $\mathbb{R}^3$'ün aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki iki teğet vektörü olsun.

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}\cdot\mathbf{w}_\mathbf{p}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

sayısına bu iki teğet vektörün iç çarpımı denir. $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ teğet vektörünün normu (uzunluğu) $\parallel\mathbf{v}_\mathbf{p}\parallel=\parallel\mathbf{v}\parallel$ sayısıdır.

Yani iki teğet vektörün iç çarpımı vektör kısımlarının iç çarpımıdır; uygulama noktası sonucu etkilemez, yalnızca iki okun aynı noktadan çıkmasını şart koşar.
Bu bölümden başlayarak, uygulama noktası bağlamdan belli olduğunda $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ yerine kısaca $\mathbf{v}$ yazacağız; "$\mathbf{p}$ noktasındaki $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ teğet vektörleri" dediğimizde $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}$ kastediyoruz. Bir formülde uygulama noktasının önemli olduğu yerde alt indisi geri koyacağız.

Örnek 9.13 (Aynı Noktadaki İki Okun İç Çarpımı). $\mathbf{p}=(5,5,5)$ noktasında $\mathbf{v}_\mathbf{p}=(2,-1,3)_\mathbf{p}$ ve $\mathbf{w}_\mathbf{p}=(1,4,-2)_\mathbf{p}$ teğet vektörlerinin iç çarpımını ve normlarını bulalım.

Çözüm.
Uygulama noktasını bir yana bırakıp vektör kısımlarıyla hesaplarız:

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}\cdot\mathbf{w}_\mathbf{p}=(2,-1,3)\cdot(1,4,-2)=2-4-6=-8.$$

Normlar $\parallel\mathbf{v}_\mathbf{p}\parallel=\sqrt{14}$ ve $\parallel\mathbf{w}_\mathbf{p}\parallel=\sqrt{21}$. $\mathbf{p}$'nin koordinatları hesaba hiç girmedi: aynı vektör kısımlarına sahip oklar $\mathbf{p}=(0,0,0)$'da ya da $(-7,2,1)$'de olsaydı sonuç değişmezdi. ■

Tanım, iç çarpımın üç özelliğini olduğu gibi teğet uzaylarına taşır.

Önerme 9.3 (Teğet Uzayında İç Çarpımın Özellikleri). *$\mathbf{p}$ noktasındaki teğet vektörlerin iç çarpımı bilineer, simetrik ve pozitif tanımlıdır: $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$ ve a,b sayıları için*

$$(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=a\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+b\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w},\qquad\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v},\qquad\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\geq 0,$$

ve $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=0$ ancak ve ancak $\mathbf{v}$ sıfır teğet vektörü ise. Ayrıca Schwarz eşitsizliği, $\parallel a\mathbf{v}\parallel=|\,a\,|\parallel\mathbf{v}\parallel$ ve üçgen eşitsizliği teğet vektörler için de geçerlidir.

İspat.

Teğet uzayında toplama ve sayıyla çarpma vektör kısımları üzerinden tanımlanmıştır: $a\mathbf{u}_\mathbf{p} + b\mathbf{v}_\mathbf{p} = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v})_\mathbf{p}$. *Dolayısıyla*

$$(a\mathbf{u}_\mathbf{p} + b\mathbf{v}_\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_\mathbf{p} = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a\,\mathbf{u}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_\mathbf{p} + b\,\mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_\mathbf{p};$$

ortadaki eşitlik Önerme 9.1'nin bilineerliğidir. Simetri ve pozitif tanımlılık aynı biçimde vektör kısımlarına aktarılır; $\mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *olması* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$*, yani* $\mathbf{v}_\mathbf{p}$*'nin* $\mathbf{p}$*'deki sıfır teğet vektörü* $\mathbf{0}_\mathbf{p}$ *olması demektir. Schwarz eşitsizliği ve norm özellikleri yalnızca bu üç özellikten türetildiğine göre teğet vektörler için de geçerlidir; istenirse doğrudan vektör kısımlarına uygulanarak da görülür.*
■

Örnek 9.14 (Farklı Noktalardaki Oklar). $\mathbf{v} = (3, 4, 12)$ vektör kısmını iki farklı noktaya uygulayalım: $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ ve $\mathbf{q} = (10, -3, 7)$. $\mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{q}$ ifadesi tanımlı mıdır?

Çözüm.
Uzunluklar için bir sorun yoktur: $\| \mathbf{v}_\mathbf{p} \| = \| \mathbf{v} \| = 13$ ve $\| \mathbf{v}_\mathbf{q} \| = \| \mathbf{v} \| = 13$; aynı vektör kısmına sahip iki ok, nerede uygulandıklarına bakılmaksızın aynı uzunluktadır. Bu, birbirine paralel iki eşit okun eşit uzunlukta olması demektir.
İç çarpım için ise yanıt hayırdır: $\mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{q}$ ifadesine bir anlam vermedik, çünkü tanım iki teğet vektörün *aynı noktada* olmasını ister. Vektör kısımlarının iç çarpımı elbette hesaplanabilir (169 çıkar), ama biz iç çarpımı her teğet uzayının kendi içinde bir işlem olarak tanımlıyoruz; farklı teğet uzaylarındaki oklar toplanamadığı gibi çarpılamaz da. Her $T_\mathbf{p}(\mathbb{R}^3)$ kendi iç çarpımıyla donatılmış ayrı bir uzaydır.
■

9.5 Açı, Diklik ve Birim Vektör

Schwarz eşitsizliği, sıfırdan farklı iki $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ teğet vektörü için

$$-1 \le \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \|} \le 1$$

olduğunu söyler. $[-1, 1]$ aralığındaki her sayı tam bir açının kosinüsüdür: kosinüs fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında sürekli ve kesin azalandır, 1'den başlayıp -1'de biter; dolayısıyla $[-1, 1]$'deki her değeri bu aralıkta tam bir kez alır. Bu bize açıyı tanımlama olanağı verir.

Tanım 9.5 (İki Vektör Arasındaki Açı). $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ noktasında sıfırdan farklı iki teğet vektör olsun.

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \|}, \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

koşullarını sağlayan tek ϑ sayısına $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ **arasındaki açı** (angle) denir. Böylece

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos\vartheta.$$

Yani iki vektörün iç çarpımı, uzunluklarının çarpımı ile aralarındaki açının kosinüsünün çarpımıdır; iç çarpımın işareti açının dar ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0$), dik ($= 0$) ya da geniş ($< 0$) olduğunu söyler.
$0 \le \vartheta \le \pi$ kısıtı olmadan açı tek türlü belirlenmezdi: ϑ işe yarıyorsa $-\vartheta$ ve $\vartheta + 2\pi$ da aynı kosinüsü verir. Kısıtla birlikte iki vektör arasındaki açı, iki doğrultu arasındaki "küçük" açıdır; geometrideki alışkanlığımızla uyumludur. $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin yerini değiştirmek açıyı değiştirmez, çünkü iç çarpım simetriktir.

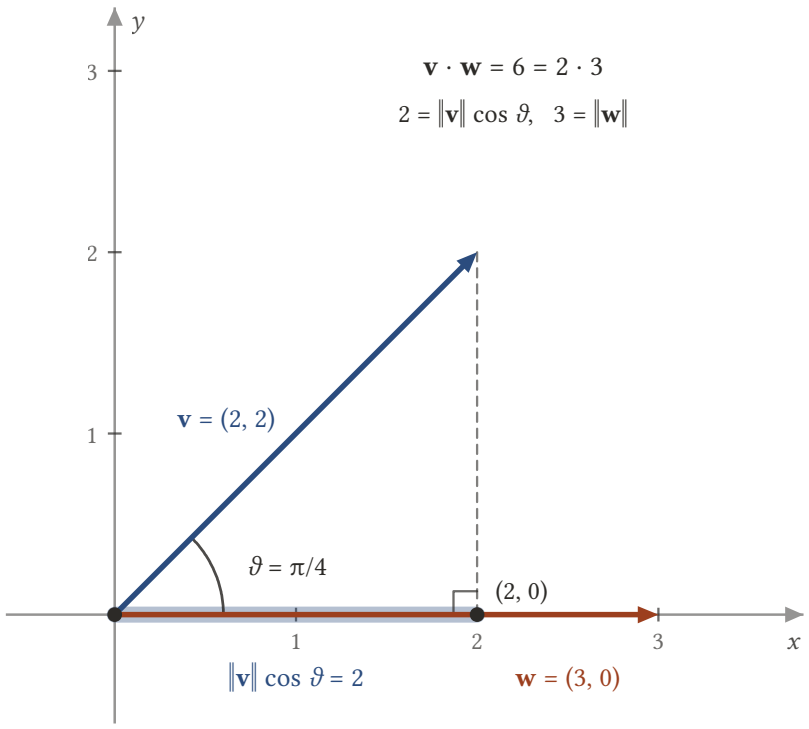
Örnek 9.15 (Kırk Beş Derecelik Açı). $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$ ve $\mathbf{w} = (3, 0, 0)$ teğet vektörleri (aynı noktada) arasındaki açıyı bulalım ve $\| \mathbf{v} \| \cos\vartheta$ sayısını yorumlayalım.

Çözüm.
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 6$, $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ve $\| \mathbf{w} \| = 3$. Dolayısıyla

$$\cos\vartheta = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Beklediğimiz gibi: $\mathbf{v}$, xy düzleminde x ekseniyle $45°$ yapan köşegen doğrultusundadır, $\mathbf{w}$ ise x ekseni üzerindedir.
$\| \mathbf{v} \| \cos\vartheta = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2$ sayısı, $\mathbf{v}$ okunun $\mathbf{w}$ doğrultusundaki gölgesinin uzunluğudur: $\mathbf{v}$'nin ucundan $\mathbf{w}$'nin doğrusuna dikme inersek dikmenin ayağı başlangıçtan 2 birim uzaktadır (gerçekten, $\mathbf{v} = (2,2,0)$'ın x ekseni üzerindeki izdüşümü $(2,0,0)$'dır). İç çarpım da bu gölge uzunluğunun $\| \mathbf{w} \| = 3$ ile çarpımıdır: $2 \cdot 3 = 6$.



Şekil 9.2: xy düzleminde ortak başlangıçtan çıkan iki ok: $\mathbf{w} = (3, 0)$ (turuncu) x ekseni üzerindedir, $\mathbf{v} = (2, 2)$ (mavi) köşegen doğrultusundadır ve aralarındaki açı $\vartheta = \pi/4$'tür. $\mathbf{v}$'nin ucundan $\mathbf{w}$'nin doğrusuna inen kesikli dikmenin ayağı $(2, 0)$ noktasıdır; başlangıçtan bu ayağa kadar uzanan kalın parça $\mathbf{v}$'nin $\mathbf{w}$ doğrultusundaki gölgesidir ve boyu $\|\mathbf{v}\| \cos\vartheta = 2$'dir. İç çarpım bu gölge boyunun $\|\mathbf{w}\| = 3$ ile çarpımıdır: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2 \cdot 3 = 6$.

■

Örnek 9.16 (Geniş Açı). $\mathbf{v} = (1,0,0)$ ve $\mathbf{w} = (-1,1,0)$ arasındaki açıyı bulalım.

Çözüm.
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -1$, $\| \mathbf{v} \| = 1$, $\| \mathbf{w} \| = \sqrt{2}$; dolayısıyla $\cos\vartheta = -1/\sqrt{2}$ ve $[0, \pi]$ aralığında bunu sağlayan tek açı $\vartheta = 3\pi/4$'tür. İç çarpımın negatif çıkması açının geniş olduğunu daha hesabın başında haber vermişti: $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$'nin "arkaya" doğru bakan tarafındadır.
■

Açının $\pi/2$ olması, yani iki okun birbirine dik durması, iç çarpımın sıfır olmasıyla aynı şeydir. Bu gözlemi tanım hâline getiriyoruz; tanımı iç çarpımla yapmanın yararı, sıfır vektörünü de kapsamasıdır.

Tanım 9.6 (Ortogonal Vektörler ve Birim Vektör). Aynı noktadaki iki teğet vektör iç çarpımları sıfırsa **ortogonal** (orthogonal), başka bir deyişle **dik**tir. Normu 1 olan bir teğet vektöre **birim vektör** (unit vector) denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani diklik "iç çarpım sıfır" demektir, birim vektör "uzunluk bir" demektir; ikisi de yalnızca iç çarpımla ifade edilir.
Sıfır teğet vektörü $\mathbf{0}_{\mathbf{p}}$, her teğet vektörle iç çarpımı sıfır olduğundan, tanım gereği her vektöre ortogonaldir; oysa onunla hiçbir vektör arasında açı tanımlamadık. Tanımı iç çarpımla yapmak bu özel durumu sorunsuz kapsar.

Örnek 9.17 (Dikliği Denetlemek). $(1,2,-1)$, $(3,-1,1)$ ve $(1,1,1)$ vektör kısımlı teğet vektörlerden (aynı noktada) hangi çiftlerin ortogonal olduğunu bulalım.

Çözüm.
Üç iç çarpım hesaplarız:

$$(1,2,-1)\cdot(3,-1,1) = 3-2-1 = 0,$$
$$(1,2,-1)\cdot(1,1,1) = 1+2-1 = 2,$$
$$(3,-1,1)\cdot(1,1,1) = 3-1+1 = 3.$$

Yalnızca ilk çift ortogonaldir. Öteki iki çiftin iç çarpımları pozitif, yani aralarındaki açılar dardır.
■

Örnek 9.18 (Bir Vektörü Birim Vektöre Çevirmek). $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ teğet vektörü için $\mathbf{v}/\parallel \mathbf{v} \parallel$ vektörünün birim vektör olduğunu gösterelim.

Çözüm.
$\mathbf{v}/\parallel \mathbf{v} \parallel$, $\mathbf{v}$'nin $a = 1/\parallel \mathbf{v} \parallel$ sayısıyla çarpımıdır; $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ olduğundan $\parallel \mathbf{v} \parallel > 0$ ve bu sayı tanımlıdır. Önerme 9.2 gereği

$$\parallel \frac{\mathbf{v}}{\parallel \mathbf{v} \parallel} \parallel = \frac{1}{\parallel \mathbf{v} \parallel} \parallel \mathbf{v} \parallel = 1.$$

$a > 0$ olduğu için yön de değişmez: $\mathbf{v}/\parallel \mathbf{v} \parallel$, $\mathbf{v}$ ile aynı yöne bakan tek birim vektördür.
Sayısal örnek. $\mathbf{v} = (3,4,12)$ için $\parallel \mathbf{v} \parallel = 13$ ve

$$\frac{\mathbf{v}}{\parallel \mathbf{v} \parallel} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right);$$

denetim: $(9+16+144)/169 = 1$. Bu işleme $\mathbf{v}$'yi *normalleştirmek* denir.
■

9.6 Çatılar

$\mathbb{R}^3$'te ölçüm yapmak için koordinat eksenlerine ihtiyacımız yoktur; bir noktada birbirine dik üç birim ok yeter. Bu üçlü, o noktada kurulmuş küçük bir "cetvel takımı" gibidir: her vektörün uzunluğunu ve yönünü bu üç oka göre ölçebiliriz. Doğal çatı alanının bir noktadaki değerleri böyle bir üçlüdür, ama tek örnek o değildir; üçlüyü noktadan noktaya döndürebilmek, bu kısmın adını veren "çatı alanları" fikrinin özüdür.

Tanım 9.7 (Çatı). $\mathbf{p}$, $\mathbb{R}^3$'ün bir noktası olsun. $\mathbf{p}$ noktasındaki, karşılıklı ortogonal üç birim teğet vektörden oluşan bir e_1, e_2, e_3 kümesine $\mathbf{p}$ noktasında bir **çatı** (frame) denir.

Yani bir çatı, aynı noktadan çıkan, her biri 1 uzunluğunda ve ikişer ikişer birbirine dik üç oktur.
Çatı vektörlerini e_1, e_2, e_3 diye düz harflerle yazıyoruz; kalın yazmıyoruz ama bunlar $\mathbf{p}$ noktasındaki teğet vektörlerdir. Tanımdaki koşullar dokuz denklem demektir. "Birim" koşulu üç denklem verir:

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1.$$

"Karşılıklı ortogonal" koşulu ise altı denklem verir:

$$e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0, \qquad e_2 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_2 = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İç çarpım simetrik olduğundan ikinci üçlü birincinin tekrarıdır; denetlenmesi gereken yalnızca altı denklemdir. Dokuz denklemin hepsi, 1-Formlar bölümünden tanıdığımız Kronecker deltasıyla (δ_{ij}, $i=j$ ise 1, $i\neq j$ ise 0) tek satırda yazılır:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \qquad (1 \le i, j \le 3).$$

Örnek 9.19 (Doğal Çatı Bir Çatıdır). Her $\mathbf{p}$ noktasında doğal çatı alanının (Tanım 2.6) değerleri $U_1(\mathbf{p}), U_2(\mathbf{p}), U_3(\mathbf{p})$'nin bir çatı oluşturduğunu gösterelim.

> **Çözüm.**
> Vektör kısımları $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ve $(0,0,1)$'dir. Her birinin kendisiyle iç çarpımı 1'dir (1^2+0+0 vb.), farklı ikisinin iç çarpımında ise çarpılan koordinatlardan biri hep sıfır olduğundan sonuç 0'dır; örneğin $(1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0+0+0$. Altı denklem de sağlanır; $U_i(\mathbf{p})\cdot U_j(\mathbf{p}) = \delta_{ij}$.
> Doğal çatı alanı adını tam buradan alır: her noktada bir çatı verir ve bu çatı noktadan noktaya hiç dönmez.
> ■

Örnek 9.20 (Döndürülmüş Bir Çatı). $\mathbf{p}$ herhangi bir nokta olsun ve

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)_{\mathbf{p}}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)_{\mathbf{p}}, \qquad e_3 = (0,0,1)_{\mathbf{p}}$$

teğet vektörlerini alalım. Bunların $\mathbf{p}$ noktasında bir çatı olduğunu gösterelim.

> **Çözüm.**
> Normlar: $\| e_1 \|^2 = (1+1+0)/2 = 1$, $\| e_2 \|^2 = (1+1+0)/2 = 1$, $\| e_3 \|^2 = 1$. Karşılıklı iç çarpımlar:
>
> $$e_1 \cdot e_2 = \frac{-1+1+0}{2} = 0, \qquad e_1 \cdot e_3 = \frac{0+0+0}{\sqrt{2}} = 0, \qquad e_2 \cdot e_3 = 0.$$
>
> Altı koşul da sağlanır. Bu çatı, doğal çatının z ekseni çevresinde $45°$ döndürülmüş hâlidir: $e_3 = U_3(\mathbf{p})$ yerinde kalmış, e_1 ve e_2 ise xy düzleminde birlikte dönmüştür. Bölümün geri kalanında bu çatıyı sık sık örnek olarak kullanacağız.
> ■

Örnek 9.21 (Dik Ama Birim Olmayan Üçlü). $(1,1,0)_{\mathbf{p}}, (-1,1,0)_{\mathbf{p}}, (0,0,1)_{\mathbf{p}}$ üçlüsünün neden çatı olmadığını açıklayalım.

> **Çözüm.**
> Vektörler ikişer ikişer ortogonaldir: iç çarpımlar $-1+1+0=0, 0+0+0=0$ ve $0+0+0=0$. Ama ilk ikisinin normu $\sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$'dir, 1 değil. Diklik var, birimlik yok; üçlü çatı değildir. Bu üçlünün her vektörünü normalleştirirsek Örnek 9.20'deki çatıyı elde ederiz.
> ■

Örnek 9.22 (Birim Ama Dik Olmayan Üçlü). $(1,0,0)_{\mathbf{p}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)_{\mathbf{p}}, (0,0,1)_{\mathbf{p}}$ üçlüsünün neden çatı olmadığını açıklayalım.

> **Çözüm.**
> Üç vektör de birimdir: normların kareleri 1, $(1+1)/2 = 1$ ve 1. Ama $(1,0,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = 1/\sqrt{2} \neq 0$: birinci ile ikinci arasındaki açı $45°$'dir, $90°$ değil. Birimlik var, diklik yok; üçlü çatı değildir. Çatı olmak için ikisi birden gerekir.
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

9.7 Ortonormal Açılım

Bir çatının asıl gücü şudur: noktadaki her teğet vektör, çatının üç vektörünün bir lineer bileşimi olarak yazılır ve katsayılar yalnızca üç iç çarpımla bulunur. Bunu ispatlamak için lineer cebirden bir olguya ihtiyacımız var: $\mathbb{R}^3$'te lineer bağımsız üç vektör bir tabandır. Bu olguyu "bilinir" diye geçmeyip kısa ve tam bir ispatla vereceğiz.
Terimleri hatırlayalım. $\mathbb{R}^3$'ün $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektörleri, hepsi sıfır olmayan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sayılarıyla $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ yazılabiliyorsa **lineer bağımlı** (linearly dependent), yazılamıyorsa **lineer bağımsız**dır (linearly independent). Bağımsızlık şu demektir: sıfırı veren tek bileşim, bütün katsayıları sıfır olan bileşimdir.

Lemma 9.3 (Üç Bağımsız Vektör Bir Tabandır). *1. $\mathbb{R}^3$'te herhangi dört vektör lineer bağımlıdır.*
2. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsızsa, $\mathbb{R}^3$'ün her $\mathbf{v}$ vektörü tek bir (x, y, z) sayı üçlüsüyle $\mathbf{v} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ biçiminde yazılır.

> ***İspat.***
> Birinci kısım, adım 1: iki sayı. *a, b gerçel sayıları için, ikisi birden sıfır olmayan λ, μ sayılarıyla $\lambda a + \mu b = 0$ yazılabilir: $a = 0$ ise $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ alınır; $a \neq 0$ ise $(\lambda, \mu) = (b, -a)$ alınır, çünkü $ba - ab = 0$ ve $-a \neq 0$.*
> Adım 2: düzlemde üç vektör. *$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ olsun. Üçünün de ikinci koordinatı sıfırsa, birinci koordinatları x_1, y_1 için adım 1'den $\lambda x_1 + \mu y_1 = 0$ sağlayan, ikisi birden sıfır olmayan λ, μ vardır; o zaman $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} = \mathbf{0}$ sıfır olmayan katsayılı bir bağıntıdır. Değilse, ikinci koordinatı sıfır olmayan bir vektör vardır; adlandırmayı değiştirerek bunun $\mathbf{z}$ olduğunu, yani $z_2 \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Şimdi*
>
> $$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{x_2}{z_2}\,\mathbf{z}, \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{y} - \frac{y_2}{z_2}\,\mathbf{z}$$
>
> *vektörlerinin ikinci koordinatları sıfırdır. Birinci koordinatlarına adım 1'i uygularsak, ikisi birden sıfır olmayan λ, μ ile $\lambda x_1' + \mu y_1' = 0$ buluruz; ikinci koordinatlar zaten sıfır olduğundan $\lambda\mathbf{x}' + \mu\mathbf{y}' = \mathbf{0}$ olur. Yerine yazıp düzenlersek*
>
> $$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} - \frac{\lambda x_2 + \mu y_2}{z_2}\,\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$
>
> *λ ile μ'den en az biri sıfır olmadığından bu, sıfır olmayan katsayılı bir bağıntıdır; $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ bağımlıdır.*
> Adım 3: uzayda dört vektör. *$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ olsun. Aynı düşünceyi üçüncü koordinatla yürütürüz. Dördünün de üçüncü koordinatı sıfırsa, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$'nin ilk iki koordinatından oluşan üç düzlem vektörüne adım 2'yi uygularız ve $\mathbf{w}$'nin katsayısını 0 alırız. Değilse, adlandırmayı değiştirerek $w_3 \neq 0$ diyebiliriz; $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - (x_3/w_3)\mathbf{w}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - (y_3/w_3)\mathbf{w}$, $\mathbf{z}' = \mathbf{z} - (z_3/w_3)\mathbf{w}$ vektörlerinin üçüncü koordinatları sıfırdır. İlk iki koordinatlarına adım 2'yi uygulayınca, hepsi sıfır olmayan λ, μ, ν ile $\lambda\mathbf{x}' + \mu\mathbf{y}' + \nu\mathbf{z}' = \mathbf{0}$ bulunur; açılımı*
>
> $$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z} - \frac{\lambda x_3 + \mu y_3 + \nu z_3}{w_3}\,\mathbf{w} = \mathbf{0}$$
>
> *sıfır olmayan katsayılı bir bağıntıdır. Birinci kısım ispatlanmıştır.*
> İkinci kısım, teklik. *$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$ ise*
>
> $$(x - x')\mathbf{a} + (y - y')\mathbf{b} + (z - z')\mathbf{c} = \mathbf{0}$$
>
> *olur; bağımsızlık gereği üç katsayı da sıfırdır, yani $(x, y, z) = (x', y', z')$.*
> Varlık. *$\mathbf{v}$'nin $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$'nin bir bileşimi olmadığını varsayalım. O zaman $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ bağımsızdır: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{v} = \mathbf{0}$ olsun. $\delta \neq 0$ olsaydı $\mathbf{v} = -(\alpha/\delta)\mathbf{a} - (\beta/\delta)\mathbf{b} - (\gamma/\delta)\mathbf{c}$ bir bileşim olurdu; demek ki $\delta = 0$, ve o zaman $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$'nin bağımsızlığından $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Böylece $\mathbb{R}^3$'te dört bağımsız vektör bulmuş olurduk; bu, birinci kısımla çelişir. O hâlde $\mathbf{v}$ bir bileşimdir.*
> ■

Yani $\mathbb{R}^3$'te üç bağımsız vektör bir **taban**dır (basis): her vektör onların tek bir bileşimidir. Katsayıları bulmak genelde üç bilinmeyenli bir denklem sistemi çözmeyi gerektirir.

Örnek 9.23 (Üç Vektörün Bağımsızlığı). $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Genel bir bileşimi açalım:

$$x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 = (x+z, x+y, y+z).$$

Bu $\mathbf{0}$ ise $x+z=0, x+y=0, y+z=0$; üç denklemi toplayınca $2(x+y+z)=0$, yani $x+y+z=0$. Bundan birinci denklemi çıkarınca $y=0$, ikinciyi çıkarınca $z=0$, üçüncüyü çıkarınca $x=0$. Sıfırı veren tek bileşim, katsayıları sıfır olan bileşimdir; vektörler bağımsızdır ve Lemma 9.3 gereği $\mathbb{R}^3$'ün bir tabanıdır.
■

Örnek 9.24 (Ortonormal Olmayan Bir Tabanda Katsayılar). $\mathbf{b}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,0,1)$ vektörleri, önceki örnekte gördüğümüz gibi, $\mathbb{R}^3$'ün bir tabanıdır. $\mathbf{v} = (3,1,2)$'yi bunların bileşimi olarak yazalım.

Çözüm.
Önceki örnekteki açılım

$$x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 = (x+z, x+y, y+z)$$

olduğundan, $\mathbf{v} = (3,1,2)$ için $x+z=3$, $x+y=1$, $y+z=2$ sistemini çözmeliyiz. Toplayınca $x+y+z=3$; sırayla çıkarınca $y=0$, $z=2$, $x=1$. Yani $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$; denetim: $(1,1,0)+(2,0,2)=(3,1,2)$.
Hesap kısa sürdü, ama bir denklem sistemi çözmek gerekti. Çatılarda bu adım tümüyle ortadan kalkacak.
■

Teorem 9.1 (Ortonormal Açılım). *e_1, e_2, e_3, $\mathbb{R}^3$'ün bir $\mathbf{p}$ noktasında bir çatı olsun. $\mathbf{p}$ noktasındaki her $\mathbf{v}$ teğet vektörü için*

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot e_1)\,e_1 + (\mathbf{v}\cdot e_2)\,e_2 + (\mathbf{v}\cdot e_3)\,e_3 = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{v}\cdot e_i)\,e_i.$$

İspat.
Adım 1: çatı vektörleri lineer bağımsızdır. *$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}$ olsun. Bu eşitliğin iki yanının e_j ile iç çarpımını alalım. Sol tarafta bilineerlik ve $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ ile*

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} a_i e_i\Big)\cdot e_j = \sum_{i=1}^{3} a_i\,(e_i\cdot e_j) = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\delta_{ij} = a_j,$$

çünkü toplamda $i=j$ dışındaki terimler sıfırdır. Sağ tarafta $\mathbf{0}_{\mathbf{p}}\cdot e_j = 0$. Dolayısıyla $a_1=a_2=a_3=0$.
Adım 2: çatı bir tabandır. *Tanım 2.2 gereği $\mathbf{p}$'deki her teğet vektör tek bir $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$ için $\mathbf{u}_{\mathbf{p}}$ biçimindedir ve teğet uzayındaki toplama ile sayıyla çarpma vektör kısımları üzerinden yapılır: $a\mathbf{u}_{\mathbf{p}} + b\mathbf{w}_{\mathbf{p}} = (a\mathbf{u}+b\mathbf{w})_{\mathbf{p}}$. Bu yüzden $\mathbf{p}$'deki teğet vektörler arasındaki her lineer bağıntı, vektör kısımları arasındaki aynı bağıntıya denktir; $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$, lineer cebir bakımından $\mathbb{R}^3$'ün bir kopyasıdır ($\mathbf{u}\mapsto\mathbf{u}_{\mathbf{p}}$ bir lineer izomorfizmadır). Adım 1'e göre e_1, e_2, e_3'ün vektör kısımları $\mathbb{R}^3$'te bağımsız üç vektördür; Lemma 9.3 gereği $\mathbb{R}^3$'ün her vektörü onların tek bir bileşimidir. Vektör kısımlarından teğet vektörlere dönersek: her $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ için*

$$\mathbf{v} = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

olacak biçimde tek bir (c_1,c_2,c_3) sayı üçlüsü vardır.
Adım 3: katsayıların hesabı. *Bu eşitliğin iki yanının e_j ile iç çarpımını alırız. Adım 1'deki hesabın aynısıyla*

$$\mathbf{v}\cdot e_j = \Big(\sum_{i=1}^{3} c_i e_i\Big)\cdot e_j = \sum_{i=1}^{3} c_i\,\delta_{ij} = c_j.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $c_j = \mathbf{v} \cdot e_j$; bunu açılımda yerine koyunca teoremin formülü çıkar.
■

Yani bir çatıya göre bir vektörün katsayıları, vektörün çatı vektörleriyle iç çarpımlarıdır; denklem sistemi çözmek gerekmez, üç iç çarpım yeter.
Teoremin gerçek gücünü şöyle görebiliriz. Keyfi bir tabana göre katsayı bulmak, Örnek 9.24′de gördüğümüz gibi, homojen olmayan bir lineer denklem sistemi çözmektir; üç boyutta bile bu bazen sıkıcı bir iştir. Taban bir çatı, yani *ortonormal* bir taban olduğunda ise katsayılar üç iç çarpımla hemen okunur. Bu işleme $\mathbf{v}$'nin e_1, e_2, e_3 çatısına göre **ortonormal açılımı** (orthonormal expansion) denir. Sonuç yalnızca $\mathbb{R}^3$'e özgü değildir; iç çarpımı olan her vektör uzayında aynı ispat çalışır ve matematiğin en çok emek kurtaran araçlarından biridir.

Örnek 9.25 (Döndürülmüş Çatıda Açılım). $\mathbf{p} = (1,1,0)$ noktasında $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ çatısı verilsin. $\mathbf{v} = (3,1,2)$ vektör kısımlı teğet vektörün bu çatıya göre ortonormal açılımını yazalım ve sonucu doğrudan hesapla denetleyelim.

Çözüm.
Üç iç çarpım hesaplarız:

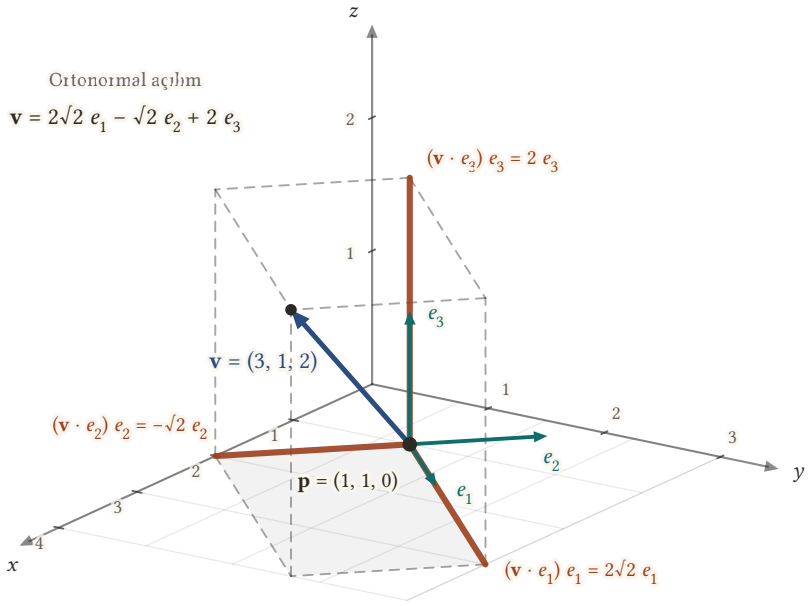
$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot e_1 &= \frac{3+1+0}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \\ \mathbf{v} \cdot e_2 &= \frac{-3+1+0}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \\ \mathbf{v} \cdot e_3 &= 0+0+2 = 2. \end{aligned}$$

Teoreme göre $\mathbf{v} = 2\sqrt{2}\,e_1 - \sqrt{2}\,e_2 + 2\,e_3$.
Denetim. Sağ tarafı açalım:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\cdot\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\cdot\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} + 2\,(0,0,1) &= (2,2,0) + (1,-1,0) + (0,0,2) \\ &= (3,1,2). \end{aligned}$$

Aynı $\mathbf{v}$'yi Örnek 9.24′de ortonormal olmayan bir tabanda yazmak için denklem sistemi çözmüştük; burada üç iç çarpım yetti. Geometrik olarak $2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ ve 2 sayıları $\mathbf{v}$ okunun e_1, e_2, e_3 doğrultularındaki (işaretli) gölge uzunluklarıdır: $\mathbf{v}$, kenarları çatı doğrultularında olan ve boyutları $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2 olan bir dikdörtgen kutunun köşegenidir. Normu da buradan okunabilir: $\|\mathbf{v}\|^2 = 8+2+4 = 14$, Öklid koordinatlarıyla da $9+1+4=14$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.3: $\mathbf{p}$ = (1, 1, 0) noktasındaki e_1, e_2, e_3 çatısı yeşil birim oklarla, $\mathbf{v}$ = (3, 1, 2) teğet vektörü mavi okla çizilmiştir. Turuncu üç kenar $\mathbf{v}$'nin çatı doğrultularındaki bileşenleridir: $(\mathbf{v}\cdot e_1)e_1 = 2\sqrt{2}\,e_1$, $(\mathbf{v}\cdot e_2)e_2 = -\sqrt{2}\,e_2$ ve $(\mathbf{v}\cdot e_3)e_3 = 2e_3$; ikinci katsayı negatif olduğu için o kenar e_2 okunun tersi yönde gider. Üç bileşen, kenarları $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ ve 2 olan kesikli kutuyu belirler ve $\mathbf{v}$ bu kutunun $\mathbf{p}$'den çıkan köşegenidir: ortonormal açılımın katsayıları, $\mathbf{v}$'nin çatı doğrultularındaki işaretli gölge uzunluklarıdır.

■

Doğal çatı için teorem tanıdık bir şey söyler: $\mathbf{v}\cdot U_i(\mathbf{p}) = v_i$ olduğundan (iç çarpım koordinat okur, Örnek 9.2)

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{3} v_i\, U_i(\mathbf{p})$$

özdeşliği (Lemma 2.1) bir ortonormal açılımdır. İç çarpımı da bu Öklid koordinatlarıyla tanımladık: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \sum_i v_i w_i$. Peki başka bir çatı kullanırsak? Her vektörün yeni koordinatları $a_i = \mathbf{v}\cdot e_i$ olur; ama iç çarpım yine aynı basit formülle hesaplanır.

Önerme 9.4 (İç Çarpım Her Çatıda Aynı Formülü Verir). *e_1, e_2, e_3, $\mathbf{p}$ noktasında bir çatı ve $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ bu noktada teğet vektörler olsun. $a_i = \mathbf{v}\cdot e_i$ ve $b_i = \mathbf{w}\cdot e_i$ ise*

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i, \qquad \|\,\mathbf{v}\,\|^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2.$$

İspat.
Ortonormal açılımla $\mathbf{v} = \sum_i a_i e_i$ ve $\mathbf{w} = \sum_j b_j e_j$. İç çarpımı bilineerlikle iki kez açarız:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \Big(\sum_i a_i e_i\Big)\cdot\Big(\sum_j b_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\,(e_i\cdot e_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Son adımda çift toplamın dokuz teriminden yalnızca $i = j$ olan üçü kalır. $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ *alınca* $b_i = a_i$ *ve* $\| \mathbf{v} \|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_i a_i^2$ *çıkar.*
■

Yani hangi çatıyı kullandığımız fark etmez: iç çarpım, o çatıya göre koordinatların karşılıklı çarpımlarının toplamıdır. Karmaşık geometrik durumlarda çatılarla çalışmanın sağladığı büyük kolaylık buradan gelir; bundan sonra çatılarla bu kadar sık karşılaşmamızın nedeni de budur.

Örnek 9.26 (İki Çatıda Aynı İç Çarpım). $\mathbf{v} = (3, 1, 2)$ ve $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$ teğet vektörlerinin (aynı noktada) iç çarpımını önce Öklid koordinatlarıyla, sonra Örnek 9.20′deki çatıya göre koordinatlarıyla hesaplayalım.

Çözüm.
Öklid koordinatlarıyla $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3 + 0 + 2 = 5$.
Döndürülmüş çatıda $\mathbf{v}$'nin koordinatlarını bulmuştuk: $(a_1, a_2, a_3) = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$. $\mathbf{w}$ için

$$b_1 = \mathbf{w} \cdot e_1 = \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b_2 = \mathbf{w} \cdot e_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b_3 = 1.$$

Önermeye göre

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot 1 = 2 + 1 + 2 = 5.$$

İki çatı aynı sayıyı verdi. Koordinatlar değişti ($\mathbf{w}$'nin Öklid koordinatları $(1, 0, 1)$ iken yeni koordinatları $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1)$), ama iç çarpım değişmedi.
■

9.8 Duruş Matrisi

Çatı kavramı, lineer cebirdeki ortogonal matris kavramına çok yakındır. Bir çatının üç vektörünün Öklid koordinatlarını bir matrisin satırlarına yazarsak çatının uzaydaki "duruşunu" tek bir nesneye sığdırmış oluruz.

Tanım 9.8 (Duruş Matrisi). e_1, e_2, e_3, $\mathbf{p}$ noktasında bir çatı olsun ve Öklid koordinatları

$$e_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})_{\mathbf{p}}, \qquad e_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})_{\mathbf{p}}, \qquad e_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})_{\mathbf{p}}$$

ile verilsin. Satırları bu koordinatlar olan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrisine çatının **duruş matrisi** (attitude matrix) denir.

Yani duruş matrisinin i-inci satırı e_i'nin vektör kısmıdır; matris, çatının uzayda nasıl durduğunu (yönelimini) kaydeder ama uygulama noktası $\mathbf{p}$'yi kaydetmez.

Örnek 9.27 (İki Duruş Matrisi). Doğal çatının ve Örnek 9.20′deki döndürülmüş çatının duruş matrislerini yazalım.

Çözüm.
Doğal çatı $U_1(\mathbf{p}), U_2(\mathbf{p}), U_3(\mathbf{p})$ için satırlar $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$'dir; duruş matrisi birim matris I'dır. Döndürülmüş çatı için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu matris, çatının hangi noktada kurulduğundan bağımsızdır: aynı vektör kısımlı çatıyı $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$'da ya da $(-4, 0, 9)$'da kursak duruş matrisi değişmez. Matrisin birim matristen farkı, çatının doğal çatıya göre ne kadar döndürüldüğünü anlatır.
■

Çatı koşulları, duruş matrisi diliyle ne söyler? Bir A matrisinin **transpozu** (transpose) A^T, satırlarla sütunların yerini değiştiren matristir: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Açık yazımı

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Önerme 9.5 (Duruş Matrisinin Satırları Ortonormaldir). *A, bir çatının duruş matrisi olsun. O zaman her $1 \le i, j \le 3$ için*

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = e_i \cdot e_j = \delta_{ij},$$

ve bu dokuz denklem matris çarpımıyla $AA^T = I$ biçiminde yazılır. Tersine, $AA^T = I$ koşulunu sağlayan her 3×3 matrisin satırları, $\mathbb{R}^3$'ün her noktasında bir çatının Öklid koordinatlarıdır.

İspat.
e_i ile e_j'nin vektör kısımları A'nın i-inci ve j-inci satırlarıdır; iç çarpımları tanım gereği karşılıklı koordinatların çarpımlarının toplamı $\sum_k a_{ik}a_{jk}$'dır. Çatı koşulu bu toplamın δ_{ij} olmasıdır.
Matris çarpımının tanımına göre AA^T'nin (i, j) girdisi, A'nın i-inci satırı ile A^T'nin j-inci sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamıdır. A^T'nin j-inci sütunu A'nın j-inci satırıdır; dolayısıyla

$$(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \, (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij},$$

bu da I'nın (i, j) girdisidir. Ters yön aynı hesabın tersten okunmasıdır: $AA^T = I$ ise satırların karşılıklı iç çarpımları δ_{ij}'dir, yani satırlar herhangi bir $\mathbf{p}$ noktasına uygulandığında karşılıklı ortogonal üç birim vektör verir.
■

$AA^T = I$ koşulunu sağlayan bir kare matrise **ortogonal matris** (orthogonal matrix) denir. Önerme, çatıyla ortogonal matrisin aynı bilginin iki yazımı olduğunu söyler: bir çatının duruş matrisi ortogonaldir ve her ortogonal matris bir çatının duruş matrisidir.
$AA^T = I$ eşitliği A^T'nin A'nın *sağdan* tersi olduğunu söyler. Kare matrislerde sağdan ters aynı zamanda soldan terstir; bu, lineer cebirin standart bir sonucudur ama biz onu da ispatlayacağız. Bunun için bir 3×3 matrisi sütun vektörleri üzerinde bir fonksiyon olarak görürüz: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sütun olarak yazılınca $A\mathbf{x}$, i-inci girdisi $\sum_j a_{ij}x_j$ olan sütundur. Matris çarpımının birleşme özelliği $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$ verir, $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$'tir ve $B\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{b}_j$, burada $\mathbf{b}_j$ B'nin j-inci sütunudur.

Lemma 9.4 (Kare Matriste Tek Yanlı Ters İki Yanlıdır). *A ve B, 3×3 matrisler olsun. $AB = I$ ise $BA = I$.*

İspat.
Adım 1: *B*'nin sütunları bağımsızdır. *$B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olsun. O zaman*

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = (AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$B\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{b}_j$ olduğundan bu şu demektir: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sütunlarının sıfır veren tek bileşimi katsayıları sıfır olan bileşimdir; sütunlar lineer bağımsızdır.
Adım 2: *B örtendir. Lemma 9.3 gereği bağımsız üç sütun bir tabandır: her $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ için $\mathbf{y} = \sum_j x_j \mathbf{b}_j = B\mathbf{x}$ olacak biçimde bir $\mathbf{x}$ vardır.*
Adım 3: *$BA = I$. Herhangi bir $\mathbf{y}$ alıp adım 2'deki gibi $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ yazalım. Birleşme özelliğiyle*

$$(BA)\mathbf{y} = (BA)(B\mathbf{x}) = B\left(\ (AB)\mathbf{x}\ \right) = B(I\mathbf{x}) = B\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Demek ki BA her sütun vektörünü kendisine götürür. Özel olarak $\mathbf{y}$ olarak $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ sütunlarını alırsak BA'nın sütunlarının I'nın sütunları olduğunu görürüz; yani $BA = I$.
■

Sonuç 9.1 (Duruş Matrisinin Tersi Transpozudur). *A bir çatının duruş matrisi (ya da herhangi bir ortogonal matris) ise $A^TA = I$; yani $A^T = A^{-1}$. Girdilerle yazılınca*

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik}a_{il} = \delta_{kl} \qquad (1 \le k, l \le 3):$$

A'nın sütunları da ortonormaldir.

İspat.
Önerme 9.5 ile $AA^T = I$. Lemma 9.4'i $B = A^T$ ile uygularsak $A^TA = I$ çıkar. Hem $AA^T = I$ hem $A^TA = I$ olduğundan A^T, A'nın tersidir. A^TA'nın (k,l) girdisi $\sum_i (A^T)_{ki}a_{il} = \sum_i a_{ik}a_{il}$'dir; bunun δ_{kl} olması, A'nın k-inci ve l-inci sütunlarının iç çarpımının δ_{kl} olması demektir.
■

Yani bir çatının duruş matrisinin satırları gibi sütunları da bir çatının koordinatlarıdır; bu, tanımdan hemen görünmeyen ama ispatladığımız bir olgudur.

Örnek 9.28 (Sütunların Ortonormalliğini Görmek). Satırları $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ ve $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ olan A matrisi ortogonaldir. Sütunlarının da ortonormal olduğunu hesapla görelim.

Çözüm.
Önce verilen bilgiyi denetleyelim. Satırların normları $\sqrt{(1+4+1)/6} = 1$, $\sqrt{(1+0+1)/2} = 1$ ve $\sqrt{(1+1+1)/3} = 1$. Karşılıklı iç çarpımlar

$$\frac{-1+0+1}{\sqrt{12}} = 0, \qquad \frac{1-2+1}{\sqrt{18}} = 0, \qquad \frac{-1+0+1}{\sqrt{6}} = 0.$$

Satırlar ortonormal, matris ortogonaldir:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Sonuca göre sütunlar da ortonormal olmalıdır. Birinci sütun $(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$ için kareler toplamı $1/6 + 1/2 + 1/3 = 1$; ikinci sütun $(2/\sqrt{6}, 0, -1/\sqrt{3})$ için $4/6 + 0 + 1/3 = 1$; üçüncü sütun $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$ için $1/6 + 1/2 + 1/3 = 1$. Birinci ile ikinci sütunun iç çarpımı $2/6 + 0 - 1/3 = 0$; birinci ile üçüncünün $1/6 - 1/2 + 1/3 = 0$; ikinci ile üçüncünün $2/6 + 0 - 1/3 = 0$. Sütunlar ortonormaldir; satırlar için denetlediğimiz altı denklem, sütunlar için de kendiliğinden sağlanmıştır.
■

9.9 Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}^3$'te iç çarpımdan sonra en önemli ikinci çarpım vektörel çarpımdır. İkisi arasındaki fark, sonucun türüdür: iç çarpım iki vektörden bir *sayı* üretir, vektörel çarpım ise bir *vektör*. Üretilen vektörün en değerli

 CC BY-NC-SA 4.0

özelliği, iki çarpana aynı anda dik olmasıdır. Formülü hatırlamanın en pratik yolu bir 3×3 determinanttır; önce bu determinantı kesin olarak tanımlayalım.
Satırları (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) ve (c_1, c_2, c_3) olan 3×3 matrisin **determinantı** (determinant), birinci satıra göre açılımla tanımlanır:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Her parantez, birinci satır ile ilgili sütun silindiğinde geriye kalan 2×2 determinanttır; işaretler $+, -, +$ sırasıyla gider. Bu formülü tanım olarak alıyoruz; ihtiyaç duyacağımız her determinant özelliğini doğrudan bu formülden çıkaracağız.

Tanım 9.9 (Vektörel Çarpım). $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}^3$'ün aynı $\mathbf{p}$ noktasında teğet vektörler olsun. $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin **vektörel çarpımı** (cross product), birinci satıra göre açılan

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} U_1(\mathbf{p}) & U_2(\mathbf{p}) & U_3(\mathbf{p}) \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

biçimsel determinantıyla tanımlanan, $\mathbf{p}$ noktasındaki teğet vektördür.

Determinant "biçimsel"dir, çünkü birinci satırında sayılar değil teğet vektörler durur; açılım kuralı sayısal katsayılarla bu vektörlerin bileşimini verir:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2)\,U_1(\mathbf{p}) + (v_3w_1 - v_1w_3)\,U_2(\mathbf{p}) + (v_1w_2 - v_2w_1)\,U_3(\mathbf{p}).$$

Yani $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, vektör kısmı

$$(v_2w_3 - v_3w_2,\, v_3w_1 - v_1w_3,\, v_1w_2 - v_2w_1)$$

olan, $\mathbf{p}$ noktasındaki teğet vektördür; ikinci koordinattaki işaret düzenine dikkat: açılımdaki $-a_2(b_1c_3 - b_3c_1)$ terimi $+(v_3w_1 - v_1w_3)$ olarak yazılmıştır.

Örnek 9.29 (Bir Vektörel Çarpım Hesabı). $\mathbf{p}$ noktasında $\mathbf{v} = (2, 1, 0)_{\mathbf{p}}$ ve $\mathbf{w} = (0, 3, 1)_{\mathbf{p}}$ için $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$'yi hesaplayalım ve sonucun iki çarpana da dik olduğunu doğrulayalım.

Çözüm.
Biçimsel determinantı birinci satıra göre açarız:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} U_1(\mathbf{p}) & U_2(\mathbf{p}) & U_3(\mathbf{p}) \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 - 0 \cdot 3)\,U_1(\mathbf{p}) - (2 \cdot 1 - 0 \cdot 0)\,U_2(\mathbf{p}) + (2 \cdot 3 - 1 \cdot 0)\,U_3(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Yani

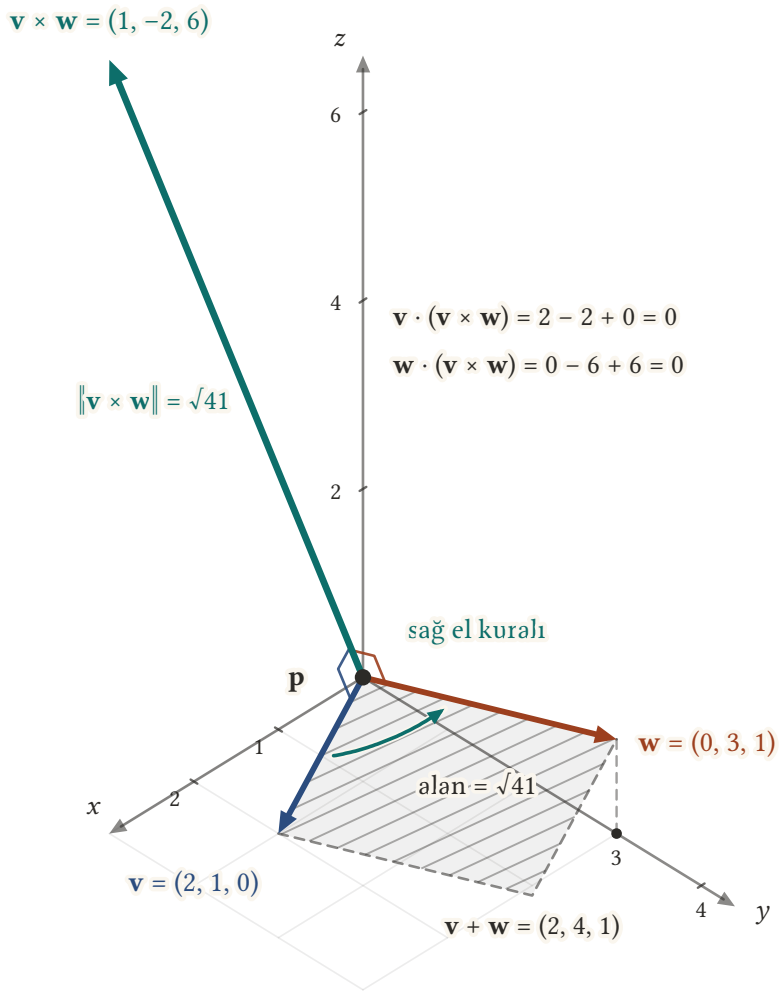
$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = U_1(\mathbf{p}) - 2\,U_2(\mathbf{p}) + 6\,U_3(\mathbf{p}) = (1, -2, 6)_{\mathbf{p}}.$$

Diklik. İki iç çarpımı hesaplarız:

$$(2, 1, 0) \cdot (1, -2, 6) = 2 - 2 + 0 = 0, \qquad (0, 3, 1) \cdot (1, -2, 6) = 0 - 6 + 6 = 0.$$

Sonuç her iki çarpana da ortogonaldir. Uzunluğu $\sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$'dir; biraz sonra bu sayının $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin gerdiği paralelkenarın alanı olduğunu göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.4: Uygulama noktası $\mathbf{p}$ orijinde alınmıştır; oradan çıkan $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$ (mavi) ile $\mathbf{w} = (0, 3, 1)$ (turuncu) taralı paralelkenarı gerer. Vektörel çarpım $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (1, -2, 6)$ (yeşil) bu paralelkenarın düzlemine diktir: iki dik açı işareti, $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ ve $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ hesaplarının geometrik karşılığıdır. Okun yönünü sağ el kuralı belirler: $\mathbf{v}$'den $\mathbf{w}$'ye dönülürken başparmak $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ yönünü gösterir. Okun uzunluğu $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \sqrt{41}$, paralelkenarın alanına eşittir.

■

Örnek 9.30 (Doğal Çatının Vektörel Çarpımları). Bir $\mathbf{p}$ noktasında $U_1 \times U_2$, $U_2 \times U_3$, $U_3 \times U_1$ ve $U_2 \times U_1$ çarpımlarını hesaplayalım (kısalık için $U_i = U_i(\mathbf{p})$ yazıyoruz).

Çözüm.
$U_1 \times U_2$ için $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$; vektör kısmı

$$(0 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 1),$$

yani $U_1 \times U_2 = U_3$. Aynı hesapla $U_2 \times U_3 = U_1$ ve $U_3 \times U_1 = U_2$: çarpanların indisleri $1 \to 2 \to 3 \to 1$ çevrimiyle dönerken sonuç üçüncü vektördür. $U_2 \times U_1$ için ise $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$ ve vektör kısmı $(0, 0, -1)$; yani $U_2 \times U_1 = -U_3$. Çarpanların sırası sonucun işaretini değiştirir; bu, aşağıdaki ters değişme kuralının özel bir hâlidir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Determinantların bilinen özellikleri vektörel çarpımın cebirsel kurallarını verir. Bu özellikleri tanımımızdan, yani koordinat formülünden, açıkça çıkaracağız.

Önerme 9.6 (Vektörel Çarpımın Cebirsel Kuralları). $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *aynı noktada teğet vektörler ve* a, b *sayılar olsun.*
1. Vektörel çarpım her iki çarpanında lineerdir:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} \times \mathbf{w} + b\,\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} \times (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\,\mathbf{w} \times \mathbf{u} + b\,\mathbf{w} \times \mathbf{v}.$$

2. ***Ters değişme kuralı*** *(alternation rule):* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\,\mathbf{w} \times \mathbf{v}$.
3. Her $\mathbf{v}$ *için* $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

> ***İspat.***
> Lineerlik. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$*'nin birinci koordinatı* $v_2w_3 - v_3w_2$*'dir.* $\mathbf{w}$ *sabit tutulursa bu ifade* $\mathbf{v}$*'nin koordinatlarında lineerdir:* $\mathbf{v}$ *yerine* $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ *koyunca*
>
> $$(au_2 + bv_2)\,w_3 - (au_3 + bv_3)\,w_2 = a\,(u_2w_3 - u_3w_2) + b\,(v_2w_3 - v_3w_2),$$
>
> *bu da* $a\,\mathbf{u} \times \mathbf{w} + b\,\mathbf{v} \times \mathbf{w}$*'nin birinci koordinatıdır. Öteki iki koordinat için hesap aynıdır, çünkü her koordinat* $\mathbf{v}$*'nin koordinatlarının* $\mathbf{w}$*'nin koordinatlarıyla çarpımlarının toplamıdır. Determinant diliyle: determinant, öteki satırlar sabitken bir satırında lineerdir. İkinci çarpandaki lineerlik aynı biçimde görülür.*
> Ters değişme. $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$*'nin vektör kısmı, tanımda* $\mathbf{v}$ *ile* $\mathbf{w}$*'nin rolleri değiştirilerek bulunur:*
>
> $$\begin{aligned}&(w_2v_3 - w_3v_2,\, w_3v_1 - w_1v_3,\, w_1v_2 - w_2v_1)\\ &\quad = -\,(v_2w_3 - v_3w_2,\, v_3w_1 - v_1w_3,\, v_1w_2 - v_2w_1).\end{aligned}$$
>
> *Her koordinatta iki terimin yeri değişmiş, işaret tersine dönmüştür. Determinant diliyle: iki satırın yerini değiştirmek determinantın işaretini değiştirir.*
> Kendisiyle çarpım. *Ters değişme kuralında* $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ *alınırsa* $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\,\mathbf{v} \times \mathbf{v}$*, yani* $2\,\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *ve* $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$*. Doğrudan da görülür: birinci koordinat* $v_2v_3 - v_3v_2 = 0$*, ötekiler de öyle. Determinant diliyle: iki satırı aynı olan determinant sıfırdır.*
> ■

Yani vektörel çarpım, çarpanlarına toplamı ve sayı katını dağıtır, ama sıra değiştirince işaret değiştirir; bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı her zaman sıfırdır.

Örnek 9.31 (Kuralları Sayılarla Denetlemek). $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$ ve $\mathbf{w} = (0, 3, 1)$ için $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ ve $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{w}$ çarpımlarını hesaplayıp yukarıda bulduğumuz $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (1, -2, 6)$ ile karşılaştıralım.

> **Çözüm.**
> $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$'nin vektör kısmı
>
> $$(3 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\, 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0,\, 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = (-1, 2, -6) = -(1, -2, 6);$$
>
> ters değişme kuralı doğrulandı. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (2, 4, 1)$ için
>
> $$(4 \cdot 1 - 1 \cdot 3,\, 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1,\, 2 \cdot 3 - 4 \cdot 0) = (1, -2, 6).$$
>
> Bu, lineerlikle beklediğimiz sonuçtur:
>
> $$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{0}.$$
>
> ■

Vektörel çarpımın geometrik değeri neredeyse tümüyle şu iki olguya dayanır: sonuç iki çarpana da diktir ve uzunluğu iç çarpımlarla hesaplanabilir.

Lemma 9.5 (Vektörel Çarpımın Dikliği ve Uzunluğu). *Aynı noktadaki* $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ *teğet vektörleri için* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *hem* $\mathbf{v}$*'ye hem* $\mathbf{w}$*'ye ortogonaldir ve uzunluğu*

$$\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

eşitliğini sağlar.

İspat.
$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\sum_i c_i\,U_i(\mathbf{p})$ *yazalım;* $c_1=v_2w_3-v_3w_2$, $c_2=v_3w_1-v_1w_3$, $c_3=v_1w_2-v_2w_1$.
$\mathbf{v}$'ye diklik. $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\sum_i v_ic_i$*'dir. Açık yazalım:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} v_ic_i &= v_1(v_2w_3-v_3w_2)+v_2(v_3w_1-v_1w_3)+v_3(v_1w_2-v_2w_1)\\ &= v_1v_2w_3-v_1v_3w_2+v_2v_3w_1-v_1v_2w_3+v_1v_3w_2-v_2v_3w_1=0.\end{aligned}$$

Altı terim üç çift hâlinde birbirini götürür. Determinant diliyle bu toplam, birinci satırına $U_i(\mathbf{p})$ *yerine* v_i *yazılmış determinanttır:*

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix},$$

iki satırı aynı olduğundan sıfırdır; yukarıdaki açık hesap tam da bunun ispatıdır.
$\mathbf{w}$'ye diklik. *Aynı hesabı* $\mathbf{w}$ *ile yaparız:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} w_ic_i &= w_1(v_2w_3-v_3w_2)+w_2(v_3w_1-v_1w_3)+w_3(v_1w_2-v_2w_1)\\ &= v_2w_1w_3-v_3w_1w_2+v_3w_1w_2-v_1w_2w_3+v_1w_2w_3-v_2w_1w_3=0.\end{aligned}$$

Yine üç çift birbirini götürür.
Uzunluk formülü. *Her iki tarafı koordinatlarla açıp karşılaştıracağız. Sağ taraf:*

$$\begin{aligned}&(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2\\ &\quad=(v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2)-(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)^2.\end{aligned}$$

Birinci çarpım dokuz terim verir: $i=j$ *olan üç terim* $v_i^2w_i^2$ *ve* $i\neq j$ *olan altı terim* $v_i^2w_j^2$*. Kare ise aynı üç* $v_i^2w_i^2$ *terimini ve üç çapraz terimi verir:*

$$2v_1w_1v_2w_2+2v_1w_1v_3w_3+2v_2w_2v_3w_3.$$

Fark alınınca $v_i^2w_i^2$ *terimleri gider:*

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2 &= v_1^2w_2^2+v_1^2w_3^2+v_2^2w_1^2+v_2^2w_3^2+v_3^2w_1^2+v_3^2w_2^2\\ &\quad -2v_1v_2w_1w_2-2v_1v_3w_1w_3-2v_2v_3w_2w_3.\end{aligned}$$

Sol taraf ise $\|\,\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,\|^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2$*:*

$$\begin{aligned}c_1^2&=(v_2w_3-v_3w_2)^2=v_2^2w_3^2-2v_2v_3w_2w_3+v_3^2w_2^2,\\ c_2^2&=(v_3w_1-v_1w_3)^2=v_3^2w_1^2-2v_1v_3w_1w_3+v_1^2w_3^2,\\ c_3^2&=(v_1w_2-v_2w_1)^2=v_1^2w_2^2-2v_1v_2w_1w_2+v_2^2w_1^2.\end{aligned}$$

Üçünü toplayınca altı kare terimi ($v_2^2w_3^2$, $v_3^2w_2^2$, $v_3^2w_1^2$, $v_1^2w_3^2$, $v_1^2w_2^2$, $v_2^2w_1^2$) *ve üç çapraz terim* ($-2v_2v_3w_2w_3$, $-2v_1v_3w_1w_3$, $-2v_1v_2w_1w_2$) *elde ederiz; bunlar sağ taraftaki dokuz terimin tam kendisidir. İki taraf eşittir.*
■

Yani $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, iki çarpanın gerdiği düzleme dik durur ve uzunluğunun karesi, uzunlukların karelerinin çarpımından iç çarpımın karesi çıkarılarak bulunur.

Örnek 9.32 (Uzunluk Formülünü Denetlemek). $\mathbf{v}=(2,1,0)$, $\mathbf{w}=(0,3,1)$ ve $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(1,-2,6)$ için uzunluk formülünün iki tarafını hesaplayalım.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sol taraf $\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|^2 = 1 + 4 + 36 = 41$. Sağ tarafta $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 5$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 10$ ve $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 + 3 + 0 = 3$; dolayısıyla $5 \cdot 10 - 3^2 = 41$. İki taraf eşittir. Vektörel çarpımı hiç hesaplamadan da uzunluğunu bilebilirdik: yalnızca üç iç çarpım yeter.
■

Uzunluk formülünü açıyla yazarsak daha sezgisel bir biçim alır.

Sonuç 9.2 (Vektörel Çarpımın Uzunluğu ve Sinüs). *$\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ aynı noktada sıfırdan farklı teğet vektörler, ϑ aralarındaki açı olsun. O zaman*

$$\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \sin \vartheta.$$

İspat.
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \cos \vartheta$ eşitliğini uzunluk formülünde yerine koyarız:

$$\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|^2 = \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2 \cos^2 \vartheta = \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2 \sin^2 \vartheta.$$

$0 \le \vartheta \le \pi$ olduğundan $\sin \vartheta \ge 0$; karekök alınca $\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| = \| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \sin \vartheta$ çıkar.
■

Yani vektörel çarpımın uzunluğu, iki vektörün gerdiği paralelkenarın alanıdır: tabanı $\| \mathbf{v} \|$, yüksekliği $\| \mathbf{w} \| \sin \vartheta$ olan paralelkenar. Bu yorumu alıştırmalarda kesinleştireceğiz. Formül ayrıca şunu söyler: $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ancak $\sin \vartheta = 0$, yani vektörler aynı doğru üzerinde olduğunda sıfırdır.

Örnek 9.33 (Sinüs Formülünü Denetlemek). $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$ ve $\mathbf{w} = (0, 3, 1)$ için $\| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \sin \vartheta$ sayısını hesaplayıp $\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| = \sqrt{41}$ ile karşılaştıralım.

Çözüm.
$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{5}$, $\| \mathbf{w} \| = \sqrt{10}$ ve $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3$; dolayısıyla

$$\cos \vartheta = \frac{3}{\sqrt{50}}, \qquad \sin^2 \vartheta = 1 - \frac{9}{50} = \frac{41}{50}.$$

O hâlde

$$\| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \| \sin \vartheta = \sqrt{50} \cdot \sqrt{41/50} = \sqrt{41}.$$

Sonuç, vektörel çarpımın doğrudan hesaplanan uzunluğuyla aynıdır. Açının kendisi $\vartheta = \cos^{-1}(3/\sqrt{50}) \approx 1{,}13$ radyan, yaklaşık $65°$'dir.
■

Vektörel çarpımın uzunluğunu ve doğrultusunu biliyoruz; $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'ye dik doğru üzerinde iki yön vardır, sonuç hangisine bakar? Bunun kesin yanıtı koordinat formülündedir; pratik yanıtı ise **sağ el kuralı**dır (right-hand rule).

> **Sağ el kuralı**
>
> Sağ elin parmakları, $\mathbf{v}$'yi en kısa yoldan $\mathbf{w}$'ye döndüren yönde kıvrılırsa başparmak $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ yönünü gösterir. Doğal çatıda $U_1 \times U_2 = U_3$ olması bunun bir örneğidir: x ekseninden y eksenine doğru kıvrılan parmaklarla başparmak pozitif z yönüne bakar. Çarpanların sırasını değiştirmek dönüş yönünü, dolayısıyla başparmağın yönünü tersine çevirir; bu, ters değişme kuralının el ile hatırlanışıdır. Kural bir sezgi aracıdır; ispatlarda her zaman koordinat formülünü kullanırız.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Vektörel çarpım ile kama çarpımının akrabalığı

Vektörel çarpım, Diferansiyel Formlar bölümündeki 1-formların kama çarpımının yakın akrabasıdır. Ters değişme kuralı $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$, 1-formlar için Lemma 6.1′de gördüğümüz $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$ kuralının tam karşılığıdır; $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ da $\phi \wedge \phi = 0$'ın. Daha fazlası var: sabit katsayılı $\phi = \sum_i v_i\, dx_i$ ve $\psi = \sum_i w_i\, dx_i$ 1-formları için

$$\begin{aligned}\phi \wedge \psi = (v_1w_2 - v_2w_1)\, dx_1 \wedge dx_2 + (v_1w_3 - v_3w_1)\, dx_1 \wedge dx_3 \\ +(v_2w_3 - v_3w_2)\, dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

olur. Alıştırma 6.18′deki 2-formlarla vektör alanları arasındaki eşlemede $dx_2 \wedge dx_3$'ün katsayısı U_1'in, $dx_1 \wedge dx_2$'nin katsayısı U_3'ün katsayısı, $dx_1 \wedge dx_3$'ün katsayısı ise U_2 katsayısının negatifidir. Bu eşleme altında $\phi \wedge \psi$, koordinatları $v_2w_3 - v_3w_2$, $-(v_1w_3 - v_3w_1) = v_3w_1 - v_1w_3$ ve $v_1w_2 - v_2w_1$ olan vektöre, yani tam olarak $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$'ye karşılık gelir. Rotasyonelin bir dış türev olması da aynı akrabalığın bir başka yüzüdür.

9.10 Üçlü Skaler Çarpım

İç çarpımla vektörel çarpımı birleştirerek üç vektörden bir sayı üreten bir işlem elde ederiz.

Tanım 9.10 (Üçlü Skaler Çarpım). $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aynı noktada teğet vektörler olsun. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ sayısına bu üç vektörün **üçlü skaler çarpımı** (triple scalar product) denir ve parantezsiz olarak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ yazılır.

Yani önce $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ vektörel çarpılır, sonra sonuç $\mathbf{u}$ ile iç çarpılır; çıkan şey bir sayıdır.
Parantezin gereksiz olmasının nedeni şudur: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ifadesini başka türlü, yani $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ olarak okumaya kalkarsak, bir sayı olan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$'yi bir vektörle vektörel çarpmak gerekir; böyle bir işlem tanımlı değildir. Anlamlı tek okuma $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$'dir. Koordinatlarla açık yazımı, lemmanın ispatındaki hesabın aynısıdır:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1).$$

Bu, satırları $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$'nin koordinatları olan 3×3 determinantın birinci satıra göre açılımıdır; alıştırmalarda bunu ve sonuçlarını ayrıntısıyla inceleyeceğiz.

Örnek 9.34 (Bir Üçlü Skaler Çarpım). $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$ ve $\mathbf{w} = (1, 3, 0)$ için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sayısını hesaplayalım.

Çözüm.
Önce vektörel çarpım:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3,\, 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0,\, 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = (0, 0, 6).$$

$\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ ikisi de xy düzleminde olduğundan çarpımları z ekseni doğrultusunda çıktı. Sonra iç çarpım: $\mathbf{u} \cdot (0, 0, 6) = 18$. Yani $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 18$. Sonucu şöyle yorumlayabiliriz: $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin gerdiği paralelkenarın alanı $\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| = 6$, $\mathbf{u}$'nun bu paralelkenarın düzlemine dik yüksekliği $u_3 = 3$; çarpım 18, üç vektörün gerdiği kutunun hacmidir. Bu yorumu alıştırmalarda ispatlayacağız.
■

Örnek 9.35 (Aynı Düzlemdeki Üç Vektör). $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 3, 0)$ ve $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = (3, 3, 0)$ için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$'yi hesaplamadan önce tahmin edelim, sonra hesaplayalım.

Çözüm.
$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ hem $\mathbf{v}$'ye hem $\mathbf{w}$'ye diktir; bilineerlik gereği $\mathbf{v} + \mathbf{w}$'ye de diktir:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0 + 0.$$

Tahminimiz 0'dır. Hesap: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 0, 6)$ ve $(3, 3, 0) \cdot (0, 0, 6) = 0$. Genel olarak $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin gerdiği düzlemde yatıyorsa üçlü skaler çarpım sıfırdır: kutu yassılmış, hacmi yok olmuştur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

9.11 Alıştırmalar

Alıştırma 9.1 (İki Vektörün İç Çarpımı). $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ ve $\mathbf{w} = (-1, 0, 3)$, $\mathbb{R}^3$'ün bir noktasında teğet vektörler olsun. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm.
Karşılıklı koordinatları çarpıp toplarız:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1(-1) + 2(0) + (-1)(3) = -1 + 0 - 3 = -4.$$

Sonuç negatiftir; demek ki iki vektör arasındaki açı geniştir. Bunu aşağıda açının kosinüsünü hesaplarken doğrulayacağız.
■

Alıştırma 9.2 (İki Vektörün Vektörel Çarpımı). $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ ve $\mathbf{w} = (-1, 0, 3)$ aynı noktada teğet vektörler olsun. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$'yi hesaplayınız.

Çözüm.
Biçimsel determinantı birinci satıra göre açarız:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \big(\, 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 0 \,\big)\, U_1 - \big(\, 1 \cdot 3 - (-1)(-1) \,\big)\, U_2 \\ &\quad + \big(\, 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \,\big)\, U_3.\end{aligned}$$

Katsayılar 6, $-(3-1) = -2$ ve 2; yani $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (6, -2, 2)$.
Denetim. Sonuç iki çarpana da dik olmalıdır:

$$\begin{aligned}(1, 2, -1) \cdot (6, -2, 2) &= 6 - 4 - 2 = 0, \\ (-1, 0, 3) \cdot (6, -2, 2) &= -6 + 0 + 6 = 0.\end{aligned}$$

■

Alıştırma 9.3 (İki Vektörün Birim Vektörleri). $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ ve $\mathbf{w} = (-1, 0, 3)$ için $\mathbf{v}/\,\|\,\mathbf{v}\,\|$ ve $\mathbf{w}/\,\|\,\mathbf{w}\,\|$ birim vektörlerini yazınız.

Çözüm.
$\|\,\mathbf{v}\,\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ ve $\|\,\mathbf{w}\,\| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$. Dolayısıyla

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\,\mathbf{v}\,\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1), \qquad \frac{\mathbf{w}}{\|\,\mathbf{w}\,\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 0, 3).$$

Her ikisinin normu 1'dir: $(1+4+1)/6 = 1$ ve $(1+0+9)/10 = 1$. Örnek 9.18'da gördüğümüz gibi bunlar $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ ile aynı yöne bakan tek birim vektörlerdir.
■

Alıştırma 9.4 (Vektörel Çarpımın Uzunluğu). $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ ve $\mathbf{w} = (-1, 0, 3)$ için $\|\,\mathbf{v} \times \mathbf{w}\,\|$ sayısını iki yoldan hesaplayınız.

Çözüm.
Birinci yol. Yukarıda $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (6, -2, 2)$ bulmuştuk; normu $\sqrt{36+4+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.

İkinci yol. Lemma 9.5'nin uzunluk formülüyle, vektörel çarpımı hiç kullanmadan: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=6$, $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=10$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-4$ ve

$$\|\,\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,\|^2 = 6\cdot 10-(-4)^2 = 60-16 = 44.$$

İki yol da $\|\,\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,\| = 2\sqrt{11}\approx 6{,}63$ verir. Bu sayı, $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin gerdiği paralelkenarın alanıdır. ■

Alıştırma 9.5 (İki Vektör Arasındaki Açının Kosinüsü). $\mathbf{v}=(1,2,-1)$ ve $\mathbf{w}=(-1,0,3)$ arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm.
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-4$, $\|\,\mathbf{v}\,\|=\sqrt{6}$, $\|\,\mathbf{w}\,\|=\sqrt{10}$. Açının tanımına göre

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\,\mathbf{v}\,\|\,\|\,\mathbf{w}\,\|} = \frac{-4}{\sqrt{60}} = \frac{-4}{2\sqrt{15}} = -\frac{2}{\sqrt{15}} \approx -0{,}516.$$

Kosinüs negatif olduğundan açı geniştir: $\vartheta=\cos^{-1}(-2/\sqrt{15})\approx 2{,}11$ radyan, yaklaşık 121°. Denetim olarak sinüs formülüne bakalım: $\sin^2\vartheta = 1-4/15 = 11/15$ ve

$$\|\,\mathbf{v}\,\|\,\|\,\mathbf{w}\,\|\sin\vartheta = \sqrt{60}\cdot\sqrt{11/15} = \sqrt{44},$$

önceki alıştırmada bulduğumuz $\|\,\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,\|$ ile aynı. ■

Alıştırma 9.6 (Uzaklık Negatif Olmaz). Her $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^3$ için $d(\mathbf{p},\mathbf{q})\geq 0$ olduğunu ve $d(\mathbf{p},\mathbf{q})=0$ eşitliğinin ancak ve ancak $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ iken sağlandığını gösteriniz.

Çözüm.
$d(\mathbf{p},\mathbf{q})=\|\,\mathbf{p}-\mathbf{q}\,\|$ bir karekök olduğundan negatif değildir. Sıfır olması $\|\,\mathbf{p}-\mathbf{q}\,\|^2=(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{q})=0$ demektir; pozitif tanımlılık (Önerme 9.1) gereği bu ancak $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{0}$, yani $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ iken olur. Tersine $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ ise $d(\mathbf{p},\mathbf{q})=\|\,\mathbf{0}\,\|=0$.
Yani farklı iki nokta arasındaki uzaklık her zaman pozitiftir; uzaklık, noktaları birbirinden ayırır. ■

Alıştırma 9.7 (Uzaklık Simetriktir). Her $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^3$ için $d(\mathbf{p},\mathbf{q})=d(\mathbf{q},\mathbf{p})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\mathbf{q}-\mathbf{p}=(-1)(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ olduğundan Önerme 9.2'nin birinci özelliğiyle

$$d(\mathbf{q},\mathbf{p})=\|\,\mathbf{q}-\mathbf{p}\,\|=\|\,(-1)(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\|=|\,-1\,|\,\|\,\mathbf{p}-\mathbf{q}\,\|=d(\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

Koordinatlarla da görülür: uzaklık formülündeki $(p_i-q_i)^2$ terimleri $(q_i-p_i)^2$ ile aynıdır. ■

Alıştırma 9.8 (Uzaklık İçin Üçgen Eşitsizliği). Her $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ için $d(\mathbf{p},\mathbf{q})+d(\mathbf{q},\mathbf{r})\geq d(\mathbf{p},\mathbf{r})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\mathbf{p}-\mathbf{r}=(\mathbf{p}-\mathbf{q})+(\mathbf{q}-\mathbf{r})$ yazıp normun üçgen eşitsizliğini (Önerme 9.2) uygularız:

$$d(\mathbf{p},\mathbf{r})=\|\,(\mathbf{p}-\mathbf{q})+(\mathbf{q}-\mathbf{r})\,\|\leq\|\,\mathbf{p}-\mathbf{q}\,\|+\|\,\mathbf{q}-\mathbf{r}\,\|=d(\mathbf{p},\mathbf{q})+d(\mathbf{q},\mathbf{r}).$$

Sözle: $\mathbf{p}$'den $\mathbf{r}$'ye $\mathbf{q}$'ya uğrayarak gitmek, doğrudan gitmekten kısa olamaz. Bu üç alıştırma birlikte, d'nin bir *uzaklık fonksiyonu* (metrik) olmasının bütün koşullarını verir; açık küme tanımını $\mathbb{R}^3$ dışına taşımak için gereken tam bu üç özelliktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 9.9 (Üç Vektörün Çatı Oluşturduğunu Göstermek). Aynı noktadaki

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2,0,2), \qquad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

teğet vektörlerinin bir çatı oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Altı denklemi denetleriz. Normların kareleri:

$$\| e_1 \|^2 = \frac{1+4+1}{6} = 1, \qquad \| e_2 \|^2 = \frac{4+0+4}{8} = 1,$$

ve $\| e_3 \|^2 = (1+1+1)/3 = 1$. Karşılıklı iç çarpımlar:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_2 &= \frac{(1)(-2)+(2)(0)+(1)(2)}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = 0, \\ e_1 \cdot e_3 &= \frac{1-2+1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 0, \\ e_2 \cdot e_3 &= \frac{-2+0+2}{\sqrt{8}\sqrt{3}} = 0. \end{aligned}$$

Üçü birim, ikişer ikişer ortogonal: e_1, e_2, e_3 bir çatıdır. $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ biçiminde de yazılabilir; bu çatının duruş matrisini Örnek 9.28′de incelemiştik.
■

Alıştırma 9.10 (Bir Vektörü Çatıda Açmak). $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2,0,2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ çatısı verilsin. $\mathbf{v} = (6,1,-1)$ vektörünü bu çatı vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız ve sonucu doğrudan hesapla denetleyiniz.

Çözüm.
Teorem 9.1 gereği katsayılar iç çarpımlardır:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot e_1 &= \frac{6+2-1}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}, \\ \mathbf{v} \cdot e_2 &= \frac{-12+0-2}{\sqrt{8}} = \frac{-14}{2\sqrt{2}} = -\frac{7}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{v} \cdot e_3 &= \frac{6-1-1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\mathbf{v} = \frac{7}{\sqrt{6}}\, e_1 - \frac{7}{\sqrt{2}}\, e_2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\, e_3.$$

Denetim. Her terimi açalım:

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt{6}} \cdot \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} &= \frac{7}{6}(1,2,1), \\ -\frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(-2,0,2)}{2\sqrt{2}} &= -\frac{7}{4}(-2,0,2) = \frac{7}{2}(1,0,-1), \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} &= \frac{4}{3}(1,-1,1). \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Koordinat koordinat toplayalım:

$$\begin{aligned} x &: \frac{7}{6} + \frac{7}{2} + \frac{4}{3} = \frac{7+21+8}{6} = 6, \\ y &: \frac{7}{3} + 0 - \frac{4}{3} = 1, \\ z &: \frac{7}{6} - \frac{7}{2} + \frac{4}{3} = \frac{7-21+8}{6} = -1. \end{aligned}$$

Toplam $(6, 1, -1) = \mathbf{v}$'dir. Ek bir denetim: Önerme 9.4'e göre katsayıların kareleri toplamı $\|\mathbf{v}\|^2$ olmalıdır:

$$\frac{49}{6} + \frac{49}{2} + \frac{16}{3} = \frac{49+147+32}{6} = 38 = 36 + 1 + 1.$$

■

Alıştırma 9.11 (Üçlü Skaler Çarpım Bir Determinanttır). $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ aynı noktada teğet vektörler olsun.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$'nin koordinatları $c_1 = v_2w_3 - v_3w_2$, $c_2 = v_3w_1 - v_1w_3$, $c_3 = v_1w_2 - v_2w_1$'dir; iç çarpım

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1).$$

Öte yandan determinantın birinci satıra göre açılımı tanım gereği

$$u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

ve ortadaki terim

$$-u_2(v_1w_3 - v_3w_1) = u_2(v_3w_1 - v_1w_3)$$

olduğundan iki ifade aynıdır. Kısaca: vektörel çarpımın biçimsel determinantında birinci satırdaki $U_i(\mathbf{p})$'lerin yerine u_i sayılarını yazmak, $\mathbf{u}$ ile iç çarpım almaktır.
Sayısal denetim. $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 3, 0)$ için Örnek 9.34'de 18 bulmuştuk; determinantın açılımı

$$1(0 - 0) - 2(0 - 0) + 3(6 - 0) = 18.$$

■

Alıştırma 9.12 (Üçlü Skaler Çarpım ve Lineer Bağımsızlık). Aynı noktadaki $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ teğet vektörleri için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq 0$ olmasının, üç vektörün lineer bağımsız olmasına denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Bağımlı ise çarpım sıfırdır. Hepsi sıfır olmayan α, β, γ ile $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0}$ olsun. İki durum var.
$\alpha \neq 0$ ise $\mathbf{u} = -(\beta/\alpha)\mathbf{v} - (\gamma/\alpha)\mathbf{w}$ ve bilineerlikle

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\frac{\beta}{\alpha}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \frac{\gamma}{\alpha}\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0,$$

çünkü $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ hem $\mathbf{v}$'ye hem $\mathbf{w}$'ye diktir (Lemma 9.5).

 CC BY-NC-SA 4.0

$\alpha = 0$ ise $\beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ve β, γ'dan biri sıfır değildir. $\beta \neq 0$ ise $\mathbf{v} = -(\gamma/\beta)\mathbf{w}$, dolayısıyla $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -(\gamma/\beta)\,\mathbf{w} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$; $\gamma \neq 0$ ise $\mathbf{w} = -(\beta/\gamma)\mathbf{v}$ ve yine $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Her iki durumda üçlü çarpım $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$.
Bağımsız ise çarpım sıfır değildir. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bağımsız olsun. Önce $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ olduğunu görelim: $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ bağımsızdır (bağımsız bir kümenin parçası), dolayısıyla Lemma 9.1'da eşitlik sağlanmaz ve uzunluk formülüyle

$$\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|^2 = \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 > 0.$$

Şimdi Lemma 9.3 gereği bağımsız üç vektör bir tabandır (teğet uzayında da, vektör kısımları yoluyla); $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ yazalım. İki tarafın $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ile iç çarpımını alırsak, diklik gereği $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ terimleri düşer:

$$\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|^2 = a\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) + 0 + 0.$$

Sol taraf pozitif olduğundan $a\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq 0$, dolayısıyla $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq 0$.
Sayısal örnek. $(1,2,3)$, $(2,0,0)$, $(1,3,0)$ için çarpım $18 \neq 0$: bağımsızdırlar. $(3,3,0)$, $(2,0,0)$, $(1,3,0)$ için çarpım 0: gerçekten $(3,3,0) = (2,0,0) + (1,3,0)$.
■

Alıştırma 9.13 (İki Vektörün Yerini Değiştirmek İşareti Değiştirir). $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ üçlü skaler çarpımında herhangi iki vektörün yeri değiştirilirse çarpımın işaret değiştirdiğini gösteriniz.

Çözüm.
Üç değişim var; önce çarpımı açık altı terimli biçimde yazalım:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1.$$

$\mathbf{v}$ *ile* $\mathbf{w}$*'nin değişimi.* Ters değişme kuralıyla

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

$\mathbf{u}$ *ile* $\mathbf{v}$*'nin değişimi.* Açık formülde u ile v harflerinin rollerini değiştiririz:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{w} = v_1u_2w_3 + v_2u_3w_1 + v_3u_1w_2 - v_1u_3w_2 - v_2u_1w_3 - v_3u_2w_1.$$

Terimleri u indisine göre sıralayınca

$$u_2v_1w_3 + u_3v_2w_1 + u_1v_3w_2 - u_3v_1w_2 - u_1v_2w_3 - u_2v_3w_1;$$

bu, ilk formüldeki üç pozitif terimin eksi, üç negatif terimin artı işaretle yazılmış hâlidir. Yani $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{w} = -\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
$\mathbf{u}$ *ile* $\mathbf{w}$*'nin değişimi.* Aynı biçimde u ile w harflerini değiştiririz:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{u} = w_1v_2u_3 + w_2v_3u_1 + w_3v_1u_2 - w_1v_3u_2 - w_2v_1u_3 - w_3v_2u_1.$$

Sıralayınca

$$u_3v_2w_1 + u_1v_3w_2 + u_2v_1w_3 - u_2v_3w_1 - u_3v_1w_2 - u_1v_2w_3,$$

yine ilk formülün işaretleri tersine çevrilmiş hâli.
Determinant diliyle: iki satırın yerini değiştirmek determinantın işaretini değiştirir; yukarıdaki üç hesap bu kuralın 3×3 durumdaki tam ispatıdır.
Sayısal denetim. $\mathbf{u} = (1,2,3)$, $\mathbf{v} = (2,0,0)$, $\mathbf{w} = (1,3,0)$ için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 18$. Öte yandan

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 3,\, 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0,\, 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = (-9,3,1),$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{w} = (2,0,0) \cdot (-9,3,1) = -18.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 9.14 (Noktanın ve Çarpının Yeri Değişebilir). Aynı noktadaki $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sağ taraf, parantezin zorunlu okunuşuyla, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$'dir; iç çarpımın simetrisiyle bu $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v}$'ye eşittir. Önceki alıştırmayı iki kez uygularız: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ifadesinde önce $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{w}$'nin yerini değiştirince $-\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{u}$, sonra $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{u}$'nun yerini değiştirince $+\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ elde ederiz. İki işaret değişimi birbirini götürdü:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Yani üçlü skaler çarpımda "nokta" ile "çarpı" işaretlerinin yerini değiştirmek sonucu değiştirmez; üç vektörün çevrimsel sırası korundukça çarpım aynıdır.
Sayısal denetim. $\mathbf{u} = (1,2,3)$, $\mathbf{v} = (2,0,0)$, $\mathbf{w} = (1,3,0)$ için

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2\cdot 0 - 3\cdot 0,\, 3\cdot 2 - 1\cdot 0,\, 1\cdot 0 - 2\cdot 2) = (0,6,-4)$$

ve $(0,6,-4)\cdot(1,3,0) = 18$, sol tarafla aynı.
■

Alıştırma 9.15 (Vektörel Çarpımın Sıfır Olması). Aynı noktadaki $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ teğet vektörleri için $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ olmasının, $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin lineer bağımsız olmasına denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Uzunluk formülüne göre

$$\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|^2 = \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2.$$

Bir vektör ancak normu sıfırsa sıfırdır; demek ki $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ olması, $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2 = \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2$, yani Schwarz eşitsizliğinde eşitlik olması demektir. Lemma 9.1'a göre eşitlik ancak ve ancak $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ lineer bağımlı iken sağlanır. Olumsuzlarını alırsak: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ancak ve ancak $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ bağımsız iken.
Sayısal örnek. $(2,1,0) \times (0,3,1) = (1,-2,6) \neq \mathbf{0}$; iki vektör bağımsızdır. $(1,2,-1) \times (-2,-4,2)$ ise $(4-4, 2-2, -4+4) = \mathbf{0}$; gerçekten ikinci vektör birincinin -2 katıdır.
■

Alıştırma 9.16 (Paralelkenarın Alanı). Aynı noktadaki sıfırdan farklı $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ teğet vektörleri için $\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|$ sayısının, kenarları $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ olan paralelkenarın alanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Paralelkenarın alanı, taban uzunluğu ile yüksekliğin çarpımıdır. Tabanı $\mathbf{v}$ alalım: uzunluğu $\| \mathbf{v} \|$. Yükseklik, $\mathbf{w}$'nin ucundan tabanın doğrusuna inen dikmenin uzunluğudur; bu da $\mathbf{w}$'nin $\mathbf{v}$'ye dik bileşeninin uzunluğudur. $\mathbf{w}$'yi $\mathbf{v}$ doğrultusundaki bir parça ile ona dik bir parçaya ayıralım:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|^2}\mathbf{v} + \mathbf{h}, \qquad \mathbf{h} = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|^2}\mathbf{v}.$$

$\mathbf{h}$ gerçekten $\mathbf{v}$'ye diktir: $\mathbf{h}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}) = 0$. Yükseklik $\| \mathbf{h} \|$'dir ve karesi bilineerlikle hesaplanır:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{h} \|^2 &= \| \mathbf{w} \|^2 - 2\frac{(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})^2}{\| \mathbf{v} \|^2} + \frac{(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})^2}{\| \mathbf{v} \|^4}\| \mathbf{v} \|^2 \\ &= \| \mathbf{w} \|^2 - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2}{\| \mathbf{v} \|^2} = \frac{\| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2}{\| \mathbf{v} \|^2}. \end{aligned}$$

Pay, uzunluk formülüne göre $\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|^2$'dir. Dolayısıyla $\| \mathbf{h} \| = \| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| \,/\, \| \mathbf{v} \|$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{alan} = \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{h} \| = \| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| .$$

Açıyla söylersek yükseklik $\| \mathbf{w} \| \sin\vartheta$'dır ve alan $\| \mathbf{v} \| \| \mathbf{w} \| \sin\vartheta$; Sonuç 9.2 ile aynı sonuç. $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ bağımlıysa paralelkenar bir doğru parçasına yassılır, alanı 0'dır ve önceki alıştırmaya göre $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$; formül bu durumu da kapsar.
Sayısal denetim. $\mathbf{v} = (3,0,0)$, $\mathbf{w} = (1,2,0)$: taban 3, yükseklik 2 (ikinci koordinat), alan 6. Vektörel çarpım

$$(0\cdot 0 - 0\cdot 2,\ 0\cdot 1 - 3\cdot 0,\ 3\cdot 2 - 0\cdot 1) = (0,0,6),$$

normu 6.
■

Alıştırma 9.17 (Bir Çatının Üçlü Skaler Çarpımı). e_1, e_2, e_3 bir çatı ise $e_1 \cdot e_2 \times e_3 = \pm 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
e_2 ile e_3 birim ve dik olduğundan aralarındaki açı $\pi/2$'dir; Sonuç 9.2 ile $\| e_2 \times e_3 \| = 1\cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = 1$. Ayrıca $e_2 \times e_3$ hem e_2'ye hem e_3'e diktir. Bu vektörü çatıda açalım (Teorem 9.1):

$$\begin{aligned} e_2 \times e_3 &= (e_2 \times e_3 \cdot e_1)\, e_1 + (e_2 \times e_3 \cdot e_2)\, e_2 + (e_2 \times e_3 \cdot e_3)\, e_3 \\ &= (e_1 \cdot e_2 \times e_3)\, e_1, \end{aligned}$$

çünkü son iki katsayı diklik gereği sıfırdır (ilk katsayıda iç çarpımın simetrisini kullandık). İki tarafın normunu alırsak

$$1 = |\ e_1 \cdot e_2 \times e_3\ |\ \|\ e_1\ \| = |\ e_1 \cdot e_2 \times e_3\ | .$$

Dolayısıyla $e_1 \cdot e_2 \times e_3 = \pm 1$.
İki işaret de ortaya çıkar. Doğal çatıda $U_2 \times U_3 = U_1$ (Örnek 9.30) olduğundan $U_1 \cdot U_2 \times U_3 = 1$; Örnek 9.20'nin çatısında

$$e_2 \times e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ 1\cdot 1 - 0,\ 0 - (-1)(1),\ 0\ ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = e_1,$$

yine $+1$. Buna karşılık e_1 ile e_2'nin yerini değiştirmek (Alıştırma 9.13) işareti -1 yapar. İşaret, çatının "sağ elli" mi "sol elli" mi olduğunu söyler; ileride bunu eğrilerin çatılarını sınıflandırırken kullanacağız.
■

Alıştırma 9.18 (Ortogonal Matrisin Determinantı). Her 3×3 ortogonal matrisin determinantının ± 1 olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
A ortogonal olsun. Önerme 9.5'e göre satırları, herhangi bir $\mathbf{p}$ noktasında bir e_1, e_2, e_3 çatısının Öklid koordinatlarıdır. Alıştırma 9.11'a göre satırları e_1, e_2, e_3'ün koordinatları olan determinant, $e_1 \cdot e_2 \times e_3$ üçlü skaler çarpımıdır:

$$\det A = e_1 \cdot e_2 \times e_3.$$

Önceki alıştırmaya göre bu sayı ± 1'dir.
Örnekler. Birim matris için determinant 1. Örnek 9.28'deki matris için birinci satıra göre açılım

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{6}}\left(0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} - 0\right), \end{aligned}$$

yani $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 9.19 (Bir Vektörün Bir Doğrultudaki Bileşeni). $\mathbf{u}$ bir birim vektör olsun. Aynı noktadaki bir $\mathbf{v}$ vektörünün $\mathbf{u}$ doğrultusundaki **bileşeni** (component) $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u} = \| \mathbf{v} \| \cos\vartheta\, \mathbf{u}$ vektörüdür. $\mathbf{v}$'nin, $\mathbf{v}_1$ bu bileşen ve $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$ olmak üzere $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ biçiminde tek türlü yazılabildiğini gösteriniz.

Çözüm.
Önce tanımdaki iki yazımın aynı olduğunu görelim: $\| \mathbf{u} \| = 1$ olduğundan $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \| \mathbf{v} \| \| \mathbf{u} \| \cos\vartheta = \| \mathbf{v} \| \cos\vartheta$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ise; $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ için açı tanımsız olsa da $\| \mathbf{v} \| = 0$ çarpımı sıfırlar ve iki taraf da 0'dır).
Varlık. $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ alalım; toplamları elbette $\mathbf{v}$'dir. Dikliği denetleyelim:

$$\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0,$$

dolayısıyla $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2) = 0$.
Teklik. Daha güçlü bir şey gösterelim: $\mathbf{v} = c\mathbf{u} + \mathbf{v}_2'$ ve $\mathbf{v}_2'\cdot\mathbf{u} = 0$ ise zorunlu olarak $c = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2$. Gerçekten, eşitliğin iki yanının $\mathbf{u}$ ile iç çarpımı $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = c\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 0 = c$ verir; o zaman $c\mathbf{u} = \mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Yani "$\mathbf{u}$'nun bir katı artı $\mathbf{u}$'ya dik bir vektör" biçimindeki ayrışım tektir ve $\mathbf{u}$'nun katı zorunlu olarak bileşendir.
Sayısal örnek. $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(1,2,2)$ (normu $\sqrt{9}/3 = 1$) ve $\mathbf{v} = (3,0,3)$ olsun. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = (3+0+6)/3 = 3$, dolayısıyla $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{u} = (1,2,2)$ ve

$$\mathbf{v}_2 = (3,0,3) - (1,2,2) = (2,-2,1).$$

Denetim: $\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u} = (2-4+2)/3 = 0$; Pisagor da tutar:

$$\| \mathbf{v} \|^2 = 18 = 9 + 9 = \| \mathbf{v}_1 \|^2 + \| \mathbf{v}_2 \|^2 .$$

Açıyla: $\| \mathbf{v} \| = 3\sqrt{2}$, $\cos\vartheta = 3/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, $\| \mathbf{v} \| \cos\vartheta = 3$.
■

Alıştırma 9.20 (Paralelyüzün Hacmi). Aynı noktadaki $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ teğet vektörleri, $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ lineer bağımsız olsun. Kenarları $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ olan **paralelyüzün** (parallelepiped) hacminin $\pm\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, yani $|\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Paralelyüzün hacmi, taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Tabanı $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin gerdiği paralelkenar alalım; alanı Alıştırma 9.16 gereği $\| \mathbf{v}\times\mathbf{w} \|$'dir ve bağımsızlık sayesinde sıfırdan farklıdır (Alıştırma 9.15). Taban düzlemine dik birim vektör

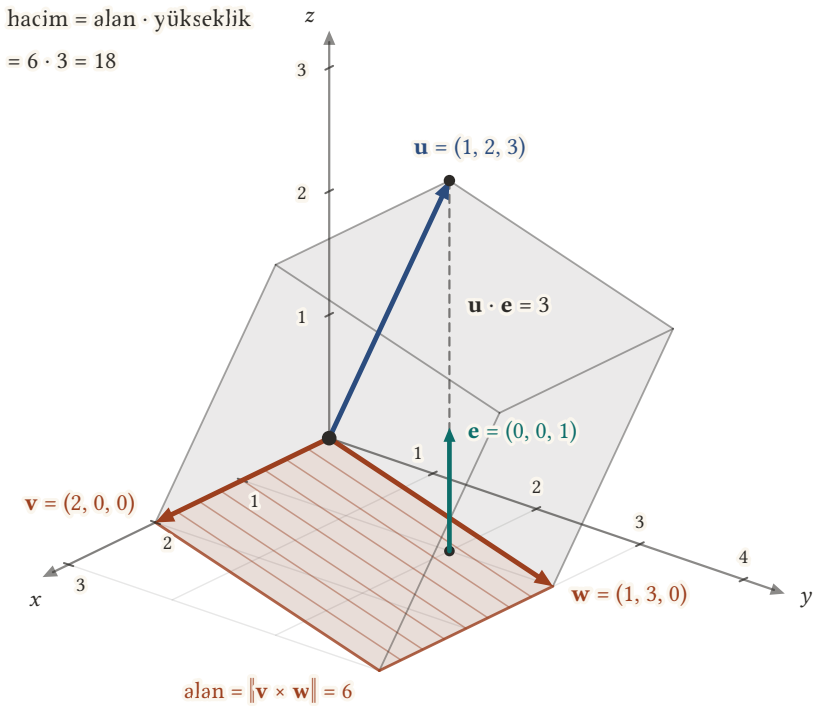
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{\| \mathbf{v}\times\mathbf{w} \|}$$

olsun. Yükseklik, $\mathbf{u}$'nun ucunun taban düzlemine uzaklığı, yani $\mathbf{u}$'nun $\mathbf{e}$ doğrultusundaki bileşeninin uzunluğu $|\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}\,|$'dir: Alıştırma 9.19 ile $\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} + \mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{e} = 0$ yazılır; $\mathbf{u}_2$'nin taban düzleminde yattığını görelim. $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}$ üçlüsü bağımsızdır: $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + c\mathbf{e} = \mathbf{0}$ eşitliğinin $\mathbf{e}$ ile iç çarpımı, $\mathbf{e}$ iki vektöre de dik ve birim olduğundan, $c = 0$ verir; kalan $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \mathbf{0}$ bağıntısından da $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'nin bağımsızlığı gereği $a = b = 0$ çıkar. Lemma 9.3 ile bu üçlü bir tabandır; $\mathbf{u}_2 = a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + c\mathbf{e}$ yazılıp $\mathbf{e}$ ile iç çarpım alınırsa $c = \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{e} = 0$, yani $\mathbf{u}_2 = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ taban düzlemindedir. Dolayısıyla $\mathbf{u}$'nun ucu, taban düzlemine paralel ve ondan $|\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}\,|$ uzaklıktaki düzlemdedir. Böylece

$$\text{hacim} = \| \mathbf{v}\times\mathbf{w} \| \cdot |\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}\,| = \| \mathbf{v}\times\mathbf{w} \| \cdot \frac{|\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,|}{\| \mathbf{v}\times\mathbf{w} \|} = |\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,| .$$

İşaret, $\mathbf{u}$'nun taban düzleminin $\mathbf{e}$ tarafında mı ($+$) öteki tarafında mı ($-$) olduğunu söyler. $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ bağımlı olsaydı taban bir doğru parçasına yassılır, hacim 0 olurdu; Alıştırma 9.12'e göre üçlü çarpım da 0'dır, formül yine doğru kalır.
Sayısal örnek. $\mathbf{u} = (1,2,3)$, $\mathbf{v} = (2,0,0)$, $\mathbf{w} = (1,3,0)$: $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (0,0,6)$, taban alanı 6, $\mathbf{e} = (0,0,1)$, yükseklik $|\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}\,| = 3$, hacim $18 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.5: Kenarları $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$ ve $\mathbf{w} = (1, 3, 0)$ olan paralelyüzün tabanı, xy düzleminde duran taralı paralelkenardır; alanı $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = 6$'dır. Taban düzlemine dik birim vektör $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ yeşil okla gösterilmiştir ve $\mathbf{u}$'nun ucundan tabana inen kesikli dikme, yüksekliğin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = 3$ olduğunu okutur. Hacim taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır: $6 \cdot 3 = 18 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

■

Alıştırma 9.21 (Üst Yarı Uzay Açıktır). $p_3 > 0$ koşulunu sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarının kümesinin açık olduğunu gösteriniz. (İpucu: her i için $| p_i - q_i | \leq d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.)

Çözüm.
İpucunun ispatı. Uzaklık formülünde kök içindeki toplamın üç terimi de negatif değildir; birini bırakıp ötekileri atınca toplam küçülür ya da aynı kalır:

$$| p_i - q_i | = \sqrt{(p_i - q_i)^2} \leq \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2} = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Yani iki noktanın herhangi bir koordinattaki farkı, aralarındaki uzaklığı aşamaz.
Açıklık. Kümeye O diyelim, $\mathbf{p} \in O$ olsun; $p_3 > 0$. $\varepsilon = p_3$ alalım. $\mathbf{q} \in N_\varepsilon(\mathbf{p})$ ise ipucuyla $| p_3 - q_3 | \leq d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < p_3$, dolayısıyla

$$q_3 \geq p_3 - | p_3 - q_3 | > p_3 - p_3 = 0.$$

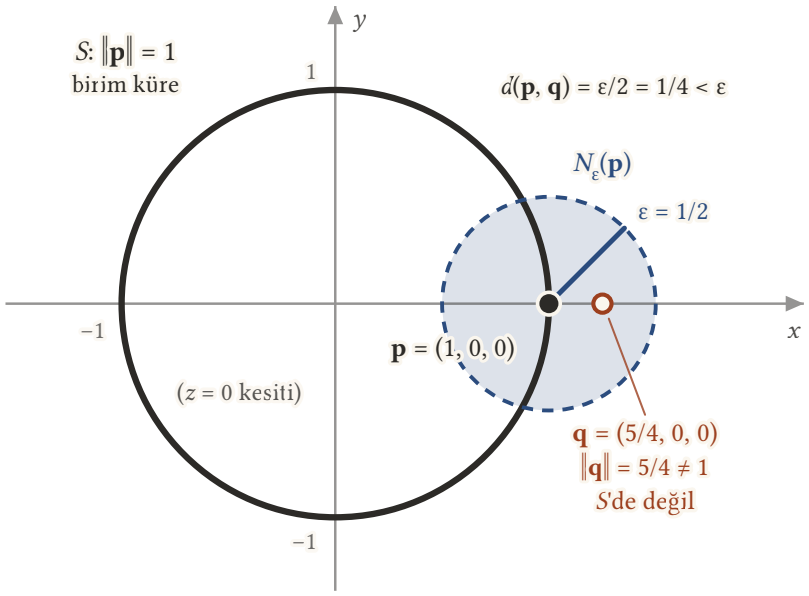
Yani $\mathbf{q} \in O$ ve $N_\varepsilon(\mathbf{p}) \subset O$. O açıktır. Geometrik olarak: xy düzleminin üstündeki bir noktanın çevresine, yarıçapı noktanın düzleme uzaklığı kadar bir yuvar koyarsak yuvar düzleme ancak dokunur, altına geçmez.
■

Alıştırma 9.22 (Birim Küre Açık Değildir). S, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ koşulunu sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarının kümesi olsun. S'yi betimleyiniz ve açık olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Koşul $\| \mathbf{p} \|^2 = 1$, yani $\| \mathbf{p} \| = 1$ demektir: S, merkezi orijin ve yarıçapı 1 olan birim küredir; yalnızca kürenin yüzeyi, içi değil.
S açık değildir. $\mathbf{p} = (1, 0, 0) \in S$ noktasını alalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\mathbf{q} = (1 + \varepsilon/2, 0, 0)$ noktası $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon/2 < \varepsilon$ sağlar, yani $N_\varepsilon(\mathbf{p})$'dedir; ama $\| \mathbf{q} \| = 1 + \varepsilon/2 \neq 1$, yani $\mathbf{q} \notin S$. Demek ki $\mathbf{p}$'nin hiçbir komşuluğu S'nin içinde kalmaz. (Aslında S'nin her noktası için aynı şey geçerlidir: $\mathbf{p} \in S$ için $(1 + \varepsilon/2)\,\mathbf{p}$ noktası komşuluktadır ama normu 1 değildir.) Bir yüzey "kalınlıksızdır"; hiçbir yuvar bir yüzeyin içine sığmaz.



Şekil 9.6: S: $\|\mathbf{p}\| = 1$ birim küresinin $z = 0$ kesiti kalın çemberdir; küme yalnızca yüzeydir, çemberin içi S'ye ait değildir. $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$ noktası S'nin üzerindedir, ama yarıçapı $\varepsilon = 1/2$ olan $N_\varepsilon(\mathbf{p})$ komşuluğu çemberin hem içine hem dışına taşar. Komşuluktaki $\mathbf{q} = (5/4, 0, 0)$ noktası $\mathbf{p}$'ye yalnızca $\varepsilon/2 = 1/4$ uzaklıktadır, fakat $\|\mathbf{q}\| = 5/4 \neq 1$ olduğundan S'de değildir. ε ne kadar küçültülürse küçültülsün aynı şey olur: bir yüzeyin kalınlığı yoktur, hiçbir yuvar onun içine sığmaz, bu yüzden S açık değildir.

■

Alıştırma 9.23 (Düzlemin Dışında Kalan Noktalar). S, $p_3 \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarının kümesi olsun. S'yi betimleyiniz ve açık olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm.
S, xy düzlemi ($p_3 = 0$) dışındaki bütün noktalardır: düzlemin üstündeki yarı uzayla altındaki yarı uzayın birleşimi.
S açıktır. $\mathbf{p} \in S$ için $\varepsilon = |\, p_3 \,| > 0$ alalım. $\mathbf{q} \in N_\varepsilon(\mathbf{p})$ ise, Alıştırma 9.21'daki ipucuyla, $|\, q_3 - p_3 \,| \leq d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < |\, p_3 \,|$. Bu, q_3'ün p_3 ile aynı işarette olması demektir: $p_3 > 0$ ise $q_3 > p_3 - |\, p_3 \,| = 0$; $p_3 < 0$ ise $q_3 < p_3 + |\, p_3 \,| = 0$. Her iki durumda $q_3 \neq 0$, yani $\mathbf{q} \in S$. Böylece $N_\varepsilon(\mathbf{p}) \subset S$ ve S açıktır. İki açık yarı uzayın birleşimi açık çıktı; genel olarak açık kümelerin birleşimi açıktır, çünkü bir noktayı içeren parçanın komşuluğu birleşimin de içindedir.
■

Alıştırma 9.24 (Bir Doğrusu Eksik Düzlem). S, $p_1 = p_2 \neq p_3$ koşulunu sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarının kümesi olsun. S'yi betimleyiniz ve açık olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$p_1 = p_2$ koşulu, z eksenini içeren ve xy düzlemini $x = y$ doğrusu boyunca kesen bir düzlemi tanımlar. $p_3 \neq p_1$ koşulu bu düzlemden $p_1 = p_2 = p_3$ noktalarını, yani orijinden geçen $(1,1,1)$ doğrultulu doğruyu çıkarır. S, bu düzlemden bir doğru çıkarılmış hâlidir; örneğin $(1,1,0) \in S$, ama $(1,1,1) \notin S$ ve $(1,0,5) \notin S$.
S açık değildir. Herhangi bir $\mathbf{p} \in S$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım; $\mathbf{q} = (p_1 + \varepsilon/2, p_2, p_3)$ olsun. $d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \varepsilon/2 < \varepsilon$, ama $q_1 = p_1 + \varepsilon/2 \neq p_2 = q_2$; $\mathbf{q}$ düzlemin dışına çıkmıştır ve S'de değildir. Demek ki S'nin *hiçbir* noktasının hiçbir komşuluğu S'de kalmaz. Bir düzlemin herhangi bir (boş olmayan) alt kümesi açık olamaz: düzlemin kalınlığı yoktur, oysa yuvarın vardır.
■

Alıştırma 9.25 (Bir Silindirin İçi). S, $p_1^2 + p_2^2 < 9$ koşulunu sağlayan bütün $\mathbf{p}$ noktalarının kümesi olsun. S'yi betimleyiniz ve açık olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm.
Koşul, noktanın z eksenine olan uzaklığının ($\sqrt{p_1^2+p_2^2}$) 3'ten küçük olması demektir; p_3 üzerinde koşul yoktur. S, ekseni z ekseni ve yarıçapı 3 olan sonsuz dairesel silindirin içidir (silindir yüzeyi dahil değil).
S açıktır. $\mathbf{p} \in S$ için $r = \sqrt{p_1^2+p_2^2} < 3$ olsun ve $\varepsilon = 3 - r > 0$ alalım. $\mathbf{q} \in N_\varepsilon(\mathbf{p})$ ise, $\bar{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, 0)$ ve $\bar{\mathbf{q}} = (q_1, q_2, 0)$ gölge noktalarıyla çalışalım. Üçüncü koordinat farkını atmak uzaklığı küçültür ya da aynı bırakır: $\| \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}} \| \leq d(\mathbf{p},\mathbf{q}) < \varepsilon$. Üçgen eşitsizliğiyle

$$\sqrt{q_1^2+q_2^2} = \| \bar{\mathbf{q}} \| \leq \| \bar{\mathbf{p}} \| + \| \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}} \| < r + \varepsilon = 3.$$

Yani $\mathbf{q} \in S$. Bu, açık yuvarın açıklığını veren akıl yürütmenin gölge noktalarına uygulanmış hâlidir.
■

Alıştırma 9.26 (Yönlü Türev Gradyanla İç Çarpımdır). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\nabla f = \sum_i (\partial f/\partial x_i)\, U_i$ onun gradyanı olsun (Alıştırma 6.17'da grad f diye yazmıştık). $\mathbf{p}$ noktasındaki her $\mathbf{v}$ teğet vektörü için

$$\mathbf{v}[f] = df(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla f)(\mathbf{p})$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İlk eşitlik diferansiyelin tanımıdır (Tanım 5.5): $df(\mathbf{v}) = \mathbf{v}[f]$. İkincisi için Lemma 3.1'nü hatırlayalım:

$$\mathbf{v}[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

Öte yandan $(\nabla f)(\mathbf{p})$, vektör kısmı $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{p}) \right)$ olan, $\mathbf{p}$ noktasındaki teğet vektördür. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ ile iç çarpımı, tanım gereği, karşılıklı koordinatların çarpımlarının toplamıdır; bu da yukarıdaki toplamın kendisidir.
Sayısal örnek. $f = x^2 y + z$, $\mathbf{p} = (1,2,0)$, $\mathbf{v} = (3,-1,2)$. Kısmi türevler $(2xy, x^2, 1)$, $\mathbf{p}$'de $(4,1,1)$; dolayısıyla $\mathbf{v} \cdot (\nabla f)(\mathbf{p}) = 12 - 1 + 2 = 13$. Doğrudan tanımla (Tanım 3.1) denetleyelim: $f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1+3t)^2(2-t) + 2t$ ve

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\, (1+3t)^2(2-t) + 2t \, \right] = 6(1)(2) - (1)^2 + 2 = 13.$$

■

Alıştırma 9.27 (Gradyanın Uzunluğu En Büyük Yönlü Türevdir). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir ve $\nabla f = \sum_i (\partial f/\partial x_i)\, U_i$ olsun. $\mathbf{p}$ noktasında

$$\| (\nabla f)(\mathbf{p}) \| = \Big[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})^2\Big]^{1/2}$$

sayısının, $\mathbf{p}$'deki bütün *birim* $\mathbf{u}$ vektörleri üzerinden $\mathbf{u}[f]$ yönlü türevlerinin en büyüğü olduğunu gösteriniz. Ayrıca $(\nabla f)(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ ise en büyük değerin yalnızca $\mathbf{u} = (\nabla f)(\mathbf{p}) / \| (\nabla f)(\mathbf{p}) \|$ için alındığını gösteriniz.

Çözüm.
Kısaca $\mathbf{g} = (\nabla f)(\mathbf{p})$ yazalım; normu, tanım gereği, kısmi türevlerin karelerinin toplamının kareköküdür. Önceki alıştırmaya göre her birim $\mathbf{u}$ için $\mathbf{u}[f] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}$. Schwarz eşitsizliğiyle

$$\mathbf{u}[f] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \leq | \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} | \leq \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{g} \| = \| \mathbf{g} \| .$$

Yani hiçbir birim vektördeki yönlü türev $\| \mathbf{g} \|$'yi aşamaz. Bu üst sınıra ulaşılır mı? $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ise her $\mathbf{u}[f] = 0 = \| \mathbf{g} \|$; en büyük değer 0'dır ve her birim vektörde alınır. $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ ise $\mathbf{u}_0 = \mathbf{g} / \| \mathbf{g} \|$ birim vektörü için

$$\mathbf{u}_0[f] = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}}{\| \mathbf{g} \|} = \| \mathbf{g} \|;$$

sınıra ulaşılır, en büyük değer $\| \mathbf{g} \|$'dir.
Teklik. $\mathbf{u}$ birim ve $\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} = \| \mathbf{g} \|$ olsun. O zaman Schwarz eşitsizliğinde eşitlik vardır; Lemma 9.1′a göre $\mathbf{u} = c\,\mathbf{g}$ biçimindedir. $\| \mathbf{u} \| = 1$ olduğundan $| c | = 1 / \| \mathbf{g} \|$, ve $\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} = c \| \mathbf{g} \|^2 > 0$ olması gerektiğinden $c > 0$; yani $\mathbf{u} = \mathbf{g} / \| \mathbf{g} \| = \mathbf{u}_0$.
Sözle: gradyan, fonksiyonun en hızlı arttığı yönü gösterir ve uzunluğu bu en hızlı artış oranıdır.
Sayısal örnek. $f = x^2 y + z$ ve $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$ için $\mathbf{g} = (4, 1, 1)$, $\| \mathbf{g} \| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$. En büyük türev $\mathbf{u}_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, 1, 1)$ yönündedir ve değeri $18/(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$. Karşılaştırma için $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, 2)$ birim vektöründe $\mathbf{u}[f] = 13/\sqrt{14} \approx 3{,}47 < 4{,}24$.
■

> **i** Nabla yazımı
>
> Vektör analizinde grad f, rot V ve div V yerine sık sık ∇f, $\nabla \times V$ ve $\nabla \cdot V$ yazılır. Bu yazım, ∇'yı bileşenleri $\partial/\partial x_i$ olan biçimsel bir vektör gibi görüp iç çarpımla vektörel çarpımın formüllerini ona uygular: $V = \sum_i f_i\, U_i$ için $\nabla \cdot V = \sum_i \partial f_i / \partial x_i$, $\nabla \times V$ ise bileşenleri $\partial/\partial x_i$ olan "vektörle" V'nin biçimsel vektörel çarpımıdır. Bu üç işlemin dış türevle ilişkisini Alıştırma 6.17, Alıştırma 6.18 ve Alıştırma 6.19′de incelemiştik.

Alıştırma 9.28 (Açı Fonksiyonu). f ve g, 0'ı içeren bir I açık aralığında diferansiyellenebilir, $f^2 + g^2 = 1$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsun; ϑ_0 sayısı $f(0) = \cos\vartheta_0$, $g(0) = \sin\vartheta_0$ koşullarını sağlasın. I üzerinde

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \big(f g' - g f' \big)\,(u)\, du$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f = \cos\vartheta$ ve $g = \sin\vartheta$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Hazırlık. ϑ diferansiyellenebilirdir ve türevi integrandın kendisidir: $\vartheta' = f g' - g f'$. Ayrıca $f^2 + g^2 = 1$ özdeşliğinin türevini alırsak $2 f f' + 2 g g' = 0$, yani

$$f f' + g g' = 0.$$

Yöntem. İki fonksiyonun farkının karelerinin toplamı $h = (f - \cos\vartheta)^2 + (g - \sin\vartheta)^2$ olsun. $\vartheta(0) = \vartheta_0$ olduğundan $f(0) = \cos\vartheta(0)$ ve $g(0) = \sin\vartheta(0)$, yani $h(0) = 0$. $h' = 0$ olduğunu gösterirsek h sabit, dolayısıyla her yerde 0 olur; bu da iki karenin de sıfır olması, yani $f = \cos\vartheta$ ve $g = \sin\vartheta$ demektir.
Türev. Zincir kuralıyla $(\cos\vartheta)' = -\vartheta' \sin\vartheta$ ve $(\sin\vartheta)' = \vartheta' \cos\vartheta$. Dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\frac{h'}{2} &= (f-\cos\vartheta)(f'+\vartheta'\sin\vartheta)+(g-\sin\vartheta)(g'-\vartheta'\cos\vartheta)\\ &= (ff'+gg')+\vartheta'\,(f\sin\vartheta-g\cos\vartheta)-(f'\cos\vartheta+g'\sin\vartheta)\\ &\quad -\vartheta'(\sin\vartheta\cos\vartheta-\sin\vartheta\cos\vartheta).\end{aligned}$$

Son parantez sıfırdır, birinci parantez hazırlık gereği sıfırdır. Kalan iki terimin birbirini götürdüğünü göstermeliyiz; $\vartheta' = fg' - gf'$ yazalım:

$$\vartheta'\,(f\sin\vartheta - g\cos\vartheta) = f^2 g'\sin\vartheta - fgg'\cos\vartheta - fgf'\sin\vartheta + g^2 f'\cos\vartheta.$$

$f^2 = 1-g^2$ ve $g^2 = 1-f^2$ yerine koyunca

$$\begin{aligned}&= g'\sin\vartheta - g^2 g'\sin\vartheta - fgg'\cos\vartheta - fgf'\sin\vartheta + f'\cos\vartheta - f^2 f'\cos\vartheta\\ &= g'\sin\vartheta + f'\cos\vartheta - g\sin\vartheta\,(gg'+ff') - f\cos\vartheta\,(gg'+ff')\\ &= g'\sin\vartheta + f'\cos\vartheta,\end{aligned}$$

çünkü $ff'+gg'=0$. Bu, $h'/2$ ifadesindeki $-(f'\cos\vartheta + g'\sin\vartheta)$ terimini tam olarak götürür. Böylece $h'=0$, $h\equiv h(0)=0$ ve $f=\cos\vartheta$, $g=\sin\vartheta$.
Sonucun anlamı. $f^2+g^2=1$ olduğundan $(f(t),g(t))$ noktası her t için birim çember üzerindedir ve bir açının kosinüsü ile sinüsüdür; ama her t için ayrı ayrı seçilen açılar 2π'nin katları kadar zıplayabilir. Alıştırma, bütün I aralığında geçerli, üstelik *diferansiyellenebilir* tek bir açı fonksiyonu ϑ bulunduğunu söyler. İleride düzlem eğrilerinin teğet yönünü bir açıyla izlerken bu olguya dayanacağız.
Sayısal örnek. $f=\cos 2t$, $g=\sin 2t$, $\vartheta_0=0$ alalım. O zaman

$$fg'-gf' = \cos 2t\cdot 2\cos 2t - \sin 2t\cdot(-2\sin 2t) = 2,$$

dolayısıyla $\vartheta(t) = 0 + \int_0^t 2\,du = 2t$; gerçekten $f=\cos 2t=\cos\vartheta$ ve $g=\sin\vartheta$.
■

Alıştırma 9.29 (İç Çarpım Uzunluklarla Belirlenir). Aynı noktadaki her $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ teğet vektörü için

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \frac{\|\,\mathbf{v}+\mathbf{w}\,\|^2 - \|\,\mathbf{v}-\mathbf{w}\,\|^2}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Bilineerlik ve simetriyle iki normu açalım:

$$\|\,\mathbf{v}+\mathbf{w}\,\|^2 = \|\,\mathbf{v}\,\|^2 + 2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \|\,\mathbf{w}\,\|^2, \qquad \|\,\mathbf{v}-\mathbf{w}\,\|^2 = \|\,\mathbf{v}\,\|^2 - 2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \|\,\mathbf{w}\,\|^2.$$

Farkları $4\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$'dir; 4'e bölünce özdeşlik çıkar. Anlamı şudur: iç çarpım, normdan (yani uzunluklardan) geri kazanılabilir; uzunluk ölçmeyi bilen biri açıları da ölçebilir.
Sayısal denetim. $\mathbf{v}=(1,2,-1)$ ve $\mathbf{w}=(-1,0,3)$ için $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(0,2,2)$, normunun karesi 8; $\mathbf{v}-\mathbf{w}=(2,2,-4)$, normunun karesi 24. $(8-24)/4=-4$, Alıştırma 9.1'de bulduğumuz $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ ile aynı.
■

Alıştırma 9.30 (İki Birim Vektörü Çatıya Tamamlamak). Aynı noktadaki $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$ ve $e_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,-1,1)$ vektörleri ortogonal birim vektörlerdir. e_1, e_2, e_3 bir çatı olacak biçimde bir e_2 bulunuz.

Çözüm.
Önce verilen bilgiyi denetleyelim. Normların kareleri $(1+4+1)/6=1$ ve $(9+1+1)/11=1$; iç çarpım $(3-2-1)/\sqrt{66}=0$. Gerçekten ortogonal birim vektörlerdir.
e_2, hem e_1'e hem e_3'e dik bir birim vektör olmalıdır. Vektörel çarpım tam bunu üretir: $e_3\times e_1$ iki vektöre de diktir (Lemma 9.5) ve uzunluğu $\|\,e_3\,\|\,\|\,e_1\,\|\sin(\pi/2)=1$'dir (Sonuç 9.2). Hesaplayalım; kesir çarpanlarını dışarıda tutarak $(3,-1,1)\times(1,2,-1)$:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\big(\ (-1)(-1)-(1)(2),\ (1)(1)-(3)(-1),\ (3)(2)-(-1)(1)\ \big) = (-1,4,7).$$

Dolayısıyla $e_2 = e_3 \times e_1 = \frac{1}{\sqrt{66}}(-1,4,7)$. Denetim: $\|\ (-1,4,7)\ \|^2 = 1+16+49 = 66$, yani e_2 birimdir;

$$(-1,4,7)\cdot(1,2,-1) = -1+8-7 = 0,$$
$$(-1,4,7)\cdot(3,-1,1) = -3-4+7 = 0.$$

e_1, e_2, e_3 bir çatıdır. $-e_2$ de aynı işi görür; aradaki fark çatının "elliliği", yani $e_1 \cdot e_2 \times e_3$'ün işaretidir (Alıştırma 9.17).
■

Alıştırma 9.31 (Dönen Çatı). Her θ gerçel sayısı için, aynı noktadaki

$$e_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \qquad e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \qquad e_3 = (0,0,1)$$

teğet vektörlerinin bir çatı oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Normların kareleri $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ve 1. Karşılıklı iç çarpımlar

$$e_1\cdot e_2 = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0, \qquad e_1\cdot e_3 = 0, \qquad e_2\cdot e_3 = 0.$$

Altı koşul her θ için sağlanır. Bu çatı, doğal çatının z ekseni çevresinde θ açısıyla döndürülmüş hâlidir; $\theta = 0$ doğal çatıyı, $\theta = \pi/4$ ise Örnek 9.20′deki çatıyı verir. Duruş matrisi

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve determinantı

$$\cos\theta(\cos\theta - 0) - \sin\theta(-\sin\theta - 0) + 0 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

olur; bu, Alıştırma 9.18 ile uyumludur. θ değişirken çatı sürekli döner: bu, bir eğri boyunca yerleştirilecek "hareketli çatı"nın en basit örneğidir.
■

Bu bölümde iç çarpımdan uzunluğu, açıyı ve uzaklığı türettik, çatıları ve ortonormal açılımı kurduk, vektörel çarpımı inceledik; bir sonraki bölümde (Eğriler: Yay Uzunluğu ve Birim Hız) bu araçları eğrilere uygulayıp hız vektörünün uzunluğunu, yani sürati, ve eğri boyunca alınan yolu ölçeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Eğriler: Yay Uzunluğu ve Birim Hız

Önceki bölümde (İç Çarpım) uzunluk ve açı ölçmenin aracını, iç çarpımı, kurduk: bir teğet vektörün normu, iki vektör arasındaki açı, diklik ve çatı kavramlarının hepsi bu tek işlemden çıktı. Bu bölümde aynı aracı Uzayda Eğriler bölümünde tanıdığımız hareket eden noktalara uyguluyoruz. Hız vektörünün uzunluğu noktanın o anda ne kadar hızlı gittiğini söyler; bu uzunluğun zaman üzerinden integrali de ne kadar yol alındığını verir.
Bir eğrinin geometrisini incelerken rotanın hangi süratle dolaşıldığı çoğu zaman önemsizdir; önemli olan rotanın nasıl kıvrıldığı ve büküldüğüdür. Bu yüzden bölümün ana teoremi, hiç durmayan her eğrinin sabit birim süratle dolaşılan bir kopyasının bulunduğunu söyler. Bu kopyada parametre doğrudan yol uzunluğunu ölçer; ileride eğrilik ve burulmayı tanımlarken bütün hesaplar bu sayede sadeleşecek.
Bölümün ikinci yarısında eğri boyunca taşınan oklara, yani eğri üzerindeki vektör alanlarına bakacağız. Hızın türevi olan ivme bunların ilk örneğidir. Bu alanları toplamayı, çarpmayı ve türevlerini almayı öğrenecek, türevin lineerlik ve Leibniz kurallarını ispatlayacağız. Sabit uzunluklu bir alanın türevine dik olduğunu ve türevi sıfır olan alanların paralel olduğunu göreceğiz; bu küçük gözlemler, eğrileri hareketli çatılarla incelerken sürekli işimize yarayacak.

10.1 Sürat ve Yay Uzunluğu

Bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin t anındaki hız vektörü $\alpha'(t)$ (Tanım 4.2), uygulama noktası $\alpha(t)$ olan bir teğet vektördür. Yönü hareketin o andaki doğrultusunu gösterir. Peki uzunluğu neyi gösterir? İç çarpım bölümünde bir teğet vektörün normunu vektör kısmının normu olarak tanımladık (Tanım 9.4); dolayısıyla hız vektörünün uzunluğunu ölçebiliriz. Bu uzunluk, hareket eden noktanın hızölçerinin gösterdiği sayıdır: birim zamanda alınan yol.
Alınan toplam yola gelince, fizikteki kural yol göstericidir. Kısa bir Δt zaman diliminde nokta yaklaşık $v(t)\,\Delta t$ kadar yol alır; bu küçük parçalar toplanır ve $\Delta t \to 0$ limiti alınır. Sonuç, süratin zamana göre integralidir.

Tanım 10.1 (Sürat, Yay Uzunluğu ve Eğri Parçası). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun.
α'nın $t \in I$ anındaki **sürati** (speed), hız vektörünün uzunluğu olan $v(t) = \| \alpha'(t) \|$ sayısıdır. Böylece sürat, I üzerinde tanımlı gerçel değerli bir v fonksiyonudur.
$a < b$ sayıları I'da ise α'nın $t = a$'dan $t = b$'ye **yay uzunluğu** (arc length)

$$\int_a^b \| \alpha'(t) \|\, dt$$

sayısıdır.
$[a, b]$ kapalı aralığı I'nın içindeyse α'nın bu aralığa kısıtlanmasına bir **eğri parçası** (curve segment) denir ve $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ile gösterilir. σ'nın **uzunluğu** $L(\sigma)$, α'nın a'dan b'ye yay uzunluğudur.

Yani sürat noktanın o anki hızölçer değeri, yay uzunluğu ise bu değerin zaman boyunca birikimi, kısacası gidilen yoldur.
Sürati koordinatlarla yazalım. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ise hız vektörünün vektör kısmı $\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t) \right)$ üçlüsüdür; normu vektör kısmının normu olduğundan

$$v = \| \alpha' \| = \left(\left(\frac{d\alpha_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}$$

olur. Bunu yay uzunluğu tanımına koyduğumuzda tek değişkenli analizden tanıdık formül çıkar:

$$\int_a^b \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \alpha_3'(t)^2}\, dt.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki küçük not. Birincisi, sürat bir sayıdır, hız ise bir vektördür; ikisini karıştırmayacağız. Süratin hiçbir anda sıfır olmaması, hız vektörünün hiçbir anda $\mathbf{0}$ olmaması demektir, yani eğrinin düzgün olması (Tanım 4.6) süratin her yerde pozitif olmasına denktir. İkincisi, yay uzunluğu integrali her zaman vardır: α_i' fonksiyonları türevlenebilir olduğundan süreklidir, kareleri toplamının karekökü de süreklidir ve sürekli bir fonksiyon kapalı aralıkta integrallenebilir.

i Eğri parçasının uç noktaları

Bir eğri parçası $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, açık bir I aralığında tanımlı bir eğrinin kısıtlamasıdır ve $[a,b]$ tamamen I'nın içindedir. Bu yüzden a ve b uç noktalarında da hız vektörü iki yanlı limitle tanımlıdır; tek yanlı türevlerle uğraşmak gerekmez. $L(\sigma)$ yalnızca α'nın $[a,b]$ üzerindeki değerlerine bağlıdır; α'nın bu aralığın dışında ne yaptığı uzunluğu etkilemez.

Örnek 10.1 (Helisin Sürati ve Bir Turunun Uzunluğu). $a > 0, b \neq 0$ için $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ helisinin (Örnek 4.2) süratini bulalım. $a = 3, b = 4$ için $t = 0$'dan $t = 2\pi$'ye (bir tam tur) ve $t = 0$'dan $t = \pi/2$'ye yay uzunluklarını hesaplayalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonlarının türevleri $-a\sin t$, $a\cos t$ ve b'dir; hız vektörü

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)_{\alpha(t)}$$

olur. Süratin karesi, vektör kısmının kendisiyle iç çarpımıdır:

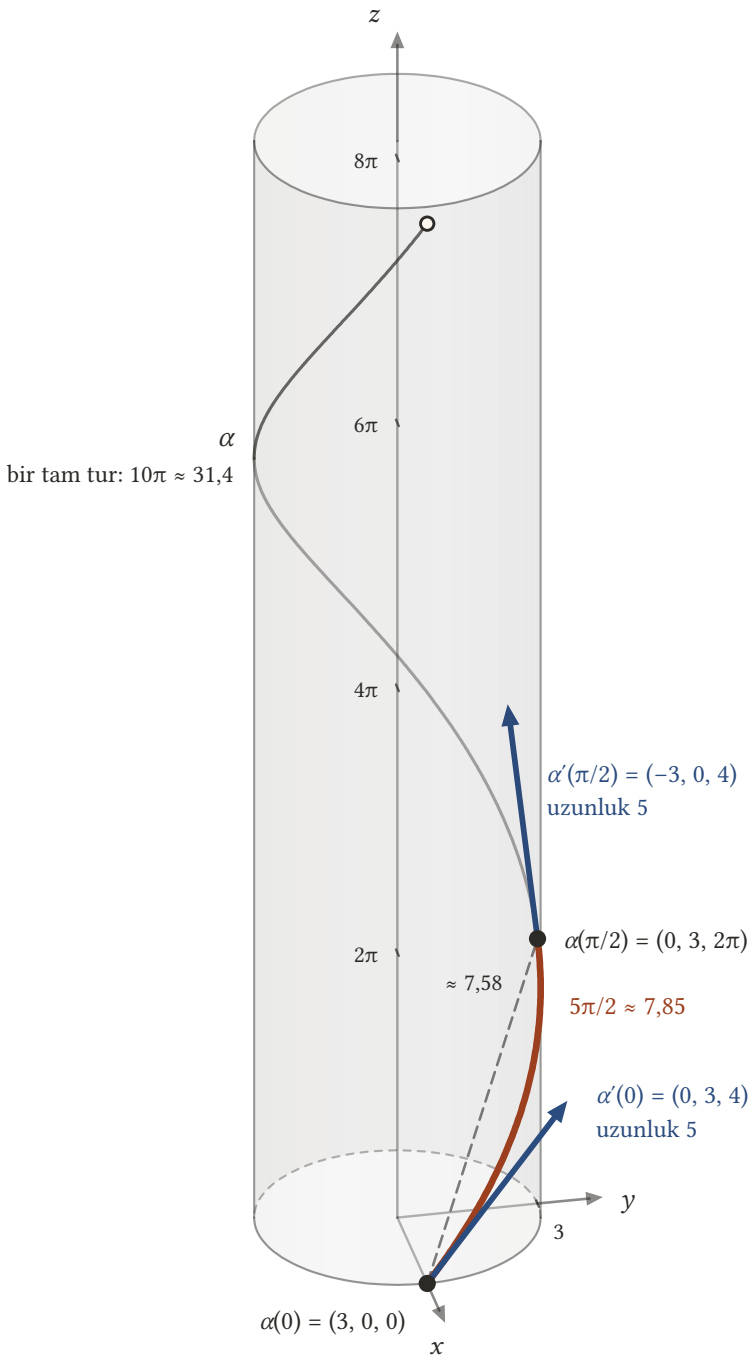
$$\| \alpha'(t) \|^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2.$$

Dolayısıyla $v(t) = \sqrt{a^2+b^2}$: helisin sürati sabittir ve t'ye bağlı değildir. Bunu c ile göstereceğiz. $a = 3, b = 4$ için $c = \sqrt{9+16} = 5$.
Sürat sabit olduğundan yay uzunluğu integrali kolaydır. Bir tam turun uzunluğu

$$\int_0^{2\pi} 5\,dt = 10\pi \approx 31{,}4$$

ve çeyrek turun ($t = 0$'dan $t = \pi/2$'ye) uzunluğu $5 \cdot \pi/2 = 5\pi/2 \approx 7{,}85$'tir. Çeyrek turda nokta $(3,0,0)$'dan $(0,3,2\pi)$'ye gider. Aynı iki nokta arasındaki doğru parçasının uzunluğu $\sqrt{9+9+4\pi^2} \approx 7{,}58$'dir; helis üzerinden gidilen yol, beklendiği gibi, kestirmeden uzundur.
Yolun neden ct olduğunu sezgiyle de görebiliriz: nokta her an c birim/saniye süratle gittiğinden t saniyede ct birim yol alır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.1: $a = 3$, $b = 4$ için $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ helisinin $x^2 + y^2 = 9$ silindirine sarılan bir tam turu (ince gri) ve $t = 0$′dan $t = \pi/2$′ye çeyrek turu (kalın turuncu). Mavi oklar $\alpha(0) = (3, 0, 0)$ ve $\alpha(\pi/2) = (0, 3, 2\pi)$ noktalarındaki hız vektörleridir; vektör kısımları $(0, 3, 4)$ ve $(-3, 0, 4)$ farklı olsa da ikisinin de uzunluğu 5′tir, çünkü helisin sürati sabittir. Sürat sabit olduğundan çeyrek turun uzunluğu $5 \cdot \pi/2 = 5\pi/2 \approx 7{,}85$′tir; aynı iki noktayı birleştiren kesikli doğru parçası ise yalnızca $\approx 7{,}58$ uzunluğundadır: eğri üzerinden gidilen yol kestirmeden uzundur.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 10.2 (Doğrunun Sürati ve Bir Parçasının Uzunluğu). $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ için $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ doğrusunun (Örnek 4.1) süratini ve $t = a$'dan $t = b$'ye yay uzunluğunu bulalım; sonucu $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ arasındaki Öklid uzaklığıyla karşılaştıralım. $\mathbf{p} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{q} = (2, -1, 3)$, $a = 0$, $b = 2$ için sayıları yazalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $\alpha_i(t) = p_i + tq_i$ olduğundan türevleri sabit q_i sayılarıdır; hız vektörü her t için $\mathbf{q}_{\alpha(t)}$, yani vektör kısmı $\mathbf{q}$ olan teğet vektördür. Sürat $v(t) = \| \mathbf{q} \|$ sabittir.
Yay uzunluğu

$$\int_a^b \| \mathbf{q} \| \, dt = (b - a) \| \mathbf{q} \|$$

olur. Öte yandan $\alpha(b) - \alpha(a) = (b - a)\mathbf{q}$ olduğundan iki uç nokta arasındaki Öklid uzaklığı (Tanım 9.3)

$$d\left(\alpha(a), \alpha(b) \right) = \| (b - a)\mathbf{q} \| = (b - a) \| \mathbf{q} \|$$

çıkar; burada $b - a > 0$ olduğundan $| b - a | = b - a$ yazdık. Bir doğru parçası boyunca gidilen yol, uç noktaları arasındaki uzaklığa eşittir. Bu, yay uzunluğu tanımının doğru parçalarında bildiğimiz uzunluk kavramıyla uyuştuğunu gösterir.
Sayısal durumda $\| \mathbf{q} \| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$'tür; $t = 0$'dan $t = 2$'ye yay uzunluğu $2\sqrt{14} \approx 7{,}48$ olur. Uç noktalar $\alpha(0) = (1, 2, 0)$ ve $\alpha(2) = (5, 0, 6)$'dır; aralarındaki uzaklık $\sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$, yani aynı sayıdır.
■

Örnek 10.3 (Değişken Süratli Bir Eğri). Silindir ile kürenin kesişimini dolaşan

$$\alpha(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2) \right)$$

eğrisinin süratini bulalım ve süratin sabit olmadığını gösterelim.

Çözüm.
Hız vektörünün vektör kısmı $\left(-\sin t, \cos t, \cos(t/2) \right)$'dir; üçüncü koordinatta zincir kuralı $2\cos(t/2) \cdot \frac{1}{2} = \cos(t/2)$ verdi. Süratin karesi

$$\| \alpha'(t) \|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2 \frac{t}{2} = 1 + \cos^2 \frac{t}{2},$$

yani $v(t) = \sqrt{1 + \cos^2(t/2)}$ olur. Bu sayı 1 ile $\sqrt{2}$ arasında gidip gelir: $t = 0$'da $\cos 0 = 1$ olduğundan $v(0) = \sqrt{2}$; $t = \pi$'de $\cos(\pi/2) = 0$ olduğundan $v(\pi) = 1$; $t = 2\pi$'de yine $\sqrt{2}$. Nokta kürenin ekvatorunu geçerken en hızlı, kuzey kutbundan geçerken en yavaştır. Sürat sabit olmadığı için yay uzunluğu artık "sürat çarpı zaman" değildir; $t = 0$'dan $t = 2\pi$'ye yay uzunluğu

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

integralidir. Bu integralin ilkel fonksiyonu elemanter fonksiyonlarla yazılamaz (bir eliptik integraldir); sayısal integralle değeri yaklaşık $7{,}64$ bulunur. İlkel bulunamasa bile integral vardır ve yay uzunluğu iyi tanımlıdır.
■

Örnek 10.4 (Bir Parabol Parçasının Uzunluğu). $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ parabolünün $0 \le t \le 1$ parçasının uzunluğunu bulalım ve uç noktaları birleştiren doğru parçasının uzunluğuyla karşılaştıralım.

Çözüm.
Hız vektörünün vektör kısmı $(1, 2t, 0)$, sürat $v(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$'dir. Aranan uzunluk $\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$ integralidir. Bunun bir ilkeli

$$F(t) = \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\log\left(\,2t + \sqrt{1+4t^2}\,\right)$$

fonksiyonudur (log doğal logaritmadır). Bunu türev alarak doğrulayalım. İlk terimin türevi

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{t}{2}\cdot\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1+8t^2}{2\sqrt{1+4t^2}}$$

olur. İkinci terimde $g(t) = 2t + \sqrt{1+4t^2}$ dersek $g'(t) = 2 + 4t/\sqrt{1+4t^2}$, yani

$$g'(t) = \frac{2\left(\,\sqrt{1+4t^2} + 2t\,\right)}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{2\,g(t)}{\sqrt{1+4t^2}}$$

bulunur; böylece

$$\left(\frac{1}{4}\log g\right)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{g'}{g} = \frac{1}{2\sqrt{1+4t^2}}.$$

İki türevi toplarsak

$$F'(t) = \frac{1+8t^2+1}{2\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1+4t^2}{\sqrt{1+4t^2}} = \sqrt{1+4t^2}$$

çıkar; F gerçekten süratin ilkelidir. $F(0) = 0$ olduğundan uzunluk

$$L = F(1) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(\,2+\sqrt{5}\,\right) \approx 1{,}118 + 0{,}361 = 1{,}479$$

olur. Uç noktalar $(0,0,0)$ ile $(1,1,0)$ arasındaki uzaklık $\sqrt{2} \approx 1{,}414$'tür; parabol yayı, uçlarını birleştiren doğru parçasından uzundur. İleride (alıştırmalarda) iki nokta arasındaki en kısa yolun her zaman doğru parçası olduğunu ispatlayacağız.

■

10.2 Birim Hızlı Yeniden Parametrelendirme

Aynı rota farklı süratlerle dolaşılabilir: $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$ ve $t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t, 0)$ eğrilerinin ikisi de birim daireyi dolaşır, ama ikincisi iki kat hızlıdır. Rotanın kendisiyle ilgilendiğimizde bu sürat farkı gürültüdür. Gürültüden kurtulmanın en temiz yolu, rotayı her an 1 süratle dolaşan bir eğri seçmektir: böyle bir eğride bir saniyede bir birim yol alınır, parametre ile yol uzunluğu çakışır.

Süratinin her yerde 1 olduğu, yani her s için $\| \beta'(s) \| = 1$ olan bir β eğrisine **birim hızlı eğri** (unit-speed curve) denir. Aşağıdaki teorem, hiç durmayan her eğrinin böyle bir yeniden parametrelendirmesi (Tanım 4.3) bulunduğunu söyler. İspat, tanımı anlamak kadar önemlidir; içinde kurulan gösterim ileride sürekli kullanılacak.

Teorem 10.1 (Birim Hızlı Yeniden Parametrelendirme). *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ düzgün bir eğri olsun. α'nın birim hızlı bir β yeniden parametrelendirmesi vardır.*

İspat.
I'da bir a sayısı sabitleyelim ve her $t \in I$ için

$$s(t) = \int_a^t \| \alpha'(u) \|\, du$$

*sayısını tanımlayalım. s'ye α'nın $t = a$ **tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu** (arc length function based at $t = a$) denir: $t > a$ için $s(t)$, a'dan t'ye gidilen yoldur; $t < a$ için $s(t)$, t'den a'ya gidilen yolun eksilisidir; $s(a) = 0$. İspatı adımlara bölelim.*
Adım 1: *s*'nin türevi sürattir. *Sürat fonksiyonu $v(u) = \| \alpha'(u) \|$, koordinat türevlerinin kareleri toplamının karekökü olduğundan süreklidir. Analizin temel teoremine göre sürekli bir fonksiyonun a'dan t'ye integrali t'ye göre türevlenebilirdir ve türevi integrandın t'deki değeridir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{ds}{dt}(t) = v(t) = \| \alpha'(t) \| .$$

α düzgün olduğundan $\alpha'(t)$ hiçbir zaman $\mathbf{0}$ değildir, yani her t için $ds/dt > 0$.
Adım 2: s kesin artandır ve görüntüsü bir açık aralıktır. *$t_1 < t_2$ ise*

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du > 0,$$

çünkü integrand pozitif ve sürekli, aralık pozitif uzunluktadır. Böylece s kesin artandır; özellikle birebirdir. $J = s(I)$ görüntüsüne bakalım. s sürekli olduğundan ara değer teoremi gereği J bir aralıktır: J'deki iki sayının arasındaki her sayı da J'dedir. J'nin en büyük elemanı yoktur: $s(t_0) \in J$ ise I açık olduğundan I'da t_0'dan büyük bir t_1 vardır ve $s(t_1) > s(t_0)$'dır. Aynı nedenle en küçük elemanı da yoktur. Uç noktalarını içermeyen bir aralık açıktır; demek ki J bir açık aralıktır.
Adım 3: ters fonksiyon. *$s : I \to J$ birebir ve örten olduğundan bir ters fonksiyonu vardır; onu $t = t(s)$ ile göstereceğiz: $t(s(t_0)) = t_0$ ve $s(t(s_0)) = s_0$. Bu ters fonksiyon da kesin artandır ($s_1 < s_2$ iken $t(s_1) \geq t(s_2)$ olsaydı s artan olduğundan $s_1 \geq s_2$ çıkardı). Ayrıca süreklidir. Kesin artan bir fonksiyonun her noktada sol ve sağ limitleri vardır: $s_0 \in J$ için $t(s_0^-) = \sup\{t(s) : s < s_0\}$ ve $t(s_0^+) = \inf\{t(s) : s > s_0\}$, üstelik $t(s_0^-) \leq t(s_0) \leq t(s_0^+)$. Bu eşitsizliklerden biri kesin olsaydı, örneğin $t(s_0) < t(s_0^+)$ olsaydı, $t(s_0)$ ile $t(s_0^+)$ arasındaki hiçbir sayı t'nin görüntüsünde bulunmazdı; oysa görüntü I aralığıdır ve bu sayılar I'nın iki elemanı arasında kalır. Demek ki iki limit de $t(s_0)$'a eşittir, yani t her s_0'da süreklidir.*
Adım 4: ters fonksiyonun türevi. *Tek değişkenli analizin ters fonksiyon kuralını bu durumda doğrudan görelim. $s_0 = s(t_0)$ olsun ve $s \neq s_0$, $t = t(s)$ yazalım; t birebir olduğundan $t \neq t_0$'dır. Fark oranını ters çevirelim:*

$$\frac{t(s) - t(s_0)}{s - s_0} = \frac{t - t_0}{s(t) - s(t_0)} = \frac{1}{\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}}.$$

$s \to s_0$ iken t'nin sürekliliğinden $t \to t_0$ olur; paydadaki fark oranı $\frac{ds}{dt}(t_0) = v(t_0) > 0$ sayısına yaklaşır. Dolayısıyla sol taraf $1/v(t_0)$'a yaklaşır: t fonksiyonu s_0'da türevlenebilirdir ve

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}\big(\, t(s) \,\big)} = \frac{1}{v\big(\, t(s) \,\big)} > 0.$$

Yani ters fonksiyonun türevi, fonksiyonun türevinin tersidir (karşılıklı noktalarda).
Adım 5: t her mertebeden türevlenebilirdir. *Yeniden parametrelendirme tanımı $h = t$ fonksiyonunun türevlenebilir, yani her mertebeden türevli olmasını ister. $v = \sqrt{g}$, burada $g = \sum_i (\alpha_i')^2$ her mertebeden türevlenebilir ve pozitiftir; karekök fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde her mertebeden türevlenebilir olduğundan v de öyledir, dolayısıyla $1/v$ de. Adım 4'e göre $dt/ds = (1/v)(t)$, yani $1/v$ ile t'nin bileşkesidir. t'nin k kez türevlenebildiğini biliyorsak zincir kuralı bu bileşkenin de k kez türevlenebildiğini söyler; o hâlde dt/ds k kez, t ise $k+1$ kez türevlenebilirdir. $k = 1$'den başlayıp tümevarımla t'nin her mertebeden türevlenebilir olduğunu görürüz.*
Adım 6: $\beta = \alpha(t)$ birim hızlıdır. *J açık aralık ve $t : J \to I$ türevlenebilir olduğundan*

$$\beta(s) = \alpha\big(\, t(s) \,\big), \qquad s \in J$$

eğrisi α'nın bir yeniden parametrelendirmesidir. Lemma 4.1'ne göre hızı

$$\beta'(s) = \frac{dt}{ds}(s)\, \alpha'\big(\, t(s) \,\big)$$

olur. Bir teğet vektörün skalerle çarpımının normu, skalerin mutlak değeriyle normun çarpımıdır; $dt/ds > 0$ olduğundan mutlak değer gerekmez:

$$\| \beta'(s) \| = \frac{dt}{ds}(s) \mathrm{parallel} \alpha'\big(\, t(s) \,\big) \mathrm{parallel} = \frac{dt}{ds}(s)\, \frac{ds}{dt}\big(\, t(s) \,\big) = 1.$$

Son eşitlikte Adım 4'teki $dt/ds = 1/(ds/dt)$ bağıntısını kullandık. β birim hızlıdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani düzgün bir eğride "saati yol uzunluğuna göre yeniden ayarlarsak" nokta her an 1 süratle gider. İspattaki gösterimi sabitleyelim: $s = s(t)$ yay uzunluğu fonksiyonu, $t = t(s)$ onun tersi ve $\beta(s) = \alpha(t(s))$ birim hızlı yeniden parametrelendirmedir. Elde edilen β'ya $t = a$ **tabanlı** birim hızlı yeniden parametrelendirme denir. Tabanı değiştirmek s'yi bir sabit kadar kaydırır; bunu alıştırmalarda ayrıntısıyla göreceğiz. Birim hızlı β'ya **yay uzunluğu parametrelendirmesi** (arc-length parametrization) da denir. Adın nedeni şudur.

Önerme 10.1 (Birim Hızlı Eğride Parametre Yol Ölçer). *$\beta : J \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $s_1 < s_2$, J'de iki sayı olsun. β'nın $s = s_1$'den $s = s_2$'ye yay uzunluğu $s_2 - s_1$'dir. Özel olarak, β teoremin yöntemiyle $t = a$ tabanlı kurulmuşsa $\beta(s)$ noktası, rota üzerinde $\alpha(a)$'dan s kadar yol gidilerek ulaşılan noktadır.*

> ***İspat.***
> *Yay uzunluğu tanımına göre β'nın s_1'den s_2'ye yay uzunluğu*
>
> $$\int_{s_1}^{s_2} \| \beta'(u) \| \, du = \int_{s_1}^{s_2} 1 \, du = s_2 - s_1$$
>
> *olur. İkinci iddia için $\beta(s) = \alpha(t(s))$ ve $s(t(s)) = s$ eşitliklerini hatırlayalım. $t_0 = t(s)$ dersek $s = s(t_0)$, yani s sayısı α'nın a'dan t_0'a yay uzunluğudur ve $\beta(s) = \alpha(t_0)$'dır. Böylece $\beta(s)$, $\alpha(a)$'dan başlayıp rota boyunca s birim yol alındığında varılan noktadır ($s < 0$ ise geriye doğru $|\, s \,|$ birim).*
> ■

Teoremi önce en kolay örnekte, sabit süratli helis üzerinde uygulayalım.

Örnek 10.5 (Helisin Birim Hızlı Yeniden Parametrelendirmesi). $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ helisinin $t = 0$ tabanlı birim hızlı yeniden parametrelendirmesini bulalım ve süratinin gerçekten 1 olduğunu doğrudan hesapla denetleyelim. $a = 3$, $b = 4$ için $\beta(5\pi)$ noktasını yazalım.

> **Çözüm.**
> Helisin sürati sabittir: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Örnek 10.1). $t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu
>
> $$s(t) = \int_0^t c \, du = ct$$
>
> olur. Bu fonksiyonun tersi $t(s) = s/c$'dir; $J = s(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Birim hızlı yeniden parametrelendirme
>
> $$\beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{c}\right) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$$
>
> çıkar. Doğrudan denetim: koordinat türevleri $-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}$, $\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}$ ve $\frac{b}{c}$ olduğundan
>
> $$\| \beta'(s) \|^2 = \frac{a^2}{c^2}\sin^2\frac{s}{c} + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\frac{s}{c} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$
>
> $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ için
>
> $$\beta(s) = \big(\, 3\cos(s/5), 3\sin(s/5), 4s/5 \,\big),$$
> $$\beta(5\pi) = (3\cos\pi, 3\sin\pi, 4\pi) = (-3, 0, 4\pi) = \alpha(\pi).$$
>
> Gerçekten de $\alpha(0) = (3, 0, 0)$'dan yarım tur, yani 5π birim yol gidildiğinde $\alpha(\pi)$'ye varılır. Helis için birim hızlı kopya, aynı rotayı c kat yavaş dolaşan eğridir.
> ■

Sürat sabit olmadığında $t(s)$ artık s'nin bir katı değildir; birim hızlı kopya rotanın bazı kısımlarını hızlandırır, bazılarını yavaşlatır.

Örnek 10.6 (Koni Üzerindeki Spiralin Birim Hızlı Kopyası). $\alpha(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, eğrisinin $z^2 = x^2 + y^2$ konisi üzerinde kaldığını görelim; süratini, $t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonunu ve birim hızlı yeniden parametrelendirmesini bulalım. Sonucun süratini doğrudan denetleyelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Her t için

$$\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2t} = \alpha_3(t)^2$$

olduğundan nokta koni üzerindedir; $z = e^t > 0$ olduğu için koninin üst yarısında, orijine hiç değmeden ve t arttıkça genişleyerek yükselen bir spiral çizer.
Çarpım kuralıyla koordinat türevleri

$$\alpha'(t) = \big(\, e^t(\cos t - \sin t),\, e^t(\sin t + \cos t),\, e^t \big)_{\alpha(t)}$$

olur. Süratin karesinde e^{2t} ortak çarpandır:

$$\begin{aligned} \| \alpha'(t) \|^2 &= e^{2t}\,\big[\, (\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1 \,\big] \\ &= e^{2t}\,\big[\, (1 - 2\sin t\cos t) + (1 + 2\sin t\cos t) + 1 \,\big] = 3e^{2t}. \end{aligned}$$

Sürat $v(t) = \sqrt{3}\,e^t$'dir; pozitiftir, eğri düzgündür, ve sürat t ile birlikte üstel olarak büyür. $t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{3}\,e^u\,du = \sqrt{3}\,(e^t - 1)$$

olur. t bütün gerçel sayıları dolaşırken e^t bütün pozitif sayıları alır; görüntü $J : -\sqrt{3} < s$ açık yarı doğrusudur. Tersi için $e^t = 1 + s/\sqrt{3}$, yani

$$t(s) = \log\!\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right), \qquad s > -\sqrt{3}.$$

$w(s) = 1 + s/\sqrt{3}$ kısaltmasıyla $e^{t(s)} = w$ ve $t(s) = \log w$; birim hızlı yeniden parametrelendirme

$$\beta(s) = \big(\, w\cos(\log w),\, w\sin(\log w),\, w \,\big), \qquad w = 1 + \frac{s}{\sqrt{3}}$$

olur. Doğrudan denetim: $dw/ds = 1/\sqrt{3}$ ve $d(\log w)/ds = 1/(\sqrt{3}\,w)$. $\theta = \log w$ dersek çarpım ve zincir kurallarıyla

$$\begin{aligned} \beta_1'(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - w\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\,w} = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sqrt{3}}, \\ \beta_2'(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + w\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\,w} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{3}}, \\ \beta_3'(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Kareler toplamı

$$\frac{1}{3}\,\big[\, (\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2 + 1 \,\big] = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

olur; β birim hızlıdır.
Sürat farkını sayılarla görelim. α'nın eşit zaman aralıklarıyla uğradığı noktalar ve o ana kadar gidilen yol:

t	$\alpha(t)$ (yaklaşık)	$s(t)$
0	(1; 0; 1)	0
0,5	(1,45; 0,79; 1,65)	1,12
1	(1,47; 2,29; 2,72)	2,98
1,5	(0,32; 4,47; 4,48)	6,03

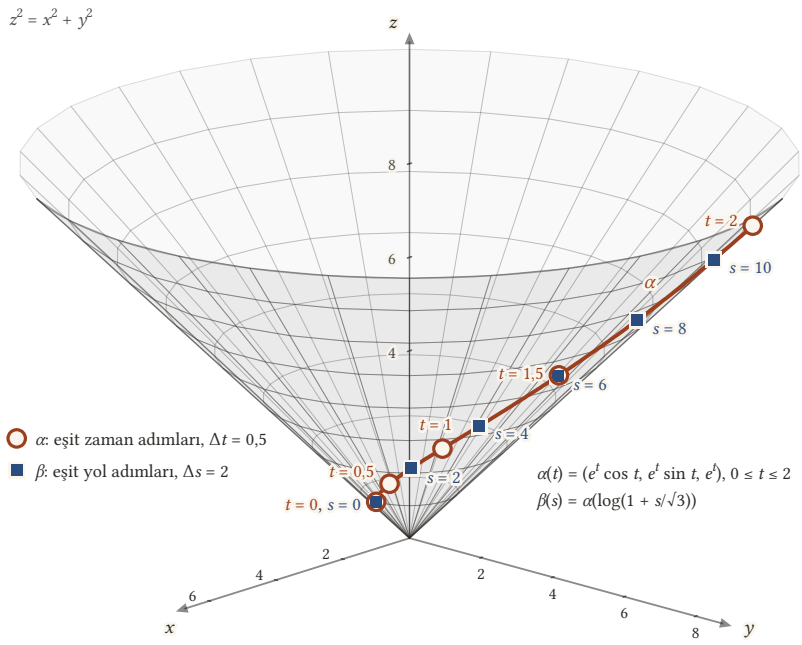
 CC BY-NC-SA 4.0

t	$\alpha(t)$ (yaklaşık)	$s(t)$
2	$(-3{,}08;\ 6{,}72;\ 7{,}39)$	11,07

Ardışık noktalar arasındaki yol 1,12, 1,85, 3,05, 5,04 diye büyür: α gittikçe hızlanır. β ise eşit s adımlarında eşit yol alır:

s	$t(s)$	$\beta(s)$ (yaklaşık)
0	0	$(1;\ 0;\ 1)$
2	0,77	$(1{,}55;\ 1{,}50;\ 2{,}15)$
4	1,20	$(1{,}21;\ 3{,}08;\ 3{,}31)$
6	1,50	$(0{,}33;\ 4{,}45;\ 4{,}46)$
8	1,73	$(-0{,}87;\ 5{,}55;\ 5{,}62)$
10	1,91	$(-2{,}27;\ 6{,}38;\ 6{,}77)$

İki eğrinin rotası aynıdır; yalnızca saatleri farklıdır.



Şekil 10.2: $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin üst yarısı (gri ızgara) ve üzerindeki $\alpha(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t)$ spirali, $0 \le t \le 2$ (turuncu). İçi boş turuncu daireler α'nın eşit zaman adımlarındaki $t = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$ noktalarıdır: aralarındaki yaylar 1,12; 1,85; 3,05; 5,04 diye uzar, çünkü sürat $\sqrt{3}\,e^t$ gittikçe büyür. Dolu mavi kareler birim hızlı kopya β'nın eşit yol adımlarındaki $s = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$ noktalarıdır; ardışık iki kare arasındaki yay uzunluğu hep 2'dir. İki eğri aynı rotayı dolaşır; farklı olan yalnızca saatleridir.

■

10.2.1 Yön

Bir yeniden parametrelendirme rotayı aynı yönde dolaşabilir ya da geriye doğru dolaşabilir. Bunu h'nin türevinin işareti belirler.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 10.2 (Yön Koruyan ve Yön Çeviren Yeniden Parametrelendirme). $\beta = \alpha(h)$, α'nın $h : J \to I$ ile yeniden parametrelendirmesi olsun. Her $s \in J$ için $h'(s) \geq 0$ ise β'ya **yön koruyan** (orientation-preserving), her s için $h'(s) \leq 0$ ise **yön çeviren** (orientation-reversing) yeniden parametrelendirme denir.

Yani yön koruyan bir yeniden parametrelendirmede yeni saat ilerledikçe eski saat de ilerler (ya da yerinde durur); yön çevirende eski saat geriye akar ve rota ters yönde dolaşılır.
Lemma 4.1'ne göre $\beta'(s) = h'(s)\,\alpha'(h(s))$'dir: yön koruyan durumda β'nın hızı α'nın aynı noktadaki hızıyla aynı yöne, yön çeviren durumda ters yöne bakar ($h'(s) = 0$ olan anlarda β durur). Teoremdeki birim hızlı yeniden parametrelendirme daima yön koruyandır, çünkü $h = t$ ve Adım 4'e göre $dt/ds > 0$'dır. Ancak birim hızlı olmak tek başına yön korumayı gerektirmez.

Örnek 10.7 (Yön Çeviren Birim Hızlı Bir Yeniden Parametrelendirme). $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ olmak üzere $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ helisinin $h(s) = -s/c$ ile yeniden parametrelendirmesi $\gamma = \alpha(h)$ olsun. γ'nın birim hızlı ama yön çeviren olduğunu gösterelim; $a = 3, b = 4$ için $\gamma(5\pi)$ noktasını Örnek 10.5'daki $\beta(5\pi)$ ile karşılaştıralım.

Çözüm.
$h'(s) = -1/c < 0$ olduğundan γ yön çevirendir. Hızı

$$\gamma'(s) = h'(s)\,\alpha'(h(s)) = -\frac{1}{c}\,\alpha'\!\left(-\frac{s}{c}\right)$$

ve sürati $\frac{1}{c} \parallel \alpha'(-s/c) \parallel = \frac{1}{c} \cdot c = 1$'dir; γ birim hızlıdır. Açık biçimi

$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, -a\sin\frac{s}{c}, -\frac{bs}{c}\right)$$

olur (cos çift, sin tek fonksiyondur). $a = 3, b = 4, c = 5$ için

$$\gamma(5\pi) = (3\cos\pi, -3\sin\pi, -4\pi) = (-3, 0, -4\pi),$$

oysa $\beta(5\pi) = (-3, 0, 4\pi)$ idi. İkisi de $(3, 0, 0)$'dan çıkıp 5π birim yol alır; β yukarıya, γ aşağıya gider. Yani helisin birim hızlı yeniden parametrelendirmesi tek değildir: teoremin yöntemi bunlardan yön koruyan olanı seçer.
■

> ⚠ Kuramda kolay, uygulamada nadir
>
> Eğrilerin kuramında düzgün eğrileri sık sık birim hızlı kabul edeceğiz; teorem buna hak verir. Ne var ki verilen bir eğri için β'yı açıkça yazmak çoğu zaman olanaksızdır. Engel geometri değil, tek değişkenli analizdir: koordinat fonksiyonları ne kadar basit olsa da sürat bir kareköktür ve karekökün integrali genellikle tanıdık fonksiyonlarla yazılamaz; yazılabildiğinde de tersini almak gerekir. Örneğin $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ parabolünün yay uzunluğu fonksiyonu Örnek 10.4'daki $F(t)$'dir; bu fonksiyon elemanterdir ama tersi $t(s)$ elemanter fonksiyonlarla yazılamaz. $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ eğrisinde durum daha kötüdür: $\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ süratinin ilkeli bile elemanter değildir. Silindir ile kürenin kesişim eğrisinde de öyleydi (Örnek 10.3). Helis ve koni spirali gibi örnekler bu bakımdan ayrıcalıklıdır.

10.3 Eğri Üzerinde Vektör Alanları

$\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı (Tanım 2.4), uzayın her noktasına o noktada bir teğet vektör bağlıyordu. Bir eğriyi incelerken bütün uzaya ok yerleştirmek gerekmez; yalnızca eğrinin uğradığı yerlere, üstelik "an" sırasına göre ok yerleştirmek yeter. Hız vektörü zaten böyledir: her t anına $\alpha(t)$ noktasında bir teğet vektör bağlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 10.3 (Eğri Üzerinde Vektör Alanı). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. I'daki her t sayısına $\mathbb{R}^3$'ün $\alpha(t)$ noktasındaki bir $Y(t)$ teğet vektörünü karşılık getiren Y fonksiyonuna α **eğrisi üzerinde bir vektör alanı** (vector field on a curve) denir.

Yani eğri üzerinde vektör alanı, hareket eden noktanın her an yanında taşıdığı bir oktur; okun kuyruğu hep noktanın bulunduğu yerdedir, ucu ise istediği yöne bakabilir.
Tanımda okun eğriye teğet olması istenmez. Hız alanı α' eğriye teğettir, ama genel bir Y her yöne bakabilir; aşağıdaki iki örnek bunu gösterir.

Örnek 10.8 (Hız Alanı Bir Vektör Alanıdır). Herhangi bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $t \mapsto \alpha'(t)$ kuralının α üzerinde bir vektör alanı olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Hız vektörünün tanımına (Tanım 4.2) göre $\alpha'(t)$, uygulama noktası $\alpha(t)$ olan bir teğet vektördür. Böylece α', her $t \in I$ sayısına $\alpha(t)$ noktasındaki bir teğet vektörü karşılık getirir: tanımın istediği tam budur. Ayrıca α''nün α'ya teğet olduğunu söylemek, hız vektörünün rotaya teğet doğrultuda olmasıdır; kesen vektörlerin limiti olarak bunun nedenini önceki bölümde görmüştük.
■

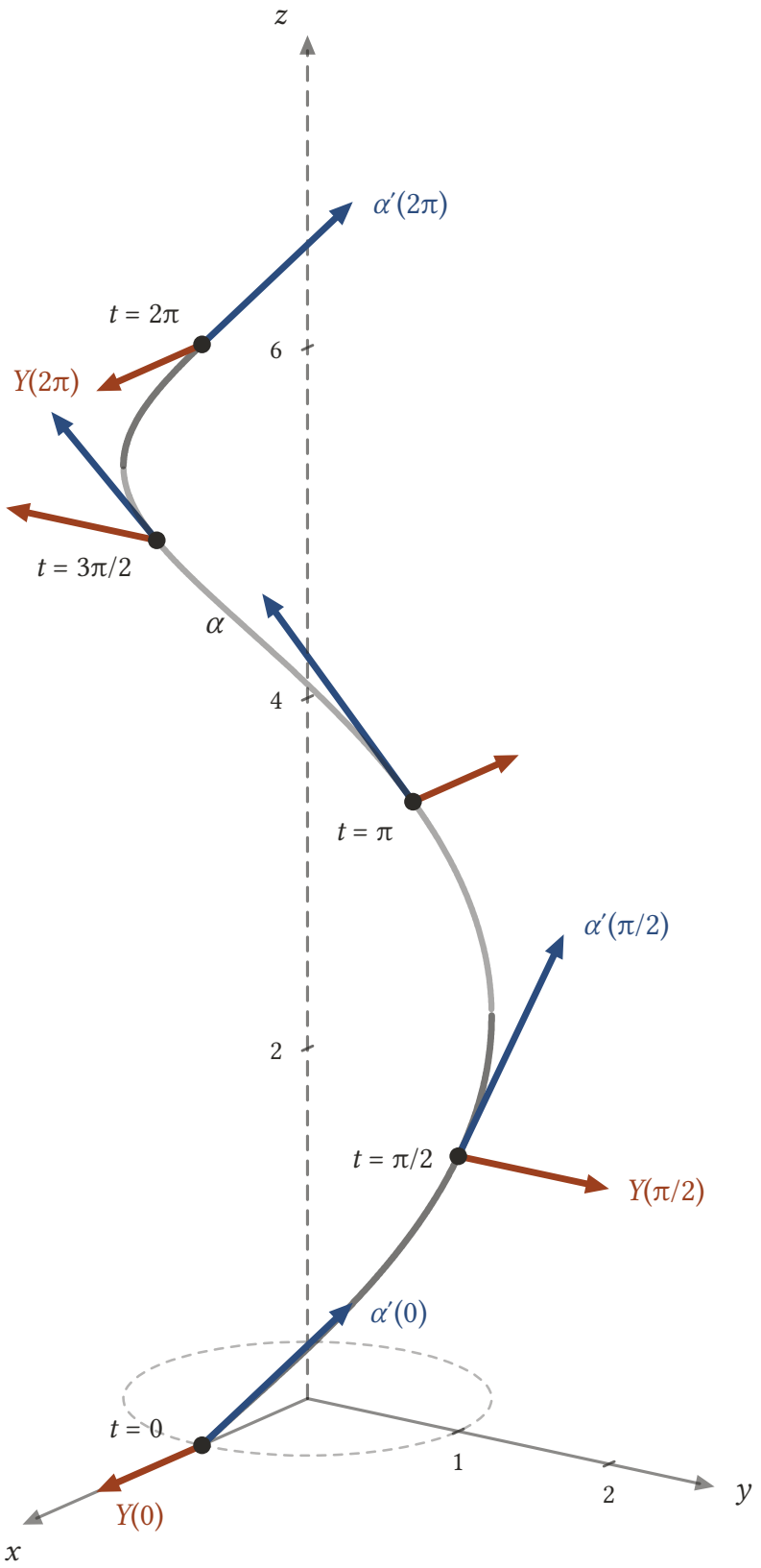
Örnek 10.9 (Helis Üzerinde Eğriye Teğet Olmayan Bir Alan). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde $Y(t)$, uygulama noktası $\alpha(t)$ ve vektör kısmı $(\cos t, \sin t, 0)$ olan teğet vektör olsun (ok, helisin ekseninden dışarıya, yatay olarak bakar). Y'nin α üzerinde bir vektör alanı olduğunu ve hiçbir t için $\alpha'(t)$'ye paralel olmadığını gösterelim.

Çözüm.
Her t için $Y(t)$, $\alpha(t)$ noktasında bir teğet vektördür; tanım gereği Y bir vektör alanıdır. Hızın vektör kısmı $(-\sin t, \cos t, 1)$'dir. $Y(t)$ ile $\alpha'(t)$ aynı noktada iki teğet vektördür; birinin ötekinin katı olması için vektör kısımlarının orantılı olması gerekir. Ama $Y(t)$'nin üçüncü koordinatı 0, $\alpha'(t)$'ninki 1'dir: $Y(t) = \lambda\,\alpha'(t)$ olsaydı üçüncü koordinattan $\lambda = 0$, dolayısıyla $Y(t) = \mathbf{0}$ çıkardı; oysa $\| Y(t) \| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Öte yandan $\alpha'(t) = \mu\, Y(t)$ da olamaz, çünkü sağ tarafın üçüncü koordinatı sıfırdır. Demek ki $Y(t)$ hiçbir anda hıza paralel değildir; eğriye teğet olmayan bir vektör alanıdır. İç çarpımla da görülür:

$$Y(t) \cdot \alpha'(t) = -\sin t \cos t + \cos t \sin t + 0 = 0,$$

yani Y hıza her an diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.3: Gri eğri $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisidir; $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ anlarında iki vektör alanı çizilmiştir. Turuncu oklar $Y(t)$'dir: vektör kısmı $(\cos t, \sin t, 0)$ olduğundan her ok yataydır ve helisin ekseninden (kesikli z ekseni) dışarıya bakar. Mavi oklar hız vektörleri $\alpha'(t)$'dir; vektör kısmı $(-\sin t, \cos t, 1)$ hep 1 birim yükselir ve eğriye teğettir. Aynı noktada duran turuncu ve mavi oklar birbirine diktir; Y eğri üzerinde bir vektör alanıdır, ama hiçbir anda eğriye teğet değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

10.3.1 Öklid koordinat fonksiyonları

α üzerinde bir Y vektör alanı verilsin. Her t için $Y(t)$, $\alpha(t)$ noktasında bir teğet vektördür (Tanım 2.1) ve bir vektör kısmı vardır; bu üçlünün koordinatlarını $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ ile gösterelim. Doğal çatı alanının (Tanım 2.6) $\alpha(t)$ noktasındaki değerleri $U_1(\alpha(t))$, $U_2(\alpha(t))$, $U_3(\alpha(t))$, vektör kısımları $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ olan teğet vektörlerdir; Lemma 2.1'nde gördüğümüz gibi aynı noktadaki her teğet vektör bunların koordinat katsayılı toplamıdır. Böylece

$$Y(t) = \big(\, y_1(t), y_2(t), y_3(t)\big)_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{3} y_i(t)\, U_i\,\big(\,\alpha(t)\,\big)$$

yazılır. I üzerinde tanımlı y_1, y_2, y_3 gerçel değerli fonksiyonlarına Y'nin **Öklid koordinat fonksiyonları** denir. Bundan sonra bütün vektör alanlarının koordinat fonksiyonlarını türevlenebilir kabul edeceğiz; "eğri üzerinde vektör alanı" derken bunu da kastediyoruz.
Bu yazımda $t \mapsto U_i(\alpha(t))$ bileşkesi de α üzerinde bir vektör alanıdır: her t'ye $\alpha(t)$ noktasındaki i-inci doğal çatı vektörünü bağlar. Karışıklık tehlikesi olmayan yerlerde $U_i(\alpha(t))$ yerine kısaca U_i yazacağız; örneğin helis üzerindeki radyal alan $Y = \cos t\, U_1 + \sin t\, U_2$ biçiminde yazılır. Hız alanı için de $\alpha' = \sum_i \alpha_i' U_i$'dir.

10.3.2 Alanlarla işlemler

Aynı eğri üzerindeki iki vektör alanı her t anında aynı noktada iki teğet vektör verir; o noktada teğet vektörleri toplayabilir, iç ve vektörel çarpımlarını alabiliriz. İşlemler noktasal tanımlanır: Y ve Z, α üzerinde vektör alanları, f de I üzerinde türevlenebilir bir fonksiyonsa

$$(Y+Z)(t) = Y(t) + Z(t), \qquad (fY)(t) = f(t)\,Y(t)$$

kurallarıyla α üzerinde yeni vektör alanları; $(Y\cdot Z)(t) = Y(t)\cdot Z(t)$ kuralıyla I üzerinde gerçel değerli bir fonksiyon (Tanım 9.4); $(Y\times Z)(t) = Y(t)\times Z(t)$ kuralıyla yine α üzerinde bir vektör alanı (Tanım 9.9) elde edilir. Koordinat fonksiyonları cinsinden

$$Y+Z = \sum_i (y_i + z_i)\, U_i, \qquad fY = \sum_i f y_i\, U_i, \qquad Y\cdot Z = \sum_i y_i z_i$$

olur; vektörel çarpım ise biçimsel determinantla hesaplanır. Hepsini bir örnek üzerinde görelim. Aşağıdaki üç kutuda $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $I : t > 0$ üzerinde herhangi bir eğri;

$$Y(t) = t^2\, U_1 - t\, U_3, \qquad Z(t) = (1-t^2)\, U_2 + t\, U_3$$

α üzerinde iki vektör alanı ve $f(t) = (t+1)/t$'dir.

Örnek 10.10 (İki Alanın Toplamı ve Fonksiyonla Çarpımı). $Y = t^2U_1 - tU_3$, $Z = (1-t^2)U_2 + tU_3$ ve $f(t) = (t+1)/t$ için $Y+Z$ ile fY alanlarını bulalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları toplanır. Y'nin koordinatları $(t^2, 0, -t)$, Z'nin koordinatları $(0, 1-t^2, t)$ olduğundan

$$(Y+Z)(t) = t^2\, U_1 + (1-t^2)\, U_2 + (-t+t)\, U_3 = t^2\, U_1 + (1-t^2)\, U_2.$$

Üçüncü koordinatlar birbirini götürdü. Fonksiyonla çarpımda her koordinat f ile çarpılır:

$$(fY)(t) = \frac{t+1}{t}\, t^2\, U_1 - \frac{t+1}{t}\, t\, U_3 = t(t+1)\, U_1 - (t+1)\, U_3.$$

Örneğin $t = 2$'de $(Y+Z)(2) = 4U_1 - 3U_2$ ve $(fY)(2) = 6U_1 - 3U_3$'tür; ikisi de $\alpha(2)$ noktasında teğet vektörlerdir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 10.11 (İki Alanın İç Çarpımı). $Y = t^2 U_1 - tU_3$ ve $Z = (1-t^2)U_2 + tU_3$ alanlarının iç çarpımı olan $Y \cdot Z$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm.
Aynı noktadaki teğet vektörlerin iç çarpımı, vektör kısımlarının iç çarpımıdır; koordinatlar karşılıklı çarpılıp toplanır:

$$(Y \cdot Z)(t) = t^2 \cdot 0 + 0 \cdot (1-t^2) + (-t) \cdot t = -t^2.$$

Sonuç bir vektör alanı değil, I üzerinde gerçel değerli bir fonksiyondur; $t = 2$'de değeri -4'tür. Negatif çıkması, $Y(t)$ ile $Z(t)$ arasındaki açının her t için geniş açı olduğunu söyler.
■

Örnek 10.12 (İki Alanın Vektörel Çarpımı). $Y = t^2 U_1 - tU_3$ ve $Z = (1-t^2)U_2 + tU_3$ alanlarının vektörel çarpımı $Y \times Z$'yi bulalım.

Çözüm.
Vektörel çarpım, ilk satırı doğal çatı vektörleri, öteki satırları koordinatlar olan biçimsel determinantla hesaplanır:

$$(Y \times Z)(t) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ t^2 & 0 & -t \\ 0 & 1-t^2 & t \end{vmatrix}.$$

İlk satıra göre açalım:

$$\begin{aligned}(Y \times Z)(t) &= \big(\, 0 \cdot t - (-t)(1-t^2) \,\big)\, U_1 - \big(\, t^2 \cdot t - (-t) \cdot 0 \,\big)\, U_2 \\ &\quad + \big(\, t^2(1-t^2) - 0 \,\big)\, U_3 \\ &= t(1-t^2)\, U_1 - t^3\, U_2 + t^2(1-t^2)\, U_3.\end{aligned}$$

Denetim: sonuç her iki alana dik olmalıdır (Lemma 9.5). Y ve Z ile iç çarpımlar

$$\begin{aligned}t^2 \cdot t(1-t^2) + 0 \cdot (-t^3) + (-t)\, t^2(1-t^2) &= 0, \\ 0 \cdot t(1-t^2) + (1-t^2)(-t^3) + t \cdot t^2(1-t^2) &= 0\end{aligned}$$

verir. $t = 2$'de $(Y \times Z)(2) = -6U_1 - 8U_2 - 12U_3$'tür.
■

10.4 Türev ve İvme

Eğri üzerindeki bir vektör alanı zamanla değişen bir oktur; değişim hızını sormak doğaldır. Ok $\alpha(t)$ noktasından çıkar ve t ilerledikçe hem yeri hem vektör kısmı değişir. Türev, vektör kısmının değişimini ölçer: koordinat fonksiyonlarının türevleri alınır ve sonuç yine hareket eden noktaya bağlanır.

Tanım 10.4 (Vektör Alanının Türevi ve İvme). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri, $Y = \sum_i y_i\, U_i$ de α üzerinde bir vektör alanı olsun. Her $t \in I$ için

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{dy_i}{dt}(t)\, U_i\, \big(\, \alpha(t) \,\big)$$

kuralıyla tanımlanan Y' vektör alanına Y'nin **türevi** (derivative) denir. Özel olarak, hız alanının türevi $\alpha'' = (\alpha')'$'ye α'nın **ivmesi** (acceleration) denir; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ise

$$\alpha''(t) = \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}(t), \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}(t), \frac{d^2\alpha_3}{dt^2}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir alanın türevini almak, oku kendi başlangıç noktasında tutup vektör kısmının koordinatlarını türevlemektir. Koordinat fonksiyonları türevlenebilir olduğundan Y' de α üzerinde bir vektör alanıdır ve türevleri $Y'', Y''', \dots$ diye sürer.

Örnek 10.13 (Bir Alanın Ardışık Türevleri). $I : t > 0$ üzerinde $Y = t^2 U_1 - tU_3$ alanının Y', Y'' ve Y''' türevlerini bulalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $y_1 = t^2, y_2 = 0, y_3 = -t$'dir. Türevleri $2t, 0, -1$; ikinci türevleri $2, 0, 0$; üçüncü türevleri hep 0. Dolayısıyla

$$Y' = 2t\,U_1 - U_3, \qquad Y'' = 2\,U_1, \qquad Y''' = 0.$$

Y''''nün 0 olması, her t için $\alpha(t)$ noktasındaki sıfır teğet vektörü vermesi demektir. Y'' ise her noktada aynı vektör kısmını $(2,0,0)$ taşır; ileride bu tür alanlara paralel diyeceğiz.
■

Hız vektörü daima eğriye teğettir; ivme ise genellikle değildir. Bir dönüşte ivme dönüşün iç tarafına bakar.

Örnek 10.14 (Parabolde Hız ve İvme). $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ parabolünün hız ve ivmesini bulalım; ivmenin hiçbir anda hıza paralel olmadığını gösterelim ve $t = -1, 0, 1$ anlarında iki vektörü yazalım.

Çözüm.
Koordinat türevleri 1, $2t$, 0; ikinci türevler 0, 2, 0. Dolayısıyla

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 0)_{\alpha(t)}, \qquad \alpha''(t) = (0, 2, 0)_{\alpha(t)}.$$

İvme her an aynı vektör kısmına sahiptir: yukarıya bakan, uzunluğu 2 olan ok. İvmenin hıza paralel olması, yani $(0,2,0) = \lambda(1,2t,0)$ ya da $(1,2t,0) = \mu(0,2,0)$ olması olanaksızdır: birincisinde ilk koordinat $\lambda = 0$, dolayısıyla $(0,2,0) = \mathbf{0}$ çelişkisini verir; ikincisinde ilk koordinat $1 = 0$ verir. Aynı sonuca vektörel çarpımla da varılır: orantılı iki vektörün vektörel çarpımı sıfırdır, çünkü biçimsel determinantın iki satırı orantılı olur. Oysa

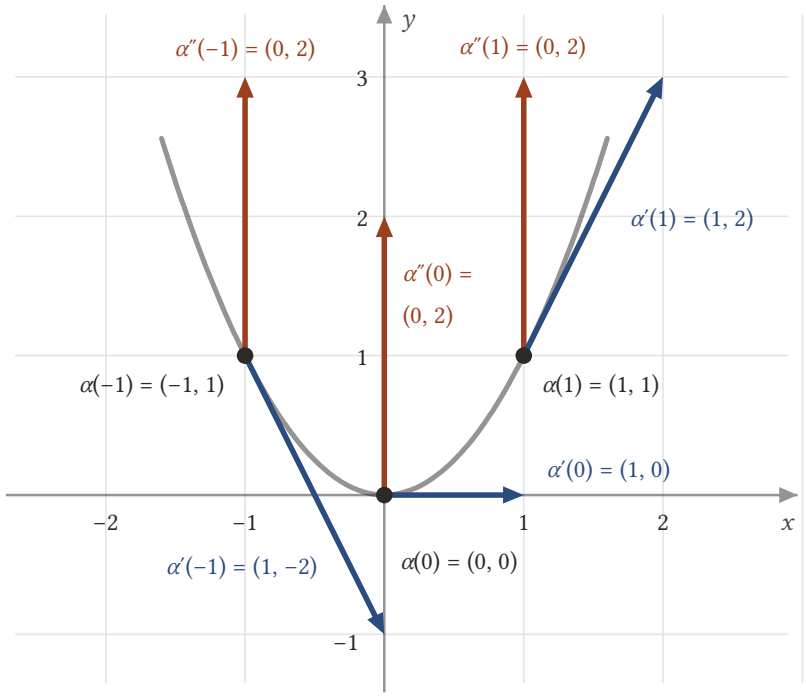
$$(1,2t,0) \times (0,2,0) = (2t\cdot 0 - 0\cdot 2,\, 0\cdot 0 - 1\cdot 0,\, 1\cdot 2 - 2t\cdot 0) = (0,0,2) \neq \mathbf{0}$$

bulunur; ivme hiçbir anda hıza paralel, yani eğriye teğet değildir.

t	$\alpha(t)$	$\alpha'(t)$'nin vektör kısmı	$\alpha''(t)$'nin vektör kısmı	$\alpha' \cdot \alpha''$
-1	$(-1,1,0)$	$(1,-2,0)$	$(0,2,0)$	-4
0	$(0,0,0)$	$(1,0,0)$	$(0,2,0)$	0
1	$(1,1,0)$	$(1,2,0)$	$(0,2,0)$	4

$t < 0$ iken ivme hızla geniş açı yapar (nokta yavaşlar, sürat $\sqrt{1+4t^2}$ azalır), $t = 0$'da hıza diktir (sürat en küçük değerini alır), $t > 0$ iken dar açı yapar (nokta hızlanır). İvmenin hız doğrultusundaki bileşeni süratin değişimini, hıza dik bileşeni ise dönüşü ölçer.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.4: xy düzleminde $y = x^2$ parabolünü çizen $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ eğrisinin $t = -1, 0, 1$ anlarındaki hız vektörleri (mavi) ve ivme vektörleri (turuncu). Hız okları eğriye teğettir ve vektör kısımları $(1, -2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ olarak noktadan noktaya değişir; ivme oklarının üçü de aynı $(0, 2)$ vektör kısmını taşır, hep yukarı bakar ve hiçbir anda hıza paralel değildir. $t = -1$'de ivme hızla geniş açı yapar (nokta yavaşlar), $t = 0$'da ona diktir, $t = 1$'de dar açı yapar (nokta hızlanır).

■

Örnek 10.15 (Çemberde İvme Merkeze Bakar). $r > 0$ için $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$ çemberinin ivmesini bulalım; ivmenin hıza dik olduğunu ve daima merkeze doğru baktığını gösterelim.

Çözüm.
Koordinat türevleri $-r\sin t, r\cos t, 0$; ikinci türevler $-r\cos t, -r\sin t, 0$. Dolayısıyla

$$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0)_{\alpha(t)}, \qquad \alpha''(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0)_{\alpha(t)}.$$

İvmenin vektör kısmı, konum noktası $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$'ın eksilisidir: $\alpha(t)$'den çıkan bu ok tam merkeze, orijine gider ve uzunluğu r'dir. Hız ile iç çarpım

$$\alpha'(t)\cdot\alpha''(t) = r^2\sin t\cos t - r^2\cos t\sin t + 0 = 0$$

olduğundan ivme her an hıza diktir. Sürat $\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r$ sabittir; sabit süratli bir harekette ivmenin hıza dik olması genel bir olgudur ve alıştırmalarda ispatlanacaktır. Doğru $\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ için ise ivme sıfırdır: koordinatlar birinci dereceden olduğundan ikinci türevleri yoktur.
■

10.4.1 Lineerlik ve Leibniz kuralları

Hangi kılıkta karşımıza çıksa çıksın türev, toplama karşı lineer davranır ve çarpımlar için Leibniz kuralına uyar. Eğri üzerindeki vektör alanları için dört kural vardır: biri lineerlik, üçü çarpım kuralı.

Lemma 10.1 (Türevin Lineerlik ve Leibniz Kuralları). *Y ve Z, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları, a, b sayılar ve f, I üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$(aY + bZ)' = aY' + bZ', \qquad (fY)' = \frac{df}{dt}\,Y + f\,Y',$$

$$(Y \cdot Z)' = Y' \cdot Z + Y \cdot Z', \qquad (Y \times Z)' = Y' \times Z + Y \times Z'$$

olur. Üçüncü kuralda soldaki, $Y \cdot Z$ gerçel değerli fonksiyonunun sıradan türevidir.

> ***İspat.***
> *$Y = \sum_i y_i U_i$ ve $Z = \sum_i z_i U_i$ yazalım. Her kural, koordinat fonksiyonlarına tek değişkenli türev kurallarını uygulamaktan ibarettir.*
> Lineerlik. *$aY + bZ$ alanının i-inci koordinat fonksiyonu $ay_i + bz_i$'dir. Türevin lineerliğinden $(ay_i + bz_i)' = ay_i' + bz_i'$, dolayısıyla*
>
> $$(aY + bZ)' = \sum_i (ay_i' + bz_i')\,U_i = a\sum_i y_i'\,U_i + b\sum_i z_i'\,U_i = aY' + bZ'.$$
>
> Fonksiyonla çarpım. *fY'nin i-inci koordinatı $f y_i$'dir. Tek değişkenli çarpım kuralı $(f y_i)' = f' y_i + f y_i'$ verir; toplarsak*
>
> $$(fY)' = \sum_i (f' y_i + f y_i')\,U_i = f' \sum_i y_i\,U_i + f \sum_i y_i'\,U_i = f'Y + fY'.$$
>
> İç çarpım. *$Y \cdot Z = \sum_i y_i z_i$ gerçel değerli fonksiyondur. Her terime çarpım kuralı uygulanır:*
>
> $$(Y \cdot Z)' = \sum_i (y_i' z_i + y_i z_i') = \sum_i y_i' z_i + \sum_i y_i z_i' = Y' \cdot Z + Y \cdot Z'.$$
>
> Vektörel çarpım. *(i, j, k), $(1, 2, 3)$'ün devirli bir sıralaması olsun: $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ ya da $(3, 1, 2)$. Vektörel çarpımın tanımına göre $Y \times Z$'nin k-inci koordinat fonksiyonu $y_i z_j - y_j z_i$'dir; üç koordinat da bu tek formülün üç devirli sıralamadaki hâlidir. Çarpım kuralıyla*
>
> $$(y_i z_j - y_j z_i)' = (y_i' z_j - y_j' z_i) + (y_i z_j' - y_j z_i').$$
>
> *Sağdaki ilk parantez $Y' \times Z$'nin, ikincisi $Y \times Z'$'nin k-inci koordinatıdır. Üç koordinatta da aynı eşitlik sağlandığından $(Y \times Z)' = Y' \times Z + Y \times Z'$ olur.*
> ■

Örnek 10.16 (Leibniz Kuralının Sayısal Denetimi). $Y = t^2 U_1 - t U_3$ ve $Z = (1 - t^2) U_2 + t U_3$ için $(Y \cdot Z)'$ türevini iki yoldan hesaplayalım: önce doğrudan, sonra Leibniz kuralıyla.

> **Çözüm.**
> Örnek 10.11'de $Y \cdot Z = -t^2$ bulmuştuk; doğrudan türevi $(Y \cdot Z)' = -2t$'dir.
> Kural yoluyla: $Y' = 2tU_1 - U_3$ (Örnek 10.13) ve Z'nin koordinatları $(0, 1 - t^2, t)$ olduğundan $Z' = -2tU_2 + U_3$. O hâlde
>
> $$Y' \cdot Z = 2t \cdot 0 + 0 \cdot (1 - t^2) + (-1) \cdot t = -t,$$
>
> $$Y \cdot Z' = t^2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2t) + (-t) \cdot 1 = -t.$$
>
> Toplam $-2t$: iki yol uyuşur. $t = 2$'de her ikisi de -4 verir.
> ■

İç çarpım kuralının en çok kullanılacak sonucu şudur.

Lemma 10.2 (Sabit İç Çarpım ve Sabit Uzunluk). *Y ve Z, bir eğri üzerinde vektör alanları olsun.*
Eğer $Y \cdot Z$ fonksiyonu sabitse $Y' \cdot Z + Y \cdot Z' = 0$, yani $Y' \cdot Z = -Y \cdot Z'$ olur.
Eğer Y'nin uzunluğu $\| Y \|$ sabitse Y ile Y' her noktada diktir: her t için $Y(t) \cdot Y'(t) = 0$.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Sabit bir fonksiyonun türevi sıfırdır. $Y \cdot Z$ *sabitse Lemma 10.1'nin iç çarpım kuralına göre*

$$0 = (Y \cdot Z)' = Y' \cdot Z + Y \cdot Z'$$

olur; bu da ilk iddiadır.
$\| Y \| = c$ *sabitse* $Y \cdot Y = \| Y \|^2 = c^2$ *de sabittir. İlk iddiayı* $Z = Y$ *ile uygularsak* $Y' \cdot Y + Y \cdot Y' = 0$*, iç çarpımın simetrisiyle* $2\,Y \cdot Y' = 0$*, yani* $Y \cdot Y' = 0$ *çıkar. İç çarpımı sıfır olan iki vektör diktir;* $Y(t)$ *ya da* $Y'(t)$ *sıfır vektör olsa bile diklik iç çarpımın sıfır olması anlamında geçerlidir.*
■

Yani uzunluğunu değiştirmeden dönen bir ok, ancak kendisine dik yönde değişebilir. Bu gözlem, birim hızlı bir eğride hız alanı $T = \beta'$'nün türevinin daima T'ye dik olduğunu söyler; eğrilik kavramı tam buradan doğacaktır.

Örnek 10.17 (Dönen Birim Ok Türevine Diktir). Herhangi bir $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi üzerinde $Y = \cos t\, U_1 + \sin t\, U_2$ alanı verilsin. $\| Y \|$'nin sabit olduğunu görelim, $Y \cdot Y' = 0$ eşitliğini doğrudan hesapla doğrulayalım ve $t = \pi/3$ anındaki vektörleri yazalım.

Çözüm.
$\| Y(t) \|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olduğundan Y birim uzunlukludur; lemmaya göre $Y \cdot Y' = 0$ olmalıdır. Doğrudan: $Y' = -\sin t\, U_1 + \cos t\, U_2$ ve

$$Y \cdot Y' = \cos t\,(-\sin t) + \sin t \cos t + 0 = 0.$$

$t = \pi/3$'te Y'nin vektör kısmı $(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$, Y''nün vektör kısmı $(-\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$'dır; iç çarpımları $-\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 = 0$. Karşı örnek olarak $W = tU_1$ alanına bakalım: $\| W \| = |\, t \,|$ sabit değildir ve $W \cdot W' = t \cdot 1 = t$, sıfırdan farklıdır.
■

10.5 Paralel Alanlar ve Sıfır Türevler

Teğet vektörler bölümünde vektör kısımları aynı, uygulama noktaları farklı olan teğet vektörlere paralel demiştik. Eğri üzerinde bir alanın bütün okları birbirine paralelse alan, eğri boyunca "kendini taşıyan" tek bir oktur.

Tanım 10.5 (Paralel Vektör Alanı). Bir eğri üzerindeki Y vektör alanının bütün değerleri birbirine paralelse, yani her $t_1, t_2 \in I$ için $Y(t_1)$ ile $Y(t_2)$ teğet vektörlerinin vektör kısımları aynıysa Y'ye **paralel** (parallel) vektör alanı denir.

Yani paralel bir alan, eğri boyunca yönünü ve uzunluğunu hiç değiştirmeyen bir oktur; yalnızca kuyruğu hareket eden noktayla birlikte gider.

Lemma 10.3 (Paralellik Koordinatların Sabitliğidir). *Bir eğri üzerindeki* $Y = \sum_i y_i U_i$ *vektör alanı paraleldir ancak ve ancak Öklid koordinat fonksiyonları* y_1, y_2, y_3 *sabit fonksiyonlardır. Bu durumda ortak vektör kısmı* (c_1, c_2, c_3) *ise her* t *için*

$$Y(t) = (c_1, c_2, c_3)_{\alpha(t)} = \sum_i c_i\, U_i\,\big(\,\alpha(t)\,\big)$$

olur.

İspat.
Y *paralel olsun.* I*'da bir* t_0 *seçip* $Y(t_0)$*'ın vektör kısmına* (c_1, c_2, c_3) *diyelim. Paralellik gereği her* t *için* $Y(t)$*'nin vektör kısmı da* (c_1, c_2, c_3)*'tür; vektör kısmının koordinatları* $y_i(t)$ *olduğundan her* t *için* $y_i(t) = c_i$*, yani* y_i *sabittir.*
Tersine y_i*'ler sabit, değerleri* c_i *olsun. O zaman her* t *için* $Y(t)$*'nin vektör kısmı* (c_1, c_2, c_3)*'tür; iki değerin vektör kısımları aynı olduğundan* Y *paraleldir. Yazım* $Y(t) = \sum_i y_i(t) U_i(\alpha(t))$ *eşitliğinden çıkar.*

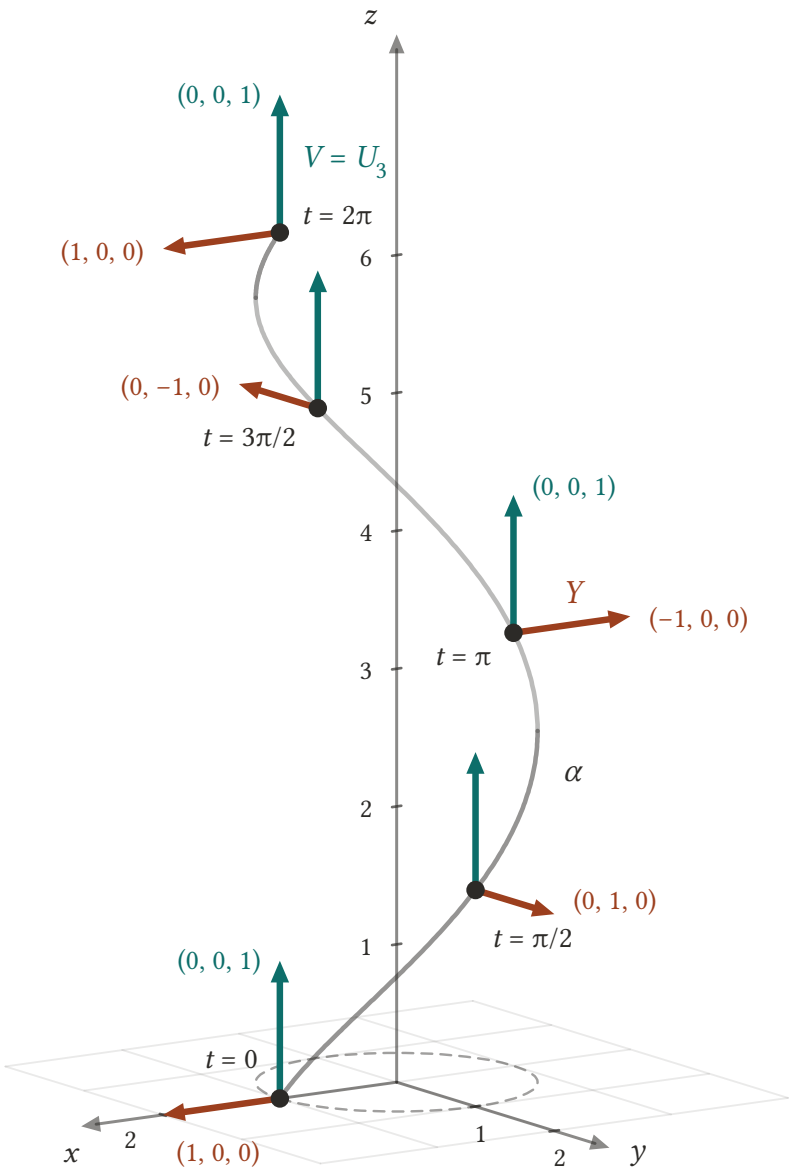
 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 10.18 (Helis Üzerinde Paralel ve Paralel Olmayan Alanlar). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde $V = U_3$ (düşey birim ok) ve $Y = \cos t\, U_1 + \sin t\, U_2$ (radyal ok) alanlarından hangisinin paralel olduğunu belirleyelim.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $0, 0, 1$ sabittir; lemmaya göre V paraleldir. Her $\alpha(t)$ noktasında aynı $(0, 0, 1)$ oku dikilir; ok helisle birlikte yükselir ama yönü ve uzunluğu değişmez.
Y'nin koordinat fonksiyonları $\cos t$, $\sin t$, 0'dır ve ilk ikisi sabit değildir: $t = 0$'da vektör kısmı $(1, 0, 0)$, $t = \pi/2$'de $(0, 1, 0)$. İki değer paralel olmadığından Y paralel bir alan değildir; ok, helis döndükçe onunla birlikte döner. Uzunluğu sabit (1) olsa da paralel değildir: paralellik yönün de sabit kalmasını ister.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.5: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde iki vektör alanı, $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ noktalarında. Yeşil oklar $V = U_3$ alanının değerleridir: her birinin vektör kısmı (0, 0, 1)'dir, oklar birbirinin ötelenmiş kopyasıdır; V paraleldir. Turuncu oklar $Y = \cos t\, U_1 + \sin t\, U_2$ alanının değerleridir: vektör kısımları (1, 0, 0), (0, 1, 0), (−1, 0, 0), (0, −1, 0), (1, 0, 0) diye helisle birlikte döner; uzunluk hep 1 olsa da yön değiştiği için Y paralel değildir.

■

Analizde bir türevin sıfır olması daima önemli bir bilgidir. Önce tek değişkenli analizden temel olguyu hatırlayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Türevi sıfır olan fonksiyon sabittir

g, bir I aralığında türevlenebilir ve her $t \in I$ için $g'(t) = 0$ ise g sabittir. Nedeni ortalama değer teoremidir: I'da $t_0 \neq t$ alalım; t_0 ile t arasında bir c sayısı için $g(t) - g(t_0) = g'(c)(t - t_0) = 0$, yani $g(t) = g(t_0)$. Tersi apaçıktır: sabit fonksiyonun türevi sıfırdır. Tanım kümesinin bir aralık olması önemlidir; iki ayrı parçadan oluşan bir kümede türevi sıfır olan fonksiyon parçalarda farklı sabitler alabilir.

Bu olguyu eğrilere ve alanlara üç biçimde uygulayalım.

Lemma 10.4 (Sıfır Türevlerin Üç Anlamı). *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri, Y de α üzerinde bir vektör alanı olsun.*
(1) *α sabittir ancak ve ancak hızı sıfırdır: $\alpha' = 0$.*
(2) *α sabit değilse, α bir doğrudur ancak ve ancak ivmesi sıfırdır: $\alpha'' = 0$.*
(3) *Y paraleldir ancak ve ancak türevi sıfırdır: $Y' = 0$.*
Burada $\alpha' = 0$, her t için $\alpha'(t)$'nin $\alpha(t)$ noktasındaki sıfır teğet vektör olması demektir; öteki eşitlikler de öyle okunur.

> ***İspat.***
> *Her durumda Öklid koordinat fonksiyonlarına bakmak yeter, çünkü bir teğet vektör tam olarak vektör kısmının üç koordinatı sıfır olduğunda sıfırdır.*
> ***(1)*** *$\alpha' = 0$ olması, her i ve her t için $\alpha_i'(t) = 0$ demektir. Yukarıdaki nota göre bu, her α_i'nin sabit olmasına denktir. Üç koordinat fonksiyonu da sabitse α sabit bir noktadır; α sabitse koordinatları sabittir ve türevleri sıfırdır.*
> ***(2)*** *Önce doğrunun ivmesinin sıfır olduğunu görelim. $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ ise $\alpha_i(t) = p_i + tq_i$ birinci dereceden polinomdur, birinci türevi sabit q_i, ikinci türevi 0'dır; $\alpha'' = 0$.*
> *Tersine $\alpha'' = 0$ olsun; yani her i için $\alpha_i'' = (\alpha_i')' = 0$. Nota göre α_i' sabittir; değerine q_i diyelim. Şimdi $g_i(t) = \alpha_i(t) - q_i t$ fonksiyonuna bakalım: türevi $\alpha_i'(t) - q_i = 0$, dolayısıyla g_i de sabittir; değerine p_i diyelim. Böylece her t için*
>
> $$\alpha_i(t) = p_i + tq_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$
>
> *yani $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ve $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ ile $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ olur. α sabit olmadığından $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$'dır (aksi hâlde $\alpha(t) = \mathbf{p}$ olurdu). Dolayısıyla α, $\mathbf{p}$'den geçen $\mathbf{q}$ doğrultulu doğrudur (Örnek 4.1).*
> ***(3)*** *$Y' = 0$ olması, her i için $y_i' = 0$ demektir; nota göre bu, her y_i'nin sabit olmasına denktir; Lemma 10.3'a göre de bu, Y'nin paralel olmasına denktir.*
> ■

Yani hızı sıfır olan nokta yerinde durur, ivmesi sıfır olan nokta doğru boyunca gider, türevi sıfır olan ok kendini taşır. Lemmayı iki örnekle kullanalım.

Örnek 10.19 (İvmesi Sıfır Olan Eğriyi Bulmak). $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir α eğrisinin ivmesi her yerde sıfır, $\alpha(0) = (1, 2, 0)$ ve $\alpha'(0)$'ın vektör kısmı $(2, -1, 3)$ olsun. α'yı bulalım.

> **Çözüm.**
> $\alpha'(0) \neq \mathbf{0}$ olduğundan α sabit değildir; lemmanın (2) maddesine göre $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ biçiminde bir doğrudur. İspattaki gösterimle $\mathbf{q}$, sabit olan hız vektör kısmıdır: $\mathbf{q} = (2, -1, 3)$. $\mathbf{p} = \alpha(0) = (1, 2, 0)$. Dolayısıyla
>
> $$\alpha(t) = (1 + 2t, 2 - t, 3t).$$
>
> Denetim: $\alpha(0) = (1, 2, 0)$, hızın vektör kısmı $(2, -1, 3)$, ikinci türevler sıfır. Bu, Örnek 4.1'daki sayısal doğrunun kendisidir. Lemma ayrıca tekliği söyler: bu iki başlangıç verisine sahip ve ivmesi sıfır olan başka eğri yoktur.
> ■

Örnek 10.20 (Türevi Sıfır Olan Alan). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde $Y(t)$, $\alpha(t)$'den $\alpha(t) + (2, -1, 3)$ noktasına giden ok olsun. $Y' = 0$ olduğunu gösterelim ve bunu lemmanın (3) maddesiyle yorumlayalım. Ayrıca hız alanı α' için $(\alpha')'$'nün sıfır olmadığını görelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$Y(t)$'nin vektör kısmı, ucu ile kuyruğunun farkı olan $(2,-1,3)$'tür; koordinat fonksiyonları $2,-1,3$ sabit olduğundan $Y' = 0\cdot U_1 + 0\cdot U_2 + 0\cdot U_3 = 0$. Lemmanın (3) maddesi Y'nin paralel olduğunu söyler; gerçekten bütün okların vektör kısmı aynıdır.
Hız alanının koordinatları $-\sin t, \cos t, 1$'dir; türevi $\alpha'' = -\cos t\, U_1 - \sin t\, U_2$, sıfır değildir (uzunluğu 1'dir). Lemmaya göre α' paralel bir alan değildir: helisin hız vektörü sürekli döner. Hız alanının uzunluğu $\sqrt{2}$ sabittir; Lemma 10.2 gereği $\alpha'\cdot\alpha'' = 0$ olmalıdır ve $\sin t\cos t - \cos t\sin t + 0 = 0$ bunu doğrular.
■

10.6 Alıştırmalar

Alıştırma 10.1 (Bir Kübik Eğrinin Hızı, Sürati ve İvmesi). $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ eğrisinin hız vektörünü, süratini ve ivmesini genel t için ve $t=1$ anında bulunuz.

Çözüm.
Koordinat türevleri 2, $2t$, t^2; ikinci türevler 0, 2, $2t$. Dolayısıyla

$$\alpha'(t) = (2,\,2t,\,t^2)_{\alpha(t)}, \qquad \alpha''(t) = (0,\,2,\,2t)_{\alpha(t)}.$$

Süratin karesi $4 + 4t^2 + t^4 = (t^2+2)^2$'dir; $t^2+2>0$ olduğundan

$$v(t) = \| \alpha'(t) \| = t^2 + 2.$$

Sürat hiçbir zaman 2'nin altına inmez; eğri düzgündür. $t=1$'de $\alpha(1) = (2,1,1/3)$, hızın vektör kısmı $(2,2,1)$, sürat $v(1) = 3$ (denetim: $\sqrt{4+4+1} = 3$), ivmenin vektör kısmı $(0,2,2)$.
■

Alıştırma 10.2 (Bir Kübik Eğrinin Yay Uzunluğu Fonksiyonu). $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ eğrisinin $t=0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu $s = s(t)$'yi bulunuz ve α'nın $t=-1$'den $t=1$'e yay uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm.
Sürat $v(u) = u^2 + 2$'dir (Alıştırma 10.1). Tanıma göre

$$s(t) = \int_0^t (u^2+2)\,du = \frac{t^3}{3} + 2t.$$

$t=-1$'den $t=1$'e yay uzunluğu, s'nin bu iki noktadaki değerlerinin farkıdır (ya da doğrudan $\int_{-1}^{1}(u^2+2)\,du$):

$$s(1) - s(-1) = \left(\frac{1}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{14}{3}.$$

Uç noktalar $\alpha(-1) = (-2,1,-1/3)$ ve $\alpha(1) = (2,1,1/3)$'tür; aralarındaki uzaklık $\sqrt{16 + 0 + 4/9} \approx 4{,}06$, yay uzunluğu $14/3 \approx 4{,}67$'den küçüktür.
■

Alıştırma 10.3 (Sabit Sürat ile İvmenin Hıza Dikliği). Bir eğrinin süratinin sabit olması için gerek ve yeter koşulun, ivmesinin her anda hızına dik olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
α bir eğri, $v = \| \alpha' \|$ sürati olsun. $v^2 = \alpha'\cdot\alpha'$'dir. Lemma 10.1'nin iç çarpım kuralını $Y = Z = \alpha'$ ile uygularsak

$$(v^2)' = (\alpha'\cdot\alpha')' = \alpha''\cdot\alpha' + \alpha'\cdot\alpha'' = 2\,\alpha'\cdot\alpha''.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi denklik zincirini kuralım. v sabittir ancak ve ancak v^2 sabittir: v sabitse karesi de sabittir; $v^2 = k$ sabitse $v \geq 0$ olduğundan $v = \sqrt{k}$ sabittir. v^2 sabittir ancak ve ancak $(v^2)' = 0$'dır (türevi sıfır olan fonksiyon sabittir ve tersi). Yukarıdaki formülle $(v^2)' = 0$, her t için $\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$ olmasına, yani ivmenin hıza dik olmasına denktir.
Denetim: helisin ivmesi hıza diktir ve sürati sabittir (Örnek 10.20); $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ eğrisinde ise $\alpha' \cdot \alpha'' = 0 + 4t + 2t^3$, $t \neq 0$ için sıfır değildir ve sürat $t^2 + 2$ sabit değildir.
■

Alıştırma 10.4 (Hiperbolik Eğrinin Yay Uzunluğu Fonksiyonu). $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ eğrisinin $t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonunun $s(t) = \sqrt{2}\sinh t$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$(\cosh)' = \sinh$ ve $(\sinh)' = \cosh$ olduğundan hızın vektör kısmı $(\sinh t, \cosh t, 1)$'dir. Süratin karesi $\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1$; $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ özdeşliğinden $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$, dolayısıyla

$$\| \alpha'(t) \|^2 = 2\cosh^2 t, \qquad v(t) = \sqrt{2}\cosh t$$

($\cosh t > 0$ olduğundan karekök işaretsiz alınır). $t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\cosh u \, du = \sqrt{2}\,\big[\sinh u\big]_0^t = \sqrt{2}\sinh t,$$

çünkü $\sinh 0 = 0$.
■

Alıştırma 10.5 (Hiperbolik Eğrinin Birim Hızlı Yeniden Parametrelendirmesi). $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ eğrisinin birim hızlı bir yeniden parametrelendirmesini bulunuz ve süratinin 1 olduğunu doğrudan denetleyiniz.

Çözüm.
$t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu $s(t) = \sqrt{2}\sinh t$'dir (Alıştırma 10.4). sinh, $\mathbb{R}$'yi $\mathbb{R}$'ye birebir ve örten götürdüğünden $J = \mathbb{R}$'dir ve ters fonksiyon $\sinh t = s/\sqrt{2}$ denkleminin çözümüdür. Bu denklemi açıkça çözelim: $x = s/\sqrt{2}$ için $e^t - e^{-t} = 2x$, e^t ile çarpıp $(e^t)^2 - 2x\,e^t - 1 = 0$ elde ederiz; pozitif kök $e^t = x + \sqrt{x^2+1}$, yani

$$t(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{s^2}{2} + 1} \right).$$

$\beta(s) = \alpha(t(s))$'nin koordinatları: ikinci koordinat $\sinh t(s) = s/\sqrt{2}$; birinci koordinat, $\cosh > 0$ olduğundan, $\cosh t(s) = \sqrt{1 + \sinh^2 t(s)}$, yani $\sqrt{1 + s^2/2}$; üçüncü koordinat $t(s)$. Böylece

$$\beta(s) = \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}},\ \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{2}} \right) \right).$$

Doğrudan denetim. $r(s) = \sqrt{1 + s^2/2}$ yazalım; $r' = (s/2)/r$. Üçüncü koordinatta $g(s) = s/\sqrt{2} + r(s)$ için

$$g' = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{s}{2r} = \frac{r + s/\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,r} = \frac{g}{\sqrt{2}\,r},$$

dolayısıyla $(\log g)' = g'/g = 1/(\sqrt{2}\,r)$. Koordinat türevleri

$$\beta'(s) = \left(\frac{s}{2r},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}\,r} \right)_{\beta(s)}$$

ve kareler toplamı

$$\frac{s^2}{4r^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2r^2}=\frac{s^2/4+1/2}{1+s^2/2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+s^2/2}{1+s^2/2}+\frac{1}{2}=1.$$

β birim hızlıdır. Sayısal bir denetim: $s=1$ için

$$t(1)=\log(0{,}707+1{,}225)\approx 0{,}658,$$
$$\beta(1)\approx(1{,}225;\,0{,}707;\,0{,}658)=\alpha(0{,}658).$$

■

Alıştırma 10.6 (Logaritmalı Eğri İki Noktadan Geçer). $I:t>0$ üzerinde $\alpha(t)=(2t,t^2,\log t)$ eğrisinin $\mathbf{p}=(2,1,0)$ ve $\mathbf{q}=(4,4,\log 2)$ noktalarından geçtiğini, geçiş anlarını bularak gösteriniz.

Çözüm.
$\alpha(t)=\mathbf{p}$ olması için önce birinci koordinattan $2t=2$, yani $t=1$ gerekir; gerçekten $\alpha(1)=(2,1,\log 1)=(2,1,0)=\mathbf{p}$. Benzer biçimde $2t=4$ için $t=2$ ve $\alpha(2)=(4,4,\log 2)=\mathbf{q}$. Birinci koordinat fonksiyonu $2t$ birebir olduğundan eğri her iki noktadan yalnızca bir kez geçer: $\mathbf{p}$'den $t=1$'de, $\mathbf{q}$'dan $t=2$'de. Her iki an I'dadır.
■

Alıştırma 10.7 (Logaritmalı Eğrinin İki Nokta Arasındaki Uzunluğu). $I:t>0$ üzerinde $\alpha(t)=(2t,t^2,\log t)$ eğrisinin $\mathbf{p}=(2,1,0)=\alpha(1)$ noktasından $\mathbf{q}=(4,4,\log 2)=\alpha(2)$ noktasına yay uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.
Hızın vektör kısmı $(2,2t,1/t)$'dir; süratin karesi

$$4+4t^2+\frac{1}{t^2}=\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2,$$

çünkü $\left(2t+1/t\right)^2=4t^2+4+1/t^2$. $t>0$ iken $2t+1/t>0$ olduğundan $v(t)=2t+1/t$. Yay uzunluğu

$$\int_1^2\left(2t+\frac{1}{t}\right)dt=\Big[\,t^2+\log t\,\Big]_1^2=(4+\log 2)-(1+0)=3+\log 2\approx 3{,}693.$$

Karşılaştırma: $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$ arasındaki uzaklık

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q})=\sqrt{4+9+(\log 2)^2}\approx\sqrt{13{,}48}\approx 3{,}672$$

olur; eğri boyunca gidilen yol, beklendiği gibi, biraz daha uzundur.
■

Alıştırma 10.8 (İki Birim Hızlı Yeniden Parametrelendirme Bir Kaydırmayla Ayrılır). $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ düzgün bir eğri; $\beta_1=\alpha(h_1):J_1\to\mathbb{R}^3$ ve $\beta_2=\alpha(h_2):J_2\to\mathbb{R}^3$, α'nın yön koruyan, birim hızlı ve rotanın tamamını dolaşan ($h_1(J_1)=h_2(J_2)=I$) iki yeniden parametrelendirmesi olsun. Her $s\in J_2$ için $\beta_2(s)=\beta_1(s+s_0)$ olacak biçimde bir s_0 sayısı bulunduğunu gösteriniz ve s_0'ın geometrik anlamını açıklayınız.

Çözüm.
Önce $h_i'>0$ olduğunu görelim. Lemma 4.1'ne göre $\beta_i'=h_i'\,\alpha'(h_i)$, dolayısıyla $1=\|\,\beta_i'\,\|=|\,h_i'\,|\,v(h_i)$. Sağdaki $v(h_i)>0$ olduğundan $h_i'\neq 0$; yön koruma $h_i'\geq 0$ verdiğinden $h_i'>0$'dır.
I'da bir a sabitleyip $t=a$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonunu $\ell(t)=\int_a^t v(u)\,du$ ile, tersini $t(\cdot)$ ile ve standart birim hızlı yeniden parametrelendirmeyi $\beta=\alpha(t(\cdot))$ ile gösterelim (Teorem 10.1). $i=1,2$ için $g_i(s)=\ell(h_i(s))$, $s\in J_i$, bileşkesine bakalım. Zincir kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$g_i'(s) = \ell'(h_i(s))\,h_i'(s) = v(h_i(s))\,h_i'(s) = \mid h_i'(s) \mid \| \alpha'(h_i(s)) \| = \| \beta_i'(s) \| = 1.$$

O hâlde $g_i(s) - s$ fonksiyonunun türevi sıfırdır; J_i bir aralık olduğundan bu fonksiyon sabittir: $g_i(s) = s + c_i$. Yani $\ell(h_i(s)) = s + c_i$; iki tarafa ℓ'nin tersini uygularsak $h_i(s) = t(s + c_i)$ ve

$$\beta_i(s) = \alpha\,\big(\,t(s+c_i)\,\big) = \beta(s + c_i), \qquad s \in J_i.$$

Şimdi $s_0 = c_2 - c_1$ diyelim. $s \in J_2$ için

$$\beta_2(s) = \beta(s + c_2) = \beta\,\big(\,(s + s_0) + c_1\,\big) = \beta_1(s + s_0),$$

yeter ki $s + s_0 \in J_1$ olsun. Bunu görelim: h_i, J_i'yi I'nın tamamına götürdüğünden $g_i = \ell(h_i)$, J_i'yi $\ell(I) = J$'ye götürür; $g_i(s) = s + c_i$ olduğundan $J_i + c_i = J$. Böylece $J_2 + c_2 = J_1 + c_1$, yani $J_1 = J_2 + s_0$: $s \in J_2$ iken $s + s_0 \in J_1$'dir.
Geometrik anlam. $s = 0 \in J_2$ ise $\beta_2(0) = \beta_1(s_0)$'dır: β_2'nin başlangıç noktası, β_1'in saati s_0'ı gösterdiğinde bulunduğu yerdir. β_1 birim hızlı olduğundan (Önerme 10.1) s_0, rota üzerinde $\beta_1(0)$'dan $\beta_2(0)$'a olan işaretli yay uzunluğudur. İki birim hızlı yolculuk aynı yolculuktur; yalnızca saatleri s_0 kadar farklı kurulmuştur. Özel olarak β_1 ve β_2 teoremin yöntemiyle $t = a_1$ ve $t = a_2$ tabanlı kurulmuşsa $s_0 = \int_{a_1}^{a_2} v(u)\,du$, iki taban noktası arasındaki yay uzunluğudur: $h_i(0) = a_i$ olduğundan $c_i = g_i(0) = \ell(a_i)$ ve $s_0 = \ell(a_2) - \ell(a_1)$.
■

Alıştırma 10.9 (Helis Üzerinde Orijine Bakan Alan). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde $Y(t)$, $\alpha(t)$ noktasından $\mathbb{R}^3$'ün orijinine giden ok olsun. Y'yi $\sum_i y_i U_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
$\alpha(t)$'den $\mathbf{0}$'a giden okun vektör kısmı, ucu ile kuyruğunun farkı $\mathbf{0} - \alpha(t) = (-\cos t, -\sin t, -t)$'dir. Dolayısıyla

$$Y(t) = -\cos t\,U_1 - \sin t\,U_2 - t\,U_3.$$

Denetim: $t = 0$'da $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ ve $Y(0)$'ın vektör kısmı $(-1, 0, 0)$; ok gerçekten orijine varır. Uzunluğu $\sqrt{1 + t^2}$, nokta yükseldikçe büyür.
■

Alıştırma 10.10 (Helis Üzerinde Hız Eksi İvme). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde $Y(t) = \alpha'(t) - \alpha''(t)$ olsun. Y'yi $\sum_i y_i U_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
Hızın vektör kısmı $(-\sin t, \cos t, 1)$, ivmenin vektör kısmı $(-\cos t, -\sin t, 0)$'dır. Fark koordinat koordinat alınır:

$$Y(t) = (\cos t - \sin t)\,U_1 + (\cos t + \sin t)\,U_2 + U_3.$$

Örneğin $t = 0$'da $Y(0) = U_1 + U_2 + U_3$, vektör kısmı $(1, 1, 1)$.
■

Alıştırma 10.11 (Helis Üzerinde Hıza ve İvmeye Dik Birim Alan). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde $Y(t)$, birim uzunluklu ve hem $\alpha'(t)$'ye hem $\alpha''(t)$'ye dik olsun. Y'yi $\sum_i y_i U_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
$\alpha'(t)$ ve $\alpha''(t)$'nin vektör kısımları $\mathbf{v} = (-\sin t, \cos t, 1)$ ve $\mathbf{w} = (-\cos t, -\sin t, 0)$'dır. İç çarpımları $\sin t \cos t - \cos t \sin t + 0 = 0$, uzunlukları $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{2}$, $\| \mathbf{w} \| = 1$. İkisine de dik bir vektör bulmanın aracı vektörel çarpımdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t\, U_1 - \cos t\, U_2 + U_3,$$

çünkü ilk satıra göre açılım

$$(\cos t \cdot 0 + \sin t)\, U_1 - (0 + \cos t)\, U_2 + (\sin^2 t + \cos^2 t)\, U_3$$

verir. Lemma 9.5'ne göre $\mathbf{n}$ hem $\mathbf{v}$'ye hem $\mathbf{w}$'ye diktir ve $\| \mathbf{n} \|^2 = \| \mathbf{v} \|^2 \| \mathbf{w} \|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 = 2$, yani $\| \mathbf{n} \| = \sqrt{2}$.
Şimdi $\mathbf{v}$'ye ve $\mathbf{w}$'ye dik her vektörün $\mathbf{n}$'nin katı olduğunu görelim. $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n}$ karşılıklı dik ve sıfırdan farklı olduğundan lineer bağımsızdır (bir bağıntıyı sırayla her biriyle iç çarpmak katsayıları sıfırlar) ve $\mathbb{R}^3$'ün bir tabanıdır. $Y(t)$'nin vektör kısmını $\mathbf{y} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + c\mathbf{n}$ yazalım. $\mathbf{y} \cdot \mathbf{v} = 0$ koşulu $2a = 0$, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{w} = 0$ koşulu $b = 0$ verir; kalan $\mathbf{y} = c\mathbf{n}$ ve $\| \mathbf{y} \| = |\, c \,| \sqrt{2} = 1$'den $c = \pm 1/\sqrt{2}$. İki çözüm vardır:

$$Y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin t\, U_1 - \cos t\, U_2 + U_3 \right).$$

İşaret t'den bağımsız seçilirse Y türevlenebilir bir alandır; ikisi de koşulu sağlar.
■

Alıştırma 10.12 (Helis Üzerinde Yarım Tur İlerisine Bakan Alan). $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisi üzerinde $Y(t)$, $\alpha(t)$ noktasından $\alpha(t + \pi)$ noktasına giden ok olsun. Y'yi $\sum_i y_i U_i$ biçiminde yazınız.

Çözüm.
$\cos(t + \pi) = -\cos t$ ve $\sin(t + \pi) = -\sin t$ olduğundan

$$\alpha(t + \pi) = (-\cos t, -\sin t, t + \pi).$$

Okun vektör kısmı

$$\alpha(t + \pi) - \alpha(t) = (-2\cos t, -2\sin t, \pi),$$

yani

$$Y(t) = -2\cos t\, U_1 - 2\sin t\, U_2 + \pi\, U_3.$$

Ok, silindirin çapı boyunca karşı tarafa geçip π kadar yükselir; uzunluğu $\sqrt{4 + \pi^2} \approx 3{,}72$ sabittir. $\| Y \|$ sabit olduğundan Lemma 10.2 gereği $Y \cdot Y' = 0$ olmalıdır: $Y' = 2\sin t\, U_1 - 2\cos t\, U_2$ ve

$$Y \cdot Y' = -4\cos t \sin t + 4 \sin t \cos t + 0 = 0.$$

■

Alıştırma 10.13 (Monoton Yeniden Parametrelendirme Uzunluğu Değiştirmez). $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ bir eğri parçası, $h : [c, d] \to [a, b]$ türevlenebilir olsun. $\alpha(h) : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ yeniden parametrelendirmesine, ya $h' \geq 0$, $h(c) = a$, $h(d) = b$ ise ya da $h' \leq 0$, $h(c) = b$, $h(d) = a$ ise **monoton** (monotone) denir. Monoton bir yeniden parametrelendirmenin yay uzunluğunu değiştirmediğini, yani $L(\alpha(h)) = L(\alpha)$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
$\beta = \alpha(h)$ ve $v = \| \alpha' \|$ olsun. Lemma 4.1'ne göre $\beta'(u) = h'(u)\, \alpha'(h(u))$; norm alırken skaler mutlak değeriyle dışarı çıkar:

$$\| \beta'(u) \| = |\, h'(u) \,|\, v(h(u)).$$

Bir değişken değiştirme formülüne ihtiyacımız var: $G(t) = \int_a^t v$ dersek zincir kuralıyla $(G(h))'(u) = v(h(u))\, h'(u)$, dolayısıyla analizin temel teoremiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_c^d v(h(u))\,h'(u)\,du = G(h(d)) - G(h(c)) = \int_{h(c)}^{h(d)} v(t)\,dt.$$

Birinci durum: $h' \geq 0$, $h(c) = a$, $h(d) = b$. Bu durumda $\mid h' \mid = h'$ ve

$$L(\beta) = \int_c^d h'(u)\,v(h(u))\,du = \int_a^b v(t)\,dt = L(\alpha).$$

İkinci durum: $h' \leq 0$, $h(c) = b$, $h(d) = a$. Bu durumda $\mid h' \mid = -h'$ ve

$$L(\beta) = -\int_c^d h'(u)\,v(h(u))\,du = -\int_b^a v(t)\,dt = \int_a^b v(t)\,dt = L(\alpha).$$

Her iki durumda uzunluk korunur: rota aynı yönde ya da ters yönde, ama geri dönmeden dolaşıldığı sürece gidilen yol değişmez. Monotonluk koşulu gereklidir; h önce ileri sonra geri gitse rotanın bir kısmı iki kez sayılır ve $L(\beta) > L(\alpha)$ olabilir.
■

Alıştırma 10.14 (Bir Alanın Yeniden Parametrelendirmesi). Y, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi üzerinde bir vektör alanı ve $\alpha(h) : J \to \mathbb{R}^3$, α'nın bir yeniden parametrelendirmesi olsun. $Y(h)(s) = Y(h(s))$ kuralıyla tanımlanan $Y(h)$'nin $\alpha(h)$ eğrisi üzerinde bir vektör alanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$s \in J$ için $Y(h(s))$, Y'nin $h(s) \in I$ anındaki değeridir; tanım gereği $\alpha(h(s))$ noktasında bir teğet vektördür. Oysa $\alpha(h(s))$, tam olarak $\alpha(h)$ eğrisinin s anındaki noktasıdır. Dolayısıyla $Y(h)$, J'deki her s sayısına $(\alpha(h))(s)$ noktasında bir teğet vektör bağlar: $\alpha(h)$ üzerinde bir vektör alanıdır. Koordinat fonksiyonları $y_i(h(s))$ bileşkeleridir; türevlenebilir fonksiyonların bileşkesi olduklarından türevlenebilirdir, yani alanlar için kabul ettiğimiz türevlenebilirlik koşulu da sağlanır. Örneğin $Y = \alpha'$ ise $Y(h) = \alpha'(h)$, $\alpha(h)$ üzerinde bir alandır; ama $\alpha(h)$'nin hızı değildir, hız $h'\,\alpha'(h)$'dir.
■

Alıştırma 10.15 (Alanlar İçin Zincir Kuralı). $Y, \alpha : I \to \mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı ve $\alpha(h) : J \to \mathbb{R}^3$ bir yeniden parametrelendirme olsun. $Y(h)$ alanı için $Y(h)' = h'\,Y'(h)$ zincir kuralını ispatlayınız.

Çözüm.
$Y = \sum_i y_i U_i$ yazalım. $Y(h)$'nin koordinat fonksiyonları $y_i(h)$'dir ve $Y(h)$'nin s anındaki değeri $\alpha(h(s))$ noktasındaki doğal çatı cinsinden yazılır. Türev tanımına göre $Y(h)'$, koordinat fonksiyonlarının türevlerinden oluşur; tek değişkenli zincir kuralı $\big(\,y_i(h)\big)'(s) = y_i'(h(s))\,h'(s)$ verir. O hâlde

$$\begin{aligned} Y(h)'(s) &= \sum_i y_i'(h(s))\,h'(s)\,U_i\,\big(\,\alpha(h(s))\,\big) \\ &= h'(s)\sum_i y_i'(h(s))\,U_i\,\big(\,\alpha(h(s))\,\big)\,. \end{aligned}$$

Sağdaki toplam, $Y' = \sum_i y_i' U_i$ alanının $h(s)$ anındaki değeridir, yani $Y'(h)(s)$. Böylece $Y(h)' = h'\,Y'(h)$.
Sayısal bir denetim: $Y = t^2 U_1 - tU_3$ ve $h(s) = 2s$ için $Y(h) = 4s^2 U_1 - 2sU_3$, türevi $8sU_1 - 2U_3$. Öte yandan $Y' = 2tU_1 - U_3$, $Y'(h) = 4sU_1 - U_3$ ve $h' = 2$; çarpım $8sU_1 - 2U_3$, aynı sonuç.
■

Alıştırma 10.16 (İki Eğri Parçasının Uzunluklarını Sayısal Olarak Karşılaştırma). $0 \leq t \leq \pi$ üzerinde

$$\alpha(t) = \big(\sin t, -t^2\cos t, \sin 2t\,\big), \qquad \beta(t) = \big(\,t^2\sin t, t^2, t^2(1+\cos t)\,\big)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

eğri parçalarının ikisinin de orijinden $(0, \pi^2, 0)$ noktasına gittiğini gösteriniz ve hangisinin daha kısa olduğunu sayısal integralle belirleyiniz.

Çözüm.
Uç noktalar: $\alpha(0) = \beta(0) = (0,0,0)$ ve

$$\alpha(\pi) = (\sin\pi, -\pi^2\cos\pi, \sin 2\pi) = (0, \pi^2, 0),$$
$$\beta(\pi) = \big(\, \pi^2\sin\pi, \pi^2, \pi^2(1+\cos\pi)\,\big) = (0, \pi^2, 0).$$

İki parça da aynı iki noktayı birleştirir; aralarındaki uzaklık $\pi^2 \approx 9{,}87$'dir.
Süratler: çarpım kuralıyla $(-t^2\cos t)' = -2t\cos t + t^2\sin t$ ve $(\sin 2t)' = 2\cos 2t$, dolayısıyla

$$v_\alpha(t) = \sqrt{\cos^2 t + (t^2\sin t - 2t\cos t)^2 + 4\cos^2 2t}.$$

β için

$$(t^2\sin t)' = 2t\sin t + t^2\cos t, \qquad \big(\, t^2(1+\cos t)\big)' = 2t(1+\cos t) - t^2\sin t,$$

dolayısıyla

$$v_\beta(t) = \sqrt{(2t\sin t + t^2\cos t)^2 + 4t^2 + \big(\, 2t(1+\cos t) - t^2\sin t\big)^2}.$$

Bu integrallerin ilkelleri elemanter değildir; Simpson kuralını kullanacağız: $[0,\pi]$ aralığını $n = 8$ eşit parçaya bölüp $h = \pi/8$ ve düğümler $t_k = kh$ olmak üzere

$$\int_0^\pi v\,dt \approx \frac{h}{3}\,\big(\, v_0 + 4v_1 + 2v_2 + 4v_3 + 2v_4 + 4v_5 + 2v_6 + 4v_7 + v_8 \,\big).$$

Düğümlerdeki sürat değerleri (üç ondalıkla):

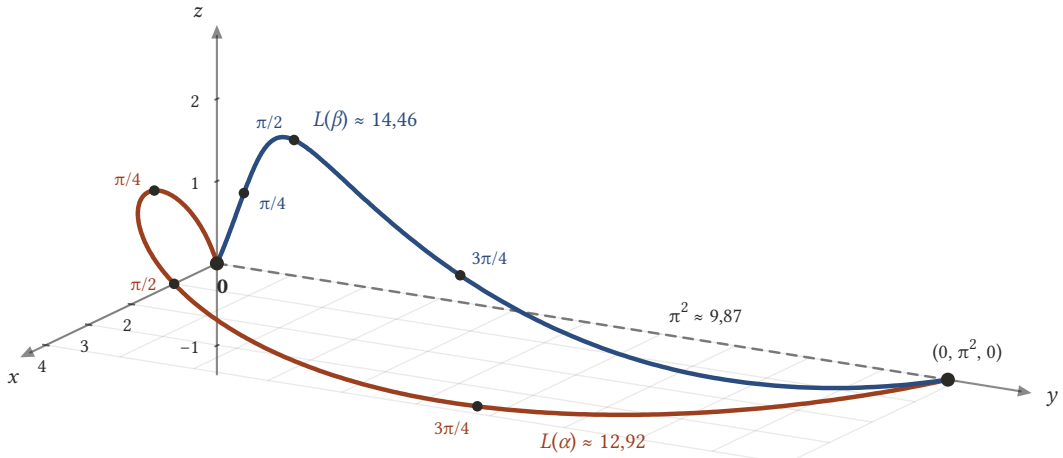
k	t_k	$v_\alpha(t_k)$	$v_\beta(t_k)$	Simpson katsayısı
0	0	2,236	0	1
1	$\pi/8$	1,816	1,709	4
2	$\pi/4$	0,977	3,147	2
3	$3\pi/8$	1,514	4,097	4
4	$\pi/2$	3,176	4,494	2
5	$5\pi/8$	5,272	4,621	4
6	$3\pi/4$	7,292	5,389	2
7	$7\pi/8$	8,148	7,754	4
8	π	6,669	11,700	1

Katsayılı toplamlar α için yaklaşık 98,80, β için 110,48; $h/3 = \pi/24 \approx 0{,}1309$ ile çarpınca

$$L(\alpha) \approx 12{,}93, \qquad L(\beta) \approx 14{,}46.$$

Bölme sayısını 16'ya çıkarmak $L(\alpha) \approx 12{,}92$, $L(\beta) \approx 14{,}46$ verir; değerler oturmuştur. Demek ki α parçası yaklaşık 1,5 birim daha kısadır. İkisi de uç noktalar arasındaki $\pi^2 \approx 9{,}87$ uzaklığından uzundur. β'nın $t = 0$'daki süratinin 0 olması dikkat çekicidir: β orijinde durur, düzgün bir eğri değildir; yine de yay uzunluğu tanımı sorunsuz çalışır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.6: Orijinden $(0, \pi^2, 0) \approx (0, 9{,}87, 0)$ noktasına giden iki eğri parçası: turuncu $\alpha(t) = (\sin t, -t^2 \cos t, \sin 2t)$ ve mavi $\beta(t) = (t^2 \sin t, t^2, t^2(1 + \cos t))$, $0 \le t \le \pi$; noktalar $t = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ anlarını gösterir. Uç noktaları birleştiren kesikli gri doğru parçası y ekseni üzerindedir ve uzunluğu $\pi^2 \approx 9{,}87$'dir; Simpson kuralıyla bulunan $L(\alpha) \approx 12{,}92$ ve $L(\beta) \approx 14{,}46$ bundan büyüktür; α parçası yaklaşık 1,5 birim daha kısadır. β orijinde durur, sonra z yönünde yükselerek geniş bir kavis çizer; α ise önce yükselip $t = \pi/2$'de x ekseni üzerindeki $(1, 0, 0)$ noktasından geçer, ardından xy düzleminin altına iner ve uç noktaya alttan yaklaşır.

■

Alıştırma 10.17 (Hızları Paralel Olan Eğriler Ötelemeyle Ayrılır). $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ eğrilerinin hız vektörleri her t için paralel, yani $\alpha'(t)$ ile $\beta'(t)$'nin vektör kısımları aynı olsun. Her t için $\beta(t) = \alpha(t) + \mathbf{p}$ olacak biçimde bir $\mathbf{p}$ noktası bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\gamma_i = \beta_i - \alpha_i$ koordinat fonksiyonlarıyla $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisini tanımlayalım; türevlenebilir fonksiyonların farkı türevlenebilir olduğundan γ bir eğridir. Hızının vektör kısmı

$$(\beta_1' - \alpha_1', \beta_2' - \alpha_2', \beta_3' - \alpha_3') = \mathbf{0},$$

çünkü varsayım gereği $\beta_i'(t) = \alpha_i'(t)$. Yani $\gamma' = 0$. Lemma 10.4'in (1) maddesine göre γ sabittir; değerine $\mathbf{p}$ diyelim. O zaman her t için $\beta(t) - \alpha(t) = \mathbf{p}$, yani $\beta(t) = \alpha(t) + \mathbf{p}$.
Tersi de doğrudur: $\beta = \alpha + \mathbf{p}$ ise koordinatlar bir sabit kadar farklı, türevleri aynıdır. Böylece "hızları paralel" ile "birbirinin ötelenmişi" aynı şeydir. Örneğin $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ve $\beta(t) = (\cos t + 2, \sin t, t - 1)$ helislerinin hızları her an paraleldir ve $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$'dir.
■

Alıştırma 10.18 (Doğru Parçasının Uzunluğu Uzaklıktır). $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ noktaları için $\sigma(t) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$, $0 \le t \le 1$, doğru parçası olsun. $L(\sigma) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\sigma(t) = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ yazılabilir; $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathbf{p}$'den geçen $\mathbf{q} - \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ doğrultulu doğrunun (Örnek 4.1) $[0, 1]$'e kısıtlanmasıdır, yani bir eğri parçasıdır; $\sigma(0) = \mathbf{p}$, $\sigma(1) = \mathbf{q}$. Hızının vektör kısmı sabit $\mathbf{q} - \mathbf{p}$'dir ve sürati

$$\| \sigma'(t) \| = \| \mathbf{q} - \mathbf{p} \| = d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

(Tanım 9.3). Dolayısıyla

$$L(\sigma) = \int_0^1 d(\mathbf{p},\mathbf{q})\,dt = d(\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

■

Alıştırma 10.19 (Doğru Parçası En Kısa Yoldur). $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{p} = \alpha(a)$ noktasından $\mathbf{q} = \alpha(b) \neq \mathbf{p}$ noktasına giden herhangi bir eğri parçası ve $\mathbf{u} = (\mathbf{q}-\mathbf{p})/\parallel \mathbf{q}-\mathbf{p} \parallel$ olsun. Her t için $\parallel \alpha'(t) \parallel \geq \alpha'(t)\cdot\mathbf{u}$ eşitsizliğinden yola çıkarak $L(\alpha) \geq d(\mathbf{p},\mathbf{q})$ olduğunu gösteriniz. (Burada $\alpha'(t)\cdot\mathbf{u}$, hızın vektör kısmı ile $\mathbf{u}$'nun iç çarpımıdır.)

Çözüm.
$\mathbf{u}$ birim vektördür: $\parallel \mathbf{u} \parallel = \parallel \mathbf{q}-\mathbf{p} \parallel / \parallel \mathbf{q}-\mathbf{p} \parallel = 1$. Schwarz eşitsizliğine göre her t için

$$\alpha'(t)\cdot\mathbf{u} \leq \mid \alpha'(t)\cdot\mathbf{u} \mid \leq \parallel \alpha'(t) \parallel \parallel \mathbf{u} \parallel = \parallel \alpha'(t) \parallel .$$

Yani sürat, hızın $\mathbf{u}$ doğrultusundaki bileşeninden hiçbir zaman küçük değildir.
Şimdi $\varphi(t) = \alpha(t)\cdot\mathbf{u} = \sum_i \alpha_i(t)\,u_i$ gerçel değerli fonksiyonunu tanımlayalım ($\alpha(t)$ noktasını koordinat üçlüsü olarak $\mathbf{u}$ ile çarpıyoruz). u_i'ler sabit olduğundan $\varphi'(t) = \sum_i \alpha_i'(t)\,u_i = \alpha'(t)\cdot\mathbf{u}$. İntegral, eşitsizlikleri korur; analizin temel teoremiyle

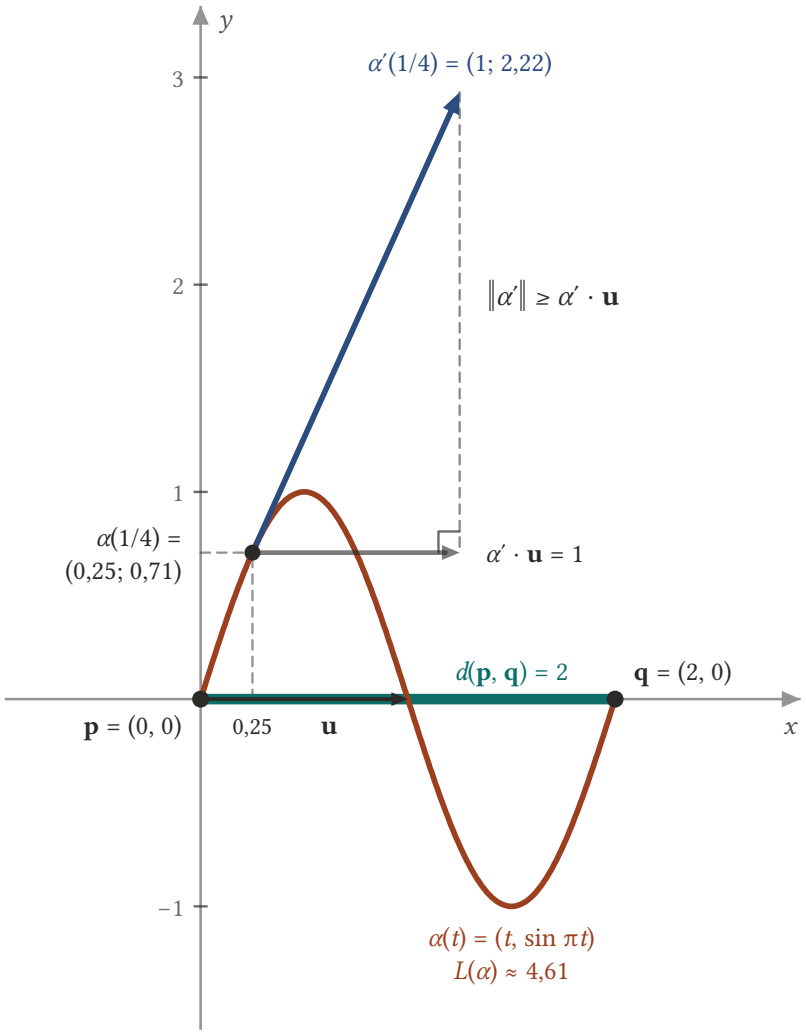
$$L(\alpha) = \int_a^b \parallel \alpha'(t) \parallel dt \geq \int_a^b \alpha'(t)\cdot\mathbf{u}\,dt = \varphi(b)-\varphi(a) = (\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}.$$

Son iç çarpımı hesaplayalım:

$$(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{p})}{\parallel \mathbf{q}-\mathbf{p} \parallel} = \frac{\parallel \mathbf{q}-\mathbf{p} \parallel^2}{\parallel \mathbf{q}-\mathbf{p} \parallel} = \parallel \mathbf{q}-\mathbf{p} \parallel = d(\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

Böylece $L(\alpha) \geq d(\mathbf{p},\mathbf{q})$: $\mathbf{p}$'den $\mathbf{q}$'ya giden hiçbir yol, iki nokta arasındaki uzaklıktan kısa olamaz. Alıştırma 10.18'na göre doğru parçası bu alt sınıra ulaşır; dolayısıyla iki nokta arasındaki en kısa yol doğru parçasıdır.
Sayısal bir örnek: $\mathbf{p} = (0,0,0)$, $\mathbf{q} = (2,0,0)$ ve $\alpha(t) = (t, \sin \pi t, 0)$, $0 \leq t \leq 2$, dalgalı yolu. $\mathbf{u} = (1,0,0)$, $\alpha'(t)\cdot\mathbf{u} = 1$ ve $\parallel \alpha'(t) \parallel = \sqrt{1+\pi^2\cos^2\pi t} \geq 1$; $L(\alpha) \approx 4{,}61$, uzaklık 2'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.7: $\mathbf{p} = (0, 0)$ ile $\mathbf{q} = (2, 0)$ arasındaki yeşil doğru parçasının uzunluğu $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2$, turuncu dalgalı yol $\alpha(t) = (t, \sin \pi t)$, $0 \le t \le 2$, ise $L(\alpha) \approx 4{,}61$ uzunluğundadır. $\alpha(1/4) = (0{,}25;\ 0{,}71)$ noktasındaki mavi hız oku $\alpha'(1/4) = (1;\ 2{,}22)$'nin $\mathbf{u} = (1, 0)$ birim vektörü üzerine izdüşümü gri ok $(1, 0)$'dır: uzunluğu $\alpha' \cdot \mathbf{u} = 1$ olup hızın boyunu aşamaz. Her anda geçerli olan $\|\alpha'\| \ge \alpha' \cdot \mathbf{u}$ eşitsizliği integral alınınca $L(\alpha) \ge d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ verir.

■

Alıştırma 10.20 (Uzunluğu Uzaklığa Eşit Olan Eğri Doğru Parçasıdır). $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{p} = \alpha(a)$'dan $\mathbf{q} = \alpha(b) \neq \mathbf{p}$'ye giden bir eğri parçası ve $\mathbf{u} = (\mathbf{q} - \mathbf{p}) / \| \mathbf{q} - \mathbf{p} \|$ olsun. $L(\alpha) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ise α'nın, parametrelendirme dışında, $\mathbf{p}$'den $\mathbf{q}$'ya giden doğru parçası olduğunu gösteriniz: α, $\sigma(t) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ parçasının monoton bir yeniden parametrelendirmesidir.

Çözüm.
Alıştırma 10.19'daki hesaba göre

$$\int_a^b \left(\| \alpha'(t) \| - \alpha'(t) \cdot \mathbf{u} \right) dt = L(\alpha) - d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İntegrand sürekli ve her yerde ≥ 0'dır. Sürekli, negatif olmayan bir fonksiyonun integrali sıfırsa fonksiyon sıfırdır: bir t_0'da pozitif olsaydı süreklilikten t_0'ın bir komşuluğunda da pozitif kalır ve integral pozitif çıkardı. Demek ki her t için

$$\| \alpha'(t) \| = \alpha'(t) \cdot \mathbf{u}.$$

$f(t) = \alpha'(t) \cdot \mathbf{u}$ diyelim; $f = \| \alpha' \| \geq 0$'dır. Hızı $\mathbf{u}$ doğrultusundaki bileşeni ile ona dik kalanına ayıralım: $Y(t)$, vektör kısmı $\alpha'(t) - f(t)\,\mathbf{u}$ olan, $\alpha(t)$'deki teğet vektör olsun. O zaman $\alpha' = f\mathbf{u} + Y$ ve

$$Y \cdot \mathbf{u} = \alpha' \cdot \mathbf{u} - f\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = f - f = 0.$$

Dik bileşenlerin Pisagor bağıntısıyla

$$\| \alpha' \|^2 = (f\mathbf{u} + Y) \cdot (f\mathbf{u} + Y) = f^2 + 2f\,(\mathbf{u} \cdot Y) + \| Y \|^2 = f^2 + \| Y \|^2.$$

Ama $\| \alpha' \|^2 = f^2$ olduğunu biliyoruz; o hâlde $\| Y \|^2 = 0$, yani her t için $Y(t) = \mathbf{0}$ ve $\alpha'(t) = f(t)\,\mathbf{u}$. Hız daima $\mathbf{u}$ doğrultusundadır ve hiç geri dönmez ($f \geq 0$).
Koordinatlarda $\alpha_i'(t) = f(t)\,u_i$. $g(t) = \int_a^t f(u)\,du$ dersek $\alpha_i(t) - g(t)u_i$ fonksiyonunun türevi $fu_i - fu_i = 0$'dır; sabittir ve $t = a$'daki değeri $\alpha_i(a) - 0 = p_i$'dir. Dolayısıyla

$$\alpha(t) = \mathbf{p} + g(t)\,\mathbf{u}, \qquad a \leq t \leq b.$$

g fonksiyonu $f \geq 0$ olduğundan azalmaz; $g(a) = 0$ ve

$$g(b) = \int_a^b \| \alpha'(t) \|\,dt = L(\alpha) = \| \mathbf{q} - \mathbf{p} \|.$$

Şimdi $h(t) = g(t) / \| \mathbf{q} - \mathbf{p} \|$ tanımlayalım: $h' = f / \| \mathbf{q} - \mathbf{p} \| \geq 0$, $h(a) = 0$, $h(b) = 1$ ve h, $[a, b]$'yi $[0, 1]$'e götürür. Doğru parçası $\sigma(t) = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$, $\mathbf{q} - \mathbf{p} = \| \mathbf{q} - \mathbf{p} \|\,\mathbf{u}$ yazımıyla $\sigma(t) = \mathbf{p} + t\,\| \mathbf{q} - \mathbf{p} \|\,\mathbf{u}$ biçimini alır; dolayısıyla

$$\sigma(h(t)) = \mathbf{p} + h(t)\,\| \mathbf{q} - \mathbf{p} \|\,\mathbf{u} = \mathbf{p} + g(t)\,\mathbf{u} = \alpha(t).$$

Yani $\alpha = \sigma(h)$, σ'nın Alıştırma 10.13 anlamında monoton bir yeniden parametrelendirmesidir: rotası $\mathbf{p}$'den $\mathbf{q}$'ya giden doğru parçasıdır ve bu parça geri dönülmeden dolaşılır. Parametrelendirme dışında, uzunluğu uzaklığa eşit olan tek yol doğru parçasıdır.
■

Aşağıdaki alıştırmalar bölümün kavramlarını yeni örneklerde kullanır.

Alıştırma 10.21 (Parabolik Silindir Üzerinde Sabit Süratli Bir Eğri). $t \in \mathbb{R}$ üzerinde

$$\alpha(t) = \big(t - \sin t,\, 1 - \cos t,\, 4\sin(t/2) \big)$$

eğrisinin $t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonunun $s(t) = 2t$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Koordinat türevleri $1 - \cos t$, $\sin t$ ve zincir kuralıyla $4\cos(t/2) \cdot \tfrac{1}{2} = 2\cos(t/2)$. Süratin karesi

$$\begin{aligned} \| \alpha'(t) \|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 4\cos^2 \frac{t}{2} \\ &= 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4\cos^2 \frac{t}{2} = 2 - 2\cos t + 4\cos^2 \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Yarım açı özdeşliği $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$ ile $2 - 2\cos t = 4\sin^2(t/2)$, dolayısıyla

$$\| \alpha'(t) \|^2 = 4\sin^2 \frac{t}{2} + 4\cos^2 \frac{t}{2} = 4, \qquad v(t) = 2.$$

Sürat sabit 2'dir; özellikle eğri düzgündür. Buna göre $t = 0$ tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu $s(t) = \int_0^t 2\,du = 2t$ olur. Ek bir gözlem: $z^2/8 = 2\sin^2(t/2) = 1 - \cos t = y$ olduğundan eğri $y = z^2/8$ para-

 CC BY-NC-SA 4.0

bolik silindiri üzerinde durur; x koordinatının değişim hızı $1-\cos t$, tam turlarda ($t=2\pi k$) sıfıra düşer; sürat yine de 2'de kalır, çünkü o anlarda z koordinatı ± 2 hızla değişir.
■

Alıştırma 10.22 (Parabolik Silindir Üzerindeki Eğrinin Birim Hızlı Kopyası). Sürati 2 olan

$$\alpha(t) = \big(\, t - \sin t,\, 1-\cos t,\, 4\sin(t/2) \,\big)$$

eğrisinin $t=0$ tabanlı birim hızlı yeniden parametrelendirmesini bulunuz.

Çözüm.
Yay uzunluğu fonksiyonu $s(t) = 2t$, tersi $t(s) = s/2$, $J = \mathbb{R}$. Birim hızlı yeniden parametrelendirme

$$\beta(s) = \alpha\Big(\frac{s}{2}\Big) = \Big(\frac{s}{2} - \sin\frac{s}{2},\, 1-\cos\frac{s}{2},\, 4\sin\frac{s}{4}\Big)$$

olur. $dt/ds = 1/2 > 0$ olduğundan yön koruyandır. Denetim: koordinat türevleri $\frac{1}{2}\big(\,1-\cos\frac{s}{2}\,\big)$, $\frac{1}{2}\sin\frac{s}{2}$, $\cos\frac{s}{4}$; bunlar α''nün $t=s/2$'deki koordinatlarının yarısıdır, dolayısıyla

$$\| \,\beta'(s)\,\| = \frac{1}{2}\,\| \,\alpha'(s/2)\,\| = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Örneğin $s=2\pi$'de ($t=\pi$) $\beta(2\pi) = (\pi, 2, 4)$: başlangıçtan 2π birim yol gidildiğinde varılan nokta.
■

Alıştırma 10.23 (Türevine Dik Olan Alan Sabit Uzunluktadır). Bir eğri üzerindeki Y vektör alanı her t için $Y(t)\cdot Y'(t) = 0$ koşulunu sağlıyorsa $\| \,Y\,\|$'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Lemma 10.1'nin iç çarpım kuralıyla

$$(Y\cdot Y)' = Y'\cdot Y + Y\cdot Y' = 2\,Y\cdot Y' = 0.$$

Türevi sıfır olan $Y\cdot Y$ fonksiyonu aralıkta sabittir; değeri $k \geq 0$ olsun. $\| \,Y\,\| = \sqrt{Y\cdot Y} = \sqrt{k}$ de sabittir.
Lemma 10.2, sabit uzunluğun $Y\cdot Y' = 0$ vermesini söylüyordu; burada tersini gösterdik. Demek ki bir alanın uzunluğunun değişmemesi, tam olarak, alanın her an kendisine dik yönde değişmesidir. Karşı örnek: $W = tU_1$ için $W\cdot W' = t$, sıfır değildir ve $\| \,W\,\| = |\,t\,|$ sabit değildir; uyumlu.
■

Alıştırma 10.24 (Alanın Kendi Türeviyle Vektörel Çarpımının Türevi). Bir eğri üzerindeki her Y vektör alanı için $(Y\times Y')' = Y\times Y''$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Lemma 10.1'nin vektörel çarpım kuralıyla

$$(Y\times Y')' = Y'\times Y' + Y\times Y''.$$

Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır: biçimsel determinantın iki satırı eşittir ve iki satırı eşit olan determinant sıfırdır (iç çarpım bölümünde gördüğümüz $\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$ kuralı). Böylece $Y'\times Y' = 0$ ve $(Y\times Y')' = Y\times Y''$.
Denetim. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisinin hız alanı $Y = \alpha'$ için $\alpha' = -\sin t\,U_1 + \cos t\,U_2 + U_3$, $\alpha'' = -\cos t\,U_1 - \sin t\,U_2$ ve $\alpha''' = \sin t\,U_1 - \cos t\,U_2$. Alıştırma 10.11'de $\alpha'\times\alpha'' = \sin t\,U_1 - \cos t\,U_2 + U_3$ bulmuştuk; türevi

$$(\alpha'\times\alpha'')' = \cos t\,U_1 + \sin t\,U_2.$$

Öte yandan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\alpha' \times \alpha''' = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \cos t\, U_1 + \sin t\, U_2 + 0\, U_3,$$

çünkü ilk satıra göre açılım

$$(0 + \cos t)\, U_1 - (0 - \sin t)\, U_2 + (\sin t \cos t - \cos t \sin t)\, U_3$$

verir. İki sonuç aynıdır. İleride $\alpha' \times \alpha''$ alanı eğrinin burulmasını ölçerken karşımıza çıkacak; bu kural onun türevini hesaplamayı kolaylaştırır.

■

Bu bölümde eğrilere uzunluk ölçüsü kazandırdık, düzgün her eğrinin birim hızlı bir kopyası olduğunu gördük ve eğri üzerinde taşınan okların türevini almayı öğrendik; sıradaki konu, birim hızlı bir eğrinin her noktasına yerleştirilen hareketli çatının nasıl döndüğünü ölçen Frenet formülleri, yani eğrilik ve burulmadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Frenet Formülleri

Önceki bölümde (Eğriler: Yay Uzunluğu ve Birim Hız) hiç durmayan her eğrinin birim hızlı bir kopyası olduğunu gördük: rotayı her an 1 süratle dolaşan, parametresi doğrudan yol uzunluğunu ölçen bir eğri. O teoremi bir kolaylık olarak sunmuştuk; şimdi onu kullanacağız. Bu bölümde bir eğrinin **ne kadar döndüğünü** ve **ne kadar büküldüğünü** ölçen iki sayısal büyüklüğü, eğriliği ve burulmayı kuruyoruz.
Fikir şudur. Bir eğrinin her noktasına, o noktadaki gidiş yönüne göre ayarlanmış üç karşılıklı dik birim vektör yerleştireceğiz. Bu üçlü, eğri boyunca yürüdükçe döner; dönüşün hızı ve biçimi eğrinin geometrisini eksiksiz taşır. Üç vektörün türevlerini yine kendileri cinsinden yazdığımızda ortaya çıkan üç denklem, eğriler kuramının bütün hesaplarının dayandığı Frenet formülleridir (Frenet formulas). Doğal çatı alanı U_1, U_2, U_3 eğri hakkında hiçbir bilgi taşımaz — her noktada aynıdır; oysa eğriye bağlı bu yeni çatı eğrinin kendisi kadar bilgilidir.
Bölümde yalnızca birim hızlı eğrilerle çalışacağız. Nedeni pratiktir: birim hızlı bir β eğrisinde $\| \beta' \| = 1$ olduğundan türev almak sürat çarpanlarıyla uğraşmayı gerektirmez ve bütün formüller en sade hâllerini alır. Keyfi hızlı bir eğriye geçmek, ileride göreceğimiz gibi, elde ettiğimiz her şeyi birim hızlı kopyadan geri taşımaktan ibarettir. Bölümün sonunda burulmanın sıfır olmasının "eğri bir düzlemde kalıyor" demek olduğunu, eğriliğin sabit ve burulmanın sıfır olmasının da eğrinin bir çember parçası olması demek olduğunu tam olarak ispatlayacağız.

11.1 Birim Teğet Alanı ve Eğrilik

$\beta : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun; yani her $s \in I$ için $\| \beta'(s) \| = 1$. Hız alanı β', eğri üzerinde bir vektör alanıdır (Tanım 10.3) ve her noktada birim uzunluktadır. Bu alanı ayrı bir harfle anmak işleri kolaylaştırır: ona T diyeceğiz.
T'nin uzunluğu sabit olduğundan, T eğri boyunca yalnızca **döner**; uzayıp kısalmaz. Dolayısıyla T'nin türevi T', tümüyle bu dönmeyi anlatır. Yön hiç değişmiyorsa T sabittir ve $T' = \mathbf{0}$ olur; yön hızla değişiyorsa T' büyür. İşte eğriliğin tanımı bu gözlemden doğar.
Önce küçük ama önemli bir olgu: T' her noktada T'ye diktir. Gerçekten, T birim alan olduğundan her s için

$$T(s) \cdot T(s) = 1$$

yazılır. Sol taraf sabit bir fonksiyondur; türevi sıfırdır. Eğri üzerindeki alanların iç çarpımı için Leibniz kuralı $(Y \cdot Z)' = Y' \cdot Z + Y \cdot Z'$ olduğundan

$$0 = (T \cdot T)' = T' \cdot T + T \cdot T' = 2\,T' \cdot T,$$

yani her s için $T'(s) \cdot T(s) = 0$. Demek ki eğrilik vektörü daima eğriye diktir: hızın değişimi, hızın doğrultusunda değil, ona dik doğrultuda gerçekleşir.

Tanım 11.1 (Birim Teğet Alanı, Eğrilik Vektörü ve Eğrilik). $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.
$T = \beta'$ alanına β'nın **birim teğet vektör alanı** (unit tangent vector field) denir; her noktada $\| T \| = 1$'dir.
$T' = \beta''$ alanına β'nın **eğrilik vektör alanı** (curvature vector field) denir. Bu alan her noktada T'ye diktir.
Her $s \in I$ için

$$\kappa(s) = \| T'(s) \|$$

ile tanımlanan gerçel değerli κ fonksiyonuna β'nın **eğrilik** (curvature) fonksiyonu denir. Tanımı gereği $\kappa \geq 0$'dır.

Yani $\kappa(s)$, birim teğet vektörün s anında ne kadar hızlı döndüğünü ölçen sayıdır: κ büyükse eğri o noktada keskin dönüyordur, κ küçükse yumuşak.

 CC BY-NC-SA 4.0

Ölçünün birim hıza bağlı olması bir tesadüf değildir. Parametre yol uzunluğunu ölçtüğü için κ, "birim yol başına ne kadar dönüldüğü"dür — saatin hızına değil, yolun şekline bağlı bir büyüklük. Aynı rotayı iki kat hızlı dolaşan bir eğride T de iki kat hızlı dönerdi ve ham türev yanıltıcı olurdu; birim hız bu gürültüyü baştan siler.
İki temel örnekle başlayalım.

Örnek 11.1 (Çemberin Eğriliği Yarıçapın Tersidir). $a > 0$ olsun. xy düzlemindeki a yarıçaplı çemberin birim hızlı parametrelendirmesi

$$\beta(s) = \left(a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}, 0\right)$$

eğrisidir. Bu eğrinin gerçekten birim hızlı olduğunu doğrulayalım ve eğriliğini bulalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonlarının türevleri $-\sin(s/a)$, $\cos(s/a)$ ve 0'dır; kısaltma olarak $u = s/a$ yazalım. Böylece

$$T(s) = \beta'(s) = \big(-\sin u, \cos u, 0\big).$$

Uzunluğun karesi $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ olduğundan $\| \beta'(s) \| = 1$: eğri birim hızlıdır.
Bir kez daha türev alalım. $du/ds = 1/a$ olduğundan zincir kuralıyla

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{a}\cos u, -\frac{1}{a}\sin u, 0\right).$$

Uzunluğun karesi $\frac{1}{a^2}(\cos^2 u + \sin^2 u) = \frac{1}{a^2}$'dir, yani

$$\kappa(s) = \| T'(s) \| = \frac{1}{a}.$$

Eğrilik sabittir ve yarıçapın tersidir. Yarıçap küçüldükçe eğrilik büyür: $a = 1$ için $\kappa = 1$, $a = 10$ için $\kappa = 0{,}1$. Küçük bir çember keskin döner, büyük bir çember neredeyse düz gider. Bu, sezgimizin istediği şeydir ve κ'nın "dönme keskinliği" olarak okunmasının gerekçesidir.
Denetim olarak $T' \cdot T$'yi hesaplayalım:

$$T' \cdot T = \frac{1}{a}\cos u \sin u - \frac{1}{a}\sin u \cos u = 0,$$

beklendiği gibi sıfır.
■

Örnek 11.2 (Doğrunun Eğriliği Sıfırdır). $\mathbf{p}$ bir nokta, $\mathbf{q}$ birim uzunlukta bir vektör olsun. $\beta(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{q}$ doğrusunun (Örnek 4.1) birim hızlı olduğunu gösterelim ve eğriliğini bulalım.

Çözüm.
β'nın i. koordinat fonksiyonu $p_i + sq_i$'dir; türevi q_i, ikinci türevi 0'dır. Dolayısıyla

$$T(s) = \beta'(s) = (q_1, q_2, q_3), \qquad T'(s) = (0, 0, 0).$$

$\| \mathbf{q} \| = 1$ olduğundan $\| \beta' \| = 1$: doğru birim hızlıdır. Eğriliği

$$\kappa(s) = \| T'(s) \| = 0$$

olur ve her s için sıfırdır. Doğru hiç dönmez; birim teğet vektörü boyunca sabittir. Bölümün ilerisinde bunun tersinin de doğru olduğunu, yani eğriliği her yerde sıfır olan bir birim hızlı eğrinin bir doğru üzerinde kalmak zorunda olduğunu ispatlayacağız.
■

Bu iki örnek eğriliğin uçlarını gösteriyor: doğruda $\kappa = 0$, çemberde $\kappa = 1/a$ sabit. Aradaki farkı gözle görmek için iki çemberi yan yana koyalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 11.3 (Sıkı ve Gevşek Dönen İki Çember). xy düzleminde $a = 1$ ve $a = 3$ yarıçaplı iki çemberi, ikisi de orijinden geçecek ve orijinde aynı yöne bakacak biçimde alalım:

$$\beta_1(s) = \big(\sin s,\, 1 - \cos s,\, 0\,\big), \qquad \beta_3(s) = \Big(3\sin\frac{s}{3},\, 3 - 3\cos\frac{s}{3},\, 0\Big).$$

İkisinin de birim hızlı olduğunu, $s = 0$'da aynı birim teğet vektöre sahip olduğunu gösterip eğrilik vektörlerini karşılaştıralım.

Çözüm.
Birinci eğri için $T_1(s) = (\cos s, \sin s, 0)$, uzunluğu 1. İkinci eğri için

$$T_3(s) = \Big(\cos\frac{s}{3}, \sin\frac{s}{3}, 0\Big),$$

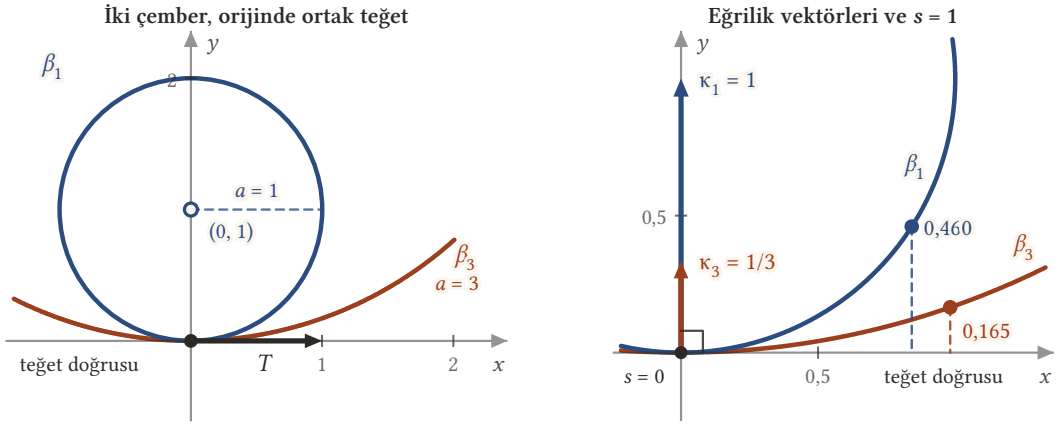
uzunluğu yine 1. İkisi de birim hızlıdır ve $s = 0$'da

$$T_1(0) = T_3(0) = (1, 0, 0),$$

yani iki eğri orijinde aynı yöne bakar. İkinci türevler:

$$T_1'(s) = \big(-\sin s, \cos s, 0\,\big), \qquad T_3'(s) = \Big(-\frac{1}{3}\sin\frac{s}{3}, \frac{1}{3}\cos\frac{s}{3}, 0\Big).$$

Buradan $\kappa_1 = 1$ ve $\kappa_3 = 1/3$ çıkar. $s = 0$'da eğrilik vektörleri $(0, 1, 0)$ ve $(0, 1/3, 0)$'dır: ikisi de teğet doğrultusuna dik ve çemberin merkezine bakar, ama birincisi üç kat uzundur. Aynı yerden aynı yöne çıkan iki eğriden κ'sı büyük olan yoldan daha hızlı ayrılır: $s = 1$ için $\beta_1(1) \approx (0{,}841;\, 0{,}460;\, 0)$ iken $\beta_3(1) \approx (0{,}982;\, 0{,}165;\, 0)$'dır; teğet doğrusu olan x ekseninden uzaklıklar 0,460 ve 0,165, oranları yaklaşık 2,78.



Şekil 11.1: Solda orijinden geçen ve orada aynı birim teğet vektöre sahip iki çember: yarıçapı $a = 1$ olan β_1 (mavi) ile yarıçapı $a = 3$ olan β_3 (turuncu); gri ok ikisinin ortak teğeti $T(0) = (1, 0)$'dır ve x ekseni ortak teğet doğrusudur. Sağdaki yakın planda aynı noktadan dikey çıkan iki eğrilik vektörü görülüyor: mavi okun boyu $\kappa_1 = 1$, turuncu okunki $\kappa_3 = 1/3$'tür; ikisi de teğet doğrusuna diktir ve kendi çemberinin merkezine bakar. $s = 1$ anında eğriler teğet doğrusundan 0,460 ile 0,165 kadar uzaklaşmıştır: oranları yaklaşık 2,78'dir, yani eğriliği büyük olan eğri teğet doğrusundan üç katına yakın hızla ayrılır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Asli Normal ve Binormal

Eğrilik κ dönmenin **ne kadar** olduğunu söyler, ama **hangi yöne** dönüldüğünü söylemez. Bu bilgi T' vektörünün doğrultusundadır. T''yi kendi uzunluğuna bölersek birim uzunlukta bir alan elde ederiz ve dönme yönünü okuruz. Bunun için κ'nın hiçbir noktada sıfır olmaması gerekir.

⚠ Neden eğriliğin sıfır olmamasını istiyoruz

$\kappa(s) = 0$ olan bir noktada $T'(s) = \mathbf{0}$'dır ve sıfır vektörün bir doğrultusu yoktur: eğri o anda hiç dönmediği için "hangi yöne dönüyor" sorusunun yanıtı yoktur. Bu yüzden bu bölümün geri kalanında β'nın eğriliğinin her yerde **kesin pozitif** olduğunu, yani $\kappa > 0$ olduğunu varsayacağız.
Varsayım masum değildir: bir eğrinin eğriliği bazı noktalarda sıfırlanıp bazılarında sıfırlanmayabilir; böyle bir eğride aşağıda kuracağımız çatı, κ'nın sıfırlandığı noktalarda tanımsız kalır ve sıfırın iki yanında birdenbire yön değiştirebilir. Uygulamada bu, eğriyi $\kappa > 0$ olan alt aralıklara bölerek aşılır. Eğriliği her yerde sıfır olan eğrilerse zaten doğrulardır ve bunları ayrıca inceleyeceğiz.

Tanım 11.2 (Asli Normal ve Binormal Vektör Alanları). $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve her $s \in I$ için $\kappa(s) > 0$ olsun.

$$N = \frac{T'}{\kappa}$$

alanına β'nın **asli normal vektör alanı** (principal normal vector field) denir.

$$B = T \times N$$

alanına β'nın **binormal vektör alanı** (binormal vector field) denir.
T, N, B üçlüsüne β üzerindeki **Frenet çatı alanı** (Frenet frame field), κ, τ, T, N, B beşlisine de β'nın **Frenet aparatı** (Frenet apparatus) denir. (τ birazdan tanımlanacak.)

Yani N, eğrinin o noktada döndüğü yönü gösteren birim ok; B de T ile N'nin gerdiği düzleme dik olan üçüncü birim oktur. Tanım gereği $T' = \kappa N$ eşitliği her noktada doğrudur: eğrilik vektörü, büyüklüğü κ ve yönü N olan vektördür.
Şimdi bu üç alanın gerçekten bir çatı (Tanım 9.7) oluşturduğunu, yani her noktada karşılıklı dik üç birim vektör verdiğini ispatlayalım.

Lemma 11.1 (T, N ve B Her Noktada Bir Çatıdır). *β birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. O hâlde T, N, B alanlarının üçü de birim uzunluktadır ve her noktada ikişer ikişer diktir:*

$$T \cdot T = N \cdot N = B \cdot B = 1, \qquad T \cdot N = T \cdot B = N \cdot B = 0.$$

İspat.
Üç iddiayı sırayla görelim.
T birimdir. *β birim hızlı olduğundan tanım gereği $\| T \| = \| \beta' \| = 1$.*
N birimdir. *$N = T'/\kappa$ ve $\kappa = \| T' \| > 0$'dır. Bir vektörün pozitif bir skalerle çarpımının normu, skalerle normun çarpımıdır; dolayısıyla*

$$\| N \| = \| \frac{1}{\kappa} T' \| = \frac{1}{\kappa} \| T' \| = \frac{\kappa}{\kappa} = 1.$$

Burada $\kappa > 0$ varsayımını hem bölmenin anlamlı olması hem de mutlak değer gerekmemesi için kullandık.
T ile *N* diktir. *Bölümün başında $T' \cdot T = 0$ olduğunu gördük. N, T''nin pozitif bir katı olduğundan*

$$T \cdot N = T \cdot \frac{1}{\kappa} T' = \frac{1}{\kappa} (T \cdot T') = 0.$$

B birimdir ve hem *T*'ye hem *N*'ye diktir. *Bu, vektörel çarpımın noktasal özelliklerinden çıkar. Her s için $T(s)$ ile $N(s)$, $\beta(s)$ noktasındaki iki teğet vektördür ve $B(s) = T(s) \times N(s)$'tir. Lemma 9.5'ne göre bir vektörel çarpım çarpanlarının ikisine de diktir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$B \cdot T = 0, \qquad B \cdot N = 0.$$

Aynı lemma uzunluğun karesi için

$$\| T \times N \|^2 = (T \cdot T)(N \cdot N) - (T \cdot N)^2$$

formülünü verir. Sağ tarafta $T \cdot T = 1$, $N \cdot N = 1$ *ve* $T \cdot N = 0$ *olduğundan* $\| B \|^2 = 1 \cdot 1 - 0 = 1$, *yani* $\| B \| = 1$.
Böylece dokuz iç çarpımın hepsi istenildiği gibidir: üç alan her noktada birim ve karşılıklı diktir, yani $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ *üçlüsü* $\beta(s)$ *noktasında bir çatıdır.*
■

Bir çatının en çok işe yarayan özelliği, o noktadaki her teğet vektörü kendi bileşenlerine ayırabilmesidir: Teorem 9.1'e göre $\beta(s)$ noktasındaki her $\mathbf{v}$ teğet vektörü

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot T)\, T + (\mathbf{v} \cdot N)\, N + (\mathbf{v} \cdot B)\, B$$

biçiminde tek türlü yazılır. Bundan sonraki bütün hesaplarımızın yöntemi budur: bilinmeyen bir alanı Frenet çatısına göre açıp katsayılarını tek tek iç çarpımla bulacağız.

Örnek 11.4 (Düzlemdeki Bir Çemberin Frenet Çatısı). $a = 2$ yarıçaplı

$$\beta(s) = \left(2\cos\frac{s}{2}, 2\sin\frac{s}{2}, 0\right)$$

çemberinin Frenet çatısını bulalım ve üç alanın da birim ve karşılıklı dik olduğunu $s = \pi$ noktasında sayılarla denetleyelim.

Çözüm.
$u = s/2$ yazalım. Örnek 11.1'ndeki hesabın $a = 2$ hâli:

$$T(s) = (-\sin u, \cos u, 0), \qquad T'(s) = \left(-\frac{1}{2}\cos u, -\frac{1}{2}\sin u, 0\right)$$

ve $\kappa = 1/2$. Dolayısıyla

$$N(s) = \frac{T'(s)}{1/2} = (-\cos u, -\sin u, 0).$$

N'nin çemberin merkezi olan orijine baktığına dikkat edelim: $\beta(s)$ noktasından merkeze giden birim yön

$$-\frac{\beta(s)}{\| \beta(s) \|} = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

olur, tam olarak $N(s)$.
Binormal için vektörel çarpımı açalım (Tanım 9.9):

$$B(s) = T \times N = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix}.$$

Birinci ve ikinci bileşenler sıfırdır, üçüncü bileşen ise

$$(-\sin u)(-\sin u) - (\cos u)(-\cos u) = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

olur. Yani $B(s) = (0, 0, 1)$: binormal, çemberin bulunduğu düzleme dik sabit bir birim vektördür.
$s = \pi$'de $u = \pi/2$'dir ve

$$T = (-1, 0, 0), \qquad N = (0, -1, 0), \qquad B = (0, 0, 1).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Üçünün de uzunluğu 1'dir; iç çarpımları $T \cdot N = 0$, $T \cdot B = 0$, $N \cdot B = 0$. Bu özel noktada Frenet çatısı, işaretleri değişmiş bir doğal çatıdan başka bir şey değildir; ama s değiştikçe T ile N döner, B ise sabit kalır.
■

11.3 Burulma

Eğrilik, eğrinin T ile N'nin gerdiği düzlem içinde ne kadar döndüğünü ölçer. Ama bir uzay eğrisi bu düzlemden de çıkabilir: bir helis, düzlemsel bir çemberin aksine, sürekli olarak "burularak" ilerler. Bu çıkışı ölçen büyüklüğü B'nin türevinden okuyacağız; çünkü B tam olarak o düzleme dik olan alandır ve B dönüyorsa düzlem de dönüyor demektir.
B''nün özel bir biçimi vardır: her noktada N'nin bir katıdır. Bunu ortonormal açılımla görelim. Amacımız $B' \cdot T$ ile $B' \cdot B$ katsayılarının sıfır olduğunu göstermek.
Önce $B \cdot B = 1$ eşitliğinin türevini alalım; T için yaptığımızın aynısı:

$$0 = (B \cdot B)' = 2\, B' \cdot B, \qquad \text{yani} \qquad B' \cdot B = 0.$$

Şimdi $B \cdot T = 0$ eşitliğinin türevini alalım:

$$0 = (B \cdot T)' = B' \cdot T + B \cdot T'.$$

Buradan $B' \cdot T = -\,B \cdot T'$ çıkar. $T' = \kappa N$ olduğundan ve $B \cdot N = 0$ olduğundan

$$B' \cdot T = -\,B \cdot \kappa N = -\kappa\,(B \cdot N) = 0.$$

O hâlde ortonormal açılımda geriye tek terim kalır:

$$B' = (B' \cdot T)\,T + (B' \cdot N)\,N + (B' \cdot B)\,B = (B' \cdot N)\,N.$$

Demek ki B' her noktada N'nin bir skaler katıdır. Bu skalere bir ad vermenin tam zamanı.

Tanım 11.3 (Burulma). β birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. I üzerinde tanımlı ve her s için

$$B'(s) = -\tau(s)\,N(s)$$

eşitliğini sağlayan τ gerçel değerli fonksiyonuna β'nın **burulma** (torsion) fonksiyonu denir. Açık formülü $\tau = -\,B' \cdot N$'dir.

Yani $\tau(s)$, eğrinin s anında oskülatör düzleminden (birazdan adını koyacağımız, T ile N'nin gerdiği düzlemden) ne hızla sıyrıldığını ölçer. Eksi işareti bir gelenektir; onu koyduğumuzda Frenet formülleri, birazdan göreceğimiz gibi, ters simetrik ve akılda kalıcı bir biçim alır.
Eğrilikle burulma arasında önemli bir fark vardır. $\kappa = \| T' \|$ bir uzunluk olduğundan hiçbir zaman negatif olamaz; oysa τ üzerinde hiçbir kısıtlama yoktur: aynı eğrinin bir bölgesinde pozitif, başka bir bölgesinde negatif, arada sıfır olabilir. İşaretin anlamı şudur: $\tau > 0$ ise eğri oskülatör düzleminden B yönüne doğru, $\tau < 0$ ise $-B$ yönüne doğru sıyrılır. Bunu Frenet yaklaşımında somut olarak göreceğiz.

11.4 Frenet Formülleri

Şimdi bölümün ana teoremine geldik. T, N, B alanlarının türevlerini yine T, N, B cinsinden yazacağız. İlk ve üçüncü satırlar tanımların yeniden ifadesidir; asıl iş ortadaki satırdadır.

Teorem 11.1 (Frenet Formülleri). *$\beta : I \to \mathbb{R}^3$ eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan birim hızlı bir eğri olsun. O hâlde*

$$\begin{aligned} T' &= \;\;\kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= \qquad\quad -\tau N. \end{aligned}$$

İspat.

Birinci formül. *N'nin tanımı $N = T'/\kappa$ idi. Her iki yanı κ ile çarparsak $T' = \kappa N$ olur. Bu, tanımın başka bir yazılışıdır.*
Üçüncü formül. *Burulmanın tanımı doğrudan $B' = -\tau N$ diyordu. Bu tanımın anlamlı olması, yukarıda ispatladığımız "B' her noktada N'nin bir katıdır" olgusuna dayanır.*
İkinci formül. *N' de eğri üzerinde bir vektör alanıdır; her noktada T, N, B bir çatı olduğundan (Lemma 11.1) ortonormal açılımı (Teorem 9.1) yazabiliriz:*

$$N' = (N' \cdot T)\,T + (N' \cdot N)\,N + (N' \cdot B)\,B.$$

Üç katsayıyı tek tek bulalım.
Birinci katsayı. *$N \cdot T = 0$ eşitliğinin türevini alalım:*

$$0 = (N \cdot T)' = N' \cdot T + N \cdot T'.$$

Birinci formülü kullanarak $N \cdot T' = N \cdot \kappa N = \kappa\,(N \cdot N) = \kappa$ buluruz. O hâlde

$$N' \cdot T = -\,N \cdot T' = -\kappa.$$

İkinci katsayı. *N birim uzunlukta olduğundan, T ve B için yaptığımız hesabın aynısı geçerlidir: $N \cdot N = 1$'in türevi $2\,N' \cdot N = 0$ verir, yani*

$$N' \cdot N = 0.$$

Üçüncü katsayı. *$N \cdot B = 0$ eşitliğinin türevini alalım:*

$$0 = (N \cdot B)' = N' \cdot B + N \cdot B'.$$

Üçüncü formülü kullanalım:

$$N \cdot B' = N \cdot (-\tau N) = -\tau\,(N \cdot N) = -\tau.$$

Dolayısıyla

$$N' \cdot B = -\,N \cdot B' = \tau.$$

Üç katsayıyı açılıma koyarsak

$$N' = -\kappa T + 0 \cdot N + \tau\,B = -\kappa T + \tau B$$

çıkar; istenen ikinci formül budur.
■

Üç formülü tek bir tabloda görmek biçimi akılda tutmayı kolaylaştırır. Satırlar T', N', B'; sütunlar T, N, B katsayıları olsun:

	T	N	B
T'	0	κ	0
N'	$-\kappa$	0	τ
B'	0	$-\tau$	0

Katsayı tablosu ters simetriktir: köşegeni sıfırdır ve (i, j) girdisi (j, i) girdisinin eksilisidir. Bu bir tesadüf değildir; $E_i \cdot E_j$ sabit olan herhangi bir çatı alanında aynı şey olur, çünkü $(E_i \cdot E_j)' = 0$ eşitliği tam da bu ters simetriyi söyler. Burulmadaki geleneksel eksi işaretinin nedeni de budur: onsuz tablo bu güzel biçimi almazdı.
Şimdi teoremi sayılarla çalıştıralım. En bilgilendirici örnek helistir.

Örnek 11.5 (Helisin Frenet Aparatı). $a > 0$ ve $b \neq 0$ olsun. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ yazarak

$$\beta(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\, a\sin\frac{s}{c},\, \frac{bs}{c}\right)$$

helisinin (Örnek 4.2) Frenet aparatını hesaplayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Bu eğri, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ helisinin birim hızlı yeniden parametrelendirmesidir; birim hızlı olduğunu doğrudan da görebiliriz. Kısaltma olarak $u = s/c$ yazalım; $du/ds = 1/c$'dir.
Birim teğet. Koordinat fonksiyonlarının türevleri:

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin u, \frac{a}{c}\cos u, \frac{b}{c}\right).$$

Uzunluğun karesi

$$\frac{a^2}{c^2}\sin^2 u + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 u + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1,$$

yani eğri gerçekten birim hızlıdır.
Eğrilik vektörü ve eğrilik. Bir kez daha türev alalım:

$$T'(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos u, -\frac{a}{c^2}\sin u, 0\right).$$

Uzunluğun karesi $\frac{a^2}{c^4}(\cos^2 u + \sin^2 u) = \frac{a^2}{c^4}$ olduğundan ve $a > 0$ olduğundan

$$\kappa(s) = \| T'(s) \| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0.$$

Eğrilik sabittir ve pozitiftir; dolayısıyla Frenet çatısı bütün eğri boyunca tanımlıdır.
Asli normal. $N = T'/\kappa$ olduğundan T''yü a/c^2 ile bölmek yeter:

$$N(s) = (-\cos u, -\sin u, 0).$$

N'nin üçüncü bileşeni sıfırdır ve ilk iki bileşeni $\beta(s)$'in xy düzlemine izdüşümünün tam ters yönünü gösterir. Yani a ile b ne olursa olsun, asli normal her noktada helisin üzerinde durduğu silindirin eksenine, yani z eksenine doğru dosdoğru bakar.
Binormal. Vektörel çarpımı açalım:

$$B(s) = T \times N = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -\frac{a}{c}\sin u & \frac{a}{c}\cos u & \frac{b}{c} \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix}.$$

Bileşenleri tek tek yazalım:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{a}{c}\cos u \cdot 0 - \frac{b}{c}\cdot(-\sin u) = \frac{b}{c}\sin u, \\ B_2 &= \frac{b}{c}\cdot(-\cos u) - \left(-\frac{a}{c}\sin u\right)\cdot 0 = -\frac{b}{c}\cos u, \\ B_3 &= \left(-\frac{a}{c}\sin u\right)(-\sin u) - \frac{a}{c}\cos u\cdot(-\cos u) = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Yani

$$B(s) = \left(\frac{b}{c}\sin u, -\frac{b}{c}\cos u, \frac{a}{c}\right).$$

Denetim:

$$\| B \|^2 = \frac{b^2}{c^2}(\sin^2 u + \cos^2 u) + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1.$$

Burulma. B'nin türevi

$$B'(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos u, \frac{b}{c^2}\sin u, 0\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Bunu N ile karşılaştıralım: $N = (-\cos u, -\sin u, 0)$ olduğundan

$$B'(s) = -\frac{b}{c^2}\,N(s).$$

Burulmanın tanımı $B' = -\tau N$ olduğundan

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Helisin burulması da sabittir ve b ile aynı işaretlidir: $b>0$ ise helis yukarı doğru sağ el yönünde burulur, $b<0$ ise ters yönde.

Özet. Helisin Frenet aparatı

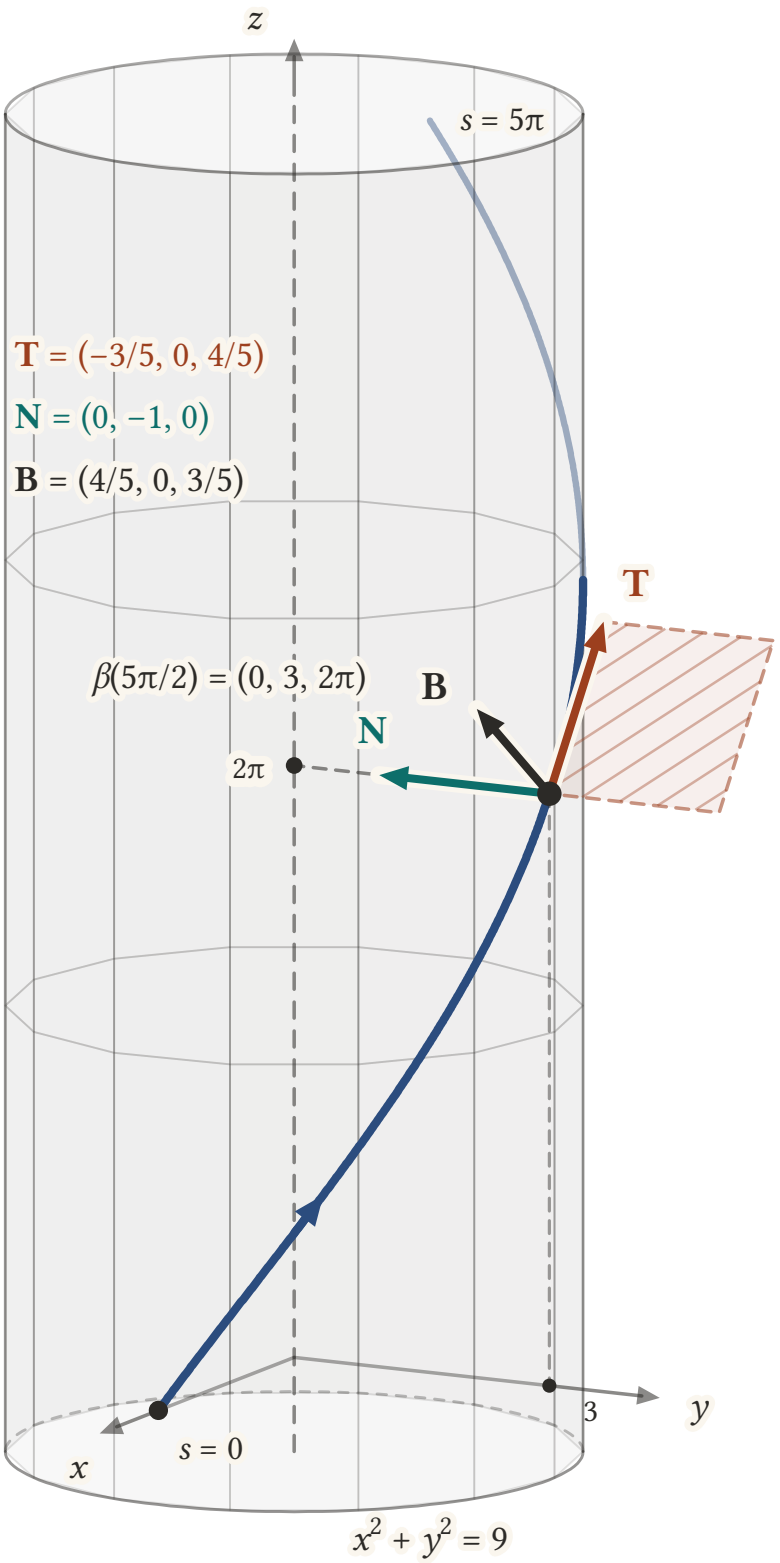
$$\kappa = \frac{a}{c^2}, \qquad \tau = \frac{b}{c^2}, \qquad c^2 = a^2+b^2$$

ve yukarıdaki T, N, B alanlarıdır. $a=3$, $b=4$ için $c=5$, $\kappa = 3/25 = 0{,}12$ ve $\tau = 4/25 = 0{,}16$'dır. Bu helisin bir noktasında çatıyı açıkça görelim. $s = 5\pi/2$, yani $u = \pi/2$ alırsak $\cos u = 0$, $\sin u = 1$ olur ve

$$\beta\!\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0,3,2\pi), \quad T = \left(-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right), \quad N = (0,-1,0), \quad B = \left(\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right)$$

çıkar. N'nin gerçekten z eksenine, yani $(0,0,2\pi)$ noktasına doğru baktığına dikkat edelim.

 CC BY-NC-SA 4.0



$$\beta(s) = (3\cos(s/5),\ 3\sin(s/5),\ 4s/5)$$

$$\kappa = 3/25,\ \tau = 4/25$$

Şekil 11.2: Helis $\beta(s) = (3\cos(s/5), 3\sin(s/5), 4s/5)$ $x^2 + y^2 = 9$ silindirinin duvarında yükselir; çizilen yay yarım turdur, $s = 0$'dan $s = 5\pi$'ye. Ortadaki $\beta(5\pi/2) = (0, 3, 2\pi)$ noktasında turuncu $\mathbf{T}$ eğriye teğettir, yeşil $\mathbf{N}$ ona diktir ve kesikli çizginin gösterdiği gibi silindirin ekseni üzerindeki $(0, 0, 2\pi)$ noktasına doğru bakar, koyu $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ ise ilk ikisinin gerdiği taralı oskülatör düzleme diktir ve okura doğru çıkar. Üçü de birim uzunluktadır; görünürlük için iki kat uzun çizilmişlerdir, sayfada farklı boyda görünmeleri izdüşümün kısaltmasındandır. Bu heliste eğrilik ile burulma her noktada sabittir: $\kappa = 3/25$, $\tau = 4/25$.

Açık Matematik · acik-matematik.com · CC BY-NC-SA 4.0

■

Helisin iki parametresi eğrilik ve burulmayı nasıl belirliyor? Birkaç değeri yan yana koyalım.

Örnek 11.6 (Helis Parametreleri Eğriliği ve Burulmayı Nasıl Değiştirir). $\kappa = a/(a^2+b^2)$ ve $\tau = b/(a^2+b^2)$ formüllerini birkaç somut (a, b) çifti için hesaplayıp yorumlayalım.

Çözüm.
Tablo (değerler dört ondalığa yuvarlanmıştır):

a	b	$c^2 = a^2+b^2$	$\kappa = a/c^2$	$\tau = b/c^2$	τ/κ
3	4	25	0,12	0,16	$4/3$
4	3	25	0,16	0,12	$3/4$
3	0	9	0,3333	0	0
1	4	17	0,0588	0,2353	4
3	40	1609	0,0019	0,0249	$40/3$

Okunacak üç şey var.
Birincisi, $b = 0$ satırı: bu durumda helis xy düzlemindeki a yarıçaplı çembere indirgenir. Formüller $\kappa = a/a^2 = 1/a$ ve $\tau = 0$ verir; bu, Örnek 11.1'ndeki sonuçla ve çemberin bir düzlemde kaldığı gözlemiyle tam olarak uyuşur.
İkincisi, b büyüdükçe helis dikine uzar ve hem eğrilik hem burulma küçülür ($a = 3$, $b = 40$ satırı): çok uzatılmış bir helis yerel olarak neredeyse bir doğrudur.
Üçüncüsü, $\tau/\kappa = b/a$ oranı yalnızca a ile b'nin oranına bağlıdır. Helisi büyütüp küçültmek κ ile τ'yu aynı çarpanla değiştirir, oranlarını değiştirmez. Bu oranın sabit olması ileride bütün bir eğri ailesini karakterize edecek.
Son bir denetim: $a = 3$, $b = 4$ helisinde $\kappa^2 + \tau^2 = (9+16)/625 = 1/25$, yani $\sqrt{\kappa^2+\tau^2} = 1/5 = 1/c$. Genel olarak da $\kappa^2 + \tau^2 = (a^2+b^2)/c^4 = 1/c^2$'dir.
■

11.5 Noktalarla Vektörleri Özdeşleştirmek

Bundan sonraki hesaplarda küçük bir rahatlığa ihtiyacımız olacak, onu şimdi açıkça belirtelim.

i Nokta ile teğet vektör arasında geçiş

Bir $\mathbf{p}$ noktası ile $\mathbf{p}$'deki bir $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ teğet vektörü arasındaki ayrımı baştan beri özenle koruduk. Ancak Öklid uzayının çok kullanışlı bir özelliği vardır: (v_1, v_2, v_3) noktalarıyla $\mathbf{p}$'deki $(v_1, v_2, v_3)_\mathbf{p}$ teğet vektörleri arasında doğal bir birebir eşleme bulunur. Karşılıklı gelen nesnelerin Öklid koordinatları aynı olduğundan, bu eşleme skalerle çarpma, toplama, iç çarpım, vektörel çarpım ve türev gibi koordinatlarla tanımlanmış hiçbir işlemi bozmaz.
Bu yüzden bundan sonra gerektiğinde gösterimi değiştirmeden sessizce birinden ötekine geçeceğiz. Örneğin bir β eğrisi üzerindeki $Y = (y_1, y_2, y_3)$ alanı, $\mathbb{R}^3$'te (y_1, y_2, y_3) eğrisi olarak da okunabilir; Y paralelse koordinat fonksiyonları sabittir ve Y, $\mathbb{R}^3$'ün tek bir noktasıyla özdeşleşir. Benzer biçimde $\beta(s) \cdot N(s)$ gibi bir yazım, $\beta(s)$ noktasının koordinat üçlüsüyle $N(s)$'in vektör kısmının iç çarpımı anlamına gelir.

Bu özdeşleştirmenin hemen bir kullanımı var: düzlemleri vektör diliyle betimlemek. $\mathbb{R}^3$'te bir düzlem, verilen bir noktada verilen bir doğruya dik olan bütün doğruların birleşimidir. Vektör diliyle: $\mathbf{p}$ noktasından geçen ve $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ vektörüne dik olan düzlem,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

koşulunu sağlayan bütün $\mathbf{r}$ noktalarından oluşur. Burada $\mathbf{q}$'yu $\mathbf{p}$ noktasına yerleştirilmiş bir teğet vektör olarak düşünmek en doğal resmi verir. Frenet çatısının üç vektörü bir noktada üç ayrı düzlem belirler; birazdan bunları adlandıracağız.

11.6 Frenet Yaklaşımı ve Üç Düzlem

Eğrilikle burulmanın eğrinin şeklini nasıl belirlediğini görmenin en iyi yolu, eğriyi bir noktanın yakınında en basit biçimiyle yazmaktır. Taylor açılımını Frenet çatısı cinsinden ifade edeceğiz.
Kolaylık olsun diye $s = 0$ noktasının yakınına bakalım ve $s = 0$'daki değerleri alt indisle gösterelim: $T_0 = T(0)$, $N_0 = N(0)$, $B_0 = B(0)$, $\kappa_0 = \kappa(0) > 0$, $\tau_0 = \tau(0)$.

Önerme 11.1 (Frenet Yaklaşımı). *β eğriliği $\kappa > 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. $s = 0$ yakınında*

$$\beta(s) \approx \beta(0) + s\,T_0 + \frac{\kappa_0 s^2}{2}\,N_0 + \frac{\kappa_0 \tau_0 s^3}{6}\,B_0$$

*yazılabilir. Sağ taraftaki $\hat{\beta}(s)$ eğrisine β'nın $s = 0$ yakınındaki **Frenet yaklaşımı** (Frenet approximation) denir.*

İspat.
$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ yazalım. Küçük s için her koordinat fonksiyonu Taylor serisinin ilk terimleriyle yaklaşık olarak verilir:

$$\beta_i(s) \approx \beta_i(0) + \frac{d\beta_i}{ds}(0)\,s + \frac{d^2\beta_i}{ds^2}(0)\,\frac{s^2}{2} + \frac{d^3\beta_i}{ds^3}(0)\,\frac{s^3}{6}.$$

Üç koordinatı birleştirirsek, nokta ile vektör arasındaki özdeşleştirmeyi kullanarak

$$\beta(s) \approx \beta(0) + s\,\beta'(0) + \frac{s^2}{2}\,\beta''(0) + \frac{s^3}{6}\,\beta'''(0)$$

elde ederiz. Şimdi üç türevi Frenet çatısı cinsinden yazalım.
Birinci türev. *Tanım gereği $\beta' = T$, yani $\beta'(0) = T_0$.*
İkinci türev. *Birinci Frenet formülü $\beta'' = T' = \kappa N$ verir, yani $\beta''(0) = \kappa_0 N_0$.*
Üçüncü türev. *$\beta'' = \kappa N$ eşitliğinin türevini çarpım kuralıyla alalım:*

$$\beta''' = (\kappa N)' = \frac{d\kappa}{ds}\,N + \kappa\,N'.$$

İkinci Frenet formülünü ($N' = -\kappa T + \tau B$) yerine koyarsak

$$\beta''' = -\kappa^2\,T + \frac{d\kappa}{ds}\,N + \kappa\tau\,B$$

çıkar. $s = 0$'da

$$\beta'''(0) = -\kappa_0^2\,T_0 + \frac{d\kappa}{ds}(0)\,N_0 + \kappa_0\tau_0\,B_0.$$

Yerine koyma. *Üç türevi Taylor açılımına koyup T_0, N_0, B_0 bileşenlerini toplayalım:*

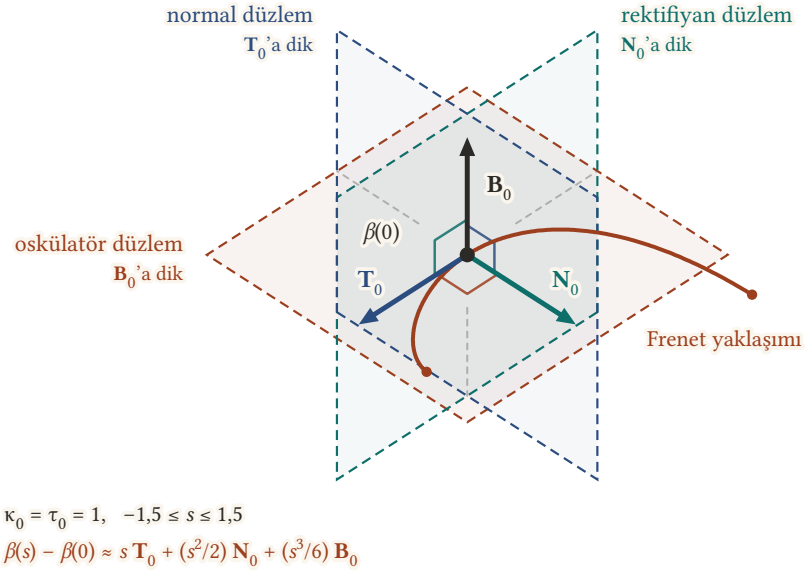
$$\begin{aligned}\beta(s) - \beta(0) \approx{}& \left(s - \frac{\kappa_0^2 s^3}{6}\right) T_0 \\ &+ \left(\frac{\kappa_0 s^2}{2} + \frac{1}{6}\frac{d\kappa}{ds}(0)\,s^3\right) N_0 + \frac{\kappa_0\tau_0 s^3}{6}\,B_0.\end{aligned}$$

s küçükken her bileşende s'in en küçük kuvvetini taşıyan terim ötekilere baskındır: T_0 bileşeninde s, N_0 bileşeninde $\kappa_0 s^2/2$, B_0 bileşeninde $\kappa_0\tau_0 s^3/6$. Yalnızca bu baskın terimleri tutarsak istenen ifade çıkar. En sade hâli görmek için $\kappa_0 = 1$ ve $\tau_0 = 1$ alalım; yaklaşım

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\hat{\beta}(s) - \beta(0) = s\,T_0 + \frac{s^2}{2}\,N_0 + \frac{s^3}{6}\,B_0$$

olur. Bu eğri $-1{,}5 \le s \le 1{,}5$ *aralığında çizildiğinde üç düzlemin her birine göre nasıl yerleştiği açıkça görülür.*



Şekil 11.3: $\beta(0)$ *noktasında Frenet çatısının üç birim vektörü — teğet* $\mathbf{T}_0$ *(mavi), asli normal* $\mathbf{N}_0$ *(yeşil) ve binormal* $\mathbf{B}_0$ *(koyu) — her biri bir düzlemi dik olarak deler: turuncu kare* $\mathbf{B}_0$*'a dik oskülatör düzlem, yeşil kare* $\mathbf{N}_0$*'a dik rektifiyan düzlem, mavi kare* $\mathbf{T}_0$*'a dik normal düzlemdir; üç dik açı işareti çatının ikişer ikişer dikliğini gösterir. İnce turuncu yay,* $\kappa_0 = \tau_0 = 1$ *alınarak yazılan* $\beta(s) - \beta(0) \approx s\,\mathbf{T}_0 + (s^2/2)\,\mathbf{N}_0 + (s^3/6)\,\mathbf{B}_0$ *Frenet yaklaşımıdır. Yay* $s = 0$*'da* $\mathbf{T}_0$ *okuna teğettir, ikinci terim onu oskülatör düzlem içinde* $\mathbf{N}_0$ *yönünde büker, en küçük olan üçüncü terim ise onu bu düzlemden* $\mathbf{B}_0$ *yönünde ayırır.*

■

Yaklaşımın her terimini tek tek okuyalım; eğrilikle burulmanın şekle katkısı burada çıplak gözle görülür.
Birinci terim yalnızca $\beta(0)$ noktasıdır: eğrinin geçtiği yer.
İlk iki terim birlikte

$$s \mapsto \beta(0) + s\,T_0$$

doğrusunu verir. Bu, β'nın $\beta(0)$'daki teğet doğrusudur ve eğrinin en iyi doğrusal yaklaşımıdır.
İlk üç terim birlikte

$$s \mapsto \beta(0) + s\,T_0 + \frac{\kappa_0 s^2}{2}\,N_0$$

parabolünü verir; bu da β'nın $\beta(0)$ yakınındaki en iyi ikinci dereceden yaklaşımıdır. Parabol tümüyle T_0 ile N_0'ın gerdiği düzlemde, yani $\beta(0)$'dan geçen ve B_0'a dik olan düzlemde kalır. Biçimi xy düzlemindeki $y = \kappa_0 x^2/2$ parabolüyle aynıdır; yani tümüyle κ_0 tarafından belirlenir. Eğrilik büyükse parabol dar, küçükse geniştir.
Dördüncü ve en küçük terim $\frac{\kappa_0 \tau_0 s^3}{6} B_0$'dır ve eğrinin bu düzlemden çıkışını yönetir. $\tau_0 = 0$ ise bu terim yoktur ve eğri (en azından üçüncü mertebeye kadar) düzlemde kalır; $\tau_0 > 0$ ise $s > 0$ için eğri B_0 yönüne, $s < 0$ için $-B_0$ yönüne sapar; $\tau_0 < 0$ ise sapmalar terstir. Terimin s^3 ile gelmesi, sapmanın teğetten ayrılmadan da dönmeden de daha yavaş başladığını söyler: eğri önce düzlemde döner, sonra düzlemden sıyrılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu üç düzlemin adı vardır.

Tanım 11.4 (Oskülatör, Rektifiyan ve Normal Düzlem). β birim hızlı, $\kappa > 0$ olan bir eğri ve $s_0 \in I$ olsun. $\beta(s_0)$ noktasından geçen

- $B(s_0)$'a dik düzleme β'nın $\beta(s_0)$'daki **oskülatör düzlemi** (osculating plane) denir; $T(s_0)$ ile $N(s_0)$ tarafından gerilir.
- $N(s_0)$'a dik düzleme **rektifiyan düzlem** (rectifying plane) denir; $T(s_0)$ ile $B(s_0)$ tarafından gerilir.
- $T(s_0)$'a dik düzleme **normal düzlem** (normal plane) denir; $N(s_0)$ ile $B(s_0)$ tarafından gerilir.

Yani oskülatör düzlem eğrinin o noktada "içinde yattığı" düzlem, normal düzlem eğriyi dik kesen düzlem, rektifiyan düzlem de ikisinin arasındaki üçüncü düzlemdir.
Her noktanın kendi Frenet yaklaşımı ve kendi üç düzlemi vardır. Yukarıdaki hesapta 0 yerine herhangi bir s_0 alınırsa, Taylor açılımlarında her zaman olduğu gibi s yerine $s - s_0$ gelir.

Örnek 11.7 (Helisin Başlangıç Noktasındaki Frenet Yaklaşımı). $a = 3$, $b = 4$ (dolayısıyla $c = 5$) helisinin $s = 0$ yakınındaki Frenet yaklaşımını yazalım ve yaklaşımın gerçek eğriye ne kadar yakın olduğunu $s = 1$ ile $s = 2$'de sayılarla ölçelim.

Çözüm.
Örnek 11.5'teki formülleri $s = 0$'da ($u = 0$) değerlendirelim:

$$\beta(0) = (3,0,0), \quad T_0 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad N_0 = (-1,0,0), \quad B_0 = \left(0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

ve $\kappa_0 = 3/25$, $\tau_0 = 4/25$. Katsayılar:

$$\frac{\kappa_0}{2} = \frac{3}{50}, \qquad \frac{\kappa_0\tau_0}{6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{25}\cdot\frac{4}{25} = \frac{2}{625}.$$

Frenet yaklaşımı

$$\hat{\beta}(s) = (3,0,0) + s\left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) + \frac{3s^2}{50}(-1,0,0) + \frac{2s^3}{625}\left(0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

yani koordinat koordinat

$$\hat{\beta}(s) = \left(3 - \frac{3s^2}{50}, \frac{3s}{5} - \frac{8s^3}{3125}, \frac{4s}{5} + \frac{6s^3}{3125}\right).$$

Şimdi karşılaştıralım. Gerçek eğri

$$\beta(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$$

eğrisidir. İki değerde hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\beta(1) &\approx (2{,}940200;\, 0{,}596008;\, 0{,}800000),\\
\hat{\beta}(1) &= (2{,}94;\, 0{,}597440;\, 0{,}801920),\\
\beta(2) &\approx (2{,}763182;\, 1{,}168255;\, 1{,}600000),\\
\hat{\beta}(2) &= (2{,}76;\, 1{,}179520;\, 1{,}615360).
\end{aligned}$$

$s = 1$'de aradaki uzaklık yaklaşık 0,0024, $s = 2$'de ise yaklaşık 0,0193'tür.
Uzaklık s iki katına çıkınca yaklaşık sekiz katına çıktı; bu, hatanın s^3 mertebesinde olmasıyla uyuşur (yaklaşımı kurarken her bileşende s^3 mertebeli terimleri attık). Yaklaşımın oskülatör düzlemdeki parçası $y = \frac{3}{50}x^2$ parabolüyle aynı biçimdedir; B_0 yönündeki küçük terim de helisin bu düzlemden yukarı doğru sıyrılmasıdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

11.7 Eğriliği Sıfır Olan Eğriler

Frenet yaklaşımı, eğriliği her yerde sıfır olan bir eğrinin doğru olması gerektiğini düşündürüyor: $\kappa_0 = 0$ ise parabol terimi de kübik terim de yok olur ve geriye yalnızca teğet doğrusu kalır. Bu sezgi doğrudur ve tam bir ispatı vardır. (Bu tek yerde $\kappa > 0$ varsayımını askıya alıyoruz; zaten konu tam da κ'nın sıfır olması.)

Önerme 11.2 (Eğriliği Her Yerde Sıfır Olan Eğri Bir Doğrudur). *$\beta : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. β'nın eğriliği her yerde sıfırdır ancak ve ancak β'nın görüntüsü bir doğru üzerindedir.*

> ***İspat.***
> Eğrilik sıfırsa doğrudur. *Tanım gereği $\kappa = \| T' \| = \| \beta'' \|$'dir. Bir vektörün normu sıfırdır ancak ve ancak vektörün kendisi sıfırdır; dolayısıyla her s için $\kappa(s) = 0$ olması, her s için $\beta''(s) = \mathbf{0}$ olmasına denktir. β birim hızlı olduğundan sabit bir eğri değildir; Lemma 10.4'in ikinci maddesine göre ivmesi her yerde sıfır olan sabit olmayan bir eğri bir doğrudur.*
> Doğruysa eğrilik sıfırdır. *Örnek 11.2'nde hesapladık: $\beta(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{q}$ ise $\beta'' = \mathbf{0}$ ve $\kappa = 0$. Burada bir ince nokta var: bir doğru üzerinde kalan birim hızlı bir eğri, gerçekten de $\mathbf{p} + s\mathbf{q}$ biçiminde midir? Evet: β, $\mathbf{p}$ noktasından geçen ve $\mathbf{q}$ birim vektörü doğrultusunda olan doğru üzerindeyse, her s için $\beta(s) - \mathbf{p}$ vektörü $\mathbf{q}$'nun bir katıdır, yani $\beta(s) = \mathbf{p} + f(s)\mathbf{q}$ yazılır. Katsayı $f(s) = \big(\, \beta(s) - \mathbf{p} \,\big) \cdot \mathbf{q}$ olduğundan (iki yanı $\mathbf{q}$ ile çarpın ve $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1$ kullanın) f türevlenebilirdir. Hız $\beta' = f'\mathbf{q}$ olur ve birim hız koşulu $| f' | = 1$ verir. f' sürekli ve hiç sıfır olmadığından ara değer teoremiyle işareti sabittir; yani $f(s) = \pm s + s_0$'dır ve uygun bir başlangıç noktasıyla $\beta(s) = \tilde{\mathbf{p}} \pm s\mathbf{q}$ olur. İki durumda da $\beta'' = \mathbf{0}$.*
> *Demek ki eğrilik, eğrinin doğrudan ne kadar saptığını ölçer.*
> ■

11.8 Burulma Sıfırsa Eğri Düzlemseldir

$\mathbb{R}^3$'te tek bir düzlemin içinde kalan eğrilere **düzlem eğrisi** (plane curve) denir. Düzlem eğrileri, en basit helisin bile yaptığı türden ilginç bir burulma yapmaz. Frenet yaklaşımı bunun nedenini gösterdi: eğriyi oskülatör düzleminden çıkaran tek terim $\kappa_0 \tau_0 s^3 B_0/6$'dır ve $\tau_0 = 0$ ise o terim yoktur. O hâlde burulması her yerde sıfır olan bir eğrinin oskülatör düzleminden hiç ayrılmadığını beklemek doğaldır. Bu beklenti doğrudur.

Sonuç 11.1 (Burulmanın Sıfır Olması Düzlemsel Olmaya Denktir). *β, $\mathbb{R}^3$'te eğriliği $\kappa > 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. β bir düzlem eğrisidir ancak ve ancak $\tau = 0$'dır.*

> ***İspat.***
> Düzlem eğrisiyse burulma sıfırdır. *β'nın bir düzlemde kaldığını varsayalım. Yukarıdaki betimlemeye göre bir $\mathbf{p}$ noktası ve sıfırdan farklı bir $\mathbf{q}$ vektörü vardır ki her s için*
>
> $$\big(\, \beta(s) - \mathbf{p} \,\big) \cdot \mathbf{q} = 0.$$
>
> *Sol taraf sabit (sıfır) bir fonksiyondur; türevini alalım. $\mathbf{q}$ sabit olduğundan türevi sıfırdır ve iç çarpımın Leibniz kuralı*
>
> $$\beta'(s) \cdot \mathbf{q} = 0$$
>
> *verir. Bir kez daha türev alırsak*
>
> $$\beta''(s) \cdot \mathbf{q} = 0$$
>
> *çıkar. Birincisi $T \cdot \mathbf{q} = 0$, ikincisi $\kappa N \cdot \mathbf{q} = 0$ demektir; $\kappa > 0$ olduğundan ikincisinden $N \cdot \mathbf{q} = 0$ elde edilir. Yani $\mathbf{q}$ her noktada hem T'ye hem N'ye diktir.*
> *Öte yandan B de hem T'ye hem N'ye diktir. Bir noktada T, N, B bir çatı olduğundan, T ve N'ye dik vektörlerin kümesi B'nin skaler katlarından ibarettir; ortonormal açılım*
>
> $$\mathbf{q} = (\mathbf{q} \cdot T)\,T + (\mathbf{q} \cdot N)\,N + (\mathbf{q} \cdot B)\,B = (\mathbf{q} \cdot B)\,B$$
>
> *verir. Uzunlukları karşılaştırırsak $| \mathbf{q} \cdot B | = \| \mathbf{q} \|$ olur, yani her s için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$B(s) = \varepsilon(s)\,\frac{\mathbf{q}}{\|\,\mathbf{q}\,\|}, \qquad \varepsilon(s) = \pm 1.$$

Buradaki işaret fonksiyonu $\varepsilon(s) = B(s)\cdot \mathbf{q}/\,\|\,\mathbf{q}\,\|$ olarak yazılabildiğinden süreklidir; yalnızca $+1$ ile -1 değerlerini alan sürekli bir fonksiyon ise I aralığı boyunca sabit kalmak zorundadır (aksi hâlde ara değer teoremi gereği aradaki 0 değerini de alırdı). Demek ki B sabit bir alandır ve $B' = \mathbf{0}$'dır. Burulmanın tanımı $B' = -\tau N$ olduğundan ve N hiçbir yerde sıfır olmadığından $\tau = 0$ çıkar.
Burulma sıfırsa düzlem eğrisidir. *Şimdi $\tau = 0$ olsun. O hâlde $B' = -\tau N = \mathbf{0}$'dır; yani B paralel bir alandır ve koordinat fonksiyonları sabittir (Lemma 10.4'in üçüncü maddesi). Bu sabit üçlüyü, nokta–vektör özdeşleştirmesiyle, $\mathbb{R}^3$'ün tek bir noktası gibi düşünebiliriz; kısaca B diyelim.*
İddiamız şu: β, $\beta(0)$ noktasından geçen ve B'ye dik olan düzlemde kalır. (Burada $0 \in I$ olduğunu varsaydık; değilse I'dan herhangi bir s_1 seçilir ve 0 yerine s_1 yazılır.) İddiayı görmek için

$$f(s) = \big(\ \beta(s) - \beta(0)\ \big)\cdot B$$

gerçel değerli fonksiyonunu ele alalım. B sabit olduğundan türevi

$$\frac{df}{ds} = \beta'(s)\cdot B = T\cdot B = 0$$

olur. Türevi her yerde sıfır olan bir fonksiyon bir aralıkta sabittir; ayrıca $f(0) = \mathbf{0}\cdot B = 0$'dır. O hâlde f özdeş olarak sıfırdır:

$$\big(\ \beta(s) - \beta(0)\ \big)\cdot B = 0 \qquad \text{her} \quad s \in I \quad \text{için}\ .$$

Bu tam olarak "$\beta(s)$, $\beta(0)$'dan geçen ve B'ye dik düzlemdedir" demektir. Böylece β bir düzlem eğrisidir; üstelik içinde kaldığı düzlem her noktadaki oskülatör düzlemdir, çünkü B her noktada aynıdır.
■

Bu sonucun pratik değeri büyüktür: bir eğrinin düzlemsel olup olmadığını anlamak için hiçbir düzlem aramaya gerek yoktur, τ'yu hesaplamak yeter.

11.9 Sabit Eğrilikli Düzlem Eğrileri Çemberdir

Örnek 11.1'nde a yarıçaplı çemberin eğriliğinin $1/a$ (sabit) ve burulmasının sıfır olduğunu gördük; Örnek 11.4'de de asli normalin her noktada çemberin merkezine baktığını. Şimdi bunun tersini ispatlayacağız. İspatın fikri tam da bu gözlemden gelir: eğer N hep merkeze bakıyorsa ve merkeze uzaklık $1/\kappa$ ise, β'dan $1/\kappa$ kadar N yönünde gidilerek elde edilen nokta hiç hareket etmemelidir.

Lemma 11.2 (Sabit Eğrilik ve Sıfır Burulma Çemberi Belirler). *β birim hızlı bir eğri olsun. β'nın eğriliği $\kappa > 0$ sabit ve burulması sıfırdır ancak ve ancak β, $1/\kappa$ yarıçaplı bir çemberin parçasıdır.*

İspat.
Sabit eğrilik ve sıfır burulma çemberi verir. *$\kappa > 0$ sabit ve $\tau = 0$ olsun. Sonuç 11.1'ne göre β bir düzlem eğrisidir. Göstermemiz gereken, eğrinin bütün noktalarının sabit bir noktadan $1/\kappa$ uzaklıkta olduğudur; o sabit nokta çemberin merkezi olacaktır.*
Merkez eğrisini *(central curve) kuralım:*

$$\gamma = \beta + \frac{1}{\kappa}\,N.$$

κ sabit olduğundan $1/\kappa$ da sabittir ve türev alırken çarpım kuralının ikinci terimi düşer:

$$\gamma' = \beta' + \frac{1}{\kappa}\,N'.$$

İkinci Frenet formülünü $\tau = 0$ ile kullanalım: $N' = -\kappa T + \tau B = -\kappa T$. Dolayısıyla

$$\gamma' = T + \frac{1}{\kappa}\,(-\kappa T) = T - T = \mathbf{0}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Lemma 10.4'in birinci maddesine göre türevi her yerde sıfır olan bir eğri sabittir. O hâlde γ sabittir; değerine $\mathbf{c}$ diyelim:

$$\beta(s) + \frac{1}{\kappa} N(s) = \mathbf{c} \qquad \text{her} \quad s \quad \text{için} \ .$$

Şimdi $\mathbf{c}$ ile $\beta(s)$ arasındaki uzaklığı ölçelim (Tanım 9.3):

$$d\ (\ \mathbf{c}, \beta(s)\ ) = \| \ \mathbf{c} - \beta(s)\ \| = \| \ \frac{1}{\kappa} N(s)\ \| = \frac{1}{\kappa} \| \ N(s)\ \| = \frac{1}{\kappa}.$$

Böylece β'nın her noktası $\mathbf{c}$'den $1/\kappa$ uzaklıktadır. Eğri hem bir düzlemde kalıyor hem de sabit bir noktadan sabit uzaklıkta; yani o düzlemde $\mathbf{c}$ merkezli, $1/\kappa$ yarıçaplı çemberin üzerindedir.
Çemberin eğriliği sabittir ve burulması sıfırdır. *Tersine, β bir r yarıçaplı çemberin parçası olsun. Böyle bir çember, uygun bir $\mathbf{c}$ noktası ve $\mathbf{c}$'de birbirine dik iki birim vektör e_1, e_2 ile*

$$\beta(s) = \mathbf{c} + r \cos \frac{s}{r}\, e_1 + r \sin \frac{s}{r}\, e_2$$

biçiminde birim hızlı olarak parametrelendirilir. Aynı çemberin başka bir birim hızlı parametrelendirmesi bundan yalnızca $s \mapsto \pm s + s_0$ türünden bir kaydırma ve yön çevirmeyle ayrılır; böyle bir değişim ise eğrilikle burulmayı değiştirmez (Alıştırma 11.11). Bu yüzden κ ile τ'yu yukarıdaki parametrelendirme üzerinde hesaplamak yeter. Gerçekten,

$$\beta'(s) = -\sin \frac{s}{r}\, e_1 + \cos \frac{s}{r}\, e_2$$

olur ve $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = 1$, $e_1 \cdot e_2 = 0$ olduğundan

$$\| \ \beta'(s)\ \|^2 = \sin^2 \frac{s}{r} + \cos^2 \frac{s}{r} = 1.$$

İkinci türev

$$T'(s) = \beta''(s) = -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}\, e_1 - \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}\, e_2$$

ve uzunluğu $1/r$'dir; yani $\kappa = 1/r$ sabittir ve pozitiftir. Asli normal

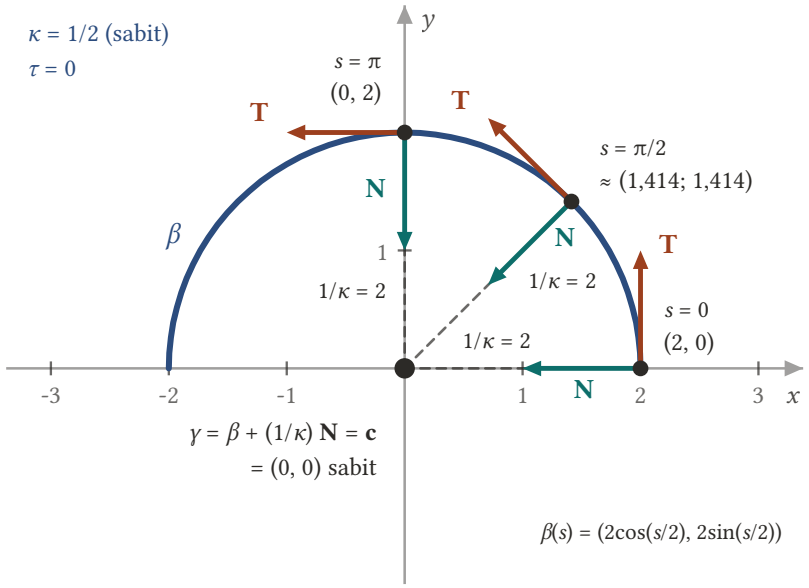
$$N(s) = r\, T'(s) = -\cos \frac{s}{r}\, e_1 - \sin \frac{s}{r}\, e_2$$

olur. T ile N'nin ikisi de e_1 ile e_2'nin gerdiği düzlemin vektörleridir; dolayısıyla β o düzlemde kalır ve bir düzlem eğrisidir. Sonuç 11.1'nin ilk yönü gereği $\tau = 0$'dır. (Doğrudan da görülür: $B = T \times N$ hesaplanırsa $e_1 \times e_2$'ye eşit sabit bir vektör çıkar, türevi sıfırdır.)
Son olarak yarıçapın gerçekten $1/\kappa$ olduğuna dikkat edelim: $\kappa = 1/r$ olduğundan $r = 1/\kappa$.
Somut bir örnekle bitirelim. $\kappa = 1/2$ sabit ve $\tau = 0$ ise eğri $1/\kappa = 2$ yarıçaplı bir çemberdir; gerçekten Örnek 11.4'deki

$$\beta(s) = \left(2\cos\frac{s}{2}, 2\sin\frac{s}{2}, 0\right), \qquad N(s) = \left(-\cos\frac{s}{2}, -\sin\frac{s}{2}, 0\right)$$

eğrisinde $\gamma = \beta + 2N = (0,0,0)$ sabittir: merkez orijindir ve her nokta orijinden tam 2 uzaklıktadır. Örneğin $s = 0$'da $\beta = (2,0,0)$, $s = \pi/2$'de $\beta \approx (1{,}414;\ 1{,}414;\ 0)$, $s = \pi$'de $\beta = (0,2,0)$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



*Şekil 11.4: Eğriliği κ = 1/2 sabit, burulması sıfır olan β eğrisi 1/κ = 2 yarıçaplı bir çemberin parçasıdır; şekildeki düzlem, eğrinin içinde kaldığı z = 0 düzlemidir ve noktalar orada (x, y) çiftiyle yazılmıştır. İşaretli üç noktada birim teğet **T** (turuncu) çembere teğettir; asli normal **N** (yeşil) ona diktir, birim uzunluktadır ve merkeze bakar. Her noktadan **N** yönünde 1/κ = 2 kadar ilerlenince (kesikli gri parçalar) hep aynı yere varılır: γ = β + (1/κ)**N** sabittir ve değeri çemberin merkezi **c** = (0, 0)'dır. Eğrinin her noktası bu sabit noktadan tam 1/κ = 2 uzaklıktadır.*

■

11.10 Küre Üzerindeki Eğriler

Frenet formülleriyle çalışmanın tipik yöntemi şudur: problemin verisini uygun bir eşitlik olarak yaz, türev al, çıkan terimleri Frenet formülleriyle sadeleştir, gerekirse bir kez daha türev al. Bunu güzel bir örnekte görelim.

Bir eğrinin tümüyle orijin merkezli a yarıçaplı bir kürenin üzerinde kaldığını düşünelim. Küreden çıkmamak için eğri kıvrılmak zorundadır; en az kıvrılan eğri büyük çember olmalıdır ve büyük çemberin yarıçapı a, eğriliği $1/a$'dır. Bir kürenin üzerinde kalan eğrilere **küresel eğri** (spherical curve) denir. O hâlde küresel bir eğrinin eğriliğinin $1/a$'dan küçük olamayacağını bekleriz.

Önerme 11.3 (Küresel Bir Eğrinin Eğriliği Küreninkinden Küçük Olamaz). *β, orijin merkezli a yarıçaplı kürenin üzerinde kalan ve eğriliği $\kappa > 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. O hâlde her s için*

$$\kappa(s) \geq \frac{1}{a}.$$

İspat.
Kürenin her noktası orijinden a uzaklıkta olduğundan, nokta–vektör özdeşleştirmesiyle her s için

$$\beta \cdot \beta = a^2$$

yazabiliriz. Türev alalım:

$$2\,\beta' \cdot \beta = 0, \qquad \text{yani} \qquad \beta \cdot T = 0.$$

Bir kez daha türev alalım:

$$\beta' \cdot T + \beta \cdot T' = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Burada $\beta' \cdot T = T \cdot T = 1$ ve birinci Frenet formülüyle $\beta \cdot T' = \kappa\,(\beta \cdot N)$'dir. O hâlde

$$1 + \kappa\,(\beta \cdot N) = 0, \qquad \text{yani} \qquad \kappa\,(\beta \cdot N) = -1.$$

Bu eşitlik zaten $\beta \cdot N$'nin sıfır olamayacağını söylüyor. Mutlak değer alırsak $\kappa \mid \beta \cdot N \mid = 1$, yani

$$\kappa = \frac{1}{\mid \beta \cdot N \mid}.$$

Şimdi Schwarz eşitsizliğini kullanalım:

$$\mid \beta \cdot N \mid \leq \| \beta \| \, \| N \| = a \cdot 1 = a.$$

Paydanın en fazla a olması, kesirin en az $1/a$ olması demektir:

$$\kappa = \frac{1}{\mid \beta \cdot N \mid} \geq \frac{1}{a}.$$

Eşitlik ne zaman sağlanır? Schwarz eşitsizliğinde eşitlik ancak β ile N paralel olduğunda, yani $N = \pm \beta / a$ olduğunda gerçekleşir. Bu durumda asli normal her noktada kürenin merkezine bakar; bu da eğrinin bir büyük çember olduğu durumdur.

■

Aynı yöntemi sürdürerek bir eğrinin küresel olmasının eğrilik ve burulma cinsinden gerek ve yeter koşulu da bulunabilir; bunu alıştırmalarda yapacağız.

11.11 Alıştırmalar

Alıştırma 11.1 (Bir Birim Hızlı Eğrinin Frenet Aparatı).

$$\beta(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s,\, 1 - \sin s,\, -\frac{3}{5}\cos s \right)$$

birim hızlı eğrisinin Frenet aparatı κ, τ, T, N, B'yi hesaplayınız.

Çözüm.
Önce birim hızlı olduğunu doğrulayalım. Koordinat türevleri $-\frac{4}{5}\sin s$, $-\cos s$, $\frac{3}{5}\sin s$'tir, yani

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin s,\, -\cos s,\, \frac{3}{5}\sin s \right).$$

Uzunluğun karesi

$$\frac{16}{25}\sin^2 s + \cos^2 s + \frac{9}{25}\sin^2 s = \sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

çünkü $\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$. Eğri birim hızlıdır.
Eğrilik. Bir kez daha türev alalım:

$$T'(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s,\, \sin s,\, \frac{3}{5}\cos s \right).$$

Uzunluğun karesi aynı hesapla $\cos^2 s + \sin^2 s = 1$ çıkar, yani

$$\kappa(s) = 1.$$

Asli normal. $\kappa = 1$ olduğundan $N = T'/\kappa = T'$:

$$N(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s,\, \sin s,\, \frac{3}{5}\cos s \right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Binormal. $B = T \times N$ bileşenlerini tek tek yazalım:

$$B_1 = (-\cos s)\left(\frac{3}{5}\cos s\right) - \left(\frac{3}{5}\sin s\right)(\sin s) = -\frac{3}{5},$$
$$B_2 = \left(\frac{3}{5}\sin s\right)\left(-\frac{4}{5}\cos s\right) - \left(-\frac{4}{5}\sin s\right)\left(\frac{3}{5}\cos s\right) = 0,$$
$$B_3 = \left(-\frac{4}{5}\sin s\right)(\sin s) - (-\cos s)\left(-\frac{4}{5}\cos s\right) = -\frac{4}{5}.$$

Yani $B(s) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$; sabit bir alan. Denetim: uzunluğunun karesi $\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.
Burulma. B sabit olduğundan $B' = \mathbf{0}$'dır ve $B' = -\tau N$ ile $N \neq \mathbf{0}$ olmasından

$$\tau(s) = 0$$

çıkar.
■

Alıştırma 11.2 (Aynı Eğrinin Bir Çember Olduğunu Göstermek).

$$\beta(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5}\cos s\right)$$

birim hızlı eğrisinin bir çember olduğunu gösteriniz; merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 11.1'ta bu eğrinin eğriliğinin $\kappa = 1$ (sabit ve pozitif) ve burulmasının $\tau = 0$ olduğunu bulmuştuk. Lemma 11.2 tam olarak bu durumda eğrinin $1/\kappa = 1$ yarıçaplı bir çemberin parçası olduğunu söyler.
Merkezi lemmadaki merkez eğrisinden okuyalım: $\mathbf{c} = \beta + \frac{1}{\kappa}N = \beta + N$. Bileşen bileşen toplarsak

$$c_1 = \frac{4}{5}\cos s - \frac{4}{5}\cos s = 0,$$
$$c_2 = (1 - \sin s) + \sin s = 1,$$
$$c_3 = -\frac{3}{5}\cos s + \frac{3}{5}\cos s = 0.$$

Gerçekten sabit: $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$.
Doğrudan denetim de yapalım. $\beta(s) - \mathbf{c}$ farkının normunun karesi

$$\frac{16}{25}\cos^2 s + \sin^2 s + \frac{9}{25}\cos^2 s = \cos^2 s + \sin^2 s = 1,$$

yani her nokta $(0, 1, 0)$'dan tam 1 birim uzaklıktadır. Ayrıca eğri, $(0, 1, 0)$ noktasından geçen ve $B = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$'e dik olan düzlemde kalır: bu düzlemin denklemi $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z = 0$, yani $3x + 4z = 0$'dır ve

$$3 \cdot \frac{4}{5}\cos s + 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\cos s\right) = \frac{12}{5}\cos s - \frac{12}{5}\cos s = 0$$

olduğundan sağlanır. Eğri $(0, 1, 0)$ merkezli, 1 yarıçaplı, $3x + 4z = 0$ düzlemindeki tam çemberdir.
■

Alıştırma 11.3 (Kuvvet Fonksiyonlu Bir Eğrinin Birim Hızlı Olması). $-1 < s < 1$ aralığında tanımlı

$$\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

eğrisinin birim hızlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonlarının türevlerini alalım. Birincisi için zincir kuralıyla

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(1+s)^{1/2} = \frac{\sqrt{1+s}}{2}.$$

İkincisi için içteki türev -1 olduğundan

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{(1-s)^{3/2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{1-s}}{2}.$$

Üçüncüsünün türevi $1/\sqrt{2}$'dir. O hâlde

$$\beta'(s) = \left(\frac{\sqrt{1+s}}{2}, -\frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$-1 < s < 1$ olduğundan iki karekök de tanımlıdır ve eğri bu aralıkta türevlenebilirdir. Uzunluğun karesi

$$\frac{1+s}{4} + \frac{1-s}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

Demek ki $\| \beta'(s) \| = 1$: eğri birim hızlıdır.
■

Alıştırma 11.4 (Kuvvet Fonksiyonlu Eğrinin Frenet Aparatı). $-1 < s < 1$ aralığında tanımlı birim hızlı

$$\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

eğrisinin Frenet aparatını hesaplayınız.

Çözüm.
Alıştırma 11.3'de bulduğumuz gibi

$$T(s) = \left(\frac{\sqrt{1+s}}{2}, -\frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Eğrilik vektörü. Karekök türevlerini alalım:

$$T'(s) = \left(\frac{1}{4\sqrt{1+s}}, \frac{1}{4\sqrt{1-s}}, 0\right).$$

(İkinci bileşende iki eksi işareti birbirini götürdü.) Uzunluğun karesi

$$\frac{1}{16}\left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right) = \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{1-s^2} = \frac{1}{8(1-s^2)}.$$

Eğrilik. Karekök alalım ($-1 < s < 1$ için $1 - s^2 > 0$):

$$\kappa(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\sqrt{1-s^2}}.$$

$s = 0$'da $\kappa = 1/(2\sqrt{2}) \approx 0{,}3536$'dır; s uç noktalara yaklaşırken $\kappa \to \infty$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Asli normal. $N = T'/\kappa$, yani T' ile $2\sqrt{2}\sqrt{1-s^2}$'yi çarpacağız. $\sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-s}\sqrt{1+s}$ olduğundan birinci bileşen

$$2\sqrt{2}\,\sqrt{1-s}\,\sqrt{1+s}\cdot\frac{1}{4\sqrt{1+s}} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{1-s}}{2} = \frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{2}},$$

ikinci bileşen benzer biçimde $\sqrt{1+s}/\sqrt{2}$ olur. Yani

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Denetim: $\| N \|^2 = \frac{1-s}{2} + \frac{1+s}{2} = 1$.
Binormal. $B = T \times N$ bileşenleri:

$$B_1 = \left(-\frac{\sqrt{1-s}}{2}\right)\cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{1+s}}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1+s}}{2}\cdot 0 = \frac{\sqrt{1-s}}{2},$$

$$B_3 = \frac{\sqrt{1+s}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1-s}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{2}} = \frac{(1+s)+(1-s)}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Yani

$$B(s) = \left(-\frac{\sqrt{1+s}}{2}, \frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Burulma. B'nin türevini alalım:

$$B'(s) = \left(-\frac{1}{4\sqrt{1+s}}, -\frac{1}{4\sqrt{1-s}}, 0\right) = -T'(s).$$

$T' = \kappa N$ olduğundan $B' = -\kappa N$'dir. Burulmanın tanımı $B' = -\tau N$ olduğundan

$$\tau(s) = \kappa(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\sqrt{1-s^2}}.$$

Bu eğride eğrilikle burulma her noktada eşittir; özellikle $\tau \neq 0$ olduğundan eğri düzlemsel değildir (Sonuç 11.1).
■

Alıştırma 11.5 (Helis İçin Frenet Formüllerinin Doğrudan Denetimi). $a > 0, b \neq 0, c = \sqrt{a^2+b^2}$ olmak üzere

$$\beta(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$$

helisi için hesaplanmış κ, τ, T, N, B değerlerini üç Frenet formülünde yerine koyarak formülleri doğrudan denetleyiniz.

Çözüm.
Örnek 11.5'ten, $u = s/c$ kısaltmasıyla:

$$T = \left(-\frac{a}{c}\sin u, \frac{a}{c}\cos u, \frac{b}{c}\right), \qquad N = (-\cos u, -\sin u, 0),$$

$$B = \left(\frac{b}{c}\sin u, -\frac{b}{c}\cos u, \frac{a}{c}\right), \qquad \kappa = \frac{a}{c^2}, \qquad \tau = \frac{b}{c^2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Türev alırken $du/ds = 1/c$ olduğunu unutmayalım.
Birinci formül: $T' = \kappa N$. Sol taraf

$$T'(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos u, -\frac{a}{c^2}\sin u, 0\right).$$

Sağ taraf

$$\kappa N = \frac{a}{c^2}\,(-\cos u, -\sin u, 0) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos u, -\frac{a}{c^2}\sin u, 0\right).$$

İkisi aynıdır.
İkinci formül: $N' = -\kappa T + \tau B$. Sol taraf

$$N'(s) = \left(\frac{1}{c}\sin u, -\frac{1}{c}\cos u, 0\right).$$

Sağ tarafı bileşen bileşen hesaplayalım. Birinci bileşen:

$$-\frac{a}{c^2}\left(-\frac{a}{c}\sin u\right) + \frac{b}{c^2}\left(\frac{b}{c}\sin u\right) = \frac{a^2+b^2}{c^3}\sin u = \frac{1}{c}\sin u,$$

çünkü $a^2 + b^2 = c^2$. İkinci bileşen:

$$-\frac{a}{c^2}\left(\frac{a}{c}\cos u\right) + \frac{b}{c^2}\left(-\frac{b}{c}\cos u\right) = -\frac{a^2+b^2}{c^3}\cos u = -\frac{1}{c}\cos u.$$

Üçüncü bileşen:

$$-\frac{a}{c^2}\cdot\frac{b}{c} + \frac{b}{c^2}\cdot\frac{a}{c} = -\frac{ab}{c^3} + \frac{ab}{c^3} = 0.$$

Sağ taraf $\left(\frac{1}{c}\sin u, -\frac{1}{c}\cos u, 0\right)$ çıktı; sol tarafla aynı.
Üçüncü formül: $B' = -\tau N$. Sol taraf

$$B'(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos u, \frac{b}{c^2}\sin u, 0\right).$$

Sağ taraf

$$-\frac{b}{c^2}\,(-\cos u, -\sin u, 0) = \left(\frac{b}{c^2}\cos u, \frac{b}{c^2}\sin u, 0\right).$$

İkisi aynıdır. Üç formül de sağlanır.
Somut bir sayısal denetim: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ ve $s = 0$ ($u = 0$) alalım. $T = (0;\,0{,}6;\,0{,}8)$, $N = (-1, 0, 0)$, $B = (0;\,-0{,}8;\,0{,}6)$, $\kappa = 0{,}12$, $\tau = 0{,}16$. İkinci formülün sağ tarafı

$$-0{,}12\,(0;\,0{,}6;\,0{,}8) + 0{,}16\,(0;\,-0{,}8;\,0{,}6) = (0;\,-0{,}2;\,0),$$

sol tarafı ise

$$N'(0) = \frac{1}{c}\,(\sin 0, -\cos 0, 0) = (0;\,-0{,}2;\,0).$$

İkisi uyuşuyor.
■

Alıştırma 11.6 (Frenet Çatısının Vektörel Çarpım Özdeşlikleri). Birim hızlı ve $\kappa > 0$ olan bir eğrinin Frenet çatısı için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T = N \times B = -B \times N,$$
$$N = B \times T = -T \times B,$$
$$B = T \times N = -N \times T$$

özdeşliklerini ispatlayınız.

Çözüm.
Vektörel çarpım ters değişmelidir, yani $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\,\mathbf{w} \times \mathbf{v}$; bu, determinantta iki satırın yer değiştirmesinin işareti değiştirmesinden çıkar. Dolayısıyla her satırdaki iki eşitlikten biri ötekinden hemen gelir; yalnızca soldaki eşitlikleri ispatlamamız yeter. Üçüncü satırın solu B'nin tanımıdır, geriye ilk iki satır kalır.
Bir ön hazırlık: üçlü çarpımların determinantla yazılışı. Her noktada T, N, B teğet vektörlerinin Öklid koordinatlarını satır olarak yazıp 3×3 bir matris kuralım. Tanım 9.9'deki biçimsel determinant açılımına göre, herhangi üç teğet vektör $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ için

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

olur. Bir determinantta iki satırın yer değiştirmesi işareti değiştirdiğinden, satırların çevrimsel (dairesel) kaydırılması iki yer değiştirmeye karşılık gelir ve determinantı değiştirmez:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

Şimdi $\mathbf{u} = T$, $\mathbf{v} = N$, $\mathbf{w} = B$ alalım. $B = T \times N$ olduğundan

$$\det(B, T, N) = B \cdot (T \times N) = B \cdot B = 1,$$

ve çevrimsel kaydırmayla $\det(T, N, B) = 1$, $\det(N, B, T) = 1$.
Birinci özdeşlik: $N \times B = T$. Lemma 9.5'ne göre $N \times B$ hem N'ye hem B'ye diktir. T, N, B bir çatı olduğundan (Lemma 11.1) ortonormal açılım (Teorem 9.1)

$$N \times B = \big(\,(N \times B) \cdot T\,\big)\,T + \big(\,(N \times B) \cdot N\,\big)\,N + \big(\,(N \times B) \cdot B\,\big)\,B$$

verir; son iki katsayı sıfırdır. İlk katsayı ise

$$(N \times B) \cdot T = T \cdot (N \times B) = \det(T, N, B) = 1.$$

Demek ki $N \times B = T$.
İkinci özdeşlik: $B \times T = N$. Aynı yolla $B \times T$ hem B'ye hem T'ye diktir, dolayısıyla N'nin bir katıdır ve katsayı

$$(B \times T) \cdot N = N \cdot (B \times T) = \det(N, B, T) = 1$$

olur. Yani $B \times T = N$.
Ters değişme kuralını uygularsak $-B \times N = N \times B = T$, $-T \times B = B \times T = N$ ve $-N \times T = T \times N = B$ çıkar. Altı özdeşliğin hepsi ispatlanmıştır.
Bunlar, sağ el kuralının Frenet çatısı için okunuşudur: T, N, B sırası sağ el sırasıdır ve listedeki her formül bu sıranın çevrimsel kaydırmalarından biridir.
■

Alıştırma 11.7 (Frenet Formüllerinin Tek Bir Vektörel Çarpımla Yazılışı). Birim hızlı ve $\kappa > 0$ olan bir β eğrisi üzerinde $A = \tau T + \kappa B$ vektör alanını tanımlayalım. Frenet formüllerinin

$$T' = A \times T, \qquad N' = A \times N, \qquad B' = A \times B$$

biçimine girdiğini gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Vektörel çarpım her iki değişkeninde lineerdir; bu, determinant açılımında satırların lineerliğinden gelir. Bu yüzden $A = \tau T + \kappa B$ ifadesini çarpımların içine dağıtabiliriz. Ayrıca Alıştırma 11.6'ndeki özdeşlikleri ve bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımının sıfır olduğunu kullanacağız.
Birinci formül.

$$A \times T = \tau\,(T \times T) + \kappa\,(B \times T) = \tau\,\mathbf{0} + \kappa N = \kappa N = T'.$$

İkinci formül.

$$A \times N = \tau\,(T \times N) + \kappa\,(B \times N) = \tau B + \kappa(-T) = -\kappa T + \tau B = N'.$$

Burada $B \times N = -\,N \times B = -T$ kullanıldı.
Üçüncü formül.

$$A \times B = \tau\,(T \times B) + \kappa\,(B \times B) = \tau(-N) + \mathbf{0} = -\tau N = B'.$$

Burada $T \times B = -\,B \times T = -N$ kullanıldı. Üç formül de istenen biçimdedir.
Bu yazılışın anlamı şudur: Frenet çatısı eğri boyunca, her an A vektörü etrafında dönen katı bir cisim gibi davranır. A'nın uzunluğu $\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$'dir ve dönmenin hızını verir. Helis örneğinde ($a=3$, $b=4$) bu sayı $\sqrt{0{,}12^2 + 0{,}16^2} = 0{,}2 = 1/c$ çıkar; Örnek 11.6'de gördüğümüz $\kappa^2+\tau^2 = 1/c^2$ eşitliğiyle uyuşur.
■

Alıştırma 11.8 (Oskülatör Çemberin Varlığı ve Tekliği). Bir çemberin birim hızlı parametrelendirmesi, $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = 1$ ve $e_1 \cdot e_2 = 0$ olmak üzere

$$\gamma(s) = \mathbf{c} + r\cos\frac{s}{r}\,e_1 + r\sin\frac{s}{r}\,e_2$$

biçiminde yazılır. β birim hızlı ve $\kappa(0) > 0$ olan bir eğri olsun.

$$\gamma(0) = \beta(0), \qquad \gamma'(0) = \beta'(0), \qquad \gamma''(0) = \beta''(0)$$

koşullarını sağlayan **bir ve yalnız bir** γ çemberi bulunduğunu gösteriniz; merkezi $\mathbf{c}$ ile yarıçapı r'yi bulunuz.

Çözüm.
Önce γ'nın $s=0$'daki üç değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \mathbf{c} + r\,e_1,\\
\gamma'(s) &= -\sin\frac{s}{r}\,e_1 + \cos\frac{s}{r}\,e_2 \Rightarrow \gamma'(0) = e_2,\\
\gamma''(s) &= -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\,e_1 - \frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\,e_2 \Rightarrow \gamma''(0) = -\frac{1}{r}\,e_1.
\end{aligned}$$

Öte yandan β için $\beta'(0) = T_0$ ve $\beta''(0) = \kappa_0 N_0$'dır ($\kappa_0 = \kappa(0) > 0$).
Teklik. Koşulları sırayla dayatalım.
İkinci koşul $e_2 = T_0$ verir; e_2 tek türlü belirlendi.
Üçüncü koşul $-\frac{1}{r}e_1 = \kappa_0 N_0$, yani $e_1 = -r\kappa_0 N_0$ verir. Her iki yanın uzunluğunu alalım: $\|\,e_1\,\| = 1$ ve $\|\,N_0\,\| = 1$ olduğundan $r\kappa_0 = 1$ ($r>0$, $\kappa_0>0$). Buradan

$$r = \frac{1}{\kappa_0}, \qquad e_1 = -N_0.$$

Birinci koşul $\mathbf{c} + r e_1 = \beta(0)$, yani

$$\mathbf{c} = \beta(0) - r e_1 = \beta(0) + \frac{1}{\kappa_0}\,N_0$$

verir. Böylece r, e_1, e_2 ve $\mathbf{c}$ koşullar tarafından tek türlü belirlenir: birden çok çember olamaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

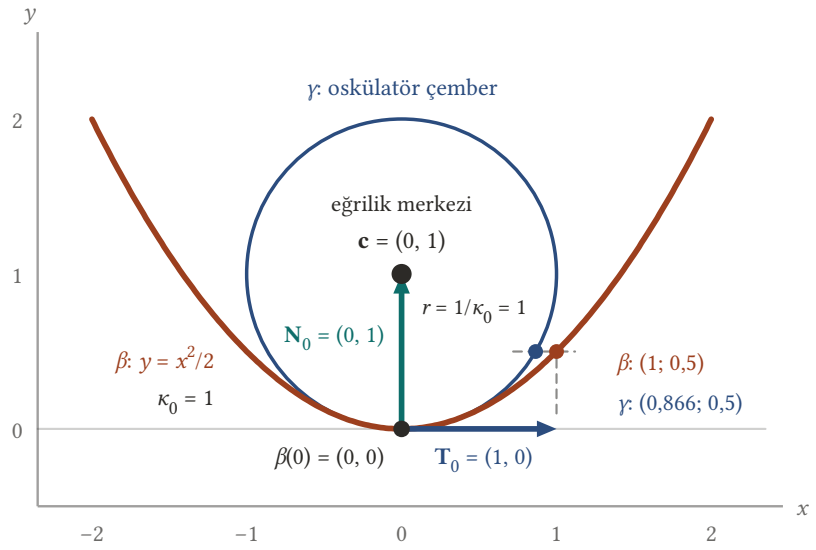
Varlık. Bulduğumuz değerlerin gerçekten bir çember tanımladığını denetleyelim. $e_1 = -N_0$ ve $e_2 = T_0$ birim vektörlerdir ve Lemma 11.1 gereği birbirine diktir; $r = 1/\kappa_0 > 0$'dır. Bu verilerle kurulan

$$\gamma(s) = \beta(0) + \frac{1}{\kappa_0} N_0 - \frac{1}{\kappa_0}\cos(\kappa_0 s)\, N_0 + \frac{1}{\kappa_0}\sin(\kappa_0 s)\, T_0$$

çemberi, yukarıdaki hesapların tersinden okunmasıyla üç koşulu da sağlar: $\gamma(0) = \beta(0), \gamma'(0) = T_0 = \beta'(0)$ ve $\gamma''(0) = -\kappa_0 e_1 = \kappa_0 N_0 = \beta''(0)$.
Bu γ çemberine β'nın $\beta(0)$'daki **oskülatör çemberi** (osculating circle), **c** noktasına **eğrilik merkezi** (center of curvature), $r = 1/\kappa_0$ sayısına da **eğrilik yarıçapı** (radius of curvature) denir. Aynı sonuç 0 yerine herhangi bir s_0 alındığında da geçerlidir.
Somut bir örnek: $a = 3$, $b = 4$ helisinde $\kappa_0 = 3/25$ olduğundan eğrilik yarıçapı $r = 25/3 \approx 8{,}33$'tür ve eğrilik merkezi

$$\mathbf{c} = (3,0,0) + \frac{25}{3}(-1,0,0) = \left(-\frac{16}{3}, 0, 0\right)$$

olur. Helisin üzerinde durduğu silindirin yarıçapı yalnızca 3 iken oskülatör çemberin yarıçapı 8,33'tür: helis, çemberden daha yumuşak döner.
Resmi oskülatör düzlemde görmek en kolayıdır. Önerme 11.1'e göre eğrinin bu düzlemdeki ikinci mertebeden görüntüsü $y = \kappa_0 x^2/2$ parabolüdür; $\kappa_0 = 1$ alırsak parabol $y = x^2/2$, oskülatör çember de $(0,1)$ merkezli ve 1 yarıçaplı çemberdir. İkisi orijinde birbirine öyle yakındır ki $x = 1$'de parabol $(1;\,0{,}5)$ noktasındayken çemberin aynı yükseklikteki noktası $(0{,}866;\,0{,}5)$'tir.



Şekil 11.5: $\kappa_0 = 1$ alındığında β'nın oskülatör düzlemdeki ikinci mertebeden görüntüsü $y = x^2/2$ parabolü (turuncu), oskülatör çemberi γ ise $(0,\,1)$ merkezli ve $r = 1/\kappa_0 = 1$ yarıçaplı çemberdir (mavi). Eğrilik merkezi **c**, $\beta(0)$ noktasından $\mathbf{N}_0$ yönünde $1/\kappa_0$ kadar ilerleyerek bulunur: yeşil ok tam **c**'de biter, yani bu ok aynı zamanda yarıçaptır. Çember orijinde parabole içten teğettir; iki eğrinin ortak teğet yönü $\mathbf{T}_0 = (1,\,0)$, ona dik olan normal yön ise $\mathbf{N}_0 = (0,\,1)$'dir. İkisi orijin yakınında öyle yakındır ki $y = 0{,}5$ yüksekliğinde parabol $(1;\,0{,}5)$ noktasındayken çember $(0{,}866;\,0{,}5)$ noktasındadır.

■

Alıştırma 11.9 (Oskülatör Çember Oskülatör Düzlemdedir). β birim hızlı ve $\kappa(0) > 0$ olan bir eğri, γ da β'nın $\beta(0)$'daki oskülatör çemberi olsun. γ'nın tümüyle β'nın $\beta(0)$'daki oskülatör düzleminde kaldığını gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Alıştırma 11.8'te oskülatör çemberin

$$\gamma(s) = \beta(0) + \frac{1}{\kappa_0} N_0 - \frac{1}{\kappa_0}\cos(\kappa_0 s)\, N_0 + \frac{1}{\kappa_0}\sin(\kappa_0 s)\, T_0$$

olduğunu bulmuştuk. Oskülatör düzlem, $\beta(0)$ noktasından geçen ve B_0'a dik olan düzlemdir (Tanım 11.4); yani bir $\mathbf{r}$ noktası bu düzlemdedir ancak ve ancak

$$\big(\, \mathbf{r} - \beta(0) \,\big) \cdot B_0 = 0.$$

$\mathbf{r} = \gamma(s)$ alalım. Farkı düzenleyelim:

$$\gamma(s) - \beta(0) = \frac{1 - \cos(\kappa_0 s)}{\kappa_0}\, N_0 + \frac{\sin(\kappa_0 s)}{\kappa_0}\, T_0.$$

Sağ taraf, T_0 ile N_0'ın bir lineer birleşimidir. B_0 ile iç çarpımını alalım; Lemma 11.1 gereği $T_0 \cdot B_0 = 0$ ve $N_0 \cdot B_0 = 0$ olduğundan

$$\big(\, \gamma(s) - \beta(0) \,\big) \cdot B_0 = \frac{1 - \cos(\kappa_0 s)}{\kappa_0}\,(N_0 \cdot B_0) + \frac{\sin(\kappa_0 s)}{\kappa_0}\,(T_0 \cdot B_0) = 0.$$

Bu her s için doğrudur; demek ki çemberin her noktası oskülatör düzlemdedir.
Bu, oskülatör düzlemin adının hakkını verir: β'yı $\beta(0)$ yakınında en iyi taklit eden çember o düzlemde yatar. Önerme 11.1'deki parabolün de aynı düzlemde kaldığını hatırlayalım; parabolle çember, β'nın aynı ikinci mertebeden davranışının iki farklı ifadesidir.
■

Alıştırma 11.10 (İki Birim Hızlı Parametrelendirmeyi Bağlayan Fonksiyon). α ile onun bir yeniden parametrelendirmesi olan $\bar{\alpha} = \alpha(h)$ eğrilerinin ikisi de birim hızlı olsun. Bir s_0 sayısı için $h(s) = \pm s + s_0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Yeniden parametrelendirmenin hız formülü (Lemma 4.1)

$$\bar{\alpha}'(s) = \frac{dh}{ds}(s)\alpha'\,\big(\, h(s) \,\big)$$

der. Her iki yanın normunu alalım. Bir teğet vektörün skalerle çarpımının normu, skalerin mutlak değeriyle normun çarpımıdır:

$$\| \,\bar{\alpha}'(s)\, \| = \left|\frac{dh}{ds}(s)\right| \text{parallel} \alpha'\,\big(\, h(s) \,\big) \text{parallel}.$$

α birim hızlı olduğundan sağdaki norm 1'dir; $\bar{\alpha}$ birim hızlı olduğundan sol taraf 1'dir. Dolayısıyla her s için

$$\left|\frac{dh}{ds}(s)\right| = 1, \qquad \text{yani} \qquad \frac{dh}{ds}(s) = 1 \;\text{ veya }\; -1.$$

h türevlenebilir olduğundan dh/ds süreklidir ve hiçbir yerde sıfır değildir. Sürekli bir fonksiyon bir aralıkta hem pozitif hem negatif değer alsaydı ara değer teoremine göre arada sıfır olurdu. O hâlde dh/ds tanım aralığı boyunca ya hep $+1$'dir ya hep -1.
$dh/ds \equiv 1$ durumunda $h(s) - s$ fonksiyonunun türevi sıfırdır, yani $h(s) - s$ sabittir: bir s_0 için $h(s) = s + s_0$. $dh/ds \equiv -1$ durumunda aynı biçimde $h(s) + s$ sabittir: $h(s) = -s + s_0$. İki durum birlikte $h(s) = \pm s + s_0$ demektir.
Geometrik okunuşu: aynı rotayı birim hızla dolaşmanın tek serbestliği, başlangıç anını kaydırmak (s_0) ve yönü ters çevirmektir ($\pm$).
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 11.11 (Birim Hızlı Yeniden Parametrelendirmede Frenet Aparatı). α ile $\bar{\alpha} = \alpha(h)$ eğrilerinin ikisi de birim hızlı ve α'nın eğriliği $\kappa > 0$ olsun. Alıştırma 11.10'teki işaretle uyumlu olarak

$$\bar{T} = \pm\, T(h), \quad \bar{N} = N(h), \quad \bar{\kappa} = \kappa(h), \quad \bar{\tau} = \tau(h), \quad \bar{B} = \pm\, B(h)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Alıştırma 11.10'e göre $h(s) = \varepsilon s + s_0$'dır; burada ε ya $+1$ ya -1'dir ve $dh/ds = \varepsilon$'dur. Zincir kuralını uygularken $\varepsilon^2 = 1$ olduğunu sık sık kullanacağız.
Birim teğet. Hız formülüyle

$$\bar{T}(s) = \bar{\alpha}'(s) = \varepsilon\, \alpha'(h(s)) = \varepsilon\, T(h(s)).$$

Yön çeviren durumda ($\varepsilon = -1$) teğet ters döner; beklenen bir şey.
Eğrilik vektörü. Bir kez daha türev alalım. $\bar{T} = \varepsilon\, T(h)$ olduğundan, eğri üzerindeki alanlar için zincir kuralıyla

$$\bar{T}'(s) = \varepsilon\, \frac{dh}{ds}(s) T'(h(s)) = \varepsilon^2\, T'(h(s)) = T'(h(s)).$$

İşaret kayboldu: eğrilik vektörü yönden bağımsızdır. Bu şaşırtıcı değildir, çünkü eğrilik vektörü ikinci türevdir ve yön çevirmede iki eksi çarpılır.
Eğrilik. Normu alalım:

$$\bar{\kappa}(s) = \| \bar{T}'(s) \| = \| T'(h(s)) \| = \kappa(h(s)).$$

Özellikle $\bar{\kappa} > 0$'dır, yani $\bar{\alpha}$ için de Frenet çatısı tanımlıdır.
Asli normal.

$$\bar{N}(s) = \frac{\bar{T}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{T'(h(s))}{\kappa(h(s))} = N(h(s)).$$

Demek ki yön çevirsek bile asli normaller aynı yöne bakar.
Binormal.

$$\bar{B}(s) = \bar{T}(s) \times \bar{N}(s) = \varepsilon\, T(h(s)) \times N(h(s)) = \varepsilon\, B(h(s)).$$

Burulma. $\bar{B} = \varepsilon\, B(h)$ ifadesinin türevi

$$\bar{B}'(s) = \varepsilon\, \frac{dh}{ds}(s) B'(h(s)) = B'(h(s)) = -\tau(h(s))\, N(h(s)).$$

Öte yandan tanım gereği $\bar{B}' = -\bar{\tau}\, \bar{N}$ ve $\bar{N} = N(h)$'tir. İki ifadeyi karşılaştırıp $N(h(s)) \neq \mathbf{0}$ olduğunu kullanırsak

$$\bar{\tau}(s) = \tau(h(s)).$$

Özet: κ, τ ve N yön değişiminden etkilenmez; yalnızca T ile B işaret değiştirir. Eğrilikle burulmanın rotanın kendisine ait büyüklükler olduğu, dolaşma yönüne bağlı olmadığı böylece kesinleşir.
■

Alıştırma 11.12 (Düzlem Eğriliği İçin Frenet Denklemleri). $\mathbb{R}^2$'de birim hızlı bir $\beta(s) = \big(\, x(s), y(s) \,\big)$ eğrisi için birim teğet her zamanki gibi $T = \beta' = (x', y')$'dir; **birim normal** ise T'yi $+90^\circ$ döndürerek

$$N = (-y', x')$$

ile tanımlanır. Böylece T' ile N aynı doğrultudadır ve β'nın **düzlem eğriliği** (plane curvature) $\tilde{\kappa}$, $T' = \tilde{\kappa} N$ denklemiyle tanımlanır. Bu gösterimde $\tilde{\kappa} = T' \cdot N$ ve $N' = -\tilde{\kappa} T$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önce T ile N'nin her noktada $\mathbb{R}^2$'de bir ortonormal ikili olduğunu görelim:

$$T \cdot T = x'^2 + y'^2 = 1, \qquad N \cdot N = y'^2 + x'^2 = 1,$$

$$T \cdot N = x'(-y') + y'(x') = 0.$$

Düzlemde iki bağımsız vektör bir taban oluşturduğundan, β üzerindeki her düzlemsel alan T ile N cinsinden ortonormal açılıma sahiptir:

$$V = (V \cdot T)\,T + (V \cdot N)\,N.$$

Birinci iddia. $V = T'$ alalım. $T \cdot T = 1$ eşitliğinin türevi $2\,T' \cdot T = 0$ verir, yani $T' \cdot T = 0$. O hâlde açılımda yalnızca ikinci terim kalır:

$$T' = (T' \cdot N)\,N.$$

Düzlem eğriliğinin tanımı $T' = \tilde{\kappa} N$ olduğundan ve N sıfır olmadığından katsayılar eşittir:

$$\tilde{\kappa} = T' \cdot N.$$

Açık koordinat formülü de buradan okunur: $T' = (x'', y'')$ ve $N = (-y', x')$ olduğundan

$$\tilde{\kappa} = x''(-y') + y''(x') = x'y'' - y'x''.$$

İkinci iddia. $V = N'$ alalım. $N \cdot N = 1$ eşitliğinin türevi $N' \cdot N = 0$ verir; dolayısıyla

$$N' = (N' \cdot T)\,T.$$

Katsayıyı bulmak için $T \cdot N = 0$ eşitliğinin türevini alalım:

$$0 = (T \cdot N)' = T' \cdot N + T \cdot N' \Rightarrow N' \cdot T = -\,T' \cdot N = -\tilde{\kappa}.$$

Böylece $N' = -\tilde{\kappa}\,T$.
İki denklem birlikte düzlemdeki Frenet formülleridir. Üç boyutlu hâlle karşılaştıralım: B ve τ yoktur, çünkü düzlemde üçüncü bir yön yoktur; ama en önemli fark $\tilde{\kappa}$'nın **işaretli** olmasıdır. $\kappa = \| T' \| \geq 0$ iken $\tilde{\kappa}$ negatif olabilir; işaret, eğrinin sola mı sağa mı döndüğünü söyler.
■

Alıştırma 11.13 (Düzlem Eğriliği Eğim Açısının Türevidir). $\mathbb{R}^2$'de birim hızlı bir β eğrisinin **eğim açısı** (slope angle) φ, her s için

$$T(s) = \big(\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)\big)$$

olacak biçimde seçilmiş türevlenebilir bir fonksiyondur. Düzlem eğriliğinin $\tilde{\kappa} = \varphi'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Böyle bir φ gerçekten var mıdır? Önce bunu görelim; sonra asıl iddia bir satırda çıkacak. $T = (x', y')$ birim uzunlukta olduğundan $x'^2 + y'^2 = 1$'dir. Bu eşitliğin türevi

$$x'x'' + y'y'' = 0$$

verir; yani (x'', y'') vektörü (x', y')'ye diktir ve düzlemde bir vektöre dik olanlar $(-y', x')$'nün katları olduğundan bir $\lambda(s)$ fonksiyonu için

$$x'' = -\lambda y', \qquad y'' = \lambda x'$$

yazılır. Bu iki eşitlikten $\lambda = x'y'' - y'x''$ olduğu görülür (birinciyi $-y'$, ikinciyi x' ile çarpıp toplayın); dolayısıyla λ türevlenebilirdir. Şimdi $x'(0) = \cos\varphi_0$, $y'(0) = \sin\varphi_0$ olacak bir φ_0 sayısı seçip

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_0^s \lambda(u)\,du$$

tanımlayalım; $\varphi' = \lambda$'dır. İddia edilen eşitliği ispatlamak için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$u = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi, \qquad v = y' \cos\varphi - x' \sin\varphi$$

fonksiyonlarını kuralım. Türevlerini alıp $x'' = -\lambda y'$, $y'' = \lambda x'$ ve $\varphi' = \lambda$ yerine koyalım:

$$\begin{aligned} u' &= (x'' \cos\varphi + y'' \sin\varphi) + \varphi' \,(y' \cos\varphi - x' \sin\varphi) \\ &= \lambda(-y' \cos\varphi + x' \sin\varphi) + \lambda\, v = -\lambda v + \lambda v = 0, \\ v' &= (y'' \cos\varphi - x'' \sin\varphi) - \varphi' \,(x' \cos\varphi + y' \sin\varphi) \\ &= \lambda(x' \cos\varphi + y' \sin\varphi) - \lambda\, u = \lambda u - \lambda u = 0. \end{aligned}$$

Demek ki u ile v sabittir. Başlangıç değerleri

$$\begin{aligned} u(0) &= \cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1, \\ v(0) &= \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 - \cos\varphi_0 \sin\varphi_0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $u \equiv 1$ ve $v \equiv 0$'dır. Bu iki denklemi x' ve y' için çözersek

$$x' = \cos\varphi, \qquad y' = \sin\varphi$$

çıkar: aradığımız φ budur.
Asıl iddia. $T = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ ifadesinin türevini zincir kuralıyla alalım:

$$T' = \varphi' \,(-\sin\varphi, \cos\varphi).$$

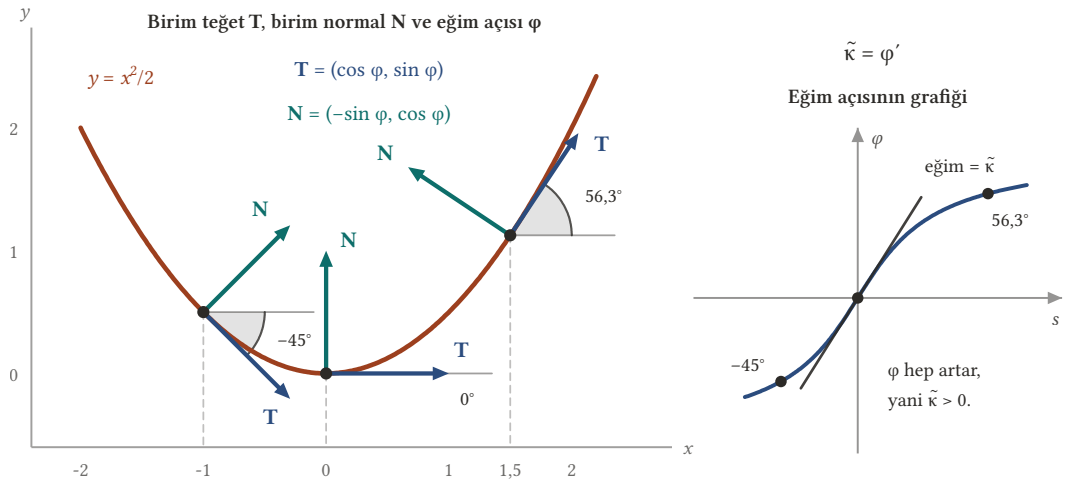
Öte yandan birim normalin tanımı $N = (-y', x') = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$'dir. Dolayısıyla

$$T' = \varphi'\, N.$$

Düzlem eğriliği $T' = \tilde{\kappa} N$ denklemiyle tanımlandığından ve $N \neq \mathbf{0}$ olduğundan

$$\tilde{\kappa} = \varphi'.$$

Yani düzlem eğriliği, teğetin yaptığı açının yol uzunluğuna göre değişim hızıdır. Bir çemberde açı düzgün artar ve $\tilde{\kappa}$ sabittir; bir doğruda açı sabittir ve $\tilde{\kappa} = 0$'dır.
Gözle görmek için $y = x^2/2$ parabolünü düşünelim. Teğetinin eğimi x'tir, yani eğim açısı $\varphi = \tan^{-1} x$'tir: $x = -1$'de $\varphi = -45°$, $x = 0$'da $\varphi = 0°$, $x = 1{,}5$'te $\varphi \approx 56{,}3°$. Açı boyunca durmadan büyüdüğünden $\tilde{\kappa} = \varphi'$ bu eğride her yerde pozitiftir.



Şekil 11.6: Birim hızlı bir düzlem eğrisinde eğim açısı φ, birim teğet **T**'nin x ekseniyle yaptığı açıdır. Solda $y = x^2/2$ parabolü üzerinde üç nokta alınmıştır: $x = -1$'de $\varphi = -45°$, $x = 0$'da $\varphi = 0°$, $x = 1{,}5$'te $\varphi \approx 56{,}3°$; her noktada mavi **T** oku eğriye teğettir, yeşil **N** oku ise **T**'nin 90° sola döndürülmüşüdür, yani ona diktir. Sağdaki küçük panelde aynı açı yay uzunluğunun fonksiyonu olarak çizilmiştir: φ durmadan arttığı için grafiğin her noktadaki eğimi pozitiftir. İşte bu eğim, yani eğim açısının yay uzunluğuna göre türevi, eğrinin düzlem eğriliğidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 11.14 (Saat Yönünün Tersine Dolaşılan Çemberin Düzlem Eğriliği). $r > 0$ olsun. $\mathbb{R}^2$'de

$$\beta(t) = \left(r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r} \right)$$

eğrisinin (saat yönünün tersine dolaşılan çember) düzlem eğriliği $\tilde{\kappa}$'yı bulunuz.

Çözüm.
$u = t/r$ yazalım. Koordinat türevleri:

$$T(t) = \beta'(t) = \big(-\sin u, \cos u \big) .$$

Uzunluğun karesi 1'dir, yani eğri birim hızlıdır ve düzlem eğriliği tanımı uygulanabilir.
Birim normal tanım gereği $N = (-y', x')$'dir:

$$N(t) = \big(-\cos u, -\sin u \big) .$$

Bu vektör çemberin merkezine, yani orijine bakar. Şimdi

$$T'(t) = \left(-\frac{1}{r}\cos u, -\frac{1}{r}\sin u \right) = \frac{1}{r}\big(-\cos u, -\sin u \big) = \frac{1}{r}\, N(t).$$

$T' = \tilde{\kappa} N$ tanımıyla karşılaştırırsak

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{r} > 0.$$

İşaret pozitiftir: eğri sola, yani birim normalin gösterdiği yöne döner. Alıştırma 11.13'ndeki açı yorumu da aynı şeyi söyler; burada $T = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ için $\varphi = u + \pi/2 = t/r + \pi/2$ alınabilir ve $\varphi' = 1/r$ çıkar.
■

Alıştırma 11.15 (Saat Yönünde Dolaşılan Çemberin Düzlem Eğriliği). $r > 0$ olsun. $\mathbb{R}^2$'de

$$\beta(t) = \left(r\cos\left(-\frac{t}{r}\right), r\sin\left(-\frac{t}{r}\right) \right)$$

eğrisinin (saat yönünde dolaşılan çember) düzlem eğriliği $\tilde{\kappa}$'yı bulunuz.

Çözüm.
$u = t/r$ yazalım; eğri $\beta(t) = \big(r\cos u, -r\sin u \big)$ biçiminde de yazılabilir. Türevleri alalım:

$$T(t) = \beta'(t) = \big(-\sin u, -\cos u \big) .$$

Uzunluğun karesi 1'dir: eğri birim hızlıdır.
Birim normal:

$$N(t) = (-y', x') = \big(\cos u, -\sin u \big) .$$

Bu kez N orijinden **dışarı** bakar. Eğrilik vektörü:

$$T'(t) = \left(-\frac{1}{r}\cos u, \frac{1}{r}\sin u \right) = -\frac{1}{r}\big(\cos u, -\sin u \big) = -\frac{1}{r}\, N(t).$$

Dolayısıyla

$$\tilde{\kappa} = -\frac{1}{r} < 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı çemberin ters yönde dolaşılması düzlem eğriliğinin işaretini değiştirdi; büyüklüğü ise değişmedi. Bu, düzlem eğriliğinin yönü de kodlayan bir büyüklük olduğunun en sade örneğidir. $\mathbb{R}^3$ eğriliği ise iki durumda da $\kappa = 1/r$'dir, çünkü $\kappa = \| T' \|$ bir uzunluktur.
■

Alıştırma 11.16 (Düzlem Eğriliğinin Mutlak Değeri Uzay Eğriliğidir). $\mathbb{R}^2$'yi $\mathbb{R}^3$'ün xy düzlemi olarak görelim. Bir düzlem eğrisinin düzlem eğriliği $\tilde{\kappa}$ işaret değiştirmiyorsa, $|\,\tilde{\kappa}\,|$'nın bu eğrinin olağan $\mathbb{R}^3$ eğriliği κ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\beta(s) = \big(\, x(s), y(s) \,\big)$ birim hızlı olsun ve onu $\mathbb{R}^3$'te $\big(\, x(s), y(s), 0 \,\big)$ eğrisi olarak görelim. İki kuramda da birim teğet aynıdır: $T = (x', y', 0)$.
Büyüklükler. Düzlem kuramında $T' = \tilde{\kappa} N$'dir, burada $N = (-y', x', 0)$ birim uzunluktadır. Uzay kuramında ise $\kappa = \| T' \|$'dir. Normu alalım:

$$\kappa = \| T' \| = \| \tilde{\kappa} N \| = |\,\tilde{\kappa}\,| \, \| N \| = |\,\tilde{\kappa}\,| \, .$$

Bu eşitlik her noktada, işaret varsayımı olmadan da doğrudur.
İşaret varsayımı neden gerekli? Uzay kuramında Frenet çatısının kurulabilmesi için $\kappa > 0$, yani $\tilde{\kappa} \neq 0$ gerekir. $\tilde{\kappa}$ sürekli bir fonksiyondur; işaret değiştirmiyorsa iki durum vardır.
Eğer $\tilde{\kappa} > 0$ ise $\kappa = \tilde{\kappa}$'dır ve

$$N_{\mathbb{R}^3} = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\tilde{\kappa} N}{\tilde{\kappa}} = N,$$

yani iki kuramın asli normalleri çakışır. Eğer $\tilde{\kappa} < 0$ ise $\kappa = -\tilde{\kappa}$'dır ve $N_{\mathbb{R}^3} = -N$ olur; yine düzgün (her mertebeden türevlenebilir) bir alandır.
Buna karşılık $\tilde{\kappa}$ işaret değiştirseydi, işaretin değiştiği noktada $\tilde{\kappa} = 0$, dolayısıyla $\kappa = 0$ olurdu (bir sürekli fonksiyon işaret değiştirirken ara değer teoremi gereği sıfırdan geçer) ve o noktada $\mathbb{R}^3$ Frenet aparatı tanımsız kalırdı. Ayrıca $\kappa = |\,\tilde{\kappa}\,|$ fonksiyonu o noktada türevlenebilir olmaktan çıkabilirdi. Varsayım tam olarak bunu dışlar.
Somut karşılaştırma: Alıştırma 11.14′de $\tilde{\kappa} = 1/r$, Alıştırma 11.15′de $\tilde{\kappa} = -1/r$ bulmuştuk; iki durumda da $|\,\tilde{\kappa}\,| = 1/r$ ve Örnek 11.1′ndeki uzay eğriliği de $1/r$'dir.
■

Alıştırma 11.17 (Frenet Yaklaşımının Üç Düzleme İzdüşümleri). β birim hızlı, $\kappa_0 > 0$ ve $\tau_0 \neq 0$ olan bir eğri, $\hat{\beta}$ de onun $s = 0$ yakınındaki Frenet yaklaşımı olsun. $\hat{\beta}$'nın T_0N_0 (oskülatör), T_0B_0 (rektifiyan) ve N_0B_0 (normal) düzlemlerine dik izdüşümlerinin genel biçimini belirleyiniz.

Çözüm.
Frenet yaklaşımı (Önerme 11.1)

$$\hat{\beta}(s) - \beta(0) = s\,T_0 + \frac{\kappa_0 s^2}{2}\,N_0 + \frac{\kappa_0 \tau_0 s^3}{6}\,B_0$$

idi. T_0, N_0, B_0 bir çatı olduğundan bu üç sayı, $\hat{\beta}(s) - \beta(0)$ vektörünün çatı koordinatlarıdır; onları sırasıyla

$$p(s) = s, \qquad q(s) = \frac{\kappa_0 s^2}{2}, \qquad w(s) = \frac{\kappa_0 \tau_0 s^3}{6}$$

ile gösterelim. Bir düzleme dik izdüşüm, o düzleme dik olan bileşeni atmak demektir.
Oskülatör düzlem (B_0 bileşeni atılır). Geriye $\big(\, p(s), q(s) \,\big) = \big(\, s, \kappa_0 s^2/2 \,\big)$ kalır. $p = s$ olduğundan

$$q = \frac{\kappa_0}{2}\,p^2;$$

bu, T_0 ekseni üzerinde açılan ve N_0 yönüne bakan bir **parabol**dür. Eğrinin bu düzlemdeki görüntüsü, tepe noktası $\beta(0)$ olan düzgün bir kıvrımdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

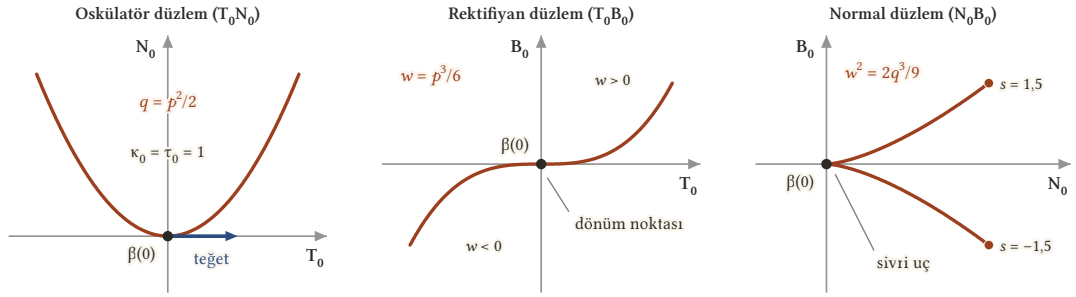
Rektifiyan düzlem (N_0 bileşeni atılır). Geriye $\big(\, p(s), w(s) \,\big) = \big(\, s, \kappa_0\tau_0 s^3/6 \,\big)$ kalır, yani

$$w = \frac{\kappa_0\tau_0}{6}\, p^3;$$

bir **kübik** eğri. Orijinde bir dönüm noktası vardır: eğri B_0 ekseninin bir yanından öteki yanına geçer. $\tau_0 > 0$ ise geçiş aşağıdan yukarıya, $\tau_0 < 0$ ise tersinedir.
Normal düzlem (T_0 bileşeni atılır). Geriye $\big(\, q(s), w(s) \,\big)$ kalır. s'i yok edelim: $q = \kappa_0 s^2/2$'den $s^2 = 2q/\kappa_0$ ve

$$w^2 = \frac{\kappa_0^2\tau_0^2}{36}\, s^6 = \frac{\kappa_0^2\tau_0^2}{36}\left(\frac{2q}{\kappa_0}\right)^3 = \frac{2\tau_0^2}{9\kappa_0}\, q^3.$$

Bu bir **yarı kübik parabol**dür; orijinde bir sivri uç (dönüş noktası) vardır ve eğri $q \geq 0$ yarı düzleminde kalır, çünkü $q = \kappa_0 s^2/2 \geq 0$'dır. Eğriye tam teğeti boyunca, yani T_0 doğrultusunda bakan bir gözlemci onu bu sivri uçlu biçimde görür: eğri gözlemciye doğru gelip geri döner gibi görünür.
Somut bir örnek için $\kappa_0 = 1$ ve $\tau_0 = 1$ alalım; üç izdüşüm sırasıyla $q = p^2/2$, $w = p^3/6$ ve $w^2 = 2q^3/9$ olur.



Şekil 11.7: Frenet yaklaşımının $\kappa_0 = 1$, $\tau_0 = 1$ ve $-1{,}5 \le s \le 1{,}5$ için üç çatı düzlemine dik izdüşümleri; her panelde orijin $\boldsymbol{\beta}(0)$ noktasıdır ve çatı koordinatları $p = s$, $q = s^2/2$, $w = s^3/6$'dır. Oskülatör düzlemde $q = p^2/2$ parabolü görülür: eğri $\boldsymbol{\beta}(0)$ noktasında $\mathbf{T}_0$'a teğettir (mavi ok) ve $\mathbf{N}_0$ yönüne kıvrılır. Rektifiyan düzlemdeki $w = p^3/6$ kübiğinin orijinde dönüm noktası vardır; eğri burada $\mathbf{B}_0$ bileşeninin işaretini değiştirir. Normal düzlemde ise $w^2 = 2q^3/9$ yarı kübik parabolü yalnızca $q \ge 0$ yarı düzleminde kalır ve orijinde sivri uç yapar: eğriye $\mathbf{T}_0$ doğrultusunda bakan gözlemci onu gelip geri dönüyormuş gibi görür.

■

Alıştırma 11.18 (Küresel Bir Eğri İçin Konum Formülü). α birim hızlı, $\kappa > 0$ ve $\tau \neq 0$ olan bir eğri olsun. $\rho = 1/\kappa$ ve $\sigma = 1/\tau$ yazalım. α, merkezi $\mathbf{c}$ ve yarıçapı r olan bir kürenin üzerindeyse

$$\alpha - \mathbf{c} = -\rho\, N - \rho'\sigma\, B$$

olduğunu ve buradan $r^2 = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ çıktığını gösteriniz.

Çözüm.
Kısaltma olarak $m = \alpha - \mathbf{c}$ yazalım; $\mathbf{c}$ sabit olduğundan $m' = \alpha' = T$'dir. Varsayım

$$m \cdot m = r^2.$$

Birinci türev. İki yanın türevini alalım:

$$2\, m' \cdot m = 0 \Rightarrow m \cdot T = 0.$$

Yani merkezden eğriye giden vektör her noktada teğete diktir. T, N, B bir çatı olduğundan ortonormal açılım

$$m = (m \cdot T)\, T + (m \cdot N)\, N + (m \cdot B)\, B = (m \cdot N)\, N + (m \cdot B)\, B$$

 CC BY-NC-SA 4.0

verir. Geriye iki katsayıyı bulmak kalıyor.
İkinci türev: N katsayısı. $m \cdot T = 0$ eşitliğinin türevini alalım:

$$0 = m' \cdot T + m \cdot T' = T \cdot T + \kappa\,(m \cdot N) = 1 + \kappa\,(m \cdot N).$$

Buradan

$$m \cdot N = -\frac{1}{\kappa} = -\rho.$$

Üçüncü türev: B katsayısı. Şimdi $m \cdot N = -\rho$ eşitliğinin türevini alalım. Sol tarafta Leibniz kuralı ve ikinci Frenet formülü:

$$m' \cdot N + m \cdot N' = T \cdot N + m \cdot (-\kappa T + \tau B) = 0 - \kappa\,(m \cdot T) + \tau\,(m \cdot B).$$

$m \cdot T = 0$ olduğundan bu ifade $\tau\,(m \cdot B)$'ye eşittir. Sağ tarafın türevi $-\rho'$ olduğundan

$$\tau\,(m \cdot B) = -\rho' \Rightarrow m \cdot B = -\frac{\rho'}{\tau} = -\rho'\sigma,$$

burada $\tau \neq 0$ varsayımını kullandık.
İki katsayıyı açılıma koyarsak

$$m = \alpha - \mathbf{c} = -\rho\,N - \rho'\sigma\,B.$$

Yarıçap bağıntısı. N ile B birim ve birbirine dik olduğundan

$$r^2 = \overset{2}{\|}\, m \,\overset{2}{\|} = (-\rho)^2\,(N \cdot N) + (-\rho'\sigma)^2\,(B \cdot B) + 2\rho\rho'\sigma\,(N \cdot B) = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2.$$

Denetim: α bir büyük çemberse $\kappa = 1/r$ sabittir, $\rho = r$ ve $\rho' = 0$ olur; formül $r^2 = r^2$ verir ve $\alpha - \mathbf{c} = -rN$ çıkar, yani N merkeze bakar — Önerme 11.3'teki eşitlik durumuyla uyuşur.
■

Alıştırma 11.19 (Küresel Olmanın Yeter Koşulu). α birim hızlı, $\kappa > 0$ ve $\tau \neq 0$ olan bir eğri, $\rho = 1/\kappa$ ve $\sigma = 1/\tau$ olsun. $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ ifadesi sabit bir r^2 değerine eşitse ve $\rho' \neq 0$ ise, α'nın r yarıçaplı bir kürenin üzerinde kaldığını gösteriniz.

Çözüm.
Alıştırma 11.18'deki formül bize merkezin nerede olması gerektiğini söylüyor: orada $\alpha - \mathbf{c} = -\rho N - \rho'\sigma B$ bulmuştuk, yani $\mathbf{c} = \alpha + \rho N + \rho'\sigma B$. O hâlde merkez eğrisi diye

$$\gamma = \alpha + \rho\,N + \rho'\sigma\,B$$

alanını tanımlayıp sabit olduğunu gösterelim.
Çarpım kuralı ve Frenet formülleriyle türev alalım:

$$\gamma' = \alpha' + \rho'\,N + \rho\,N' + (\rho'\sigma)'\,B + \rho'\sigma\,B'.$$

Yerine koyalım: $\alpha' = T$, $N' = -\kappa T + \tau B$, $B' = -\tau N$. Terimleri T, N, B bileşenlerine göre toplayalım.
T bileşeni. $1 - \rho\kappa$. $\rho = 1/\kappa$ olduğundan $\rho\kappa = 1$ ve bileşen sıfırdır.
N bileşeni. $\rho' - \rho'\sigma\tau$. $\sigma = 1/\tau$ olduğundan $\sigma\tau = 1$ ve bileşen $\rho' - \rho' = 0$'dır.
B bileşeni. $\rho\tau + (\rho'\sigma)'$. Burada $\rho\tau = \rho/\sigma$'dır.
Şimdi varsayımı kullanalım. $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = r^2$ sabit olduğundan türevi sıfırdır:

$$2\rho\rho' + 2(\rho'\sigma)(\rho'\sigma)' = 0.$$

$\rho' \neq 0$ ve $\sigma \neq 0$ olduğundan $\rho'\sigma \neq 0$'dır; iki yanı $2\rho'\sigma$ ile bölelim:

$$(\rho'\sigma)' = -\frac{\rho\rho'}{\rho'\sigma} = -\frac{\rho}{\sigma}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki B bileşeni de $\frac{\rho}{\sigma} - \frac{\rho}{\sigma} = 0$'dır.
Üç bileşen de sıfır olduğundan $\gamma' = \mathbf{0}$'dır ve Lemma 10.4'in birinci maddesine göre γ sabittir; değerine $\mathbf{c}$ diyelim. O hâlde her s için

$$\alpha(s) - \mathbf{c} = -\rho(s)\, N(s) - \rho'(s)\sigma(s)\, B(s)$$

ve $N \perp B$ olduğundan

$$\| \alpha(s) - \mathbf{c} \|^2 = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = r^2.$$

Yani α'nın her noktası $\mathbf{c}$'den r uzaklıktadır: eğri, $\mathbf{c}$ merkezli r yarıçaplı kürenin üzerindedir.
$\rho' \neq 0$ varsayımı bölme adımı için gerekliydi. ρ' özdeş olarak sıfır olsaydı κ sabit olurdu; o durumda koşul $\rho = r$ demeye gelir ve eğri, bir çember olmak zorunda olmadan da bu koşulu sağlayabilir (örneğin sabit eğrilikli bir dairesel helis $\rho^2 + 0 = r^2$'yi sağlar ama hiçbir kürenin üzerinde değildir).
■

Alıştırma 11.20 (Binormalleri Aynı Olan İki Eğri). β ve $\bar{\beta}$, aynı I aralığında tanımlı, eğrilikleri ve burulmaları hiçbir yerde sıfır olmayan iki birim hızlı eğri olsun. $B = \bar{B}$ ise, $\bar{\beta}$'nın ya β'ya ya da $s \mapsto -\beta(s)$ eğrisine paralel olduğunu (yani sabit bir nokta eklenerek ondan elde edildiğini) ispatlayınız.

Çözüm.
Birinci adım: asli normaller işaret farkıyla aynıdır. $B = \bar{B}$ eşitliğinin türevini alalım ve iki eğri için burulma tanımını kullanalım:

$$-\tau\, N = B' = \bar{B}' = -\bar{\tau}\, \bar{N}, \qquad \text{yani} \qquad \tau N = \bar{\tau}\, \bar{N}.$$

Normları karşılaştıralım: $\| N \| = \| \bar{N} \| = 1$ olduğundan $| \tau | = | \bar{\tau} |$'dur. τ hiçbir yerde sıfır olmadığından

$$\bar{N} = \frac{\tau}{\bar{\tau}}\, N \qquad \text{ve} \qquad \frac{\tau}{\bar{\tau}} = \pm 1.$$

$\tau/\bar{\tau}$ sürekli bir fonksiyondur ve yalnızca $+1$ ile -1 değerlerini alır; I bir aralık olduğundan ara değer teoremi gereği sabit kalmak zorundadır. Demek ki ya I boyunca $\bar{N} = N$, ya da I boyunca $\bar{N} = -N$'dir.
İkinci adım: teğetler. Alıştırma 11.6'ndeki $T = N \times B$ özdeşliğini iki eğri için de yazalım:

$$\bar{T} = \bar{N} \times \bar{B} = \bar{N} \times B.$$

Birinci durumda ($\bar{N} = N$):

$$\bar{T} = N \times B = T.$$

İkinci durumda ($\bar{N} = -N$):

$$\bar{T} = (-N) \times B = -(N \times B) = -T.$$

Üçüncü adım: eğrileri karşılaştırma. Birinci durumda $\bar{\beta}' = \beta'$, yani $(\bar{\beta} - \beta)' = \mathbf{0}$'dır. Lemma 10.4'in birinci maddesine göre $\bar{\beta} - \beta$ sabittir; bir $\mathbf{p}$ noktası için

$$\bar{\beta}(s) = \beta(s) + \mathbf{p}.$$

Yani $\bar{\beta}$, β'ya paraleldir.
İkinci durumda $\bar{\beta}' = -\beta'$'dür. $\delta(s) = -\beta(s)$ eğrisini tanımlayalım; $\delta' = -\beta' = \bar{\beta}'$ olduğundan aynı gerekçeyle $\bar{\beta} - \delta$ sabittir ve bir $\mathbf{p}$ noktası için

$$\bar{\beta}(s) = -\beta(s) + \mathbf{p}.$$

Yani $\bar{\beta}$, $s \mapsto -\beta(s)$ eğrisine paraleldir. İki durumdan biri gerçekleşmek zorundadır; iddia ispatlanmıştır.
İkinci durumun gerçekten olabileceğini görelim. Herhangi bir β için $\delta = -\beta$ eğrisini alalım. Türevleri $\delta' = -\beta'$ ve $\delta'' = -\beta''$'dür, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T_\delta = -T, \qquad \delta'' = -\kappa N \Rightarrow \kappa_\delta = \kappa, \quad N_\delta = -N.$$

O hâlde

$$B_\delta = T_\delta \times N_\delta = (-T) \times (-N) = T \times N = B.$$

Demek ki bir eğriyle onun orijine göre yansıması her zaman aynı binormale sahiptir; ikinci durum boş değildir.
■

Alıştırma 11.21 (Helisin Bir Noktasındaki Oskülatör Düzlemin Denklemi). $a = 3$, $b = 4$ (dolayısıyla $c = 5$) helisi

$$\beta(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$$

için $s = 5\pi/2$ noktasındaki oskülatör düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Nokta ve çatı. Burada $u = s/5$ olduğundan $s = 5\pi/2$ için $u = \pi/2$'dir. Örnek 11.5'te bu helisin aparatını hesaplamış ve bu değerde

$$\beta\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0, 3, 2\pi), \quad T = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \quad N = (0, -1, 0), \quad B = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$$

bulmuştuk. Denetim olarak $\| B \|^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$ ve $T \cdot B = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0$'dır.
Oskülatör düzlem. Bu düzlem $\beta(5\pi/2) = (0, 3, 2\pi)$ noktasından geçer ve B'ye diktir. Bir (x, y, z) noktası düzlemdedir ancak ve ancak

$$\big((x, y, z) - (0, 3, 2\pi) \big) \cdot \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = 0,$$

yani

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}(z - 2\pi) = 0.$$

İki yanı 5 ile çarparsak denklem

$$4x + 3z = 6\pi$$

olur. Denetim: nokta düzlemde midir? $4 \cdot 0 + 3 \cdot 2\pi = 6\pi$, evet. T ve N yönleri düzleme paralel midir? Sol yanın T ve N bileşenlerinde aldığı değerler

$$4\left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{12}{5} = 0, \qquad 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

olduğundan evet.
■

Alıştırma 11.22 (Üçüncü Türevin Frenet Çatısındaki Açılımı). β birim hızlı ve $\kappa > 0$ olan bir eğri olsun.

$$\beta''' = -\kappa^2\, T + \frac{d\kappa}{ds}\, N + \kappa\tau\, B$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\beta' = T$ ve birinci Frenet formülüyle $\beta'' = T' = \kappa N$'dir. Bir kez daha türev alalım; κ gerçel değerli bir fonksiyon, N bir vektör alanı olduğundan çarpım kuralı

$$\beta''' = (\kappa N)' = \frac{d\kappa}{ds}\, N + \kappa\, N'$$

verir. İkinci Frenet formülünü ($N' = -\kappa T + \tau B$) yerine koyalım:

$$\beta''' = \frac{d\kappa}{ds}\, N + \kappa\,(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2\, T + \frac{d\kappa}{ds}\, N + \kappa\tau\, B.$$

İstenen açılım budur.
İfadeyi okuyalım. T bileşeni her zaman negatiftir ($\kappa > 0$): birim hızlı bir eğride üçüncü türevin teğet bileşeni hızın tersine bakar. N bileşeni yalnızca eğriliğin değişim hızına bağlıdır; eğrilik sabitse sıfırdır. B bileşeni ise $\kappa\tau$'dur ve eğri düzlemselse ($\tau = 0$) yok olur.
Sayısal denetim: $a = 3$, $b = 4$ helisi için $\kappa = 3/25$ sabit, $\tau = 4/25$. Formül

$$\beta''' = -\frac{9}{625} T + 0 \cdot N + \frac{12}{625} B$$

verir. Doğrudan hesap için

$$\beta''(s) = T'(s) = \left(-\frac{3}{25}\cos u, -\frac{3}{25}\sin u, 0\right)$$

alanının türevini alırsak

$$\beta'''(s) = \left(\frac{3}{125}\sin u, -\frac{3}{125}\cos u, 0\right).$$

Öte yandan formülün sağ tarafı, T ile B'nin açık hâlleri konarak

$$-\frac{9}{625}\left(-\frac{3}{5}\sin u, \frac{3}{5}\cos u, \frac{4}{5}\right) + \frac{12}{625}\left(\frac{4}{5}\sin u, -\frac{4}{5}\cos u, \frac{3}{5}\right)$$

olur. Birinci ve üçüncü bileşenleri toplayalım:

$$\frac{27}{3125}\sin u + \frac{48}{3125}\sin u = \frac{75}{3125}\sin u = \frac{3}{125}\sin u,$$
$$-\frac{36}{3125} + \frac{36}{3125} = 0.$$

İkisi de doğrudan hesapla uyuşuyor.
■

Alıştırma 11.23 (Burulmanın Türevlerle Verilen Formülü). β birim hızlı ve $\kappa > 0$ olan bir eğri olsun.

$$\tau = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{\kappa^2}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Pay ile paydayı Frenet çatısı cinsinden ayrı ayrı yazacağız.
Vektörel çarpım. $\beta' = T$ ve $\beta'' = \kappa N$ olduğundan, vektörel çarpımın skalerle çarpmaya göre lineerliğiyle

$$\beta' \times \beta'' = T \times (\kappa N) = \kappa\,(T \times N) = \kappa\, B.$$

Üçüncü türev. Alıştırma 11.22'e göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\beta''' = -\kappa^2\,T + \frac{d\kappa}{ds}\,N + \kappa\tau\,B.$$

İç çarpım. Şimdi ikisini çarpalım. B birim uzunlukta ve hem T'ye hem N'ye dik olduğundan (Lemma 11.1) $B\cdot T=0$, $B\cdot N=0$, $B\cdot B=1$'dir:

$$(\beta'\times\beta'')\cdot\beta''' = \kappa B\cdot\left(-\kappa^2 T + \frac{d\kappa}{ds}N + \kappa\tau B\right) = \kappa\cdot\kappa\tau = \kappa^2\tau.$$

$\kappa>0$ olduğundan $\kappa^2\neq 0$'dır; iki yanı bölersek

$$\tau = \frac{(\beta'\times\beta'')\cdot\beta'''}{\kappa^2}.$$

Bu formülün değeri şudur: burulmayı bulmak için T, N, B alanlarını kurmaya gerek yoktur; eğrinin üç türevini almak yeter. Paydadaki κ^2 de yine türevlerden okunur, çünkü $\kappa^2=\beta''\cdot\beta''$'dür.
Sayısal denetim: Alıştırma 11.4'taki eğride $s=0$ için

$$\beta'(0)=\left(\frac12,-\frac12,\frac{1}{\sqrt2}\right),\quad \beta''(0)=\left(\frac14,\frac14,0\right),\quad \beta'''(0)=\left(-\frac18,\frac18,0\right).$$

Vektörel çarpım $\beta'(0)\times\beta''(0)$ bileşenleri: birinci $-\frac12\cdot 0-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac14=-\frac{1}{4\sqrt2}$; ikinci $\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac14-\frac12\cdot 0=\frac{1}{4\sqrt2}$; üçüncü $\frac12\cdot\frac14+\frac12\cdot\frac14=\frac14$. Bunu $\beta'''(0)$ ile çarparsak

$$\left(-\frac{1}{4\sqrt2}\right)\left(-\frac18\right)+\frac{1}{4\sqrt2}\cdot\frac18+0=\frac{2}{32\sqrt2}=\frac{1}{16\sqrt2}.$$

Payda $\kappa(0)^2=\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)^2=\frac18$. Bölüm

$$\tau(0)=\frac{1/(16\sqrt2)}{1/8}=\frac{8}{16\sqrt2}=\frac{1}{2\sqrt2},$$

tam olarak o alıştırmada bulduğumuz değer.
■

Alıştırma 11.24 (Teğet Doğruları Ortak Bir Noktadan Geçemez). β birim hızlı ve $\kappa>0$ olan bir eğri olsun. β'nın bütün teğet doğrularının ortak bir noktadan geçmesinin olanaksız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Tersini varsayalım: bütün teğet doğrularının geçtiği bir $\mathbf{p}$ noktası bulunsun. $\beta(s)$ noktasındaki teğet doğrusu, $u\mapsto\beta(s)+u\,T(s)$ ile verilir. $\mathbf{p}$'nin bu doğru üzerinde olması, her s için bir $\lambda(s)$ sayısı bulunması demektir:

$$\mathbf{p}=\beta(s)+\lambda(s)\,T(s).$$

Önce λ'nın türevlenebilir olduğunu görelim. Yukarıdaki eşitliğin iki yanını $T(s)$ ile çarparsak, $T\cdot T=1$ olduğundan

$$\lambda(s)=\big(\,\mathbf{p}-\beta(s)\,\big)\cdot T(s)$$

çıkar; sağ taraf türevlenebilir fonksiyonlardan kurulduğu için λ türevlenebilirdir.
Şimdi eşitliğin türevini alalım. Sol taraf sabittir, türevi sıfırdır; sağ tarafta çarpım kuralı ve birinci Frenet formülü:

$$\mathbf{0}=\beta'+\lambda' T+\lambda T'=T+\lambda' T+\lambda\kappa N=(1+\lambda')\,T+\lambda\kappa\,N.$$

T ile N her noktada lineer bağımsızdır (dik ve sıfırdan farklıdırlar), dolayısıyla iki katsayı da sıfır olmalıdır:

$$1+\lambda'=0\qquad\text{ve}\qquad\lambda\kappa=0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$\kappa > 0$ olduğundan ikinci denklem $\lambda = 0$ verir; o hâlde $\lambda' = 0$'dır ve birinci denklem $1 + 0 = 0$ der. Bu bir çelişkidir.
Demek ki böyle bir $\mathbf{p}$ yoktur. $\kappa > 0$ varsayımı vazgeçilmezdir: bir doğrunun ($\kappa = 0$) bütün teğet doğruları zaten aynı doğrudur ve sonsuz çok ortak noktaları vardır.
■

Bu bölümde eğrilerin bütün geometrisini iki sayıya, eğrilikle burulmaya indirgedik; ama her şeyi birim hızlı eğriler için yaptık. Bir sonraki bölümde (Keyfi Hızlı Eğriler) aynı aparatı hiç durmayan **her** eğri için, üstelik birim hızlı kopyayı açıkça hesaplamadan kullanılabilir formüllerle kuracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Keyfi Hızlı Eğriler

Önceki bölümde (Frenet Formülleri) bir eğrinin biçimini ölçen iki sayıyı, eğrilik κ ile burulma τ'yu, ve eğri boyunca taşınan T, N, B çatı alanını tanımladık. Ancak bütün bu tanımlar **birim hızlı** eğriler için yapıldı: yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş bir β eğrisinde $T = \beta'$ zaten birim uzunluktaydı ve Frenet formülleri çatının yay uzunluğuna göre değişimini veriyordu. Bu sınırlama teori için rahat, hesap için ise çoğu zaman engelleyicidir. Karşımıza çıkan eğrilerin büyük kısmı, örneğin $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, birim hızlı değildir ve birim hızlı yeniden parametrelendirmelerini açık bir formülle yazmak genellikle olanaksızdır. Bu bölümde iki şey yapacağız. Önce, düzgün bir eğrinin Frenet aparatını, birim hızlı yeniden parametrelendirmesinden "ödünç alarak" tanımlayacağız; bu tanımın eğrinin dolaştığı rotanın geometrisini aynen yansıttığını göreceğiz. Sonra, bu ödünç alma işine hiç girmeden κ, τ, T, N ve B'yi doğrudan α', α'' ve α''' türevlerinden hesaplayan formüller çıkaracağız. Bu formüller sayesinde elimizdeki her düzgün eğrinin aparatını, birim hızlı olup olmadığına bakmadan, mekanik bir hesapla bulabileceğiz.
Bölümün ikinci yarısında bu araçları iki uygulamada kullanacağız: bir eğrinin birim teğetinin küre üzerinde çizdiği **küresel görüntü** ve teğetinin sabit bir doğrultuyla sabit açı yaptığı **silindirik helisler**. Silindirik helislerin tam olarak τ/κ oranı sabit olan eğriler olduğunu ispatlayacak ve bölümü, eğrilik ile burulma üzerine konan basit koşulların eğri türlerini nasıl belirlediğini özetleyen bir tabloyla kapatacağız.

12.1 Aparatın Aktarılması

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ düzgün bir eğri olsun (Tanım 4.6): her t için $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$. Süratı $v(t) = \| \alpha'(t) \| > 0$ ve bir t_0 tabanlı yay uzunluğu fonksiyonu $s(t) = \int_{t_0}^{t} v(u)\, du$ olsun (Tanım 10.1). Birim hızlı yeniden parametrelendirme teoremi (Teorem 10.1) bize, s'nin görüntü aralığı J üzerinde tanımlı ve

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}\left(\, s(t) \,\right) \qquad (t \in I)$$

eşitliğini sağlayan birim hızlı bir $\bar{\alpha} : J \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verir. Kısaca $\alpha = \bar{\alpha}(s)$ yazarız. α ile $\bar{\alpha}$ aynı rotayı, aynı yönde, ama farklı hızlarla dolaşır; α'nın t anında bulunduğu noktaya $\bar{\alpha}$, $s(t)$ anında gelir.
$\bar{\alpha}$ birim hızlı olduğundan önceki bölümün bütün tanımları ona uygulanır: eğriliği $\bar{\kappa}$ (Tanım 11.1), $\bar{\kappa} > 0$ ise asli normali $\bar{N}$, binormali $\bar{B}$ (Tanım 11.2) ve burulması $\bar{\tau}$ (Tanım 11.3) vardır. Bunları α'ya taşımak için yapılacak tek şey, α'nın her t anında $\bar{\alpha}$'nın karşılık gelen $s(t)$ anındaki değerleri okumaktır.

Tanım 12.1 (Keyfi Hızlı Eğrinin Frenet Aparatı). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ düzgün bir eğri, s onun bir yay uzunluğu fonksiyonu ve $\bar{\alpha}$, $\alpha = \bar{\alpha}(s)$ eşitliğini sağlayan birim hızlı yeniden parametrelendirmesi olsun. $\bar{\alpha}$'nın eğriliği $\bar{\kappa}$ her yerde pozitif olsun ve $\bar{\alpha}$'nın Frenet aparatı $\bar{\kappa}, \bar{\tau}, \bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$ ile gösterilsin. α'nın

- **eğrilik fonksiyonu** $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(t) = \bar{\kappa}\left(\, s(t) \,\right)$;
- **burulma fonksiyonu** $\tau : I \to \mathbb{R}$, $\tau(t) = \bar{\tau}\left(\, s(t) \,\right)$;
- **birim teğet vektör alanı** T, $T(t) = \bar{T}\left(\, s(t) \,\right)$;
- **asli normal vektör alanı** N, $N(t) = \bar{N}\left(\, s(t) \,\right)$;
- **binormal vektör alanı** B, $B(t) = \bar{B}\left(\, s(t) \,\right)$

olarak tanımlanır. κ, τ, T, N, B beşlisine α'nın **Frenet aparatı** (Frenet apparatus), T, N, B üçlüsüne α'nın **Frenet çatı alanı** denir.

Yani keyfi hızlı bir eğrinin aparatı, aynı rotayı birim hızla dolaşan eğrinin aparatının, zamanı $s(t)$ ile yeniden ayarlanmış hâlidir.
Burada T, N, B'nin gerçekten α üzerinde vektör alanları olduğuna dikkat edin (Tanım 10.3): $\bar{T}(s(t))$ teğet vektörünün uygulama noktası $\bar{\alpha}(s(t)) = \alpha(t)$'dir; koordinat fonksiyonları ise türevlenebilir fonksiyonların bileşkesi olduğundan türevlenebilirdir. Ayrıca Lemma 11.1 gereği $\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)$ her s için bir çatıdır; dolayısıyla $T(t), N(t), B(t)$ de $\alpha(t)$ noktasında bir çatıdır.
κ ile $\bar{\kappa}$ genel olarak farklı fonksiyonlardır, hatta farklı aralıklarda tanımlıdırlar. Ama ikisi de ortak rotanın dönüşünü **aynı biçimde** betimler: rotanın $\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t))$ noktasında α'nın eğriliği olan $\kappa(t)$ sayısı

 CC BY-NC-SA 4.0

ile $\bar{\alpha}$'nın eğriliği olan $\bar{\kappa}(s(t))$ sayısı, tanım gereği aynı sayıdır. Aparatın öteki parçaları için de aynısı geçerlidir. İşin içinde yalnızca bir parametre değişimi olduğundan, önceki bölümde Frenet yaklaşımıyla açıkladığımız geometrik anlamlar hiç değişmez: $\kappa(t)$ rotanın $\alpha(t)$ noktasında ne kadar sert döndüğünü, $\tau(t)$ oskülatör düzlemden ne hızla ayrıldığını, T, N, B çatısı da rotanın o noktadaki duruşunu gösterir.

Örnek 12.1 (Dairesel Helisin Aparatının Aktarılması). $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ helisinin (Örnek 4.2, $a = 3$, $b = 4$) Frenet aparatını, birim hızlı yeniden parametrelendirmesinden aktararak bulalım.

Çözüm.
Hız vektörünün vektör kısmı $(-3\sin t, 3\cos t, 4)$, sürati $v(t) = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5$'tir. $t_0 = 0$ tabanlı yay uzunluğu $s(t) = 5t$, tersi $t = s/5$'tir. Dolayısıyla birim hızlı yeniden parametrelendirme

$$\bar{\alpha}(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$$

olur. Bu, önceki bölümde aparatını hesapladığımız birim hızlı helistir (Örnek 11.5, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$):

$$\bar{\kappa} = \frac{a}{c^2} = \frac{3}{25}, \qquad \bar{\tau} = \frac{b}{c^2} = \frac{4}{25},$$

$$\bar{T}(s) = \frac{1}{5}\left(-3\sin\frac{s}{5}, 3\cos\frac{s}{5}, 4\right), \qquad \bar{N}(s) = \left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right),$$

$$\bar{B}(s) = \frac{1}{5}\left(4\sin\frac{s}{5}, -4\cos\frac{s}{5}, 3\right).$$

Tanıma göre α'nın aparatı bu fonksiyonlarda s yerine $s(t) = 5t$ yazılarak bulunur:

$$\kappa(t) = \frac{3}{25}, \qquad \tau(t) = \frac{4}{25},$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(-3\sin t, 3\cos t, 4), \quad N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4\sin t, -4\cos t, 3).$$

Eğrilik ve burulma sabit olduğu için aktarım onları değiştirmedi; vektör alanları ise yalnızca "$s/5$ yerine t" değişimine uğradı. Örneğin $t = \pi/2$ anında $\alpha(\pi/2) = (0, 3, 2\pi)$ noktasında $T = (-3/5, 0, 4/5)$, $N = (0, -1, 0)$, $B = (4/5, 0, 3/5)$'tir; bu üç vektörün karşılıklı dik birim vektörler olduğu doğrudan görülür.
■

Aktarım, kuramsal sonuçları hemen keyfi hızlı eğrilere taşımamıza da izin verir: α hakkındaki bir bilgi $\bar{\alpha}$ hakkında bir bilgiye dönüşür, $\bar{\alpha}$ için bildiğimiz teorem uygulanır, sonuç α'ya geri çevrilir.

Örnek 12.2 (Burulması Sıfır Olan Düzgün Eğri Düzlemseldir). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, eğriliği pozitif ve burulması her yerde sıfır olan düzgün bir eğri olsun. α'nın bir düzlemde kaldığını gösterelim.

Çözüm.
$\bar{\alpha}$, $\alpha = \bar{\alpha}(s)$ eşitliğini sağlayan birim hızlı yeniden parametrelendirme olsun. Tanım gereği $\tau(t) = \bar{\tau}(s(t))$'dir. $s : I \to J$ örten olduğundan (J, s'nin görüntü aralığıdır) J'nin her s_1 noktası bir $s(t_1)$ biçimindedir ve $\bar{\tau}(s_1) = \tau(t_1) = 0$ olur. Yani $\bar{\tau}$ da her yerde sıfırdır.
$\bar{\alpha}$ birim hızlı ve eğriliği pozitif olduğundan Sonuç 11.1 uygulanır: $\bar{\alpha}$ bir düzlem eğrisidir, yani bütün $\bar{\alpha}(s)$ noktaları belli bir P düzlemindedir. Her $\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t))$ noktası bu noktalardan biri olduğundan α da P'nin içinde kalır.
Aynı akıl yürütme Lemma 11.2 için de çalışır: $\kappa > 0$ sabit ve $\tau = 0$ olan düzgün bir eğrinin rotası bir çemberin parçasıdır, çünkü $\bar{\kappa}$ da aynı sabit, $\bar{\tau}$ da sıfırdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Aktarım hesap için çoğu zaman kullanışsızdır

Yukarıdaki iki örnekte aktarım kolayca çalıştı, çünkü helisin sürati sabitti ve ikinci örnekte hiç hesap yoktu. Genel durumda ise $\bar{\alpha}$'yı açık bir formülle yazmak neredeyse hiçbir zaman mümkün değildir. Örneğin $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ için sürat $v(t) = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ ve yay uzunluğu

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}\, du$$

olur. Bu integralin ilkeli elemanter fonksiyonlarla yazılamaz; s'nin tersini almak ve $\bar{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$'yi yazmak ise büsbütün umutsuzdur. Bu yüzden bu bölümün asıl amacı, aparatı $\bar{\alpha}$'ya hiç uğramadan hesaplayan formüller bulmaktır.

ℹ Parametre değişimini görmezden gelen gösterim

Bazı metinlerde eğri ile birim hızlı yeniden parametrelendirmesi aynı harfle gösterilir ve türevler arasındaki fark, T' yerine dT/dt, $\bar{T}'$ yerine dT/ds yazılarak belirtilir. Bu gösterimde aşağıdaki lemmanın ispatı tek satıra iner: zincir kuralı $dT/dt = (dT/ds)(ds/dt)$ ile Frenet formülü $dT/ds = \kappa N$ birleşip $dT/dt = \kappa v N$ verir. Biz α ile $\bar{\alpha}$'yı ayrı harflerle yazmayı sürdüreceğiz; ama bu kısa yolu görmek, formüllerin nereden geldiğini akılda tutmaya yardım eder.

12.2 Keyfi Hızda Frenet Formülleri

Frenet formülleri (Teorem 11.1) birim hızlı eğriler için geçerlidir; T, N, B çatısının **yay uzunluğuna göre** değişim hızını verirler. Keyfi hızlı bir α eğrisinde T, N, B'nin t'ye göre türevini alırsak ne olur? Zincir kuralı cevabı hemen söyler: t'ye göre türev, s'ye göre türevin $ds/dt = v$ ile çarpımıdır. Dolayısıyla Frenet formüllerinin her sağ tarafına bir v çarpanı gelir.

Önce ihtiyacımız olan zincir kuralını açıkça yazalım. Y, $\bar{\alpha}$ üzerinde bir vektör alanı olsun: $Y(s) = \sum_i y_i(s)\, U_i(\bar{\alpha}(s))$. O zaman $t \mapsto Y(s(t))$, α üzerinde bir vektör alanıdır ($\bar{\alpha}(s(t)) = \alpha(t)$) ve koordinat fonksiyonları $y_i(s(t))$'dir. Türevi (Tanım 10.4), koordinat fonksiyonlarının türevleriyle alınır; tek değişkenli zincir kuralı ise

$$\frac{d}{dt}\, y_i\, \big(\, s(t)\, \big) = \frac{dy_i}{ds}\, \big(\, s(t)\, \big)\, \frac{ds}{dt}(t)$$

verir. Dolayısıyla

$$\big(\, Y(s)\big)'(t) = Y'\, \big(\, s(t)\, \big)\, \frac{ds}{dt}(t) = v(t)\, Y'\, \big(\, s(t)\, \big)\, .$$

Bu, hız vektörü için bildiğimiz yeniden parametrelendirme formülünün (Lemma 4.1) eğri üzerindeki vektör alanlarına uyarlanmış hâlidir.

Lemma 12.1 (Keyfi Hızlı Eğri İçin Frenet Formülleri). *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, eğriliği $\kappa > 0$ olan düzgün bir eğri, v sürati ve T, N, B Frenet çatı alanı olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa v\, N, \\ N' &= -\kappa v\, T + \tau v\, B, \\ B' &= -\tau v\, N. \end{aligned}$$

İspat.
$\bar{\alpha}$, $\alpha = \bar{\alpha}(s)$ eşitliğini sağlayan birim hızlı yeniden parametrelendirme olsun. Tanım gereği $T = \bar{T}(s)$, yani $T(t) = \bar{T}(s(t))$'dir. Yukarıdaki zincir kuralını $Y = \bar{T}$ için uygularsak

$$T'(t) = \bar{T}'\, \big(\, s(t)\, \big)\, \frac{ds}{dt}(t) = v(t)\, \bar{T}'\, \big(\, s(t)\, \big)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

buluruz. $\bar{\alpha}$ birim hızlı olduğundan ona alışılmış Frenet formülleri uygulanır: $\bar{T}' = \bar{\kappa}\bar{N}$. Bu eşitlikte s yerine $s(t)$ yazarsak

$$\bar{T}'\,\big(\,s(t)\,\big) = \bar{\kappa}\,\big(\,s(t)\,\big)\,\bar{N}\,\big(\,s(t)\,\big) = \kappa(t)\,N(t)$$

olur; son adım κ ile N'nin keyfi hızlı eğri için tanımından başka bir şey değildir. İki eşitliği birleştirince $T'(t) = v(t)\kappa(t)N(t)$, yani $T' = \kappa v N$ çıkar.
N' için aynı yol izlenir: $N = \bar{N}(s)$ olduğundan $N' = v\,\bar{N}'(s)$'dir ve $\bar{N}' = -\bar{\kappa}\bar{T} + \bar{\tau}\bar{B}$ Frenet formülünde s yerine $s(t)$ yazılırsa $\bar{N}'(s(t)) = -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)$ elde edilir. Böylece $N' = -\kappa v T + \tau v B$ olur. Son olarak $B = \bar{B}(s)$ için $B' = v\,\bar{B}'(s)$ ve $\bar{B}' = -\bar{\tau}\bar{N}$'den $B' = -\tau v N$ bulunur.
■

Yani keyfi hızlı bir eğride çatı, birim hızlı durumdakinin tam v katı hızla döner: rota üzerinde aynı yerden v kat hızlı geçen bir gözlemci, çatının değişimini de v kat hızlı görür. $v = 1$ ise alışılmış Frenet formülleri geri gelir.

Örnek 12.3 (Helis Üzerinde Sürat Çarpanının Denetimi). $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ helisi için $T' = \kappa v N$ ve $B' = -\tau v N$ formüllerini, iki tarafı ayrı ayrı hesaplayarak doğrulayalım.

Çözüm.
Örnek 12.1'da $v = 5$, $\kappa = 3/25$, $\tau = 4/25$ ve

$$T(t) = \frac{1}{5}(-3\sin t, 3\cos t, 4), \qquad N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0), \qquad B(t) = \frac{1}{5}(4\sin t, -4\cos t, 3)$$

bulmuştuk. T'nin koordinat fonksiyonlarını türevleyelim:

$$T'(t) = \frac{1}{5}(-3\cos t, -3\sin t, 0) = \frac{3}{5}(-\cos t, -\sin t, 0) = \frac{3}{5}\,N(t).$$

Öte yandan $\kappa v = \frac{3}{25}\cdot 5 = \frac{3}{5}$'tir; $T' = \kappa v N$ sağlanır. Birim hızlı helis için $\bar{T}' = \bar{\kappa}\bar{N} = \frac{3}{25}\bar{N}$ olduğunu hatırlayın: keyfi hızlı α'da çatı, $v = 5$ kat daha hızlı döner.
B için

$$B'(t) = \frac{1}{5}(4\cos t, 4\sin t, 0) = -\frac{4}{5}(-\cos t, -\sin t, 0) = -\frac{4}{5}\,N(t)$$

ve $\tau v = \frac{4}{25}\cdot 5 = \frac{4}{5}$; $B' = -\tau v N$ de sağlanır.
■

12.3 Hız ve İvme

Bir eğrinin hızı α' ile ivmesi α'' (Tanım 10.4) arasındaki ilişki, eğrinin süratine bağlıdır. Sürat sabitse ivme hıza diktir; genel durumda değildir. Bunu görmek için $\alpha' \cdot \alpha' = v^2$ eşitliğinin türevini alalım:

$$(\alpha' \cdot \alpha')' = 2\,\alpha' \cdot \alpha''.$$

Sol taraf $(v^2)' = 2v\,dv/dt$'dir. Dolayısıyla $\alpha' \cdot \alpha'' = v\,dv/dt$ olur ve $v > 0$ olduğundan şu denklik çıkar: **sürat sabittir** ($dv/dt = 0$) **ancak ve ancak ivme her an hıza diktir** ($\alpha' \cdot \alpha'' = 0$). Birim hızlı eğrilerde $T' \perp T$ olması bunun özel hâliydi.
Genel durumda ivmeyi çözümlemenin en iyi yolu onu Frenet çatısına göre açmaktır. Ortaya iki bileşen çıkar: biri T doğrultusunda, öteki N doğrultusunda; B doğrultusunda bileşen yoktur.

Lemma 12.2 (Hız ve İvmenin Frenet Açılımı). *$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, sürati v ve eğriliği $\kappa > 0$ olan düzgün bir eğri olsun. O zaman*

$$\alpha' = v\,T, \qquad \alpha'' = \frac{dv}{dt}\,T + \kappa v^2\,N.$$

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\alpha = \bar{\alpha}(s)$ olsun. Hız için yeniden parametrelendirme formülü (Lemma 4.1)

$$\alpha'(t) = \frac{ds}{dt}(t)\,\bar{\alpha}'\,\big(\,s(t)\,\big) = v(t)\,\bar{T}\,\big(\,s(t)\,\big) = v(t)\,T(t)$$

verir; burada $\bar{\alpha}' = \bar{T}$ (birim hızlı eğride birim teğet, hızın kendisidir) ve $T = \bar{T}(s)$ tanımını kullandık. Böylece $\alpha' = vT$'dir.
Şimdi $\alpha' = vT$ eşitliğinin türevini alalım. v gerçel değerli bir fonksiyon, T eğri üzerinde bir vektör alanıdır; çarpımın türevi için Leibniz kuralı geçerlidir (koordinat fonksiyonları $v\,t_i$ olan bir alanın türevi, koordinatlarda $(vt_i)' = v't_i + vt_i'$ ile alınır):

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt}\,T + v\,T'.$$

Lemma 12.1'ne göre $T' = \kappa v N$'dir. Yerine koyunca

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt}\,T + v\cdot\kappa v N = \frac{dv}{dt}\,T + \kappa v^2\,N$$

bulunur.
■

Yani hız her zaman teğet doğrultusundadır ve uzunluğu sürattir; ivme ise teğet ile asli normalin gerdiği oskülatör düzlemde yatar. $\alpha' = vT$ formülü beklenen bir şeydir: α' ile T ikisi de eğriye teğettir, T birim uzunluktadır ve $\| \alpha' \| = v$'dir. İvme formülü daha ilginçtir. Tanım gereği α'', hızın değişim hızıdır ve genel olarak hızın hem uzunluğu hem doğrultusu değişir. **Teğet bileşen** $(dv/dt)\,T$ uzunluğun (süratin) değişim hızını ölçer; **normal bileşen** $\kappa v^2 N$ ise doğrultunun değişim hızını ölçer. İkisi birbirine diktir, dolayısıyla

$$\| \alpha'' \|^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \kappa^2 v^4$$

olur; bu eşitliği alıştırmalarda eğriliği hesaplamanın bir yolu olarak kullanacağız.

Fiziksel yorum: düz yolda gaz, virajda savrulma

Newton'un hareket yasalarına göre bu iki bileşen kuvvet olarak hissedilir. Düz bir yolda hızlanan ya da yavaşlayan bir arabada hissedilen tek kuvvet $(dv/dt)\,T$'den gelir: sırtınızı koltuğa yaslayan ya da öne savuran kuvvet. Eğimsiz bir virajı v süratiyle dönerken hissedilen yanal kuvvet ise $\kappa v^2 N$'den gelir. Burada κ **yolun** ne kadar sert döndüğünü ölçer; süratin etkisi v^2 ile gelir. Aynı virajı iki kat süratle dönmek dört kat daha sert savurur.

Örnek 12.4 (Parabolün İvmesinin Bileşenleri). $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ parabolü için $t = 1$ anında sürati, süratin değişim hızını, ivmenin teğet ve normal bileşenlerini ve eğriliği bulalım.

Çözüm.
$\alpha'(t) = (1, 2t, 0)$ ve $\alpha''(t) = (0, 2, 0)$'dır. Sürat $v(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$, dolayısıyla

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}, \qquad T(t) = \frac{(1, 2t, 0)}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

$t = 1$'de $v = \sqrt{5}$, $dv/dt = 4/\sqrt{5}$ ve $T = (1, 2, 0)/\sqrt{5}$ olur. İvmenin teğet bileşeni

$$\frac{dv}{dt}\,T = \frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(1,2,0)}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}(1,2,0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0\right),$$

normal bileşeni ise ivmeden teğet bileşenin çıkarılmasıyla bulunur:

$$\kappa v^2 N = \alpha''(1) - \frac{dv}{dt}\,T = (0,2,0) - \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0\right) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu vektör gerçekten T'ye diktir: $(1)(-4/5)+(2)(2/5)=0$. Uzunluğu $\sqrt{16/25+4/25}=2/\sqrt{5}$'tir; $\kappa v^2 = 2/\sqrt{5}$ ve $v^2=5$ olduğundan

$$\kappa(1)=\frac{2}{5\sqrt{5}}\approx 0{,}179, \qquad N(1)=\frac{(-4/5,2/5,0)}{2/\sqrt{5}}=\frac{(-2,1,0)}{\sqrt{5}}.$$

Denetim: $\| \alpha'' \|^2 = 4$ ve $(dv/dt)^2+\kappa^2 v^4 = 16/5+\frac{4}{125}\cdot 25 = 16/5+4/5=4$. N, parabolün içbükey tarafına, yani y ekseninin sol üstüne bakar; tam beklendiği gibi.
■

Örnek 12.5 (Sabit Süratli Eğride İvme Tamamen Normaldir). $\alpha(t)=(3\cos t, 3\sin t, 4t)$ helisinin ivmesinin teğet bileşeninin sıfır olduğunu ve $\alpha''=\kappa v^2 N$ eşitliğini sayılarla doğrulayalım.

Çözüm.
Sürat $v=5$ sabittir, dolayısıyla $dv/dt=0$ ve Lemma 12.2'ye göre $\alpha''=\kappa v^2 N$ olmalıdır. Doğrudan hesap: $\alpha''(t)=(-3\cos t,-3\sin t,0)$. Öte yandan $\kappa v^2=\frac{3}{25}\cdot 25=3$ ve $N(t)=(-\cos t,-\sin t,0)$ olduğundan $\kappa v^2 N=(-3\cos t,-3\sin t,0)=\alpha''$; eşitlik sağlanır. İvme her an silindirin eksenine doğru bakar ve uzunluğu 3'tür: helis üzerinde sabit süratle giden bir nokta yalnızca "içe doğru" çekilir, hiç hızlanmaz ya da yavaşlamaz.
■

12.4 Aparatın Hesaplanabilir Formülleri

Artık asıl hedefe geliyoruz: aparatı doğrudan α'nın türevlerinden hesaplamak. Anahtar gözlem, hız ile ivmenin vektörel çarpımının (Tanım 9.9) çok sade olmasıdır. Lemma 12.2'deki açılımlarla

$$\alpha' \times \alpha'' = (vT)\times\left(\frac{dv}{dt}T+\kappa v^2 N\right)=v\frac{dv}{dt}\,T\times T+\kappa v^3\, T\times N=\kappa v^3\, B$$

olur; çünkü $T\times T=\mathbf{0}$ ve $T\times N=B$'dir. Yani hız ile ivmenin vektörel çarpımı binormal doğrultusundadır ve uzunluğu κv^3'tür. Bu tek eşitlikten aparatın hemen hemen tamamı çıkar.

Teorem 12.1 (Frenet Aparatının Türevlerle Hesabı). *$\alpha: I\to\mathbb{R}^3$, eğriliği $\kappa>0$ olan düzgün bir eğri olsun. O zaman*

$$T=\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \qquad B=\frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|}, \qquad N=B\times T,$$
$$\kappa=\frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \qquad \tau=\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}.$$

Ayrıca düzgün bir eğri için $\|\alpha'\times\alpha''\|>0$ koşulu $\kappa>0$ koşuluna denktir.

İspat.
Birim teğet. *$v=\|\alpha'\|>0$ olduğundan $\alpha'=vT$ eşitliği (Lemma 12.2) $T=\alpha'/\|\alpha'\|$ ile aynı şeydir.*
Eğrilik. *Teoremin önünde gösterdiğimiz gibi $\alpha'\times\alpha''=\kappa v^3 B$'dir. Normunu alalım: $\|B\|=1$, $\kappa>0$ ve $v>0$ olduğundan*

$$\|\alpha'\times\alpha''\|=\kappa v^3=\kappa\|\alpha'\|^3,$$

bu da κ formülüdür. Bu eşitlik aynı zamanda son iddiayı verir: $v>0$ olduğundan $\|\alpha'\times\alpha''\|>0$ ile $\kappa>0$ aynı anda doğru ya da aynı anda yanlıştır. (Eğriliğin tanımı $\kappa>0$ varsayımını gerektiriyordu; bu iddiayı, tanımın $\kappa\geq 0$ verdiği genel durumda $\|\alpha'\times\alpha''\|=\kappa v^3$ eşitliğinin hâlâ geçerli olduğu gözlemiyle okuyun: hız ile ivme birbirine paralelse eğrilik sıfırdır, değilse pozitiftir. Böylece $\kappa>0$ olduğunda α' ile α'' lineer bağımsızdır ve tıpkı T ile N gibi her noktada oskülatör düzlemi gererler.)
Binormal. *$\alpha'\times\alpha''=\kappa v^3 B$ eşitliğini pozitif sayı $\kappa v^3=\|\alpha'\times\alpha''\|$'ye bölersek*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\kappa v^3} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\| \alpha' \times \alpha'' \|}$$

çıkar.
Asli normal. *$N = B \times T$ olduğunu gösterelim. $B \times T$, hem B'ye hem T'ye dik bir vektördür (Lemma 9.5); T, N, B bir çatı olduğundan T ile B'ye dik olan her vektör N'nin bir katıdır: $B \times T = \lambda N$. Katsayıyı bulmak için iki tarafı N ile iç çarpalım: $\lambda = (B \times T) \cdot N$. Üçlü skaler çarpım, satırları B, T, N'nin koordinatları olan determinanttır; satırların çevrimsel yer değiştirmesi (iki satır değişimi) determinantı değiştirmez, dolayısıyla*

$$(B \times T) \cdot N = (T \times N) \cdot B = B \cdot B = 1.$$

Burada $T \times N = B$ tanımını kullandık. Yani $\lambda = 1$ ve $N = B \times T$'dir.
Burulma. *$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''$ çarpımını hesaplamak için her şeyi T, N, B cinsinden yazalım. $\alpha' \times \alpha'' = \kappa v^3 B$ olduğunu ve $T \cdot B = N \cdot B = 0$ olduğunu biliyoruz; dolayısıyla yalnızca α''''ün B bileşenine ihtiyacımız var. $\alpha'' = (dv/dt)\,T + \kappa v^2 N$ eşitliğinin türevini alalım; Leibniz kuralı ve Lemma 12.1 ile*

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \frac{d^2v}{dt^2}\,T + \frac{dv}{dt}\,T' + \frac{d(\kappa v^2)}{dt}\,N + \kappa v^2\,N' \\ &= \frac{d^2v}{dt^2}\,T + \frac{dv}{dt}\,\kappa v N + \frac{d(\kappa v^2)}{dt}\,N + \kappa v^2\,(-\kappa v T + \tau v B). \end{aligned}$$

B'nin önündeki tek terim $\kappa v^2 \cdot \tau v = \kappa \tau v^3$'tür; öteki terimlerin hepsi T ya da N doğrultusundadır. Dolayısıyla

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \kappa v^3\, B \cdot \alpha''' = \kappa v^3 \cdot \kappa \tau v^3 = \kappa^2 v^6 \tau.$$

Öte yandan $\| \alpha' \times \alpha'' \|^2 = \kappa^2 v^6$'dır. Bölme yapılırsa

$$\frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\| \alpha' \times \alpha'' \|^2} = \frac{\kappa^2 v^6 \tau}{\kappa^2 v^6} = \tau$$

bulunur; ispat tamamlanır.
■

Yani düzgün bir eğrinin bütün Frenet aparatı, ilk üç türevi ve birkaç vektörel çarpımla, hiçbir yeniden parametrelendirmeye gerek kalmadan hesaplanır. Formüller $v = 1$ iken önceki bölümün tanımlarına indirgenir: birim hızlı eğride $\alpha' = T$, $\alpha'' = \kappa N$, $\alpha' \times \alpha'' = \kappa B$ ve $\kappa = \| \alpha'' \|$'dür.

i Hesap kolaylıkları

Vektörel çarpımın normunu hesaplamak için Lagrange özdeşliği (Lemma 9.5) kullanılabilir:

$$\| \alpha' \times \alpha'' \|^2 = \| \alpha' \|^2 \| \alpha'' \|^2 - (\alpha' \cdot \alpha'')^2.$$

Burulma formülünün payı, üçlü skaler çarpımın çevrimsel simetrisiyle $\alpha' \cdot (\alpha'' \times \alpha''')$ biçiminde de yazılabilir ve satırları $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ olan 3×3 determinanta eşittir. Ancak $\alpha' \times \alpha''$ zaten B ve κ için gerektiğinden, çoğu zaman en verimli yol $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''$ çarpımını doğrudan hesaplamaktır.

Örnek 12.6 (Kübik Koordinatlı Eğrinin Frenet Aparatı). Önceki bölümlerden tanıdığımız

$$\alpha(t) = (3t - t^3,\, 3t^2,\, 3t + t^3)$$

eğrisinin Frenet aparatını bulalım ve $t = 1$ anındaki değerlerini yazalım.

Çözüm.
Türevler. Koordinat koordinat türev alalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (3-3t^2,\,6t,\,3+3t^2) = 3(1-t^2,\,2t,\,1+t^2),\\ \alpha''(t) &= (-6t,\,6,\,6t) = 6\,(-t,\,1,\,t),\\ \alpha'''(t) &= 6\,(-1,\,0,\,1).\end{aligned}$$

Sürat. $\alpha'\cdot\alpha' = 9\big[(1-t^2)^2+4t^2+(1+t^2)^2\big]$. Köşeli parantezin içi $1-2t^2+t^4+4t^2+1+2t^2+t^4 = 2+4t^2+2t^4 = 2(1+t^2)^2$'dir. Böylece

$$\alpha'\cdot\alpha' = 18\,(1+t^2)^2, \qquad v(t) = \|\,\alpha'(t)\,\| = \sqrt{18}\,(1+t^2) = 3\sqrt{2}\,(1+t^2).$$

Vektörel çarpım. Ortak çarpanları dışarı alarak

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t) = 18\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3\\ 1-t^2 & 2t & 1+t^2\\ -t & 1 & t\end{vmatrix}$$

yazalım. Bileşenler:

$$\begin{aligned}U_1:&\quad 2t\cdot t-(1+t^2)\cdot 1 = 2t^2-1-t^2 = t^2-1,\\ U_2:&\quad (1+t^2)(-t)-(1-t^2)\,t = -t-t^3-t+t^3 = -2t,\\ U_3:&\quad (1-t^2)\cdot 1-2t\cdot(-t) = 1-t^2+2t^2 = 1+t^2.\end{aligned}$$

Yani $\alpha'\times\alpha'' = 18\,(-1+t^2,\,-2t,\,1+t^2)$. Bu vektörün kendisiyle iç çarpımı

$$18^2\big[(t^2-1)^2+4t^2+(1+t^2)^2\big] = 18^2\cdot 2\,(1+t^2)^2$$

olur (köşeli parantez, sürat hesabındakiyle aynıdır). Dolayısıyla

$$\|\,\alpha'\times\alpha''\,\| = 18\sqrt{2}\,(1+t^2).$$

Üçlü çarpım. $(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha''' = 18\cdot 6\big[(-1+t^2)(-1)+(-2t)(0)+(1+t^2)(1)\big] = 18\cdot 6\cdot 2 = 216$; t'ye bağlı terimler birbirini götürdü.
Aparat. Teorem 12.1'ndeki formüllere yerleştirelim:

$$\kappa = \frac{18\sqrt{2}\,(1+t^2)}{\big(\,3\sqrt{2}\,(1+t^2)\big)^3} = \frac{18\sqrt{2}\,(1+t^2)}{54\sqrt{2}\,(1+t^2)^3} = \frac{1}{3(1+t^2)^2},$$

$$\tau = \frac{216}{\big(\,18\sqrt{2}\,(1+t^2)\big)^2} = \frac{216}{648\,(1+t^2)^2} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}.$$

Bu eğride eğrilik ile burulma her an eşittir. Çatı alanı:

$$T = \frac{\alpha'}{v} = \frac{(1-t^2,\,2t,\,1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}, \qquad B = \frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\,\alpha'\times\alpha''\,\|} = \frac{(-1+t^2,\,-2t,\,1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}.$$

$N = B\times T$ için bir vektörel çarpım daha gerekir. $2(1+t^2)^2$ ortak paydasıyla, paydaki bileşenler:

$$\begin{aligned}U_1:&\quad (-2t)(1+t^2)-(1+t^2)(2t) = -4t\,(1+t^2),\\ U_2:&\quad (1+t^2)(1-t^2)-(-1+t^2)(1+t^2) = 2\,(1-t^2)(1+t^2),\\ U_3:&\quad (-1+t^2)(2t)-(-2t)(1-t^2) = 2t\,(-1+t^2+1-t^2) = 0.\end{aligned}$$

Ortak $2(1+t^2)$ çarpanı sadeleşir:

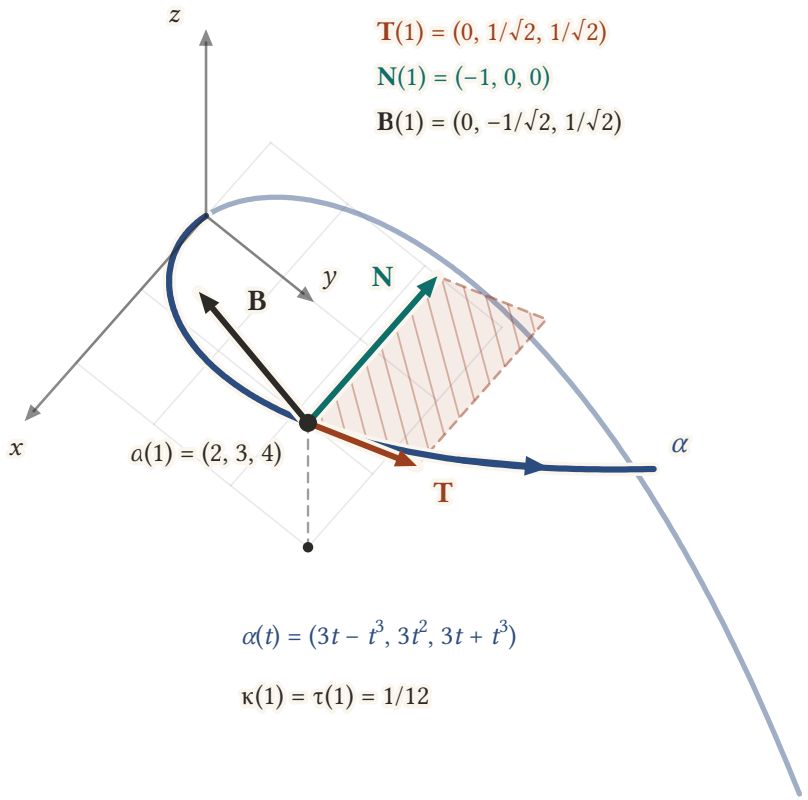
$$N = \frac{(-2t,\,1-t^2,\,0)}{1+t^2}.$$

N'nin üçüncü koordinatı daima sıfırdır: bu eğrinin asli normali her an yataydır. Uzunluk denetimi: $4t^2+(1-t^2)^2 = (1+t^2)^2$, dolayısıyla $\|\,N\,\| = 1$.
$t=1$ anındaki değerler. $\alpha(1) = (2,3,4)$, $v(1) = 6\sqrt{2}$, $\kappa(1) = \tau(1) = 1/12$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T(1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad N(1) = (-1, 0, 0), \qquad B(1) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Üçü karşılıklı diktir ve $T(1) \times N(1) = (0 \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1) - 0, 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)) = B(1)$ sağlanır.



Şekil 12.1: $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisi $-1{,}5 \le t \le 1{,}5$ aralığında çizilmiştir; ok, t'nin arttığı yönü gösterir, soluk kısım $z = 0$ düzleminin altında kalır. $\alpha(1) = (2, 3, 4)$ noktasında turuncu $\mathbf{T}(1)$ eğriye teğettir, yeşil $\mathbf{N}(1) = (-1, 0, 0)$ ona diktir ve eğrinin büküldüğü yana bakar, koyu $\mathbf{B}(1) = \mathbf{T}(1) \times \mathbf{N}(1)$ ise ilk ikisinin gerdiği taralı oskülatör düzleme diktir. Üç vektör de birim uzunluktadır; görünürlük için iki kat uzun çizilmişlerdir, sayfada farklı boyda görünmeleri izdüşümün kısaltmasındandır. Bu noktada eğrilik ile burulma eşittir: $\kappa(1) = \tau(1) = 1/12$.

■

Örnek 12.7 (Bükülmüş Kübiğin Eğriliği ve Burulması). $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarını bulalım; $t = 0$ ve $t = 1$ anlarındaki değerlerini hesaplayalım.

Çözüm.
$\alpha' = (1, 2t, 3t^2)$, $\alpha'' = (0, 2, 6t)$, $\alpha''' = (0, 0, 6)$. Vektörel çarpım:

$$\alpha' \times \alpha'' = (2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2, 3t^2 \cdot 0 - 1 \cdot 6t, 1 \cdot 2 - 2t \cdot 0) = (6t^2, -6t, 2).$$

Normunun karesi $36t^4 + 36t^2 + 4 = 4(9t^4 + 9t^2 + 1)$, üçlü çarpım $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = 12$ ve $\| \alpha' \|^2 = 1 + 4t^2 + 9t^4$'tür. Dolayısıyla

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}, \qquad \tau(t) = \frac{12}{4(9t^4 + 9t^2 + 1)} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$t=0$'da $\kappa=2$, $\tau=3$; burada $\alpha'=(1,0,0)$, $\alpha''=(0,2,0)$ olduğundan $T=(1,0,0)$, $B=(0,0,1)$ ve $N=B\times T=(0,1,0)$'dır. $t=1$'de $\kappa=2\sqrt{19}/14^{3/2}\approx 0{,}166$ ve $\tau=3/19\approx 0{,}158$'dir. Eğrilik de burulma da $\mid t \mid$ büyüdükçe sıfıra gider: eğri uzaklarda gitgide bir doğruya benzer. Bu eğrinin birim hızlı yeniden parametrelendirmesini yazamadığımızı hatırlayın; aparatını yine de eksiksiz hesapladık. ■

Özetlersek, keyfi bir düzgün eğrinin Frenet aparatına, yani eğriliğine, burulmasına ve Frenet çatı alanına artık sahibiz. Bu aparat sürat çarpanlı Frenet formüllerini (Lemma 12.1) sağlar ve Teorem 12.1 ile hesaplanır. Şimdi bu araçların iki uygulamasına bakalım.

12.5 Küresel Görüntü

Verilen bir β eğrisinden, β'nın davranışının bir yönünü aydınlatan yeni bir eğri üretmenin birçok doğal yolu vardır. En basitlerinden biri, birim teğet vektörlerin uçlarını izlemektir.

Tanım 12.2 (Küresel Görüntü). $\beta: I\to\mathbb{R}^3$, eğriliği pozitif olan birim hızlı bir eğri ve $T=\beta'$ onun birim teğet vektör alanı olsun. Öklid koordinatları T'nin koordinat fonksiyonlarıyla aynı olan

$$\sigma: I\to\mathbb{R}^3,\qquad \sigma(s)=\big(\,t_1(s),t_2(s),t_3(s)\,\big)\quad(\text{burada}\;\; T(s)=\sum_i t_i(s)\,U_i(\beta(s))\,)$$

eğrisine β'nın **küresel görüntüsü** (spherical image) denir.

Yani küresel görüntü, her $T(s)$ teğet vektörünü uygulama noktasından koparıp orijine taşıdığımızda ucunun çizdiği eğridir. $\parallel T(s)\parallel=1$ olduğundan σ, merkezi orijin, yarıçapı 1 olan Σ birim küresinin üzerinde kalır. σ'nın hareketi, β'nın **dönüşünü** temsil eder: β ne kadar sert dönerse T o kadar hızlı değişir ve σ küre üzerinde o kadar hızlı ilerler.

Örnek 12.8 (Helisin Küresel Görüntüsü Bir Çemberdir). $\beta(s)=\left(a\cos\dfrac{s}{c},\,a\sin\dfrac{s}{c},\,\dfrac{bs}{c}\right)$ birim hızlı helisinin ($a>0$, $b\neq 0$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$) küresel görüntüsünü bulalım; $a=3$, $b=4$ için çemberin merkezini ve yarıçapını yazalım.

Çözüm.
Örnek 11.5'ten $T(s)=\dfrac{1}{c}\left(-a\sin\dfrac{s}{c},\,a\cos\dfrac{s}{c},\,b\right)$'dir. Dolayısıyla

$$\sigma(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\,\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\,\frac{b}{c}\right).$$

Üçüncü koordinat b/c sabittir; ilk iki koordinatın kareleri toplamı a^2/c^2'dir. Yani σ, birim küreyi $z=b/c$ düzlemiyle kesen çember üzerinde dolaşır: merkezi $(0,0,b/c)$, yarıçapı a/c'dir. Kürede kaldığı, $a^2/c^2+b^2/c^2=1$ eşitliğinden bir kez daha görülür. $a=3$, $b=4$ için merkez $(0,0,4/5)$, yarıçap $3/5$'tir. Helisin teğeti sabit eğimle yükseldiği için küresel görüntü ekvatora paralel bir "enlem çemberi" olur; b büyüdükçe çember küçülür ve kutba yaklaşır. ■

β birim hızlı olsa da σ'nın birim hızlı olmasını bekleyemeyiz. Gerçekten σ'nın hız vektörünün vektör kısmı T''nün vektör kısmıdır, yani $\sigma'=\kappa N$ (koordinatlar düzeyinde), dolayısıyla σ'nın sürati $\parallel\sigma'\parallel=\kappa$, yani β'nın eğriliğidir. Bu yüzden σ'nın eğriliğini hesaplarken keyfi hızlı formülleri kullanmak zorundayız; sonuç şaşırtıcı derecede sadedir.

Lemma 12.3 (Küresel Görüntünün Eğriliği). *β, eğriliği $\kappa>0$ ve burulması τ olan birim hızlı bir eğri ve σ onun küresel görüntüsü olsun. σ düzgün bir eğridir ve eğriliği*

$$\kappa_\sigma=\frac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\kappa}=\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}\geq 1$$

ile verilir; yani yalnızca β'nın burulmasının eğriliğine oranına bağlıdır.

> ***İspat.***
> *σ'nın türevlerini, T, N, B'nin koordinat fonksiyonlarıyla ifade edelim; aşağıda T, N, B yazarken bu vektör alanlarının orijine taşınmış vektör kısımlarını kastediyoruz. $\sigma = T$ olduğundan Frenet formülleriyle*
>
> $$\sigma' = T' = \kappa N,$$
>
> *ve $\| \sigma' \| = \kappa > 0$ olduğu için σ düzgündür. Bir kez daha türev alalım (Leibniz kuralı ve $N' = -\kappa T + \tau B$):*
>
> $$\sigma'' = (\kappa N)' = \frac{d\kappa}{ds} N + \kappa N' = -\kappa^2 T + \frac{d\kappa}{ds} N + \kappa\tau B.$$
>
> *Şimdi vektörel çarpımı hesaplayalım. $N \times N = \mathbf{0}$, $N \times T = -B$ ve $N \times B = T$ olduğundan*
>
> $$\sigma' \times \sigma'' = \kappa N \times \left(-\kappa^2 T + \frac{d\kappa}{ds} N + \kappa\tau B \right) = -\kappa^3 N \times T + \kappa^2 \tau N \times B = \kappa^3 B + \kappa^2 \tau T.$$
>
> *T ile B dik birim vektörler olduğundan $\| \sigma' \times \sigma'' \|^2 = \kappa^6 + \kappa^4\tau^2 = \kappa^4(\kappa^2 + \tau^2)$, yani $\| \sigma' \times \sigma'' \| = \kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$. Teorem 12.1'ne göre, σ'nın sürati κ olduğundan,*
>
> $$\kappa_\sigma = \frac{\| \sigma' \times \sigma'' \|}{\| \sigma' \|^3} = \frac{\kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa} = \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}}.$$
>
> *Karekökün içi en az 1 olduğundan $\kappa_\sigma \geq 1$'dir.*
> ■

Yani küresel görüntü hiçbir zaman birim küre üzerindeki bir büyük çemberden daha az eğri olamaz ($\kappa_\sigma = 1$ tam olarak $\tau = 0$ iken, yani düzlem eğrilerinde olur) ve eğriliği τ/κ oranıyla belirlenir. Helis örneğinde $\kappa = 3/25$, $\tau = 4/25$ için $\kappa_\sigma = \sqrt{9+16}/3 = 5/3$ bulunur; bu, yarıçapı $3/5$ olan çemberin eğriliği $1/(3/5) = 5/3$ ile uyumludur. Sırada, τ/κ oranının belirleyici olduğu yakından ilişkili bir uygulama var.

12.6 Silindirik Helisler

Dairesel helisin en göze çarpan özelliği, teğetinin silindirin ekseniyle hep aynı açıyı yapmasıdır: $T = \frac{1}{c}(-a\sin t, a\cos t, b)$ için $T \cdot (0,0,1) = b/c$ sabittir. Bu özelliği, altındaki silindirin dairesel olmasını istemeden, bir tanıma dönüştürelim.

Tanım 12.3 (Silindirik Helis). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ düzgün bir eğri olsun. Sabit bir $\mathbf{u}$ birim vektörü ve sabit bir ϑ açısı için her $t \in I$'da

$$T(t) \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$$

oluyorsa, yani α'nın birim teğeti $\mathbf{u}$ ile sabit bir ϑ açısı yapıyorsa, α'ya bir **silindirik helis** (cylindrical helix) denir. $\mathbf{u}$'ya helisin **eksen vektörü**, ϑ'ya **açısı** diyeceğiz.

Yani silindirik helis, sabit bir doğrultuya göre gidiş yönünü hiç değiştirmeyen eğridir: $\mathbf{u}$'yu "yukarı" diye düşünürsek eğri hep aynı dikliğe sahip bir yamaçta yürür gibidir. Burada $T \cdot \mathbf{u}$, birim vektörlerin iç çarpımı olduğundan $[-1,1]$ aralığındadır ve ϑ'yı $[0,\pi]$ aralığında, iki vektör arasındaki açı olarak alabiliriz.
Bu koşul yeniden parametrelendirme altında değişmez. Gerçekten $\beta = \alpha(h)$ yön koruyan bir yeniden parametrelendirmeyse β'nın birim teğeti $T_\beta(s) = T(h(s))$'dir ve $T_\beta \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$ aynen sürer; yön çeviren bir yeniden parametrelendirmede $T_\beta = -T(h)$ olur ve $\mathbf{u}$ yerine $-\mathbf{u}$ (ya da ϑ yerine $\pi - \vartheta$) alınır. Bu yüzden kuramsal iş için birim hızlı silindirik helislerle yetinebiliriz.
β, $T \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$ koşulunu sağlayan birim hızlı bir silindirik helis olsun. $\beta(0)$ noktasını başlangıç alıp

 CC BY-NC-SA 4.0

$$h(s) = \big(\ \beta(s) - \beta(0)\ \big) \cdot \mathbf{u}$$

fonksiyonunu tanımlayalım; $h(s)$, $\beta(s)$'nin $\beta(0)$'dan ayrıldığından beri $\mathbf{u}$ doğrultusunda ne kadar "yükseldiğini" söyler. Türevi

$$\frac{dh}{ds} = \beta'(s) \cdot \mathbf{u} = T(s) \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$$

sabittir; $h(0) = 0$ olduğundan $h(s) = s\cos\vartheta$ bulunur. Yani silindirik helis, **yay uzunluğuna göre** sabit oranda yükselir. Keyfi bir parametrelendirmeye geçildiğinde bu formül, s yay uzunluğu fonksiyonu olmak üzere,

$$h(t) = s(t)\cos\vartheta$$

biçimini alır.
β'nın her noktasından $\mathbf{u}$ doğrultusunda bir doğru çizersek bir C silindiri elde ederiz; β bu silindirin üzerinde, silindirin her doğrusunu sabit ϑ açısıyla keserek ilerler. Silindirin adı da buradan gelir. C dairesel bir silindirse β, Örnek 4.2'teki türden bir dairesel helistir; genel olarak C'nin kesiti herhangi bir düzlem eğrisi olabilir. Bu kesit eğrisini alıştırmalarda inceleyeceğiz.

Örnek 12.9 (Dairesel Helis Bir Silindirik Helistir). $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ helisinin bir silindirik helis olduğunu gösterelim; eksen vektörünü, açısını ve yükselme fonksiyonunu bulalım.

> **Çözüm.**
> $T(t) = \frac{1}{5}(-3\sin t, 3\cos t, 4)$ ve $\mathbf{u} = (0,0,1)$ için $T(t)\cdot\mathbf{u} = 4/5$ her t'de sabittir. Dolayısıyla α, eksen vektörü $\mathbf{u} = (0,0,1)$ ve açısı $\vartheta = \cos^{-1}(4/5) \approx 36{,}87°$ olan bir silindirik helistir. Yükselme fonksiyonu $h(t) = (\alpha(t) - \alpha(0))\cdot\mathbf{u} = 4t$'dir; yay uzunluğu $s(t) = 5t$ olduğundan $h(t) = s(t)\cos\vartheta = 5t\cdot\frac{4}{5} = 4t$ eşitliği sağlanır. Buradaki C silindiri elbette $x^2 + y^2 = 9$ dairesel silindiridir.
> ■

Silindirik helisleri tanımak son derece kolaydır; belirleyici olan, küresel görüntüde de karşımıza çıkan τ/κ oranıdır.

Teorem 12.2 (Silindirik Helislerin Karakterizasyonu). *Eğriliği $\kappa > 0$ olan düzgün bir α eğrisinin silindirik helis olması için gerek ve yeter koşul τ/κ oranının sabit olmasıdır.*

> ***İspat.***
> *Hem silindirik helis koşulu hem τ/κ oranı yeniden parametrelendirmeyle değişmez (birincisini yukarıda gördük; ikincisi aparatın tanımından çıkar: $\tau(t)/\kappa(t) = \bar\tau(s(t))/\bar\kappa(s(t))$, ve s örtendir). Dolayısıyla α'nın birim hızlı olduğunu varsayabiliriz.*
> Gereklilik. *α, $T\cdot\mathbf{u} = \cos\vartheta$ koşulunu sağlayan bir silindirik helis olsun. $\mathbf{u}$ sabit olduğundan iç çarpımın türevi yalnızca T'den gelir:*
>
> $$0 = (T\cdot\mathbf{u})' = T'\cdot\mathbf{u} = \kappa N\cdot\mathbf{u}.$$
>
> *$\kappa > 0$ olduğu için $N\cdot\mathbf{u} = 0$ olur: $\mathbf{u}$ her an T ile B'nin gerdiği rektifiyan düzlemdedir. Bu iki katsayının sabit olduğunu görelim: $T\cdot\mathbf{u} = \cos\vartheta$ varsayım gereği sabittir; $(B\cdot\mathbf{u})' = B'\cdot\mathbf{u} = -\tau N\cdot\mathbf{u} = 0$ olduğundan $B\cdot\mathbf{u}$ da sabittir. Ortonormal açılım (Teorem 9.1) $\mathbf{u}$'yu*
>
> $$\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot T)\,T + (\mathbf{u}\cdot N)\,N + (\mathbf{u}\cdot B)\,B = \cos\vartheta\,T + (\mathbf{u}\cdot B)\,B$$
>
> *biçiminde verir. $\|\,\mathbf{u}\,\| = 1$ olduğundan $\cos^2\vartheta + (\mathbf{u}\cdot B)^2 = 1$, yani $\mathbf{u}\cdot B = \pm\sin\vartheta$'dır; işaret sabittir. Gerekirse ϑ yerine $-\vartheta$ alarak ($\cos$ değişmez, $\sin$ işaret değiştirir) $\mathbf{u}\cdot B = \sin\vartheta$ yazabiliriz. Böylece*
>
> $$\mathbf{u} = \cos\vartheta\,T + \sin\vartheta\,B.$$
>
> *Her zamanki gibi türev alıp Frenet formüllerini uygulayalım; $\cos\vartheta$ ve $\sin\vartheta$ sabittir:*
>
> $$\mathbf{0} = \mathbf{u}' = \cos\vartheta\,T' + \sin\vartheta\,B' = \cos\vartheta\,\kappa N - \sin\vartheta\,\tau N = (\kappa\cos\vartheta - \tau\sin\vartheta)\,N.$$
>
> *$N \neq \mathbf{0}$ olduğundan $\kappa\cos\vartheta = \tau\sin\vartheta$'dır. Burada $\sin\vartheta \neq 0$ olmalıdır: $\sin\vartheta = 0$ olsaydı $\cos\vartheta = \pm 1$ ve $\kappa = 0$ olurdu, bu ise $\kappa > 0$ ile çelişir. Dolayısıyla*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \cot\vartheta$$

sabittir.
Yeterlilik. τ/κ *sabit olsun. Kotanjant fonksiyonu* $(0,\pi)$ *aralığını bütün gerçel sayılara birebir ve örten götürdüğünden* $\cot\vartheta = \tau/\kappa$ *olan bir* $\vartheta \in (0,\pi)$ *açısı vardır.* α *üzerinde*

$$U = \cos\vartheta\, T + \sin\vartheta\, B$$

vektör alanını tanımlayalım. Türevi, Frenet formülleriyle,

$$U' = \cos\vartheta\,\kappa N - \sin\vartheta\,\tau N = \sin\vartheta\,\big(\,\kappa\cot\vartheta - \tau\,\big)\,N = \sin\vartheta\left(\kappa\cdot\frac{\tau}{\kappa} - \tau\right)N = \mathbf{0}$$

olur. Türevi sıfır olan bir vektör alanı paraleldir (Lemma 10.4): koordinat fonksiyonlarının türevleri bir aralıkta sıfır olduğundan bu fonksiyonlar sabittir. Yani U*'nun bütün değerleri aynı* $\mathbf{u}$ *vektörünün farklı noktalara uygulanmış hâlleridir:* $U(s) = \mathbf{u}_{\alpha(s)}$*.* $\|\,\mathbf{u}\,\|^2 = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$ *olduğundan* $\mathbf{u}$ *bir birim vektördür ve*

$$T\cdot\mathbf{u} = T\cdot(\cos\vartheta\, T + \sin\vartheta\, B) = \cos\vartheta$$

sabittir. Dolayısıyla α *bir silindirik helistir.*
■

Yani bir eğrinin silindirik helis olup olmadığını anlamak için eksen vektörünü aramak gerekmez; τ'yu κ'ya bölmek yeter. İspat bir de eksenin nasıl bulunacağını söyler: $\mathbf{u} = \cos\vartheta\, T + \sin\vartheta\, B$ ve $\cot\vartheta = \tau/\kappa$. Bu bilgi, alıştırmalarda dairesel helislerin tam olarak eğriliği ve burulması sabit olan eğriler olduğunu göstermek için kullanılacaktır.

Örnek 12.10 (Kübik Koordinatlı Eğri Bir Silindirik Helistir). $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisinin bir silindirik helis olduğunu gösterelim; eksen vektörünü ve açısını bulalım, üzerinde bulunduğu silindiri betimleyelim.

Çözüm.
Örnek 12.6'ta $\kappa = \tau = 1/(3(1+t^2)^2)$ bulmuştuk; oran $\tau/\kappa = 1$ sabittir. Teorem 12.2'e göre α bir silindirik helistir ve $\cot\vartheta = 1$, yani $\vartheta = \pi/4$'tür. Eksen vektörü

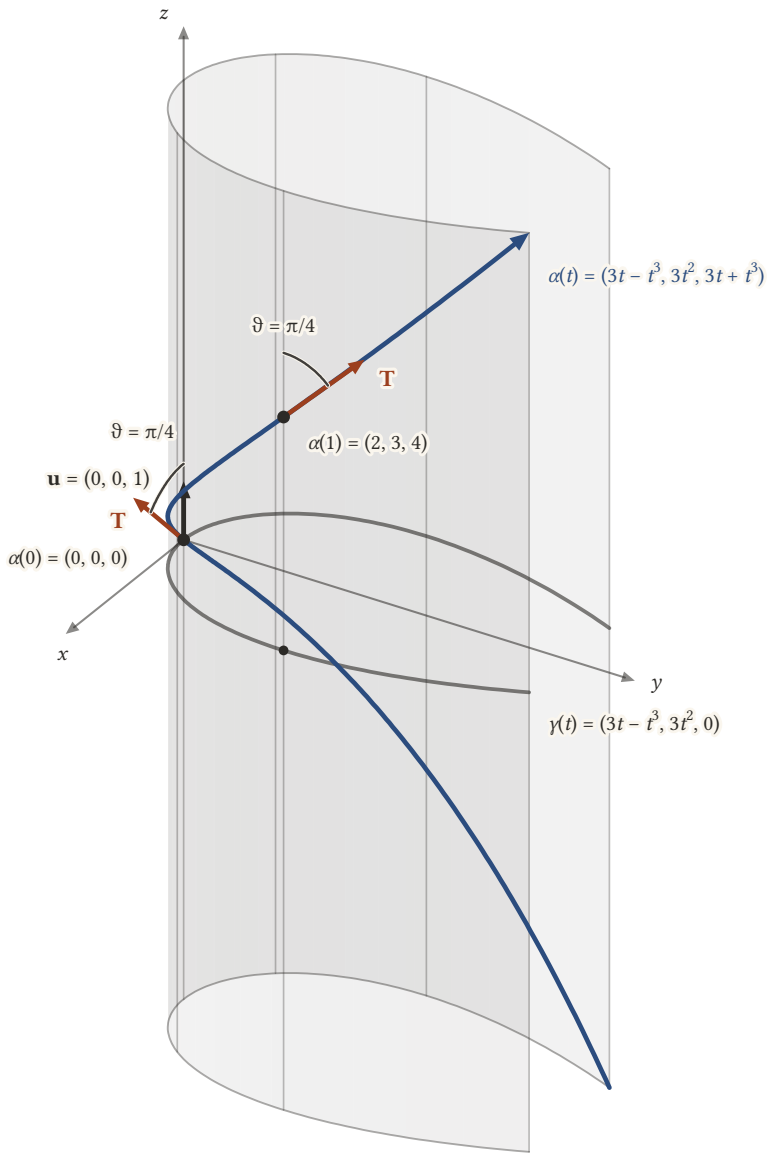
$$\mathbf{u} = \cos\frac{\pi}{4}\,T + \sin\frac{\pi}{4}\,B = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(T+B)$$

ile hesaplanır. Aynı örnekteki formüllerle

$$T + B = \frac{(1-t^2, 2t, 1+t^2) + (-1+t^2, -2t, 1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)} = \frac{(0,0,2(1+t^2))}{\sqrt{2}\,(1+t^2)} = (0,0,\sqrt{2}),$$

dolayısıyla $\mathbf{u} = (0,0,1)$: eksen z eksenidir. Denetim: $T\cdot\mathbf{u} = \dfrac{1+t^2}{\sqrt{2}\,(1+t^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$, gerçekten sabittir. Eğri, z eksenine göre hep 45°'lik bir eğimle yükselir; yükselme fonksiyonu $h(t) = 3t + t^3$ ve yay uzunluğu $s(t) = \int_0^t 3\sqrt{2}\,(1+u^2)\,du = 3\sqrt{2}\,(t + t^3/3)$ olduğundan $h(t) = s(t)\cos\vartheta = 3\sqrt{2}\,(t + t^3/3)/\sqrt{2} = 3t + t^3$ eşitliği de doğrulanır.
Üzerinde bulunduğu silindir, α'nın xy düzlemine izdüşümü olan $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 0)$ düzlem eğrisinin üstüne dikilen düşey silindirdir. γ dairesel değildir; örneğin $\gamma(0) = (0,0,0)$, $\gamma(1) = (2,3,0)$, $\gamma(\sqrt{3}) = (0,9,0)$ noktaları bir çember üzerinde olsa bile $\gamma(-1) = (-2,3,0)$ ve $\gamma(2) = (-2,12,0)$ ile birlikte beş noktanın tek bir çembere sığmadığı doğrudan denetlenebilir; nitekim γ'nın eğriliği $2/(3(1+t^2)^2)$ sabit değildir. Bu yüzden α dairesel bir helis değil, genel bir silindirik helistir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.2: $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisi, düzlemdeki izdüşümü $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 0)$ üstüne dikilen düşey silindirin duvarında yükselir. Silindirin doğrultmanları düşey olduğundan eksen vektörü $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$'dir. Birim teğet $\mathbf{T}$ (turuncu) her noktada bu düşey doğrultuyla aynı $\vartheta = \pi/4$ açısını yapar: $\alpha(0) = (0, 0, 0)$ ile $\alpha(1) = (2, 3, 4)$ noktalarındaki iki yay eşittir. Kesit eğrisi γ bir çember olmadığından α dairesel bir helis değil, genel bir silindirik helistir.

■

Örnek 12.11 (Silindirik Helis Olmayan Bir Eğri). $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ eğrisinin silindirik helis olmadığını gösterelim.

Çözüm.
Örnek 12.7'ta

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}, \qquad \tau(t) = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulmuştuk. Oran

$$\frac{\tau}{\kappa}(t) = \frac{3\,(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}{2\,(9t^4+9t^2+1)^{3/2}}$$

olur. $t=0$'da bu oran $3/2$, $t=1$'de ise $3\cdot 14^{3/2}/(2\cdot 19^{3/2}) \approx 0{,}949$'dur. Oran sabit olmadığından Teorem 12.2'e göre α silindirik helis değildir: birim teğetinin sabit açı yaptığı hiçbir doğrultu yoktur. Bir önceki örnekle karşılaştırın; iki eğri de üçüncü dereceden polinom koordinatlara sahiptir ama biri silindirik helistir, öteki değildir. Hangi kübik eğrilerin silindirik helis olduğu alıştırmalarda tam olarak belirlenecektir.

■

12.7 Eğri Türlerinin Özeti

Eğrilik ve burulma üzerine konan basit koşullar, eğrinin türünü şöyle belirler ($\Leftrightarrow$ "ancak ve ancak" demektir):

koşul		eğri türü
$\kappa = 0$	$\Leftrightarrow$	doğru
$\tau = 0$	$\Leftrightarrow$	düzlem eğrisi
$\kappa > 0$ sabit ve $\tau = 0$	$\Leftrightarrow$	çember
$\kappa > 0$ sabit ve $\tau \neq 0$ sabit	$\Leftrightarrow$	dairesel helis
τ/κ sabit	$\Leftrightarrow$	silindirik helis

Satırların gerekçeleri şöyledir; ilk dördünde eğrinin birim hızlı olduğunu varsayabiliriz, çünkü her koşul yeniden parametrelendirmeyle değişmez.

- **Doğru.** $\kappa = \| T' \| = 0$ demek $T' = \mathbf{0}$, yani T'nin sabit bir $\mathbf{q}$ birim vektörü olması demektir; o zaman $\beta(s) = \beta(0) + s\,\mathbf{q}$ olur (Lemma 10.4), bu da bir doğrudur. Tersine bir doğrunun birim teğeti sabittir ve $\kappa = 0$'dır.
- **Düzlem eğrisi.** $\kappa > 0$ iken $\tau = 0$ ile düzlemsellik denktir (Sonuç 11.1 ve Örnek 12.2).
- **Çember.** $\kappa > 0$ sabit ve $\tau = 0$ ile çember olma denktir (Lemma 11.2).
- **Dairesel helis.** Dairesel helisin eğriliği a/c^2 ve burulması b/c^2 sabittir (Örnek 11.5). Tersi, yani $\kappa > 0$ ve $\tau \neq 0$ sabitse eğrinin bir dairesel helis olduğu, alıştırmalarda silindirik helis teoremi ve kesit eğrisi yardımıyla ispatlanacaktır.
- **Silindirik helis.** Teorem 12.2. Tabloda τ/κ sabiti sıfır da olabilir: o zaman $\vartheta = \pi/2$ ve eğri, ekseni kendi düzlemine dik olan yoz bir silindirik helis, yani bir düzlem eğrisidir.

Tablodaki denkliklerin hepsi $\kappa > 0$ varsayımıyla okunmalıdır; eğriliğin tek bir noktada bile sıfırlanması eğrinin geometrik karakterini köklü biçimde değiştirebilir. Bunun çarpıcı bir örneğini alıştırmalarda göreceğiz.

12.8 Alıştırmalar

Alıştırma 12.1 (Bir Kübik Eğrinin Frenet Aparatı). $\alpha(t) = \left(2t,\, t^2,\, \dfrac{t^3}{3}\right)$ eğrisinin Frenet aparatını, yani κ, τ, T, N, B'yi hesaplayınız.

Çözüm.
Türevler: $\alpha' = (2, 2t, t^2)$, $\alpha'' = (0, 2, 2t)$, $\alpha''' = (0, 0, 2)$.
Sürat. $\alpha' \cdot \alpha' = 4 + 4t^2 + t^4 = (2+t^2)^2$, dolayısıyla $v = 2 + t^2$; süratin tam kare çıkması hesabı çok kolaylaştırır.
Vektörel çarpım.

$$\alpha' \times \alpha'' = (2t\cdot 2t - t^2\cdot 2,\; t^2\cdot 0 - 2\cdot 2t,\; 2\cdot 2 - 2t\cdot 0) = (2t^2, -4t, 4) = 2\,(t^2, -2t, 2).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Normu: $\| (t^2, -2t, 2) \|^2 = t^4 + 4t^2 + 4 = (t^2+2)^2$, yani $\| \alpha' \times \alpha'' \| = 2(t^2+2)$.
Üçlü çarpım. $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = 4 \cdot 2 = 8$.
Eğrilik ve burulma. Teorem 12.1 ile

$$\kappa = \frac{2(t^2+2)}{(t^2+2)^3} = \frac{2}{(t^2+2)^2}, \qquad \tau = \frac{8}{4(t^2+2)^2} = \frac{2}{(t^2+2)^2}.$$

Eğrilik ile burulma eşittir.
Çatı alanı.

$$T = \frac{(2, 2t, t^2)}{2+t^2}, \qquad B = \frac{(t^2, -2t, 2)}{2+t^2}.$$

$N = B \times T$'yi hesaplayalım; payda $(2+t^2)^2$'dir ve paydaki bileşenler

$$\begin{aligned} U_1 &: \quad (-2t)(t^2) - (2)(2t) = -2t^3 - 4t = -2t\,(t^2+2), \\ U_2 &: \quad (2)(2) - (t^2)(t^2) = 4 - t^4 = (2-t^2)(2+t^2), \\ U_3 &: \quad (t^2)(2t) - (-2t)(2) = 2t^3 + 4t = 2t\,(t^2+2) \end{aligned}$$

olur. Ortak $(2+t^2)$ çarpanı sadeleşir:

$$N = \frac{(-2t, 2-t^2, 2t)}{2+t^2}.$$

Denetim: $4t^2 + (2-t^2)^2 + 4t^2 = t^4 + 4t^2 + 4 = (2+t^2)^2$, yani $\| N \| = 1$; ayrıca $N \cdot T = (-4t + 4t - 2t^3 + 2t^3)/(2+t^2)^2 = 0$.
■

Alıştırma 12.2 (Bir Kübik Eğrinin Çizimi ve Bir Noktadaki Çatısı). $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ eğrisini $-4 \le t \le 4$ aralığında çiziniz ve $t = 2$ anındaki T, N, B vektörlerini gösteriniz.

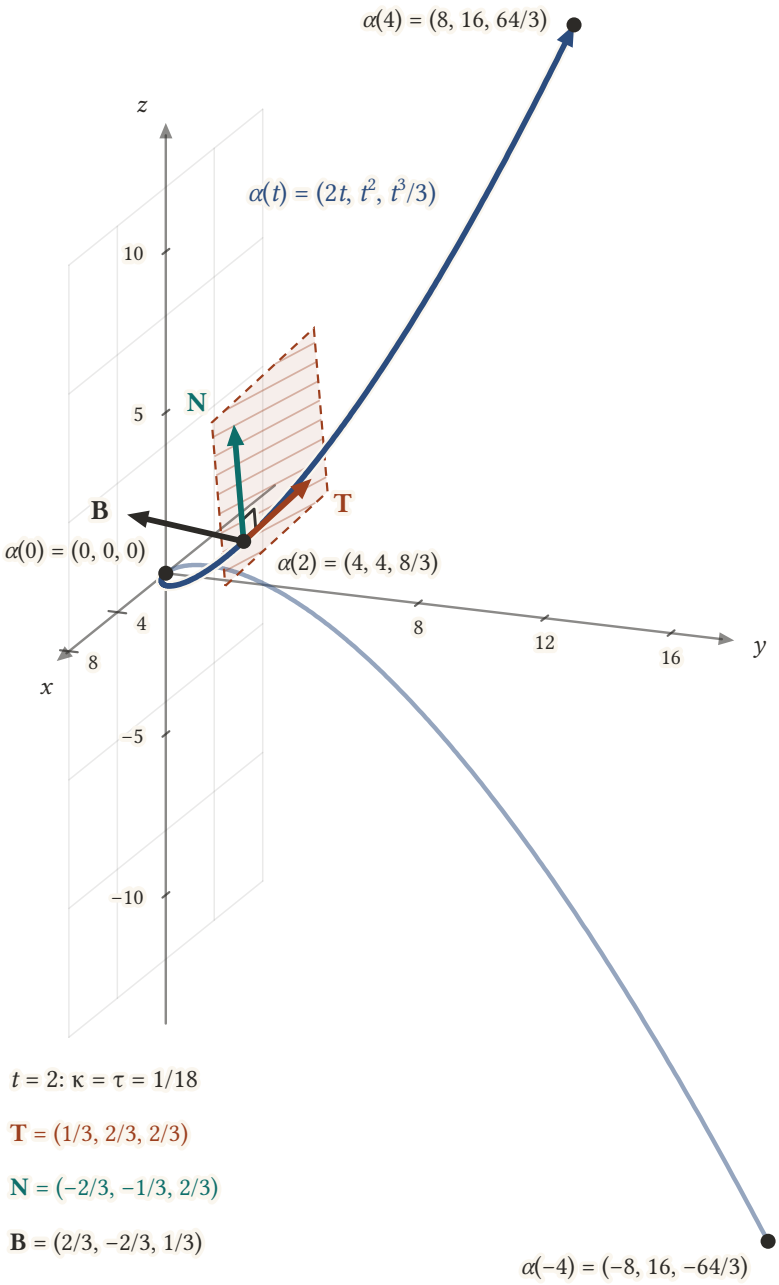
Çözüm.
Bir önceki kutudaki formüllerde $t = 2$ yazalım: $v(2) = 6$, $\kappa(2) = \tau(2) = 2/36 = 1/18$ ve

$$\alpha(2) = \left(4, 4, \frac{8}{3}\right), \qquad T(2) = \frac{(2,4,4)}{6} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$N(2) = \frac{(-4,-2,4)}{6} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad B(2) = \frac{(4,-4,2)}{6} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Üçünün de uzunluğu $\sqrt{1+4+4}/3 = 1$'dir ve ikişer ikişer iç çarpımları sıfırdır; örneğin $T \cdot N = (-2 - 2 + 4)/9 = 0$.
Eğrinin kaba biçimi: $x = 2t$ doğrusal artar, $y = t^2$ hep pozitiftir ve $t = 0$'da sıfırlanır, $z = t^3/3$ tek fonksiyondur. Uç noktalar $\alpha(\pm 4) = (\pm 8, 16, \pm 64/3)$, ara noktalar $\alpha(\pm 2) = (\pm 4, 4, \pm 8/3)$ ve $\alpha(0) = (0,0,0)$'dır. Eğri, xz düzlemine göre y ekseni etrafında simetriktir: $\alpha(-t)$, $\alpha(t)$'nin $(x,z) \mapsto (-x,-z)$ dönüşümüyle elde edilen eşidir. Aşağıdaki şekilde bu veriler kullanılmıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.3: $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ kübik eğrisi $-4 \le t \le 4$ aralığında çizilmiştir; uçtaki ok t'nin artış yönünü, soluk parça ise eğrinin arkada kalan $t \le 0$ yarısını gösterir. $t = 2$ noktasında, yani $\alpha(2) = (4, 4, 8/3)$'te, Frenet çatısının üç birim vektörü dörder birim uzunluğunda çizilmiştir: teğet $\mathbf{T}$ (turuncu), asli normal $\mathbf{N}$ (yeşil) ve binormal $\mathbf{B}$. $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{N}$'nin gerdiği taralı parça oskülatör düzlemdir; $\mathbf{T}$ eğriye teğet olduğu için eğriyle birlikte gider, dik açı işareti de $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ olduğunu hatırlatır. Üç okun sayfada farklı boylarda görünmesi izdüşümdendir; üçü de birim vektördür ve bu noktada $\kappa = \tau = 1/18$'dir.

■

Alıştırma 12.3 (Bir Kübik Eğrinin Çatısının Sonsuzdaki Limitleri). $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ eğrisi için $t \to -\infty$ ve $t \to \infty$ iken T, N ve B'nin limit değerlerini bulunuz.

Çözüm.

Alıştırma 12.1′daki formüllerin pay ve paydasını t^2'ye bölelim:

$$T = \frac{(2/t^2, 2/t, 1)}{2/t^2+1}, \qquad N = \frac{(-2/t, 2/t^2-1, 2/t)}{2/t^2+1}, \qquad B = \frac{(1, -2/t, 2/t^2)}{2/t^2+1}.$$

$t \to \pm\infty$ iken $1/t \to 0$ ve $1/t^2 \to 0$ olduğundan iki yönde de aynı limitler çıkar:

$$T \to (0,0,1), \qquad N \to (0,-1,0), \qquad B \to (1,0,0).$$

Limit vektörleri de bir çatıdır ve $B \times T = (1,0,0)\times(0,0,1) = (0\cdot 1 - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0) = (0,-1,0) = N$ tutarlılığı korunur. Yorum: $|\,t\,|$ büyüdükçe $\kappa = \tau = 2/(2+t^2)^2$ sıfıra gider ve eğri z eksenine paralel bir doğruya benzemeye başlar; teğet z doğrultusuna yaklaşır. Çatının iki uçta aynı limite gitmesi dikkat çekicidir: eğri uzaklarda iki tarafta da aynı yöne "bakar".
■

Alıştırma 12.4 (Hiperbolik Fonksiyonlu Eğrinin Yay Uzunluğuna Göre Eğriliği). $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ eğrisinin eğriliğini ve burulmasını, $t=0$'dan ölçülen yay uzunluğu s cinsinden ifade ediniz.

Çözüm.
$\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$ ve $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ özdeşliğini kullanacağız.
Türevler. $\alpha' = (\sinh t, \cosh t, 1)$, $\alpha'' = (\cosh t, \sinh t, 0)$, $\alpha''' = (\sinh t, \cosh t, 0)$.
Sürat ve yay uzunluğu. $\alpha'\cdot\alpha' = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$, dolayısıyla $v(t) = \sqrt{2}\cosh t$ ve

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\cosh u\, du = \sqrt{2}\sinh t.$$

Vektörel çarpım.

$$\alpha'\times\alpha'' = (\cosh t\cdot 0 - 1\cdot\sinh t,\ 1\cdot\cosh t - \sinh t\cdot 0,\ \sinh^2 t - \cosh^2 t) = (-\sinh t, \cosh t, -1).$$

Normunun karesi $\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$; yani $\|\,\alpha'\times\alpha''\,\| = \sqrt{2}\cosh t$.
Üçlü çarpım. $(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha''' = -\sinh^2 t + \cosh^2 t + 0 = 1$.
Eğrilik ve burulma.

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}\cosh t}{(\sqrt{2}\cosh t)^3} = \frac{1}{2\cosh^2 t}, \qquad \tau = \frac{1}{2\cosh^2 t}.$$

Yay uzunluğuna geçiş. $s = \sqrt{2}\sinh t$ olduğundan $\sinh^2 t = s^2/2$ ve $\cosh^2 t = 1+\sinh^2 t = 1 + s^2/2 = (2+s^2)/2$. Böylece

$$\kappa = \tau = \frac{1}{2+s^2}.$$

$s=0$'da (yani $t=0$'da, $\alpha(0)=(1,0,0)$ noktasında) eğrilik ve burulma en büyük değerleri $1/2$'yi alır; $|\,s\,|$ büyüdükçe ikisi de sıfıra gider.
■

Alıştırma 12.5 (Çift Koni Üzerindeki Eğrinin Tepedeki Aparatı). $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ eğrisi $x^2+y^2=z^2$ çift konisinin üzerinde kalır ve $t=0$'da koninin tepesinden geçer. α'nın $t=0$ anındaki Frenet aparatını bulunuz.

Çözüm.
Önce koni iddiasını görelim: $(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 = t^2 = z^2$. $t<0$ için eğri alt konide, $t>0$ için üst konidedir; tepe noktası $\alpha(0)=(0,0,0)$'dır.
Türevler. Çarpım kuralıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1),$$
$$\alpha''(t) = (-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t, 0),$$
$$\alpha'''(t) = (-3\cos t + t\sin t, -3\sin t - t\cos t, 0).$$

$t = 0$'da: $\alpha'(0) = (1,0,1)$, $\alpha''(0) = (0,2,0)$, $\alpha'''(0) = (-3,0,0)$. Özellikle $\alpha'(0) \neq \mathbf{0}$: eğri, koninin sivri tepesinden geçerken bile düzgündür; tepe konide bir tekilliktir ama eğride değildir.
Hesap. $v(0) = \sqrt{2}$ ve

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (1,0,1) \times (0,2,0) = (0\cdot 0 - 1\cdot 2, 1\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot 2 - 0\cdot 0) = (-2,0,2),$$

normu $2\sqrt{2}$. Üçlü çarpım: $(-2,0,2)\cdot(-3,0,0) = 6$. Dolayısıyla

$$\kappa(0) = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1, \qquad \tau(0) = \frac{6}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Çatı:

$$T(0) = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \qquad B(0) = \frac{(-2,0,2)}{2\sqrt{2}} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}},$$

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \frac{1}{2}(0\cdot 1 - 1\cdot 0, 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1, (-1)\cdot 0 - 0\cdot 1) = \frac{1}{2}(0,2,0) = (0,1,0).$$

Denetim: $\alpha'(0)\cdot\alpha''(0) = 0$ olduğundan $t = 0$'da $dv/dt = 0$'dır ve Lemma 12.2'ye göre $\alpha''(0) = \kappa v^2 N = 1\cdot 2\cdot(0,1,0) = (0,2,0)$ olmalıdır; gerçekten öyledir.
■

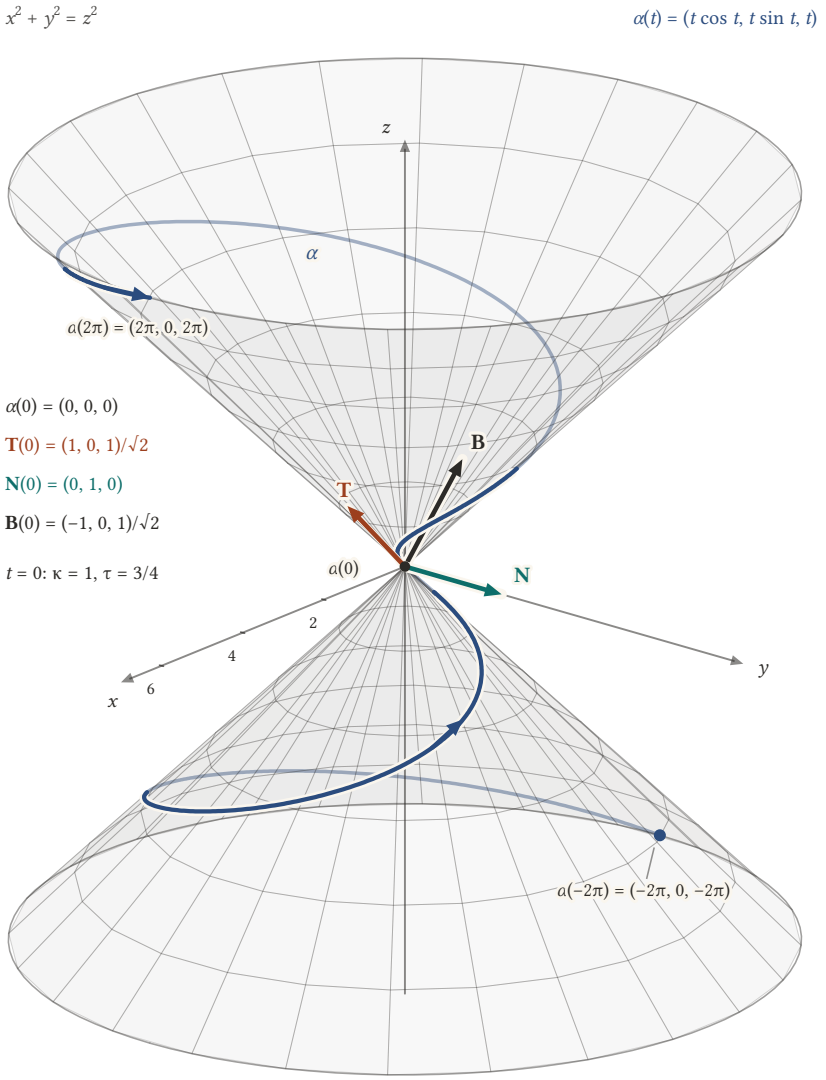
Alıştırma 12.6 (Çift Koni Üzerindeki Eğrinin Çizimi). $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ eğrisini $-2\pi \le t \le 2\pi$ aralığında çiziniz ve $t = 0$'daki T, N, B vektörlerini gösteriniz.

Çözüm.
Eğri, xy düzlemine izdüşümünde $(t\cos t, t\sin t)$ Arşimet spiralini çizer: orijinden çıkıp yarıçapı $|\,t\,|$ ile büyüyen bir sarmal. Aynı anda $z = t$ yükseldiği için nokta, koninin yüzeyinde dolanarak tepeden uzaklaşır. $t < 0$ tarafı, $t > 0$ tarafının orijine göre yansımasıdır: $\alpha(-t) = -\alpha(t)$; nokta alt koniden gelip tepeden geçer ve üst koniye çıkar. Birkaç nokta: $\alpha(\pm\pi/2) = (0, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$, $\alpha(\pm\pi) = (-\pi, 0, \pm\pi)$, $\alpha(\pm 2\pi) = (\pm 2\pi, 0, \pm 2\pi)$. Bir önceki kutuda tepe noktasında

$$T(0) = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \qquad N(0) = (0,1,0), \qquad B(0) = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$$

bulmuştuk; $T(0)$ tepeden x-yönünde 45° ile yükselir, $N(0)$ ise y eksenine bakar, çünkü nokta tepeden çıkar çıkmaz saatin tersi yönünde sarılmaya başlar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.4: $x^2 + y^2 = z^2$ çift konisi (gri ızgara) ve üzerinde kalan $\alpha(t) = (t\cos t,\ t\sin t,\ t)$ eğrisi, $-2\pi \le t \le 2\pi$ (mavi; koninin arkasından geçen parçalar soluk çizilmiştir). Eğri alt koniden gelip tepeden geçer ve üst koniye çıkar; tepe koni için bir tekillik olsa da eğri orada düzgündür, çünkü $\alpha'(0) = (1, 0, 1) \neq \mathbf{0}$. Tepeden çıkan üç ok $t = 0$ anındaki Frenet çatısıdır: $\mathbf{T}$ (turuncu) eğriye teğettir, $\mathbf{N}$ (yeşil) eğrinin döndüğü yana bakar, $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ (koyu) ikisine de diktir. Üçü de birim vektördür, görünürlük için 2 birim uzunlukta çizilmiştir; eğrilik orada $\kappa = 1$ olduğu için eğri, tepeden ayrılır ayrılmaz $\mathbf{T}$ doğrultusundan sapıp $\mathbf{N}$ yönüne döner.

■

Alıştırma 12.7 (Eğriliğin İvme ve Sürat Türeviyle İfadesi). $\mathbb{R}^3$'te düzgün bir α eğrisinin eğriliğinin

$$\kappa^2 v^4 = \| \alpha'' \|^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\kappa > 0$ olsun. Lemma 12.2'ye göre $\alpha'' = \dfrac{dv}{dt}\,T + \kappa v^2\,N$'dir. T ile N birbirine dik birim vektörler olduğundan iki tarafın kendisiyle iç çarpımı

$$\| \alpha'' \|^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 T\cdot T + 2\,\frac{dv}{dt}\,\kappa v^2\, T\cdot N + \kappa^2 v^4\, N\cdot N = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \kappa^2 v^4$$

verir; $\kappa^2 v^4$'ü yalnız bırakınca istenen eşitlik çıkar.
κ'nın sıfırlandığı noktalarda N tanımlı değildir, ama eşitlik yine doğrudur: $\alpha' = vT$ eşitliğinden $\alpha'' = (dv/dt)\,T + vT'$ ve $T' \perp T$ ($T\cdot T = 1$'in türevi) olduğundan $\| \alpha'' \|^2 = (dv/dt)^2 + v^2 \| T' \|^2$; ayrıca genel durumda $\| \alpha' \times \alpha'' \| = \kappa v^3$ eşitliğinin kanıtındaki gibi $\| T' \| = \kappa v$'dir. Yorum: $\| \alpha'' \|^2$, ivmenin teğet bileşeninin karesi ile normal bileşeninin karesinin toplamıdır; formül, normal bileşenin uzunluğunu ivmenin uzunluğundan çıkarır. Bu, eğriliği vektörel çarpım kullanmadan hesaplamanın bir yoludur: örneğin Örnek 12.4'de $t = 1$ için $\| \alpha'' \|^2 = 4$, $(dv/dt)^2 = 16/5$ ve $v^4 = 25$ olduğundan $\kappa^2 = (4 - 16/5)/25 = 4/125$, yani $\kappa = 2/(5\sqrt{5})$ bulunur; orada bulduğumuz değerle aynıdır.
■

Alıştırma 12.8 (Sabit Süratli Eğrinin Aparat Formülleri). α, sürati sabit bir $c > 0$ olan bir eğri olsun; N, B ve τ için α'''nün hiç sıfırlanmadığını, yani $\kappa > 0$ olduğunu varsayınız. Şunları gösteriniz:

$$T = \frac{\alpha'}{c}, \qquad N = \frac{\alpha''}{\| \alpha'' \|}, \qquad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{c\,\| \alpha'' \|}, \qquad \kappa = \frac{\| \alpha'' \|}{c^2}, \qquad \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'')\cdot \alpha'''}{c^2\,\| \alpha'' \|^2}.$$

Çözüm.
$v = c$ sabit olduğundan $dv/dt = 0$'dır ve Lemma 12.2

$$\alpha' = cT, \qquad \alpha'' = \kappa c^2\, N$$

verir. Birincisinden $T = \alpha'/c$. İkincisinde $\kappa c^2 > 0$ ve $\| N \| = 1$ olduğundan norm alınırsa $\| \alpha'' \| = \kappa c^2$, yani $\kappa = \| \alpha'' \| / c^2$ çıkar; α'''nün sıfırlanmaması $\kappa > 0$ ile aynı şeydir. Bu değeri geri yerleştirirsek $N = \alpha''/(\kappa c^2) = \alpha''/\| \alpha'' \|$: sabit süratli bir eğrinin asli normali, ivmesinin doğrultusudur.
Binormal için Teorem 12.1'ndeki $\alpha' \times \alpha'' = \kappa v^3 B = \kappa c^3 B$ eşitliğini kullanalım: $\| \alpha' \times \alpha'' \| = \kappa c^3 = c \cdot \kappa c^2 = c\,\| \alpha'' \|$, dolayısıyla

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\| \alpha' \times \alpha'' \|} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{c\,\| \alpha'' \|}.$$

Burulma için aynı teoremin formülünde $\| \alpha' \times \alpha'' \|^2 = c^2\,\| \alpha'' \|^2$ yazılır:

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'')\cdot \alpha'''}{c^2\,\| \alpha'' \|^2}.$$

Denetim olarak $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ helisini alalım: $c = 5$, $\alpha'' = (-3\cos t, -3\sin t, 0)$, $\| \alpha'' \| = 3$, dolayısıyla $\kappa = 3/25$ ve $N = (-\cos t, -\sin t, 0)$; $\alpha''' = (3\sin t, -3\cos t, 0)$ ve $\alpha' \times \alpha'' = (12\sin t, -12\cos t, 9)$ olduğundan $(\alpha' \times \alpha'')\cdot \alpha''' = 36$ ve $\tau = 36/(25\cdot 9) = 4/25$. Hepsi Örnek 12.1 ile uyuşur.
■

Alıştırma 12.9 (Silindirik Helisin Eksen Vektörü İçin Formül). α, eğriliği $\kappa > 0$ olan bir silindirik helis olsun. Eksen vektörünün (gerekirse $-\mathbf{u}$ ile değiştirilerek)

$$\mathbf{u} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\,T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\,B$$

biçiminde yazılabileceğini ve buradaki katsayıların, ϑ helisin açısı olmak üzere, $\cos\vartheta$ ile $\sin\vartheta$ olduğunu ispatlayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Teorem 12.2'in ispatında (birim hızlı durumda; keyfi hızda aparat aktarıldığı için aynı eşitlikler geçerlidir) $\mathbf{u} = \cos\vartheta\, T + \sin\vartheta\, B$ ve $\kappa\cos\vartheta = \tau\sin\vartheta$, $\sin\vartheta \neq 0$ bulmuştuk. $\sin\vartheta < 0$ ise $\mathbf{u}$ yerine $-\mathbf{u}$'yu ve ϑ yerine $\vartheta + \pi$'yi alalım: $\cos(\vartheta+\pi) = -\cos\vartheta$ ve $\sin(\vartheta+\pi) = -\sin\vartheta$ olduğundan $-\mathbf{u} = \cos(\vartheta+\pi)\,T + \sin(\vartheta+\pi)\,B$ yine aynı biçimdedir, $T\cdot(-\mathbf{u}) = \cos(\vartheta+\pi)$ sabittir ve yeni açının sinüsü pozitiftir. Dolayısıyla $\sin\vartheta > 0$ varsayabiliriz.
$\kappa\cos\vartheta = \tau\sin\vartheta$ eşitliğinin iki tarafının karesini alıp $\cos^2\vartheta = 1-\sin^2\vartheta$ yazalım:

$$\kappa^2(1-\sin^2\vartheta) = \tau^2\sin^2\vartheta \quad\Rightarrow\quad \sin^2\vartheta\,(\kappa^2+\tau^2) = \kappa^2 \quad\Rightarrow\quad \sin\vartheta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}};$$

karekökün pozitif işaretini $\sin\vartheta > 0$ ve $\kappa > 0$ olmasından dolayı seçtik. Sonra

$$\cos\vartheta = \frac{\tau\sin\vartheta}{\kappa} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}.$$

Bunları $\mathbf{u} = \cos\vartheta\, T + \sin\vartheta\, B$'ye yerleştirince istenen formül çıkar. Katsayılar, τ/κ sabit olduğu için, eğri boyunca sabittir; κ ile τ ayrı ayrı değişse bile $\mathbf{u}$ sabit kalır. $\tau < 0$ ise $\cos\vartheta < 0$, yani ϑ geniş açıdır: eğri $\mathbf{u}$ doğrultusunda "alçalır".
■

Alıştırma 12.10 (Eksen Vektörü Formülünün Dairesel Heliste Denetimi). $\alpha(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$ dairesel helisi ($a > 0$, $b \neq 0$) için Alıştırma 12.9'daki formülün gerçekten $\mathbf{u} = (0,0,1)$ verdiğini gösteriniz.

Çözüm.
$c = \sqrt{a^2+b^2}$ olsun. Helisin aparatı (Örnek 12.1'daki hesabın genel a, b ile tekrarı) $\kappa = a/c^2$, $\tau = b/c^2$,

$$T = \frac{1}{c}(-a\sin t,\, a\cos t,\, b), \qquad B = \frac{1}{c}(b\sin t,\, -b\cos t,\, a)$$

biçimindedir. ($B = T\times N$ ile $N = (-\cos t, -\sin t, 0)$'dan hesaplanabilir; ya da Teorem 12.1 ile $\alpha'\times\alpha'' = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$ vektörünün normuna, ac'ye, bölünmesiyle.) Şimdi

$$\sqrt{\kappa^2+\tau^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c^2} = \frac{1}{c}, \qquad \cos\vartheta = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = \frac{b}{c}, \qquad \sin\vartheta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = \frac{a}{c}.$$

Formüle göre

$$\mathbf{u} = \frac{b}{c}\,T + \frac{a}{c}\,B = \frac{1}{c^2}(-ab\sin t + ab\sin t,\, ab\cos t - ab\cos t,\, b^2+a^2) = (0,0,1).$$

Gerçekten silindirin ekseni bulundu; t'ye bağlı bütün terimler birbirini götürdü. Açı için $\cos\vartheta = b/c$, Örnek 12.9'te $a=3$, $b=4$ ile bulduğumuz $4/5$ değeriyle uyumludur.
■

Alıştırma 12.11 (Kesit Eğrisi Bir Düzlemdedir). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, eksen vektörü $\mathbf{u}$ olan bir silindirik helis ve $t_0 \in I$ olsun.

$$\gamma(t) = \alpha(t) - \big(\,(\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u}\,\big)\,\mathbf{u}$$

eğrisine, α'nın üzerinde bulunduğu silindirin bir **kesit eğrisi** (cross-sectional curve) denir. γ'nın, $\alpha(t_0)$'dan geçen ve $\mathbf{u}$'ya dik olan düzlemde kaldığını gösteriniz.

Çözüm.
$\alpha(t_0)$'dan geçen, $\mathbf{u}$'ya dik düzlem, $(\mathbf{x}-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u} = 0$ koşulunu sağlayan $\mathbf{x}$ noktalarından oluşur. $\gamma(t)$ için bu iç çarpımı hesaplayalım; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$'dir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}(\gamma(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u} &= (\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u} - \big(\ (\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u}\ \big)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\\ &= (\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u} - (\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u} = 0.\end{aligned}$$

Dolayısıyla her $\gamma(t)$ bu düzlemdedir. Geometrik olarak $\gamma(t)$, $\alpha(t)$ noktasının $\mathbf{u}$ doğrultusunda düzleme dik izdüşümüdür: $\alpha(t)$'den, $\mathbf{u}$ doğrultusundaki "yükselme" miktarı $h(t)=(\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u}$ çıkarılır. Silindirin bütün doğruları $\mathbf{u}$ doğrultusunda olduğundan γ, silindirin bu düzlemle kesitidir; α da γ'nın üzerine dikilen silindirde, $\alpha(t)=\gamma(t)+h(t)\,\mathbf{u}$ biçiminde ilerler.
■

Alıştırma 12.12 (Kesit Eğrisinin Eğriliği). α, eğriliği $\kappa>0$, açısı ϑ ve eksen vektörü $\mathbf{u}$ olan bir silindirik helis; $\gamma(t)=\alpha(t)-\big(\ (\alpha(t)-\alpha(t_0))\cdot\mathbf{u}\ \big)\,\mathbf{u}$ onun bir kesit eğrisi olsun. γ'nın düzgün olduğunu ve eğriliğinin $\kappa/\sin^2\vartheta$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
α'nın sürati v, Frenet çatısı T,N,B olsun. Teorem 12.2'in ispatından $\mathbf{u}=\cos\vartheta\,T+\sin\vartheta\,B$ ve $N\cdot\mathbf{u}=0$'dır; ayrıca $\sin\vartheta\neq 0$'dır. Türevleri hesaplayalım. $\alpha(t_0)$ ve $\mathbf{u}$ sabit olduğundan

$$\gamma' = \alpha' - (\alpha'\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u} = vT - v\cos\vartheta\,\mathbf{u},$$

çünkü $\alpha'\cdot\mathbf{u}=vT\cdot\mathbf{u}=v\cos\vartheta$'dır. $\mathbf{u}$'nun açılımını yerleştirirsek

$$\gamma' = vT - v\cos\vartheta\,(\cos\vartheta\,T+\sin\vartheta\,B) = v\sin^2\vartheta\,T - v\cos\vartheta\sin\vartheta\,B = v\sin\vartheta\,(\sin\vartheta\,T-\cos\vartheta\,B).$$

Parantezdeki vektör birimdir ($\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta=1$, $T\perp B$); dolayısıyla $\|\,\gamma'\,\| = v\,|\sin\vartheta\,|>0$ ve γ düzgündür.
İkinci türev için $\alpha''=(dv/dt)\,T+\kappa v^2 N$ (Lemma 12.2) ve $\alpha''\cdot\mathbf{u}=(dv/dt)\cos\vartheta+\kappa v^2\,N\cdot\mathbf{u}=(dv/dt)\cos\vartheta$ kullanılır:

$$\gamma'' = \alpha'' - (\alpha''\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u} = \frac{dv}{dt}\,T+\kappa v^2 N - \frac{dv}{dt}\cos\vartheta\,(\cos\vartheta\,T+\sin\vartheta\,B) = \frac{dv}{dt}\sin\vartheta\,(\sin\vartheta\,T-\cos\vartheta\,B)+\kappa v^2\,N.$$

γ' ile γ'''nün vektörel çarpımında γ''ye paralel olan ilk terim düşer:

$$\gamma'\times\gamma'' = v\sin\vartheta\,(\sin\vartheta\,T-\cos\vartheta\,B)\times\kappa v^2 N = \kappa v^3\sin\vartheta\,\big(\sin\vartheta\,T\times N-\cos\vartheta\,B\times N\ \big).$$

$T\times N=B$ ve $B\times N=-T$ olduğundan parantez $\sin\vartheta\,B+\cos\vartheta\,T$'dir; bu da birim bir vektördür. Böylece $\|\,\gamma'\times\gamma''\,\| = \kappa v^3\,|\sin\vartheta\,|$ ve Teorem 12.1 ile

$$\kappa_\gamma = \frac{\|\,\gamma'\times\gamma''\,\|}{\|\,\gamma'\,\|^3} = \frac{\kappa v^3\,|\sin\vartheta\,|}{v^3\,|\sin\vartheta\,|^3} = \frac{\kappa}{\sin^2\vartheta}.$$

Yorum: kesit eğrisi, helisten daha sert döner; ϑ küçüldükçe (eğri eksene daha paralel gittikçe) fark büyür. $\vartheta=\pi/2$ ise eğri zaten düzlemseldir, kesit eğrisi kendisidir ve $\kappa_\gamma=\kappa$ olur.
■

Alıştırma 12.13 (Kübik Eğrinin Ekseni, Açısı ve Kesit Eğrisi). $\alpha(t)=(2t,t^2,t^3/3)$ eğrisinin bir silindirik helis olduğunu doğrulayınız; eksen vektörünü, açısını ve $t_0=0$'a karşılık gelen kesit eğrisini bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 12.1'da $\kappa=\tau=2/(2+t^2)^2$ bulmuştuk; $\tau/\kappa=1$ sabittir, dolayısıyla Teorem 12.2'e göre α bir silindirik helistir ve $\cot\vartheta=1$, $\vartheta=\pi/4$'tür. Eksen vektörü $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T+B)$:

$$T+B = \frac{(2,2t,t^2)+(t^2,-2t,2)}{2+t^2} = \frac{(2+t^2,0,2+t^2)}{2+t^2} = (1,0,1), \qquad \mathbf{u}=\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}.$$

Denetim: $T\cdot\mathbf{u} = \dfrac{2+t^2}{\sqrt{2}\,(2+t^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kesit eğrisi ($\alpha(0)=\mathbf{0}$): $\alpha(t)\cdot\mathbf{u}=\dfrac{2t+t^3/3}{\sqrt{2}}$, dolayısıyla

$$\gamma(t)=\left(2t,t^2,\frac{t^3}{3}\right)-\frac{2t+t^3/3}{2}(1,0,1)=\left(t-\frac{t^3}{6},t^2,-\left(t-\frac{t^3}{6}\right)\right).$$

γ, $x+z=0$ düzlemindedir (birinci ve üçüncü koordinatın toplamı sıfır); bu düzlem orijinden geçer ve $\mathbf{u}$'ya diktir. Düzlemde $e_1=(1,0,-1)/\sqrt{2}$, $e_2=(0,1,0)$ ortonormal taban seçilirse $\gamma(t)=\sqrt{2}\,(t-t^3/6)\,e_1+t^2\,e_2$ olur. Alıştırma 12.12'ye göre eğriliği $\kappa/\sin^2(\pi/4)=2\kappa=4/(2+t^2)^2$ olmalıdır; doğrudan hesapla denetleyelim: $\gamma'=(1-t^2/2,2t,-(1-t^2/2))$, $\|\gamma'\|=2(1-t^2/2)^2+4t^2=(t^2+2)^2/2$; $\gamma''=(-t,2,t)$;

$$\gamma'\times\gamma''=(2t^2+2-t^2,0,2-t^2+2t^2)=(t^2+2,0,t^2+2),\qquad \|\gamma'\times\gamma''\|=\sqrt{2}\,(t^2+2),$$

$$\kappa_\gamma=\frac{\sqrt{2}\,(t^2+2)}{(t^2+2)^3/(2\sqrt{2})}=\frac{4}{(t^2+2)^2}.$$

Sonuç uyuşur.
■

Alıştırma 12.14 (Kübik Koordinatlı Eğrinin Kesit Eğrisi). $\alpha(t)=(3t-t^3,3t^2,3t+t^3)$ eğrisinin bir silindirik helis olduğunu doğrulayınız; eksen vektörünü, açısını ve $t_0=0$'a karşılık gelen kesit eğrisini bulunuz.

Çözüm.
Örnek 12.10'te $\kappa=\tau$, $\vartheta=\pi/4$ ve $\mathbf{u}=(0,0,1)$ bulmuştuk. $\alpha(0)=\mathbf{0}$ olduğundan kesit eğrisi

$$\gamma(t)=\alpha(t)-\alpha_3(t)\,(0,0,1)=(3t-t^3,3t^2,0)$$

olur: eğrinin xy düzlemine dik izdüşümü. Alıştırma 12.12'ye göre eğriliği $2\kappa=\dfrac{2}{3(1+t^2)^2}$ olmalıdır. Doğrudan hesap: $\gamma'=3(1-t^2,2t,0)$, $\|\gamma'\|=3(1+t^2)$; $\gamma''=6(-t,1,0)$; vektörel çarpımın tek sıfırdan farklı bileşeni

$$18\big[(1-t^2)\cdot 1-2t\cdot(-t)\big]=18\,(1+t^2)$$

olduğundan $\kappa_\gamma=\dfrac{18(1+t^2)}{27(1+t^2)^3}=\dfrac{2}{3(1+t^2)^2}$. Uyuşur. γ düzlemde $t=0$'da orijinden geçen, y eksenine göre simetrik ($\gamma(-t)$, $\gamma(t)$'nin $x\mapsto -x$ yansıması) bir eğridir; $t=\pm\sqrt{3}$'te tekrar $x=0$'a döner ($\gamma(\pm\sqrt{3})=(0,9,0)$). Yani helisin üzerinde bulunduğu silindirin kesiti, bir "damla" biçiminde kapanan ve sonra sonsuza açılan bir eğridir.
■

Alıştırma 12.15 (Hiperbolik Fonksiyonlu Eğrinin Kesit Eğrisi Bir Zincir Eğrisidir). $\alpha(t)=(\cosh t,\sinh t,t)$ eğrisinin bir silindirik helis olduğunu doğrulayınız; eksen vektörünü, açısını ve $t_0=0$'a karşılık gelen kesit eğrisini bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 12.4'de $\kappa=\tau=1/(2\cosh^2 t)$ bulmuştuk; oran 1, dolayısıyla α silindirik helistir ve $\vartheta=\pi/4$. Aynı hesaptan

$$T=\frac{(\sinh t,\cosh t,1)}{\sqrt{2}\cosh t},\qquad B=\frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|}=\frac{(-\sinh t,\cosh t,-1)}{\sqrt{2}\cosh t}.$$

Toplamları $T+B=\dfrac{(0,2\cosh t,0)}{\sqrt{2}\cosh t}=(0,\sqrt{2},0)$, dolayısıyla $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T+B)=(0,1,0)$: eksen y eksenidir. Denetim: $T\cdot\mathbf{u}=\dfrac{\cosh t}{\sqrt{2}\cosh t}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kesit eğrisi ($\alpha(0) = (1,0,0)$): $(\alpha(t) - \alpha(0)) \cdot \mathbf{u} = \sinh t$, dolayısıyla

$$\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, t) - \sinh t\,(0,1,0) = (\cosh t, 0, t).$$

Bu, xz düzleminde $x = \cosh z$ denklemiyle verilen eğridir: iki ucundan asılı bir zincirin aldığı biçim olan **zincir eğrisi**. Yani α, zincir eğrisinin üzerine dikilen silindirde $45°$ eğimle yükselen bir eğridir. Eğrilik denetimi: $\gamma' = (\sinh t, 0, 1)$, $\| \gamma' \| = \cosh t$; $\gamma'' = (\cosh t, 0, 0)$; $\gamma' \times \gamma'' = (0, \cosh t, 0)$; $\kappa_\gamma = \cosh t / \cosh^3 t = 1/\cosh^2 t = 2\kappa$, tam Alıştırma 12.12'nin dediği gibi.
■

Alıştırma 12.16 (Eğriliği ve Burulması Sabit Olan Eğri Dairesel Helistir). α, eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması $\tau \neq 0$ sabit olan bir eğri olsun. α'nın bir dairesel helis olduğunu, yani uygun bir dik koordinat sisteminde $(a\cos t, a\sin t, bt)$ helisinin bir yeniden parametrelendirmesi olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Bütün koşullar yeniden parametrelendirmeyle değişmediğinden α'yı birim hızlı alabiliriz. τ/κ sabit olduğundan α bir silindirik helistir (Teorem 12.2); eksen vektörü $\mathbf{u}$, açısı ϑ olsun. Alıştırma 12.9'ya göre $\sin\vartheta = \kappa/\sqrt{\kappa^2+\tau^2} > 0$ ve $\cos\vartheta = \tau/\sqrt{\kappa^2+\tau^2} \neq 0$ alınabilir.
Adım 1: kesit eğrisi bir çemberdir. $\gamma(s) = \alpha(s) - h(s)\,\mathbf{u}$, $h(s) = (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot \mathbf{u} = s\cos\vartheta$ olsun. Alıştırma 12.11'ya göre γ, $\alpha(0)$'dan geçen ve $\mathbf{u}$'ya dik P düzleminde kalır; Alıştırma 12.12'ye göre sürati $\sin\vartheta$ ve eğriliği $\kappa_\gamma = \kappa/\sin^2\vartheta$ sabittir. γ bir düzlem eğrisi olduğundan burulması sıfırdır (düzlem eğrisinin binormali düzlemin sabit normalidir, dolayısıyla $B_\gamma' = \mathbf{0}$ ve $\tau_\gamma = 0$). Eğriliği sabit ve pozitif, burulması sıfır olan bir eğri, birim hızlı yeniden parametrelendirmesine Lemma 11.2 uygulanarak görüldüğü gibi, bir çemberin parçasıdır: yarıçapı $r = 1/\kappa_\gamma = \sin^2\vartheta/\kappa$ ve merkezi, P düzleminde sabit bir $\mathbf{c}$ noktasıdır.
Adım 2: çemberi parametreleyelim. P'nin doğrultusunda, yani $\mathbf{u}$'ya dik düzlemde, ortonormal e_1, e_2 vektörleri seçelim. $\gamma(s) - \mathbf{c}$ bu düzlemde, uzunluğu r olan bir vektördür; dolayısıyla (iç çarpım bölümünden bildiğimiz açı fonksiyonuyla) türevlenebilir bir $\theta(s)$ için

$$\gamma(s) = \mathbf{c} + r\cos\theta(s)\,e_1 + r\sin\theta(s)\,e_2$$

yazılabilir. Türev: $\gamma'(s) = r\,\theta'(s)\,(-\sin\theta\,e_1 + \cos\theta\,e_2)$, dolayısıyla $\| \gamma' \| = r\,|\,\theta'(s)\,| = \sin\vartheta$. θ' sürekli ve hiç sıfır olmadığından işareti sabittir; gerekirse e_2 yerine $-e_2$ alarak $\theta' = \omega := \sin\vartheta/r > 0$ yapabiliriz. O zaman $\theta(s) = \theta_0 + \omega s$'dir.
Adım 3: birleştirme. $\alpha(s) = \gamma(s) + s\cos\vartheta\,\mathbf{u}$ olduğundan

$$\alpha(s) = \mathbf{c} + r\cos(\theta_0+\omega s)\,e_1 + r\sin(\theta_0+\omega s)\,e_2 + s\cos\vartheta\,\mathbf{u}.$$

$t = \theta_0 + \omega s$ yeni parametresini alalım; $s = (t-\theta_0)/\omega$ olur ve

$$\alpha = \mathbf{c}' + r\cos t\,e_1 + r\sin t\,e_2 + \frac{\cos\vartheta}{\omega}\,t\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{c}' = \mathbf{c} - \frac{\theta_0\cos\vartheta}{\omega}\,\mathbf{u}.$$

Başlangıcı $\mathbf{c}'$, eksenleri $e_1, e_2, \mathbf{u}$ olan dik koordinat sisteminde bu, tam olarak $(a\cos t, a\sin t, bt)$ helisidir:

$$a = r = \frac{\sin^2\vartheta}{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}, \qquad b = \frac{\cos\vartheta}{\omega} = \frac{r\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = r\,\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}.$$

$\tau \neq 0$ olduğundan $b \neq 0$; $s \mapsto \theta_0 + \omega s$ ise yön koruyan bir yeniden parametrelendirmedir. Formüller dairesel helisin bilinen aparatıyla tutarlıdır: $(a\cos t, a\sin t, bt)$ için $\kappa = a/c^2$, $\tau = b/c^2$, $\kappa^2+\tau^2 = 1/c^2$, dolayısıyla $\kappa/(\kappa^2+\tau^2) = a$ ve $\tau/(\kappa^2+\tau^2) = b$. Böylece özet tablodaki dördüncü satır ispatlanmış olur. ($\tau = 0$ sabitse aynı akıl yürütmede $\cos\vartheta = 0$ olur, $\alpha = \gamma$ kendisi bir çemberdir; bu da üçüncü satırdır.)
■

Alıştırma 12.17 (Silindirik Helis ve Küresel Görüntüsü). Eğriliği pozitif bir eğrinin silindirik helis olması için gerek ve yeter koşulun, küresel görüntüsünün bir çemberin parçası olması olduğunu ispatlayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Eğrinin birim hızlı yeniden parametrelendirmesi β olsun; küresel görüntü $\sigma = T$ hem β'nın hem özgün eğrinin birim teğetlerinin izlediği kümedir, çünkü keyfi hızlı eğrinin T'si $\bar{T}(s)$ ile tanımlanır. Bir çemberin **bir düzlemde** kaldığını ve bir düzlemle bir kürenin kesişiminin (kesişim birden çok noktaysa) bir çember olduğunu kullanacağız.
Gereklilik. β, $T \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$ koşulunu sağlayan bir silindirik helis olsun. O zaman $\sigma(s) \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$ sabittir: σ, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$ düzleminde kalır. Aynı zamanda birim küreddir. $\sigma(s) - \cos\vartheta\,\mathbf{u}$ vektörü $\mathbf{u}$'ya diktir (iç çarpımı $\cos\vartheta - \cos\vartheta = 0$) ve Pisagor ile

$$\| \sigma(s) - \cos\vartheta\,\mathbf{u} \|^2 = \| \sigma(s) \|^2 - \cos^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta.$$

Yani σ, merkezi $\cos\vartheta\,\mathbf{u}$, yarıçapı $\sin\vartheta$ olan ve $\mathbf{u}$'ya dik düzlemde yatan çemberin üzerindedir ($\sin\vartheta \neq 0$, çünkü $\kappa > 0$).
Yeterlilik. σ bir çemberin parçasında kalsın. Çember bir P düzlemindedir; P'nin bir birim normali $\mathbf{u}$ ve P'nin denklemi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = d$ olsun. O zaman her s için $T(s) \cdot \mathbf{u} = \sigma(s) \cdot \mathbf{u} = d$ sabittir. $\mid d \mid \leq \| T \| \| \mathbf{u} \| = 1$ olduğundan $d = \cos\vartheta$ olan bir ϑ vardır ve β tanım gereği bir silindirik helistir.
Tutarlılık. Lemma 12.3'ne göre $\kappa_\sigma = \sqrt{1 + (\tau/\kappa)^2}$'dır; silindirik heliste $\tau/\kappa = \cot\vartheta$ olduğundan $\kappa_\sigma = \sqrt{1 + \cot^2\vartheta} = 1/\sin\vartheta$, yani yarıçapı $\sin\vartheta$ olan çemberin eğriliği çıkar. Küresel görüntünün eğriliğinin sabit olması ile τ/κ'nın sabit olması aynı şeydir.
■

Alıştırma 12.18 (Kübik Eğrinin Küresel Görüntüsü). $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ silindirik helisinin küresel görüntüsünü çiziniz. Tam bir çember midir? Merkezini bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 12.1'dan $T(t) = \dfrac{(2, 2t, t^2)}{2 + t^2}$ ve Alıştırma 12.13'dan $\mathbf{u} = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$, $\vartheta = \pi/4$. Bir önceki kutuya göre küresel görüntü, merkezi

$$\cos\vartheta\,\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

ve yarıçapı $\sin\vartheta = 1/\sqrt{2}$ olan, $x + z = \sqrt{2}$ düzlemindeki çemberin üzerindedir. Denetim: $T(0) = (1, 0, 0)$'ın merkeze uzaklığı $\sqrt{1/4 + 1/4} = 1/\sqrt{2}$'dir.
Çemberin tamamı mı? Çember düzleminde $e_1 = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$, $e_2 = (0, 1, 0)$ ortonormal tabanını alalım. $T(t) - (1/2, 0, 1/2)$ vektörünün bileşenleri

$$\frac{2 - t^2}{2(2 + t^2)}\,(x), \qquad \frac{2t}{2 + t^2}\,(y), \qquad \frac{t^2 - 2}{2(2 + t^2)}\,(z)$$

olduğundan e_1 bileşeni $\dfrac{2 - t^2}{\sqrt{2}\,(2 + t^2)}$, e_2 bileşeni $\dfrac{2t}{2 + t^2}$'dir. Yarıçapa bölerek açıyı okuyalım:

$$\cos\varphi = \frac{2 - t^2}{2 + t^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}\,t}{2 + t^2}.$$

$t = \sqrt{2}\tan(\varphi/2)$ yazılırsa bu, yarım açı formülleriyle tam olarak sağlanır. t, $-\infty$'dan ∞'a giderken φ, $-\pi$'den π'ye gider (uçlar dahil değil): $\cos\varphi$, -1'e yaklaşırken $\sin\varphi$ negatiften pozitife geçer ve $t = 0$'da $\varphi = 0$'dır. Dolayısıyla küresel görüntü **tam bir çember değildir**; $\varphi = \pi$ noktası, yani

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,e_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = (0, 0, 1)$$

eksiktir. Bu tam da Alıştırma 12.3'de bulduğumuz $t \to \pm\infty$ limitidir: T her iki uçta $(0, 0, 1)$'e yaklaşır ama ona hiç ulaşmaz. Çizimde, Σ birim küresi üzerinde $(1, 0, 0)$'dan geçen, $(0, 0, 1)$'de bir noktası eksik olan eğik bir çember görülür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Kovaryant Türev

Önceki bölümde (Keyfi Hızlı Eğriler) bir eğrinin Frenet aparatını, eğri hangi hızla dolaşılıyor olsun, hesaplamayı öğrendik. Oradaki bütün iş, eğri boyunca tanımlı T, N, B gibi vektör alanlarının türevlerini almaya dayanıyordu; bu alanlar yalnızca eğrinin uğradığı noktalarda tanımlıydı ve türevleri tek değişkenli bir türevdi. Bu bölümde bir adım geri çekilip daha temel bir soru soruyoruz: bütün uzayda tanımlı bir vektör alanının türevi ne demektir?

Fonksiyonlar için bu sorunun cevabını biliyoruz. Bir f fonksiyonunun $\mathbf{p}$ noktasındaki bir $\mathbf{v}$ teğet vektörüne göre türevi $\mathbf{v}[f]$, $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde harekete geçince f'nin ilk anda ne hızla değiştiğini söyleyen tek bir sayıydı. Bir W vektör alanı için aynı soru sorulabilir: $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ yönünde yola çıkınca W'nin oku ilk anda nasıl değişir? Bu kez cevap bir sayı değil, bir vektör olacaktır; çünkü değişen şey bir oktur ve okun hem uzunluğu hem doğrultusu değişebilir.

Bölümün planı şöyledir. Önce bu türevi, yönlü türevin tanımını adım adım taklit ederek tanımlayacak ve birkaç alanda doğrudan hesaplayacağız. Sonra hesabı kısaltan koordinat formülünü ispatlayacağız: bir vektör alanının türevini almak, koordinat fonksiyonlarının yönlü türevlerini almaktır. Ardından bu türevin lineerlik ve Leibniz kurallarını, yönlü türevin özelliklerinden türeteceğiz. Son olarak tek bir teğet vektör yerine bir vektör alanına göre türev almayı öğreneceğiz; bir sonraki bölümde çatı alanlarını incelerken bu işlem ana aracımız olacaktır.

13.1 Bir Vektör Alanının Bir Yöndeki Türevi

Yönlü türevin tanımını hatırlayalım (Tanım 3.1). f bir fonksiyon, $\mathbf{v}$ de $\mathbf{p}$ noktasında $\mathbb{R}^3$'e teğet bir vektör olsun. $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ doğrultusunda giden $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusunu alır, f'yi bu doğru üzerinde okuyarak $t \mapsto f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ tek değişkenli fonksiyonunu kurar ve bunun $t = 0$'daki türevini $\mathbf{v}[f]$ diye adlandırırız. Burada ve bölümün geri kalanında, uygulama noktası bağlamdan belli olduğunda $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ yerine kısaca $\mathbf{v}$ yazma alışkanlığımızı sürdürüyoruz; $\mathbf{v}[f]$ daima $\mathbf{v}_\mathbf{p}[f]$ demektir.

Bu tanımın üç adımı vardır: bir doğru seç, fonksiyonu doğruya kısıtla, tek değişkenli türev al. Aynı üç adımı bir W vektör alanı için yapmayı deneyelim. Birinci adım aynıdır. İkinci adımda W'yi doğruya kısıtlarız: her t için $W(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ teğet vektörünü alırız. Bu, doğrunun t anındaki noktasında uygulanmış bir vektördür; yani $t \mapsto W(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$, doğru üzerinde bir vektör alanıdır (Tanım 10.3). Üçüncü adımda ise eğri üzerindeki bir vektör alanının türevini alırız; bunu nasıl yapacağımızı biliyoruz (Tanım 10.4): koordinat fonksiyonlarının türevi alınır. Kısıtlama adımını, ileride başka eğriler için de kullanacağımızdan, önce genel olarak adlandıralım.

Tanım 13.1 (Bir Vektör Alanının Bir Eğriye Kısıtlanışı). W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı ve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için

$$W_\alpha(t) = W(\alpha(t))$$

kuralıyla tanımlanan W_α fonksiyonuna W'nin α'ya **kısıtlanışı** (restriction) denir.

Yani W_α, uzaya yayılmış oklar arasından yalnızca eğrinin uğradığı noktalardakileri alır ve her birini o noktaya varış anı t ile etiketler.

W_α'nın α üzerinde bir vektör alanı olduğunu doğrulayalım. Her t için $W(\alpha(t))$, $\alpha(t)$ noktasında uygulanmış bir teğet vektördür; eğri üzerinde vektör alanı tanımının istediği şey tam budur. Türevlenebilirlik için $W = \sum_i w_i U_i$ yazalım (Lemma 2.1). O zaman

$$W_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{3} w_i(\alpha(t))\, U_i(\alpha(t))$$

olur; W_α'nın koordinat fonksiyonları $t \mapsto w_i(\alpha(t))$ bileşkeleridir. w_i ve α'nın koordinatları diferansiyellenebilir olduğundan bu bileşkeler de her mertebeden türevlenebilirdir. Dolayısıyla W_α, α üzerinde bir vektör alanıdır ve türevi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$W'_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\big(\, w_i(\alpha(t))\,\big)\, U_i(\alpha(t))$$

ile hesaplanır.

Örnek 13.1 (Dönme Alanının Çembere Kısıtlanışı). $W = -yU_1 + xU_2$ vektör alanının $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ birim çemberine kısıtlanışını bulalım.

> **Çözüm.**
> $\alpha(t)$ noktasının koordinatları $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$'dır. W'nin koordinat fonksiyonları $w_1 = -y$, $w_2 = x$, $w_3 = 0$ olduğundan
>
> $$W_\alpha(t) = W(\alpha(t)) = -\sin t\, U_1(\alpha(t)) + \cos t\, U_2(\alpha(t))$$
>
> bulunur. Bu, $\alpha(t)$ noktasında uygulanmış $(-\sin t, \cos t, 0)$ vektörüdür; yani α'nın hız vektörü $\alpha'(t)$'nin kendisidir. W alanı düzlemde her noktayı orijin çevresinde saatin tersi yönünde döndüren okları taşır; çemberin üzerinde bu oklar tam çembere teğettir. Kısıtlanış, düzlemdeki sonsuz oktan yalnızca çember üzerindekileri seçmiştir.
> ■

Örnek 13.2 (Bir Alanın Bir Doğruya Kısıtlanışı). $W = x^2U_1 + yz\,U_3$ vektör alanının $\beta(t) = (2 - t, 1, 2t)$ doğrusuna kısıtlanışını bulalım.

> **Çözüm.**
> $\beta(t)$ noktasında $x = 2 - t$, $y = 1$, $z = 2t$'dir. Koordinat fonksiyonları $w_1 = x^2$, $w_2 = 0$, $w_3 = yz$ bu noktada $(2 - t)^2$, 0 ve $1 \cdot 2t = 2t$ değerlerini alır. Dolayısıyla
>
> $$W_\beta(t) = (2 - t)^2\, U_1(\beta(t)) + 2t\, U_3(\beta(t)).$$
>
> Koordinat fonksiyonları $(2 - t)^2$, 0 ve $2t$ polinom olduğundan W_β, β üzerinde bir vektör alanıdır.
> Bir denetim: $t = 1$'de $\beta(1) = (1, 1, 2)$ ve $W_\beta(1) = U_1 + 2U_3$'tür; yani $(1, 1, 2)$ noktasında uygulanmış $(1, 0, 2)$ vektörü. Doğrudan W'den hesaplarsak $(1, 1, 2)$ noktasında $x^2 = 1$ ve $yz = 2$ olduğundan $W(1, 1, 2)$ de $(1, 0, 2)$ vektör kısımlı teğet vektördür. İki hesap aynı sonucu verir; başka türlü olamazdı, çünkü $W_\beta(1)$ tanım gereği $W(\beta(1))$'dir.
> ■

Şimdi üç adımı birleştirebiliriz.

Tanım 13.2 (Kovaryant Türev). W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı ve $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ noktasında $\mathbb{R}^3$'e teğet bir vektör olsun. $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusu boyunca W'nin kısıtlanışı W_α olmak üzere

$$\nabla_{\mathbf{v}} W = W'_\alpha(0) = \big(\, W(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\big)'(0)$$

teğet vektörüne W'nin $\mathbf{v}$'ye göre **kovaryant türevi** (covariant derivative) denir.

Yani $\nabla_{\mathbf{v}} W$, $\mathbf{p}$ noktası $\mathbf{v}$ yönünde harekete geçtiği ilk anda W okunun değişim hızıdır; okun uzunluğundaki ve doğrultusundaki değişimi birlikte kaydeden tek bir vektördür.
Tanım üzerine birkaç gözlem yapalım. Birincisi, $\nabla_{\mathbf{v}} W$ bir teğet vektördür ve uygulama noktası $\mathbf{p}$'dir: $W'_\alpha(0)$, eğri üzerindeki bir vektör alanının türevi olarak $\alpha(0) = \mathbf{p}$ noktasında uygulanır. Böylece $W(\mathbf{p})$ ile $\nabla_{\mathbf{v}} W$ aynı teğet uzayında, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'te yaşar ve birbirleriyle toplanıp iç çarpıma sokulabilirler. İkincisi, ∇ simgesi "nabla" diye okunur; alt indisteki $\mathbf{v}$ hangi yönde türev alındığını, sağdaki W neyin türevinin alındığını söyler. Üçüncüsü, $\mathbf{v}$'nin birim vektör olması istenmez; yönlü türevde olduğu gibi, $\mathbf{v}$'yi iki katına çıkarmak türevi de iki katına çıkaracaktır (bunu ileride ispatlayacağız). Son olarak $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ise "doğru" sabit $\mathbf{p}$ noktasıdır, W_α sabittir ve $\nabla_{\mathbf{0}} W = \mathbf{0}$ olur: hiç hareket etmeyince hiçbir değişim görülmez.

Örnek 13.3 (Tanımdan Doğrudan Hesap). $W = x^2U_1 + yz\,U_3$ vektör alanı, $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$ noktası ve bu noktadaki $\mathbf{v} = (-1, 0, 2)$ teğet vektörü verilsin. $\nabla_{\mathbf{v}} W$ vektörünü doğrudan tanımdan hesaplayalım.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğru $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (2 - t,\, 1,\, 2t)$'dir; bu, Örnek 13.2'daki β doğrusunun kendisidir. Orada

$$W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (2 - t)^2\, U_1 + 2t\, U_3$$

bulmuştuk; burada U_1 ve U_3 de aslında $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ noktasında değerlendirilmiştir. Türev almak için koordinat fonksiyonlarını türetiriz:

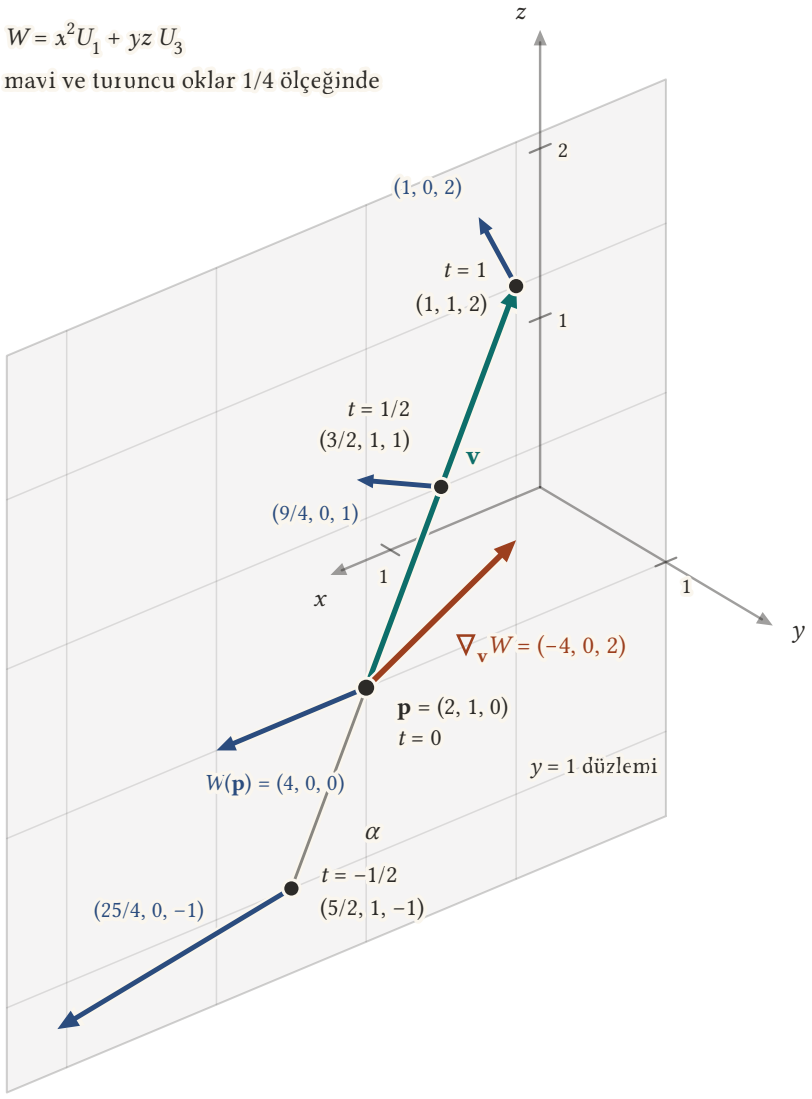
$$\frac{d}{dt}(2 - t)^2 = -2(2 - t), \qquad \frac{d}{dt}(0) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(2t) = 2.$$

$t = 0$'da bunlar -4, 0 ve 2 olur. Dolayısıyla

$$\nabla_{\mathbf{v}} W = -4\, U_1(\mathbf{p}) + 2\, U_3(\mathbf{p}),$$

yani $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$ noktasında uygulanmış $(-4, 0, 2)$ vektörüdür.
Sonucu yorumlayalım. $\mathbf{p}$'de $W(\mathbf{p}) = 4U_1(\mathbf{p})$, yani $(4, 0, 0)$ vektörüdür. $\mathbf{v}$ yönünde ilerlerken x koordinatı azalır, dolayısıyla x^2 ve okun birinci bileşeni hızla küçülür; aynı anda z artmaya başladığı için yz bileşeni sıfırdan yukarı çıkar. $(-4, 0, 2)$ vektörü bu iki etkiyi birlikte kaydeder: ok kısalır ve yukarıya doğru dönmeye başlar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.1: $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$ noktasından $\mathbf{v} = (-1, 0, 2)$ yönünde giden $\alpha(t) = (2 - t, 1, 2t)$ doğrusu, tümüyle $y = 1$ düzleminde kalır; doğru üzerindeki dört noktada mavi oklar $W = x^2U_1 + yzU_3$ alanının değerleridir ve vektör kısımları $t = -1/2, 0, 1/2, 1$ için sırasıyla $(25/4, 0, -1)$, $(4, 0, 0)$, $(9/4, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$'dir. Yeşil ok $\mathbf{v}$, doğrunun $t = 0$ ile $t = 1$ arasındaki parçasının kendisidir; sığmaları için bütün mavi oklar ve turuncu ok gerçek boylarının 1/4'ü ile çizilmiştir. t büyürken ok önce kısalır, sonra yukarı doğru döner; turuncu ok $\nabla_{\mathbf{v}} W = (-4, 0, 2)$ bu iki değişimi tek bir teğet vektörde toplar ve $W(\mathbf{p})$ ile aynı noktada uygulanmıştır.

■

Örnek 13.4 (Düzlemde Dönme Alanının Türevi). $W = -yU_1 + xU_2$ dönme alanını alalım; üçüncü koordinatı sıfır olduğu ve z'ye bağlı olmadığı için onu xy düzleminde çizilmiş bir alan gibi düşünebiliriz. $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$ noktasında $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ için $\nabla_{\mathbf{v}} W$ vektörünü tanımdan hesaplayalım.

Çözüm.
Doğru $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1, t, 0)$'dır: $(1, 0, 0)$ noktasından düz yukarıya, pozitif y yönüne gider. Bu noktada $x = 1, y = t$ olduğundan

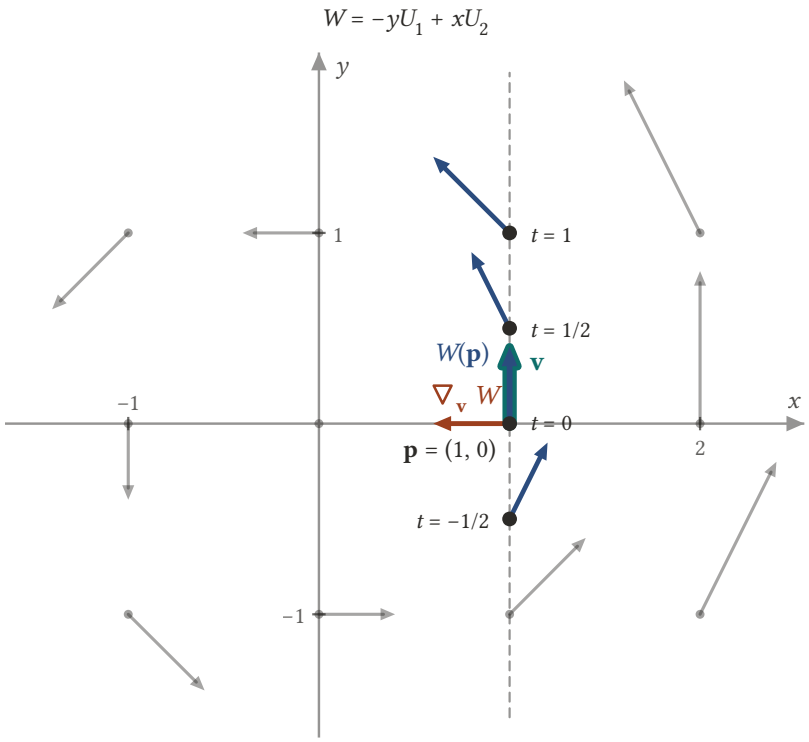
$$W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = -t\,U_1 + 1 \cdot U_2 = -t\,U_1 + U_2.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Koordinat fonksiyonları $-t$, 1 ve 0'dır; türevleri -1, 0 ve 0. Dolayısıyla

$$\nabla_{\mathbf{v}} W = -U_1(\mathbf{p}),$$

yani $(1,0,0)$ noktasında uygulanmış $(-1,0,0)$ vektörüdür.
Resim şudur. $x = 1$ doğrusu üzerindeki her noktada okun y bileşeni 1'dir, x bileşeni ise $-y$'dir. $(1,0)$'da ok tam yukarı bakar; biraz yukarı çıkınca ok sola yatmaya başlar, biraz aşağı inince sağa yatar. Yukarı doğru birim hızla giderken okun yatma hızı $(-1,0)$'dır: doğrultu sola döner, uzunluk ise ilk anda değişmez, çünkü $(1,t)$ noktasındaki okun uzunluğu $\sqrt{1+t^2}$'dir ve bunun $t=0$'daki türevi sıfırdır.



Şekil 13.2: $W = -yU_1 + xU_2$ dönme alanının $x = 1$ doğrusu üzerindeki $t = -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1$ noktalarında okları (mavi) ve çevredeki tam sayı noktalarında okları (gri); okunaklılık için her ok gerçek boyunun 0,4 katıyla çizilmiştir. $\mathbf{p} = (1,0)$ noktasındaki yeşil $\mathbf{v} = (0,1)$ oku, oradaki $W(\mathbf{p}) = (0,1)$ mavi okuyla aynı vektör olduğu için onun altında yalnızca kenarlarıyla görünür. Doğru boyunca yukarı çıkıldıkça okun y bileşeni 1 kalır, x bileşeni $-y$ olur: sağa yatık ok $\mathbf{p}$'de dikleşir, sonra sola yatar. Bu dönüşün $\mathbf{p}$'deki hızı turuncu okla gösterilen $\nabla_{\mathbf{v}} W = (-1,0)$ vektörüdür; ilk anda okun yalnızca doğrultusu değişir, boyu değişmez.

■

Örnek 13.5 (Koordinatları Sabit Alanın Türevi Sıfırdır). $W = 2U_1 - U_2 + 5U_3$ vektör alanı verilsin: her noktada aynı $(2,-1,5)$ vektör kısmını taşır. Herhangi bir $\mathbf{p}$ noktasında herhangi bir $\mathbf{v}$ teğet vektörü için $\nabla_{\mathbf{v}} W$'yi bulalım.

Çözüm.
Doğru üzerinde $W(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$, $\mathbf{p}+t\mathbf{v}$ noktasında uygulanmış $(2,-1,5)$ vektörüdür; koordinat fonksiyonları t'den bağımsız 2, -1, 5 sabitleridir. Sabitlerin türevi sıfır olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{v}} W = 0 \cdot U_1(\mathbf{p}) + 0 \cdot U_2(\mathbf{p}) + 0 \cdot U_3(\mathbf{p}) = \mathbf{0}_{\mathbf{p}}.$$

Sonuç $\mathbf{p}$'ye ve $\mathbf{v}$'ye bağlı değildir. Özellikle doğal çatı alanlarının her biri için $\nabla_{\mathbf{v}} U_i = \mathbf{0}$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu örnek, kovaryant türevin okun kendisini değil okun değişimini ölçtüğünü gösterir: W hiçbir noktada sıfır değildir, uzunluğu her yerde $\sqrt{30}$'dur, ama hangi yönde gidersek gidelim ok değişmediği için türevi sıfırdır. Bunun tersinin de doğru olduğunu, yani her yönde türevi sıfır olan bir alanın koordinatlarının sabit olması gerektiğini, alıştırmalarda göreceğiz.
■

i Kovaryant adı nereden gelir?

Öklid uzayında çalıştığımız sürece $\nabla_{\mathbf{v}} W$'ye yalnızca "vektör alanının yönlü türevi" demek de yeterli olurdu. "Kovaryant" adı, aynı işlemin ileride eğri yüzeyler ve daha genel uzaylar üzerinde genelleştirilmesinden gelir. Şimdilik bunu yalnızca bir ad olarak alalım; tanımın içeriği yukarıdaki üç adımdan ibarettir.

13.2 Koordinat Formülü

Yukarıdaki örneklerde hep aynı şeyi yaptık: W'nin koordinat fonksiyonlarını doğru üzerinde okuduk ve $t=0$'da türettik. Ama "w_i'yi $\mathbf{p}+t\mathbf{v}$ doğrusu üzerinde oku ve $t=0$'da türet" işlemi tam olarak $\mathbf{v}[w_i]$ yönlü türevinin tanımıdır. Demek ki kovaryant türevin koordinatları, koordinat fonksiyonlarının yönlü türevleridir. Bunu bir lemma olarak yazıp ispatlayalım.

Lemma 13.1 (Kovaryant Türevin Koordinat Formülü). *$W=\sum_{i=1}^{3} w_i U_i$, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı ve $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ noktasında bir teğet vektör olsun. O zaman*

$$\nabla_{\mathbf{v}} W = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{v}[w_i]\, U_i(\mathbf{p}).$$

İspat.
$\alpha(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{v}$ doğrusu boyunca W'nin kısıtlanışı

$$W_\alpha(t) = W(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{3} w_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\, U_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$$

olur; bunu kısıtlanış tanımının ardından genel bir eğri için görmüştük. W_α'nın koordinat fonksiyonları $g_i(t)=w_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$'dir. Eğri üzerindeki bir vektör alanının türevi koordinat fonksiyonlarının türetilmesiyle bulunur (Tanım 10.4):

$$W_\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{3} g_i'(0)\, U_i(\alpha(0)) = \sum_{i=1}^{3} g_i'(0)\, U_i(\mathbf{p}).$$

Geriye $g_i'(0)$ sayılarını tanımak kalır. $g_i(t)=w_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ fonksiyonunun $t=0$'daki türevi, yönlü türevin tanımı (Tanım 3.1) gereği tam olarak $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[w_i]$, yani $\mathbf{v}[w_i]$ sayısıdır. Aynı sonuca eğri boyunca türev lemmasıyla da varılır: $\alpha'(0)=\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ olduğundan Lemma 4.2, $g_i'(0)=\alpha'(0)[w_i]=\mathbf{v}[w_i]$ verir. Yerine koyunca

$$\nabla_{\mathbf{v}} W = W_\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{v}[w_i]\, U_i(\mathbf{p})$$

elde edilir.
■

Lemmanın söylediği kural kısadır: bir vektör alanına $\nabla_{\mathbf{v}}$ uygulamak, koordinat fonksiyonlarına $\mathbf{v}$ uygulamaktır. Yönlü türevi kısmi türevlerle hesaplamayı bildiğimizden (Lemma 3.1), kovaryant türev artık tamamen mekanik bir hesaptır: $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ ise

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{v}[w_i] = \sum_{j=1}^{3} v_j \, \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}).$$

Bu formülü daha önce elde ettiğimiz sonuçlar üzerinde deneyelim.

Örnek 13.6 (Aynı Alan, Aynı Nokta, İki Farklı Yön). $W = x^2 U_1 + yz\,U_3$ ve $\mathbf{p} = (2,1,0)$ olsun. Örnek 13.3'ta tanımdan bulduğumuz $\nabla_{\mathbf{v}} W$ vektörünü $\mathbf{v} = (-1,0,2)$ için koordinat formülüyle yeniden hesaplayalım; sonra aynı noktadaki $\mathbf{w} = (1,1,1)$ vektörü için $\nabla_{\mathbf{w}} W$'yi bulalım.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $w_1 = x^2$, $w_2 = 0$, $w_3 = yz$'dir. Kısmi türevleri:

	$\partial/\partial x$	$\partial/\partial y$	$\partial/\partial z$
$w_1 = x^2$	$2x$	0	0
$w_3 = yz$	0	z	y

$\mathbf{p} = (2,1,0)$'da $2x = 4$, $z = 0$, $y = 1$ olur.
$\mathbf{v} = (-1,0,2)$ için:

$$\mathbf{v}[x^2] = (-1)\cdot 4 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 = -4,$$
$$\mathbf{v}[yz] = (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2.$$

Dolayısıyla $\nabla_{\mathbf{v}} W = -4U_1(\mathbf{p}) + 2U_3(\mathbf{p})$; tanımdan bulduğumuz sonuçla aynıdır.
$\mathbf{w} = (1,1,1)$ için:

$$\mathbf{w}[x^2] = 1\cdot 4 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 4,$$
$$\mathbf{w}[yz] = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1.$$

Dolayısıyla $\nabla_{\mathbf{w}} W = 4U_1(\mathbf{p}) + U_3(\mathbf{p})$, yani $(4,0,1)_{\mathbf{p}}$.
Aynı noktada iki farklı yön iki farklı türev verdi: $\mathbf{w}$ yönünde x artar ve x^2 bileşeni büyür, $\mathbf{v}$ yönünde ise küçülüyordu.
■

Örnek 13.7 (Aynı Vektör Kısmı, Farklı Nokta). $W = x^2 U_1 + yz\,U_3$ olsun. $(-1,0,2)$ vektör kısmını bu kez $\mathbf{q} = (0,2,1)$ noktasında uygulayalım ve $\nabla_{\mathbf{v_q}} W$'yi bulalım.

Çözüm.
Uygulama noktası hesabın parçası olduğu için alt indisi yazıyoruz. $\mathbf{q} = (0,2,1)$'de kısmi türevler $2x = 0$, $z = 1$, $y = 2$ değerlerini alır. Buradan

$$\mathbf{v_q}[x^2] = (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0,$$
$$\mathbf{v_q}[yz] = (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 = 4$$

ve $\nabla_{\mathbf{v_q}} W = 4U_3(\mathbf{q})$, yani $(0,0,4)_{\mathbf{q}}$ bulunur. Örnek 13.6'ta aynı vektör kısmı $\mathbf{p} = (2,1,0)$'da $(-4,0,2)$ vermişti. Kovaryant türev yalnızca yöne değil, hangi noktada durduğumuza da bağlıdır; çünkü W alanı noktadan noktaya farklı biçimde değişir. $\mathbf{q}$'da $x = 0$ olduğundan x^2 bileşeni bir an için hiç değişmez, yz bileşeni ise $y = 2$ olduğu için z'deki artışa iki kat duyarlıdır.
■

Örnek 13.8 (Üç Bileşeni de Değişen Bir Alan). $W = yz\,U_1 + xz\,U_2 + xy\,U_3$ vektör alanı, $\mathbf{p} = (1,2,3)$ noktası ve bu noktadaki $\mathbf{v} = (1,0,-1)$ vektörü için $\nabla_{\mathbf{v}} W$'yi hem koordinat formülüyle hem tanımdan hesaplayalım.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Koordinat formülüyle. $w_1 = yz, w_2 = xz, w_3 = xy$. Her birinin yönlü türevini $\mathbf{v}[f] = \partial f/\partial x - \partial f/\partial z$ kuralıyla (çünkü $v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = -1$) $\mathbf{p}$'de hesaplarız:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}[yz] &= 0 - y = -2,\\ \mathbf{v}[xz] &= z - x = 3 - 1 = 2,\\ \mathbf{v}[xy] &= y - 0 = 2.\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\nabla_{\mathbf{v}} W = -2U_1(\mathbf{p}) + 2U_2(\mathbf{p}) + 2U_3(\mathbf{p}).$$

Tanımdan. Doğru $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 2, 3 - t)$'dir. Bu noktada

$$W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = 2(3 - t)\,U_1 + (1 + t)(3 - t)\,U_2 + 2(1 + t)\,U_3.$$

Koordinat fonksiyonlarının türevleri -2, $(3 - t) - (1 + t) = 2 - 2t$ ve 2'dir; $t = 0$'da $-2, 2, 2$. İki yol aynı sonucu verir. Koordinat formülü daha kısadır; bundan sonra hemen hemen hep onu kullanacağız. ■

13.3 Lineerlik ve Leibniz Kuralları

Koordinat formülü, kovaryant türevin bütün cebirsel özelliklerini yönlü türevin özelliklerine (Teorem 3.1) indirger. Yönlü türev teğet vektörde lineerdi, fonksiyonda lineerdi ve çarpım için Leibniz kuralına uyuyordu. Bu üç özelliğin her biri kovaryant türeve aktarılır; dördüncü olarak, iki vektör alanının iç çarpımının türevi için de bir Leibniz kuralı vardır.

Teorem 13.1 (Kovaryant Türevin Temel Özellikleri). *$\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, aynı $\mathbf{p}$ noktasında $\mathbb{R}^3$'e teğet vektörler; Y ve Z, $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları; a, b sayılar ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman*
(1) $\nabla_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}} Y = a\,\nabla_{\mathbf{v}} Y + b\,\nabla_{\mathbf{w}} Y$,
(2) $\nabla_{\mathbf{v}}(aY + bZ) = a\,\nabla_{\mathbf{v}} Y + b\,\nabla_{\mathbf{v}} Z$,
(3) $\nabla_{\mathbf{v}}(fY) = \mathbf{v}[f]\,Y(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\,\nabla_{\mathbf{v}} Y$,
(4) $\mathbf{v}[Y \cdot Z] = \nabla_{\mathbf{v}} Y \cdot Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} Z$.

İspat.
$Y = \sum_i y_i U_i$ ve $Z = \sum_i z_i U_i$ yazalım. Bütün ispat, her iki tarafı Lemma 13.1 ile koordinatlarına açıp Teorem 3.1'ni uygulamaktan ibarettir. Toplamlar hep $i = 1, 2, 3$ üzerinden alınır.
(1) *$a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ noktasında bir teğet vektördür; çünkü $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ aynı teğet uzayındadır ve teğet uzayı toplama ve skalerle çarpma altında kapalıdır (Tanım 2.2). Koordinat formülü ve yönlü türevin teğet vektörde lineerliği (Teorem 3.1, (1)) ile*

$$\begin{aligned}\nabla_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}} Y &= \sum_i (a\mathbf{v} + b\mathbf{w})[y_i]\,U_i(\mathbf{p})\\ &= \sum_i \big(\, a\,\mathbf{v}[y_i] + b\,\mathbf{w}[y_i] \,\big)\,U_i(\mathbf{p})\\ &= a\sum_i \mathbf{v}[y_i]\,U_i(\mathbf{p}) + b\sum_i \mathbf{w}[y_i]\,U_i(\mathbf{p})\\ &= a\,\nabla_{\mathbf{v}} Y + b\,\nabla_{\mathbf{w}} Y.\end{aligned}$$

Üçüncü satırda $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ içinde toplama ve skalerle çarpmanın dağılma kurallarını kullandık.
(2) *$aY + bZ$ alanı noktasal ilkeyle tanımlıdır: her $\mathbf{q}$ noktasında değeri $aY(\mathbf{q}) + bZ(\mathbf{q})$'dur ve bu vektörün i-inci koordinatı $a\,y_i(\mathbf{q}) + b\,z_i(\mathbf{q})$'dur. Dolayısıyla $aY + bZ$'nin koordinat fonksiyonları $ay_i + bz_i$'dir. Koordinat formülü ve yönlü türevin fonksiyonda lineerliği (Teorem 3.1, (2)) ile*

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{v}}(aY + bZ) &= \sum_i \mathbf{v}[ay_i + bz_i]\,U_i(\mathbf{p})\\ &= \sum_i \big(\, a\,\mathbf{v}[y_i] + b\,\mathbf{v}[z_i] \,\big)\,U_i(\mathbf{p})\\ &= a\,\nabla_{\mathbf{v}} Y + b\,\nabla_{\mathbf{v}} Z.\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

(3) fY *alanının* $\mathbf{q}$*'daki değeri* $f(\mathbf{q})\,Y(\mathbf{q})$*'dur; koordinat fonksiyonları* fy_i*'dir. Koordinat formülü ve yönlü türevin Leibniz kuralı (Teorem 3.1, (3)) ile*

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{v}}(fY) &= \sum_i \mathbf{v}[fy_i]\,U_i(\mathbf{p}) \\ &= \sum_i \big(\ \mathbf{v}[f]\,y_i(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\,\mathbf{v}[y_i]\ \big)\,U_i(\mathbf{p}) \\ &= \mathbf{v}[f]\sum_i y_i(\mathbf{p})\,U_i(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\sum_i \mathbf{v}[y_i]\,U_i(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Son satırdaki ilk toplam $Y(\mathbf{p})$*'nin doğal çatıdaki açılımıdır (Lemma 2.1), ikincisi ise koordinat formülüne göre* $\nabla_{\mathbf{v}}Y$*'dir. Böylece* $\nabla_{\mathbf{v}}(fY) = \mathbf{v}[f]\,Y(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\,\nabla_{\mathbf{v}}Y$*.*
(4) $Y\cdot Z$*, her* $\mathbf{q}$ *noktasına* $Y(\mathbf{q})\cdot Z(\mathbf{q})$ *sayısını karşılık getiren fonksiyondur. Teğet vektörlerin iç çarpımı vektör kısımlarının iç çarpımı olduğundan (Tanım 9.4)*

$$Y\cdot Z = \sum_i y_i z_i$$

olur; sağ taraf diferansiyellenebilir fonksiyonların çarpımlarının toplamı olduğundan $Y\cdot Z$ *diferansiyellenebilirdir ve* $\mathbf{v}[Y\cdot Z]$ *anlamlıdır. Üç terimli bir toplamın yönlü türevi, yönlü türevin fonksiyonda lineerliğinin (Teorem 3.1, (2)) iki kez uygulanmasıyla, terimlerin yönlü türevlerinin toplamıdır; her terime de yönlü türevin Leibniz kuralını (Teorem 3.1, (3)) uygularız:*

$$\begin{aligned}\mathbf{v}[Y\cdot Z] &= \sum_i \mathbf{v}[y_i z_i] \\ &= \sum_i \mathbf{v}[y_i]\,z_i(\mathbf{p}) + \sum_i y_i(\mathbf{p})\,\mathbf{v}[z_i].\end{aligned}$$

Şimdi sağdaki iki toplamı tanıyalım. Koordinat formülüne göre $\nabla_{\mathbf{v}}Y$*,* $\mathbf{p}$*'de uygulanmış ve koordinatları* $\mathbf{v}[y_1], \mathbf{v}[y_2], \mathbf{v}[y_3]$ *olan teğet vektördür;* $Z(\mathbf{p})$*'nin koordinatları ise* $z_1(\mathbf{p}), z_2(\mathbf{p}), z_3(\mathbf{p})$*'dir. İki teğet vektörün iç çarpımı koordinatlarının çarpımlarının toplamı olduğundan*

$$\nabla_{\mathbf{v}}Y\cdot Z(\mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{v}[y_i]\,z_i(\mathbf{p}).$$

Aynı biçimde $Y(\mathbf{p})$*'nin koordinatları* $y_i(\mathbf{p})$*,* $\nabla_{\mathbf{v}}Z$*'nin koordinatları* $\mathbf{v}[z_i]$ *olduğundan*

$$Y(\mathbf{p})\cdot\nabla_{\mathbf{v}}Z = \sum_i y_i(\mathbf{p})\,\mathbf{v}[z_i].$$

Bu iki eşitliği yukarıdaki toplamların yerine koyunca (4) elde edilir.
■

Dört özelliği sözle özetleyelim. (1) türev alınan yönde lineerlik: iki yönün toplamındaki değişim, ayrı ayrı değişimlerin toplamıdır; özellikle $\nabla_{2\mathbf{v}}Y = 2\,\nabla_{\mathbf{v}}Y$, yani vektör uzatılınca türev de aynı oranda büyür. (2) türevi alınan alanda lineerlik. (3) fonksiyonla çarpım için Leibniz kuralı: fY'nin değişimi, f'nin değişiminden ve Y'nin değişiminden gelen iki parçadan oluşur. (4) iç çarpım için Leibniz kuralı: burada sol taraf bir fonksiyonun yönlü türevi, sağ taraftaki iki terim ise birer iç çarpımdır. Kuralların her birini sayılarla deneyelim.

Örnek 13.9 (Yönde Lineerliğin Denetimi). $W = x^2U_1 + yz\,U_3$, $\mathbf{p} = (2,1,0)$, $\mathbf{v} = (-1,0,2)$ ve $\mathbf{w} = (1,1,1)$ olsun. $\nabla_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}W$'yi doğrudan hesaplayıp Teorem 13.1'nin (1) şıkkıyla karşılaştıralım.

Çözüm.
$\mathbf{v}+\mathbf{w} = (0,1,3)$'tür. $\mathbf{p}$'deki kısmi türev değerleri Örnek 13.6'taki gibi $\partial(x^2)/\partial x = 4$, $\partial(yz)/\partial y = 0$, $\partial(yz)/\partial z = 1$'dir. Buradan

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}+\mathbf{w})[x^2] &= 0\cdot 4 + 1\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0,\\ (\mathbf{v}+\mathbf{w})[yz] &= 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 3\cdot 1 = 3,\end{aligned}$$

yani $\nabla_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}W = 3U_3(\mathbf{p})$, vektör kısmı $(0,0,3)$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Öte yandan Örnek 13.6'ta $\nabla_{\mathbf{v}} W = (-4,0,2)_{\mathbf{p}}$ ve $\nabla_{\mathbf{w}} W = (4,0,1)_{\mathbf{p}}$ bulmuştuk. Toplamları $(0,0,3)_{\mathbf{p}}$'dir. İki sonuç uyuşur: x^2 bileşenindeki -4 ve $+4$ değişimleri birbirini götürmüş, yz bileşenindeki 2 ve 1 toplanmıştır.
■

Örnek 13.10 (Fonksiyonla Çarpım Kuralının Denetimi). $Y = x^2 U_1 + yz\,U_3$, $f = x + z$, $\mathbf{p} = (2,1,0)$ ve $\mathbf{v} = (-1,0,2)$ olsun. $\nabla_{\mathbf{v}}(fY)$'yi hem doğrudan koordinat formülüyle hem Teorem 13.1'nin (3) şıkkıyla hesaplayalım.

Çözüm.
Doğrudan. Çarpımı açalım:

$$fY = (x^3 + x^2 z)\,U_1 + (xyz + yz^2)\,U_3.$$

Koordinat fonksiyonlarının yönlü türevlerini $\mathbf{v}[g] = -\partial g/\partial x + 2\,\partial g/\partial z$ kuralıyla $\mathbf{p}$'de hesaplarız. $\mathbf{p}$'de $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$ olduğundan

$$\mathbf{v}[x^3 + x^2 z] = -(3x^2 + 2xz) + 2x^2 = -12 + 8 = -4,$$
$$\mathbf{v}[xyz + yz^2] = -(yz) + 2(xy + 2yz) = 0 + 4 = 4.$$

Dolayısıyla $\nabla_{\mathbf{v}}(fY) = (-4,0,4)_{\mathbf{p}}$.
Kuralla. $\mathbf{v}[f] = -1 + 2 = 1$, $f(\mathbf{p}) = 2 + 0 = 2$, $Y(\mathbf{p}) = (4,0,0)_{\mathbf{p}}$ ve $\nabla_{\mathbf{v}} Y = (-4,0,2)_{\mathbf{p}}$ (Örnek 13.6). Kural

$$\mathbf{v}[f]\,Y(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\,\nabla_{\mathbf{v}} Y = 1 \cdot (4,0,0) + 2 \cdot (-4,0,2) = (-4,0,4)$$

verir. İki hesap uyuşur. Kuralın yararı açıktır: fY'nin koordinatlarını açıp altı kısmi türev almak yerine, zaten bildiğimiz $\nabla_{\mathbf{v}} Y$ ile tek bir yönlü türev $\mathbf{v}[f]$ yetti.
■

Örnek 13.11 (İç Çarpım Kuralının Denetimi). $Y = x^2 U_1 + yz\,U_3$, $Z = U_1 + xU_2 + yU_3$, $\mathbf{p} = (2,1,0)$ ve $\mathbf{v} = (-1,0,2)$ olsun. Teorem 13.1'nin (4) şıkkının iki tarafını ayrı ayrı hesaplayalım.

Çözüm.
Sol taraf. $Y \cdot Z$ fonksiyonu

$$Y \cdot Z = x^2 \cdot 1 + 0 \cdot x + yz \cdot y = x^2 + y^2 z$$

biçimindedir. $\mathbf{p}$'de

$$\mathbf{v}[x^2 + y^2 z] = -(2x) + 2(y^2) = -4 + 2 = -2.$$

Sağ taraf. $\nabla_{\mathbf{v}} Y = (-4,0,2)_{\mathbf{p}}$ ve $Z(\mathbf{p}) = (1,2,1)_{\mathbf{p}}$; iç çarpımları $-4 + 0 + 2 = -2$. Z'nin koordinatları $1, x, y$ olduğundan $\mathbf{v}[1] = 0$, $\mathbf{v}[x] = -1$, $\mathbf{v}[y] = 0$ ve $\nabla_{\mathbf{v}} Z = (0,-1,0)_{\mathbf{p}}$; $Y(\mathbf{p}) = (4,0,0)_{\mathbf{p}}$ ile iç çarpımı 0. Sağ taraf $-2 + 0 = -2$.
İki taraf eşittir. Sağ tarafın ikinci terimi sıfır çıktı, çünkü $Y(\mathbf{p})$ yalnızca x yönünde uzanırken Z'nin $\mathbf{v}$ yönündeki değişimi yalnızca y bileşenindedir.
■

13.4 Bir Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev

Yönlü türevden vektör alanı boyunca türeve geçerken yaptığımız şeyi hatırlayalım: tek bir $\mathbf{v}$ vektörü yerine bir V vektör alanı alıp her $\mathbf{p}$ noktasında $V(\mathbf{p})[f]$ sayısını hesapladık; sonuç $V[f]$ fonksiyonu oldu. Bu, noktasal ilkenin bir uygulamasıydı. Aynı ilkeyi kovaryant türeve uygulayalım: her noktada, V'nin o noktadaki vektörüne göre W'nin kovaryant türevini alırsak her noktada bir teğet vektör, yani yeni bir vektör alanı elde ederiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 13.3 (Bir Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev). V ve W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları olsun. Her $\mathbf{p}$ noktasında değeri

$$(\nabla_V W)(\mathbf{p}) = \nabla_{V(\mathbf{p})} W$$

olan $\nabla_V W$ vektör alanına W'nin V'ye göre **kovaryant türevi** denir.

Yani $\nabla_V W$, W'nin V'nin bütün vektörlerine göre kovaryant türevlerini bir araya toplayan alandır: $\mathbf{p}$'de, $V(\mathbf{p})$ yönünde harekete geçince W'nin nasıl değişmeye başladığını gösteren ok.
$\nabla_V W$'nin gerçekten bir vektör alanı olduğunu görelim. $\nabla_{V(\mathbf{p})} W$, $\mathbf{p}$'de uygulanmış bir teğet vektördür; dolayısıyla $\nabla_V W$ her noktaya o noktada uygulanmış bir vektör karşılık getirir. Koordinat fonksiyonlarının diferansiyellenebilir olduğunu aşağıdaki lemmadan okuyacağız.

Lemma 13.2 (Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevin Koordinat Formülü). *V ve $W = \sum_{i=1}^{3} w_i U_i$, $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları olsun. O zaman*

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{3} V[w_i]\, U_i.$$

Özellikle $\nabla_V W$'nin koordinat fonksiyonları $V[w_1], V[w_2], V[w_3]$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

> ***İspat.***
> *İki vektör alanının eşit olması, her noktada aynı teğet vektörü vermeleri demektir. Bir $\mathbf{p}$ noktası alalım. Tanım ve Lemma 13.1 ile*
>
> $$(\nabla_V W)(\mathbf{p}) = \nabla_{V(\mathbf{p})} W = \sum_{i=1}^{3} V(\mathbf{p})[w_i]\, U_i(\mathbf{p}).$$
>
> *$V[w_i]$ fonksiyonunun tanımı gereği $V(\mathbf{p})[w_i] = V[w_i](\mathbf{p})$'dir. Öte yandan $\sum_i V[w_i]\, U_i$ alanının $\mathbf{p}$'deki değeri, noktasal ilke gereği, $\sum_i V[w_i](\mathbf{p})\, U_i(\mathbf{p})$'dir. İki taraf her $\mathbf{p}$'de eşit olduğundan alanlar eşittir. Diferansiyellenebilirlik için $V = \sum_j v_j U_j$ yazalım. Lemma 3.1 her noktada uygulanınca*
>
> $$V[w_i] = \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$
>
> *bulunur; sağ taraf diferansiyellenebilir fonksiyonların çarpımlarının toplamı olduğundan diferansiyellenebilirdir.*
> ■

Hesaplarda en sık kullanacağımız araç, doğal çatı alanlarının fonksiyonlara etkisidir. $U_j(\mathbf{p})$, j-inci koordinatı 1 ve ötekileri 0 olan vektör kısmını taşıdığından Lemma 3.1 ile

$$U_j[f] = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

olur; yani U_j'yi bir fonksiyona uygulamak, x_j'ye göre kısmi türev almaktır. $V = \sum_j v_j U_j$ için de $V[f] = \sum_j v_j\, \partial f/\partial x_j$ bulunur.

Örnek 13.12 (İki Alandan Yeni Bir Alan). $V = (y - x)\, U_1 + xy\, U_3$ ve $W = x^2 U_1 + yz\, U_3$ olsun. $\nabla_V W$ alanını bulalım.

> **Çözüm.**
> $V[f] = (y - x)\, \partial f/\partial x + xy\, \partial f/\partial z$'dir. W'nin koordinat fonksiyonları x^2, 0, yz için
>
> $$V[x^2] = (y - x) \cdot 2x + xy \cdot 0 = 2x(y - x),$$
> $$V[yz] = (y - x) \cdot 0 + xy \cdot y = xy^2.$$
>
> Dolayısıyla

$$\nabla_V W = 2x(y-x)\,U_1 + xy^2\,U_3.$$

Bu, bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı yeni bir vektör alanıdır; her noktadaki değeri, V'nin o noktadaki oku yönünde W'nin nasıl değişmeye başladığını söyler.
Sonucu Örnek 13.3 ile karşılaştıralım. $\mathbf{p} = (2,1,0)$'da $V(\mathbf{p})$, koordinatları $y - x = -1$ ve $xy = 2$ olan $(-1,0,2)_{\mathbf{p}}$ vektörüdür; bu, Örnek 13.3'taki $\mathbf{v}$'nin ta kendisidir. Formülden $(\nabla_V W)(\mathbf{p})$'nin koordinatları $2\cdot 2\cdot(1-2) = -4$, 0 ve $2\cdot 1 = 2$ çıkar: $(-4,0,2)_{\mathbf{p}}$, orada bulduğumuz $\nabla_{\mathbf{v}} W$ ile aynıdır. Tanımın istediği de tam budur: $(\nabla_V W)(\mathbf{p}) = \nabla_{V(\mathbf{p})} W$.
■

Örnek 13.13 (Doğal Çatı Alanlarına Göre Türev). $W = x^2 U_1 + yz\,U_3$ için $\nabla_{U_1} W$, $\nabla_{U_2} W$ ve $\nabla_{U_3} W$ alanlarını bulalım.

Çözüm.
$U_j[f] = \partial f/\partial x_j$ olduğundan koordinat formülü

$$\nabla_{U_j} W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\,U_i$$

biçimini alır: U_j'ye göre kovaryant türev, bütün koordinat fonksiyonlarının x_j'ye göre kısmi türevini almaktır. $w_1 = x^2$, $w_2 = 0$, $w_3 = yz$ için

$$\nabla_{U_1} W = 2x\,U_1, \qquad \nabla_{U_2} W = z\,U_3, \qquad \nabla_{U_3} W = y\,U_3.$$

Örneğin $\nabla_{U_2} W = zU_3$ şunu söyler: pozitif y yönünde ilerlerken W'nin yalnızca üçüncü bileşeni, o da z oranında, değişir; xy düzleminde ($z = 0$) bu yönde W hiç değişmez.
■

Tek bir teğet vektöre göre türevin dört özelliği, noktasal ilkeyle vektör alanlarına taşınır. Tek fark, (1) şıkkında sayılar yerine fonksiyonların katsayı görevi görmesidir: $fV + gW$ alanı noktasal olarak $f(\mathbf{p})V(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})W(\mathbf{p})$ ile tanımlıdır.

Sonuç 13.1 (Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevin Özellikleri). *V, W, Y ve Z, $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları; f, g diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve a, b sayılar olsun. O zaman*
(1) $\nabla_{fV+gW} Y = f\,\nabla_V Y + g\,\nabla_W Y$,
(2) $\nabla_V(aY + bZ) = a\,\nabla_V Y + b\,\nabla_V Z$,
(3) $\nabla_V(fY) = V[f]\,Y + f\,\nabla_V Y$,
(4) $V[Y\cdot Z] = \nabla_V Y \cdot Z + Y \cdot \nabla_V Z$.

İspat.
Her eşitliğin iki tarafı da bir vektör alanıdır ya da, (4)'te, bir fonksiyondur. İki alanın (ya da iki fonksiyonun) eşitliği her noktada değerlerinin eşit olması demektir; bu yüzden her formülü keyfi bir $\mathbf{p}$ noktasında değerlendirip Teorem 13.1'ni $V(\mathbf{p})$, $W(\mathbf{p})$ teğet vektörlerine uygulayacağız. Tek dikkat edilecek şey parantezlerin yeridir: tanım gereği $(\nabla_V Y)(\mathbf{p}) = \nabla_{V(\mathbf{p})} Y$ ve $V[f](\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})[f]$'dir.
(1) *Noktasal tanım gereği*

$$(fV + gW)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\,V(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\,W(\mathbf{p});$$

burada $f(\mathbf{p})$, $g(\mathbf{p})$ birer sayı, $V(\mathbf{p})$, $W(\mathbf{p})$ ise $\mathbf{p}$'deki birer teğet vektördür. Teoremin (1) şıkkını $a = f(\mathbf{p})$, $b = g(\mathbf{p})$ sayılarıyla uygularsak

$$\begin{aligned}(\nabla_{fV+gW} Y)(\mathbf{p}) &= \nabla_{f(\mathbf{p})V(\mathbf{p})+g(\mathbf{p})W(\mathbf{p})} Y \\ &= f(\mathbf{p})\,\nabla_{V(\mathbf{p})} Y + g(\mathbf{p})\,\nabla_{W(\mathbf{p})} Y \\ &= f(\mathbf{p})\,(\nabla_V Y)(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\,(\nabla_W Y)(\mathbf{p}) \\ &= (f\,\nabla_V Y + g\,\nabla_W Y)(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Son adım, $f\,\nabla_V Y + g\,\nabla_W Y$ alanının noktasal tanımıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

***(2)** Teoremin (2) şıkkı $\mathbf{v} = V(\mathbf{p})$ ile*

$$\begin{aligned}(\nabla_V(aY + bZ))(\mathbf{p}) &= \nabla_{V(\mathbf{p})}(aY + bZ)\\ &= a\,\nabla_{V(\mathbf{p})}Y + b\,\nabla_{V(\mathbf{p})}Z\\ &= (a\,\nabla_V Y + b\,\nabla_V Z)(\mathbf{p})\end{aligned}$$

verir.
***(3)** Teoremin (3) şıkkı $\mathbf{v} = V(\mathbf{p})$ ile*

$$\begin{aligned}(\nabla_V(fY))(\mathbf{p}) &= \nabla_{V(\mathbf{p})}(fY)\\ &= V(\mathbf{p})[f]\,Y(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\,\nabla_{V(\mathbf{p})}Y\\ &= V[f](\mathbf{p})\,Y(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\,(\nabla_V Y)(\mathbf{p})\\ &= (V[f]\,Y + f\,\nabla_V Y)(\mathbf{p})\end{aligned}$$

verir; son satır, $V[f]\,Y$ ve $f\,\nabla_V Y$ alanlarının fonksiyonla çarpım tanımından gelir.
***(4)** $V[Y\cdot Z]$ fonksiyonunun $\mathbf{p}$'deki değeri $V(\mathbf{p})[Y\cdot Z]$'dir. Teoremin (4) şıkkı $\mathbf{v} = V(\mathbf{p})$ ile*

$$\begin{aligned}V[Y\cdot Z](\mathbf{p}) &= \nabla_{V(\mathbf{p})}Y\cdot Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p})\cdot\nabla_{V(\mathbf{p})}Z\\ &= (\nabla_V Y)(\mathbf{p})\cdot Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p})\cdot(\nabla_V Z)(\mathbf{p})\\ &= (\nabla_V Y\cdot Z + Y\cdot\nabla_V Z)(\mathbf{p})\end{aligned}$$

verir; son satırda iki alanın iç çarpımının noktasal tanımını kullandık.
■

Örnek 13.14 (Sonucun (1) Şıkkıyla Hesap). $V = (y-x)\,U_1 + xy\,U_3$ ve $W = x^2U_1 + yz\,U_3$ olsun. Örnek 13.13'nde bulunan $\nabla_{U_j}W$ alanlarından ve Sonuç 13.1'nin (1) şıkkından yararlanarak $\nabla_V W$'yi yeniden hesaplayalım.

Çözüm.
$V = (y-x)\,U_1 + xy\,U_3$, $f = y-x$ ve $g = xy$ fonksiyonlarıyla $fU_1 + gU_3$ biçimindedir. Sonucun (1) şıkkı

$$\nabla_V W = (y-x)\,\nabla_{U_1}W + xy\,\nabla_{U_3}W$$

verir. $\nabla_{U_1}W = 2xU_1$ ve $\nabla_{U_3}W = yU_3$ olduğundan

$$\nabla_V W = (y-x)\cdot 2x\,U_1 + xy\cdot y\,U_3 = 2x(y-x)\,U_1 + xy^2\,U_3.$$

Örnek 13.12 ile aynı sonuç. Bu yol genel bir tarif verir: bir W alanının üç $\nabla_{U_j}W$ türevi bilindiğinde, herhangi bir $V = \sum_j v_j U_j$ için $\nabla_V W = \sum_j v_j\,\nabla_{U_j}W$ olur. Katsayıların fonksiyon olması hiçbir sorun çıkarmaz, çünkü türev alınan yön yalnızca cebirsel bir rol oynar.
■

Son cümle önemli bir uyarıyı hak eder. $\nabla_V Y$ ifadesinde V ile Y'nin rolleri simetrik değildir: türevi alınan Y'dir, V yalnızca hangi yönde bakılacağını söyler. Bu yüzden V'nin katsayısı olan bir fonksiyon dışarı çıkarılabilir, ama Y'nin katsayısı çıkarılamaz.

⚠ Fonksiyon katsayısı hangi taraftan dışarı çıkar?

Sonucun (1) şıkkına göre $\nabla_{fV}Y = f\,\nabla_V Y$: yönü belirleyen alanın önündeki fonksiyon, türevin önüne olduğu gibi geçer. Ama (3) şıkkına göre $\nabla_V(fY) = V[f]\,Y + f\,\nabla_V Y$: türevi alınan alanın önündeki fonksiyon dışarı çıkarken $V[f]\,Y$ ek terimini bırakır, çünkü V yönünde giderken f de değişir. Genel olarak $\nabla_V(fY) \neq f\,\nabla_V Y$'dir. Aynı nedenle $\nabla_V W$ ile $\nabla_W V$ de genellikle farklıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.15 (Simetri Eksikliğine Bir Örnek). $V = U_1$, $Y = xU_1$ ve $f = x$ olsun. $\nabla_{fV}U_1$ ile $\nabla_V(fU_1)$ alanlarını hesaplayıp karşılaştıralım.

Çözüm.
$fV = xU_1 = Y$'dir; yani iki ifade $\nabla_Y V$ ve $\nabla_V Y$'dir.
$\nabla_{xU_1}U_1$: koordinat formülünde U_1'in koordinat fonksiyonları $1, 0, 0$ sabitlerdir ve sabit fonksiyonun her yönlü türevi sıfırdır. Dolayısıyla $\nabla_{xU_1}U_1 = \mathbf{0}$. Aynı sonuç sonucun (1) şıkkıyla da çıkar: $\nabla_{xU_1}U_1 = x\,\nabla_{U_1}U_1 = x\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
$\nabla_{U_1}(xU_1)$: xU_1'in koordinat fonksiyonları $x, 0, 0$'dır; $U_1[x] = \partial x/\partial x = 1$ olduğundan $\nabla_{U_1}(xU_1) = U_1$. Sonucun (3) şıkkıyla da aynı şey bulunur: $U_1[x]\,U_1 + x\,\nabla_{U_1}U_1 = U_1 + \mathbf{0} = U_1$.
Demek ki $\nabla_Y V = \mathbf{0}$, ama $\nabla_V Y = U_1 \neq \mathbf{0}$. Resim şudur: $Y = xU_1$ alanı x ekseni boyunca uzunluğu x ile büyüyen oklardan oluşur, $V = U_1$ ise her yerde aynı birim oktur. Y yönünde giderken V hiç değişmez; V yönünde, yani pozitif x yönünde giderken Y'nin oku birim hızla uzar.
■

13.5 Alıştırmalar

Alıştırma 13.1 (Tanımdan Hesap: İki Bileşenli Alan). $\mathbf{p} = (1, 3, -1)$ noktasındaki $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ teğet vektörü ve $W = x^2U_1 + yU_2$ vektör alanı verilsin. $\nabla_{\mathbf{v}}W$'yi doğrudan tanımdan hesaplayınız.

Çözüm.
Doğru $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 3 - t, -1 + 2t)$'dir. Bu noktada $x = 1 + t$ ve $y = 3 - t$ olduğundan

$$W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1 + t)^2\,U_1 + (3 - t)\,U_2.$$

Koordinat fonksiyonları $(1 + t)^2$, $3 - t$ ve 0'dır; türevleri $2(1 + t)$, -1 ve 0. $t = 0$'da 2, -1, 0 bulunur:

$$\nabla_{\mathbf{v}}W = 2U_1(\mathbf{p}) - U_2(\mathbf{p}) = (2, -1, 0)_{\mathbf{p}}.$$

Denetim için Lemma 13.1'nü kullanalım: $\mathbf{v}[x^2] = 1 \cdot 2x = 2$ ve $\mathbf{v}[y] = -1$ ($\mathbf{p}$'de $x = 1$). Aynı sonuç.
■

Alıştırma 13.2 (Tanımdan Hesap: Üç Bileşenli Alan). $\mathbf{p} = (1, 3, -1)$ noktasındaki $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ teğet vektörü ve $W = xU_1 + x^2U_2 - z^2U_3$ vektör alanı verilsin. $\nabla_{\mathbf{v}}W$'yi doğrudan tanımdan hesaplayınız.

Çözüm.
Doğru yine $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 3 - t, -1 + 2t)$'dir. $x = 1 + t$, $z = -1 + 2t$ olduğundan

$$W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (1 + t)\,U_1 + (1 + t)^2\,U_2 - (2t - 1)^2\,U_3.$$

Koordinat fonksiyonlarını türetelim; üçüncüsünde zincir kuralı gerekir:

$$(1 + t)' = 1, \qquad \big((1 + t)^2\big)' = 2(1 + t), \qquad \big(-(2t - 1)^2\big)' = -4(2t - 1).$$

$t = 0$'da bunlar 1, 2 ve $-4 \cdot (-1) = 4$ olur:

$$\nabla_{\mathbf{v}}W = U_1(\mathbf{p}) + 2U_2(\mathbf{p}) + 4U_3(\mathbf{p}) = (1, 2, 4)_{\mathbf{p}}.$$

Denetim: $\mathbf{v}[x] = 1$; $\mathbf{v}[x^2] = 1 \cdot 2x = 2$; $\mathbf{v}[-z^2] = 2 \cdot (-2z) = -4z = 4$, çünkü $\mathbf{p}$'de $z = -1$. Üçüncü bileşenin işaretine dikkat: $z = -1$'den z artarken $-z^2$ büyür, bu yüzden türev pozitiftir.
■

Alıştırma 13.3 (İki Alan: W'nin V'ye Göre Türevi). $V = -yU_1 + xU_3$ ve $W = \cos x\,U_1 + \sin x\,U_2$ olsun. $\nabla_V W$ alanını U_1, U_2, U_3 cinsinden yazınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

V'nin koordinatları $-y, 0, x$ olduğundan herhangi bir f için

$$V[f] = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial z}.$$

W'nin koordinat fonksiyonları $\cos x$, $\sin x$ ve 0 yalnızca x'e bağlıdır; z'ye göre kısmi türevleri sıfırdır. Buradan

$$V[\cos x] = -y\cdot(-\sin x) = y\sin x, \qquad V[\sin x] = -y\cos x, \qquad V[0] = 0.$$

Lemma 13.2 ile

$$\nabla_V W = y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2.$$

W'nin oku yalnızca x ile döner; V'nin x'i değiştiren parçası $-y\,U_1$ olduğundan sonuç y ile orantılıdır, xU_3 parçası ise z'yi değiştirir ve W buna duyarsızdır.
■

Alıştırma 13.4 (İki Alan: V'nin Kendine Göre Türevi). $V = -yU_1 + xU_3$ olsun. $\nabla_V V$ alanını U_1, U_2, U_3 cinsinden yazınız.

Çözüm.
$V[f] = -y\,\partial f/\partial x + x\,\partial f/\partial z$ kuralını V'nin kendi koordinat fonksiyonlarına uygularız:

$$V[-y] = -y\cdot 0 + x\cdot 0 = 0, \qquad V[0] = 0, \qquad V[x] = -y\cdot 1 + x\cdot 0 = -y.$$

Dolayısıyla

$$\nabla_V V = -y\,U_3.$$

V'nin birinci koordinatı $-y$ yalnızca y'ye bağlıdır, V ise y'yi hiç değiştirmez; bu yüzden birinci bileşen sabit kalır. Üçüncü koordinat x, V'nin $-y\,U_1$ parçası yüzünden $-y$ hızıyla değişir.
■

Alıştırma 13.5 (İki Alan: Fonksiyonla Çarpılmış Alanın Türevi). $V = -yU_1 + xU_3$ ve $W = \cos x\,U_1 + \sin x\,U_2$ olsun. $\nabla_V(z^2 W)$ alanını U_1, U_2, U_3 cinsinden yazınız.

Çözüm.
Sonuç 13.1'nin (3) şıkkını $f = z^2$ ile kullanalım:

$$\nabla_V(z^2 W) = V[z^2]\,W + z^2\,\nabla_V W.$$

$V[z^2] = -y\cdot 0 + x\cdot 2z = 2xz$ ve Alıştırma 13.3'dan $\nabla_V W = y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2$. Yerine koyup U_1 ve U_2 katsayılarını toplarsak

$$\begin{aligned}\nabla_V(z^2W) &= 2xz\,(\cos x\,U_1 + \sin x\,U_2) + z^2\,(y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2)\\ &= (2xz\cos x + yz^2\sin x)\,U_1 + (2xz\sin x - yz^2\cos x)\,U_2.\end{aligned}$$

Doğrudan denetim: z^2W'nin koordinatları $z^2\cos x$, $z^2\sin x$, 0'dır ve

$$\begin{aligned}V[z^2\cos x] &= -y\,(-z^2\sin x) + x\,(2z\cos x) = yz^2\sin x + 2xz\cos x,\\ V[z^2\sin x] &= -y\,(z^2\cos x) + x\,(2z\sin x) = -yz^2\cos x + 2xz\sin x.\end{aligned}$$

Aynı katsayılar çıkar.
■

Alıştırma 13.6 (İki Alan: V'nin W'ye Göre Türevi). $V = -yU_1 + xU_3$ ve $W = \cos x\,U_1 + \sin x\,U_2$ olsun. $\nabla_W V$ alanını U_1, U_2, U_3 cinsinden yazınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Bu kez yön W'dir: W'nin koordinatları $\cos x, \sin x, 0$ olduğundan

$$W[f] = \cos x\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin x\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

V'nin koordinat fonksiyonları $-y, 0, x$ için

$$W[-y] = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot (-1) = -\sin x, \qquad W[0] = 0, \qquad W[x] = \cos x.$$

Dolayısıyla

$$\nabla_W V = -\sin x\,U_1 + \cos x\,U_3.$$

Bunu Alıştırma 13.3'daki $\nabla_V W = y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2$ ile karşılaştıralım: ikisi hiç benzemez. $\nabla_W V$'nin y'ye bağlılığı yoktur ve üçüncü bileşeni sıfırdan farklıdır; $\nabla_V W$'nin ise üçüncü bileşeni sıfırdır. Kovaryant türev V ile W'de simetrik değildir.
■

Alıştırma 13.7 (İki Alan: İkinci Kovaryant Türev). $V = -yU_1 + xU_3$ ve $W = \cos x\,U_1 + \sin x\,U_2$ olsun. $\nabla_V(\nabla_V W)$ alanını U_1, U_2, U_3 cinsinden yazınız.

Çözüm.
Alıştırma 13.3'dan $\nabla_V W = y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2$; bu da bir vektör alanıdır ve ona yeniden ∇_V uygulayabiliriz. $V[f] = -y\,\partial f/\partial x + x\,\partial f/\partial z$ kuralıyla

$$\begin{aligned} V[y\sin x] &= -y\,(y\cos x) + x\cdot 0 = -y^2\cos x,\\ V[-y\cos x] &= -y\,(y\sin x) + x\cdot 0 = -y^2\sin x. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\nabla_V(\nabla_V W) = -y^2\cos x\,U_1 - y^2\sin x\,U_2 = -y^2\,W.$$

İkinci türev, alanın kendisinin $-y^2$ katı çıktı. Bu, cos ve sin'in ikinci türevlerinin kendilerinin eksi işaretlisi olmasının yansımasıdır: V yönünde x koordinatı $-y$ hızıyla değişir, bu yüzden her türev bir $-y$ çarpanı getirip oku 90° döndürür; iki türev sonunda ok y^2 ile çarpılmış ve ters dönmüştür.
■

Alıştırma 13.8 (İki Alan: Bileşik Bir Alanın Türevi). $V = -yU_1 + xU_3$ ve $W = \cos x\,U_1 + \sin x\,U_2$ olsun. $\nabla_V(xV - zW)$ alanını U_1, U_2, U_3 cinsinden yazınız.

Çözüm.
Sonuç 13.1'nin (2) ve (3) şıklarını art arda uygularız:

$$\nabla_V(xV - zW) = V[x]\,V + x\,\nabla_V V - V[z]\,W - z\,\nabla_V W.$$

Gereken parçalar: $V[x] = -y$, $V[z] = x$; Alıştırma 13.4'den $\nabla_V V = -yU_3$; Alıştırma 13.3'dan $\nabla_V W = y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2$. Yerine koyalım:

$$\begin{aligned} \nabla_V(xV - zW) = &-y\,(-yU_1 + xU_3) + x\,(-yU_3)\\ &-x\,(\cos x\,U_1 + \sin x\,U_2) - z\,(y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2). \end{aligned}$$

Katsayıları çatı vektörlerine göre toplayalım. U_1: $y^2 - x\cos x - yz\sin x$. U_2: $-x\sin x + yz\cos x$. U_3: $-xy - xy = -2xy$. Sonuç:

$$\begin{aligned} \nabla_V(xV - zW) = &\,(y^2 - x\cos x - yz\sin x)\,U_1\\ &+(yz\cos x - x\sin x)\,U_2 - 2xy\,U_3. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğrudan denetim için $xV - zW$'nin koordinatlarını yazalım: $-xy - z\cos x$, $-z\sin x$, x^2. $V[f] = -y\,\partial f/\partial x + x\,\partial f/\partial z$ ile

$$\begin{aligned} V[-xy - z\cos x] &= -y\,(-y + z\sin x) + x\,(-\cos x) = y^2 - yz\sin x - x\cos x, \\ V[-z\sin x] &= -y\,(-z\cos x) + x\,(-\sin x) = yz\cos x - x\sin x, \\ V[x^2] &= -y\cdot 2x = -2xy. \end{aligned}$$

Üç katsayı da uyuşur.
■

Alıştırma 13.9 (Sabit Uzunluklu Alanın Türevi Alana Diktir). W, uzunluğu $\| W \|$ sabit olan bir vektör alanı olsun; yani her $\mathbf{p}$ için $\| W(\mathbf{p}) \| = c$ olacak biçimde bir $c \geq 0$ sayısı bulunsun. Her V vektör alanı için $\nabla_V W$'nin her noktada W'ye dik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$W \cdot W = \| W \|^2 = c^2$ sabit fonksiyonudur. Sabit bir fonksiyonun kısmi türevleri sıfır olduğundan Lemma 3.1 gereği her noktada $V[c^2] = 0$; yani $V[W \cdot W] = 0$.
Öte yandan Sonuç 13.1′nin (4) şıkkı $Y = Z = W$ ile

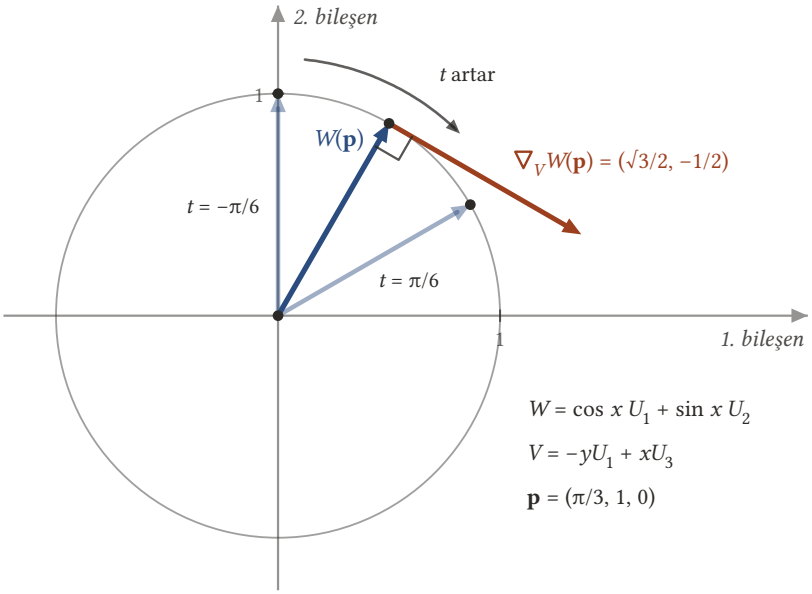
$$V[W \cdot W] = \nabla_V W \cdot W + W \cdot \nabla_V W = 2\,\nabla_V W \cdot W$$

verir; iç çarpımın simetrisini kullandık. İki sonucu birleştirince $2\,\nabla_V W \cdot W = 0$, yani her noktada $\nabla_V W \cdot W = 0$ olur. Bu da $\nabla_V W$'nin her noktada W'ye dik olması demektir. ($c = 0$ ise $W = \mathbf{0}$, $\nabla_V W = \mathbf{0}$'dır ve sıfır vektör her vektöre diktir; ifade yine doğrudur.)
Denetim için Alıştırma 13.3′ya dönelim: $W = \cos x\,U_1 + \sin x\,U_2$ alanının uzunluğu her yerde $\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$'dir ve $V = -yU_1 + xU_3$ için $\nabla_V W = y\sin x\,U_1 - y\cos x\,U_2$ bulmuştuk. İç çarpım

$$\nabla_V W \cdot W = y\sin x\cos x - y\cos x\sin x = 0.$$

Sonuç sezgiye de uyar. Uzunluğu değişmeyen bir okun ucu, ok bir yönde taşındıkça c yarıçaplı bir kürenin üzerinde dolaşır; ucun hızı, yani $\nabla_V W$, küreye teğet, dolayısıyla yarıçap doğrultusundaki W'ye diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.3: $W = \cos x\, U_1 + \sin x\, U_2$ alanının her oku birim uzunluktadır; vektör kısımları birinci ve ikinci bileşen düzlemine çizilince uçları birim çember üzerinde kalır. $\mathbf{p} = (\pi/3, 1, 0)$ noktasından $V(\mathbf{p}) = (-1, 0, \pi/3)$ yönünde ilerlerken $x = \pi/3 - t$ olur; $t = -\pi/6, 0, \pi/6$ anlarındaki oklar $\pi/2, \pi/3, \pi/6$ açılarındadır ve $W(\mathbf{p}) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ okunun ucu t arttıkça çember üzerinde saat yönünde dolaşır. Ucun hızı olan $\nabla_V W(\mathbf{p}) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ (turuncu) çembere teğettir, dolayısıyla yarıçap doğrultusundaki $W(\mathbf{p})$'ye diktir; aradaki dik açı işareti bunu gösterir.

■

Alıştırma 13.10 (Konum Alanının Türevi Yönün Kendisidir). x_1, x_2, x_3 doğal koordinat fonksiyonları olmak üzere $X = \sum_{i=1}^{3} x_i U_i$ vektör alanını alalım; $X(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}$ noktasında uygulanmış ve vektör kısmı $\mathbf{p}$'nin kendisi olan "konum" okudur. Her V vektör alanı için $\nabla_V X = V$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$V = \sum_j v_j U_j$ yazalım. X'in koordinat fonksiyonları x_1, x_2, x_3'tür. Kısmi türevleri $\partial x_i / \partial x_j$, $i = j$ için 1 ve $i \neq j$ için 0'dır. Dolayısıyla Lemma 3.1 her noktada uygulanınca

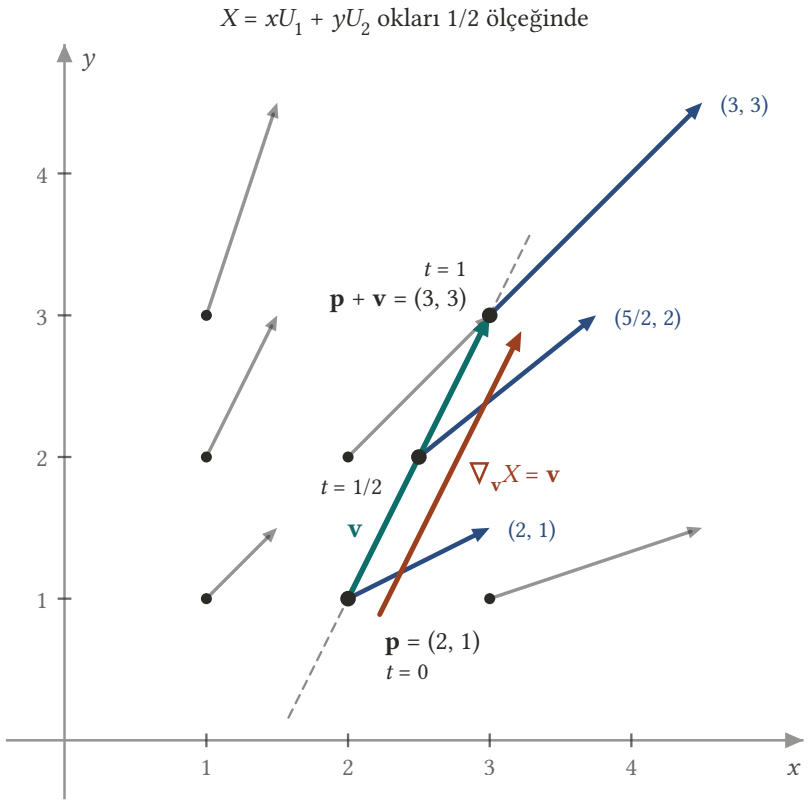
$$V[x_i] = \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = v_i.$$

Lemma 13.2 ile

$$\nabla_V X = \sum_{i=1}^{3} V[x_i]\, U_i = \sum_{i=1}^{3} v_i U_i = V.$$

Sözle: X'in $\mathbf{p}$'deki oku $\mathbf{p}$'nin kendisidir; $\mathbf{p}$'yi $\mathbf{v}$ yönünde $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$'ye taşıyınca ok da $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ olur ve t'ye göre türevi $\mathbf{v}$'dir. Hangi yöne gidersek okun değişimi tam o yön kadardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.4: Düzlemde $X = xU_1 + yU_2$ konum alanı: her noktadaki okun vektör kısmı noktanın kendisidir, okunaklılık için bütün X okları gerçek boyunun yarısıyla çizilmiştir. $\mathbf{p} = (2, 1)$ noktasından $\mathbf{v} = (1, 2)$ yönünde (yeşil ok, gerçek boyda) ilerlerken $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ noktalarındaki mavi okların vektör kısımları $t = 0, 1/2, 1$ için $(2, 1), (5/2, 2), (3, 3)$, yani noktanın kendisidir; ok, nokta kadar değişir. Bu değişimin t'ye göre türevi olan turuncu ok $\nabla_{\mathbf{v}} X = (1, 2)$, yeşil $\mathbf{v}$ okunun yanında ona paralel ve eşit boydadır: konum alanının türevi yönün kendisidir.

■

Alıştırma 13.11 (Eğri Boyunca Kovaryant Türev Kısıtlanışın Türevidir). W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı ve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun; $W_\alpha(t) = W(\alpha(t))$, W'nin α'ya kısıtlanışı (Tanım 13.1). Her $t \in I$ için

$$\nabla_{\alpha'(t)} W = W'_\alpha(t)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$W = \sum_i w_i U_i$ yazalım. Sol taraf, $\alpha(t)$ noktasındaki $\alpha'(t)$ teğet vektörüne göre kovaryant türevdir; Lemma 13.1 ile

$$\nabla_{\alpha'(t)} W = \sum_{i=1}^{3} \alpha'(t)[w_i]\, U_i(\alpha(t)).$$

Bir fonksiyonun eğri boyunca türevi lemması (Lemma 4.2)

$$\alpha'(t)[w_i] = \frac{d}{dt}\left(w_i(\alpha(t)) \right)$$

verir.
Sağ taraf için $W_\alpha(t) = \sum_i w_i(\alpha(t))\, U_i(\alpha(t))$ olduğunu kısıtlanış tanımının ardından görmüştük; koordinat fonksiyonları $w_i(\alpha(t))$'dir ve eğri üzerindeki vektör alanının türevi bunların türetilmesiyle bulunur (Tanım 10.4):

$$W'_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\,\big(\; w_i(\alpha(t))\;\big)\, U_i(\alpha(t)).$$

İki taraf terim terim aynıdır. Eğrinin düzgün olması gerekmez; ispatın hiçbir adımı $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ kullanmadı. W'nin bütün $\mathbb{R}^3$ yerine eğrinin rotasını içeren açık bir bölgede tanımlı olması da yeter, çünkü hesap yalnızca $\alpha(t)$ çevresindeki noktaları kullanır.
Bir örnek: $W = -yU_1 + xU_2$ ve $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ için Örnek 13.1'de $W_\alpha = \alpha'$ bulmuştuk; dolayısıyla $W'_\alpha(t) = \alpha''(t)$, vektör kısmı $(-\cos t, -\sin t, 0)$. Sol taraf: $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ ile $\alpha'(t)[-y] = -\cos t$ ve $\alpha'(t)[x] = -\sin t$; yani $\nabla_{\alpha'(t)}W$'nin vektör kısmı $(-\cos t, -\sin t, 0)$. Aynı vektör.
■

Alıştırma 13.12 (Tanımdaki Doğru Herhangi Bir Eğriyle Değiştirilebilir). W bir vektör alanı, $\mathbf{v}$ de $\mathbf{p}$ noktasında bir teğet vektör olsun. α, $\alpha(0) = \mathbf{p}$ ve $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ koşullarını sağlayan herhangi bir eğri ise $\nabla_{\mathbf{v}}W = W'_\alpha(0)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Alıştırma 13.11'daki eşitliği $t = 0$'da yazalım: $\nabla_{\alpha'(0)}W = W'_\alpha(0)$. $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{v}}W = W'_\alpha(0).$$

Demek ki kovaryant türevin tanımında kullandığımız $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ doğrusunun özel bir yanı yoktur: $\mathbf{p}$'den $\mathbf{v}$ hızıyla geçen her eğri, W'yi ona kısıtlayıp $t = 0$'da türetince aynı $\nabla_{\mathbf{v}}W$ vektörünü verir. Türev yalnızca başlangıç noktasına ve başlangıç hızına bağlıdır; eğrinin sonradan nereye kıvrıldığı önemsizdir. Örneğin $W = -yU_1 + xU_2$ için $\mathbf{p} = (1,0,0)$'daki $\mathbf{v} = (0,1,0)$ vektörüne göre türevi Örnek 13.4'de doğru boyunca $(-1,0,0)_{\mathbf{p}}$ bulmuştuk; $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ çemberi de $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha'(0) = (0,1,0)$ koşullarını sağlar ve Alıştırma 13.11'daki hesapla $W'_\alpha(0) = \alpha''(0) = (-1,0,0)_{\mathbf{p}}$ verir.
Bu sonucun bir yorumu, eğri üzerindeki vektör alanlarının türevine yeni bir gözle bakmamızı sağlar. Bir α eğrisi üzerinde bir Y vektör alanı alalım. Y, bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı bir W alanının kısıtlanışı ise, yani $Y = W_\alpha$ ise, Alıştırma 13.11 gereği her t için

$$Y'(t) = W'_\alpha(t) = \nabla_{\alpha'(t)}W.$$

Bu anlamda eğri üzerindeki türev Y', hemen hemen "α'"ya göre kovaryant türev" $\nabla_{\alpha'}Y$'dir. "Hemen hemen" kaydının nedeni şudur: Y yalnızca eğrinin noktalarında tanımlıdır, oysa $\nabla_{\alpha'(t)}Y$ yazmak için Y'nin $\alpha(t)$ çevresindeki bir bölgede tanımlı olması gerekir. Böyle bir genişletme her zaman var olmayabilir; örneğin eğri aynı noktadan iki kez geçiyor ve Y orada iki farklı değer alıyorsa hiçbir W işe yaramaz. Var olduğunda da tek türlü değildir; ama eşitlik hangi genişletmenin seçildiğine bağlı değildir, çünkü sol taraf yalnızca eğri üzerindeki değerleri kullanır. Örneğin $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ üzerindeki $Y = \alpha'$ hız alanı hem $W = -yU_1 + xU_2$ hem de $W^* = -yU_1 + xU_2 + z^2U_3$ alanının kısıtlanışıdır; ikisi de $Y' = \alpha''$ verir.
■

Alıştırma 13.13 (Her Yönde Türevi Sıfır Olan Alan). W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde her V vektör alanı için $\nabla_V W = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir vektör alanı olsun. W'nin koordinat fonksiyonlarının sabit olduğunu, yani $W = a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3$ biçiminde sabit a_i sayılarıyla yazılabildiğini gösteriniz.

Çözüm.
$W = \sum_i w_iU_i$ olsun. Koşulu $V = U_j$ ile kullanalım. Örnek 13.13'nde gördüğümüz gibi

$$\nabla_{U_j} W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} U_i,$$

ve bu alan sıfır olduğundan her i ve her j için $\partial w_i/\partial x_j = 0$'dır: w_i'nin bütün kısmi türevleri bütün $\mathbb{R}^3$'te sıfırdır.

Bütün kısmi türevleri sıfır olan bir g fonksiyonunun sabit olduğunu gösterelim. $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ iki nokta olsun; $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ diyelim ve $h(t) = g(\mathbf{p} + t\mathbf{u})$ tek değişkenli fonksiyonunu kuralım. $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$ doğrusu için $h = g(\alpha)$'dır ve Lemma 4.2 ile $h'(t) = \alpha'(t)[g]$; $\alpha'(t)$, $\alpha(t)$ noktasındaki $\mathbf{u}$ vektörü olduğundan Lemma 3.1

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(\alpha(t)) = 0$$

verir. Türevi her yerde sıfır olan tek değişkenli bir fonksiyon, ortalama değer teoremi gereği sabittir: 0 ile 1 arasında bir c için $h(1) - h(0) = h'(c) = 0$. Yani $g(\mathbf{q}) = h(1) = h(0) = g(\mathbf{p})$. $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ keyfi olduğundan g sabittir.

Bunu $g = w_i$ için uygularsak her w_i bir a_i sabitine eşittir ve $W = \sum_i a_i U_i$ olur. Örnek 13.5 ile birlikte şu denklik elde edilir: bir vektör alanının her yöndeki kovaryant türevi sıfırdır ancak ve ancak koordinat fonksiyonları sabitse, yani alan her noktada aynı oku taşıyorsa. Eğriler üzerinde paralel vektör alanları için gördüğümüz $Y' = 0$ denkliğinin (Lemma 10.4) bütün uzaydaki karşılığı budur.

■

Alıştırma 13.14 (Dönme Alanının Kendine Göre Türevi). $W = -yU_1 + xU_2$ dönme alanı için $\nabla_W W$ alanını hesaplayınız.

Çözüm.
$W[f] = -y\,\partial f/\partial x + x\,\partial f/\partial y$'dir. W'nin koordinat fonksiyonları $-y, x, 0$ için

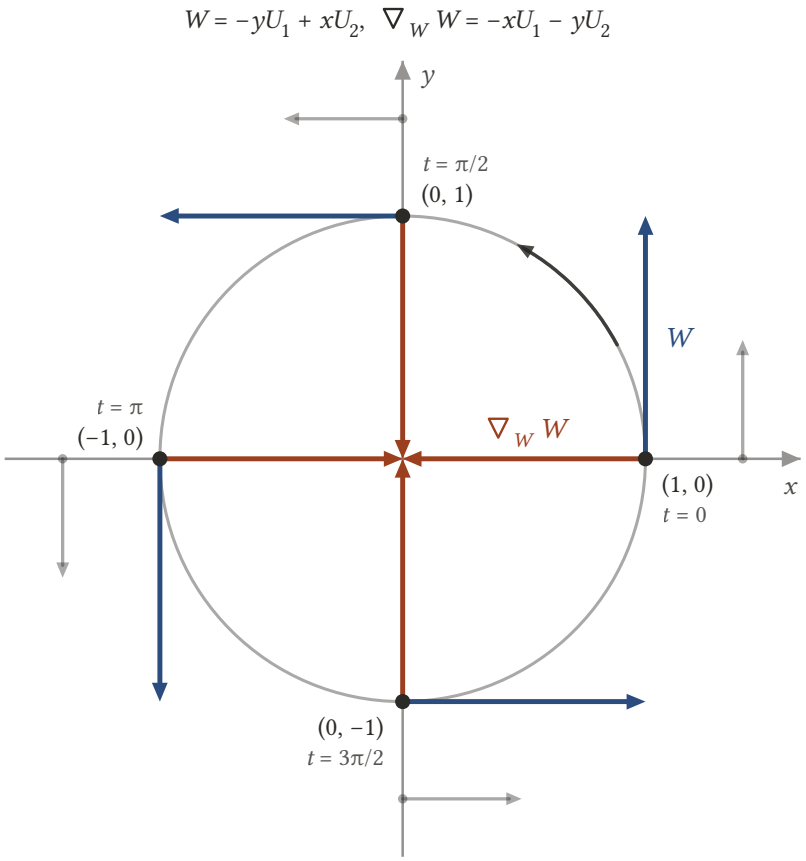
$$\begin{aligned} W[-y] &= -y \cdot 0 + x \cdot (-1) = -x, \\ W[x] &= -y \cdot 1 + x \cdot 0 = -y, \\ W[0] &= 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\nabla_W W = -x\,U_1 - y\,U_2.$$

Sonucu yorumlayalım. (x, y, z) noktasındaki $\nabla_W W$ oku, vektör kısmı $(-x, -y, 0)$ olan, yani z eksenine doğru bakan oktur; uzunluğu noktanın z eksenine uzaklığı $\sqrt{x^2 + y^2}$'dir. Bunu Alıştırma 13.11 ile bağlayalım: $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$ çemberi $(r > 0)$ üzerinde $W_\alpha(t)$, vektör kısmı $(-r\sin t, r\cos t, 0)$ olan vektördür, yani $W_\alpha = \alpha'$. O hâlde $\nabla_{\alpha'(t)} W = W'_\alpha(t) = \alpha''(t)$ ve $\alpha''(t)$'nin vektör kısmı $(-r\cos t, -r\sin t, 0)$, tam olarak $\alpha(t)$ noktasındaki $(-x, -y, 0)$'dır. Yani $\nabla_W W$, W'nin akışına kapılıp z ekseni çevresinde birim açısal hızla dönen bir noktanın ivmesidir: merkeze doğru, büyüklüğü yarıçap kadar. Bu, dairesel hareketin merkezcil ivmesinden başka bir şey değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.5: Birim çember (gri) üzerinde $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ noktalarında $W = -yU_1 + xU_2$ dönme alanının okları (mavi) ve $\nabla_W W = -xU_1 - yU_2$ alanının okları (turuncu). Mavi oklar çembere teğettir: saat yönünün tersine dönen noktanın hızıdır. Turuncu oklar merkeze bakar, uzunlukları yarıçap kadardır ve tam orijinde biter: bu, birim açısal hızla dönen noktanın merkezcil ivmesidir. Çember dışındaki açık gri oklar W'nin oradaki yönünü gösterir; yer kazanmak için kısaltılmıştır.

■

Alıştırma 13.15 (Vektörel Çarpım için Leibniz Kuralı). Y ve Z vektör alanları, $\mathbf{v}$ de $\mathbf{p}$ noktasında bir teğet vektör olsun. $Y \times Z$ alanı noktasal olarak $(Y \times Z)(\mathbf{q}) = Y(\mathbf{q}) \times Z(\mathbf{q})$ ile tanımlanır (Tanım 9.9). Şunu gösteriniz:

$$\nabla_{\mathbf{v}}(Y \times Z) = \nabla_{\mathbf{v}} Y \times Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p}) \times \nabla_{\mathbf{v}} Z.$$

Çözüm.
$Y = \sum_i y_i U_i$, $Z = \sum_i z_i U_i$ yazalım. Vektörel çarpımın koordinatları, (i, j, k) üçlüsü $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ ve $(3, 1, 2)$ sıralamalarından biri olmak üzere

$$(Y \times Z)_i = y_j z_k - y_k z_j$$

biçimindedir; bu tek formül üç koordinatın hepsini kapsar (birinci koordinat $y_2 z_3 - y_3 z_2$, ikincisi $y_3 z_1 - y_1 z_3$, üçüncüsü $y_1 z_2 - y_2 z_1$). Bunlar diferansiyellenebilir fonksiyonlar olduğundan $Y \times Z$ bir vektör alanıdır ve Lemma 13.1 uygulanabilir: $\nabla_{\mathbf{v}}(Y \times Z)$'nin i-inci koordinatı $\mathbf{v}[y_j z_k - y_k z_j]$'dir.
Yönlü türevin lineerliği ve Leibniz kuralı (Teorem 3.1, (2) ve (3)) ile, bütün fonksiyonlar $\mathbf{p}$'de değerlendirilmek üzere,

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\mathbf{v}[y_j z_k - y_k z_j] &= \mathbf{v}[y_j]\, z_k + y_j\, \mathbf{v}[z_k] - \mathbf{v}[y_k]\, z_j - y_k\, \mathbf{v}[z_j] \\ &= \big(\ \mathbf{v}[y_j]\, z_k - \mathbf{v}[y_k]\, z_j\ \big) + \big(\ y_j\, \mathbf{v}[z_k] - y_k\, \mathbf{v}[z_j]\ \big)\ .\end{aligned}$$

İlk parantez, koordinatları $\mathbf{v}[y_1], \mathbf{v}[y_2], \mathbf{v}[y_3]$ olan $\nabla_{\mathbf{v}} Y$ vektörüyle koordinatları $z_1(\mathbf{p}), z_2(\mathbf{p}), z_3(\mathbf{p})$ olan $Z(\mathbf{p})$ vektörünün vektörel çarpımının i-inci koordinatıdır. İkinci parantez de aynı biçimde $Y(\mathbf{p}) \times \nabla_{\mathbf{v}} Z$'nin i-inci koordinatıdır. Bu, (i, j, k)'nin üç sıralamasının her biri için geçerli olduğundan üç koordinat da uyuşur ve

$$\nabla_{\mathbf{v}}(Y \times Z) = \nabla_{\mathbf{v}} Y \times Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p}) \times \nabla_{\mathbf{v}} Z$$

elde edilir. Terimlerin sırasına dikkat: vektörel çarpım ters değişmeli olduğundan $Z(\mathbf{p}) \times \nabla_{\mathbf{v}} Y$ yazmak işareti bozar; iç çarpım kuralında böyle bir özen gerekmiyordu.
Noktasal ilkeyle vektör alanı sürümü de hemen çıkar: her V için $\nabla_V(Y \times Z) = \nabla_V Y \times Z + Y \times \nabla_V Z$.
■

Bu bölümde bir vektör alanının bir teğet vektöre ve bir vektör alanına göre türevini tanımlayıp hesap kurallarını kurduk; bir sonraki bölümde (Çatı Alanları) doğal çatının yerine probleme uyan hareketli çatılar koyacak ve kovaryant türevi bu çatıların uzayda nasıl döndüğünü ölçmek için kullanacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Çatı Alanları

Önceki bölümde (Kovaryant Türev) bir vektör alanının bir teğet vektöre göre türevini tanımladık ve bu türevin kurallarını çıkardık. Böylece elimizde, uzaya yayılmış bir oklar topluluğunun bir noktadan bir yöne doğru nasıl değiştiğini ölçen bir araç var. Bu bölümde neyin türevini alacağımızı seçiyoruz: bir tane değil, birbirine dik üç birim vektör alanını birden.
Fikrin kökü Frenet formüllerindedir. Bir eğri boyunca her noktaya T, N, B üçlüsünü, yani o noktada bir çatı, yerleştirmiştik (Tanım 11.2); sonra bu çatının türevlerini yine çatının kendisi cinsinden yazmıştık (Teorem 11.1). Bu adım eğrilik ve burulmayı doğurdu: eğrinin bütün geometrisi, çatının kendi kendine göre ne kadar döndüğüne indirgendi. Frenet ve Serret'in on dokuzuncu yüzyılın ortasında eğriler için bulduğu bu yaklaşımı Darboux yüzeylere taşıdı; Cartan ise onu tam genelliğine kavuşturarak "hareketli çatılar yöntemi" hâline getirdi. Yöntemin özü tek cümledir: incelenen nesnenin her noktasına bir çatı ata, sonra çatının değişim hızını ortonormal açılımla çatının kendisi cinsinden ifade et.
Bu bölümde yöntemin ilk adımını $\mathbb{R}^3$'ün tamamı için atıyoruz. $\mathbb{R}^3$'ün her noktasına bir çatı yerleştiren üç vektör alanına çatı alanı diyeceğiz. Doğal çatı alanı U_1, U_2, U_3 en basit örnektir; ama silindirik ve küresel koordinatlardan doğan, noktadan noktaya dönen çatı alanları hem daha ilginç hem daha kullanışlıdır. Sonra herhangi bir vektör alanını seçtiğimiz çatı alanına göre açacağız ve iç çarpımın bu açılımda da tanıdık biçimini koruduğunu göreceğiz. Bölümün sonunda, çatı alanının kovaryant türevlerini çatının kendisi cinsinden yazma işine hazır olacağız.

14.1 Vektör Alanlarının İç Çarpımı ve Normu

Bir çatı, bir noktadaki üç karşılıklı dik birim teğet vektördür (Tanım 9.7). Bu tanımı vektör alanlarına taşımak için önce iki vektör alanının iç çarpımından söz edebilmeliyiz. Bunu yapmanın yolu, önceki bölümlerde defalarca kullandığımız noktasal ilkedir: bir işlem tek tek teğet vektörler üzerinde tanımlıysa, alanların her noktadaki değerlerine uygulanarak alanlar üzerinde de tanımlanır.
V ve W vektör alanları olsun. Bir $\mathbf{p}$ noktasında $V(\mathbf{p})$ ile $W(\mathbf{p})$, her ikisi de $\mathbf{p}$'de uygulanan iki teğet vektördür; dolayısıyla iç çarpımları (Tanım 9.4) bir sayıdır. Nokta değiştikçe bu sayı da değişir ve $\mathbb{R}^3$ üzerinde gerçel değerli bir fonksiyon ortaya çıkar.

Tanım 14.1 (Vektör Alanlarının İç Çarpımı ve Normu). V ve W, $\mathbb{R}^3$ üzerinde vektör alanları olsun. V ile W'nin **iç çarpımı** $V \cdot W$, her $\mathbf{p}$ noktasında

$$(V \cdot W)(\mathbf{p}) = V(\mathbf{p}) \cdot W(\mathbf{p})$$

değerini alan gerçel değerli fonksiyondur. V'nin **normu** $\| V \|$, her $\mathbf{p}$ noktasında $\| V(\mathbf{p}) \|$ değerini alan gerçel değerli fonksiyondur; böylece $\| V \| = (V \cdot V)^{1/2}$ olur.

Yani $V \cdot W$ artık bir sayı değil, uzayın her noktasına "o noktadaki iki okun iç çarpımı" sayısını yazan bir fonksiyondur; $\| V \|$ de her noktaya o noktadaki okun uzunluğunu yazar.
Bu fonksiyonların türevlenebilir olup olmadığını sormalıyız, çünkü ileride bunların türevlerini alacağız. Yanıt iç çarpım için her zaman olumlu, norm için ise bir istisna dışında olumludur.

Lemma 14.1 (İç Çarpımın ve Normun Koordinat Formülü). *$V = \sum_i v_i U_i$ ve $W = \sum_i w_i U_i$, Öklid koordinat fonksiyonları v_i ve w_i olan vektör alanları olsun. O zaman*

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

olur ve $V \cdot W$ türevlenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca

$$\| V \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

olur ve $\| V \|$, $V(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan her $\mathbf{p}$ noktasının bir komşuluğunda türevlenebilirdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Bir $\mathbf{p}$ noktası alalım. $V(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $(v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p}))$, $W(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $(w_1(\mathbf{p}), w_2(\mathbf{p}), w_3(\mathbf{p}))$'dir (Lemma 2.1). Aynı noktada uygulanan iki teğet vektörün iç çarpımı vektör kısımlarının iç çarpımı olduğundan

$$(V \cdot W)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} v_i(\mathbf{p})\, w_i(\mathbf{p})$$

bulunur. Bu, her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan $V \cdot W = \sum_i v_i w_i$ fonksiyon eşitliği geçerlidir. Vektör alanlarının koordinat fonksiyonları türevlenebilirdir; türevlenebilir fonksiyonların çarpımları ve toplamları da türevlenebilir olduğundan $V \cdot W$ türevlenebilirdir.
Norm için $\| V \| = (V \cdot V)^{1/2}$ eşitliğini kullanırız: $V \cdot V = \sum_i v_i^2$ türevlenebilirdir ve $\| V \|$, bu fonksiyonun karekökle bileşkesidir. Karekök fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde her mertebeden türevlenebilirdir. $V(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ ise $(V \cdot V)(\mathbf{p}) > 0$'dır; $V \cdot V$ sürekli olduğundan $\mathbf{p}$'nin bir komşuluğunda da pozitif kalır ve o komşulukta $\| V \|$, türevlenebilir bir fonksiyonun türevlenebilir bir fonksiyonla bileşkesi olarak türevlenebilirdir.
■

İspatta karekökün sıfırda türevlenemez oluşu bir boşluk bırakır: V'nin sıfırlandığı noktalarda $\| V \|$ türevlenebilir olmayabilir. Aşağıdaki iki örnek, önce formülün kullanımını, sonra bu boşluğun gerçekten ortaya çıkabildiğini gösterir.

Örnek 14.1 (İki Alanın İç Çarpımı ve Normları). $V = xU_1 + yU_2$ ve $W = -yU_1 + xU_2$ vektör alanları için $V \cdot W$, $\| V \|$ ve $\| W \|$ fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm.
V'nin koordinat fonksiyonları $(x, y, 0)$, W'ninkiler $(-y, x, 0)$'dır. Lemma 14.1'ne göre

$$V \cdot W = x \cdot (-y) + y \cdot x + 0 \cdot 0 = 0.$$

Yani V ile W her noktada birbirine diktir: $V(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}$'nin xy düzlemine izdüşümü doğrultusunda dışa bakar, $W(\mathbf{p})$ ise onu saatin tersi yönünde $90°$ döndürmüştür. Normlar

$$\| V \| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \| W \| = \sqrt{y^2 + x^2} = \| V \|$$

olur; iki alanın okları her noktada aynı uzunluktadır ve bu uzunluk, noktanın z eksenine uzaklığıdır. Sağlama: $\mathbf{p} = (3, 4, 2)$ noktasında $V(\mathbf{p}) = (3, 4, 0)_{\mathbf{p}}$ ve $W(\mathbf{p}) = (-4, 3, 0)_{\mathbf{p}}$'dir. İç çarpım $3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = 0$, normlar $\sqrt{9 + 16} = 5$ çıkar; formüllerle uyumludur.
■

Örnek 14.2 (Türevlenemeyen Bir Norm). $V = xU_1 + yU_2$ alanının normu $\| V \| = \sqrt{x^2 + y^2}$, z ekseninin noktalarında türevlenebilir midir?

Çözüm.
Değildir. Türevlenebilir bir fonksiyonun bir doğru boyunca kısıtlanışı da türevlenebilir olmalıdır; o hâlde $\| V \|$'yi x ekseni boyunca, yani $t \mapsto (t, 0, 0)$ doğrusu üzerinde inceleyelim. Orada

$$\| V \|\,(t, 0, 0) = \sqrt{t^2} = | t |$$

olur ve $| t |$ fonksiyonunun $t = 0$'da türevi yoktur: sağdan fark oranları 1'e, soldan -1'e gider. Dolayısıyla $\| V \|$, başlangıç noktasında türevlenebilir değildir; aynı akıl yürütme z ekseninin her $(0, 0, c)$ noktasında $t \mapsto (t, 0, c)$ doğrusuyla yinelenir. Bu noktalar tam olarak V'nin sıfırlandığı noktalardır.
Buna karşılık $\| V \|^2 = V \cdot V = x^2 + y^2$ bir polinomdur ve her yerde türevlenebilirdir. Bu yüzden ileride bir alanın uzunluğunu incelerken çoğu kez $\| V \|$ yerine $V \cdot V$ ile çalışacağız.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Tek tek teğet vektörler için bildiğimiz iç çarpım kuralları, noktasal ilke sayesinde alanlara olduğu gibi geçer.

Lemma 14.2 (Alanların İç Çarpımının Kuralları). *V, W, Y vektör alanları ve f bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$V \cdot W = W \cdot V, \qquad V \cdot (W + Y) = V \cdot W + V \cdot Y, \qquad (fV) \cdot W = f\,(V \cdot W)$$

fonksiyon eşitlikleri geçerlidir.

> ***İspat.***
> *Her üç eşitliğin iki yanı da fonksiyondur; iki fonksiyonun eşit olması için her $\mathbf{p}$ noktasında aynı değeri almaları gerekir ve yeter. Bir $\mathbf{p}$ noktası sabitleyelim. Sol yanların $\mathbf{p}$'deki değerleri, tanım gereği, sırasıyla*
>
> $$V(\mathbf{p}) \cdot W(\mathbf{p}), \qquad V(\mathbf{p}) \cdot \big(\, W(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p}) \,\big), \qquad \big(\, f(\mathbf{p})\, V(\mathbf{p}) \,\big) \cdot W(\mathbf{p})$$
>
> *sayılarıdır; burada $(W + Y)(\mathbf{p}) = W(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p})$ ve $(fV)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\, V(\mathbf{p})$ eşitliklerini kullandık; alanların toplamı ve fonksiyonla çarpımı böyle, noktasal tanımlanmıştı. Bunların hepsi $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ içindeki teğet vektörlerin iç çarpımlarıdır ve teğet vektörlerin iç çarpımı simetrik ve bilineerdir. Dolayısıyla üç sayı sırasıyla*
>
> $$W(\mathbf{p}) \cdot V(\mathbf{p}), \qquad V(\mathbf{p}) \cdot W(\mathbf{p}) + V(\mathbf{p}) \cdot Y(\mathbf{p}), \qquad f(\mathbf{p})\, \big(\, V(\mathbf{p}) \cdot W(\mathbf{p}) \,\big)$$
>
> *sayılarına eşittir. Bunlar da tam olarak sağ yanların $\mathbf{p}$'deki değerleridir.*
> ■

Bu kurallar sayesinde alanların iç çarpımıyla, tek tek vektörlerin iç çarpımıyla hesap yaptığımız gibi hesap yapabiliriz: parantezleri açarız, fonksiyon katsayılarını dışarı alırız, sırayı değiştiririz.

Örnek 14.3 (Kurallarla Bir İç Çarpım Hesabı). $V = xU_1 + yU_2$, $W = U_1 + zU_3$ ve $f = z$ olsun. $(fV) \cdot (W + V)$ fonksiyonunu bulalım.

> **Çözüm.**
> Lemma 14.2'ndaki kuralları sırayla uygularız: fonksiyon katsayısı dışarı alınır, sonra parantez açılır.
>
> $$(fV) \cdot (W + V) = f\,\big(\, V \cdot (W + V) \,\big) = z\,(V \cdot W) + z\,(V \cdot V).$$
>
> Lemma 14.1 ile $V \cdot W = x \cdot 1 + y \cdot 0 + 0 \cdot z = x$ ve $V \cdot V = x^2 + y^2$ olduğundan
>
> $$(fV) \cdot (W + V) = z\,(x + x^2 + y^2).$$
>
> Sağlama için $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ noktasına bakalım: formül $3\,(1 + 1 + 4) = 18$ verir. Doğrudan hesapta
>
> $$(fV)(\mathbf{p}) = 3\,(1, 2, 0)_{\mathbf{p}} = (3, 6, 0)_{\mathbf{p}}, \qquad (W + V)(\mathbf{p}) = (1, 0, 3)_{\mathbf{p}} + (1, 2, 0)_{\mathbf{p}} = (2, 2, 3)_{\mathbf{p}}$$
>
> ve iç çarpımları $3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 18$ olur. İki yol aynı sonucu verir.
> ■

14.2 Çatı Alanı

Şimdiye kadar bütün vektör alanlarını U_1, U_2, U_3 doğal çatı alanı (Tanım 2.6) cinsinden yazdık. Bu üç alan her noktada aynı yöne bakar: $U_1(\mathbf{p})$ nerede olursak olalım pozitif x yönündedir. Böyle bir çatı hesap için rahattır, ama geometriye kördür. Örneğin bir küre üzerinde çalışırken kürenin merkezinden dışa bakan yönün, kuzeye bakan yönün ve doğuya bakan yönün her noktada ayrı ayrı adları olsun isteriz; bu üç yön noktadan noktaya değişir ve U_1, U_2, U_3 ile hiçbir doğal ilişkileri yoktur.
Frenet çatısı bu ihtiyacın eğriler için karşılanmış hâliydi: T, N, B eğrinin her noktasında eğriye uyarlanmış bir çatıdır. Aynı şeyi eğrinin noktaları için değil, uzayın bütün noktaları için yapmak istiyoruz. Uzayın her noktasında bir çatı seçmek, üç vektör alanı seçmek demektir; bu alanların çatı koşulunu sağlaması ise her noktada birim uzunlukta ve birbirine dik olmaları demektir. Az önce tanımladığımız alan iç çarpımı bu koşulu tek bir formülle söylememize izin verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 14.2 (Çatı Alanı). E_1, E_2, E_3, $\mathbb{R}^3$ üzerinde (ya da $\mathbb{R}^3$'ün bir açık alt kümesi üzerinde) tanımlı vektör alanları olsun. Her $1 \leq i, j \leq 3$ için

$$E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$$

ise E_1, E_2, E_3 üçlüsüne bir **çatı alanı** (frame field) denir. Burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır: $i = j$ ise $\delta_{ij} = 1$, $i \neq j$ ise $\delta_{ij} = 0$.

Yani çatı alanı, her noktada üç ok yerleştirir ve bu üç ok o noktada bir çatı oluşturur: $E_i \cdot E_i = 1$ eşitlikleri okların birim uzunlukta olduğunu, $i \neq j$ için $E_i \cdot E_j = 0$ eşitlikleri okların birbirine dik olduğunu söyler. Tanımdaki dokuz eşitlikten yalnızca altısı farklıdır, çünkü $E_i \cdot E_j = E_j \cdot E_i$'dir: üç norm koşulu ve üç diklik koşulu. Bir $\mathbf{p}$ noktasındaki $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ teğet vektörleri böylece $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ uzayında bir çatıdır (Tanım 9.7).

> **i** Tanım kümesi bütün uzay olmayabilir
>
> Az sonra göreceğimiz en önemli iki çatı alanı z ekseni üzerinde tanımlı değildir. Bu yüzden tanımda bir açık alt kümeye izin verdik. Bir çatı alanının, ya da herhangi bir vektör alanının, bir $\mathcal{O}$ açık kümesi (Tanım 1.7) üzerinde tanımlı olması, yalnızca $\mathcal{O}$'nun noktalarına ok yerleştirmesi demektir. Şimdiye kadar yaptığımız ve bundan sonra yapacağımız her şey noktasaldır; dolayısıyla tanımlar, lemmalar ve ispatlar bir açık küme üzerinde tanımlı alanlar için sözcüğü sözcüğüne geçerli kalır. Kümenin açık olması, her noktasının çevresinde türev alacak yer bulunmasını sağlar. Kısalık için çoğu kez yine "$\mathbb{R}^3$ üzerinde bir vektör alanı" diyeceğiz.

Vektör alanlarını diferansiyellenebilir kabul ettiğimizi hatırlatalım: bir çatı alanının her E_i alanının Öklid koordinat fonksiyonları türevlenebilirdir. Bu, tanımın söylemediği ama "vektör alanı" sözünün içinde taşıdığı bir koşuldur ve örnekleri incelerken ayrıca denetlenir.

Örnek 14.4 (Doğal Çatı Alanı Bir Çatı Alanıdır). U_1, U_2, U_3 doğal çatı alanının Tanım 14.2 anlamında bir çatı alanı olduğunu gösterelim.

Çözüm.
U_i'nin koordinat fonksiyonları sabittir: U_1 için $(1,0,0)$, U_2 için $(0,1,0)$, U_3 için $(0,0,1)$. Sabit fonksiyonlar türevlenebilir olduğundan üçü de vektör alanıdır. Lemma 14.1'ne göre

$$U_1 \cdot U_1 = 1 \cdot 1 + 0 + 0 = 1, \qquad U_1 \cdot U_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 = 0$$

ve öteki dört iç çarpım aynı biçimde hesaplanır: $U_2 \cdot U_2 = U_3 \cdot U_3 = 1$, $U_1 \cdot U_3 = U_2 \cdot U_3 = 0$. Yani $U_i \cdot U_j = \delta_{ij}$'dir. "Doğal çatı alanı" adı böylece hak edilmiş olur; bu alan bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlıdır. ■

Doğal çatı alanının her noktadaki çatısı aynıdır. Çatı alanının ilk ilginç örnekleri, noktadan noktaya sabit kalan ama doğal çatıdan farklı olan, sonra da noktadan noktaya dönen çatılardır.

Örnek 14.5 (Döndürülmüş Sabit Çatı Alanı). Her noktada

$$E_1 = \frac{1}{3}(2U_1 + 2U_2 + U_3), \quad E_2 = \frac{1}{3}(-2U_1 + U_2 + 2U_3), \quad E_3 = \frac{1}{3}(U_1 - 2U_2 + 2U_3)$$

olsun. E_1, E_2, E_3'ün bir çatı alanı olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları sabit olduğundan üç alan da vektör alanıdır. Vektör kısımları $\frac{1}{3}(2,2,1)$, $\frac{1}{3}(-2,1,2)$ ve $\frac{1}{3}(1,-2,2)$'dir. Normların kareleri ve karşılıklı iç çarpımlar şöyledir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E_1 \cdot E_1 = \frac{4+4+1}{9} = 1, E_1 \cdot E_2 = \frac{-4+2+2}{9} = 0,$$
$$E_2 \cdot E_2 = \frac{4+1+4}{9} = 1, E_1 \cdot E_3 = \frac{2-4+2}{9} = 0,$$
$$E_3 \cdot E_3 = \frac{1+4+4}{9} = 1, E_2 \cdot E_3 = \frac{-2-2+4}{9} = 0.$$

Dolayısıyla $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$ ve üçlü bir çatı alanıdır.
Bu çatı alanı da her noktada aynı çatıyı verir; doğal çatıdan farkı, uzayın sabit bir dönmesiyle elde edilmiş olmasıdır. Satırları E_1, E_2, E_3'ün vektör kısımları olan

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi, her noktadaki çatının duruş matrisidir (Tanım 9.8); yukarıdaki altı hesap, tam olarak $AA^T = I$ eşitliğinin dokuz girdisinin denetlenmesidir.
■

Örnek 14.6 (Yükseklikle Dönen Çatı Alanı). $\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$E_1 = \cos z\, U_1 + \sin z\, U_2, \qquad E_2 = -\sin z\, U_1 + \cos z\, U_2, \qquad E_3 = U_3$$

olsun. E_1, E_2, E_3'ün bir çatı alanı olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Koordinat fonksiyonları $\cos z$, $\sin z$ ve sabitlerdir; hepsi türevlenebilirdir. Vektör kısımları $(\cos z, \sin z, 0)$, $(-\sin z, \cos z, 0)$ ve $(0,0,1)$ olduğundan

$$E_1 \cdot E_1 = \cos^2 z + \sin^2 z = 1, E_1 \cdot E_2 = -\cos z \sin z + \sin z \cos z = 0,$$
$$E_2 \cdot E_2 = \sin^2 z + \cos^2 z = 1, E_1 \cdot E_3 = 0,$$
$$E_3 \cdot E_3 = 1, \qquad E_2 \cdot E_3 = 0$$

bulunur; üçlü bir çatı alanıdır ve bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlıdır.
Bu kez çatı noktadan noktaya değişir, ama yalnızca yükseklikle: $z = c$ yatay düzleminin bütün noktalarında çatı aynıdır ve doğal çatının z ekseni etrafında c açısıyla döndürülmüşüdür. $z = 0$ düzleminde $E_1 = U_1$, $E_2 = U_2$, yani doğal çatının kendisidir. $z = \pi/2$ düzleminde $E_1 = U_2$ ve $E_2 = -U_1$: çatı çeyrek tur dönmüştür. $z = \pi$ düzleminde $E_1 = -U_1$, $E_2 = -U_2$: yarım tur. Yükseldikçe çatı, bir vidanın dişleri gibi, z ekseni etrafında düzgün biçimde döner.
■

Çatı alanı olmayan bir üçlüyü de görmek öğreticidir; en yakın aday, yukarıdaki iç çarpım örneğindeki iki alandır.

Örnek 14.7 (Dik Ama Birim Olmayan Üçlü). $V_1 = xU_1 + yU_2$, $V_2 = -yU_1 + xU_2$ ve $V_3 = U_3$ olsun. Bu üçlünün her noktada karşılıklı dik olduğunu, ama bir çatı alanı olmadığını gösterelim.

Çözüm.
Örnek 14.1'nde $V_1 \cdot V_2 = 0$ bulmuştuk. Ayrıca $V_1 \cdot V_3 = x \cdot 0 + y \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ ve aynı biçimde $V_2 \cdot V_3 = 0$'dır. Üç alan her noktada karşılıklı diktir.
Ancak $V_1 \cdot V_1 = x^2 + y^2$, sabit 1 fonksiyonu değildir: $(3,4,2)$ noktasında 25, $(1,0,0)$ noktasında 1, z ekseninin noktalarında 0 değerini alır. Yani V_1 yalnızca $x^2 + y^2 = 1$ silindiri üzerinde birim uzunluktadır, z ekseninde ise sıfır vektörüdür ve bir çatının parçası bile olamaz. Aynı şey V_2 için de geçerlidir. Dolayısıyla V_1, V_2, V_3 bir çatı alanı değildir.
Kusur yalnızca uzunluktadır ve onarılabilir: z ekseni dışında V_1 ile V_2'yi ortak uzunlukları $\sqrt{x^2+y^2}$ ile bölersek her noktada birim uzunlukta, karşılıklı dik üç alan elde ederiz. Bir sonraki kısımda bu çatı alanını, silindirik koordinatlar üzerinden, yeniden ve daha doğal bir yoldan bulacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

14.3 Silindirik Çatı Alanı

Temel analizde uzayın noktalarını yalnızca (x, y, z) ile değil, silindirik ve küresel koordinatlarla da adlandırırız. Her koordinat sisteminin yanında doğal bir çatı alanı gelir: her noktada, öteki iki koordinat sabit tutulurken bir koordinatın arttığı yöne bakan birim vektörler. Bu kısımda silindirik koordinatlardan başlıyoruz.
Bir $\mathbf{p} = (x, y, z)$ noktasını silindirik koordinatlarla tarif etmek, onun z eksenine uzaklığını, xy düzlemine izdüşümünün pozitif x ekseniyle yaptığı açıyı ve yüksekliğini vermek demektir.

Tanım 14.3 (Silindirik Koordinat Fonksiyonları). z ekseni dışındaki noktalarda $\mathbb{R}^3$'ün **silindirik koordinat fonksiyonları** r, ϑ, z şöyledir:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, noktanın z eksenine uzaklığı;
- ϑ, pozitif x ekseninden noktanın xy düzlemine izdüşümü olan $(x, y, 0)$'a saatin tersi yönünde ölçülen açı; yani $x = r\cos\vartheta$ ve $y = r\sin\vartheta$ eşitliklerini sağlayan açı;
- z, üçüncü doğal koordinat fonksiyonu.

ϑ fonksiyonunu bir noktada 2π'nin katı kadar farklı değerlerle seçebiliriz; türevlenebilir tek bir fonksiyon istediğimizde ϑ'yı $y = 0$, $x \le 0$ yarım düzlemi dışında, $-\pi < \vartheta < \pi$ değerleriyle alırız.

Yani (r, ϑ) çifti, xy düzlemindeki (x, y) noktasının kutupsal koordinatlarıdır; z olduğu gibi kalır. r fonksiyonu z ekseni dışında türevlenebilirdir, çünkü orada $x^2 + y^2 > 0$'dır ve karekök pozitif sayılarda türevlenebilirdir.

⚠ Açı fonksiyonu her yerde tanımlı değildir, ama kosinüsü ve sinüsü tanımlıdır

ϑ'yı z ekseni dışındaki bütün noktalarda sürekli bir fonksiyon olarak seçmek olanaksızdır: z ekseninin etrafında bir tam tur atıp başladığımız noktaya dönersek açı 2π artmış olur, oysa sürekli bir fonksiyon aynı noktada aynı değeri almalıdır. Bu yüzden bir yarım düzlemi dışarıda bırakırız; örneğin $y = 0$, $x \le 0$ yarım düzleminin dışında

$$\vartheta = 2\tan^{-1}\!\left(\frac{y}{r + x}\right)$$

formülü, $(-\pi, \pi)$ aralığında değer alan türevlenebilir bir açı fonksiyonu verir. Buradaki bölen $r + x$, yalnızca $y = 0$ ve $x \le 0$ olan noktalarda sıfırlanır. Öte yandan çatı alanı için ϑ'nın kendisine değil, yalnızca

$$\cos\vartheta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\vartheta = \frac{y}{r}$$

fonksiyonlarına ihtiyacımız olacak. Bu ikisi z ekseni dışındaki her noktada tanımlı, tek değerli ve türevlenebilirdir. Bu yüzden silindirik çatı alanı, ϑ'nın kendisinden daha geniş bir kümede, z ekseni dışındaki bütün noktalarda tanımlı olacaktır.

Örnek 14.8 (Bir Noktanın Silindirik Koordinatları). $\mathbf{p} = (3, 4, 2)$ noktasının silindirik koordinatlarını bulalım.

Çözüm.
$r = \sqrt{9 + 16} = 5$ ve $z = 2$'dir. Açı için $\cos\vartheta = 3/5$ ve $\sin\vartheta = 4/5$ olmalıdır; $\mathbf{p}$'nin izdüşümü $(3, 4, 0)$ birinci bölgede olduğundan $\vartheta = \tan^{-1}(4/3)$'tür. Yukarıdaki formül de aynı sonucu verir:

$$\vartheta = 2\tan^{-1}\!\left(\frac{4}{5 + 3}\right) = 2\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 0{,}9273 \text{ radyan},$$

yani yaklaşık $53{,}13°$. Sağlama: $5\cos(0{,}9273) \approx 3{,}000$ ve $5\sin(0{,}9273) \approx 4{,}000$. Dolayısıyla $\mathbf{p}$'nin silindirik koordinatları $r = 5$, $\vartheta \approx 0{,}9273$, $z = 2$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Silindirik koordinatların yanında gelen çatı alanı şudur. Önce çatı alanı olduğunu denetleyeceğiz; ardından üç alanın gerçekten r, ϑ ve z koordinatlarının arttığı yönlere baktığını göstereceğiz.

Örnek 14.9 (Silindirik Çatı Alanı). z ekseni dışında

$$E_1 = \cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2, \qquad E_2 = -\sin\vartheta\, U_1 + \cos\vartheta\, U_2, \qquad E_3 = U_3$$

olsun. E_1, E_2, E_3'ün bir çatı alanı olduğunu gösterelim. Bu üçlüye $\mathbb{R}^3$'ün **silindirik çatı alanı** (cylindrical frame field) denir.

Çözüm.
Vektör alanı olma. $\cos\vartheta = x/r$ ve $\sin\vartheta = y/r$ olduğundan

$$E_1 = \frac{x}{r}\,U_1 + \frac{y}{r}\,U_2, \qquad E_2 = -\frac{y}{r}\,U_1 + \frac{x}{r}\,U_2$$

yazılabilir. r, z ekseni dışında türevlenebilir ve sıfırdan farklı olduğundan bu katsayılar orada türevlenebilirdir; E_3'ün katsayıları sabittir. Üçü de z ekseni dışında tanımlı vektör alanlarıdır.
Ortonormallik. Vektör kısımları $(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0)$, $(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$ ve $(0,0,1)$'dir. Lemma 14.1 ile

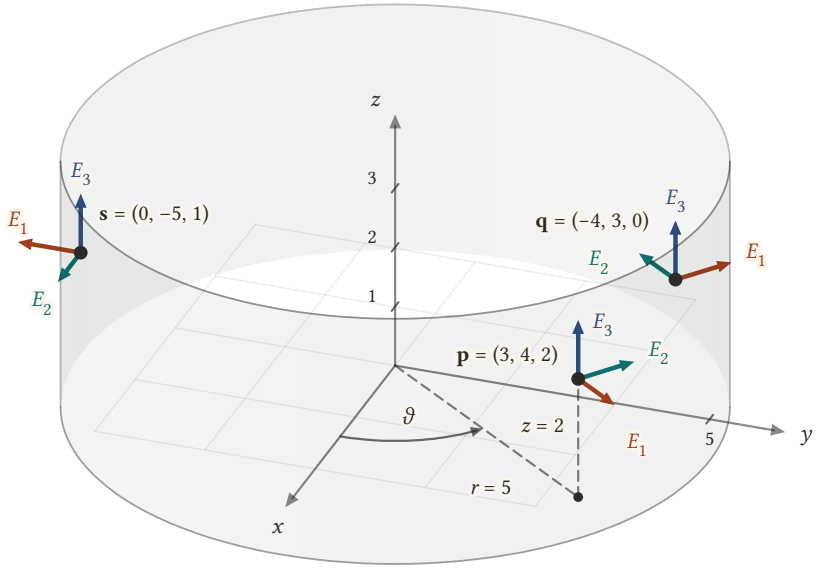
$$\begin{aligned} &E_1 \cdot E_1 = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1, &&E_1 \cdot E_2 = -\cos\vartheta\sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta = 0,\\ &E_2 \cdot E_2 = \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1, &&E_1 \cdot E_3 = 0+0+0 = 0,\\ &E_3 \cdot E_3 = 1, &&E_2 \cdot E_3 = 0+0+0 = 0. \end{aligned}$$

Altı koşul da sağlanır; E_1, E_2, E_3 bir çatı alanıdır.
Birkaç noktadaki değerler:

nokta	E_1'in vektör kısmı	E_2'nin vektör kısmı	E_3'ün vektör kısmı
$(3,4,2)$	$(3/5, 4/5, 0)$	$(-4/5, 3/5, 0)$	$(0,0,1)$
$(-4,3,0)$	$(-4/5, 3/5, 0)$	$(-3/5, -4/5, 0)$	$(0,0,1)$
$(0,-5,1)$	$(0,-1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,0,1)$

Üç noktada da $r = 5$'tir, ama E_1 ile E_2 noktanın z eksenine göre konumuyla birlikte döner; E_3 hep aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.1: Silindirik çatı alanının üç noktadaki değerleri: $\mathbf{p} = (3, 4, 2)$, $\mathbf{q} = (-4, 3, 0)$ ve $\mathbf{s} = (0, -5, 1)$; üçü de $r = 5$ silindirinin üzerindedir. Her noktada E_1 (turuncu) z ekseninden dışa, E_2 (yeşil) silindirin çevresi boyunca dönme yönüne, E_3 (mavi) yukarı bakar. Nokta z ekseninin çevresinde döndükçe E_1 ile E_2 birlikte döner, E_3 ise hiç değişmez. Kesikli çizgiler $\mathbf{p}$'nin silindirik koordinatlarını okur: taban uzaklığı $r = 5$, taban açısı ϑ ve yükseklik $z = 2$.

■

Şimdi E_1, E_2, E_3'ün adlarını hak ettiğini görelim. Fikir şudur: öteki iki koordinatı sabit tutup birini değiştirince nokta bir eğri çizer; o eğrinin hız vektörü bize aranan yönü verir.

Örnek 14.10 (Silindirik Çatının Koordinat Yönleri). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı olsun. E_1, E_2, E_3'ün sırasıyla r, ϑ ve z koordinatlarının arttığı yöne bakan birim vektörler olduğunu doğrulayalım.

Çözüm.
Silindirik koordinatları (r_0, ϑ_0, z_0) olan bir $\mathbf{p}$ noktası alalım. Yalnızca r'yi değiştirirsek nokta

$$u \mapsto (u\cos\vartheta_0,\, u\sin\vartheta_0,\, z_0)$$

doğrusu üzerinde hareket eder; bu eğrinin hızının vektör kısmı $(\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0, 0)$'dır, yani tam $E_1(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı. Bu, z ekseninden $\mathbf{p}$'ye doğru yatay olarak dışa bakan birim vektördür. Yalnızca ϑ'yı değiştirirsek nokta

$$u \mapsto (r_0\cos u,\, r_0\sin u,\, z_0)$$

yatay çemberi üzerinde döner; $u = \vartheta_0$ anındaki hızın vektör kısmı $r_0(-\sin\vartheta_0, \cos\vartheta_0, 0)$, yani r_0 ile $E_2(\mathbf{p})$'nin vektör kısmının çarpımıdır. Uzunluk r_0'ı atınca $E_2(\mathbf{p})$ kalır: z ekseni etrafında saatin tersi yönünde dönmenin yatay birim vektörü. Yalnızca z'yi değiştirmek düşey doğru boyunca yürümektir ve hız $U_3(\mathbf{p}) = E_3(\mathbf{p})$'dir. Üç hızın uzunlukları 1, r_0 ve 1'dir; yön vektörleri E_1, E_2, E_3 zaten birim uzunluktadır.
■

Yani silindirik çatı alanı her noktaya "z ekseninden dışa", "z ekseni etrafında dönme yönüne" ve "yukarı" bakan üç birim ok yerleştirir. z ekseni üzerinde "dışa" ve "dönme yönü" anlamsızdır; çatı alanının

 CC BY-NC-SA 4.0

orada tanımsız olması bu geometrik gerçeğin yansımasıdır. Örnek 14.7'da dik ama birim olmayan V_1, V_2 alanlarını r ile bölerek elde edeceğimizi söylediğimiz çatı, tam olarak $E_1 = V_1/r$, $E_2 = V_2/r$'dir.

14.4 Küresel Çatı Alanı

Küresel koordinatlar bir noktayı, başlangıç noktasına uzaklığıyla ve iki açıyla adlandırır. Açılardan biri silindirik koordinatlardaki ϑ'dır; öteki, noktanın xy düzleminden ne kadar yukarıda (ya da aşağıda) göründüğünü ölçer. Dünya yüzeyindeki benzetmesiyle ϑ boylam, ikinci açı enlemdir.

Tanım 14.4 (Küresel Koordinat Fonksiyonları). z ekseni dışındaki noktalarda $\mathbb{R}^3$'ün **küresel koordinat fonksiyonları** ρ, ϑ, φ şöyledir:

- $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, noktanın başlangıç noktasına uzaklığı;
- ϑ, silindirik koordinatlardaki açı (boylam);
- φ, başlangıç noktasından noktaya giden doğru parçasının xy düzlemiyle yaptığı, yukarı doğru pozitif sayılan açı (yükseklik açısı); $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ olur ve $r = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$ eşitlikleri geçerlidir.

Böylece $x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$ ve $z = \rho\sin\varphi$ olur.

Yani ρ noktanın "yarıçapı", ϑ boylamı, φ enlemidir: $\varphi = 0$ olan noktalar xy düzlemindedir (ekvator), φ pozitifse nokta düzlemin üstünde, negatifse altındadır. z ekseni dışında $r > 0$ olduğundan $\varphi = \tan^{-1}(z/r)$ formülü φ'yi her yerde tek değerli ve türevlenebilir biçimde verir; ρ da orada pozitif ve türevlenebilirdir. ϑ için silindirik durumdaki uyarı aynen geçerlidir ve yine yalnızca $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$'ya ihtiyaç duyacağız.

> **i** Açı yukarıdan mı, aşağıdan mı?
>
> Küresel koordinatlarda ikinci açı çoğu kez pozitif z ekseninden aşağı doğru ölçülür; o zaman $z = \rho\cos(\text{açı})$ olur. Biz açıyı xy düzleminden yukarı doğru ölçüyoruz, böylece $z = \rho\sin\varphi$'dir ve φ gerçekten coğrafi enlem gibi davranır. İki seçim birbirinin $\pi/2$'den farkıdır; hangisini kullandığımızı bilmek yeter.

Örnek 14.11 (Bir Noktanın Küresel Koordinatları). $\mathbf{p} = (2,2,1)$ noktasının küresel koordinatlarını bulalım.

Çözüm.
$\rho = \sqrt{4+4+1} = 3$ ve $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$'dir. İzdüşüm $(2,2,0)$, x ekseniyle $45°$ yapar: $\cos\vartheta = \sin\vartheta = 2/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$, yani $\vartheta = \pi/4$. Yükseklik açısı için

$$\sin\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{1}{3}, \qquad \cos\varphi = \frac{r}{\rho} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

olur; $\varphi = \tan^{-1}\left(\,1/(2\sqrt{2})\,\right) \approx 0{,}3398$ radyan, yaklaşık $19{,}47°$. Sağlama:

$$\rho\cos\varphi\cos\vartheta = 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 = x, \qquad \rho\sin\varphi = 3\cdot\frac{1}{3} = 1 = z,$$

ve aynı biçimde $\rho\cos\varphi\sin\vartheta = 2 = y$.
■

Küresel çatı alanını silindirik çatı alanından türetmek en kolay yoldur. ϑ'nın artma yönü her iki sistemde aynıdır. ρ'nun artma yönü başlangıç noktasından dışa bakan yöndür; bu yön, $\mathbf{p}$'den geçen düşey yarım düzlemin içindedir ve o düzlemde yatay E_1 ile düşey E_3'ün gerdiği açı φ'lik doğrultudur. φ'nin artma yönü ise aynı düzlemde bundan $90°$ ileride, "kuzeye" bakan yöndür.

Örnek 14.12 (Küresel Çatı Alanı). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı olsun. z ekseni dışında

$$F_1 = \cos\varphi\,E_1 + \sin\varphi\,E_3, \qquad F_2 = E_2, \qquad F_3 = -\sin\varphi\,E_1 + \cos\varphi\,E_3$$

olsun; doğal çatı cinsinden

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} F_1 &= \cos\varphi\cos\vartheta\, U_1 + \cos\varphi\sin\vartheta\, U_2 + \sin\varphi\, U_3,\\ F_2 &= -\sin\vartheta\, U_1 + \cos\vartheta\, U_2,\\ F_3 &= -\sin\varphi\cos\vartheta\, U_1 - \sin\varphi\sin\vartheta\, U_2 + \cos\varphi\, U_3. \end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3'ün bir çatı alanı olduğunu gösterelim. Bu üçlüye $\mathbb{R}^3$'ün **küresel çatı alanı** (spherical frame field) denir.

Çözüm.
Açık formüller. $E_1 = \cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2$ ve $E_3 = U_3$ yerine yazılınca

$$F_1 = \cos\varphi\,(\cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2) + \sin\varphi\, U_3$$

ve benzer biçimde F_3 için verilen açılım elde edilir; $F_2 = E_2$ zaten açıktır. Katsayılar $\cos\varphi = r/\rho$, $\sin\varphi = z/\rho$, $\cos\vartheta = x/r$, $\sin\vartheta = y/r$ fonksiyonlarının çarpımlarıdır ve z ekseni dışında türevlenebilirdir. Üçü de vektör alanıdır.
Ortonormallik, silindirik çatı üzerinden. $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$ olduğunu biliyoruz. Lemma 14.2'yla parantezleri açarız:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot F_1 &= \cos^2\varphi\,(E_1\cdot E_1) + 2\cos\varphi\sin\varphi\,(E_1\cdot E_3) + \sin^2\varphi\,(E_3\cdot E_3)\\ &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,\\ F_3 \cdot F_3 &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,\\ F_1 \cdot F_3 &= -\cos\varphi\sin\varphi\,(E_1\cdot E_1) + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(E_1\cdot E_3) + \sin\varphi\cos\varphi\,(E_3\cdot E_3)\\ &= -\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0. \end{aligned}$$

$F_2 = E_2$ birimdir ve E_2 hem E_1'e hem E_3'e dik olduğundan

$$F_2 \cdot F_1 = \cos\varphi\,(E_2\cdot E_1) + \sin\varphi\,(E_2\cdot E_3) = 0$$

ve aynı biçimde $F_2 \cdot F_3 = 0$ olur.
Ortonormallik, doğrudan. Aynı sonuca açık formüllerle de ulaşalım; $\sin^2 + \cos^2 = 1$ özdeşliği art arda kullanılır:

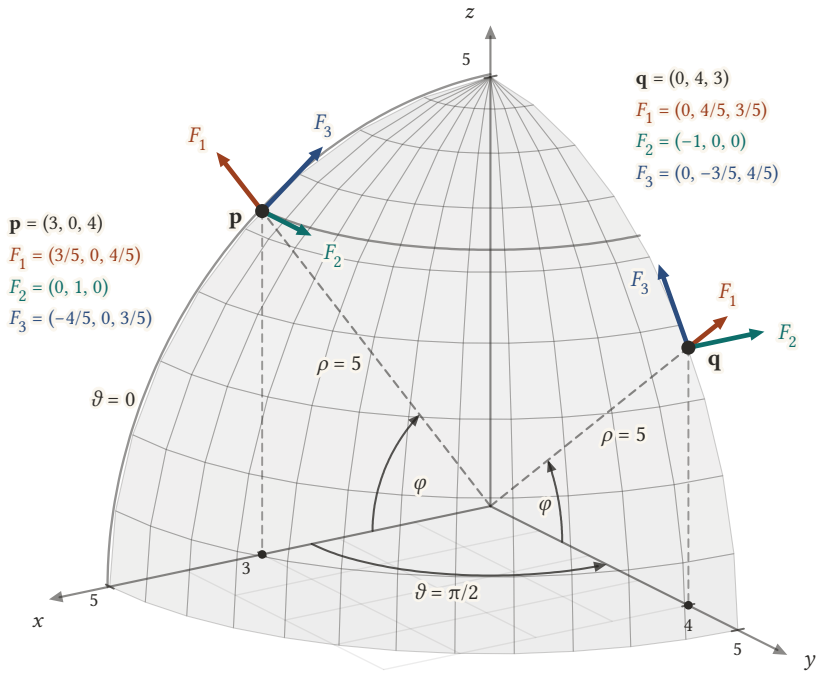
$$\begin{aligned} F_1 \cdot F_1 &= \cos^2\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,\\ F_2 \cdot F_2 &= \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1,\\ F_3 \cdot F_3 &= \sin^2\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \cos^2\varphi = 1,\\ F_1 \cdot F_2 &= \cos\varphi\,(-\cos\vartheta\sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta) = 0,\\ F_1 \cdot F_3 &= -\sin\varphi\cos\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \sin\varphi\cos\varphi = 0,\\ F_2 \cdot F_3 &= \sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Her iki yolla da $F_i \cdot F_j = \delta_{ij}$; F_1, F_2, F_3 bir çatı alanıdır.
İki noktadaki değerler:

nokta	$\cos\varphi, \sin\varphi$	F_1'in vektör kısmı	F_2'nin vektör kısmı	F_3'ün vektör kısmı
$(3,0,4)$	$3/5, 4/5$	$(3/5, 0, 4/5)$	$(0,1,0)$	$(-4/5, 0, 3/5)$
$(0,4,3)$	$4/5, 3/5$	$(0, 4/5, 3/5)$	$(-1,0,0)$	$(0, -3/5, 4/5)$

İlk noktada $\vartheta = 0$, ikincide $\vartheta = \pi/2$'dir; iki noktada da $\rho = 5$'tir. F_1'in vektör kısmının her seferinde noktanın koordinatlarının ρ'ya bölümü olduğuna dikkat edin.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.2: Yarıçapı 5 olan kürenin $x, y, z \geq 0$ parçası üzerinde küresel çatı alanının iki noktadaki değerleri: $\mathbf{p} = (3, 0, 4)$ ve $\mathbf{q} = (0, 4, 3)$. Her iki noktada da F_1 (turuncu) başlangıç noktasından dışa, yani küreye dik bakar; F_2 (yeşil) paralel çember boyunca doğuya, F_3 (mavi) meridyen boyunca kuzeye bakar ve ikisi de küreye teğettir. Kesikli çizgiler $\rho = 5$ yarıçapını, yaylar ϑ ile φ açılarını okutur: ilk noktada $\vartheta = 0$, ikincide $\vartheta = \pi/2$'dir. F_1'in vektör kısmı her seferinde noktanın koordinatlarının 5'e bölümüdür.

■

Küresel çatının üç alanının gerçekten ρ, ϑ ve φ koordinatlarının arttığı yönlere baktığını, silindirik durumda yaptığımız gibi koordinat eğrilerinin hızlarıyla görelim.

Örnek 14.13 (Küresel Çatının Koordinat Yönleri). F_1, F_2, F_3 küresel çatı alanı olsun. F_1, F_2, F_3'ün sırasıyla ρ, ϑ ve φ koordinatlarının arttığı yöne bakan birim vektörler olduğunu doğrulayalım.

Çözüm.
Küresel koordinatları $(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ olan bir $\mathbf{p}$ noktasında yalnızca ρ'yu değiştirirsek nokta

$$u \mapsto u\,(\cos\varphi_0 \cos\vartheta_0, \cos\varphi_0 \sin\vartheta_0, \sin\varphi_0)$$

doğrusu üzerinde, başlangıç noktasından dışa doğru hareket eder; hızın vektör kısmı parantezin içidir ve bu tam $F_1(\mathbf{p})$'nin vektör kısmıdır. Yalnızca φ'yi değiştirirsek nokta

$$u \mapsto \rho_0\,(\cos u \cos\vartheta_0, \cos u \sin\vartheta_0, \sin u)$$

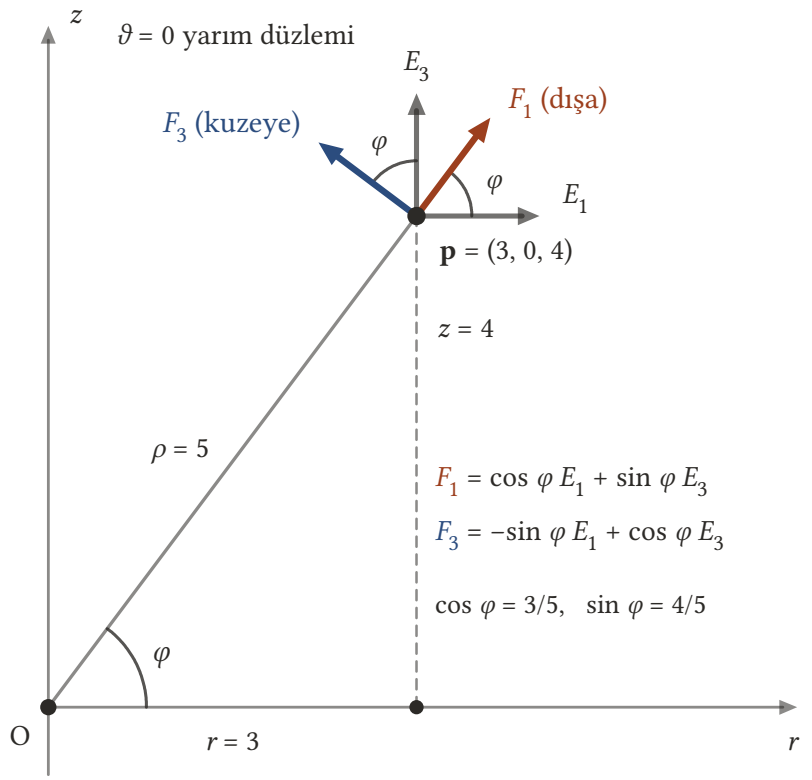
meridyen çemberi üzerinde kuzeye doğru yürür; $u = \varphi_0$'daki hızın vektör kısmı

$$\rho_0\,(-\sin\varphi_0 \cos\vartheta_0, -\sin\varphi_0 \sin\vartheta_0, \cos\varphi_0),$$

yani ρ_0 çarpı $F_3(\mathbf{p})$'nin vektör kısmıdır. Yalnızca ϑ'yı değiştirmek ise $\mathbf{p}$'yi yarıçapı $r_0 = \rho_0 \cos\varphi_0$ olan yatay bir çember üzerinde döndürür ve hız $r_0 E_2(\mathbf{p}) = r_0 F_2(\mathbf{p})$'dir. Üç hızın uzunlukları 1, r_0 ve ρ_0'dır; yön vektörleri F_1, F_2, F_3 zaten birim uzunluktadır.
Bu hesap, F_1 ve F_3'ün E_1, E_3 cinsinden tanımını geometrik olarak açıklar. $\mathbf{p}$'den geçen düşey yarım düzlemde $E_1(\mathbf{p})$ yatay, $E_3(\mathbf{p})$ düşeydir; başlangıç noktasından $\mathbf{p}$'ye bakan yön yatayla φ_0 açısı yapar. Bu yönün birim vektörü ile ondan $90°$ ileride, kuzeye bakan birim vektör

$$F_1(\mathbf{p}) = \cos\varphi_0\, E_1(\mathbf{p}) + \sin\varphi_0\, E_3(\mathbf{p}), \qquad F_3(\mathbf{p}) = -\sin\varphi_0\, E_1(\mathbf{p}) + \cos\varphi_0\, E_3(\mathbf{p})$$

olur.



Şekil 14.3: $\vartheta = 0$ yarım düzleminde çizilen $\mathbf{p} = (3, 0, 4)$ noktasının yatay uzaklığı $r = 3$, yüksekliği $z = 4$, başlangıç noktası O'ya uzaklığı $\rho = 5$'tir. Silindirik çatının E_1 (yatay) ve E_3 (düşey) okları gri çizilmiştir; küresel çatının F_1 oku (turuncu) O'dan $\mathbf{p}$'ye bakan doğrultunun devamıdır, F_3 oku (mavi) ondan 90° ileride kuzeye bakar. Üç yay da aynı φ açısını işaretler: F_1, F_3 ikilisi E_1, E_3 ikilisinin φ kadar döndürülmüşüdür. Burada $\cos\varphi = 3/5$ ve $\sin\varphi = 4/5$ olduğundan F_1'in vektör kısmı $(3/5, 0, 4/5)$, F_3'ün vektör kısmı ise $(-4/5, 0, 3/5)$ çıkar.

■

Yani küresel çatı alanı her noktaya "başlangıç noktasından dışa", "doğuya" ve "kuzeye" bakan üç birim ok yerleştirir. F_1 küreye diktir; F_2 ile F_3 ise noktadan geçen ρ yarıçaplı küreye teğettir. Küresel çatı alanının tanım kümesi de z ekseni dışıdır: kutuplarda "doğu" ve "kuzey" anlamını yitirir.

Örnek 14.14 (Bir Noktada Küresel Çatı). $\mathbf{p} = (2, 2, 1)$ noktasında $F_1(\mathbf{p}), F_2(\mathbf{p}), F_3(\mathbf{p})$ teğet vektörlerini bulalım.

Çözüm.
Örnek 14.11'nde $\rho = 3$, $\cos\vartheta = \sin\vartheta = \sqrt{2}/2$, $\cos\varphi = 2\sqrt{2}/3$ ve $\sin\varphi = 1/3$ bulmuştuk. Silindirik çatının vektör kısımları E_1: $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, E_2: $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, E_3: $(0, 0, 1)$'dir. Buradan

$$F_1(\mathbf{p}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_{\mathbf{p}} + \frac{1}{3}(0,0,1)_{\mathbf{p}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)_{\mathbf{p}},$$
$$F_2(\mathbf{p}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_{\mathbf{p}},$$
$$F_3(\mathbf{p}) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)_{\mathbf{p}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}(0,0,1)_{\mathbf{p}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)_{\mathbf{p}}.$$

Sağlama:

$$\| F_3(\mathbf{p}) \|^2 = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{8}{9} = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1,$$
$$F_1(\mathbf{p}) \cdot F_3(\mathbf{p}) = -\frac{2\sqrt{2}}{18} - \frac{2\sqrt{2}}{18} + \frac{2\sqrt{2}}{9} = 0.$$

$F_1(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $(2,2,1)/3 = \mathbf{p}/\rho$'dur: başlangıç noktasından $\mathbf{p}$'ye doğru bakan birim vektör, beklendiği gibi.
■

14.5 Çatı Alanına Göre Koordinat Fonksiyonları

Bir vektör alanını şimdiye kadar $V = \sum_i v_i U_i$ biçiminde, doğal çatı alanı cinsinden yazdık (Lemma 2.1). Elimizde artık başka çatı alanları var ve doğal soru şudur: verilen bir V alanı, silindirik ya da küresel çatı alanı cinsinden de yazılabilir mi, yazılabilirse katsayılar nasıl bulunur? Yanıt, bir noktadaki çatı için bildiğimiz ortonormal açılımın (Teorem 9.1) noktasal ilkeyle alanlara taşınmasıdır.

Lemma 14.3 (Bir Çatı Alanına Göre Açılım). *E_1, E_2, E_3 bir çatı alanı olsun.*

- *V bir vektör alanıysa $f_i = V \cdot E_i$ ($i = 1,2,3$) türevlenebilir fonksiyonlardır ve*

$$V = f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3 = \sum_{i=1}^{3} (V \cdot E_i)\, E_i$$

  *olur. $V = \sum_i g_i E_i$ eşitliğini sağlayan başka fonksiyonlar yoktur: böyle bir eşitlik varsa $g_i = f_i$'dir. f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarına V'nin E_1, E_2, E_3 çatı alanına göre **koordinat fonksiyonları** (coordinate functions) denir.*

- *$V = \sum_i f_i E_i$ ve $W = \sum_i g_i E_i$ ise*

$$V \cdot W = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3, \qquad \| V \| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

  olur.

İspat.
Açılım. *Bir $\mathbf{p}$ noktası alalım. $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p}), T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$ uzayında bir çatıdır ve $V(\mathbf{p})$ bu uzayın bir vektörüdür. Ortonormal açılım teoremine göre*

$$V(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \big(V(\mathbf{p}) \cdot E_i(\mathbf{p}) \big)\, E_i(\mathbf{p}).$$

Alan iç çarpımının tanımıyla $V(\mathbf{p}) \cdot E_i(\mathbf{p}) = f_i(\mathbf{p})$'dir; fonksiyonla çarpım ve toplamın noktasal tanımıyla da sağ yan, $\sum_i f_i E_i$ alanının $\mathbf{p}$'deki değeridir. Eşitlik her $\mathbf{p}$'de geçerli olduğundan $V = \sum_i f_i E_i$'dir.
Türevlenebilirlik. *$f_i = V \cdot E_i$, iki vektör alanının iç çarpımıdır; Lemma 14.1'ne göre türevlenebilirdir.*
Teklik. *$V = \sum_i g_i E_i$ olsun. Her iki yanın E_j ile iç çarpımını alalım. Lemma 14.2 ile*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$V \cdot E_j = \sum_{i=1}^{3} g_i\,(E_i \cdot E_j) = \sum_{i=1}^{3} g_i\,\delta_{ij} = g_j$$

bulunur; sol yan f_j'dir. Dolayısıyla $g_j = f_j$.
İç çarpım formülü. *Yine Lemma 14.2 ile çarpımı açarız:*

$$V \cdot W = \Big(\sum_i f_i E_i\Big) \cdot \Big(\sum_j g_j E_j\Big) = \sum_{i,j} f_i g_j\,(E_i \cdot E_j) = \sum_{i,j} f_i g_j\,\delta_{ij} = \sum_i f_i g_i.$$

Dokuz terimden yalnızca $i = j$ olan üçü kalmıştır. Norm için $W = V$ alınır: $\| V \| = (V \cdot V)^{1/2} = (\sum_i f_i^2)^{1/2}$.
■

Yani bir vektör alanının bir çatı alanına göre katsayılarını bulmak için alanı çatının her üyesiyle iç çarpmak yeter, ve bir kez katsayılar bulununca iç çarpımlar sanki doğal çatıdaymışız gibi hesaplanır. Öklid koordinat fonksiyonları bu lemmanın $E_i = U_i$ özel hâlidir: $v_i = V \cdot U_i$.

⚠ Koordinat fonksiyonları çatıya bağlıdır

Aynı vektör alanının her çatı alanına göre başka koordinat fonksiyonları vardır. Örneğin U_3'ün doğal çatıya göre koordinat fonksiyonları sabit $(0,0,1)$'dir; silindirik çatıya göre de $(0,0,1)$'dir, çünkü $E_3 = U_3$; ama küresel çatıya göre, az sonra göreceğimiz gibi, $(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$'dir. "$V$'nin koordinat fonksiyonları" derken hangi çatı alanından söz ettiğimizi her zaman belirtmeliyiz; belirtmezsek doğal çatı anlaşılır.

Örnek 14.15 (Düşey Alanın Küresel Çatıya Göre Açılımı). U_3 alanını küresel çatı alanı F_1, F_2, F_3 cinsinden yazalım.

Çözüm.
Lemma 14.3'e göre katsayılar $U_3 \cdot F_i$ iç çarpımlarıdır. F_i'lerin açık formüllerinde U_3 katsayılarını okuruz:

$$U_3 \cdot F_1 = \sin\varphi, \qquad U_3 \cdot F_2 = 0, \qquad U_3 \cdot F_3 = \cos\varphi.$$

Dolayısıyla

$$U_3 = \sin\varphi\, F_1 + \cos\varphi\, F_3.$$

Bu, F_1 ve F_3'ün E_1, E_3 cinsinden tanımını tersine çevirmekle de bulunabilirdi: $F_1 = \cos\varphi\, E_1 + \sin\varphi\, E_3$ ve $F_3 = -\sin\varphi\, E_1 + \cos\varphi\, E_3$ eşitliklerinden ilkini $\sin\varphi$, ikincisini $\cos\varphi$ ile çarpıp toplarsak E_1 terimleri yok olur ve

$$\sin\varphi\, F_1 + \cos\varphi\, F_3 = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, E_3 = U_3$$

kalır. Lemmanın norm formülü de tutarlıdır: $\sin^2\varphi + 0 + \cos^2\varphi = 1 = \| U_3 \|^2$.
Sağlama: $\mathbf{p} = (3,0,4)$ noktasında $\sin\varphi = 4/5$, $\cos\varphi = 3/5$ ve Örnek 14.12'deki tabloya göre $F_1(\mathbf{p})$, $F_3(\mathbf{p})$'nin vektör kısımları $(3/5, 0, 4/5)$, $(-4/5, 0, 3/5)$'tir:

$$\frac{4}{5}\Big(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\Big) + \frac{3}{5}\Big(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\Big) = \Big(\frac{12-12}{25}, 0, \frac{16+9}{25}\Big) = (0,0,1).$$

■

Örnek 14.16 (Dönme Alanının Silindirik Çatıya Göre Açılımı). $V = -yU_1 + xU_2$ ve $W = xU_1 + yU_2$ alanlarını silindirik çatı alanı cinsinden yazalım.

Çözüm.
$E_1 = (x/r)U_1 + (y/r)U_2$ ve $E_2 = -(y/r)U_1 + (x/r)U_2$ olduğunu biliyoruz. Katsayılar:

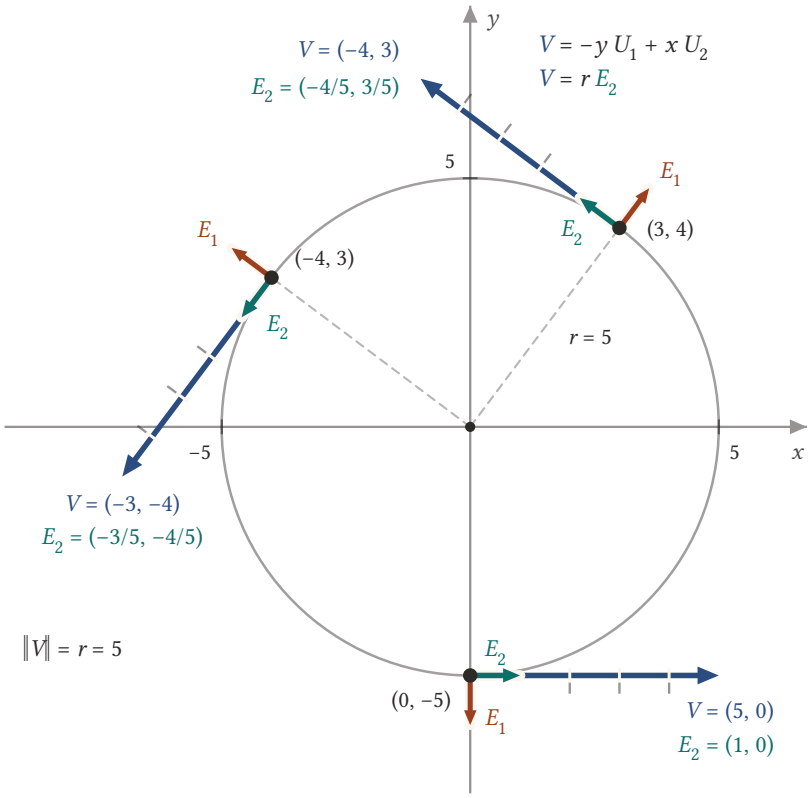
 CC BY-NC-SA 4.0

$$V \cdot E_1 = -y\,\frac{x}{r} + x\,\frac{y}{r} = 0,\; V \cdot E_2 = y\,\frac{y}{r} + x\,\frac{x}{r} = \frac{x^2+y^2}{r} = r,\; V \cdot E_3 = 0,$$
$$W \cdot E_1 = x\,\frac{x}{r} + y\,\frac{y}{r} = r, \quad W \cdot E_2 = -x\,\frac{y}{r} + y\,\frac{x}{r} = 0, \qquad W \cdot E_3 = 0.$$

Dolayısıyla $V = rE_2$ ve $W = rE_1$: doğal çatıya göre iki değişken katsayısı olan bu alanlar, silindirik çatıya göre tek katsayılıdır ve katsayı yalnızca z eksenine uzaklıktır. Bu, alanların geometrisini bir bakışta söyler: V her noktada dönme yönünde, W dışa doğru bakar ve ikisinin de uzunluğu r'dir. Lemmanın iç çarpım formülüyle $V \cdot W = 0 \cdot r + r \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$ ve $\| V \| = \sqrt{0 + r^2 + 0} = r$ bulunur; Örnek 14.1'ndeki $V \cdot W = 0$, $\| V \| = \sqrt{x^2+y^2}$ sonuçlarıyla aynıdır. $r = 5$ çemberi üzerindeki üç noktada denetleyelim:

nokta	V'nin vektör kısmı	E_2'nin vektör kısmı
$(3, 4, 0)$	$(-4, 3, 0)$	$(-4/5, 3/5, 0)$
$(-4, 3, 0)$	$(-3, -4, 0)$	$(-3/5, -4/5, 0)$
$(0, -5, 0)$	$(5, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$

Her satırda V'nin vektör kısmı E_2'ninkinin tam $5 = r$ katıdır.



Şekil 14.4: $z = 0$ düzlemine, yani xy düzlemine üstten bakıyoruz: $r = 5$ çemberi üzerindeki üç noktada $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ dönme alanının oku (mavi) ile silindirik çatının birim vektörleri E_1 (turuncu, yarıçap yönünde) ve E_2 (yeşil, çembere teğet) gerçek uzunluklarıyla çizilmiştir. Mavi ok her noktada yeşil okla aynı doğrultudadır ve tam beş katı uzundur; yanındaki gri çentikler, yeşil okun ucuyla birlikte, onu beş eşit birime böler. Görülen şey $V = r\,E_2$ eşitliğidir: alanın E_1 yönünde hiç bileşeni yoktur ve boyu yalnızca z eksenine uzaklığa, yani $r = 5$'e eşittir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu iki örnek, çatı alanlarını neden istediğimizi göstermeye başlıyor. Kürenin merkezinden dışa bakan bir alan doğal çatıda üç değişken katsayı taşır, küresel çatıda ise tek bir katsayı; z ekseni etrafında dönen bir alan silindirik çatıda rE_2 kadar kısadır. Eğrileri ve yüzeyleri incelerken her seferinde probleme uyarlanmış bir çatı alanı seçecek, hesapları kısaltmanın ötesinde, geometriyi çıplak gözle görebileceğiz.
Frenet formüllerinde asıl güç, T', N', B' türevlerinin ne olduğunu söylemelerinde değil, onları T, N, B'nin kendisi cinsinden yazmalarındaydı. Sıradaki adım tam olarak bu: herhangi bir E_1, E_2, E_3 çatı alanının $\nabla_{\mathbf{v}} E_i$ kovaryant türevlerini, bu bölümün lemmasıyla, $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ cinsinden açmak. Açılımdaki $\nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p})$ katsayıları, $\mathbf{v}$'ye bağlı sayılar olacak ve bir sonraki bölümün konusu, bağlantı formları, bu katsayıların incelenmesinden doğacak.

14.6 Alıştırmalar

Alıştırma 14.1 (İki Alandan Çatı Alanı Kurma). V ve W, her noktada lineer bağımsız olan iki vektör alanı olsun; yani hiçbir $\mathbf{p}$'de $V(\mathbf{p})$ ile $W(\mathbf{p})$'den biri ötekinin bir katı değildir. $\widetilde{W} = W - (W \cdot E_1)\, E_1$ olmak üzere

$$E_1 = \frac{V}{\| V \|}, \qquad E_2 = \frac{\widetilde{W}}{\| \widetilde{W} \|}, \qquad E_3 = E_1 \times E_2$$

alanlarının bir çatı alanı oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Birinci alan. $V(\mathbf{p})$ ile $W(\mathbf{p})$ lineer bağımsız olduğundan $V(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$'dır; sıfır vektörü her vektörün 0 katıdır. Dolayısıyla $\| V \|$ hiç sıfırlanmaz ve Lemma 14.1'ne göre her noktanın bir komşuluğunda, yani her yerde, türevlenebilirdir. $E_1 = (1/\| V \|)\, V$, türevlenebilir bir fonksiyonla çarpılmış bir vektör alanıdır; kendisi de vektör alanıdır ve

$$E_1 \cdot E_1 = \frac{1}{\| V \|^2}\,(V \cdot V) = \frac{\| V \|^2}{\| V \|^2} = 1.$$

İkinci alan. $W \cdot E_1$ türevlenebilir bir fonksiyon, $\widetilde{W} = W - (W \cdot E_1)\, E_1$ bir vektör alanıdır. Lemma 14.2 ile

$$\widetilde{W} \cdot E_1 = W \cdot E_1 - (W \cdot E_1)(E_1 \cdot E_1) = W \cdot E_1 - W \cdot E_1 = 0.$$

$\widetilde{W}$ hiçbir noktada sıfırlanmaz: $\widetilde{W}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ olsaydı $W(\mathbf{p}) = (W \cdot E_1)(\mathbf{p})\, E_1(\mathbf{p})$, yani $W(\mathbf{p})$, $V(\mathbf{p})$'nin $(W \cdot E_1)(\mathbf{p})/\| V(\mathbf{p}) \|$ katı olurdu; bu lineer bağımsızlıkla çelişir. Dolayısıyla $\| \widetilde{W} \|$ her yerde türevlenebilir ve pozitiftir, $E_2 = \widetilde{W}/\| \widetilde{W} \|$ bir vektör alanıdır, $E_2 \cdot E_2 = 1$ ve $E_2 \cdot E_1 = (1/\| \widetilde{W} \|)(\widetilde{W} \cdot E_1) = 0$'dır.
Üçüncü alan. $E_3 = E_1 \times E_2$'nin koordinat fonksiyonları, E_1 ile E_2'nin koordinat fonksiyonlarının çarpımlarının farklarıdır (Tanım 9.9); dolayısıyla türevlenebilirdir ve E_3 bir vektör alanıdır. Her $\mathbf{p}$'de $E_1(\mathbf{p}) \times E_2(\mathbf{p})$, hem $E_1(\mathbf{p})$'ye hem $E_2(\mathbf{p})$'ye diktir ve uzunluğunun karesi

$$\| E_1(\mathbf{p}) \|^2 \| E_2(\mathbf{p}) \|^2 - \big(E_1(\mathbf{p}) \cdot E_2(\mathbf{p}) \big)^2 = 1 \cdot 1 - 0 = 1$$

olur (Lemma 9.5). Yani $E_3 \cdot E_1 = E_3 \cdot E_2 = 0$ ve $E_3 \cdot E_3 = 1$.
Altı koşulun altısı da sağlandı: $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$ ve E_1, E_2, E_3 bir çatı alanıdır. Bu yöntem, bir noktadaki iki lineer bağımsız vektörden bir çatı üreten Gram–Schmidt işleminin noktasal ilkeyle alanlara uygulanmasıdır; işlem her noktada aynı formülle yapıldığından sonuç türevlenebilir kalır.
Somut bir durumda adımları izleyelim: $V = 2U_1 + 2U_2 + U_3$ ve $W = U_1$ sabit alanları her noktada lineer bağımsızdır. $\| V \| = 3$, dolayısıyla E_1'in vektör kısmı $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$; $W \cdot E_1 = 2/3$ ve

$$\widetilde{W} = (1, 0, 0) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(2, 2, 1) = \left(\frac{5}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9} \right),$$

$$\| \widetilde{W} \| = \frac{\sqrt{25 + 16 + 4}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

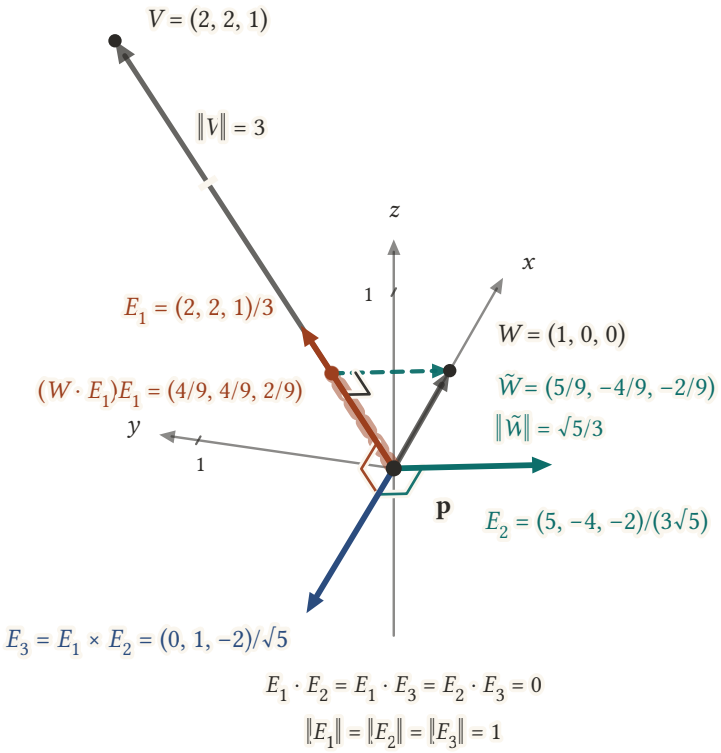
Böylece E_2'nin vektör kısmı $\frac{1}{3\sqrt{5}}(5,-4,-2)$ olur. Vektörel çarpım

$$(2,2,1)\times(5,-4,-2)=(0,9,-18)$$

olduğundan

$$E_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}}\,(0,9,-18)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,(0,1,-2).$$

Denetim: $E_3\cdot E_1=(0+2-2)/(3\sqrt{5})=0$, $E_3\cdot E_2=(0-4+4)/15=0$ ve $\|E_3\|^2=(0+1+4)/5=1$.



Şekil 14.5: Uygulama noktası **p** orijinde alınmıştır; gri oklar orada verilen $V = 2U_1 + 2U_2 + U_3$ ile $W = U_1$ alanlarının vektör kısımlarıdır. Birinci adım $E_1 = V/\|V\|$ (turuncu): aynı doğrultuda, $\|V\| = 3$ olduğu için üçte bir uzunlukta; turuncu ok ucu ile gri okun üzerindeki çentik, V'yi üç eşit birime böler. İkinci adımda W'den E_1 yönündeki bileşen $(W\cdot E_1)E_1 = (4/9, 4/9, 2/9)$ — turuncu okun üzerindeki soluk şerit — çıkarılır; dik ayaktan W'nin ucuna giden kesikli yeşil ok geriye kalan $(5/9, -4/9, -2/9)$ vektörüdür ve dik açı işaretinin söylediği gibi E_1'e diktir; birim uzunluğa getirilince p'deki yeşil ok E_2 olur. Üçüncü adım $E_3 = E_1 \times E_2$ (mavi), öteki iki dik açı işaretinin gösterdiği gibi hem E_1'e hem E_2'ye diktir; üç ok birlikte, altı koşulu da sağlayan bir çatıdır.

■

Alıştırma 14.2 (Birinci Doğal Alanın Silindirik Çatıya Göre Açılımı). U_1 alanını silindirik çatı alanı E_1, E_2, E_3 cinsinden, katsayıları r, ϑ, z fonksiyonlarıyla yazılmış olarak ifade ediniz.

Çözüm.
Lemma 14.3'e göre katsayılar $U_1\cdot E_i$'dir. $E_1=\cos\vartheta\,U_1+\sin\vartheta\,U_2$, $E_2=-\sin\vartheta\,U_1+\cos\vartheta\,U_2$ ve $E_3=U_3$ formüllerinde U_1 katsayılarını okuruz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$U_1 \cdot E_1 = \cos\vartheta, \qquad U_1 \cdot E_2 = -\sin\vartheta, \qquad U_1 \cdot E_3 = 0.$$

Dolayısıyla

$$U_1 = \cos\vartheta\, E_1 - \sin\vartheta\, E_2.$$

Katsayılar yalnızca ϑ'ya bağlıdır; r ve z görünmez. Denetim için sağ yanı açalım:

$$\begin{aligned}&\cos\vartheta\,(\cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2) - \sin\vartheta\,(-\sin\vartheta\, U_1 + \cos\vartheta\, U_2)\\ &\quad = (\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\, U_1 + (\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)\, U_2 = U_1.\end{aligned}$$

Norm formülü de tutar: $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1 = \| U_1 \|^2$. Sayısal bir sağlama: $(3,4,2)$ noktasında $\cos\vartheta = 3/5$, $\sin\vartheta = 4/5$ ve

$$\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right) - \frac{4}{5}\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right) = \left(\frac{9+16}{25},\frac{12-12}{25},0\right) = (1,0,0).$$

■

Alıştırma 14.3 (Birinci Doğal Alanın Küresel Çatıya Göre Açılımı). U_1 alanını küresel çatı alanı F_1, F_2, F_3 cinsinden, katsayıları ρ, ϑ, φ fonksiyonlarıyla yazılmış olarak ifade ediniz.

Çözüm.
Katsayılar $U_1 \cdot F_i$, yani F_i'lerin açık formüllerindeki U_1 katsayılarıdır (Örnek 14.12):

$$U_1 \cdot F_1 = \cos\varphi\cos\vartheta, \qquad U_1 \cdot F_2 = -\sin\vartheta, \qquad U_1 \cdot F_3 = -\sin\varphi\cos\vartheta.$$

Dolayısıyla

$$U_1 = \cos\varphi\cos\vartheta\, F_1 - \sin\vartheta\, F_2 - \sin\varphi\cos\vartheta\, F_3.$$

Katsayılar ρ'ya bağlı değildir. Denetim olarak sağ yanın U_1, U_2, U_3 katsayılarını toplayalım. U_1 katsayısı

$$\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta = \cos^2\vartheta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sin^2\vartheta = 1;$$

U_2 katsayısı

$$\begin{aligned}&\cos^2\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta + \sin^2\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta\\ &\quad = \cos\vartheta\sin\vartheta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1) = 0;\end{aligned}$$

U_3 katsayısı

$$\cos\varphi\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\varphi = 0.$$

Sonuç U_1'dir. Norm formülü de tutar: katsayıların kareleri toplamı, az önce hesapladığımız U_1 katsayısının ta kendisidir ve 1'e eşittir; $\| U_1 \| = 1$, beklendiği gibi.
Sayısal sağlama: $(3,0,4)$ noktasında $\vartheta = 0$, $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$; F_1 ve F_3'ün vektör kısımları $(3/5, 0, 4/5)$ ve $(-4/5, 0, 3/5)$'tir:

$$\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right) - 0 - \frac{4}{5}\left(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9+16}{25},0,\frac{12-12}{25}\right) = (1,0,0).$$

■

Alıştırma 14.4 (Kırk Beş Derece Yukarı Bakan Alanın Silindirik Açılımı). z ekseni dışında tanımlı $V = \cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2 + U_3$ alanını silindirik çatı alanı cinsinden, katsayıları r, ϑ, z ile ifade ediniz.

Çözüm.
Katsayılar $V \cdot E_i$'dir. Vektör kısımlarıyla hesaplarsak

$$V \cdot E_1 = \cos\vartheta\cos\vartheta + \sin\vartheta\sin\vartheta + 1\cdot 0 = 1,$$
$$V \cdot E_2 = -\cos\vartheta\sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta + 0 = 0,$$
$$V \cdot E_3 = 0 + 0 + 1\cdot 1 = 1.$$

Dolayısıyla $V = E_1 + E_3$: katsayılar sabittir, üç koordinat fonksiyonunun hiçbiri görünmez. Aynı sonuç doğrudan da görülür, çünkü $\cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2$ tam olarak E_1'dir ve $U_3 = E_3$'tür.
Geometrik olarak V, her noktada z ekseninden dışa bakan yatay birim vektörle yukarı bakan birim vektörün toplamıdır: yataydan $45°$ yukarı bakar ve uzunluğu, lemmanın formülüyle, $\sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$'dir. Alanın z ekseninde tanımsız oluşu $\cos\vartheta = x/r$ katsayısından gelir.
■

Alıştırma 14.5 (Kırk Beş Derece Yukarı Bakan Alanın Küresel Açılımı). z ekseni dışında tanımlı $V = \cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2 + U_3$ alanını küresel çatı alanı cinsinden, katsayıları ρ, ϑ, φ ile ifade ediniz.

Çözüm.
$V = E_1 + E_3$ olduğunu biliyoruz (Alıştırma 14.4). $F_1 = \cos\varphi\, E_1 + \sin\varphi\, E_3$ ve $F_3 = -\sin\varphi\, E_1 + \cos\varphi\, E_3$ tanımlarını E_1, E_3 için çözelim: ilkini $\cos\varphi$, ikincisini $-\sin\varphi$ ile çarpıp toplarsak E_3 terimleri yok olur ve $\cos\varphi\, F_1 - \sin\varphi\, F_3 = E_1$ kalır; ilkini $\sin\varphi$, ikincisini $\cos\varphi$ ile çarpıp toplarsak $E_3 = \sin\varphi\, F_1 + \cos\varphi\, F_3$ çıkar. Buradan

$$V = E_1 + E_3 = (\cos\varphi + \sin\varphi)\, F_1 + (\cos\varphi - \sin\varphi)\, F_3.$$

Aynı katsayılar iç çarpımla da bulunur:

$$V \cdot F_1 = E_1 \cdot F_1 + E_3 \cdot F_1 = \cos\varphi + \sin\varphi, \qquad V \cdot F_3 = \cos\varphi - \sin\varphi,$$

ve $V \cdot F_2 = 0$, çünkü $F_2 = E_2$ hem E_1'e hem E_3'e diktir.
Norm denetimi:

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 + (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = 2\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2,$$

önceki kutudaki $\| V \| = \sqrt{2}$ ile uyumlu. Sayısal sağlama: $(3,0,4)$ noktasında $V = (1,0,1)$, katsayılar $3/5 + 4/5 = 7/5$ ve $3/5 - 4/5 = -1/5$'tir:

$$\frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{21+4}{25}, 0, \frac{28-3}{25}\right) = (1,0,1).$$

■

Alıştırma 14.6 (Konum Alanının Silindirik Açılımı). $X = xU_1 + yU_2 + zU_3$ alanını silindirik çatı alanı cinsinden, katsayıları r, ϑ, z ile ifade ediniz.

Çözüm.
$E_1 = (x/r)U_1 + (y/r)U_2$, $E_2 = -(y/r)U_1 + (x/r)U_2$, $E_3 = U_3$ ile katsayıları hesaplayalım:

$$X \cdot E_1 = \frac{x^2 + y^2}{r} = \frac{r^2}{r} = r, \qquad X \cdot E_2 = \frac{-xy + yx}{r} = 0, \qquad X \cdot E_3 = z.$$

Dolayısıyla

$$X = rE_1 + zE_3.$$

Yani bir noktanın konum vektörü, o noktada z ekseninden dışa bakan birim vektörün r katı ile yukarı bakan birim vektörün z katının toplamıdır; bu, silindirik koordinatların tanımının vektör diliyle söylenmesidir. Norm formülüyle $\| X \| = \sqrt{r^2 + z^2} = \rho$, beklendiği gibi. $(3,4,2)$ noktasında $5\,(3/5, 4/5, 0) + 2\,(0,0,1) = (3,4,2)$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 14.7 (Konum Alanının Küresel Açılımı). $X = xU_1 + yU_2 + zU_3$ alanını küresel çatı alanı cinsinden, katsayıları ρ, ϑ, φ ile ifade ediniz.

Çözüm.
$x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\sin\varphi$ yazarak katsayıları hesaplayalım:

$$\begin{aligned} X\cdot F_1 &= \rho\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \rho\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho\sin^2\varphi = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho,\\ X\cdot F_2 &= -\rho\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta + \rho\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0,\\ X\cdot F_3 &= -\rho\cos\varphi\sin\varphi\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$X = \rho F_1.$$

Konum alanı küresel çatıda tek terimlidir: her noktada başlangıç noktasından dışa bakan birim vektörün ρ katı. Aynı sonuca Alıştırma 14.6 üzerinden de varılır:

$$X = rE_1 + zE_3 = \rho\cos\varphi\,E_1 + \rho\sin\varphi\,E_3 = \rho\left(\cos\varphi\,E_1 + \sin\varphi\,E_3\right) = \rho F_1.$$

Norm formülüyle $\| X \| = \rho$. $(2,2,1)$ noktasında $3\,(2/3, 2/3, 1/3) = (2,2,1)$ (Örnek 14.14).
■

Alıştırma 14.8 (Birinci Alanı Verilen Çatı Alanını Tamamlama). İlk alanı

$$E_1 = \cos x\,U_1 + \sin x\cos z\,U_2 + \sin x\sin z\,U_3$$

olan bir E_1, E_2, E_3 çatı alanı bulunuz.

Çözüm.
Önce E_1'in gerçekten birim uzunlukta olduğunu görelim:

$$E_1\cdot E_1 = \cos^2 x + \sin^2 x\left(\cos^2 z + \sin^2 z\right) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Katsayılar her yerde türevlenebilir olduğundan E_1, bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir birim vektör alanıdır. Formülün yapısı küresel çatıdaki $F_1 = \cos\varphi\,E_1 + \sin\varphi\,E_3$ ile aynıdır: $A = \cos z\,U_2 + \sin z\,U_3$ dersek $E_1 = \cos x\,U_1 + \sin x\,A$ olur, A birim uzunluktadır ve U_1'e diktir. Küresel çatıda yaptığımız gibi, U_1 ile A'nın gerdiği düzlemde E_1'den 90° ileride olan vektörü ve bu düzleme dik olan vektörü alalım. A'ya dik, U_1'e dik birim alan $-\sin z\,U_2 + \cos z\,U_3$'tür. Böylece

$$E_2 = -\sin x\,U_1 + \cos x\cos z\,U_2 + \cos x\sin z\,U_3, \qquad E_3 = -\sin z\,U_2 + \cos z\,U_3$$

adaylarını elde ederiz. Altı koşulu denetleyelim:

$$\begin{aligned} E_2\cdot E_2 &= \sin^2 x + \cos^2 x\left(\cos^2 z + \sin^2 z\right) = 1,\\ E_3\cdot E_3 &= \sin^2 z + \cos^2 z = 1,\\ E_1\cdot E_2 &= -\cos x\sin x + \sin x\cos x\left(\cos^2 z + \sin^2 z\right) = 0,\\ E_1\cdot E_3 &= \sin x\left(-\cos z\sin z + \sin z\cos z\right) = 0,\\ E_2\cdot E_3 &= \cos x\left(-\cos z\sin z + \sin z\cos z\right) = 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla E_1, E_2, E_3 bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir çatı alanıdır. Vektörel çarpımla da denetleyebiliriz (Tanım 9.9): $E_1 \times E_2$'nin U_1, U_2, U_3 bileşenleri sırasıyla

$$\begin{aligned} &\sin x\cos z\cdot\cos x\sin z - \sin x\sin z\cdot\cos x\cos z = 0,\\ &\sin x\sin z\cdot(-\sin x) - \cos x\cdot\cos x\sin z = -\sin z\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -\sin z,\\ &\cos x\cdot\cos x\cos z - \sin x\cos z\cdot(-\sin x) = \cos z\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \cos z \end{aligned}$$

olduğundan $E_1 \times E_2 = E_3$'tür; çatı sağ el kuralına uyar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yanıt tek değildir. E_1 verilince E_2 ile E_3, E_1'e dik düzlemde herhangi bir türevlenebilir ψ açı fonksiyonuyla döndürülebilir: $\cos\psi\,E_2+\sin\psi\,E_3$ ve $-\sin\psi\,E_2+\cos\psi\,E_3$ alanları da E_1 ile bir çatı alanı oluşturur. Bulduğumuz çözüm $\psi=0$ seçimidir.
Sayısal sağlama: $(\pi/3,0,\pi/6)$ noktasında $\cos x=1/2$, $\sin x=\sqrt{3}/2$, $\cos z=\sqrt{3}/2$, $\sin z=1/2$; vektör kısımları

$$E_1:\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\qquad E_2:\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right),\qquad E_3:\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Uzunlukların kareleri $\frac{4+9+3}{16}=1$, $\frac{12+3+1}{16}=1$, $\frac{1+3}{4}=1$; $E_1\cdot E_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{16}=0$.
■

Alıştırma 14.9 (Küresel Çatı Sağ El Kuralına Uyar). Küresel çatı alanı için $F_1\times F_2=F_3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
F_1 ve F_2'nin vektör kısımları $(\cos\varphi\cos\vartheta,\cos\varphi\sin\vartheta,\sin\varphi)$ ve $(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0)$'dır. Biçimsel determinantı (Tanım 9.9) açalım:

$$F_1\times F_2=\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3\\ \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\end{vmatrix}.$$

U_1,U_2,U_3 katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}&\cos\varphi\sin\vartheta\cdot 0-\sin\varphi\cos\vartheta=-\sin\varphi\cos\vartheta,\\ &\sin\varphi\,(-\sin\vartheta)-\cos\varphi\cos\vartheta\cdot 0=-\sin\varphi\sin\vartheta,\\ &\cos\varphi\cos\vartheta\cos\vartheta-\cos\varphi\sin\vartheta\,(-\sin\vartheta)=\cos\varphi\,(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)=\cos\varphi\end{aligned}$$

olur. Bu üçlü tam olarak F_3'ün vektör kısmıdır; dolayısıyla her noktada $F_1\times F_2=F_3$. Küresel çatı, tıpkı Frenet çatısı ($B=T\times N$) gibi, sağ el kuralına uyar; bundan $F_2\times F_3=F_1$ ve $F_3\times F_1=F_2$ de çıkar. Gerçekten $F_2\times F_3$, hem F_2'ye hem F_3'e dik bir birim vektördür; Lemma 14.3'e göre açılımında F_2 ve F_3 katsayıları sıfırdır, yani $F_2\times F_3=\pm F_1$. İşaret için üçlü skaler çarpımın bir determinant olduğunu ve satırların döngüsel yer değiştirmesinin determinantı değiştirmediğini kullanırız:

$$(F_2\times F_3)\cdot F_1=F_1\cdot F_2\times F_3=F_3\cdot F_1\times F_2=F_3\cdot F_3=1.$$

$F_3\times F_1=F_2$ eşitliği aynı yolla görülür.
Sayısal sağlama: $(3,0,4)$ noktasında $F_1=(3/5,0,4/5)$, $F_2=(0,1,0)$ ve

$$F_1\times F_2=\left(0\cdot 0-\frac{4}{5}\cdot 1,\frac{4}{5}\cdot 0-\frac{3}{5}\cdot 0,\frac{3}{5}\cdot 1-0\cdot 0\right)=\left(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right)=F_3.$$

■

Alıştırma 14.10 (Konum Alanı ile Düşey Alandan Küresel Çatı). z ekseni dışında $X=xU_1+yU_2+zU_3$ ve U_3 alanlarına Alıştırma 14.1'teki yöntem ($V=X$ ve $W=U_3$ ile) uygulanırsa hangi çatı alanı çıkar? Sonucu küresel çatı alanı F_1,F_2,F_3 cinsinden yazınız.

Çözüm.
Önce yöntemin uygulanabilirliği: $X(\mathbf{p})$ ile $U_3(\mathbf{p})$, ancak $\mathbf{p}$'nin konumu $(0,0,1)$'in bir katıysa, yani $\mathbf{p}$ z ekseni üzerindeyse lineer bağımlıdır. z ekseni dışında iki alan her noktada lineer bağımsızdır.
Birinci alan. $\|X\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$, dolayısıyla $E_1=X/\rho$. Alıştırma 14.7'e göre $X=\rho F_1$, yani $E_1=F_1$.
İkinci alan. $U_3\cdot E_1=z/\rho=\sin\varphi$ ve

$$\widetilde{W}=U_3-\sin\varphi\,F_1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 14.15'de $U_3 = \sin\varphi\, F_1 + \cos\varphi\, F_3$ bulmuştuk; dolayısıyla $\widetilde{W} = \cos\varphi\, F_3$. z ekseni dışında $\cos\varphi = r/\rho > 0$ olduğundan $\| \widetilde{W} \| = \cos\varphi$ ve $E_2 = \widetilde{W}/\cos\varphi = F_3$.
Üçüncü alan. $E_3 = E_1 \times E_2 = F_1 \times F_3$. Küresel çatı sağ el kuralına uyar, $F_1 \times F_2 = F_3$ (Alıştırma 14.9); sağ el kuralına uyan bir çatıda $F_3 \times F_1 = F_2$'dir, dolayısıyla $F_1 \times F_3 = -F_2$. Yani $E_3 = -F_2 = \sin\vartheta\, U_1 - \cos\vartheta\, U_2$.
Sonuç: Gram–Schmidt işlemi, konum alanı ile düşey alandan küresel çatı alanını, üyeleri $F_1, F_3, -F_2$ sırasına dizilmiş olarak, üretir. Bu doğaldır: "dışa" yönü konum alanıyla, "kuzey" yönü düşey alanın dışa yöne dik bileşeniyle belirlenir; geriye kalan "doğu" yönü de sağ el kuralıyla, işaretiyle birlikte, sabitlenir.
Sayısal sağlama: $(3,0,4)$ noktasında $E_1 = (3/5, 0, 4/5)$, $U_3 \cdot E_1 = 4/5$,

$$\widetilde{W} = (0,0,1) - \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{12}{25}, 0, \frac{9}{25}\right), \qquad \| \widetilde{W} \| = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \cos\varphi,$$

$E_2 = (-4/5, 0, 3/5) = F_3(\mathbf{p})$ ve

$$E_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = (0,-1,0) = -F_2(\mathbf{p}).$$

■

Alıştırma 14.11 (Bir Çembere Uzaklık ve Çember Etrafındaki Açı). $a > 0$ sabit olsun ve C, xy düzleminde merkezi başlangıç noktası, yarıçapı a olan çember olsun. z ekseni ve C dışındaki noktalarda, r ve ϑ silindirik koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$s = \sqrt{(r-a)^2 + z^2}, \qquad \cos\psi = \frac{r-a}{s}, \qquad \sin\psi = \frac{z}{s}$$

olsun. s ve ψ'nin geometrik anlamını bulunuz.

Çözüm.
$\mathbf{p} = (x,y,z)$, z ekseni dışında bir nokta ve (r,ϑ,z) onun silindirik koordinatları olsun. C üzerindeki noktalar $\mathbf{q}_t = (a\cos t, a\sin t, 0)$ biçimindedir; $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ yazılınca

$$\begin{aligned} \| \mathbf{p} - \mathbf{q}_t \|^2 &= (r\cos\vartheta - a\cos t)^2 + (r\sin\vartheta - a\sin t)^2 + z^2 \\ &= r^2 + a^2 - 2ar\,(\cos\vartheta\cos t + \sin\vartheta\sin t) + z^2 \\ &= r^2 + a^2 - 2ar\cos(t-\vartheta) + z^2 \end{aligned}$$

olur. $ar > 0$ olduğundan bu ifade $\cos(t-\vartheta) = 1$, yani $t = \vartheta$ iken en küçüktür ve en küçük değeri

$$r^2 + a^2 - 2ar + z^2 = (r-a)^2 + z^2 = s^2$$

olur. Yani s, $\mathbf{p}$'nin C çemberine uzaklığıdır; C'nin $\mathbf{p}$'ye en yakın noktası, $\mathbf{p}$ ile aynı düşey yarım düzlemde duran $\mathbf{q} = (a\cos\vartheta, a\sin\vartheta, 0)$ noktasıdır. s ancak $\mathbf{p}$ C üzerindeyken sıfırlanır; C'nin dışarıda bırakılmasının nedeni budur.
ψ için aynı düşey yarım düzlemde çalışalım. Bu düzlemde yatay konum r ile, düşey konum z ile ölçülür; $\mathbf{q}$ noktası $(r,z) = (a,0)$'da, $\mathbf{p}$ ise (r,z)'dedir. $\mathbf{q}$'dan $\mathbf{p}$'ye giden vektörün bu düzlemdeki bileşenleri $(r-a, z)$, uzunluğu s'dir. Dolayısıyla $\cos\psi = (r-a)/s$ ve $\sin\psi = z/s$ eşitlikleri ψ'nin şu açı olduğunu söyler: $\mathbf{q}$ noktasında, z ekseninden dışa bakan yatay birim vektör $E_1(\mathbf{q})$ ile $\mathbf{q}$'dan $\mathbf{p}$'ye giden doğru parçası arasındaki, yukarı doğru pozitif sayılan açı. Bu, küresel koordinatlardaki yükseklik açısı φ'nin, tepe noktası başlangıç noktasından C'nin en yakın noktasına taşınmış hâlidir; gerçekten $a = 0$ alınırsa $s = \rho$ ve $\psi = \varphi$ olur.
Sayısal örnek: $a = 1$ ve $\mathbf{p} = (3,4,3)$ için $r = 5$, $\cos\vartheta = 3/5$, $\sin\vartheta = 4/5$; en yakın nokta $\mathbf{q} = (3/5, 4/5, 0)$ ve

$$\| \mathbf{p} - \mathbf{q} \|^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 3^2 = \frac{144+256}{25} + 9 = 16 + 9 = 25,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yani $s=5$; formül de $s=\sqrt{(5-1)^2+3^2}=5$ verir. $\cos\psi=4/5$, $\sin\psi=3/5$, yani $\psi\approx 36{,}87°$.
■

Alıştırma 14.12 (Bir Çember Etrafındaki Toroidal Çatı Alanı). $a>0$ sabit, C yine xy düzleminde merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı a olan çember olsun; s ile ψ Alıştırma 14.11′daki gibi tanımlansın: $s=\sqrt{(r-a)^2+z^2}$, $\cos\psi=(r-a)/s$, $\sin\psi=z/s$. z ekseni ve C dışındaki noktalarda, E_1,E_2,E_3 silindirik çatı alanı olmak üzere

$$T_1=\cos\psi\,E_1+\sin\psi\,E_3,\qquad T_2=E_2,\qquad T_3=-\sin\psi\,E_1+\cos\psi\,E_3$$

olsun. T_1,T_2,T_3'ün bir çatı alanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Türevlenebilirlik. r, z ekseni dışında türevlenebilir olduğundan $(r-a)^2+z^2$ orada türevlenebilir bir fonksiyondur; Alıştırma 14.11′ya göre bu fonksiyon s^2'dir ve C dışında pozitiftir, dolayısıyla karekökü s de türevlenebilirdir. Böylece $\cos\psi=(r-a)/s$, $\sin\psi=z/s$ ve T_i'lerin bütün katsayıları belirtilen kümede türevlenebilirdir; T_1,T_2,T_3 vektör alanlarıdır.
Ortonormallik. Önce

$$\cos^2\psi+\sin^2\psi=\frac{(r-a)^2+z^2}{s^2}=1$$

olduğuna dikkat edelim. Silindirik çatının ortonormalliğiyle, küresel çatıdaki hesabın aynısı:

$$\begin{aligned}
T_1\cdot T_1&=\cos^2\psi\,(E_1\cdot E_1)+2\cos\psi\sin\psi\,(E_1\cdot E_3)+\sin^2\psi\,(E_3\cdot E_3)=1,\\
T_3\cdot T_3&=\sin^2\psi+\cos^2\psi=1,\\
T_1\cdot T_3&=-\cos\psi\sin\psi+\sin\psi\cos\psi=0,
\end{aligned}$$

ve $T_2=E_2$ birim olup E_1 ile E_3'e dik olduğundan $T_2\cdot T_1=T_2\cdot T_3=0$. Dolayısıyla $T_i\cdot T_j=\delta_{ij}$.
Yorum. T_1, C çemberinden $\mathbf{p}$'ye doğru, yani C'den uzaklaşma yönünde bakan birim vektördür; T_2 çember boyunca dönme yönünde bakar; T_3, $\mathbf{p}$'den geçen ve C'yi çevreleyen küçük düşey çember üzerinde, ψ'nin arttığı yöne bakar. Bu çatı, C etrafındaki torus yüzeylerine (s sabit) uyarlanmıştır: T_1 torusa dik, T_2 ve T_3 ona teğettir. $a=0$ alınırsa $s=\rho$, $\psi=\varphi$ olur ve küresel çatı alanı geri gelir.
Sayısal örnek. $a=1$ ve $\mathbf{p}=(3,4,3)$ olsun. $r=5$, $r-a=4$, $z=3$, dolayısıyla $s=5$, $\cos\psi=4/5$, $\sin\psi=3/5$; silindirik çatının vektör kısımları $(3/5,4/5,0)$, $(-4/5,3/5,0)$, $(0,0,1)$'dir. Böylece

$$T_1:\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)+\frac{3}{5}(0,0,1)=\left(\frac{12}{25},\frac{16}{25},\frac{3}{5}\right),\qquad T_3:\left(-\frac{9}{25},-\frac{12}{25},\frac{4}{5}\right)$$

ve $T_2=(-4/5,3/5,0)$. Denetim: $\|\,T_1\,\|^2=\frac{144+256+225}{625}=1$, $T_1\cdot T_3=\frac{-108-192+300}{625}=0$.
■

Alıştırma 14.13 (Silindirik Çatının Kovaryant Türevleri). E_1,E_2,E_3 silindirik çatı alanı, $\mathbf{p}$ z ekseni dışında bir nokta ve $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$'de bir teğet vektör olsun. Kovaryant türevlerin

$$\nabla_{\mathbf{v}}E_1=\frac{\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p})}{r(\mathbf{p})}\,E_2(\mathbf{p}),\qquad \nabla_{\mathbf{v}}E_2=-\frac{\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p})}{r(\mathbf{p})}\,E_1(\mathbf{p}),\qquad \nabla_{\mathbf{v}}E_3=\mathbf{0}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Lemma 13.1′ne göre bir vektör alanının kovaryant türevi, Öklid koordinat fonksiyonlarının $\mathbf{v}$'ye göre türevleri alınarak bulunur: $W=\sum_i w_iU_i$ ise $\nabla_{\mathbf{v}}W=\sum_i \mathbf{v}[w_i]\,U_i(\mathbf{p})$. E_1'in koordinat fonksiyonları x/r, y/r, 0'dır; $r=\sqrt{x^2+y^2}$ için $\partial r/\partial x=x/r$ ve $\partial r/\partial y=y/r$ olduğundan kısmi türevler

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{xy}{r^3},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r}\right) = -\frac{xy}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{x^2}{r^3}$$

olur; z'ye göre türevler sıfırdır. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ için Lemma 3.1 ile

$$\left[\frac{x}{r}\right] = \frac{v_1 y^2 - v_2 xy}{r^3} = -\frac{y\,(-v_1 y + v_2 x)}{r^3},$$
$$\left[\frac{y}{r}\right] = \frac{-v_1 xy + v_2 x^2}{r^3} = \frac{x\,(-v_1 y + v_2 x)}{r^3}$$

bulunur (bütün fonksiyonlar $\mathbf{p}$'de değerlendirilmiştir). Dolayısıyla

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_1 = \frac{-v_1 y + v_2 x}{r^3}\left(-y\,U_1(\mathbf{p}) + x\,U_2(\mathbf{p})\right) = \frac{-v_1 y + v_2 x}{r^2}\,E_2(\mathbf{p}),$$

çünkü $-yU_1 + xU_2 = rE_2$'dir. Öte yandan $E_2(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $(-y/r, x/r, 0)$ olduğundan $\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p}) = (-v_1 y + v_2 x)/r$'dir ve

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_1 = \frac{\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p})}{r}\,E_2(\mathbf{p}).$$

E_2 için koordinat fonksiyonları $-y/r$, x/r, 0'dır. Yukarıdaki kısmi türevlerle

$$\left[\frac{y}{r}\right] = \frac{v_1 xy - v_2 x^2}{r^3} = -\frac{x\,(-v_1 y + v_2 x)}{r^3}, \qquad \left[\frac{x}{r}\right] = -\frac{y\,(-v_1 y + v_2 x)}{r^3},$$

dolayısıyla

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_2 = -\frac{-v_1 y + v_2 x}{r^3}\left(x\,U_1(\mathbf{p}) + y\,U_2(\mathbf{p})\right) = -\frac{\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p})}{r}\,E_1(\mathbf{p}),$$

çünkü $xU_1 + yU_2 = rE_1$'dir. $E_3 = U_3$'ün koordinat fonksiyonları sabit olduğundan türevleri sıfırdır ve $\nabla_{\mathbf{v}} E_3 = \mathbf{0}$.
Sonuç, Frenet formüllerine benzer bir tablo verir: E_1'in türevi yalnızca E_2 yönündedir, E_2'nin türevi yalnızca E_1 yönündedir ve katsayılar birbirinin ters işaretlisidir; E_3 hiç değişmez. Katsayı $(\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p}))/r$, $\mathbf{v}$'nin dönme yönündeki bileşeninin r'ye bölümüdür: $\mathbf{v}$ yönünde küçük bir adım atınca çatının z ekseni etrafında ne kadar döndüğünü ölçer. Yalnızca r yönünde ya da yalnızca z yönünde ilerlerken ($\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p}) = 0$) çatı hiç dönmez.
■

Alıştırma 14.14 (Silindirik Çatının Kovaryant Türevlerinin Sayısal Denetimi). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı, $\mathbf{p} = (3, 4, 2)$ ve $\mathbf{v} = (1, 2, 5)_{\mathbf{p}}$ olsun. $\nabla_{\mathbf{v}} E_1$ ve $\nabla_{\mathbf{v}} E_2$ kovaryant türevlerini hem Alıştırma 14.13'daki

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_1 = \frac{\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p})}{r(\mathbf{p})}\,E_2(\mathbf{p}), \qquad \nabla_{\mathbf{v}} E_2 = -\frac{\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p})}{r(\mathbf{p})}\,E_1(\mathbf{p})$$

formülleriyle hem de Öklid koordinat fonksiyonlarının yönlü türevleriyle doğrudan hesaplayıp iki sonucun aynı olduğunu görünüz.

Çözüm.
E_1'in Öklid koordinat fonksiyonları x/r, y/r, 0; E_2'ninkiler $-y/r$, x/r, 0'dır ve Lemma 13.1'ne göre kovaryant türev, bu fonksiyonların $\mathbf{v}$'ye göre yönlü türevleri alınarak bulunur; bu türevlerin açık biçimini Alıştırma 14.13'da hesaplamıştık. $\mathbf{p}$'de $r = 5$, $E_2(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $(-4/5, 3/5, 0)$ ve $\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p}) = (-4 + 6)/5 = 2/5$. Formüle göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_1 = \frac{2/5}{5}\, E_2(\mathbf{p}) = \frac{2}{25}\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)_{\mathbf{p}} = \left(-\frac{8}{125}, \frac{6}{125}, 0\right)_{\mathbf{p}}.$$

Doğrudan hesap:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x}{r}\right] &= \frac{v_1 y^2 - v_2 xy}{r^3} = \frac{16-24}{125} = -\frac{8}{125}, \\
\left[\frac{y}{r}\right] &= \frac{-v_1 xy + v_2 x^2}{r^3} = \frac{-12+18}{125} = \frac{6}{125};
\end{aligned}$$

iki sonuç aynıdır. Benzer biçimde formül

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_2 = -\frac{2}{25}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)_{\mathbf{p}} = \left(-\frac{6}{125}, -\frac{8}{125}, 0\right)_{\mathbf{p}}$$

verir; doğrudan hesapla $\mathbf{v}[-y/r] = (12-18)/125$, yani $-6/125$, ve $\mathbf{v}[x/r] = -8/125$ bulunur.
■

Bu bölümde uzayın her noktasına bir çatı yerleştiren çatı alanlarını tanımladık, silindirik ve küresel koordinatlardan doğan iki temel örneği kurduk ve her vektör alanının böyle bir çatıya göre iç çarpımla bulunan koordinat fonksiyonlarıyla açıldığını gördük; sıradaki konu, bir çatı alanının kovaryant türevlerini çatının kendisi cinsinden yazan katsayıların, yani bağlantı formlarının incelenmesidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Bağlantı Formları

Önceki bölümde (Çatı Alanları) uzayın her noktasına bir çatı yerleştiren çatı alanlarını tanımladık ve iki önemli örneği, silindirik ve küresel çatı alanlarını kurduk. O bölümün son alıştırmalarında silindirik çatının kovaryant türevlerini hesaplamış ve dikkat çekici bir tabloyla karşılaşmıştık: $\nabla_{\mathbf{v}} E_1$ yalnızca E_2 yönündeydi, $\nabla_{\mathbf{v}} E_2$ yalnızca E_1 yönündeydi, iki katsayı birbirinin ters işaretlisiydi ve E_3 hiç değişmiyordu. Bu tablo Frenet formüllerine çok benziyordu. Bu bölümde benzerliğin tesadüf olmadığını, her çatı alanında karşımıza çıkan bir yapının parçası olduğunu göreceğiz.

Frenet formüllerinin gücü, T', N', B' türevlerinin ne olduğunu söylemelerinden değil, bu türevleri T, N, B'nin kendisi cinsinden yazmalarından gelir; eğrilik ve burulma zaten bu yazılışın katsayıları olarak ortaya çıkmıştı (Teorem 11.1). Aynı işi keyfi bir E_1, E_2, E_3 çatı alanı için yapacağız: çatının kovaryant türevlerini çatının kendisi cinsinden yazacağız. Eğride katsayılar iki fonksiyondu, çünkü eğrinin üzerinde ilerlenecek tek bir yön vardı. Uzayda ise her noktadan her yöne gidilebilir; katsayılar gidilen yöne bağlı olacak ve bu bağımlılık bizi yeniden 1-formlara götürecek. Bu 1-formlara çatı alanının bağlantı formları diyeceğiz.

Bölümün planı şöyledir. Önce bağlantı formlarını tanımlayıp bunların ters simetrik 1-formlar olduğunu ispatlayacağız. Ardından çatının kovaryant türevlerini bağlantı formlarıyla veren bağlantı denklemlerini çıkarıp Frenet formülleriyle karşılaştıracak ve bir eğri boyunca bu denklemlerin tam olarak Frenet formüllerine dönüştüğünü göreceğiz. Son olarak bağlantı formlarını çatının duruş matrisinden mekanik bir çarpımla hesaplayan formülü ispatlayıp silindirik, küresel ve toroidal çatı alanlarına uygulayacağız.

15.1 Çatının Türevleri Çatının Kendisi Cinsinden

İşe tek bir teğet vektörle başlayalım. E_1, E_2, E_3, $\mathbb{R}^3$ üzerinde (ya da $\mathbb{R}^3$'ün bir açık kümesinde) bir çatı alanı, $\mathbf{v}$ de bir $\mathbf{p}$ noktasında teğet bir vektör olsun. $\nabla_{\mathbf{v}} E_1$, $\nabla_{\mathbf{v}} E_2$, $\nabla_{\mathbf{v}} E_3$ kovaryant türevleri $\mathbf{p}$'de uygulanmış teğet vektörlerdir (Tanım 13.2) ve aynı noktada $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ bir çatıdır. Bir noktadaki her teğet vektör o noktadaki bir çatıya göre ortonormal açılımla yazılabildiğinden (Teorem 9.1)

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{v}} E_1 &= c_{11} E_1(\mathbf{p}) + c_{12} E_2(\mathbf{p}) + c_{13} E_3(\mathbf{p}),\\
\nabla_{\mathbf{v}} E_2 &= c_{21} E_1(\mathbf{p}) + c_{22} E_2(\mathbf{p}) + c_{23} E_3(\mathbf{p}),\\
\nabla_{\mathbf{v}} E_3 &= c_{31} E_1(\mathbf{p}) + c_{32} E_2(\mathbf{p}) + c_{33} E_3(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

olur ve katsayılar iç çarpımla bulunur:

$$c_{ij} = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p}), \qquad 1 \le i, j \le 3.$$

Yani c_{ij}, $\mathbf{p}$ noktası $\mathbf{v}$ yönünde harekete geçtiğinde i-inci okun değişiminin j-inci ok doğrultusundaki bileşenidir. Önce iki çatı alanında bu dokuz sayıyı hesaplayalım.

Örnek 15.1 (Silindirik Çatının Bir Noktadaki Katsayıları). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı, $\mathbf{p} = (3, 4, 2)$ ve $\mathbf{v} = (1, 2, 5)_{\mathbf{p}}$ olsun. Dokuz c_{ij} katsayısını bulalım.

Çözüm.
Alıştırma 14.14'de bu nokta ve bu vektör için

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_1 = \frac{2}{25} E_2(\mathbf{p}), \qquad \nabla_{\mathbf{v}} E_2 = -\frac{2}{25} E_1(\mathbf{p}), \qquad \nabla_{\mathbf{v}} E_3 = \mathbf{0}$$

bulmuştuk. Katsayıları iç çarpımla okuruz. Örneğin $E_2(\mathbf{p})$ birim ve $E_1(\mathbf{p})$ ile $E_3(\mathbf{p})$'ye dik olduğundan

$$c_{12} = \frac{2}{25} E_2(\mathbf{p}) \cdot E_2(\mathbf{p}) = \frac{2}{25}, \qquad c_{11} = \frac{2}{25} E_2(\mathbf{p}) \cdot E_1(\mathbf{p}) = 0$$

olur; öteki yedi katsayı aynı biçimde bulunur. Hepsini bir matrise dizelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2/25 & 0 \\ -2/25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dokuz sayıdan yalnızca ikisi sıfırdan farklıdır ve bu ikisi birbirinin ters işaretlisidir; köşegen tamamen sıfırdır. Bu iki gözlemin, yani köşegenin sıfır ve matrisin ters simetrik olmasının, her çatı alanında ve her yönde geçerli olduğunu birazdan ispatlayacağız.
■

Örnek 15.2 (Yükseklikle Dönen Çatının Katsayıları). $E_1 = \cos z\, U_1 + \sin z\, U_2$, $E_2 = -\sin z\, U_1 + \cos z\, U_2$, $E_3 = U_3$ çatı alanı (Örnek 14.6), bir $\mathbf{p}$ noktası ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ teğet vektörü için c_{ij} katsayılarını bulalım.

Çözüm.
Kovaryant türevleri koordinat formülüyle (Lemma 13.1) hesaplarız. E_1'in koordinat fonksiyonları $\cos z$, $\sin z$ ve 0'dır; yalnızca z'ye bağlı olduklarından Lemma 3.1 ile

$$\mathbf{v}[\cos z] = -v_3 \sin z, \qquad \mathbf{v}[\sin z] = v_3 \cos z$$

bulunur; burada z, $\mathbf{p}$'nin üçüncü koordinatıdır. Dolayısıyla

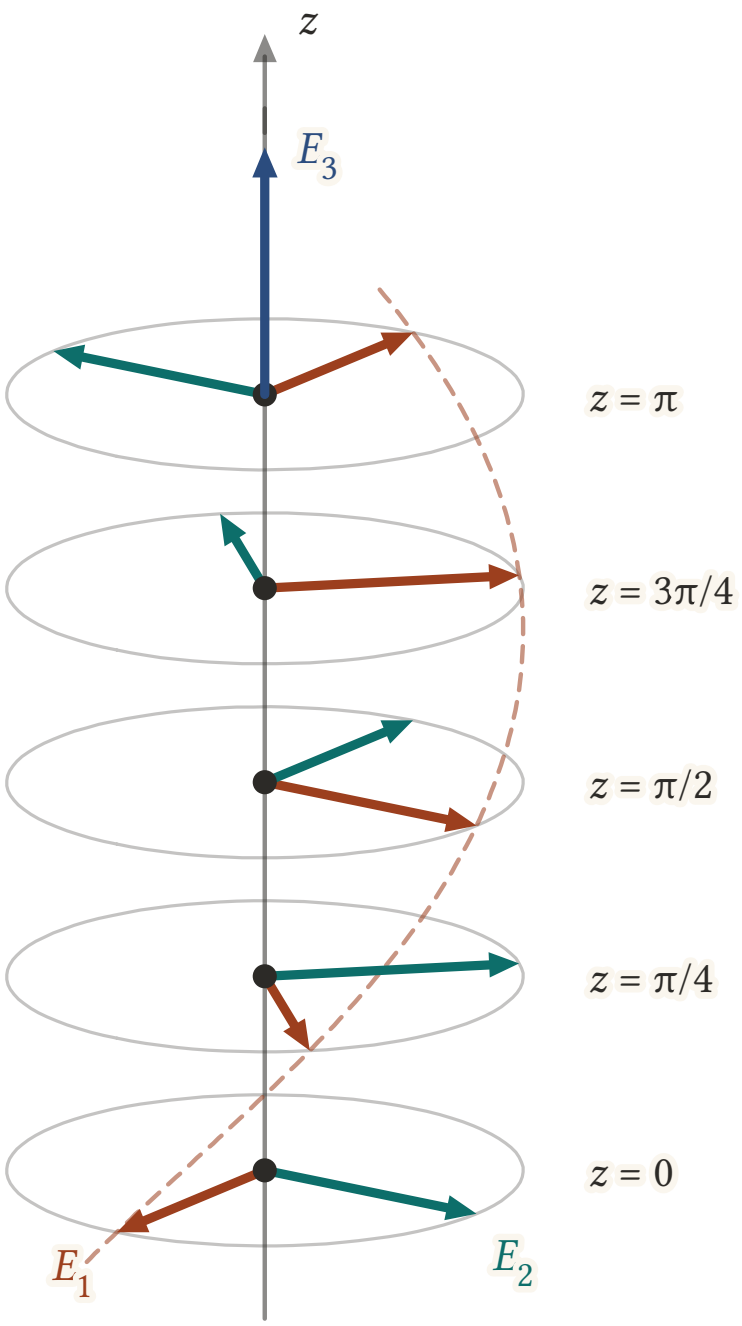
$$\nabla_{\mathbf{v}} E_1 = v_3 \left(-\sin z\, U_1(\mathbf{p}) + \cos z\, U_2(\mathbf{p}) \right) = v_3\, E_2(\mathbf{p}).$$

Aynı biçimde E_2'nin koordinat fonksiyonları $-\sin z$, $\cos z$, 0 olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_2 = v_3 \left(-\cos z\, U_1(\mathbf{p}) - \sin z\, U_2(\mathbf{p}) \right) = -v_3\, E_1(\mathbf{p})$$

olur ve $E_3 = U_3$'ün koordinatları sabit olduğundan $\nabla_{\mathbf{v}} E_3 = \mathbf{0}$'dır. Katsayılar $c_{12} = v_3$, $c_{21} = -v_3$; öteki yedisi sıfırdır.
Sonuç $\mathbf{v}$'nin yalnızca üçüncü bileşenine bağlıdır ve $\mathbf{p}$'ye hiç bağlı değildir. Yatay bir düzlemde kalarak ilerlersek ($v_3 = 0$) çatı hiç değişmez; bu, çatının her yatay düzlemde sabit olmasının türev dilindeki karşılığıdır. Yukarı doğru birim hızla çıkarsak ($\mathbf{v} = U_3(\mathbf{p})$) $\nabla_{\mathbf{v}} E_1 = E_2(\mathbf{p})$ olur: E_1, E_2'ye doğru birim hızla döner. Bu da z yüksekliğindeki çatının doğal çatıya göre tam z radyan dönmüş olmasıyla uyumludur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.1: Yükseklikle dönen çatı alanı z ekseninin beş noktasında: $z = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. Her yatay düzlemde çatı sabittir; yukarı çıktıkça E_1 (turuncu) ile E_2 (yeşil) birlikte, yükseklik kadar açıyla döner: her $\pi/4$ yükselişte turun sekizde biri. E_1'in uçları kesikli helis üzerindedir. U_3 yönünde birim hızla çıkarken E_1, E_2'ye doğru birim hızla döner: $\omega_{12}(U_3) = dz(U_3) = 1$. E_3 (mavi) her yerde aynıdır.

■

Her iki örnekte de c_{ij} katsayıları $\mathbf{v}$'ye bağlıydı: aynı noktada başka bir yön seçseydik başka sayılar elde ederdik. Bu bağımlılığı gösterimde açıkça taşımak için c_{ij} yerine $\omega_{ij}(\mathbf{v})$ yazalım. Böylece her i, j çifti

 CC BY-NC-SA 4.0

için ω_{ij}, bütün teğet vektörler üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir fonksiyon olur. Bu türden fonksiyonları tanıyoruz: 1-formlar da tam olarak teğet vektörlere sayı karşılık getiren fonksiyonlardı (Tanım 5.1).

Tanım 15.1 (Bağlantı Formları). E_1, E_2, E_3 bir çatı alanı olsun. $1 \le i, j \le 3$ için, bir $\mathbf{p}$ noktasındaki her $\mathbf{v}$ teğet vektörüne

$$\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p})$$

sayısını karşılık getiren ω_{ij} fonksiyonlarına E_1, E_2, E_3 çatı alanının **bağlantı formları** (connection forms) denir.

Yani $\omega_{ij}(\mathbf{v})$, $\mathbf{p}$ noktası $\mathbf{v}$ yönünde harekete geçtiği ilk anda E_i okunun değişiminin E_j doğrultusundaki bileşenidir. "Form" adı bir öngörüdür: aşağıdaki lemma bu dokuz fonksiyonun gerçekten 1-form olduğunu ve aralarında sıkı bir bağ bulunduğunu söyler.

Lemma 15.1 (Bağlantı Formları Ters Simetrik 1-Formlardır). *E_1, E_2, E_3 bir çatı alanı ve ω_{ij} onun bağlantı formları olsun. O zaman her ω_{ij} bir 1-formdur ve*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \qquad 1 \le i, j \le 3.$$

İspat.
Her noktada lineerlik. *Tanım gereği ω_{ij}, teğet vektörler üzerinde gerçel değerli bir fonksiyondur; 1-form olması için her noktada lineer olduğunu göstermek yeter (Tanım 5.1). $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ aynı $\mathbf{p}$ noktasında teğet vektörler, a ve b sayılar olsun. Kovaryant türevin teğet vektörde lineerliği (Teorem 13.1, (1)) ve iç çarpımın bilineerliğiyle*

$$\begin{aligned}
\omega_{ij}(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= \nabla_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p}) \\
&= \big(\, a\,\nabla_{\mathbf{v}} E_i + b\,\nabla_{\mathbf{w}} E_i \, \big) \cdot E_j(\mathbf{p}) \\
&= a\,\nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p}) + b\,\nabla_{\mathbf{w}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p}) \\
&= a\,\omega_{ij}(\mathbf{v}) + b\,\omega_{ij}(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Diferansiyellenebilirlik. *"1-form" sözünden diferansiyellenebilir 1-form anlıyoruz (Tanım 5.4): her V vektör alanı için $\omega_{ij}(V)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olmalıdır. Her $\mathbf{p}$ noktasında*

$$\omega_{ij}(V)(\mathbf{p}) = \omega_{ij}\big(\, V(\mathbf{p}) \,\big) = \nabla_{V(\mathbf{p})} E_i \cdot E_j(\mathbf{p}) = (\nabla_V E_i)(\mathbf{p}) \cdot E_j(\mathbf{p})$$

olduğundan $\omega_{ij}(V) = \nabla_V E_i \cdot E_j$ fonksiyon eşitliği geçerlidir. $\nabla_V E_i$ bir vektör alanıdır (Lemma 13.2) ve iki vektör alanının iç çarpımı diferansiyellenebilir bir fonksiyondur (Lemma 14.1).
Ters simetri. *Her $\mathbf{v}$ teğet vektörü için $\omega_{ij}(\mathbf{v}) = -\omega_{ji}(\mathbf{v})$ olduğunu göstermeliyiz. Çatı alanının tanımı gereği $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$'dir (Tanım 14.2). δ_{ij} sabit bir fonksiyon (0 ya da 1) olduğundan her yönlü türevi sıfırdır. Kovaryant türevin iç çarpım için Leibniz kuralı (Teorem 13.1, (4)) bu yüzden*

$$0 = \mathbf{v}[E_i \cdot E_j] = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p}) + E_i(\mathbf{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} E_j$$

verir. İlk terim tanım gereği $\omega_{ij}(\mathbf{v})$'dir. İç çarpım simetrik olduğundan son terim $\nabla_{\mathbf{v}} E_j \cdot E_i(\mathbf{p})$, yani $\omega_{ji}(\mathbf{v})$'dir. Böylece $0 = \omega_{ij}(\mathbf{v}) + \omega_{ji}(\mathbf{v})$ bulunur.
■

Ters simetrinin $i = j$ durumu $\omega_{ii} = -\omega_{ii}$ der; dolayısıyla

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0.$$

Yani her $\mathbf{v}$ için $\nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_i(\mathbf{p}) = 0$: birim uzunluktaki bir okun değişimi kendisine diktir, ok uzayıp kısalamaz, yalnızca döner (Alıştırma 13.9). Bu koşul dokuz 1-formu özünde üçe indirir: ω_{12}, ω_{13} ve ω_{23} bilinince ötekiler $\omega_{21} = -\omega_{12}$, $\omega_{31} = -\omega_{13}$, $\omega_{32} = -\omega_{23}$ ve sıfır köşegenle belirlenir.
Bağlantı formlarının geometrik anlamı da tanımdan okunur. $\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p})$ sayısı, **$\mathbf{p}$ noktası $\mathbf{v}$ yönünde hareket ederken E_i'nin E_j'ye doğru dönmeye başlama hızıdır.** Ters simetri bu dönmenin karşılıklı olduğunu söyler: E_i, E_j'ye doğru hangi hızla dönüyorsa E_j de aynı hızla E_i'den uzaklaşır; birbirine dik iki ok, bir kâğıt üzerindeki bir dik açı gibi, birlikte döner. ω_{ij} 1-formu bu bilgiyi tek bir yön

 CC BY-NC-SA 4.0

için değil, $\mathbb{R}^3$'e teğet bütün vektörler için bir arada taşır. Bu anlamı en açık biçimde, çatının tek bir açıyla döndüğü durumda görürüz.

Örnek 15.3 (Tek Bir Açıyla Dönen Çatı Alanları). ψ, $\mathbb{R}^3$'ün bir açık kümesinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun ve bu kümede

$$E_1 = \cos\psi\, U_1 + \sin\psi\, U_2, \qquad E_2 = -\sin\psi\, U_1 + \cos\psi\, U_2, \qquad E_3 = U_3$$

çatı alanını alalım. Bağlantı formlarının $\omega_{12} = d\psi$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Bu üçlü her $\mathbf{p}$ noktasında doğal çatının z ekseni etrafında $\psi(\mathbf{p})$ açısıyla döndürülmüşüdür; bir çatı alanı olduğu, Örnek 14.6′deki hesapta z yerine ψ yazılarak görülür.
Bir $\mathbf{p}$ noktasında bir $\mathbf{v}$ teğet vektörü alalım. Yönlü türev diferansiyelin değeridir, $\mathbf{v}[f] = df(\mathbf{v})$ (Tanım 5.5), ve bileşke kuralı (Lemma 5.3) $d(\cos\psi) = -\sin\psi\, d\psi$ ile $d(\sin\psi) = \cos\psi\, d\psi$ verir. Koordinat formülüyle (Lemma 13.1), ψ'yi ve U_i'leri $\mathbf{p}$'de değerlendirerek,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{v}} E_1 &= d\psi(\mathbf{v})\,\big(-\sin\psi\, U_1 + \cos\psi\, U_2\,\big) = d\psi(\mathbf{v})\, E_2(\mathbf{p}),\\ \nabla_{\mathbf{v}} E_2 &= d\psi(\mathbf{v})\,\big(-\cos\psi\, U_1 - \sin\psi\, U_2\,\big) = -d\psi(\mathbf{v})\, E_1(\mathbf{p})\end{aligned}$$

bulunur ve $\nabla_{\mathbf{v}} E_3 = \mathbf{0}$'dır. Bağlantı formlarının tanımıyla

$$\begin{aligned}\omega_{12}(\mathbf{v}) &= d\psi(\mathbf{v})\, E_2(\mathbf{p}) \cdot E_2(\mathbf{p}) = d\psi(\mathbf{v}),\\ \omega_{13}(\mathbf{v}) &= d\psi(\mathbf{v})\, E_2(\mathbf{p}) \cdot E_3(\mathbf{p}) = 0,\\ \omega_{23}(\mathbf{v}) &= -d\psi(\mathbf{v})\, E_1(\mathbf{p}) \cdot E_3(\mathbf{p}) = 0.\end{aligned}$$

Bu eşitlikler her teğet vektör için doğru olduğundan $\omega_{12} = d\psi$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$'dır.
Yani çatı tek bir açıyla dönüyorsa bağlantı formu o açının diferansiyelidir: $\mathbf{v}$ yönünde E_1'in E_2'ye doğru dönme hızı, dönme açısının $\mathbf{v}$ yönündeki değişim hızıdır. Düzlemde durum hep böyledir: düzlemdeki bir çatı alanı yalnızca iki oktan oluşur, (yerel olarak) tek bir açı fonksiyonuyla yazılır ve tek bağlantı formu o açının diferansiyelidir. Uzayda ise çatı üç ayrı koordinat düzleminde dönebildiği için üç bağlantı formu gerekir; bu örnekte yalnızca E_1E_2 düzlemindeki dönme vardır ve üçüncü ok $E_3 = U_3$ işe hiç karışmaz.
İki özel durum tanıdıktır. $\psi = z$ alınırsa yükseklikle dönen çatı çıkar ve $\omega_{12} = dz$ olur; Örnek 15.2′daki $c_{12} = v_3$ sayısı tam olarak $dz(\mathbf{v})$'dir. $\psi = \vartheta$ alınırsa silindirik çatı alanı çıkar:

$$\omega_{12} = d\vartheta, \qquad \omega_{13} = \omega_{23} = 0.$$

ϑ fonksiyonunun kendisi yalnızca bir yarım düzlemin dışında tanımlıdır (Tanım 14.3); ama diferansiyeli z ekseni dışındaki her yerde anlamlıdır. Gerçekten $x = r\cos\vartheta$ ve $y = r\sin\vartheta$ eşitliklerinin diferansiyelleri

$$dx = \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad dy = \sin\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta$$

olduğundan $-\sin\vartheta\, dx + \cos\vartheta\, dy = r\, d\vartheta$ ve

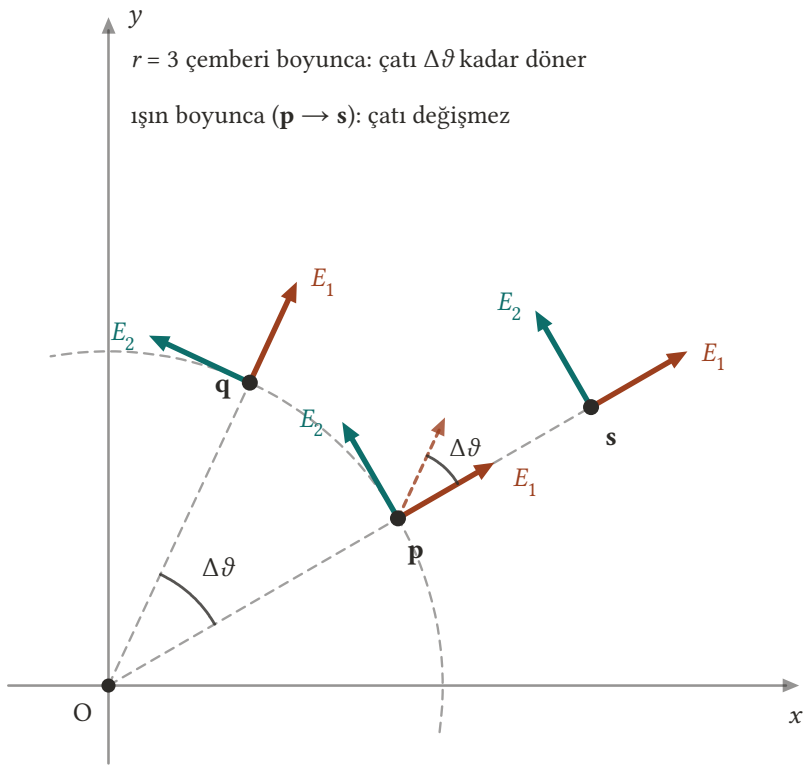
$$d\vartheta = \frac{-\sin\vartheta\, dx + \cos\vartheta\, dy}{r} = \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}$$

bulunur. Sağ taraf hangi yarım düzlemi dışarıda bırakırsak bırakalım aynıdır ve z ekseni dışında her yerde tanımlıdır. Buradan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ için

$$\omega_{12}(\mathbf{v}) = d\vartheta(\mathbf{v}) = \frac{-yv_1 + xv_2}{r^2} = \frac{\mathbf{v} \cdot E_2(\mathbf{p})}{r}$$

olur; bu, Alıştırma 14.13′da bulduğumuz katsayının ta kendisidir. $\mathbf{p} = (3,4,2)$ ve $\mathbf{v} = (1,2,5)$ için $(-4+6)/25 = 2/25$ çıkar, Örnek 15.1 ile aynı.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.2: xy düzlemine üstten bakış: silindirik çatının E_1 (turuncu) ve E_2 (yeşil) okları $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{s}$ noktalarında. $\mathbf{p}$'den $\mathbf{q}$'ya $r = 3$ çemberi üzerinde giderken çatı, noktanın O etrafındaki açısı $\Delta\vartheta$ kadar döner: kesikli turuncu ok $E_1(\mathbf{q})$'nun $\mathbf{p}$'ye taşınmış kopyasıdır ve $E_1(\mathbf{p})$ ile arasındaki açı O'daki açıyla aynıdır. Işın boyunca, $\mathbf{p}$'den $\mathbf{s}$'ye giderken açı ve çatı değişmez. Dönme hızı $\omega_{12}(\mathbf{v}) = d\vartheta(\mathbf{v})$'dir.

■

15.2 Bağlantı Denklemleri

Bağlantı formlarını tanımlarken yaptığımız tek şey, ortonormal açılımın katsayılarına ad vermekti. Bu yüzden aşağıdaki temel sonuç tanımın vektör alanları diliyle yeniden söylenmesinden ibarettir; ama bu bölümün ve bir sonraki bölümün bütün hesapları bu eşitliklere dayanır.

Teorem 15.1 (Bağlantı Denklemleri). *ω_{ij} $(1 \le i, j \le 3)$, bir E_1, E_2, E_3 çatı alanının bağlantı formları olsun. O zaman her V vektör alanı için*

$$\nabla_V E_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(V)\, E_j, \qquad 1 \le i \le 3.$$

*Bu üç eşitliğe E_1, E_2, E_3 çatı alanının **bağlantı denklemleri** (connection equations) denir.*

İspat.
i'yi sabitleyelim. İki taraf da vektör alanıdır: sol taraf E_i'nin V'ye göre kovaryant türevidir (Tanım 13.3), sağ taraf ise $\omega_{ij}(V)$ fonksiyonlarıyla (Tanım 5.3) çarpılmış E_j alanlarının toplamıdır. İki vektör alanı her noktada aynı değeri alıyorlarsa eşittir. Bir $\mathbf{p}$ noktasında sol tarafın değeri $\nabla_{V(\mathbf{p})} E_i$'dir; sağ tarafın değeri ise, alanlar üzerindeki işlemlerin noktasal tanımı gereği,

$$\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(V)(\mathbf{p})\, E_j(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\,\big(\, V(\mathbf{p}) \,\big)\, E_j(\mathbf{p})$$

 CC BY-NC-SA 4.0

vektörüdür. $\nabla_{V(\mathbf{p})}E_i$, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$*'te bir vektördür ve* $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ *bu uzayda bir çatıdır. Ortonormal açılım (Teorem 9.1)*

$$\nabla_{V(\mathbf{p})}E_i = \sum_{j=1}^{3}\Big(\,\nabla_{V(\mathbf{p})}E_i \cdot E_j(\mathbf{p})\,\Big)E_j(\mathbf{p})$$

verir ve parantez içindeki katsayı, bağlantı formunun tanımı gereği tam olarak $\omega_{ij}\ \big(\ V(\mathbf{p})\ \big)$*'dir. İki taraf her noktada eşittir.*
■

Bağlantı formlarını bir matrisin girdileri olarak düşünmek en kullanışlı yoldur. Ters simetri sayesinde bu matris üç 1-formla belirlenir:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

ω, girdileri 1-form olan ters simetrik bir matristir. Açık yazılışta bağlantı denklemleri

$$\begin{aligned} \nabla_V E_1 &= \omega_{12}(V)\,E_2 + \omega_{13}(V)\,E_3, \\ \nabla_V E_2 &= -\omega_{12}(V)\,E_1 + \omega_{23}(V)\,E_3, \\ \nabla_V E_3 &= -\omega_{13}(V)\,E_1 - \omega_{23}(V)\,E_2 \end{aligned}$$

biçimini alır. Bunları Frenet formülleriyle yan yana koyalım:

$$T' = \kappa N, \qquad N' = -\kappa T + \tau B, \qquad B' = -\tau N.$$

Frenet formüllerinin katsayı matrisi ile bağlantı formlarının matrisi aynı kalıptadır:

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

İkisi de ters simetriktir, köşegenleri sıfırdır. Aralarındaki farklar da öğreticidir.
Birinci fark: ω_{13}'ün karşılığı yoktur. Frenet formüllerinde $\omega_{13}(V)\,E_3$ ve $-\omega_{13}(V)\,E_1$ terimlerine karşılık gelen terimler bulunmaz. Bunun nedeni Frenet çatısının eğriye özel bir biçimde uyarlanmış olmasıdır. T (E_1'in yerinde) seçildikten sonra N (E_2'nin yerinde), T' türevi yalnızca N'nin bir katı olacak biçimde seçilmişti; dolayısıyla T''nün B (E_3'ün yerinde) doğrultusunda bileşeni yoktur. Keyfi bir çatı alanında böyle bir seçim yapılmadığı için üç form da sıfırdan farklı olabilir.
İkinci fark: fonksiyon yerine 1-form. Bir eğrinin tek boyutu vardır, $\mathbb{R}^3$'ün üç. Frenet formüllerindeki eğrilik κ ve burulma τ, T, N, B çatısının yalnızca eğri boyunca, yani yalnızca T yönündeki değişim hızını ölçer; bu yüzden birer fonksiyondurlar. Bağlantı denklemlerinin katsayıları ise E_1, E_2, E_3'ün değişimini $\mathbb{R}^3$'teki her yönde ölçebilmelidir. Bu ölçümü her teğet vektör için lineer biçimde yapan nesne tam olarak bir 1-formdur.
Daha derin fark: neyi anlattıkları. Frenet çatısı eğriye uyarlandığı için Frenet formülleri eğrinin kendisi hakkında bilgi verir: eğrilik ve burulma eğrinin şeklini belirler. Yukarıdaki E_1, E_2, E_3 ise tamamen keyfi bir çatı alanıdır; bağlantı denklemleri $\mathbb{R}^3$ hakkında doğrudan bir şey söylemez, yalnızca o çatı alanının "dönme hızlarını" kaydeder. Bu bir zayıflık değil, bir güçtür: $\mathbb{R}^3$'te ortaya çıkan geometrik bir probleme uyarlanmış bir çatı alanı seçebilirsek bağlantı denklemleri o problem hakkında doğrudan bilgi verir. Bu bölümün sonlarında helisler ve daha sonra yüzeyler için yapacağımız tam olarak budur; Frenet formüllerinin de bağlantı denklemlerinden elde edildiğini göreceğiz.

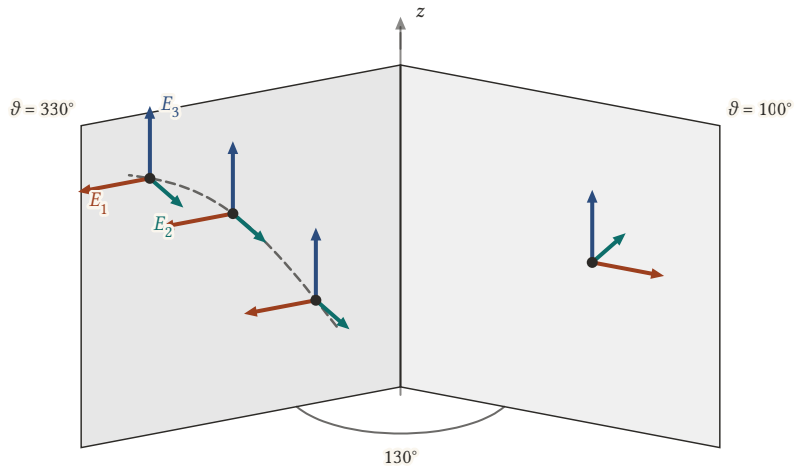
Örnek 15.4 (Silindirik Çatının Bağlantı Denklemleri). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı olsun. Bağlantı denklemlerini yazıp yorumlayalım.

Çözüm.
Örnek 15.3'e göre $\omega_{12} = d\vartheta$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$'dır. $d\vartheta(V)$ fonksiyonunu kısaca $V[\vartheta]$ ile gösterelim; ϑ'nın tanımlı olduğu yerde bu gerçekten ϑ'nın V boyunca türevidir. Bağlantı denklemleri

$$\nabla_V E_1 = V[\vartheta]\, E_2, \qquad \nabla_V E_2 = -V[\vartheta]\, E_1, \qquad \nabla_V E_3 = \mathbf{0}$$

olur. Üçüncü denklem, V keyfi olduğundan, E_3'ün her yönde türevinin sıfır olduğunu söyler; bunu zaten biliyorduk, çünkü $E_3 = U_3$'tür. İlk iki denklem ise E_1 ile E_2'nin V yönündeki değişiminin yalnızca ϑ açısının V yönündeki değişim hızına bağlı olduğunu söyler.

Bir yarım düzlem boyunca. V, her noktada z ekseninden geçen bir düzleme teğet olan bir alan olsun; örneğin $V = E_1$, $V = E_3$ ya da bunların fonksiyon katsayılı herhangi bir toplamı. Böyle bir V boyunca ϑ değişmez: $V[\vartheta] = d\vartheta(V) = (V \cdot E_2)/r = 0$. Bağlantı denklemleri $\nabla_V E_1 = \nabla_V E_2 = \mathbf{0}$ öngörür. Gerçekten z ekseninden geçen $\vartheta = \vartheta_0$ yarım düzleminin her noktasında E_1'in vektör kısmı aynı $(\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0, 0)$, E_2'ninki aynı $(-\sin\vartheta_0, \cos\vartheta_0, 0)$'dır: çatı, bu yarım düzlem üzerinde hareket ettikçe hiç değişmez.



Şekil 15.3: z ekseninden geçen $\vartheta = 330°$ yarım düzlemi içindeki bir yol (kesikli) ve yolun üç noktasında silindirik çatı: E_1 (turuncu), E_2 (yeşil), E_3 (mavi). Yol boyunca ϑ değişmediği için $V[\vartheta] = 0$ ve üç çatı aynıdır: $\nabla_V E_1 = \nabla_V E_2 = 0$. Sağdaki $\vartheta = 100°$ yarım düzlemindeki çatı ise 130° dönmüştür; çatı yalnızca ϑ'ya bağlıdır.

Dönme alanı boyunca. $V = -y\,U_1 + x\,U_2$ dönme alanını alalım; Örnek 14.16'nde $V = rE_2$ bulmuştuk. Buradan

$$V[\vartheta] = d\vartheta(V) = \frac{-y\cdot(-y) + x\cdot x}{x^2+y^2} = 1,$$

dolayısıyla $\nabla_V E_1 = E_2$ ve $\nabla_V E_2 = -E_1$. Doğrudan hesapla denetleyelim. E_1'in koordinat fonksiyonları x/r ve y/r'dir; Alıştırma 14.13'daki kısmi türevlerle

$$\left[\frac{x}{r}\right] = -y\,\frac{y^2}{r^3} + x\left(-\frac{xy}{r^3}\right) = -\frac{y}{r}, \qquad \left[\frac{y}{r}\right] = -y\left(-\frac{xy}{r^3}\right) + x\,\frac{x^2}{r^3} = \frac{x}{r}$$

bulunur; $\nabla_V E_1$'in koordinatları $(-y/r, x/r, 0)$, yani E_2'ninkilerdir. Yorum: V her noktayı z ekseni etrafında birim açısal hızla döndürür, çatı da onunla birlikte aynı açısal hızla döner.

■

Bağlantı denklemlerinin bir eğri boyunca ne söylediğine bakalım. Alıştırma 13.11'da, bir alanın bir eğrinin hız vektörüne göre kovaryant türevinin, alanın o eğriye kısıtlanışının türevi olduğunu görmüştük. Bu gözlem bağlantı denklemlerini bir eğri boyunca Frenet biçimine getirir.

Sonuç 15.1 (Bir Eğri Boyunca Bağlantı Denklemleri). *E_1, E_2, E_3, bağlantı formları ω_{ij} olan bir çatı alanı ve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, çatı alanının tanım kümesinde kalan bir eğri olsun. E_i'nin α'ya kısıtlanışını $(E_i)_\alpha$ ile gösterelim (Tanım 13.1). O zaman her $t \in I$ için*

$$(E_i)'_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\,\big(\,\alpha'(t)\,\big)\,(E_j)_\alpha(t), \qquad 1 \le i \le 3.$$

İspat.
$t \in I$ sabit olsun. Alıştırma 13.11'ya göre $(E_i)'_\alpha(t) = \nabla_{\alpha'(t)} E_i$'dir. $\alpha'(t)$, $\alpha(t)$ noktasında bir teğet vektördür; bu noktadaki $E_1(\alpha(t)), E_2(\alpha(t)), E_3(\alpha(t))$ çatısına göre ortonormal açılım ve bağlantı formlarının tanımı, Teorem 15.1'nin ispatındaki gibi,

$$\nabla_{\alpha'(t)} E_i = \sum_{j=1}^{3} \Big(\nabla_{\alpha'(t)} E_i \cdot E_j(\alpha(t)) \Big) E_j(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\,\big(\,\alpha'(t)\,\big)\, E_j(\alpha(t))$$

verir. Son olarak $E_j(\alpha(t)) = (E_j)_\alpha(t)$'dir.
■

Yani bir eğri boyunca çatı alanı eğri üzerinde üç vektör alanına dönüşür ve bu alanların türevleri, katsayıları $t \mapsto \omega_{ij}(\alpha'(t))$ fonksiyonları olan ters simetrik bir sistemle verilir. Bu tam olarak Frenet formüllerinin biçimidir; tek fark, bir de $\omega_{13}(\alpha')$ katsayısının bulunabilmesidir. Çatı alanı eğri boyunca Frenet çatısıyla çakışıyorsa $\omega_{12}(T) = \kappa, \omega_{13}(T) = 0$ ve $\omega_{23}(T) = \tau$ olur (Alıştırma 15.12). Bunu somut bir eğride görelim.

Örnek 15.5 (Helisin Frenet Çatısını Uzaya Yaymak). $a > 0$, $b \neq 0$ ve $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ olsun;

$$\beta(s) = \big(\, a\cos(s/c), a\sin(s/c), bs/c \,\big)$$

birim hızlı helisini alalım (Örnek 11.5). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı olmak üzere z ekseni dışında

$$H_1 = \frac{a}{c}\,E_2 + \frac{b}{c}\,E_3, \qquad H_2 = -E_1, \qquad H_3 = -\frac{b}{c}\,E_2 + \frac{a}{c}\,E_3$$

olsun. H_1, H_2, H_3'ün bir çatı alanı olduğunu, β boyunca helisin Frenet çatısıyla çakıştığını gösterelim; bağlantı formlarını bulup helisin eğrilik ve burulmasını onlardan okuyalım.

Çözüm.
Çatı alanı. Katsayılar sabittir ve $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$'dir. Silindirik çatının ortonormalliğiyle

$$H_1 \cdot H_1 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1, \qquad H_3 \cdot H_3 = \frac{b^2+a^2}{c^2} = 1,$$
$$H_1 \cdot H_3 = -\frac{ab}{c^2} + \frac{ba}{c^2} = 0;$$

$H_2 = -E_1$ birimdir ve E_2 ile E_3'e dik olduğundan H_1'e ve H_3'e de diktir.
Helis boyunca. $u = s/c$ yazalım. $\beta(s)$ noktasında $r = a$, $\cos\vartheta = \cos u$, $\sin\vartheta = \sin u$ olduğundan E_1 ve E_2'nin vektör kısımları $(\cos u, \sin u, 0)$ ve $(-\sin u, \cos u, 0)$'dır. Buradan

$$H_1(\beta(s)) = \left(-\frac{a}{c}\sin u, \frac{a}{c}\cos u, \frac{b}{c}\right) = T(s),$$
$$H_2(\beta(s)) = (-\cos u, -\sin u, 0) = N(s),$$
$$H_3(\beta(s)) = \left(\frac{b}{c}\sin u, -\frac{b}{c}\cos u, \frac{a}{c}\right) = B(s)$$

bulunur; sağ taraflar Örnek 11.5'te hesapladığımız Frenet çatısıdır.
Bağlantı formları. Silindirik çatının bağlantı denklemleri (Örnek 15.4) ve kovaryant türevin lineerliği (Sonuç 13.1, (2)) ile

$$\nabla_V H_1 = \frac{a}{c}\,\nabla_V E_2 + \frac{b}{c}\,\nabla_V E_3 = -\frac{a}{c}\,d\vartheta(V)\,E_1 = \frac{a}{c}\,d\vartheta(V)\,H_2,$$
$$\nabla_V H_2 = -\nabla_V E_1 = -d\vartheta(V)\,E_2.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

E_2'yi H_1 ve H_3 cinsinden yazmak için H_1'i a/c, H_3'ü $-b/c$ ile çarpıp toplarız: E_3 terimleri yok olur ve $E_2 = (a/c)\,H_1 - (b/c)\,H_3$ kalır. Dolayısıyla

$$\nabla_V H_2 = -\frac{a}{c}\,d\vartheta(V)\,H_1 + \frac{b}{c}\,d\vartheta(V)\,H_3.$$

İç çarpımla katsayıları okursak

$$\omega_{12} = \frac{a}{c}\,d\vartheta, \qquad \omega_{13} = 0, \qquad \omega_{23} = \frac{b}{c}\,d\vartheta.$$

Denetim olarak

$$\nabla_V H_3 = -\frac{b}{c}\,\nabla_V E_2 = \frac{b}{c}\,d\vartheta(V)\,E_1 = -\frac{b}{c}\,d\vartheta(V)\,H_2$$

bulunur; bu, $\omega_{31} = -\omega_{13} = 0$ ve $\omega_{32} = -\omega_{23}$ ile uyumludur.
Eğrilik ve burulma. β boyunca T yönündeki değerler gerekir. $d\vartheta = (-y\,dx + x\,dy)/r^2$ formülünde $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $r = a$ ve T'nin ilk iki bileşeni yazılınca

$$d\vartheta(T) = \frac{-a\sin u\cdot\left(-\frac{a}{c}\sin u\right) + a\cos u\cdot\frac{a}{c}\cos u}{a^2} = \frac{1}{c}$$

çıkar; helis boyunca ϑ açısı $u = s/c$ olarak artar. Dolayısıyla

$$\omega_{12}(T) = \frac{a}{c^2} = \kappa, \qquad \omega_{13}(T) = 0, \qquad \omega_{23}(T) = \frac{b}{c^2} = \tau;$$

bunlar Örnek 11.5'teki eğrilik ve burulmadır. Sonuç 15.1 bu değerlerle $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T + \tau B$, $B' = -\tau N$ Frenet formüllerini verir.
Dikkat edilecek nokta şudur: H_1, H_2, H_3 bütün uzaya (z ekseni dışına) yayılmış bir çatı alanıdır ve bağlantı formları helisi "bilmez"; eğrilik ve burulma ancak formlar helisin T vektörüne uygulandığında ortaya çıkar. Başka yönlerde çatı başka hızlarla döner: örneğin z ekseninden dışa (E_1 yönünde) ya da yukarı (E_3 yönünde) ilerlerken $d\vartheta = 0$ olduğundan çatı hiç dönmez.
■

Örnek 15.6 (Aynı Çatı Alanı, Başka Bir Helis). $a = 4$, $b = 3$ alalım; $c = 5$ olur ve Örnek 15.5'teki çatı alanı $H_1 = \frac{4}{5}E_2 + \frac{3}{5}E_3$, $H_2 = -E_1$, $H_3 = -\frac{3}{5}E_2 + \frac{4}{5}E_3$'tür. Yarıçapı 2 olan

$$\gamma(s) = \left(\,2\cos(2s/5),\, 2\sin(2s/5),\, 3s/5\,\right)$$

helisinin eğrilik ve burulmasını bu çatı alanının bağlantı formlarından bulalım.

Çözüm.
γ, Örnek 11.5'teki helisin $a' = 2$, $b' = 3/2$ için yazılmışıdır: $c' = \sqrt{4 + 9/4} = 5/2$ ve

$$\gamma(s) = \left(\,a'\cos(s/c'),\, a'\sin(s/c'),\, b's/c'\,\right).$$

Oranlar $a'/c' = 4/5$ ve $b'/c' = 3/5$, yani H çatısının katsayılarıyla aynıdır. Örnek 15.5'teki "helis boyunca" hesabı, a, b, c yerine a', b', c' yazılınca kelimesi kelimesine tekrarlanır: H_1, H_2, H_3 alanları γ boyunca da γ'nın Frenet çatısıdır. Bağlantı formları noktaya değil yalnızca çatı alanına bağlıdır: $\omega_{12} = \frac{4}{5}\,d\vartheta$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = \frac{3}{5}\,d\vartheta$.
γ boyunca $\vartheta = s/c' = 2s/5$ olarak artar; aynı hesapla $d\vartheta(T) = 1/c' = 2/5$ bulunur. Buradan

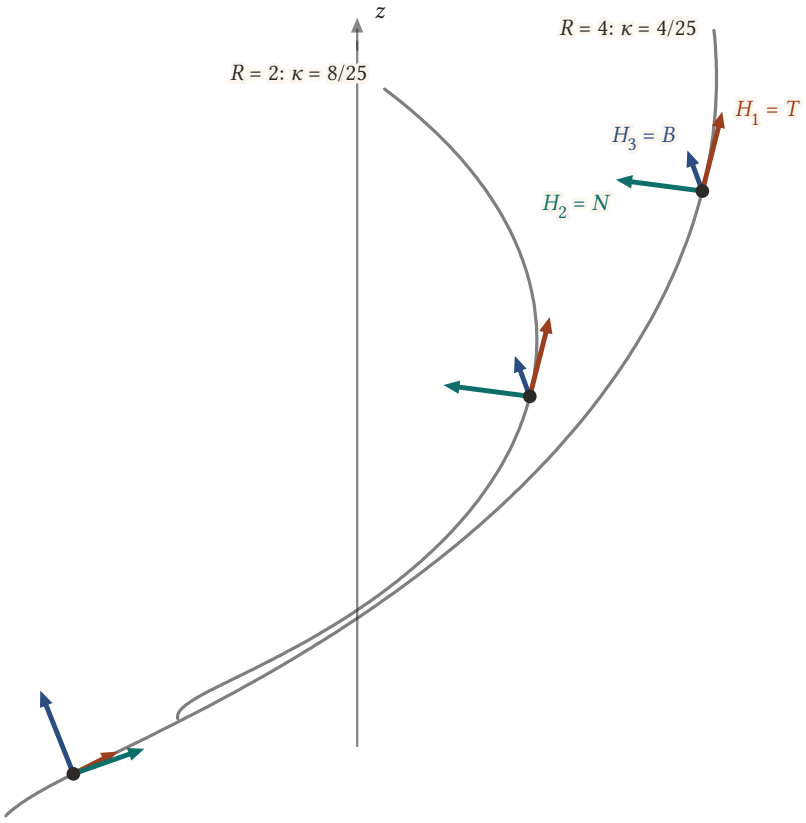
$$\kappa = \omega_{12}(T) = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{25}, \qquad \tau = \omega_{23}(T) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{25}.$$

Örnek 11.5'teki formüllerle denetleyelim:

$$\kappa = \frac{a'}{c'^2} = \frac{2}{25/4} = \frac{8}{25}, \qquad \tau = \frac{b'}{c'^2} = \frac{3/2}{25/4} = \frac{6}{25}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki yol aynı sonucu verir.
Tek bir çatı alanı böylece eğimi $3/4$ olan bütün helislere birden uyarlanmıştır. Yarıçapı R olan helis için $c' = 5R/4$, $d\vartheta(T) = 4/(5R)$, dolayısıyla $\kappa = 16/(25R)$ ve $\tau = 12/(25R)$ olur. Çatının kendisi yarıçaptan bağımsızdır; yarıçap yalnızca T yönünde yürürken eksen etrafında ne kadar hızlı dönüldüğünü, yani $d\vartheta(T)$'yi belirler.



Şekil 15.4: Eğimi 3/4 olan iki helis: yarıçapı 4 olan (4 cos u, 4 sin u, 3u) ve yarıçapı 2 olan (2 cos u, 2 sin u, 1,5u). $H_1 = (4/5)E_2 + (3/5)E_3$ (turuncu), $H_2 = -E_1$ (yeşil), $H_3 = -(3/5)E_2 + (4/5)E_3$ (mavi) çatı alanı her iki helis boyunca helisin Frenet çatısı T, N, B'dir. Aynı ϑ açısındaki iki noktada çatılar tamamen aynıdır; farklı olan, T yönünde yürürken ϑ'nın artma hızıdır. Bu yüzden bağlantı formları $\omega_{12} = (4/5)\, d\vartheta$ ve $\omega_{23} = (3/5)\, d\vartheta$ iki helise farklı eğrilik ve burulma verir: $\kappa = 4/25$ ile $8/25$, $\tau = 3/25$ ile $6/25$.

■

15.3 Duruş Matrisi ve Bağlantı Formlarının Hesabı

Şimdiye kadar bağlantı formlarını tanımdan, yani kovaryant türevleri hesaplayıp iç çarpım alarak bulduk. Bu her zaman mümkündür ama her çatı alanı için yeniden düşünmeyi gerektirir. Bu kısımda aynı işi tamamen mekanik yapan bir formül çıkaracağız. İlk adım, çatı alanını doğal çatı cinsinden yazmaktır. Ortonormal açılımla (Lemma 14.3)

$$\begin{aligned} E_1 &= a_{11}U_1 + a_{12}U_2 + a_{13}U_3, \\ E_2 &= a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + a_{23}U_3, \\ E_3 &= a_{31}U_1 + a_{32}U_2 + a_{33}U_3 \end{aligned}$$

olur; burada her $a_{ij} = E_i \cdot U_j$, $\mathbb{R}^3$ (ya da çatı alanının tanım kümesi) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 15.2 (Bir Çatı Alanının Duruş Matrisi). E_1, E_2, E_3 bir çatı alanı ve $a_{ij} = E_i \cdot U_j$ $(1 \le i, j \le 3)$ olsun. Girdileri bu fonksiyonlar olan

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrisine E_1, E_2, E_3 çatı alanının **duruş matrisi** (attitude matrix) denir.

Yani A'nın i-inci satırı, E_i'nin Öklid koordinat fonksiyonlarıdır. Her $\mathbf{p}$ noktasında $A(\mathbf{p}) = \left(\, a_{ij}(\mathbf{p}) \, \right)$ sayı matrisi, $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ çatısının duruş matrisidir (Tanım 9.8). Bir çatının duruş matrisi ortogonal olduğundan (Önerme 9.5, Sonuç 9.1) her noktada $AA^T = I$ ve $A^T = A^{-1}$'dir. Bunu fonksiyon matrisleri için tek bir eşitlik olarak da okuyabiliriz: AA^T çarpımı, her noktada birim matrisi veren sabit bir fonksiyon matrisidir.

Örnek 15.7 (Silindirik ve Küresel Çatının Duruş Matrisleri). Silindirik çatı alanı E_1, E_2, E_3 ile küresel çatı alanı F_1, F_2, F_3'ün duruş matrislerini yazalım.

Çözüm.
Satırlara alanların U_1, U_2, U_3 katsayılarını yazmak yeter. Silindirik çatı için (Örnek 14.9)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

küresel çatı için (Örnek 14.12)

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

İki matrisin de satırları ortonormaldir; bu, önceki bölümde bu üçlülerin çatı alanı olduğunu gösterirken yaptığımız hesabın matris diliyle söylenişidir. Örneğin AA^T'nin $(1,1)$ ve $(1,2)$ girdileri

$$\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1, \qquad \cos\vartheta\,(-\sin\vartheta) + \sin\vartheta\cos\vartheta + 0 = 0$$

olur. $\mathbf{p} = (3,4,2)$ noktasında $A(\mathbf{p})$'nin satırları $(3/5, 4/5, 0)$, $(-4/5, 3/5, 0)$ ve $(0,0,1)$'dir. ■

Duruş matrisinin girdileri fonksiyon olduğundan diferansiyellerini alabiliriz. Sonuç, girdileri 1-form olan bir matris olacaktır; bu tür matrisleri fonksiyon matrisleriyle çarpmamız gerekecek.

Tanım 15.3 (Bir Fonksiyon Matrisinin Diferansiyeli). $A = (a_{ij})$, girdileri diferansiyellenebilir fonksiyonlar olan bir matris olsun. Girdileri a_{ij}'lerin diferansiyelleri olan $dA = (da_{ij})$ matrisine A'nın **diferansiyeli** denir. Girdileri 1-form olan bir $\Phi = (\phi_{ik})$ matrisi ile girdileri fonksiyon olan bir $C = (c_{kj})$ matrisinin çarpımı, girdileri

$$(\Phi C)_{ij} = \sum_k \phi_{ik}\, c_{kj}$$

1-formları olan matristir; burada $\phi_{ik}\, c_{kj} = c_{kj}\, \phi_{ik}$ bir fonksiyonla bir 1-formun çarpımıdır (Tanım 5.2). Ters sıradaki $C\Phi$ çarpımı da aynı kuralla, $(C\Phi)_{ij} = \sum_k c_{ik}\, \phi_{kj}$ olarak tanımlanır.

Yani dA, A'yı girdi girdi türetir; matris çarpımı da sayı matrislerindeki satır-sütun kuralıyla yapılır, yalnız bu kez toplanan terimler birer 1-formdur. Artık bağlantı formlarını duruş matrisinden veren formülü yazabiliriz.

Teorem 15.2 (Bağlantı Formları Duruş Matrisinden). *$A = (a_{ij})$, bir E_1, E_2, E_3 çatı alanının duruş matrisi ve $\omega = (\omega_{ij})$ bağlantı formlarının matrisi olsun. O zaman*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\omega = dA\, A^{T}$$

olur; girdilerle yazılınca

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\, da_{ik}, \qquad 1 \le i, j \le 3.$$

İspat.
İki yazılışın denkliği. A^{T}*'nin* (k, j) *girdisi* a_{jk} *olduğundan Tanım 15.3'ndeki çarpım kuralı*

$$(dA\, A^{T})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} da_{ik}\, a_{jk} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\, da_{ik}$$

verir. Dolayısıyla matris eşitliği, girdilerle yazılan dokuz eşitliğin kısa yazılışıdır.
Girdilerin eşitliği. *İki 1-form, her teğet vektörde aynı değeri alıyorlarsa eşittir. Bir* $\mathbf{p}$ *noktasında bir* $\mathbf{v}$ *teğet vektörü alalım.* $E_i = \sum_k a_{ik} U_k$ *olduğundan kovaryant türevin koordinat formülü (Lemma 13.1) ve diferansiyelin tanımı (Tanım 5.5) ile*

$$\nabla_{\mathbf{v}} E_i = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{v}[a_{ik}]\, U_k(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{3} da_{ik}(\mathbf{v})\, U_k(\mathbf{p})$$

olur. Öte yandan $E_j(\mathbf{p}) = \sum_k a_{jk}(\mathbf{p})\, U_k(\mathbf{p})$*'dir. Doğal çatıda koordinatları bilinen iki teğet vektörün iç çarpımı karşılıklı koordinatların çarpımlarının toplamı olduğundan*

$$\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{3} da_{ik}(\mathbf{v})\, a_{jk}(\mathbf{p})$$

bulunur. Sağ taraf, Tanım 5.2 gereği $\sum_k a_{jk}\, da_{ik}$ *1-formunun* $\mathbf{v}$*'deki değeridir. Eşitlik her teğet vektör için geçerli olduğundan* $\omega_{ij} = \sum_k a_{jk}\, da_{ik}$*'dir.*
■

Formülün söylediği şudur: ω_{ij}'yi bulmak için E_i'nin koordinat fonksiyonlarının diferansiyellerini, E_j'nin koordinat fonksiyonlarıyla "iç çarparız". Kısaca $\omega_{ij} = dE_i \cdot E_j$ diye akılda tutulabilir; bu, $\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p})$ tanımının koordinatlarla yazılışıdır.

Bağlantı formlarını üç adımda hesaplamak

1. Çatı alanının her üyesini doğal çatı cinsinden yazın; katsayıları satır satır dizerek duruş matrisi A'yı elde edin.
2. A'nın her girdisinin diferansiyelini alarak dA'yı bulun.
3. Yalnızca köşegenin üstündeki üç formu hesaplayın: ω_{ij}, dA'nın i-inci satırı ile A'nın j-inci satırının "iç çarpımıdır", $\omega_{ij} = \sum_k a_{jk}\, da_{ik}$. Ötekiler $\omega_{ii} = 0$ ve $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ ile gelir.

Sonucu bir noktada bir teğet vektör seçip tanımdan, yani kovaryant türev ve iç çarpımla, denetlemek iyi bir alışkanlıktır.

Örnek 15.8 (Silindirik Çatı: Duruş Matrisiyle Hesap). Silindirik çatı alanının bağlantı formlarını Teorem 15.2 ile hesaplayalım.

Çözüm.
Birinci adım. Duruş matrisi Örnek 15.7'nde yazıldı:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

İkinci adım. Bileşke kuralıyla (Lemma 5.3) $d(\cos\vartheta) = -\sin\vartheta\, d\vartheta$ ve $d(\sin\vartheta) = \cos\vartheta\, d\vartheta$; sabitlerin diferansiyeli sıfırdır. Böylece

 CC BY-NC-SA 4.0

$$dA = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\,d\vartheta & \cos\vartheta\,d\vartheta & 0 \\ -\cos\vartheta\,d\vartheta & -\sin\vartheta\,d\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Üçüncü adım. Önce tam çarpımı yapalım; A^{T}'nin sütunları A'nın satırlarıdır. dA'nın birinci satırı ile A'nın üç satırının "iç çarpımları"

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= (-\sin\vartheta\cos\vartheta + \cos\vartheta\sin\vartheta)\,d\vartheta = 0, \\ \omega_{12} &= (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)\,d\vartheta = d\vartheta, \\ \omega_{13} &= 0, \end{aligned}$$

ikinci satırı ile

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= (-\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,d\vartheta = -d\vartheta, \\ \omega_{22} &= (\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)\,d\vartheta = 0, \\ \omega_{23} &= 0 \end{aligned}$$

olur; üçüncü satırı sıfırdır. Böylece

$$\omega = dA\,A^{T} = \begin{pmatrix} 0 & d\vartheta & 0 \\ -d\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sonuç Örnek 15.3'de tanımdan bulduğumuzla aynıdır: tek sıfırdan farklı bağlantı formu $\omega_{12} = d\vartheta$ (ve elbette $\omega_{21} = -d\vartheta$). Hesabın beklendiği gibi ters simetrik bir matris vermesi de bir denetimdir; aslında yalnızca ω_{12}, ω_{13} ve ω_{23}'ü hesaplamak yeterdi.
Ara adımda ϑ'nın kendisini kullandık, ama sonuç z ekseni dışındaki her yerde geçerlidir: $\cos\vartheta = x/r$ ve $\sin\vartheta = y/r$ fonksiyonları orada tanımlıdır ve $d\vartheta = (-y\,dx + x\,dy)/r^{2}$'dir.
■

Örnek 15.9 (Ters Simetriye Matrislerle Bakış). A bir çatı alanının duruş matrisi ve $\omega = dA\,A^{T}$ olsun. $AA^{T} = I$ eşitliğinin diferansiyelini alarak ω'nın ters simetrik olduğunu yeniden görelim; ayrıca $dA = \omega A$ olduğunu gösterelim.

Çözüm.
AA^{T}'nin (i,j) girdisi $\sum_{k} a_{ik}a_{jk}$'dir ve bu fonksiyon sabit δ_{ij}'ye eşittir. Sabit fonksiyonun diferansiyeli sıfır olduğundan, çarpım kuralı (Lemma 5.2) ile

$$0 = d\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\,da_{ik} + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,da_{jk}.$$

Teorem 15.2'ne göre ilk toplam ω_{ij}, ikinci toplam ise i ile j'nin yeri değişmiş hâliyle ω_{ji}'dir. Demek ki $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$. Matris diliyle bu hesap $0 = dA\,A^{T} + A\,d(A^{T})$ eşitliğidir ve ikinci terim ω'nın transpozudur: $\omega + \omega^{T} = 0$. Lemma 15.1'daki ters simetri böylece "duruş matrisi ortogonaldir" gerçeğinin türevidir.
$\omega = dA\,A^{T}$ eşitliğini sağdan A ile çarpalım. Sonuç 9.1 gereği $A^{T}A = I$ olduğundan $\omega A = dA\,(A^{T}A) = dA$ bulunur; girdilerle

$$da_{ik} = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\,a_{jk}.$$

Bu, bağlantı denklemlerinin koordinatlarla yazılışıdır: $\nabla_{V}E_{i} = \sum_{j}\omega_{ij}(V)\,E_{j}$ eşitliğinin iki yanının k-inci Öklid koordinatı, sırasıyla $V[a_{ik}] = da_{ik}(V)$ ve $\sum_{j}\omega_{ij}(V)\,a_{jk}$'dir.
Silindirik çatıda denetleyelim: ωA'nın ilk satırı, A'nın ikinci satırının $d\vartheta$ katıdır, yani $(-\sin\vartheta\,d\vartheta, \cos\vartheta\,d\vartheta, 0)$; bu tam olarak dA'nın ilk satırıdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 15.10 (Bağlantı Formları Sıfır Olan Çatı Alanları). Örnek 14.5'deki döndürülmüş sabit çatı alanının bağlantı formlarını bulalım. Ardından $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı bir çatı alanının bütün bağlantı formlarının sıfır olmasının, çatının her noktada aynı olması demek olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Döndürülmüş sabit çatının duruş matrisi

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

sabit girdilidir; dolayısıyla $dA = 0$ ve $\omega = dA\,A^T = 0$. Bütün bağlantı formları sıfırdır: hangi yöne gidersek gidelim çatı hiç dönmez.
Tersine, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki bir çatı alanının bütün bağlantı formları sıfır olsun. Örnek 15.9'de gördüğümüz $dA = \omega A$ eşitliği $dA = 0$ verir: duruş matrisinin her girdisinin diferansiyeli sıfırdır. Diferansiyeli sıfır olan bir fonksiyon $\mathbb{R}^3$ üzerinde sabittir (Alıştırma 5.30). Dolayısıyla her a_{ij} sabittir ve çatı alanı her noktada aynı çatıyı verir. Aynı sonuç bağlantı denklemlerinden de okunur: $\omega = 0$ ise her V için $\nabla_V E_i = \mathbf{0}$'dır ve her yönde türevi sıfır olan alanın koordinatları sabittir (Alıştırma 13.13).
Yani bağlantı formları, çatı alanının sabit bir çatıdan ne kadar saptığını ölçer; hepsi sıfırsa sapma yoktur.
■

Örnek 15.11 (Birinci Alanı Verilen Çatının Bağlantı Formları). Alıştırma 14.8'de bulduğumuz

$$\begin{aligned} E_1 &= \cos x\, U_1 + \sin x \cos z\, U_2 + \sin x \sin z\, U_3, \\ E_2 &= -\sin x\, U_1 + \cos x \cos z\, U_2 + \cos x \sin z\, U_3, \\ E_3 &= -\sin z\, U_2 + \cos z\, U_3 \end{aligned}$$

çatı alanının bağlantı formlarını hesaplayalım.

Çözüm.
Duruş matrisi ve diferansiyeli. Satırlar şunlardır:

$$\begin{aligned} a_1 &= (\cos x, \sin x \cos z, \sin x \sin z), \\ a_2 &= (-\sin x, \cos x \cos z, \cos x \sin z), \\ a_3 &= (0, -\sin z, \cos z). \end{aligned}$$

Çarpım ve bileşke kurallarıyla

$$\begin{aligned} da_1 &= \big(-\sin x\, dx, \cos x \cos z\, dx - \sin x \sin z\, dz, \\ &\qquad \cos x \sin z\, dx + \sin x \cos z\, dz \big), \\ da_2 &= \big(-\cos x\, dx, -\sin x \cos z\, dx - \cos x \sin z\, dz, \\ &\qquad -\sin x \sin z\, dx + \cos x \cos z\, dz \big). \end{aligned}$$

ω_{12}. da_1 ile a_2'nin "iç çarpımı":

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \sin^2 x\, dx + \cos x \cos z\,(\cos x \cos z\, dx - \sin x \sin z\, dz) \\ &\quad + \cos x \sin z\,(\cos x \sin z\, dx + \sin x \cos z\, dz) \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x \cos^2 z + \cos^2 x \sin^2 z)\, dx = dx; \end{aligned}$$

dz terimleri $-\cos x \sin x \cos z \sin z$ ve $+\cos x \sin x \sin z \cos z$ olarak birbirini götürür.
ω_{13}. da_1 ile a_3:

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= -\sin z\,(\cos x \cos z\, dx - \sin x \sin z\, dz) \\ &\quad + \cos z\,(\cos x \sin z\, dx + \sin x \cos z\, dz) \\ &= \sin x\,(\sin^2 z + \cos^2 z)\, dz = \sin x\, dz. \end{aligned}$$

ω_{23}. da_2 ile a_3:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\omega_{23} &= -\sin z\,(-\sin x\cos z\,dx - \cos x\sin z\,dz)\\ &\quad + \cos z\,(-\sin x\sin z\,dx + \cos x\cos z\,dz)\\ &= \cos x\,(\sin^2 z + \cos^2 z)\,dz = \cos x\,dz.\end{aligned}$$

Sonuç: $\omega_{12} = dx$, $\omega_{13} = \sin x\,dz$, $\omega_{23} = \cos x\,dz$. Bu kez üç form da sıfırdan farklıdır.
Yorum ve denetim. x yönünde (U_1 yönünde) ilerlerken yalnızca $\omega_{12}(U_1) = 1$ sıfırdan farklıdır: E_1, E_2'ye doğru birim hızla döner, E_3 yerinde kalır. z yönünde ilerlerken $\omega_{12}(U_3) = 0$ ama $\omega_{13}(U_3) = \sin x$, $\omega_{23}(U_3) = \cos x$: bu kez çatı U_1 ekseni etrafında döner ve E_1 ile E_2 bu dönmeye, U_1'den ne kadar uzak durduklarıyla orantılı olarak katılır. Bunu tanımdan denetleyelim: E_1'in koordinatlarının z'ye göre türevleri $(0, -\sin x\sin z, \sin x\cos z)$'dir, yani $\nabla_{U_3}E_1 = \sin x\,E_3$; bu da $\omega_{12}(U_3) = 0$ ve $\omega_{13}(U_3) = \sin x$ demektir.
■

15.4 Küresel ve Toroidal Çatılar

Küresel çatı alanı, silindirik çatının E_1 ile E_3'ünün her noktada kendi düzlemlerinde φ açısıyla döndürülmesiyle elde edilmişti (Örnek 14.12); toroidal çatı da aynı biçimde ψ açısıyla (Alıştırma 14.12). İki hesabı ayrı ayrı yapmak yerine, bu yapının genel biçimini bir kez hesaplayalım. Yöntem de yeni olacak: duruş matrisi yerine silindirik çatının bağlantı denklemlerini ve Leibniz kuralını kullanacağız.

Önerme 15.1 (Silindirik Çatıyı Bir Fonksiyonla Eğmek). *E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı ve g, z ekseni dışındaki bir açık kümede diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu kümede*

$$G_1 = \cos g\,E_1 + \sin g\,E_3, \qquad G_2 = E_2, \qquad G_3 = -\sin g\,E_1 + \cos g\,E_3$$

bir çatı alanıdır ve bağlantı formları

$$\omega_{12} = \cos g\,d\vartheta, \qquad \omega_{13} = dg, \qquad \omega_{23} = \sin g\,d\vartheta$$

olur.

İspat.
Çatı alanı. *Hesap, Örnek 14.12'deki "silindirik çatı üzerinden" hesabın φ yerine g yazılmış hâlidir:* $G_1 \cdot G_1 = \cos^2 g + \sin^2 g = 1$, $G_3 \cdot G_3 = 1$ *ve*

$$G_1 \cdot G_3 = -\cos g\sin g + \sin g\cos g = 0;$$

$G_2 = E_2$ *birimdir ve* E_1 *ile* E_3*'e dik olduğundan* G_1 *ile* G_3*'e de diktir. Katsayılar diferansiyellenebilirdir.* Ters çevirme. G_1*'i* $\cos g$, G_3*'ü* $-\sin g$ *ile çarpıp toplayınca* E_3 *terimleri yok olur;* G_1*'i* $\sin g$, G_3*'ü* $\cos g$ *ile çarpıp toplayınca* E_1 *terimleri yok olur:*

$$E_1 = \cos g\,G_1 - \sin g\,G_3, \qquad E_3 = \sin g\,G_1 + \cos g\,G_3.$$

G_1'in türevi. *Silindirik çatının bağlantı denklemleri* $\nabla_V E_1 = d\vartheta(V)\,E_2$, $\nabla_V E_3 = \mathbf{0}$*'dır (Örnek 15.4). Fonksiyonla çarpım için Leibniz kuralı (Sonuç 13.1, (3)) ve* $V[\cos g] = -\sin g\,dg(V)$, $V[\sin g] = \cos g\,dg(V)$ *eşitlikleriyle (Lemma 5.3)*

$$\begin{aligned}\nabla_V G_1 &= V[\cos g]\,E_1 + \cos g\,\nabla_V E_1 + V[\sin g]\,E_3 + \sin g\,\nabla_V E_3\\ &= dg(V)\,\big(-\sin g\,E_1 + \cos g\,E_3\big) + \cos g\,d\vartheta(V)\,E_2\\ &= \cos g\,d\vartheta(V)\,G_2 + dg(V)\,G_3.\end{aligned}$$

Bağlantı denklemlerindeki katsayılar tektir (Lemma 14.3); dolayısıyla $\omega_{12}(V) = \cos g\,d\vartheta(V)$ *ve* $\omega_{13}(V) = dg(V)$.
G_2'nin türevi. $\nabla_V G_2 = \nabla_V E_2 = -d\vartheta(V)\,E_1$*'dir. Ters çevirme formülüyle*

$$\nabla_V G_2 = -\cos g\,d\vartheta(V)\,G_1 + \sin g\,d\vartheta(V)\,G_3;$$

buradan $\omega_{23}(V) = \sin g\,d\vartheta(V)$ *okunur. Bir denetim olarak* $\omega_{21}(V) = -\cos g\,d\vartheta(V)$ *çıkar ve bu,* $-\omega_{12}(V)$*'ye eşittir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu eşitlikler her V vektör alanı için doğru olduğundan, ve bir 1-form bütün teğet vektörlerdeki değerleriyle belirlendiğinden (her teğet vektör, örneğin sabit katsayılı bir alanın bir noktadaki değeridir), iddia edilen form eşitlikleri geçerlidir.
■

Yani silindirik çatıyı E_1E_3 düzleminde g açısıyla eğmek, ω_{13}'e bu açının diferansiyelini ekler ve silindirik çatının tek dönmesini, $d\vartheta$'yı, $\cos g$ ve $\sin g$ oranlarında ω_{12} ile ω_{23} arasında paylaştırır. $g = 0$ alınırsa silindirik çatı ve $\omega_{12} = d\vartheta$ geri gelir.

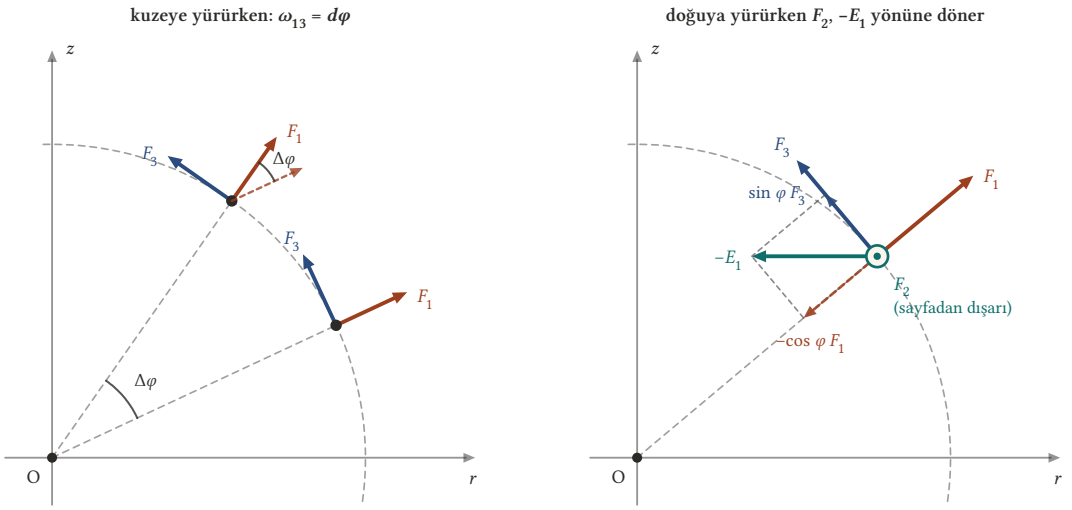
Örnek 15.12 (Küresel Çatının Bağlantı Formları). Küresel çatı alanı F_1, F_2, F_3'ün bağlantı formlarını bulalım, anlamlarını yorumlayalım ve bir noktada tanımdan denetleyelim.

Çözüm.
Küresel çatı, Önerme 15.1′deki yapının $g = \varphi$ için yazılmışıdır (Örnek 14.12). Dolayısıyla

$$\omega_{12} = \cos\varphi\, d\vartheta, \qquad \omega_{13} = d\varphi, \qquad \omega_{23} = \sin\varphi\, d\vartheta.$$

Yorum. F_1 dışa, F_2 doğuya, F_3 kuzeye bakar.

- Bir meridyen boyunca kuzeye yürürken (ϑ sabit) yalnızca $\omega_{13} = d\varphi$ çalışır: dışa bakan F_1, kuzeye bakan F_3'e doğru, enlemin değişim hızıyla döner. Bu, meridyen düzleminde bir çember boyunca yürümektir ve o düzlemde gördüğümüz bir dönmedir.
- Bir paralel boyunca doğuya yürürken (φ sabit) $\omega_{13} = 0$ olur ama ω_{12} ve ω_{23} çalışır. Doğuya bakan $F_2 = E_2$, silindirik çatıda olduğu gibi z eksenine doğru, yani $-E_1$ yönüne döner. $-E_1$ ise meridyen düzleminde $-\cos\varphi\, F_1 + \sin\varphi\, F_3$'tür: bu dönmenin $\cos\varphi$ kadarı F_1'e, $\sin\varphi$ kadarı F_3'e yöneliktir.
- Ekvatorda ($\varphi = 0$) $\omega_{23} = 0$: ekvator bir büyük çemberdir ve boyunca doğuya bakan ok kuzeye sapmaz. Kutuplara yaklaştıkça $\sin\varphi$ büyür: paraleller küçük çemberlerdir ve doğuya bakan ok kuzeye doğru hızla döner.



Şekil 15.5: Küresel çatının bağlantı formları, meridyen yarım düzleminde (yatay eksen r, düşey eksen z). Solda: $\rho = 4$ çemberi üzerinde kuzeye yürürken dışa bakan F_1 (turuncu), kuzeye bakan F_3′e (mavi) doğru, enlemdeki artış $\Delta\varphi$ kadar döner; kesikli ok alttaki F_1′in taşınmış kopyasıdır. Bu, $\omega_{13} = d\varphi$ demektir. Sağda: doğuya bakan F_2 (yeşil, sayfadan dışarı) doğuya yürürken z eksenine doğru, $-E_1$ yönüne döner ve $-E_1 = -\cos\varphi\, F_1 + \sin\varphi\, F_3$'tür; dönmenin $\cos\varphi$ kadarı F_1′e, $\sin\varphi$ kadarı F_3′e yöneliktir: $\omega_{12} = \cos\varphi\, d\vartheta$, $\omega_{23} = \sin\varphi\, d\vartheta$.

Sayısal denetim. $\mathbf{p} = (3, 0, 4)$ ve $\mathbf{v} = (1, 3, 2)_{\mathbf{p}}$ alalım. $\mathbf{p}$'de $r = 3$, $\rho = 5$, $\vartheta = 0$, $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$'tir. $d\vartheta(\mathbf{v}) = (-0 \cdot 1 + 3 \cdot 3)/9 = 1$. $d\varphi$ için $r = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$ eşitliklerinden, $d\vartheta$'yı bulduğumuz yolla, $-\sin\varphi\, dr + \cos\varphi\, dz = \rho\, d\varphi$, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\varphi = \frac{r\,dz - z\,dr}{r^2+z^2}, \qquad dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{r}$$

bulunur. $dr(\mathbf{v}) = (3\cdot 1 + 0\cdot 3)/3 = 1$ ve $d\varphi(\mathbf{v}) = (3\cdot 2 - 4\cdot 1)/25 = 2/25$. Buradan

$$\omega_{12}(\mathbf{v}) = \frac{3}{5}, \qquad \omega_{13}(\mathbf{v}) = \frac{2}{25}, \qquad \omega_{23}(\mathbf{v}) = \frac{4}{5}.$$

Tanımdan denetim için $\nabla_{\mathbf{v}} F_1$'i hesaplayalım. F_1'in koordinat fonksiyonları x/ρ, y/ρ, z/ρ'dur ve

$$\mathbf{v}[\rho] = \frac{xv_1 + yv_2 + zv_3}{\rho} = \frac{3+0+8}{5} = \frac{11}{5}.$$

Bölüm kuralıyla $\mathbf{v}[x_i/\rho] = v_i/\rho - x_i\,\mathbf{v}[\rho]/\rho^2$, yani

$$\nabla_{\mathbf{v}} F_1 = \frac{1}{5}(1,3,2) - \frac{11}{125}(3,0,4) = \left(-\frac{8}{125}, \frac{3}{5}, \frac{6}{125}\right).$$

Bağlantı denklemi ise $F_2(\mathbf{p}) = (0,1,0)$ ve $F_3(\mathbf{p}) = (-4/5, 0, 3/5)$ ile

$$\omega_{12}(\mathbf{v})\,F_2(\mathbf{p}) + \omega_{13}(\mathbf{v})\,F_3(\mathbf{p}) = \frac{3}{5}(0,1,0) + \frac{2}{25}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{8}{125}, \frac{3}{5}, \frac{6}{125}\right)$$

verir. İki sonuç aynıdır.
■

Örnek 15.13 (Toroidal Çatının Bağlantı Formları). $a > 0$ ve T_1, T_2, T_3, Alıştırma 14.12'deki toroidal çatı alanı olsun: $s = \sqrt{(r-a)^2 + z^2}$, $\cos\psi = (r-a)/s$, $\sin\psi = z/s$ ve

$$T_1 = \cos\psi\,E_1 + \sin\psi\,E_3, \qquad T_2 = E_2, \qquad T_3 = -\sin\psi\,E_1 + \cos\psi\,E_3.$$

Bağlantı formlarını bulalım ve $a = 1$, $\mathbf{p} = (3,4,3)$, $\mathbf{v} = U_3(\mathbf{p})$ için değerlerini yorumlayalım.

Çözüm.
Toroidal çatı Önerme 15.1'nin $g = \psi$ durumudur:

$$\omega_{12} = \cos\psi\,d\vartheta, \qquad \omega_{13} = d\psi, \qquad \omega_{23} = \sin\psi\,d\vartheta.$$

$a = 0$ alınırsa $s = \rho$, $\psi = \varphi$ olur ve küresel çatının bağlantı formları geri gelir.
$d\psi$'yi $d\varphi$ gibi buluruz: $r - a = s\cos\psi$ ve $z = s\sin\psi$ eşitliklerinden $-\sin\psi\,dr + \cos\psi\,dz = s\,d\psi$, yani

$$d\psi = \frac{(r-a)\,dz - z\,dr}{s^2}.$$

Burada bir inceliğe dikkat edelim. ψ açısı, ϑ gibi, her yerde tek değerli değildir: bir meridyen düzleminde C'nin çevresinde bir tur atınca 2π artar. ψ, ancak bir kesit dışarıda bırakılınca, örneğin $z = 0$, $r < a$ diski çıkarılınca, tek değerli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olur; Önerme 15.1 böyle her kümede uygulanır. Yukarıdaki $d\psi$ ifadesi ise kesitin seçiminden bağımsızdır ve z ekseni ile C dışında her yerde tanımlıdır; dolayısıyla bağlantı formlarının formülleri çatı alanının bütün tanım kümesinde geçerlidir.
$a = 1$ ve $\mathbf{p} = (3,4,3)$ için $r = 5$, $r - a = 4$, $z = 3$, $s = 5$ (Alıştırma 14.11). $\mathbf{v} = U_3(\mathbf{p})$ için $dr(\mathbf{v}) = 0$ ve $d\vartheta(\mathbf{v}) = 0$ olduğundan

$$\omega_{12}(\mathbf{v}) = 0, \qquad \omega_{13}(\mathbf{v}) = d\psi(\mathbf{v}) = \frac{4\cdot 1 - 3\cdot 0}{25} = \frac{4}{25}, \qquad \omega_{23}(\mathbf{v}) = 0.$$

Yorum: yukarı doğru birim hızla ilerlerken yalnızca T_1 ile T_3 döner; C çemberinden dışa bakan T_1, C'yi çevreleyen küçük çember yönündeki T_3'e doğru $4/25$ hızla döner. Bu sayı, yukarı hareketin $\mathbf{p}$'den geçen küçük çembere teğet bileşeni ($\cos\psi = 4/5$) ile o çemberin yarıçapının ($s = 5$) oranıdır: $\cos\psi / s = 4/25$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

15.5 Alıştırmalar

Alıştırma 15.1 (Bir Fonksiyonla Kurulan Çatı Alanı). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f\, U_1 + U_2 - \cos f\, U_3),$$
$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f\, U_1 - U_2 - \cos f\, U_3),$$
$$E_3 = \cos f\, U_1 + \sin f\, U_3$$

alanlarının bir çatı alanı oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Katsayılar $\sin f$, $\cos f$ ve sabitlerden oluşur; bileşke kuralı gereği hepsi diferansiyellenebilirdir, dolayısıyla üç alan da vektör alanıdır. Vektör kısımları $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f, 1, -\cos f)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f, -1, -\cos f)$ ve $(\cos f, 0, \sin f)$'dir. Lemma 14.1 ile

$$E_1 \cdot E_1 = \frac{1}{2}(\sin^2 f + 1 + \cos^2 f) = 1, E_1 \cdot E_2 = \frac{1}{2}(\sin^2 f - 1 + \cos^2 f) = 0,$$
$$E_2 \cdot E_2 = \frac{1}{2}(\sin^2 f + 1 + \cos^2 f) = 1, E_1 \cdot E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f \cos f - \cos f \sin f) = 0,$$
$$E_3 \cdot E_3 = \cos^2 f + \sin^2 f = 1, \qquad E_2 \cdot E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f \cos f - \cos f \sin f) = 0.$$

Altı koşul sağlanır; E_1, E_2, E_3 bir çatı alanıdır.
Çatının geometrisi şöyle görülür: $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_2) = U_2$ ve $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + E_2) = \sin f\, U_1 - \cos f\, U_3$'tür. Yani E_1 ile E_2, U_2 ile xz düzlemindeki $\sin f\, U_1 - \cos f\, U_3$ birim vektörünün arasına $45°$ açıyla yerleştirilmiştir; E_3 de xz düzleminde bu vektöre diktir. Nokta değiştikçe yalnızca xz düzlemindeki kısım, f açısıyla, U_2 ekseni etrafında döner. Örneğin $f = 0$ olan bir noktada vektör kısımları $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -1)$, $(1, 0, 0)$'dır.
■

Alıştırma 15.2 (Bir Fonksiyonla Kurulan Çatının Bağlantı Formları). $f, \mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve E_1, E_2, E_3, Alıştırma 15.1'daki

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f\, U_1 + U_2 - \cos f\, U_3),$$
$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f\, U_1 - U_2 - \cos f\, U_3),$$
$$E_3 = \cos f\, U_1 + \sin f\, U_3$$

çatı alanı olsun. Bağlantı formlarını bulunuz.

Çözüm.
Teorem 15.2'nü kullanırız. Duruş matrisinin satırları

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f, 1, -\cos f), \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin f, -1, -\cos f),$$
$$a_3 = (\cos f, 0, \sin f)$$

ve bileşke kuralıyla

$$da_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos f\, df, 0, \sin f\, df) = da_2.$$

İlginç biçimde $da_1 = da_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a_3\, df$'dir. Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\omega_{12} = \sum_k a_{2k}\,da_{1k} = \frac{1}{2}(\sin f\cos f + 0 - \cos f\sin f)\,df = 0,$$
$$\omega_{13} = \sum_k a_{3k}\,da_{1k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2 f + 0 + \sin^2 f)\,df = \frac{1}{\sqrt{2}}\,df,$$
$$\omega_{23} = \sum_k a_{3k}\,da_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2 f + \sin^2 f)\,df = \frac{1}{\sqrt{2}}\,df.$$

Sonuç: $\omega_{12} = 0$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = df/\sqrt{2}$.
Yorum: E_1 ile E_2 birbirine göre hiç dönmez; ikisi de E_3'e doğru, f'nin değişim hızının $1/\sqrt{2}$ katıyla döner. Bu, Alıştırma 15.1'daki resimle uyumludur: çatının tamamı U_2 ekseni etrafında f açısıyla dönmektedir; E_3 bu eksene dik olduğundan tam hızla, E_1 ile E_2 ise eksene $45°$ eğik durduklarından $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$ oranında dönmeye katılır.
Bir denetim: $f = x$ alalım ve $\mathbf{v} = U_1(\mathbf{p})$ olsun. E_1'in koordinatlarının x'e göre türevleri $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x, 0, \sin x)$'tir, yani $\nabla_{U_1} E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,E_3$; bu da $\omega_{12}(U_1) = 0$ ve $\omega_{13}(U_1) = 1/\sqrt{2} = dx(U_1)/\sqrt{2}$ ile uyumludur.
■

Alıştırma 15.3 (Doğal Çatının Bağlantı Formları). Doğal çatı alanı U_1, U_2, U_3'ün bağlantı formlarını bulunuz.

Çözüm.
Tanımdan. Her U_i'nin koordinat fonksiyonları sabittir, dolayısıyla her $\mathbf{v}$ için $\nabla_{\mathbf{v}} U_i = \mathbf{0}$'dır (Örnek 13.5). Tanım gereği

$$\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} U_i \cdot U_j(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \cdot U_j(\mathbf{p}) = 0.$$

Duruş matrisiyle. Doğal çatının duruş matrisi birim matris I'dır: $a_{ij} = U_i \cdot U_j = \delta_{ij}$. Girdileri sabit olduğundan $dI = 0$ ve $\omega = dI\,I^T = 0$.
İki yol da aynı sonucu verir: doğal çatının bütün bağlantı formları sıfırdır. Bağlantı denklemleri $\nabla_V U_i = \mathbf{0}$ biçimini alır; doğal çatı hiçbir yönde dönmez. Örnek 15.10'ye göre de $\mathbb{R}^3$ üzerinde bağlantı formları sıfır olan çatı alanları tam olarak sabit çatılardır; doğal çatı bunların en basitidir.
■

Alıştırma 15.4 (Bir Fonksiyon Matrisinin Duruş Matrisi Oluşu). f, $\mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 f & \cos f \sin f & \sin f \\ \sin f \cos f & \sin^2 f & -\cos f \\ -\sin f & \cos f & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin bir çatı alanının duruş matrisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Satırları E_1, E_2, E_3'ün katsayıları olarak okuyalım: $E_i = \sum_j a_{ij} U_j$. Girdiler $\sin f$ ile $\cos f$'nin çarpımlarıdır ve diferansiyellenebilirdir; dolayısıyla E_i'ler vektör alanıdır ve $a_{ij} = E_i \cdot U_j$ olduğundan A onların duruş matrisidir. Geriye $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$, yani $AA^T = I$ kalır (Önerme 9.5). $c = \cos f$ ve $s = \sin f$ kısaltmalarıyla:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
E_1 \cdot E_1 &= c^4 + c^2 s^2 + s^2 = c^2(c^2+s^2) + s^2 = 1,\\
E_2 \cdot E_2 &= s^2 c^2 + s^4 + c^2 = s^2(c^2+s^2) + c^2 = 1,\\
E_3 \cdot E_3 &= s^2 + c^2 = 1,\\
E_1 \cdot E_2 &= c^3 s + c s^3 - sc = cs\,(c^2+s^2-1) = 0,\\
E_1 \cdot E_3 &= -c^2 s + c^2 s + 0 = 0,\\
E_2 \cdot E_3 &= -s^2 c + s^2 c + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla E_1, E_2, E_3 bir çatı alanıdır ve A onun duruş matrisidir.
Ek bir gözlem: A'nın determinantı üçüncü satıra göre açılınca

$$
\begin{aligned}
\det A &= -s\,\big(\, cs\cdot(-c) - s\cdot s^2 \,\big) - c\,\big(\, c^2\cdot(-c) - s\cdot sc \,\big)\\
&= s^2(c^2+s^2) + c^2(c^2+s^2) = 1
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu determinant $E_1 \cdot E_2 \times E_3$ üçlü çarpımıdır (Alıştırma 9.11); 1 olması $E_2 \times E_3 = E_1$ demektir, yani çatı sağ el kuralına uyar. $f = 0$ olan bir noktada satırlar $(1,0,0)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$'dır. ■

Alıştırma 15.5 (Bu Duruş Matrisinden Bağlantı Formları). $f, \mathbb{R}^3$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve

$$
A = \begin{pmatrix} \cos^2 f & \cos f \sin f & \sin f \\ \sin f \cos f & \sin^2 f & -\cos f \\ -\sin f & \cos f & 0 \end{pmatrix}
$$

duruş matrisi olan çatı alanı (Alıştırma 15.4) olsun. Bağlantı formlarını hesaplayınız.

Çözüm.
$c = \cos f$, $s = \sin f$ yazalım; bileşke ve çarpım kurallarıyla $dc = -s\,df$, $ds = c\,df$, $d(c^2) = -2cs\,df$, $d(cs) = (c^2 - s^2)\,df$, $d(s^2) = 2sc\,df$. Satırların diferansiyelleri

$$
da_1 = \big(\, -2cs,\, c^2 - s^2,\, c \,\big)\,df, \qquad da_2 = \big(\, c^2 - s^2,\, 2sc,\, s \,\big)\,df
$$

olur (her bileşen df ile çarpılmıştır). Teorem 15.2 ile:

$$
\begin{aligned}
\omega_{12} &= \big(\, sc\cdot(-2cs) + s^2(c^2-s^2) + (-c)\cdot c \,\big)\,df\\
&= (-s^2c^2 - s^4 - c^2)\,df = \big(\, -s^2(c^2+s^2) - c^2 \,\big)\,df = -df,\\
\omega_{13} &= \big(\, (-s)(-2cs) + c\,(c^2-s^2) + 0 \,\big)\,df = (cs^2 + c^3)\,df = \cos f\,df,\\
\omega_{23} &= \big(\, (-s)(c^2-s^2) + c\cdot 2sc + 0 \,\big)\,df = (sc^2 + s^3)\,df = \sin f\,df.
\end{aligned}
$$

Sonuç:

$$
\omega = \begin{pmatrix} 0 & -df & \cos f\,df \\ df & 0 & \sin f\,df \\ -\cos f\,df & -\sin f\,df & 0 \end{pmatrix}.
$$

Denetim olarak bir köşegen girdisini hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
\omega_{11} &= \sum_k a_{1k}\,da_{1k} = \big(\, c^2(-2cs) + cs\,(c^2-s^2) + sc \,\big)\,df\\
&= cs\,(-2c^2 + c^2 - s^2 + 1)\,df = 0,
\end{aligned}
$$

beklendiği gibi.
Üç form da df'nin katlarıdır. Dolayısıyla $df(\mathbf{v}) = 0$ olan her yönde, yani f'nin seviye yüzeylerine teğet her yönde, üç form da sıfırdır: çatı bir seviye yüzeyi üzerinde hareket ederken hiç dönmez ve yalnızca f'nin değiştiği yönlerde döner.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 15.6 (Küresel Çatının Bağlantı Formları Duruş Matrisinden). Küresel çatı alanının bağlantı formlarının

$$\omega_{12} = \cos\varphi\, d\vartheta, \qquad \omega_{13} = d\varphi, \qquad \omega_{23} = \sin\varphi\, d\vartheta$$

olduğunu Teorem 15.2 ile ispatlayınız.

Çözüm.
Duruş matrisinin satırları (Örnek 15.7) şunlardır:

$$\begin{aligned} b_1 &= (\cos\varphi\cos\vartheta,\ \cos\varphi\sin\vartheta,\ \sin\varphi),\\ b_2 &= (-\sin\vartheta,\ \cos\vartheta,\ 0),\\ b_3 &= (-\sin\varphi\cos\vartheta,\ -\sin\varphi\sin\vartheta,\ \cos\varphi). \end{aligned}$$

Çarpım ve bileşke kurallarıyla ilk iki satırın diferansiyelleri:

$$\begin{aligned} db_1 &= \big(-\sin\varphi\cos\vartheta\, d\varphi - \cos\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta,\\ &\qquad -\sin\varphi\sin\vartheta\, d\varphi + \cos\varphi\cos\vartheta\, d\vartheta,\ \cos\varphi\, d\varphi\ \big),\\ db_2 &= \big(-\cos\vartheta\, d\vartheta,\ -\sin\vartheta\, d\vartheta,\ 0\ \big). \end{aligned}$$

Dikkat: $db_1 = d\varphi\, b_3 + \cos\varphi\, d\vartheta\, b_2$ biçiminde yazılabilir; aşağıdaki hesap bunu doğrular.
$\omega_{12} = \sum_k b_{2k}\, db_{1k}$:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= -\sin\vartheta\,(-\sin\varphi\cos\vartheta\, d\varphi - \cos\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta)\\ &\quad + \cos\vartheta\,(-\sin\varphi\sin\vartheta\, d\varphi + \cos\varphi\cos\vartheta\, d\vartheta)\\ &= (\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta)\, d\varphi + \cos\varphi\,(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)\, d\vartheta\\ &= \cos\varphi\, d\vartheta. \end{aligned}$$

$\omega_{13} = \sum_k b_{3k}\, db_{1k}$: $d\varphi$ terimlerinin katsayısı

$$\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\varphi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

$d\vartheta$ terimlerininki

$$\sin\varphi\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta = 0$$

olduğundan $\omega_{13} = d\varphi$.
$\omega_{23} = \sum_k b_{3k}\, db_{2k}$:

$$\omega_{23} = (-\sin\varphi\cos\vartheta)(-\cos\vartheta\, d\vartheta) + (-\sin\varphi\sin\vartheta)(-\sin\vartheta\, d\vartheta) + 0 = \sin\varphi\, d\vartheta.$$

Üç form da iddia edildiği gibidir ve Örnek 15.12'de silindirik çatının bağlantı denklemlerinden bulduğumuz sonuçla örtüşür. Hesap, ϑ ile φ'nin tanımlı olduğu her açık kümede yapılabilir; sonuçtaki $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $d\vartheta$ ve $d\varphi$ ise z ekseni dışında her yerde tanımlıdır.
■

Alıştırma 15.7 (Çatıya Göre Kovaryant Türev Formülü). E_1, E_2, E_3, bağlantı formları ω_{ij} olan bir çatı alanı ve $W = \sum_i f_i E_i$ bir vektör alanı olsun. Her V vektör alanı için

$$\nabla_V W = \sum_{j=1}^{3} \Big\{\, V[f_j] + \sum_{i=1}^{3} f_i\, \omega_{ij}(V) \,\Big\} E_j$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Kovaryant türevin lineerliği ve fonksiyonla çarpım için Leibniz kuralı (Sonuç 13.1, (2) ve (3)) ile

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{3} \nabla_V(f_i E_i) = \sum_{i=1}^{3} \big(\, V[f_i]\, E_i + f_i\, \nabla_V E_i \,\big)\,.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

(Lineerlik kuralı sayı katsayılar için yazılmıştı; burada toplamın terimlerini ayırmak için yalnızca $a = b = 1$ durumunu kullanıyoruz.) İkinci terime bağlantı denklemlerini (Teorem 15.1) uygularız:

$$\sum_{i=1}^{3} f_i \, \nabla_V E_i = \sum_{i=1}^{3} f_i \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(V)\, E_j = \sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} f_i \, \omega_{ij}(V) \Big)\, E_j .$$

İlk terimde toplama indisini j diye adlandırırsak $\sum_j V[f_j]\, E_j$ olur. İki toplam aynı E_j'ler üzerinden olduğundan birleştirilir ve iddia edilen formül çıkar.
Yani bir alanın çatıya göre koordinatları f_j ise kovaryant türevin koordinatları iki parçadan oluşur: $V[f_j]$, katsayıların kendi değişimidir; $\sum_i f_i\, \omega_{ij}(V)$ ise çatının dönmesinden gelen düzeltmedir. Doğal çatıda $\omega = 0$ olduğundan yalnızca ilk parça kalır ve Lemma 13.2 geri gelir. Açık yazılışta, ters simetri kullanılarak:

$$\begin{aligned} \nabla_V W = {} & \big(\, V[f_1] - f_2\, \omega_{12}(V) - f_3\, \omega_{13}(V) \, \big) E_1 \\ & + \big(\, V[f_2] + f_1\, \omega_{12}(V) - f_3\, \omega_{23}(V) \, \big) E_2 \\ & + \big(\, V[f_3] + f_1\, \omega_{13}(V) + f_2\, \omega_{23}(V) \, \big) E_3 . \end{aligned}$$

Küçük bir denetim: silindirik çatıda $W = rE_2$ dönme alanıdır (Örnek 14.16) ve $V = E_2$ olsun. $f_2 = r$, öteki katsayılar sıfır; $E_2[r] = dr(E_2) = 0$ ve $\omega_{12}(E_2) = d\vartheta(E_2) = 1/r$. Formül $\nabla_{E_2} W = -r \cdot \frac{1}{r} E_1 = -E_1$ verir: dönme alanı çember boyunca yürürken merkeze doğru döner.
■

Alıştırma 15.8 (Silindirik Çatıda Bir Kovaryant Türev). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı ve $V, V[r] = r$ ile $V[\vartheta] = 1$ koşullarını sağlayan bir vektör alanı olsun. $\nabla_V(r\cos\vartheta\, E_1 + r\sin\vartheta\, E_3)$'ü hesaplayınız.

Çözüm.
$W = r\cos\vartheta\, E_1 + r\sin\vartheta\, E_3$ yazalım; silindirik çatıya göre koordinatları $f_1 = r\cos\vartheta$, $f_2 = 0$, $f_3 = r\sin\vartheta$'dır. Silindirik çatıda tek sıfırdan farklı bağlantı formu $\omega_{12} = d\vartheta$'dır ve $\omega_{12}(V) = V[\vartheta] = 1$. Alıştırma 15.7'nün açık yazılışında $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$ ve $f_2 = 0$ koyarız:

$$\nabla_V W = V[f_1]\, E_1 + f_1\, \omega_{12}(V)\, E_2 + V[f_3]\, E_3 .$$

Leibniz kuralı ve bileşke kuralıyla

$$\begin{aligned} V[r\cos\vartheta] &= V[r]\cos\vartheta - r\sin\vartheta\, V[\vartheta] = r\cos\vartheta - r\sin\vartheta , \\ V[r\sin\vartheta] &= V[r]\sin\vartheta + r\cos\vartheta\, V[\vartheta] = r\sin\vartheta + r\cos\vartheta . \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\nabla_V W = r(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\, E_1 + r\cos\vartheta\, E_2 + r(\sin\vartheta + \cos\vartheta)\, E_3 .$$

Denetim. Koşulları sağlayan bir alan bulalım. $dr = (x\,dx + y\,dy)/r$ olduğundan $V[r] = V \cdot E_1$, ve $V[\vartheta] = (V \cdot E_2)/r$'dir (Örnek 15.3). Koşullar $V \cdot E_1 = r$ ve $V \cdot E_2 = r$ olur; örneğin $V = rE_1 + rE_2$, yani $V = (x - y)\, U_1 + (x + y)\, U_2$. Öte yandan $W = x\,(x/r, y/r, 0) + y\,(0, 0, 1)$, yani $W = (x^2/r)\, U_1 + (xy/r)\, U_2 + y\, U_3$. $\mathbf{p} = (3, 4, 0)$ noktasında $r = 5$, $V(\mathbf{p}) = (-1, 7, 0)$ ve koordinat formülüyle

$$\begin{aligned} V\!\left[\frac{x^2}{r}\right] &= -1 \cdot \frac{x(x^2 + 2y^2)}{r^3} + 7 \cdot \left(-\frac{x^2 y}{r^3} \right) = \frac{-123 - 252}{125} = -3 , \\ V\!\left[\frac{xy}{r}\right] &= -1 \cdot \frac{y^3}{r^3} + 7 \cdot \frac{x^3}{r^3} = \frac{-64 + 189}{125} = 1 , \\ V[y] &= 7 \end{aligned}$$

bulunur; $\nabla_V W = (-3, 1, 7)_{\mathbf{p}}$. Formülümüz ise $\cos\vartheta = 3/5$, $\sin\vartheta = 4/5$ ile $-E_1 + 3E_2 + 7E_3$ verir; bu da

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)+3\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)+7\,(0,0,1)=(-3,1,7)$$

vektörüdür. İki hesap uyuşur.
■

Alıştırma 15.9 (Bağlantı Formlarını Hesaplayan Bir Komut). Bir çatı alanının duruş matrisi A verildiğinde bağlantı formlarının matrisi $\omega = dA\,A^{T}$'yi döndüren bir bilgisayar komutu yazınız.

Çözüm.
Komutun yapacağı iş, Teorem 15.2'nün üç adımıdır: girdilerin diferansiyelini almak, transpozla çarpmak ve sonucu sadeleştirmek. Bir 1-formu $f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$ biçiminde, katsayılarıyla tutarız (Lemma 5.1). Bir fonksiyonun diferansiyeli $df = \sum_i (\partial f/\partial x_i)\,dx_i$ formülüyle (Sonuç 5.1) hesaplanır. Aşağıdaki Python komutu sembolik hesap kütüphanesi SymPy ile bunu yapar; dx, dy, dz biçimsel semboller olarak tutulur. Bu hesapta 1-formlar yalnızca toplanıp fonksiyonlarla çarpıldığı, birbirleriyle hiç çarpılmadığı için bu yeterlidir.

```
import sympy as sp

x, y, z = sp.symbols("x y z", real=True)
dx, dy, dz = sp.symbols("dx dy dz")  # formal symbols for dx, dy, dz


def d(f):
    """Differential of a function: df = f_x dx + f_y dy + f_z dz."""
    return sp.diff(f, x) * dx + sp.diff(f, y) * dy + sp.diff(f, z) * dz


def connection_forms(A):
    """Connection forms omega = dA * A^T of the frame field with attitude matrix A."""
    A = sp.Matrix(A)
    omega = A.applyfunc(d) * A.T
    return omega.applyfunc(
        lambda w: sp.collect(sp.simplify(sp.expand(w)), [dx, dy, dz]))
```

`A.applyfunc(d)` girdi girdi diferansiyel alarak dA'yı, `A.T` transpozu verir; `*` matris çarpımıdır. Son satır her girdiyi sadeleştirip dx, dy, dz katsayılarına göre toplar. Duruş matrisi, girdileri x, y, z cinsinden yazılmış bir 3×3 liste olarak verilir.
■

Alıştırma 15.10 (Komutun Silindirik Çatıda Denenmesi). Alıştırma 15.9'daki komutu silindirik çatı alanında deneyiniz ve sonucu Örnek 15.8 ile karşılaştırınız.

Çözüm.
Komut Öklid koordinatlarıyla çalıştığından duruş matrisini $\cos\vartheta = x/r$, $\sin\vartheta = y/r$ ile yazarız:

```
r = sp.sqrt(x**2 + y**2)
cylindrical = [[x / r, y / r, 0],
               [-y / r, x / r, 0],
               [0, 0, 1]]
omega = connection_forms(cylindrical)
```

Çıktı, köşegeni ve üçüncü satırı ile üçüncü sütunu sıfır olan ters simetrik bir matristir; tek sıfırdan farklı üst girdi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\omega_{12} = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

ve $\omega_{21} = -\omega_{12}$'dir. Örnek 15.3'e göre sağ taraf tam olarak $d\vartheta$'dır. Sonuç Örnek 15.8'deki $\omega_{12} = d\vartheta$, $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$ ile aynıdır.
Elle hesapla da doğrulayabiliriz: $d(x/r) = (y^2\,dx - xy\,dy)/r^3$ ve $d(y/r) = (-xy\,dx + x^2\,dy)/r^3$ olduğundan (Alıştırma 14.13'daki kısmi türevler)

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= -\frac{y}{r}\cdot\frac{y^2\,dx - xy\,dy}{r^3} + \frac{x}{r}\cdot\frac{-xy\,dx + x^2\,dy}{r^3}\\ &= \frac{-y(x^2+y^2)\,dx + x(x^2+y^2)\,dy}{r^4},\end{aligned}$$

yani $(-y\,dx + x\,dy)/r^2$.
■

Alıştırma 15.11 (Komutun Küresel Çatıda Denenmesi). Alıştırma 15.9'daki komutu küresel çatı alanında deneyiniz ve sonucu Alıştırma 15.6 ile karşılaştırınız.

Çözüm.
$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ve $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ile $\cos\varphi = r/\rho$, $\sin\varphi = z/\rho$, $\cos\vartheta = x/r$, $\sin\vartheta = y/r$'dir; duruş matrisinin satırları

$$F_1 : \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right), \qquad F_2 : \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right), \qquad F_3 : \left(-\frac{xz}{r\rho}, -\frac{yz}{r\rho}, \frac{r}{\rho}\right)$$

olur:

```
rho = sp.sqrt(x**2 + y**2 + z**2)
spherical = [[x / rho, y / rho, z / rho],
             [-y / r, x / r, 0],
             [-x * z / (r * rho), -y * z / (r * rho), r / rho]]
omega = connection_forms(spherical)
```

Komutun verdiği üst girdiler (sadeleştirilmiş biçimde)

$$\omega_{12} = \frac{-y\,dx + x\,dy}{r\rho},$$
$$\omega_{13} = \frac{-xz\,dx - yz\,dy + r^2\,dz}{r\rho^2},$$
$$\omega_{23} = \frac{z\,(-y\,dx + x\,dy)}{r^2\rho}$$

olur. Bunları tanıyalım. $d\vartheta = (-y\,dx + x\,dy)/r^2$, $\cos\varphi = r/\rho$ ve $\sin\varphi = z/\rho$ olduğundan

$$\cos\varphi\,d\vartheta = \frac{-y\,dx + x\,dy}{r\rho} = \omega_{12}, \qquad \sin\varphi\,d\vartheta = \frac{z\,(-y\,dx + x\,dy)}{r^2\rho} = \omega_{23}.$$

Son olarak Örnek 15.12'deki formülde $dr = (x\,dx + y\,dy)/r$ yazılınca

$$d\varphi = \frac{r\,dz - z\,dr}{\rho^2} = \frac{r^2\,dz - xz\,dx - yz\,dy}{r\rho^2},$$

yani ω_{13}. Komut, Alıştırma 15.6'deki $\omega_{12} = \cos\varphi\,d\vartheta$, $\omega_{13} = d\varphi$, $\omega_{23} = \sin\varphi\,d\vartheta$ sonucunu Öklid koordinatlarıyla yeniden üretir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 15.12 (Bağlantı Formlarından Frenet Formüllerine). $\beta, \kappa > 0$ olan birim hızlı bir eğri ve $E_1, E_2, E_3, \mathbb{R}^3$ üzerinde, kısıtlanışları β boyunca β'nın Frenet çatısı T, N, B'yi veren bir çatı alanı olsun: her s için $E_1(\beta(s)) = T(s)$, $E_2(\beta(s)) = N(s)$, $E_3(\beta(s)) = B(s)$. Her s için

$$\omega_{12}(T) = \kappa, \qquad \omega_{13}(T) = 0, \qquad \omega_{23}(T) = \tau$$

olduğunu ispatlayınız; burada $\omega_{ij}(T)$, $s \mapsto \omega_{ij}\,\big(\,T(s)\,\big)$ fonksiyonudur.

Çözüm.
β birim hızlı olduğundan $\beta'(s) = T(s)$'dir. Varsayım gereği $(E_1)_\beta = T$, $(E_2)_\beta = N$, $(E_3)_\beta = B$'dir. Sonuç 15.1'yı $\alpha = \beta$ ile uygularsak, ters simetri ve $\omega_{ii} = 0$ ile,

$$T' = \omega_{12}(T)\,N + \omega_{13}(T)\,B,$$
$$N' = -\omega_{12}(T)\,T + \omega_{23}(T)\,B$$

bulunur. Öte yandan Frenet formüllerine (Teorem 11.1) göre

$$T' = \kappa N, \qquad N' = -\kappa T + \tau B.$$

Her s'de $T(s), N(s), B(s)$ bir çatıdır (Lemma 11.1) ve bir vektörün bir çatıya göre açılımındaki katsayılar tektir (Teorem 9.1): katsayılar, vektörün çatı üyeleriyle iç çarpımlarıdır. T''nün iki açılımını karşılaştırınca N katsayılarından $\omega_{12}(T) = \kappa$, B katsayılarından $\omega_{13}(T) = 0$ çıkar. N''nün iki açılımında B katsayıları $\omega_{23}(T) = \tau$ verir (T katsayıları $-\omega_{12}(T) = -\kappa$ ile tutarlıdır).
$B' = -\tau N$ formülü üçüncü bağlantı denkleminden de okunur:

$$B' = -\omega_{13}(T)\,T - \omega_{23}(T)\,N = -\tau N.$$

Yani Frenet formülleri, eğriye uyarlanmış bir çatı alanının bağlantı denklemlerinin eğri boyunca yazılışıdır; eğrilik ve burulma, bağlantı formlarının birim teğete uygulanmasıyla okunur. Örnek 15.5 bunun somut bir örneğiydi: orada $\omega_{12}(T) = a/c^2$ ve $\omega_{23}(T) = b/c^2$ bulmuştuk.
■

Bu bölümde bir çatı alanının kovaryant türevlerini çatının kendisi cinsinden yazan bağlantı formlarını tanımladık, bunların ters simetrik 1-formlar olduğunu ve bağlantı denklemleriyle çatının bütün dönme hızlarını taşıdığını gördük, Frenet formüllerini bu denklemlerin bir eğri boyunca yazılışı olarak yeniden bulduk ve bağlantı formlarını duruş matrisinden $\omega = dA\,A^T$ formülüyle hesapladık. Sıradaki bölümde (Cartan Yapı Denklemleri) çatı alanının dual 1-formlarını tanımlayacak ve bağlantı formlarının dış türevlerinin bunlarla nasıl bağlandığını gösteren yapı denklemlerini çıkaracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

16. Cartan Yapı Denklemleri

Önceki bölümde (Bağlantı Formları) bir çatı alanının noktadan noktaya nasıl döndüğünü tek bir ters simetrik matrisle, bağlantı formlarının $\omega = (\omega_{ij})$ matrisiyle ölçtük (Tanım 15.1): her V vektör alanı için $\nabla_V E_i = \sum_j \omega_{ij}(V)\, E_j$ bağlantı denklemleri geçerlidir (Teorem 15.1) ve $\omega = dA\, A^T$ eşitliği bu formları duruş matrisinden hesaplamamızı sağlar (Teorem 15.2). Böylece çatının dönme hızı, 1-formların diliyle anlatılmış oldu.

Bu bölümde iki soru soruyoruz. Birincisi: çatı alanının kendisi de 1-formlarla anlatılabilir mi? Yanıt evettir. Her çatı alanının yanında, bir teğet vektörün o çatıya göre koordinatlarını okuyan üç 1-form gelir; bunlara dual 1-formlar diyeceğiz. Doğal çatı alanı U_1, U_2, U_3 için bu formlar tanıdık dx_1, dx_2, dx_3'tür. İkincisi: elimizde artık bir çatı alanına bağlı iki takım 1-form var, dual formlar ve bağlantı formları. Analizde yeni bir fonksiyon ortaya çıktığında ilk sorduğumuz şey türevidir; 1-formlar için bunun karşılığı dış türevdir. Bu formların dış türevleri nedir? Yanıtı Cartan'ın yapı denklemleri verir: dış türevler yine yalnızca bu formların kama çarpımlarıyla yazılır, dışarıdan hiçbir şey gerekmez.

Bölümün planı şöyledir. Önce dual 1-formları tanımlayıp her 1-formun onlarla tek türlü açıldığını göreceğiz; bu, bir vektör alanının çatı alanına göre açılımının 1-formlardaki karşılığıdır. Sonra dual formları duruş matrisiyle yazacak, silindirik ve küresel koordinatların bilinen "küçük kutu" resmini bu formlarla açıklayacağız. Ardından Cartan'ın bakış açısını benimseyip girdileri form olan matrislerle çalışmayı öğrenecek ve yapı denklemlerini birkaç satırda ispatlayacağız. Son olarak denklemleri somut çatılarda doğrulayacak ve onları bir geometri problemini çözmek için nasıl kullanacağımızı göreceğiz.

16.1 Dual 1-Formlar

Bir çatı alanını 1-formlarla anlatmanın yolu, her noktadaki çatıya göre koordinat almaktır. Bir $\mathbf{p}$ noktasındaki bir $\mathbf{v}$ teğet vektörünü o noktadaki $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ çatısında açarsak (Teorem 9.1)

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \big(\ \mathbf{v} \cdot E_i(\mathbf{p})\ \big)\, E_i(\mathbf{p})$$

olur. Katsayılar, $\mathbf{v}$'yi alıp bir sayı veren üç kuraldır. Bu kuralları adlandıralım.

Tanım 16.1 (Dual 1-Formlar). E_1, E_2, E_3, $\mathbb{R}^3$ üzerinde (ya da $\mathbb{R}^3$'ün bir açık alt kümesi üzerinde) bir çatı alanı olsun. $i = 1, 2, 3$ için her $\mathbf{p}$ noktasındaki her $\mathbf{v}$ teğet vektörüne

$$\theta_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot E_i(\mathbf{p})$$

sayısını karşılık getiren $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ fonksiyonlarına çatı alanının **dual 1-formları** (dual 1-forms) denir.

Yani θ_i bir ölçüm aygıtıdır: bir teğet vektörün, uygulandığı noktadaki çatının i-inci ekseni yönündeki bileşenini okur. Üç dual form birlikte, bir teğet vektörün çatıya göre üç koordinatını verir. Doğal çatıda bu işi dx_1, dx_2, dx_3 yapar; dual formlar aynı işi keyfi bir çatı alanı için yapar.

Adın hak edildiğini, yani θ_i'lerin gerçekten 1-form olduğunu ve çatı alanıyla nasıl eşleştiğini gösterelim.

Lemma 16.1 (Dual Formların Temel Özellikleri). *E_1, E_2, E_3 bir çatı alanı ve $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dual 1-formları olsun. O zaman her θ_i diferansiyellenebilir bir 1-formdur ve her $1 \le i, j \le 3$ için*

$$\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$$

olur.

> ***İspat.***
> Her noktada lineerlik. *Aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ teğet vektörleri ve a, b sayıları için, teğet vektörlerin iç çarpımı bilineer olduğundan (Önerme 9.3)*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\theta_i(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = (a\mathbf{v}+b\mathbf{w})\cdot E_i(\mathbf{p}) = a\,\mathbf{v}\cdot E_i(\mathbf{p}) + b\,\mathbf{w}\cdot E_i(\mathbf{p}) = a\,\theta_i(\mathbf{v}) + b\,\theta_i(\mathbf{w}).$$

Dolayısıyla θ_i bir 1-formdur (Tanım 5.1).
Diferansiyellenebilirlik. *V bir vektör alanı olsun. Her $\mathbf{p}$'de $\theta_i(V)(\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})\cdot E_i(\mathbf{p})$ olduğundan $\theta_i(V) = V\cdot E_i$, iki vektör alanının iç çarpımıdır ve Lemma 14.1 gereği diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Bu, Tanım 5.4'in istediği şeydir.*
Çatı alanındaki değerler. *$\theta_i(E_j)$ fonksiyonu her noktada $E_j(\mathbf{p})\cdot E_i(\mathbf{p})$ değerini alır; yani $\theta_i(E_j) = E_j\cdot E_i = \delta_{ij}$'dir (Tanım 14.2).*
■

Yani θ_i, kendi alanı E_i üzerinde 1, öteki iki alan üzerinde 0 değerini alır. Doğrusal cebirde bir e_1, e_2, e_3 tabanı için $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$ koşulunu sağlayan lineer fonksiyonellere **dual taban** denir. Buna göre her $\mathbf{p}$ noktasında $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, $T_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^3)$'ün $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ tabanının dual tabanıdır; "dual 1-form" adı buradan gelir.

Örnek 16.1 (Doğal Çatının Dual Formları). Doğal çatı alanı U_1, U_2, U_3'ün dual 1-formlarını bulalım.

Çözüm.
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ olsun. $U_i(\mathbf{p})$'nin vektör kısmı i-inci yeri 1, ötekileri 0 olan vektör olduğundan

$$\theta_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot U_i(\mathbf{p}) = v_i$$

bulunur. Öte yandan Örnek 5.13'nde $dx_i(\mathbf{v}) = v_i$ olduğunu görmüştük. İki 1-form her teğet vektörde aynı değeri aldığından

$$\theta_1 = dx_1, \qquad \theta_2 = dx_2, \qquad \theta_3 = dx_3.$$

Yani koordinat diferansiyelleri, doğal çatının dual formlarıdır. Lemma 16.1'deki $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$ eşitliği burada $dx_i(U_j) = \delta_{ij}$ olur; bunu $U_j[x_i] = \partial x_i/\partial x_j$ hesabından da biliyoruz.
■

Doğal çatıda bu kadar sade olan formlar, dönen bir çatıda her noktada başka bir üçlü seçer. Bir sayısal örnekte bu okumayı resimle görelim.

Örnek 16.2 (Silindirik Çatının Dual Formları Bir Vektörde). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı (Örnek 14.9), $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dual 1-formları olsun. $\mathbf{p} = (3,4,2)$ ve $\mathbf{v} = (1,2,5)_{\mathbf{p}}$ için $\theta_1(\mathbf{v})$, $\theta_2(\mathbf{v})$, $\theta_3(\mathbf{v})$ sayılarını bulalım ve $\mathbf{v}$'yi bu sayılarla yeniden kuralım.

Çözüm.
Çatı. $\mathbf{p}$'de $r = 5$'tir ve Örnek 14.9'teki tabloya göre $E_1(\mathbf{p})$, $E_2(\mathbf{p})$, $E_3(\mathbf{p})$'nin vektör kısımları $(3/5, 4/5, 0)$, $(-4/5, 3/5, 0)$ ve $(0,0,1)$'dir.
Değerler. Tanımla

$$\begin{aligned}
\theta_1(\mathbf{v}) &= 1\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\frac{4}{5} + 5\cdot 0 = \frac{11}{5},\\
\theta_2(\mathbf{v}) &= 1\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\cdot\frac{3}{5} + 5\cdot 0 = \frac{2}{5},\\
\theta_3(\mathbf{v}) &= 5.
\end{aligned}$$

Yeniden kurma. Ortonormal açılıma göre $\mathbf{v} = \sum_i \theta_i(\mathbf{v})\,E_i(\mathbf{p})$ olmalıdır:

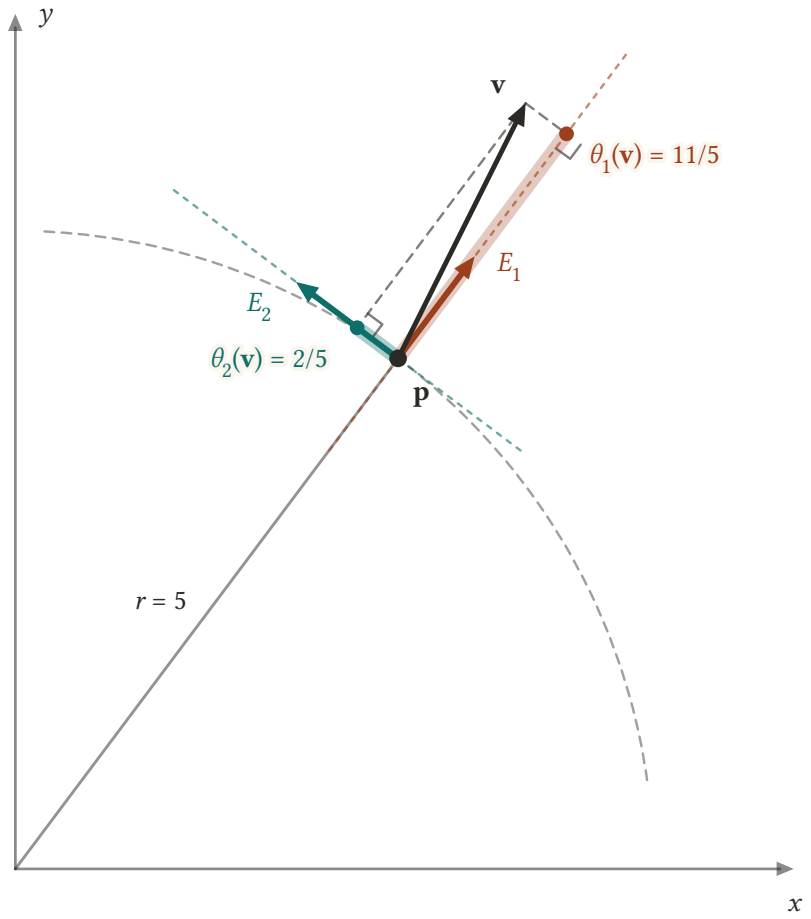
$$\frac{11}{5}\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right) + 5\,(0,0,1) = \left(\frac{33-8}{25}, \frac{44+6}{25}, 5\right) = (1,2,5).$$

Uzunluk da tutar: $1 + 4 + 25 = 30$ ve

$$\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 5^2 = \frac{121}{25} + \frac{4}{25} + 25 = 30.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yorum. $\theta_1(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}$'nin z ekseninden dışa doğru bileşenidir; $\theta_2(\mathbf{v})$ dönme yönündeki bileşenidir ve küçüktür, çünkü $(1,2)$ yatay kısmı neredeyse $\mathbf{p}$'nin kendi doğrultusundadır; $\theta_3(\mathbf{v})$ ise düşey bileşendir. Aynı $\mathbf{v}$ vektörü doğal çatıda $(1,2,5)$, silindirik çatıda $(11/5, 2/5, 5)$ koordinatlarını taşır.



Şekil 16.1: $\mathbf{p} = (3, 4, 2)$ noktasından geçen yatay düzlem, yukarıdan. Silindirik çatının $E_1(\mathbf{p})$ (turuncu) ve $E_2(\mathbf{p})$ (yeşil) okları ile $\mathbf{v} = (1, 2, 5)$ vektörünün yatay kısmı $(1, 2)$ çizilmiştir. $\mathbf{v}$'nin E_1 doğrultusundaki dik izdüşümünün uzunluğu $\theta_1(\mathbf{v}) = 11/5$, E_2 doğrultusundakinin uzunluğu $\theta_2(\mathbf{v}) = 2/5$'tir. Üçüncü dual form $\mathbf{v}$'nin düşey bileşenini okur: $\theta_3(\mathbf{v}) = 5$; bu bileşen yukarıdan bakışta görünmez.

■

Dual formlar tek tek vektörler yerine vektör alanlarına uygulandığında, çatı alanına göre açılımı (Lemma 14.3) yeni bir yazılışla verir. V bir vektör alanıysa her noktada $\theta_i(V) = V \cdot E_i$ olduğunu yukarıdaki ispatta gördük; dolayısıyla

$$V = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(V)\, E_i.$$

Örneğin silindirik çatı için Alıştırma 14.2'te bulduğumuz $U_1 = \cos\vartheta\, E_1 - \sin\vartheta\, E_2$ açılımının katsayıları $\theta_1(U_1) = \cos\vartheta$, $\theta_2(U_1) = -\sin\vartheta$ ve $\theta_3(U_1) = 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Bir 1-Formun Dual Formlarla Açılımı

Az önceki formül, bir vektör alanını çatı alanı cinsinden yazmak için onu dual formlarla ölçmenin yettiğini söyler. Dualitenin tipik bir oyunuyla rolleri değiştirelim: bu kez bir 1-formu dual formlar cinsinden yazmak istiyoruz ve katsayıları formu çatı alanında ölçerek bulacağız.

Lemma 16.2 (Bir 1-Formun Dual Formlarla Açılımı). *$\theta_1, \theta_2, \theta_3$, $\mathbb{R}^3$ ya da $\mathbb{R}^3$'ün bir açık alt kümesi üzerinde tanımlı bir E_1, E_2, E_3 çatı alanının dual 1-formları olsun. O zaman bu küme üzerindeki her ϕ 1-formu*

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi(E_i)\, \theta_i$$

biçiminde yazılır. Bu yazılış tektir: g_1, g_2, g_3 fonksiyonları için $\phi = \sum_i g_i\, \theta_i$ ise her i için $g_i = \phi(E_i)$ olur.

> ***İspat.***
> Eşitlik. *İki 1-form her teğet vektörde aynı değeri alıyorsa eşittir. Bir $\mathbf{p}$ noktasında bir $\mathbf{v}$ teğet vektörü alalım. Toplam ve fonksiyonla çarpım noktasal tanımlandığından (Tanım 5.2) sağ yanın $\mathbf{v}$'deki değeri*
>
> $$\sum_{i=1}^{3} \phi\,\big(\ E_i(\mathbf{p})\ \big)\,\theta_i(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{3} \big(\ \mathbf{v}\cdot E_i(\mathbf{p})\ \big)\,\phi\,\big(\ E_i(\mathbf{p})\ \big)$$
>
> *sayısıdır. ϕ, $\mathbf{p}$'deki teğet vektörler üzerinde lineer olduğundan bu toplam*
>
> $$\phi\left(\sum_{i=1}^{3} \big(\ \mathbf{v}\cdot E_i(\mathbf{p})\ \big)\, E_i(\mathbf{p})\right)$$
>
> *sayısına eşittir. Parantezin içi, ortonormal açılım (Teorem 9.1) gereği $\mathbf{v}$'nin kendisidir. Dolayısıyla sağ yanın $\mathbf{v}$'deki değeri $\phi(\mathbf{v})$'dir.*
> Katsayılar. *ϕ diferansiyellenebilir bir 1-form, E_i bir vektör alanı olduğundan $\phi(E_i)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur (Tanım 5.4). Yani sağ yan, diferansiyellenebilir katsayılarla yazılmış bir 1-formdur.*
> Teklik. *$\phi = \sum_i g_i\, \theta_i$ olsun. İki yanı E_j alanında değerlendirelim. Lemma 16.1 gereği*
>
> $$\phi(E_j) = \sum_{i=1}^{3} g_i\, \theta_i(E_j) = \sum_{i=1}^{3} g_i\, \delta_{ij} = g_j.$$
>
> ■

Yani bir 1-formu dual formlarla açmak için onu çatı alanının üç alanında değerlendirmek yeter. $E_i = U_i$ özel durumunda $\theta_i = dx_i$ olduğundan bu, bir 1-formun Öklid koordinat fonksiyonlarını veren Lemma 5.1'dır; lemma o sonucu keyfi çatı alanlarına genişletir. İki açılım yan yana şöyledir:

$$V = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(V)\, E_i, \qquad \phi = \sum_{i=1}^{3} \phi(E_i)\, \theta_i.$$

Vektör alanı, formlarla ölçülüp çatının alanlarıyla yeniden kurulur; 1-form, alanlarla ölçülüp dual formlarla yeniden kurulur.
En önemli 1-formlar diferansiyellerdir. Onlar için lemmanın katsayıları yönlü türevlerdir.

Sonuç 16.1 (Diferansiyelin Dual Formlarla Açılımı). *E_1, E_2, E_3 bir çatı alanı, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dual 1-formları ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$df = E_1[f]\, \theta_1 + E_2[f]\, \theta_2 + E_3[f]\, \theta_3.$$

> ***İspat.***
> *Lemma 16.2'ni $\phi = df$ için uygularız: $df = \sum_i df(E_i)\, \theta_i$. Önerme 5.3 gereği her vektör alanı için $df(V) = V[f]$ olduğundan $df(E_i) = E_i[f]$'dir.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir fonksiyonun diferansiyelinin çatı alanına göre katsayıları, fonksiyonun çatının üç yönündeki değişim hızlarıdır. Doğal çatıda bu, bildiğimiz $df = \sum_i (\partial f/\partial x_i)\, dx_i$ formülüdür (Sonuç 5.1), çünkü $U_i[f] = \partial f/\partial x_i$'dir.

Örnek 16.3 (Dönme Formunun Silindirik Açılımı). $\phi = -y\,dx + x\,dy$ 1-formunu silindirik çatı alanının dual formları cinsinden yazalım.

Çözüm.
Katsayılar. Lemma 16.2'ne göre katsayılar $\phi(E_i)$'dir. $E_1 = (x/r)\,U_1 + (y/r)\,U_2$, $E_2 = -(y/r)\,U_1 + (x/r)\,U_2$ ve $E_3 = U_3$ olduğundan, $\phi(U_1) = -y$, $\phi(U_2) = x$, $\phi(U_3) = 0$ değerleri ve değerlendirmenin lineerliğiyle (Önerme 5.2)

$$\begin{aligned}
\phi(E_1) &= \frac{x}{r}\,(-y) + \frac{y}{r}\,x = 0,\\
\phi(E_2) &= -\frac{y}{r}\,(-y) + \frac{x}{r}\,x = \frac{x^2+y^2}{r} = r,\\
\phi(E_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Sonuç. $\phi = r\,\theta_2$. Doğal çatıda iki terimli olan form, silindirik çatıda tek terimlidir: ϕ bir vektörün yalnızca dönme yönündeki bileşenini okur ve onu r ile çarpar.
Sağlama. $\mathbf{p} = (3,4,2)$ ve $\mathbf{v} = (1,2,5)_{\mathbf{p}}$ için doğrudan $\phi(\mathbf{v}) = -4\cdot 1 + 3\cdot 2 = 2$ bulunur. Öte yandan Örnek 16.2'da $\theta_2(\mathbf{v}) = 2/5$ bulmuştuk ve $r\,\theta_2(\mathbf{v}) = 5\cdot 2/5 = 2$ olur.
■

Örnek 16.4 (Yükseklik Diferansiyelinin Küresel Açılımı). dz 1-formunu küresel çatı alanı F_1, F_2, F_3'ün (Örnek 14.12) dual formları $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ cinsinden yazalım.

Çözüm.
Katsayılar. Sonuç 16.1'ne göre katsayılar $F_i[z]$'dir. Bir $V = \sum_j v_j U_j$ alanı için $V[z] = v_3$ olduğundan $F_i[z]$, F_i'nin U_3 katsayısıdır. Örnek 14.12'deki açık formüllerden

$$F_1[z] = \sin\varphi, \qquad F_2[z] = 0, \qquad F_3[z] = \cos\varphi.$$

Sonuç.

$$dz = \sin\varphi\,\theta_1 + \cos\varphi\,\theta_3.$$

Aynı katsayılar Örnek 14.15'deki $U_3 = \sin\varphi\,F_1 + \cos\varphi\,F_3$ açılımında da görünür. Bu bir rastlantı değildir: U_3'ün F_i'ye göre katsayısı $U_3 \cdot F_i$, dz'nin θ_i'ye göre katsayısı $F_i[z] = F_i \cdot U_3$'tür ve ikisi aynı sayıdır.
Sağlama. $\mathbf{p} = (2,2,1)$ noktasında Örnek 14.14'ya göre $\sin\varphi = 1/3$, $\cos\varphi = 2\sqrt{2}/3$ ve $F_1(\mathbf{p})$, $F_3(\mathbf{p})$'nin vektör kısımları $(2/3, 2/3, 1/3)$ ve $(-\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/6, 2\sqrt{2}/3)$'tür. $\mathbf{v} = (1,1,1)_{\mathbf{p}}$ için $dz(\mathbf{v}) = 1$'dir. Öte yandan

$$\theta_1(\mathbf{v}) = \frac{2+2+1}{3} = \frac{5}{3}, \qquad \theta_3(\mathbf{v}) = -\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ve

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1.$$

■

Örnek 16.5 (Eksene Uzaklığın Karesinin Diferansiyeli). $f = x^2 + y^2$ fonksiyonunun diferansiyelini silindirik çatı alanının dual formları cinsinden yazalım.

Çözüm.
Yönlü türevler. $\partial f/\partial x = 2x$, $\partial f/\partial y = 2y$, $\partial f/\partial z = 0$'dır. E_1, E_2, E_3'ün koordinat fonksiyonlarıyla

$$E_1[f] = \frac{x}{r}\,2x + \frac{y}{r}\,2y = \frac{2(x^2+y^2)}{r} = 2r,$$
$$E_2[f] = -\frac{y}{r}\,2x + \frac{x}{r}\,2y = 0,$$
$$E_3[f] = 0.$$

Sonuç. Sonuç 16.1 ile $df = 2r\,\theta_1$. Bu beklenen bir sonuçtur: $f = r^2$ yalnızca z eksenine uzaklığa bağlıdır, dolayısıyla dönme yönünde ya da düşey yönde ilerlerken değişmez; dışa doğru birim hızla ilerlerken ise r birim hızla artar ve r^2, $2r$ hızıyla artar.
Sağlama. $\mathbf{p} = (3,4,2)$ ve $\mathbf{v} = (1,2,5)_{\mathbf{p}}$ için

$$df(\mathbf{v}) = \mathbf{v}[f] = 2\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 2 = 22;$$

öte yandan $2r\,\theta_1(\mathbf{v}) = 10\cdot 11/5 = 22$.
■

16.3 Dual Formlar ve Duruş Matrisi

Bir çatı alanını doğal çatıyla duruş matrisi üzerinden karşılaştırıyorduk. Çatı alanının duruş matrisi $A = (a_{ij})$, girdileri $a_{ij} = E_i \cdot U_j$ fonksiyonları olan 3×3 matristir (Tanım 15.2); her noktada o noktadaki çatının duruş matrisidir ve

$$E_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,U_j \qquad (1 \le i \le 3)$$

eşitliğini sağlar. Aynı matrisin dual formları da verdiğini göstereceğiz; üstelik katsayılar hiç değişmeden.

Önerme 16.1 (Dual Formların Duruş Matrisiyle Yazılışı). *E_1, E_2, E_3 çatı alanının duruş matrisi $A = (a_{ij})$ ve dual 1-formları $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ olsun. O zaman*

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,dx_j \qquad (1 \le i \le 3).$$

İspat.
Lemma 16.2'ni doğal çatı alanı için uygulayalım; Örnek 16.1'e göre onun dual formları dx_1, dx_2, dx_3'tür. Böylece $\theta_i = \sum_j \theta_i(U_j)\,dx_j$ olur. Katsayıları hesaplayalım:

$$\theta_i(U_j) = U_j \cdot E_i = U_j \cdot \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,U_k$$
$$= \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,(U_j \cdot U_k) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,\delta_{jk} = a_{ij}.$$

■

Yani çatı alanı ile dual formları aynı katsayılarla yazılır:

$$E_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,U_j \qquad \leftrightarrow \qquad \theta_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,dx_j.$$

E_i'yi yazmak için duruş matrisinin i-inci satırını doğal çatının alanlarıyla, θ_i'yi yazmak için aynı satırı doğal çatının dual formlarıyla birleştiririz. Bu iki formül, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$'ün E_1, E_2, E_3 çatı alanının 1-form dilindeki tam karşılığı olduğunu açıkça gösterir: biri bilinirse öteki de bilinir.

Örnek 16.6 (Döndürülmüş Sabit Çatının Dual Formları). Örnek 14.5'deki $E_1 = \frac{1}{3}(2U_1 + 2U_2 + U_3)$, $E_2 = \frac{1}{3}(-2U_1 + U_2 + 2U_3)$, $E_3 = \frac{1}{3}(U_1 - 2U_2 + 2U_3)$ çatı alanının dual formlarını bulalım ve $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$ eşitliklerinden birkaçını denetleyelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Dual formlar. Duruş matrisi E_i'lerin katsayılarından oluşur; Önerme 16.1 ile

$$\theta_1 = \frac{2\,dx + 2\,dy + dz}{3}, \quad \theta_2 = \frac{-2\,dx + dy + 2\,dz}{3}, \quad \theta_3 = \frac{dx - 2\,dy + 2\,dz}{3}.$$

Denetim. Bir 1-formu bir alanda değerlendirmek için $dx_j(E_i) = a_{ij}$ değerlerini kullanırız:

$$\theta_1(E_1) = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1}{9} = 1, \qquad \theta_1(E_2) = \frac{2\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 1\cdot 2}{9} = 0,$$
$$\theta_2(E_3) = \frac{-2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 2}{9} = 0, \theta_3(E_3) = \frac{1 + 4 + 4}{9} = 1.$$

Öteki beş değer de aynı biçimde çıkar; hesapların hepsi, Örnek 14.5'de denetlediğimiz $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$ eşitliklerinin aynısıdır.
Yorum. Katsayılar sabit olduğundan her θ_i bir diferansiyeldir: $g_1 = (2x + 2y + z)/3$ fonksiyonu için Sonuç 5.1 $dg_1 = \theta_1$ verir; benzer biçimde $\theta_2 = d\left((-2x + y + 2z)/3\right)$ ve $\theta_3 = d\left((x - 2y + 2z)/3\right)$'tür. Bölümün sonunda bu durumu bir yöntemin örneği olarak yeniden ele alacağız.
■

Örnek 16.7 (Yükseklikle Dönen Çatının Dual Formları). Örnek 14.6'deki $E_1 = \cos z\,U_1 + \sin z\,U_2$, $E_2 = -\sin z\,U_1 + \cos z\,U_2$, $E_3 = U_3$ çatı alanının dual formlarını bulalım.

Çözüm.
Duruş matrisi

$$A = \begin{pmatrix} \cos z & \sin z & 0 \\ -\sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan Önerme 16.1

$$\theta_1 = \cos z\,dx + \sin z\,dy, \qquad \theta_2 = -\sin z\,dx + \cos z\,dy, \qquad \theta_3 = dz$$

verir. Bu kez katsayılar sabit değildir. Örneğin θ_1 bir diferansiyel olamaz: bir diferansiyelin dış türevi sıfırdır (Alıştırma 6.8), oysa

$$d\theta_1 = d(\cos z) \wedge dx + d(\sin z) \wedge dy = -\sin z\,dz \wedge dx + \cos z\,dz \wedge dy \neq 0.$$

Bu dış türevin çatının kendi formlarıyla nasıl yazıldığı, yapı denklemlerinin konusu olacak.
■

Küresel çatı alanının dual formları, analizde çok bilinen bir resmi açıklar: küresel koordinatlarla çizilen "küçük kutu".

Örnek 16.8 (Küresel Çatının Dual Formları). F_1, F_2, F_3 küresel çatı alanı olsun. Dual formlarının

$$\theta_1 = d\rho, \qquad \theta_2 = \rho\cos\varphi\,d\vartheta, \qquad \theta_3 = \rho\,d\varphi$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Koordinat diferansiyelleri. ϑ'nın diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu açık kümede (Tanım 14.3) çalışalım. $x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\sin\varphi$ eşitliklerine çarpım ve bileşke kurallarını (Lemma 5.2, Lemma 5.3) uygularız:

$$\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\cos\vartheta\,d\rho - \rho\cos\varphi\sin\vartheta\,d\vartheta - \rho\sin\varphi\cos\vartheta\,d\varphi, \\ dy &= \cos\varphi\sin\vartheta\,d\rho + \rho\cos\varphi\cos\vartheta\,d\vartheta - \rho\sin\varphi\sin\vartheta\,d\varphi, \\ dz &= \sin\varphi\,d\rho + \rho\cos\varphi\,d\varphi. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci form. Duruş matrisinin birinci satırı F_1'in katsayılarıdır:

$$\theta_1 = \cos\varphi\cos\vartheta\,dx + \cos\varphi\sin\vartheta\,dy + \sin\varphi\,dz.$$

Yerine koyup $d\rho$, $d\vartheta$, $d\varphi$ katsayılarını ayrı ayrı toplayalım:

$$\begin{aligned} d\rho &: \cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi = 1,\\ d\vartheta &: -\rho\cos^2\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta + \rho\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0,\\ d\varphi &: -\rho\sin\varphi\cos\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\theta_1 = d\rho$.
İkinci form. $\theta_2 = -\sin\vartheta\,dx + \cos\vartheta\,dy$ için

$$\begin{aligned} d\rho &: -\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0,\\ d\vartheta &: \rho\cos\varphi\sin^2\vartheta + \rho\cos\varphi\cos^2\vartheta = \rho\cos\varphi,\\ d\varphi &: \rho\sin\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta - \rho\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\theta_2 = \rho\cos\varphi\,d\vartheta$.
Üçüncü form. Bu kez

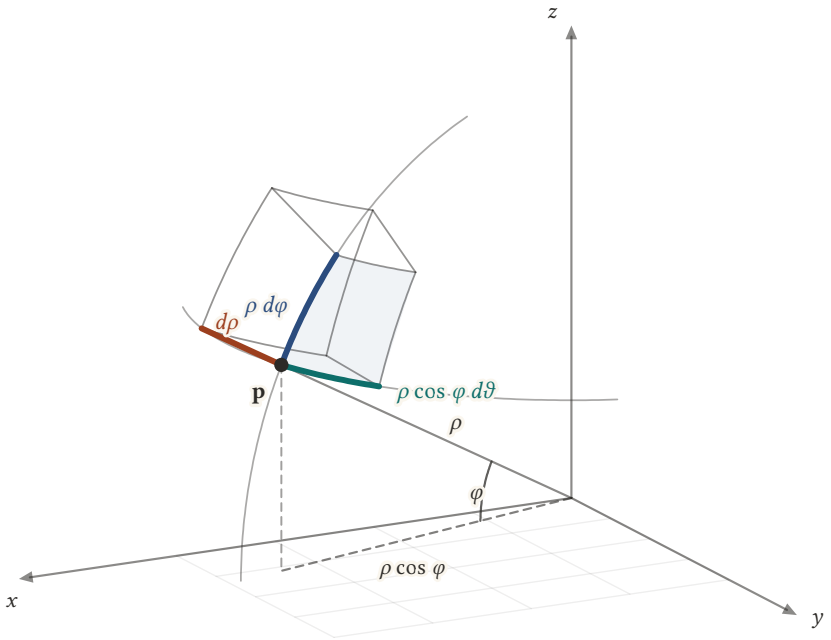
$$\theta_3 = -\sin\varphi\cos\vartheta\,dx - \sin\varphi\sin\vartheta\,dy + \cos\varphi\,dz$$

formülünde katsayıları toplarız:

$$\begin{aligned} d\rho &: -\sin\varphi\cos\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \cos\varphi\sin\varphi = 0,\\ d\vartheta &: \rho\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta - \rho\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0,\\ d\varphi &: \rho\sin^2\varphi\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \rho\cos^2\varphi = \rho. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\theta_3 = \rho\,d\varphi$.
Tanım kümesi. ϑ, z ekseni dışındaki noktaların tamamında tek bir diferansiyellenebilir fonksiyon olarak tanımlanamaz (bir yarım düzlem dışarıda bırakılır), ama diferansiyeli tanımlıdır: Örnek 15.3′de gördüğümüz gibi $d\vartheta = (x\,dy - y\,dx)/(x^2+y^2)$'dir ve bu formül z ekseni dışında her yerde anlamlıdır. Bu yüzden $\theta_2 = \rho\cos\varphi\,d\vartheta$ eşitliği, dual formlar gibi, z ekseni dışındaki her noktada geçerlidir.
Sağlama. Örnek 16.4′de $dz = \sin\varphi\,\theta_1 + \cos\varphi\,\theta_3$ bulmuştuk. Yeni formüllerle sağ yan $\sin\varphi\,d\rho + \rho\cos\varphi\,d\varphi$ olur; bu da yukarıdaki dz ifadesinin aynısıdır.
Küçük kutu. Analizde küresel koordinatlar $d\rho$, $d\vartheta$, $d\varphi$ kadar artırıldığında oluşan küçük kutunun kenarlarının yaklaşık $d\rho$, $\rho\cos\varphi\,d\vartheta$ ve $\rho\,d\varphi$ olduğu söylenir. Nedeni şudur: ρ kenarı dışa doğru bir doğru parçasıdır; ϑ kenarı, yarıçapı noktanın z eksenine uzaklığı olan $r = \rho\cos\varphi$ çemberinin $d\vartheta$ açılı yayıdır; φ kenarı ise yarıçapı ρ olan meridyenin $d\varphi$ açılı yayıdır. Bu üç kenar tam olarak F_1, F_2, F_3 doğrultularındadır ve uzunlukları dual formlardır. Dual formlar, bu sezgisel kutu hesabının kesin biçimidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.2: Küresel koordinatlar ρ, ϑ, φ değerlerinden $d\rho$, $d\vartheta$, $d\varphi$ kadar artınca oluşan küçük kutu (artımlar görünsün diye büyütülmüştür). $\mathbf{p}$'den çıkan üç kenar F_1 (turuncu), F_2 (yeşil) ve F_3 (mavi) doğrultularındadır. ϑ kenarı, yarıçapı $\rho\cos\varphi$ olan yatay paralel çemberin bir yayıdır; φ kenarı ise yarıçapı ρ olan meridyenin bir yayıdır. Kenar uzunlukları $d\rho$, $\rho\cos\varphi\, d\vartheta$ ve $\rho\, d\varphi$, yani sırasıyla θ_1, θ_2, θ_3 dual formlarıdır.

■

Kutunun hacmi de dual formlarla okunur. Üç kenar karşılıklı dik olduğundan hacim yaklaşık olarak kenarların çarpımıdır; bunun kesin karşılığı üç dual formun kama çarpımıdır.

Örnek 16.9 (Dual Formlar ve Hacim Elemanı). Her çatı alanı için $\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 = \pm\, dx \wedge dy \wedge dz$ olduğunu gösterelim ve bunu küresel çatıya uygulayarak $dx \wedge dy \wedge dz$'yi ρ, ϑ, φ ile yazalım.

Çözüm.
Genel formül. Önerme 16.1'e göre $\theta_i = \sum_j a_{ij}\, dx_j$'dir. Alıştırma 6.14'ne göre

$$\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 = (\det A) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Her noktada A ortogonal bir matristir ve ortogonal matrislerin determinantı ± 1'dir (Alıştırma 9.18). *Küresel çatı.* $\det A$, satırları F_1, F_2, F_3'ün koordinatları olan determinanttır, yani $F_1 \cdot F_2 \times F_3$ üçlü skaler çarpımıdır (Alıştırma 9.11). Vektörel çarpımı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} F_2 \times F_3 &= (-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0) \times (-\sin\varphi\cos\vartheta, -\sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi) \\ &= \left(\cos\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\,(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)\right). \end{aligned}$$

Bu F_1'in kendisidir; dolayısıyla $\det A = F_1 \cdot F_1 = 1$ ve

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 &= d\rho \wedge (\rho\cos\varphi\, d\vartheta) \wedge (\rho\, d\varphi) \\ &= \rho^2 \cos\varphi d\rho \wedge d\vartheta \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Yorum. Çok değişkenli analizdeki küresel koordinat hacim çarpanı $\rho^2\cos\varphi$ böylece kutunun üç kenarının, yani üç dual formun, çarpımından doğar. (Açıyı z ekseninden ölçen alışkanlıkta aynı çarpan $\rho^2\sin(\text{açı})$ olarak görünür.) Silindirik çatı için de $\det A = 1$'dir ve aynı hesap Alıştırma 6.15'ndeki

 CC BY-NC-SA 4.0

$dx \wedge dy \wedge dz = r\,dr \wedge d\vartheta \wedge dz$ sonucunu verir; bunu alıştırmalarda dual formlar bulunduktan sonra yeniden göreceğiz.
■

16.4 Girdileri Form Olan Matrisler

Cartan'ın yaklaşımında temel nesneler tek tek formlar değil, girdileri form olan matrislerdir. Bunu bağlantı formlarında zaten gördük: dokuz bağlantı formu tek bir ters simetrik ω matrisinde toplanır ve duruş matrisinden $\omega = dA\,A^T$ matris eşitliğiyle hesaplanır. Orada yalnızca fonksiyon matrislerinin diferansiyelini ve bir 1-form matrisiyle bir fonksiyon matrisinin çarpımını kullandık (Tanım 15.3). Dual formları da bir sütunda toplayacak ve 1-form matrislerini birbiriyle çarpacağız; bunun için bu matrislerle hesap kurallarını genişletip açıkça yazmalıyız.

Tanım 16.2 (Girdileri Form Olan Matrisler). Girdileri fonksiyon ya da diferansiyel form olan matrislerle şu işlemleri yaparız.

- **Toplam** girdi girdidir.
- **Çarpım** her zamanki satır–sütun kuralıyla yapılır, ancak girdiler kama çarpımıyla çarpılır: B ile C'nin çarpımının (i,j) girdisi $\sum_k B_{ik} \wedge C_{kj}$'dir. Girdilerden biri fonksiyonsa kama çarpımı fonksiyonla çarpmadır.
- **Dış türev** girdi girdi alınır: dB, (i,j) girdisi dB_{ij} olan matristir.
- **Transpoz** B^T, (i,j) girdisi B_{ji} olan matristir.

Yani bu matrislerle, sayı matrisleriyle nasıl hesap yapıyorsak öyle hesap yaparız; tek fark, girdileri çarparken sırayı korumak zorunda oluşumuzdur, çünkü iki 1-form yer değiştirince işaret değiştirir (Lemma 6.1). Bu dilde dual formların ve bağlantı formlarının formülleri tek satırdır. ξ, girdileri doğal koordinat fonksiyonları x_1, x_2, x_3 olan sütun matris ve θ, girdileri dual formlar olan sütun matris olsun:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}, \qquad d\xi = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}.$$

Çarpımın i-inci girdisi $\sum_j a_{ij}\,dx_j$ olduğundan Önerme 16.1

$$\theta = A\,d\xi$$

diye yazılır. Bağlantı formları için de $\omega = dA\,A^T$, yani $\omega_{ij} = \sum_k da_{ik}\,a_{jk}$'dir (Teorem 15.2). Duruş matrisi her noktada ortogonal olduğundan $A^T A = A\,A^T = I$'dır (Sonuç 9.1); bu birim matrisi bir matris formülünün içine istediğimiz yere, etkisiz olarak koyabiliriz.
İspatlarda kullanacağımız kuralları bir araya toplayalım. Tek dikkat edilecek nokta, formların sırasıdır.

Lemma 16.3 (Form Matrisleriyle Hesap Kuralları). *F girdileri fonksiyon olan, B girdileri 1-form olan matrisler olsun (boyutlar çarpımlara uygun). O zaman*
(1) $(FB)^T = B^T F^T$ *ve* $(BF)^T = F^T B^T$,
(2) $d(FB) = dF\,B + F\,dB$,
(3) $d(BF) = dB\,F - B\,dF$,
(4) $d(F^T) = (dF)^T$,
ve üç matrisin çarpımı birleşmelidir: $(XY)Z = X(YZ)$.

İspat.
Her eşitliği (i,j) girdisinde denetleriz; f_{ik}, F'nin, β_{kj} de B'nin girdileridir.
(1) *$(FB)^T$'nin (i,j) girdisi FB'nin (j,i) girdisidir: $\sum_k f_{jk}\,\beta_{ki}$. Fonksiyonlar formlarla yer değiştirdiğinden bu, $\sum_k \beta_{ki}\,f_{jk}$'ye, yani B^T'nin i-inci satırı ile F^T'nin j-inci sütununun çarpımına eşittir. İkinci eşitlik aynı biçimde gösterilir.*
(2) *Teorem 6.1'nın (2) şıkkı ve dış türevin lineerliğiyle*

$$d\left(\sum_k f_{ik}\,\beta_{kj}\right) = \sum_k \left(\, df_{ik} \wedge \beta_{kj} + f_{ik}\,d\beta_{kj} \,\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sağ yan, $dF\,B + F\,dB$'nin (i,j) girdisidir.
***(3)** Önce fonksiyonu öne alıp aynı kuralı uygularız, sonra iki 1-formun yerini değiştiririz (Lemma 6.1):*

$$d\left(\sum_k \beta_{ik}\, f_{kj}\right) = \sum_k \left(\, df_{kj} \wedge \beta_{ik} + f_{kj}\, d\beta_{ik}\,\right) = \sum_k \left(\, d\beta_{ik}\, f_{kj} - \beta_{ik} \wedge df_{kj}\,\right).$$

Sağ yan, $dB\,F - B\,dF$'nin (i,j) girdisidir.
***(4)** İki yanın (i,j) girdisi de df_{ji}'dir.*
Birleşme. *$(XY)Z$'nin (i,j) girdisi $\sum_l \left(\sum_k X_{ik} \wedge Y_{kl}\right) \wedge Z_{lj}$'dir. Kama çarpımının dağılma ve birleşme kurallarıyla bu, $\sum_k X_{ik} \wedge \left(\sum_l Y_{kl} \wedge Z_{lj}\right)$'ye, yani $X(YZ)$'nin (i,j) girdisine eşittir.*
■

> ⚠ İki form matrisinin çarpımında transpoz kuralı işaret değiştirir
>
> Sayı matrisleri için $(BC)^T = C^T B^T$ kuralını biliyoruz. Lemmanın (1) şıkkı, çarpanlardan biri fonksiyon matrisi olduğu sürece kuralın aynen geçerli olduğunu söyler. İki çarpan da 1-form matrisiyse durum farklıdır. En küçük örnek 1×1 matrislerdir: $B = (dx)$ ve $C = (dy)$ için $BC = (dx \wedge dy)$ ama $C^T B^T = (dy \wedge dx)$, yani $(-\,dx \wedge dy)$. Genel olarak iki 1-form matrisi için $(BC)^T = -\,C^T B^T$ olur. Bu yüzden ispatlarda transpozu yalnızca bir fonksiyon matrisi içeren çarpımlara uygulayacağız.

Örnek 16.10 (Yükseklikle Dönen Çatıda Form Matrisleri). Örnek 16.7'deki çatı alanı için bağlantı formu matrisi ω'yı yazalım; $\omega\theta$ sütununu ve $\omega\omega$ matrisini hesaplayalım.

Çözüm.
Bağlantı formları. Bu çatı, Örnek 15.3'deki tek açıyla dönen çatıların $\psi = z$ durumudur; dolayısıyla $\omega_{12} = dz$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$'dır. Köşegen girdiler ters simetri gereği sıfırdır ve $\omega_{21} = -dz$'dir:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & dz & 0 \\ -dz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Çarpımlar. Satır–sütun kuralıyla

$$\omega\,\theta = \begin{pmatrix} dz \wedge \theta_2 \\ -\,dz \wedge \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\omega\omega$'nın her girdisi, iki çarpandan biri sıfır olan ya da $dz \wedge dz = 0$ içeren terimlerin toplamıdır; örneğin $(1,1)$ girdisi $\omega_{12} \wedge \omega_{21} = dz \wedge (-dz) = 0$'dır. Dolayısıyla $\omega\omega = 0$.
■

Örnek 16.11 (Koordinat Diferansiyellerini Dual Formlarla Yazmak). Her çatı alanı için $d\xi = A^T\,\theta$ olduğunu gösterelim ve bunu Örnek 16.6'deki çatıya uygulayalım.

Çözüm.
Genel eşitlik. $\theta = A\,d\xi$ eşitliğini soldan A^T ile çarpar, birleşme kuralını ve $A^T A = I$ eşitliğini kullanırız: $A^T\theta = (A^T A)\,d\xi = d\xi$. Girdilerle yazarsak $dx_j = \sum_i a_{ij}\,\theta_i$: dx_j'nin katsayıları duruş matrisinin j-inci sütunudur. Bu, Lemma 16.2 ile de uyumludur, çünkü $dx_j(E_i) = E_i[x_j] = a_{ij}$'dir.
Sabit çatı. A'nın sütunları $\frac{1}{3}(2,-2,1)$, $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ ve $\frac{1}{3}(1,2,2)$'dir:

$$dx = \frac{2\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3}{3}, \qquad dy = \frac{2\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3}{3}, \qquad dz = \frac{\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3}{3}.$$

Denetim. Birincide θ_i'lerin yerine formüllerini koyalım: dx katsayısı $(4+4+1)/9 = 1$, dy katsayısı $(4-2-2)/9 = 0$, dz katsayısı $(2-4+2)/9 = 0$ çıkar.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

16.5 Yapı Denklemleri

Artık bir çatı alanına bağlı bütün 1-formlar elimizde: çatıyı anlatan dual formlar ve çatının dönmesini anlatan bağlantı formları. Bunların dış türevlerini soruyoruz. Cartan'ın bulduğu yanıt iki takım denklemdir ve dikkat çekici yanı, dış türevlerin yine yalnızca aynı formlarla ifade edilmesidir.

Teorem 16.1 (Cartan Yapı Denklemleri). *E_1, E_2, E_3, $\mathbb{R}^3$ ya da $\mathbb{R}^3$'ün bir açık alt kümesi üzerinde dual 1-formları $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ve bağlantı formları ω_{ij} $(1 \le i, j \le 3)$ olan bir çatı alanı olsun. Bu formların dış türevleri şu denklemleri sağlar.*
***(1) Birinci yapı denklemleri** (first structural equations):*

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \theta_j \qquad (1 \le i \le 3).$$

***(2) İkinci yapı denklemleri** (second structural equations):*

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad (1 \le i, j \le 3).$$

Form matrisleriyle iki takım denklem $d\theta = \omega\,\theta$ ve $d\omega = \omega\,\omega$ diye yazılır.

İspat.
Temel eşitlik. *$\omega = dA\,A^T$ eşitliğini sağdan A ile çarpalım. Birleşme kuralı ve $A^T A = I$ ile*

$$\omega A = dA\,(A^T A) = dA$$

buluruz (bu eşitliği Örnek 15.9'de de görmüştük). Girdilerle: her i, j için $da_{ij} = \sum_k \omega_{ik}\, a_{kj}$. İki ispat da bu eşitliğe dayanır.
Birinci yapı denklemi. *Her dx_j bir diferansiyel olduğundan $d(dx_j) = 0$'dır (Alıştırma 6.8); yani $d(d\xi) = 0$. Lemma 16.3'nın (2) şıkkıyla*

$$d\theta = d(A\,d\xi) = dA\,d\xi + A\,d(d\xi) = dA\,d\xi = \omega A\,d\xi = \omega\,\theta.$$

Girdilerle aynı hesap şöyledir:

$$\begin{aligned} d\theta_i &= \sum_j da_{ij} \wedge dx_j = \sum_j \sum_k \omega_{ik}\, a_{kj} \wedge dx_j \\ &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \Big(\sum_j a_{kj}\, dx_j \Big) = \sum_k \omega_{ik} \wedge \theta_k. \end{aligned}$$

İkinci yapı denklemi. *$\omega = dA\,A^T$ çarpımında dA bir 1-form matrisi, A^T bir fonksiyon matrisidir. Lemma 16.3'nın (3) şıkkı, $d(dA) = 0$ ve (4) şıkkı*

$$d\omega = d(dA)\,A^T - dA\,d(A^T) = -\,dA\,(dA)^T$$

verir. Temel eşitlikten $dA = \omega A$'dır; (1) şıkkıyla, A bir fonksiyon matrisi olduğundan, $(dA)^T = (\omega A)^T = A^T \omega^T$'dır. Bağlantı formları ters simetrik olduğundan (Lemma 15.1) $\omega^T = -\omega$'dır. Hepsini yerine koyalım:

$$d\omega = -\,(\omega A)\,\big(-A^T \omega\big) = \omega\,(A\,A^T)\,\omega = \omega\,\omega.$$

Girdilerle aynı hesap şöyledir. Teorem 6.1'nın (2) şıkkı ve $d(da_{ik}) = 0$ ile

$$d\omega_{ij} = \sum_k d\,\big(\, a_{jk}\, da_{ik}\,\big) = \sum_k da_{jk} \wedge da_{ik}.$$

Temel eşitliği iki çarpana da uygulayıp k üzerinden toplarsak $\sum_k a_{mk}\, a_{nk} = \delta_{mn}$ olduğundan

$$d\omega_{ij} = \sum_{m,n} \Big(\sum_k a_{mk}\, a_{nk} \Big) \omega_{jm} \wedge \omega_{in} = \sum_m \omega_{jm} \wedge \omega_{im}$$

kalır. Ters simetri ($\omega_{jm} = -\omega_{mj}$, $\omega_{im} = -\omega_{mi}$) ve ters değişme kuralıyla son toplam

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_m \omega_{mj} \wedge \omega_{mi} = -\sum_m \omega_{mi} \wedge \omega_{mj} = \sum_m \omega_{im} \wedge \omega_{mj}$$

olur.
■

Yani dual formların dış türevleri bağlantı formlarıyla dual formların kama çarpımlarıdır; bağlantı formlarının dış türevleri ise yalnızca bağlantı formlarının kama çarpımlarıdır. Bir çatı alanının dual formlarını ve bağlantı formlarını bilen, bu formların dış türevlerini de bilir.
Birinci yapı denklemi, bağlantı denklemlerinin dual karşılığıdır. İki takım denklem yan yana şöyledir:

$$\nabla_V E_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(V)\, E_j, \qquad d\theta_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \theta_j.$$

İkisi de aynı $dA = \omega A$ eşitliğinden doğar. Bir yanda $E_i = \sum_j a_{ij}\, U_j$ alanının kovaryant türevi, Lemma 13.2 gereği, katsayıların türevleriyle hesaplanır: $\nabla_V E_i = \sum_j da_{ij}(V)\, U_j$; öbür yanda $\theta_i = \sum_j a_{ij}\, dx_j$ formunun dış türevi yine katsayıların diferansiyelleriyle hesaplanır: $d\theta_i = \sum_j da_{ij} \wedge dx_j$. Her iki durumda da_{ij} yerine $\sum_k \omega_{ik}\, a_{kj}$ yazmak, a_{kj}'leri geri toplayarak E_k'yi ya da θ_k'yı verir.
İkinci yapı denkleminin anlamını ancak ileride tam olarak göreceğiz: bu denklem, kabaca, $\mathbb{R}^3$'ün düzlem gibi "düz" olduğunu söyler. Düzlemde yalnızca bir bağlantı formu vardır ve ikinci yapı denklemi $d\omega_{12} = 0$ biçimini alır (Alıştırma 16.8). Yüzeyleri incelerken benzer denklemler kuracağız; orada bu eşitlik bozulacak ve aradaki fark yüzeyin eğriliğini ölçecek.
Teoremde birinci yapı denklemleri üç, ikinci yapı denklemleri dokuz tanedir. Ters simetri nedeniyle bunların hepsi bağımsız değildir; denetlenecek denklemleri açıkça sayalım.

Önerme 16.2 (Yapı Denklemlerinin Açık Yazılışı). *Birinci yapı denklemleri*

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \omega_{12} \wedge \theta_2 + \omega_{13} \wedge \theta_3, \\ d\theta_2 &= \omega_{21} \wedge \theta_1 + \omega_{23} \wedge \theta_3, \\ d\theta_3 &= \omega_{31} \wedge \theta_1 + \omega_{32} \wedge \theta_2 \end{aligned}$$

biçimindedir. İkinci yapı denklemlerinin dokuzundan $i = j$ olan üçü her ters simetrik 1-form matrisi için geçerli $0 = 0$ özdeşlikleridir ve (j,i) denklemi (i,j) denkleminin iki yanının -1 ile çarpılmışıdır. Dolayısıyla ikinci yapı denklemleri şu üç denkleme denktir:

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \qquad d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \qquad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}.$$

İspat.
Birinci denklemler. *Ters simetri gereği $\omega_{ii} = 0$'dır; toplamda $j = i$ terimi düşer ve kalan iki terim yazılır.*
Köşegen denklemler. *$i = j$ için sol yan $d\omega_{ii} = d(0) = 0$'dır. Sağ yanda $\omega_{ki} = -\omega_{ik}$ olduğundan her terim $\omega_{ik} \wedge \omega_{ki} = -\omega_{ik} \wedge \omega_{ik}$'dir ve bir 1-formun kendisiyle kama çarpımı sıfırdır: Lemma 6.1 gereği $\phi \wedge \phi = -\phi \wedge \phi$, yani $\phi \wedge \phi = 0$. Denklem $0 = 0$ olur.*
Simetrik çiftler. *(j,i) denkleminin sol yanı $d\omega_{ji} = -d\omega_{ij}$'dir. Sağ yanı, ters simetri ve ters değişme kuralıyla*

$$\sum_k \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} = \sum_k (-\omega_{kj}) \wedge (-\omega_{ik}) = \sum_k \omega_{kj} \wedge \omega_{ik} = -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

İki yan da (i,j) denkleminin karşılık gelen yanının -1 katıdır.
Kalan üç denklem. *$i \neq j$ için toplamda $k = i$ ve $k = j$ terimleri $\omega_{ii} = \omega_{jj} = 0$ nedeniyle düşer; yalnızca üçüncü indis kalır. $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$ çiftleri için kalan indisler sırasıyla 3, 2, 1'dir.*
■

Yani bir çatı alanında yapı denklemlerini doğrulamak altı eşitliği doğrulamak demektir: üç birinci, üç ikinci yapı denklemi. En basit durumla başlayalım.

Örnek 16.12 (Doğal Çatıda Yapı Denklemleri). Doğal çatı alanı U_1, U_2, U_3 ve Örnek 14.5'deki sabit çatı alanı için yapı denklemlerini doğrulayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Doğal çatı. Duruş matrisi birim matristir ve girdileri sabittir; $dA = 0$ olduğundan $\omega = dA\,A^T = 0$ (Alıştırma 15.3). Dual formlar $\theta_i = dx_i$'dir (Örnek 16.1). Birinci yapı denklemlerinin sol yanı $d(dx_i) = 0$, sağ yanı $\sum_j 0 \wedge dx_j = 0$; ikinci yapı denklemlerinin iki yanı da sıfırdır.
Sabit çatı. Duruş matrisinin girdileri yine sabittir; $\omega = 0$ olur (Örnek 15.10). Dual formların katsayıları sabit olduğundan, Örnek 16.6′deki gibi, her θ_i bir diferansiyeldir ve $d\theta_i = 0$'dır. Denklemlerin hepsi $0 = 0$'dır.
Her noktada aynı çatıyı veren bir çatı alanında hiçbir şey dönmez; yapı denklemleri burada hiçbir bilgi taşımaz. Asıl içerik, çatının döndüğü durumlardadır.
■

Örnek 16.13 (Yükseklikle Dönen Çatıda Yapı Denklemleri). $E_1 = \cos z\,U_1 + \sin z\,U_2$, $E_2 = -\sin z\,U_1 + \cos z\,U_2$, $E_3 = U_3$ çatı alanı için altı yapı denklemini doğrulayalım.

Çözüm.
Formlar. Örnek 16.7 ve Örnek 16.10′ne göre

$$\theta_1 = \cos z\,dx + \sin z\,dy, \qquad \theta_2 = -\sin z\,dx + \cos z\,dy, \qquad \theta_3 = dz,$$

$\omega_{12} = dz$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$'dır.
Birinci yapı denklemleri. $d\theta_1$'i Örnek 16.7′de hesaplamıştık. Sağ yan:

$$\begin{aligned}\omega_{12}\wedge\theta_2 + \omega_{13}\wedge\theta_3 &= dz\wedge(-\sin z\,dx + \cos z\,dy)\\ &= -\sin z\,dz\wedge dx + \cos z\,dz\wedge dy.\end{aligned}$$

Bu $d\theta_1$'in aynısıdır. İkinci denklemde sol yan

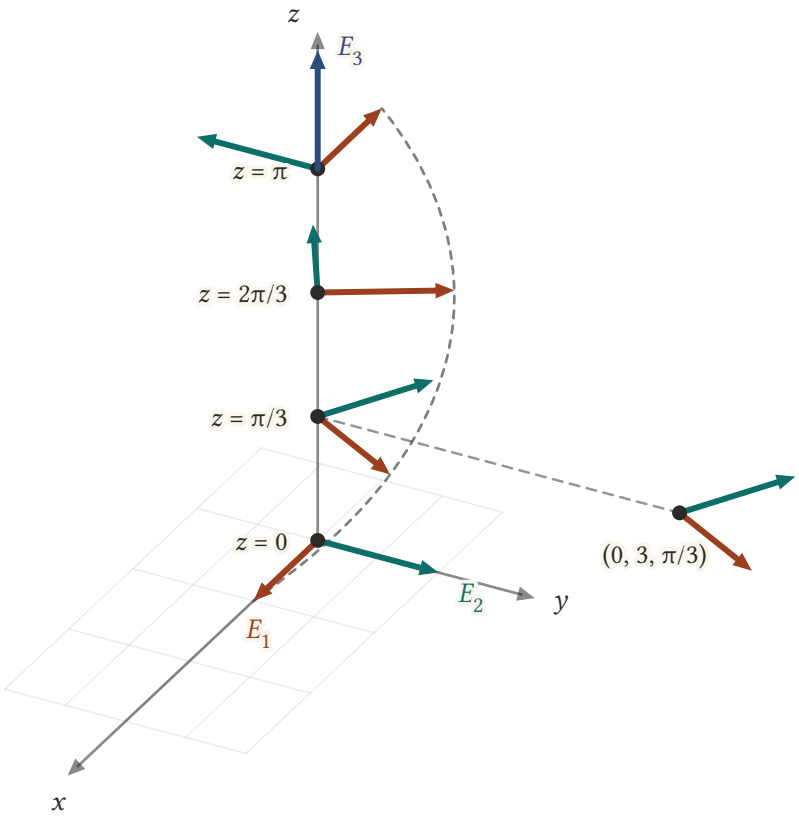
$$d\theta_2 = d(-\sin z)\wedge dx + d(\cos z)\wedge dy = -\cos z\,dz\wedge dx - \sin z\,dz\wedge dy,$$

sağ yan

$$\begin{aligned}\omega_{21}\wedge\theta_1 + \omega_{23}\wedge\theta_3 &= -\,dz\wedge(\cos z\,dx + \sin z\,dy)\\ &= -\cos z\,dz\wedge dx - \sin z\,dz\wedge dy.\end{aligned}$$

Üçüncü denklemde $d\theta_3 = d(dz) = 0$ ve $\omega_{31}\wedge\theta_1 + \omega_{32}\wedge\theta_2 = 0$'dır.
İkinci yapı denklemleri. $d\omega_{12} = d(dz) = 0$ ve $\omega_{13}\wedge\omega_{32} = 0$; $d\omega_{13} = 0$ ve $\omega_{12}\wedge\omega_{23} = dz\wedge 0 = 0$; $d\omega_{23} = 0$ ve $\omega_{21}\wedge\omega_{13} = 0$. Altı denklem de sağlanır; matris diliyle bu, Örnek 16.10′de bulduğumuz $\omega\omega = 0$ ile $d\omega = 0$'ın eşitliğidir.
Yorum. Tek bağlantı formu $\omega_{12} = dz$'dir: çatı yalnızca yükseldikçe döner ve her birim yükselişte bir radyan döner. $\mathbf{v}$ yataysa $dz(\mathbf{v}) = 0$'dır ve çatı o yönde hiç dönmez. Birinci yapı denklemi, θ_1 ile θ_2'nin neden diferansiyel olmadığını da açıklar: dış türevleri tam bu dönmeden, dz çarpanından gelir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.3: $E_1 = \cos z\, U_1 + \sin z\, U_2$, $E_2 = -\sin z\, U_1 + \cos z\, U_2$, $E_3 = U_3$ çatı alanı z ekseni üzerinde dört yükseklikte. Çatı her birim yükselişte bir radyan döner: E_1'in uçları kesikli helis üzerindedir. Sağdaki kopya aynı yükseklikte, üç birim ötedeki $(0, 3, \pi/3)$ noktasındaki çatıdır ve soldakiyle aynıdır; yatay adımda çatı dönmez. Tek bağlantı formunun $\omega_{12} = dz$ olması bunu söyler.

■

Küresel çatıda bağlantı formlarının üçü de sıfırdan farklıdır ve denklemler gerçek bir sınav olur. Bu çatının bağlantı formlarını önceki bölümde bulmuştuk (Örnek 15.12); dual formları da elimizde.

Örnek 16.14 (Küresel Çatıda İki Yapı Denklemi). Küresel çatı alanının dual formları ve bağlantı formları

$$\begin{aligned} \theta_1 &= d\rho, & \omega_{12} &= \cos\varphi\, d\vartheta, \\ \theta_2 &= \rho\cos\varphi\, d\vartheta, & \omega_{13} &= d\varphi, \\ \theta_3 &= \rho\, d\varphi, & \omega_{23} &= \sin\varphi\, d\vartheta \end{aligned}$$

biçimindedir (Örnek 16.8, Örnek 15.12). Birinci yapı denklemlerinden $d\theta_3$'ü ve ikinci yapı denklemlerinden $d\omega_{12}$'yi doğrulayalım.

Çözüm.
Birinci yapı denklemi. Önerme 16.2'e göre $d\theta_3 = \omega_{31} \wedge \theta_1 + \omega_{32} \wedge \theta_2$ olmalıdır. Ters simetri $\omega_{31} = -d\varphi$ ve $\omega_{32} = -\sin\varphi\, d\vartheta$ verir. Terimleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \omega_{31} \wedge \theta_1 &= -\,d\varphi \wedge d\rho = d\rho \wedge d\varphi, \\ \omega_{32} \wedge \theta_2 &= (-\sin\varphi\, d\vartheta) \wedge (\rho\cos\varphi\, d\vartheta) = -\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\vartheta \wedge d\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Toplamları $d\rho \wedge d\varphi$'dir. Sol yanı çarpım kuralıyla (Teorem 6.1, (2) şıkkı) hesaplarız:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\theta_3 = d(\rho\, d\varphi) = d\rho \wedge d\varphi + \rho\, d(d\varphi) = d\rho \wedge d\varphi.$$

İki yan eşittir.
İkinci yapı denklemi. $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$ olmalıdır; ikinci yapı denklemlerinde her biri tek bir kama çarpımı içerir. Sağ yan

$$\omega_{13} \wedge \omega_{32} = d\varphi \wedge (-\sin\varphi\, d\vartheta) = -\sin\varphi d\varphi \wedge d\vartheta,$$

sol yan

$$d\omega_{12} = d(\cos\varphi) \wedge d\vartheta = -\sin\varphi d\varphi \wedge d\vartheta.$$

İki yan eşittir. Kalan dört denklemi Alıştırma 16.2'de doğrulayacağız.
■

16.6 Yapı Denklemleriyle Çalışmak

Yapı denklemleri $\mathbb{R}^3$'teki geometri problemleri için güçlü bir yöntem verir. İleride yüzeylerin geometrisini tam bu yöntemle inceleyeceğiz; burada adımlarını tanıtıp basit bir örnekte uyguluyoruz.

Dört adımda yapı denklemleriyle çalışmak

1. Probleme iyi uyan bir çatı alanı seç.
2. Çatı alanının dual 1-formlarını ve bağlantı formlarını bul.
3. Yapı denklemlerini uygula.
4. Çıkan eşitlikleri geometrik olarak yorumla.

Örnek 16.15 (Dönmeyen Bir Çatının Koordinatları). E_1, E_2, E_3, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bütün bağlantı formları sıfır olan bir çatı alanı olsun. Dual formlarının yeni bir dik koordinat sisteminin koordinat diferansiyelleri olduğunu ve E_1, E_2, E_3'ün bu sistemin doğal çatısı olduğunu gösterelim.

Çözüm.
Birinci adım: çatı. Çatı alanı verilmiştir; tek bildiğimiz $\omega = 0$ olmasıdır. Örnek 15.10'ye göre bu durumda duruş matrisinin girdileri sabittir: A sabit bir ortogonal matristir ve çatı her noktada aynıdır.
İkinci adım: formlar. Dual formlar $\theta_i = \sum_j a_{ij}\, dx_j$'dir ve katsayıları sabittir; bağlantı formları sıfırdır.
Üçüncü adım: yapı denklemleri. Birinci yapı denklemleri $d\theta_i = \sum_j 0 \wedge \theta_j = 0$ verir; ikinci yapı denklemleri $0 = 0$'dır. Yani üç dual formun da dış türevi sıfırdır. Dış türevi sıfır olmak, bir formun diferansiyel olması için gereken koşuldur (Alıştırma 6.8); burada formun kendisini bulabiliriz.
Dördüncü adım: yorum. $g_i = \sum_j a_{ij}\, x_j$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Katsayılar sabit olduğundan $dg_i = \sum_j a_{ij}\, dx_j = \theta_i$'dir: her dual form bir diferansiyeldir. Matris diliyle (g_1, g_2, g_3) sütunu $A\xi$'dir: doğal koordinatların sabit ortogonal A matrisiyle değiştirilmesi, yani uzayın yeni bir dik koordinat sistemi. Üstelik

$$E_i[g_j] = dg_j(E_i) = \theta_j(E_i) = \delta_{ij}$$

olur: E_i yönünde ilerlerken yeni koordinatlardan yalnızca g_i değişir ve birim hızla artar. Bu, U_i'nin doğal koordinatlarla ilişkisinin aynısıdır; E_1, E_2, E_3, yeni koordinat sisteminin doğal çatısıdır. Örneğin Örnek 16.6'deki çatı için yeni koordinatlar $g_1 = (2x + 2y + z)/3$, $g_2 = (-2x + y + 2z)/3$, $g_3 = (x - 2y + 2z)/3$'tür.
Kısacası bağlantı formlarının hepsinin sıfır olması "çatı hiç dönmüyor" demektir ve dönmeyen çatı, döndürülmüş bir dik koordinat sisteminin sabit çatısıdır.
■

16.7 Alıştırmalar

Alıştırma 16.1 (Dual Formlarla Yazılmış Bir 1-Formun Dış Türevi). E_1, E_2, E_3 bir çatı alanı, θ_i dual 1-formları, ω_{ij} bağlantı formları olsun. $\phi = \sum_i f_i\, \theta_i$ 1-formu için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\phi = \sum_{j=1}^{3} \Big\{ df_j + \sum_{i=1}^{3} f_i\, \omega_{ij} \Big\} \wedge \theta_j$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Dış türevin kuralları. Dış türev lineerdir (Önerme 6.5) ve fonksiyonla çarpım kuralı (Teorem 6.1, (2) şıkkı) geçerlidir:

$$d\phi = \sum_{i=1}^{3} d(f_i\,\theta_i) = \sum_{i=1}^{3} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^{3} f_i\, d\theta_i.$$

Birinci yapı denklemi. İkinci toplamda $d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$ yazıp toplama sırasını değiştirelim:

$$\sum_i f_i \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j = \sum_j \Big(\sum_i f_i\, \omega_{ij} \Big) \wedge \theta_j.$$

Birleştirme. Birinci toplamda toplama indisinin adını j yaparsak $\sum_j df_j \wedge \theta_j$ olur. İki toplam, dağılma kuralıyla, her θ_j'nin önünde birleşir ve istenen formül çıkar.
Karşılaştırma. Bir vektör alanının çatı alanına göre kovaryant türevi de aynı biçimdedir (Alıştırma 15.7): $W = \sum_i f_i\, E_i$ için

$$\nabla_V W = \sum_{j=1}^{3} \Big\{ V[f_j] + \sum_{i=1}^{3} f_i\, \omega_{ij}(V) \Big\}\, E_j.$$

Süslü parantez içindeki 1-form iki formülde aynıdır; biri onu V'de değerlendirip E_j ile, öteki kama çarpımıyla θ_j ile birleştirir.
Bir örnek. Yükseklikle dönen çatıda ($\omega_{12} = dz$, öteki bağlantı formları sıfır) $\phi = z\,\theta_1$ alalım: $f_1 = z$, $f_2 = f_3 = 0$. Formüle göre $j = 1$ için süslü parantez dz, $j = 2$ için $f_1\,\omega_{12} = z\,dz$, $j = 3$ için 0'dır:

$$d\phi = dz \wedge \theta_1 + z\,dz \wedge \theta_2 = (\cos z - z\sin z)\,dz \wedge dx + (\sin z + z\cos z)\,dz \wedge dy.$$

Doğrudan hesap: $\phi = z\cos z\,dx + z\sin z\,dy$ ve

$$\begin{aligned} d\phi &= d(z\cos z) \wedge dx + d(z\sin z) \wedge dy \\ &= (\cos z - z\sin z)\,dz \wedge dx + (\sin z + z\cos z)\,dz \wedge dy. \end{aligned}$$

■

Alıştırma 16.2 (Küresel Çatının Bütün Yapı Denklemleri). Küresel çatı alanının bütün yapı denklemlerini doğrulayınız. Dual formlar ve bağlantı formları Örnek 16.14'dekilerdir.

Çözüm.
Önerme 16.2'e göre üç birinci ve üç ikinci yapı denklemini doğrulamak yeter. Ters simetriyle $\omega_{21} = -\cos\varphi\,d\vartheta$, $\omega_{31} = -d\varphi$, $\omega_{32} = -\sin\varphi\,d\vartheta$'dır. Her adımda iki kural kullanılır: bir 1-formun kendisiyle kama çarpımı sıfırdır ve iki 1-form yer değiştirince işaret değişir.
Birinci denklem, $i = 1$. Sol yan $d\theta_1 = d(d\rho) = 0$. Sağ yan

$$\omega_{12} \wedge \theta_2 + \omega_{13} \wedge \theta_3 = \rho\cos^2\varphi d\vartheta \wedge d\vartheta + \rho d\varphi \wedge d\varphi = 0.$$

Birinci denklem, $i = 2$. Sol yan, çarpım kuralıyla,

$$\begin{aligned} d\theta_2 &= d(\rho\cos\varphi) \wedge d\vartheta = (\cos\varphi\,d\rho - \rho\sin\varphi\,d\varphi) \wedge d\vartheta \\ &= \cos\varphi d\rho \wedge d\vartheta - \rho\sin\varphi d\varphi \wedge d\vartheta. \end{aligned}$$

Sağ yan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\omega_{21}\wedge\theta_1+\omega_{23}\wedge\theta_3 &= -\cos\varphi\,d\vartheta\wedge d\rho+\rho\sin\varphi\,d\vartheta\wedge d\varphi\\ &= \cos\varphi\,d\rho\wedge d\vartheta-\rho\sin\varphi\,d\varphi\wedge d\vartheta.\end{aligned}$$

Birinci denklem, $i=3$. Örnek 16.14'de iki yanın da $d\rho\wedge d\varphi$ olduğunu gördük.
İkinci denklem, $(1,2)$. Örnek 16.14'de iki yanın da $-\sin\varphi\,d\varphi\wedge d\vartheta$ olduğunu gördük.
İkinci denklem, $(1,3)$. Sol yan $d\omega_{13}=d(d\varphi)=0$. Sağ yan

$$\omega_{12}\wedge\omega_{23}=\cos\varphi\sin\varphi\,d\vartheta\wedge d\vartheta=0.$$

İkinci denklem, $(2,3)$. Sol yan

$$d\omega_{23}=d(\sin\varphi)\wedge d\vartheta=\cos\varphi\,d\varphi\wedge d\vartheta.$$

Sağ yan

$$\omega_{21}\wedge\omega_{13}=-\cos\varphi\,d\vartheta\wedge d\varphi=\cos\varphi\,d\varphi\wedge d\vartheta.$$

Altı denklemin altısı da sağlanır; Önerme 16.2 gereği kalan altı ikinci yapı denklemi de bunlardan çıkar. ■

Alıştırma 16.3 (Silindirik Çatının Dual Formları). E_1,E_2,E_3 silindirik çatı alanı olsun. $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, $z=z$ temel eşitliklerinden başlayarak dual 1-formların

$$\theta_1=dr,\qquad \theta_2=r\,d\vartheta,\qquad \theta_3=dz$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Koordinat diferansiyelleri. ϑ'nın diferansiyellenebilir olduğu açık kümede çalışalım. Çarpım ve bileşke kurallarıyla

$$dx=\cos\vartheta\,dr-r\sin\vartheta\,d\vartheta,\qquad dy=\sin\vartheta\,dr+r\cos\vartheta\,d\vartheta$$

bulunur (Alıştırma 6.15'ndeki hesap).
Dual formlar. Silindirik çatının duruş matrisinin satırları $(\cos\vartheta,\sin\vartheta,0)$, $(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0)$ ve $(0,0,1)$'dir. Önerme 16.1 ile

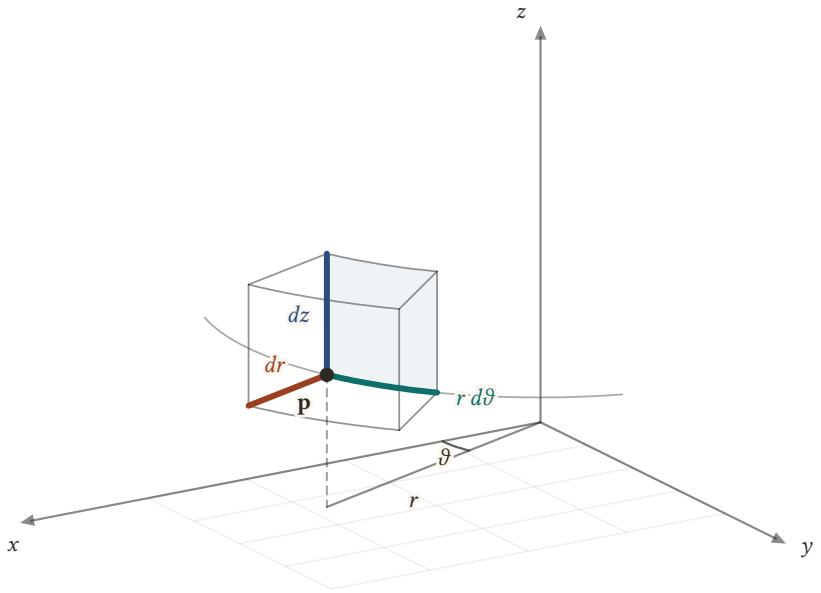
$$\begin{aligned}\theta_1 &= \cos\vartheta\,dx+\sin\vartheta\,dy\\ &= (\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)\,dr+(-r\cos\vartheta\sin\vartheta+r\sin\vartheta\cos\vartheta)\,d\vartheta=dr,\\ \theta_2 &= -\sin\vartheta\,dx+\cos\vartheta\,dy\\ &= (-\sin\vartheta\cos\vartheta+\cos\vartheta\sin\vartheta)\,dr+(r\sin^2\vartheta+r\cos^2\vartheta)\,d\vartheta=r\,d\vartheta,\\ \theta_3 &= dz.\end{aligned}$$

$d\vartheta$, Örnek 16.8'de gördüğümüz gibi z ekseni dışında her yerde tanımlıdır; formüller orada geçerlidir.
Küçük kutu. Silindirik koordinatlar dr, $d\vartheta$, dz kadar artırılınca oluşan küçük kutunun kenarları dışa doğru dr uzunluklu bir doğru parçası, yarıçapı r olan yatay çemberin $d\vartheta$ açılı yayı ve dz uzunluklu düşey bir parçadır; uzunlukları dr, $r\,d\vartheta$, dz'dir ve kenarlar E_1, E_2, E_3 doğrultusundadır. Bulduğumuz dual formlar tam bunlardır. Duruş matrisinin determinantı $\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta=1$ olduğundan Örnek 16.9 ile

$$dx\wedge dy\wedge dz=\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3=r\,dr\wedge d\vartheta\wedge dz$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.4: Silindirik koordinatlar r, ϑ, z değerlerinden dr, $d\vartheta$, dz kadar artınca oluşan küçük kutu (artımlar büyütülmüştür). $\mathbf{p}$'den çıkan üç kenar E_1 (turuncu), E_2 (yeşil) ve E_3 (mavi) doğrultularındadır. ϑ kenarı yarıçapı r olan yatay çemberin bir yayıdır ve uzunluğu $r\,d\vartheta$'dır; öteki iki kenarın uzunlukları dr ve dz'dir. Bunlar θ_1, θ_2, θ_3 dual formlarıdır.

■

Alıştırma 16.4 (Silindirik Çatı Boyunca Koordinatların Türevleri). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı olsun. $E_1[r] = 1$, $E_2[\vartheta] = 1/r$, $E_3[z] = 1$ olduğunu ve öteki altı türevin ($E_1[\vartheta]$, $E_1[z]$, $E_2[r]$, $E_2[z]$, $E_3[r]$, $E_3[\vartheta]$) sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Yöntem. Bir f fonksiyonu için $V[f] = df(V)$'dir (Önerme 5.3). Alıştırma 16.3'ya göre $dr = \theta_1$, $d\vartheta = \theta_2/r$, $dz = \theta_3$'tür; dual formların çatı alanındaki değerleri ise $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$'dir (Lemma 16.1).
r'nin türevleri. $E_j[r] = \theta_1(E_j) = \delta_{1j}$: $E_1[r] = 1$, $E_2[r] = E_3[r] = 0$.
ϑ'nın türevleri. $E_j[\vartheta] = \theta_2(E_j)/r = \delta_{2j}/r$: $E_2[\vartheta] = 1/r$, $E_1[\vartheta] = E_3[\vartheta] = 0$.
z'nin türevleri. $E_j[z] = \theta_3(E_j) = \delta_{3j}$: $E_3[z] = 1$, $E_1[z] = E_2[z] = 0$.
Doğrudan denetim. $E_2[\vartheta]$'yı koordinatlarla da hesaplayalım. $d\vartheta = (x\,dy - y\,dx)/r^2$ olduğundan $\partial\vartheta/\partial x = -y/r^2$ ve $\partial\vartheta/\partial y = x/r^2$'dir. $E_2 = -(y/r)\,U_1 + (x/r)\,U_2$ ile

$$E_2[\vartheta] = -\frac{y}{r}\cdot\left(-\frac{y}{r^2}\right) + \frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Yorum. E_1 yönünde birim hızla ilerlerken r birim hızla artar, öteki koordinatlar değişmez; E_3 için aynı şey z için geçerlidir. E_2 yönünde birim hızla ilerlemek ise yarıçapı r olan çember üzerinde birim hızla dönmektir ve açı $1/r$ hızıyla artar.
■

Alıştırma 16.5 (Silindirik Çatı Boyunca Bir Fonksiyonun Türevleri). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı ve f, silindirik koordinatların diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olsun: $f = g(r, \vartheta, z)$.

$$E_1[f] = \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad E_2[f] = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \qquad E_3[f] = \frac{\partial f}{\partial z}$$

olduğunu gösteriniz; burada kısmi türevler g'nin üç değişkenine göre alınır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Zincir kuralı. $\mathbf{p}$'de bir $\mathbf{v}$ teğet vektörü alalım. $\mathbf{v}[f]$,

$$t \mapsto g\,\big(\, r(\mathbf{p}+t\mathbf{v}),\, \vartheta(\mathbf{p}+t\mathbf{v}),\, z(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) \,\big)$$

fonksiyonunun $t=0$'daki türevidir. Çok değişkenli zincir kuralıyla bu türev

$$\mathbf{v}[f] = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{v}[r] + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\,\mathbf{v}[\vartheta] + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{v}[z]$$

olur, çünkü her koordinat fonksiyonunun doğru boyunca türevi o fonksiyonun $\mathbf{v}$ yönündeki türevidir.
Çatı yönleri. Bunu $\mathbf{v} = E_i(\mathbf{p})$ için yazıp Alıştırma 16.4'deki dokuz değeri koyalım. E_1 için yalnızca $E_1[r]=1$ kalır; E_2 için yalnızca $E_2[\vartheta] = 1/r$; E_3 için yalnızca $E_3[z]=1$. İstenen üç formül çıkar.
İkinci yol. Aynı zincir kuralı diferansiyeller için

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\,d\vartheta + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

verir. Dual formlarla

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}\,\theta_1 + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\,\theta_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\,\theta_3.$$

Sonuç 16.1'ne göre $df = \sum_i E_i[f]\,\theta_i$'dir ve Lemma 16.2'ndeki teklik katsayıları karşılaştırmamıza izin verir.
Bir örnek. $f = r^2 \sin\vartheta$ için

$$E_2[f] = \frac{1}{r}\cdot r^2\cos\vartheta = r\cos\vartheta = x.$$

Doğal koordinatlarla $f = y\sqrt{x^2+y^2} = yr$'dir; $\partial f/\partial x = xy/r$, $\partial f/\partial y = r + y^2/r$ ve

$$E_2[f] = -\frac{y}{r}\cdot\frac{xy}{r} + \frac{x}{r}\left(r + \frac{y^2}{r}\right) = -\frac{xy^2}{r^2} + x + \frac{xy^2}{r^2} = x.$$

■

Alıştırma 16.6 (Silindirik Çatının Yapı Denklemleri). Silindirik çatı alanının tek sıfırdan farklı bağlantı formu $\omega_{12} = d\vartheta$'dır (ve $\omega_{21} = -d\vartheta$; bkz. Örnek 15.3). Alıştırma 16.3'daki dual formlarla altı yapı denklemini doğrulayınız.

Çözüm.
Birinci yapı denklemleri. $i=1$: sol yan $d\theta_1 = d(dr) = 0$; sağ yan

$$\omega_{12}\wedge\theta_2 + \omega_{13}\wedge\theta_3 = d\vartheta\wedge r\,d\vartheta = r\,d\vartheta\wedge d\vartheta = 0.$$

$i=2$: sol yan $d\theta_2 = d(r\,d\vartheta) = dr\wedge d\vartheta$; sağ yan

$$\omega_{21}\wedge\theta_1 + \omega_{23}\wedge\theta_3 = -\,d\vartheta\wedge dr + 0 = dr\wedge d\vartheta.$$

$i=3$: sol yan $d\theta_3 = d(dz) = 0$; sağ yan $\omega_{31}\wedge\theta_1 + \omega_{32}\wedge\theta_2 = 0$.
İkinci yapı denklemleri. $d\omega_{12} = d(d\vartheta) = 0$ ve $\omega_{13}\wedge\omega_{32} = 0$; $d\omega_{13} = 0$ ve $\omega_{12}\wedge\omega_{23} = d\vartheta\wedge 0 = 0$; $d\omega_{23} = 0$ ve $\omega_{21}\wedge\omega_{13} = 0$.
Yorum. Altı denklemden yalnızca biri, $d\theta_2 = \omega_{21}\wedge\theta_1$, sıfırdan farklı bir içerik taşır. $\theta_1 = dr$ ve $\theta_3 = dz$ diferansiyeldir, $\theta_2 = r\,d\vartheta$ değildir; θ_2'nin dış türevi tam olarak çatının ϑ yönündeki dönmesinden, $\omega_{21} = -d\vartheta$'dan gelir. Bu, yükseklikle dönen çatıdaki durumun bir benzeridir: orada çatı z ile, burada ϑ ile döner.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 16.7 (Düzlemde Bir Çatı Alanının Formları). Düzlemde bir E_1, E_2 çatı alanı, bir ψ açı fonksiyonuyla

$$E_1 = \cos\psi\, U_1 + \sin\psi\, U_2, \qquad E_2 = -\sin\psi\, U_1 + \cos\psi\, U_2$$

biçiminde verilmiş olsun. Bağlantı formunu ve dual 1-formları ψ ve doğal koordinatlar x, y cinsinden yazınız.

Çözüm.
Uzaya taşıma. ψ'yi z'ye bağlı olmayan bir fonksiyon olarak uzayda düşünür ve $E_3 = U_3$ eklersek, her noktada E_1, E_2 yatay ve birbirine dik birim vektörler, E_3 düşey birim vektör olduğundan $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir çatı alanı elde ederiz. Duruş matrisi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

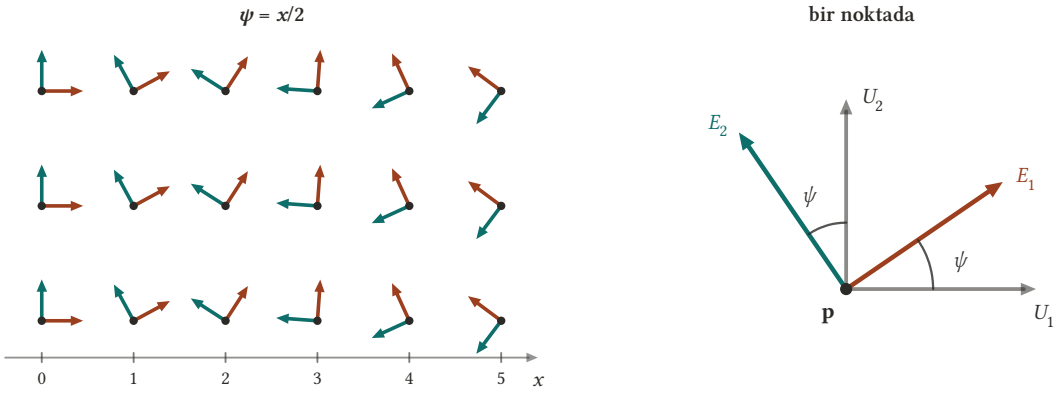
Bağlantı formları. Bu, Örnek 15.3'deki tek açıyla dönen çatıdır; orada $\omega_{12} = d\psi$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$ bulmuştuk. Duruş matrisiyle de hızla denetlenir: $\omega_{12} = \sum_k da_{1k}\, a_{2k}$ ve bileşke kuralı ($d\cos\psi = -\sin\psi\, d\psi$, $d\sin\psi = \cos\psi\, d\psi$) ile

$$\omega_{12} = (-\sin\psi\, d\psi)(-\sin\psi) + (\cos\psi\, d\psi)(\cos\psi) = d\psi.$$

Düzlemdeki tek bağlantı formu $\omega_{12} = d\psi = \psi_x\, dx + \psi_y\, dy$'dir; burada ψ_x, ψ_y kısmi türevlerdir.
Dual formlar. Önerme 16.1 ile

$$\theta_1 = \cos\psi\, dx + \sin\psi\, dy, \qquad \theta_2 = -\sin\psi\, dx + \cos\psi\, dy,$$

ve eklediğimiz alanın dual formu $\theta_3 = dz$'dir.
Yorum. $\omega_{12}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}[\psi]$: çatının bir yöndeki dönme hızı, açı fonksiyonunun o yöndeki değişim hızıdır. Örneğin $\psi = x/2$ için $\omega_{12} = dx/2$: çatı x yönünde birim ilerleyişte yarım radyan döner, y yönünde hiç dönmez. Kutupsal çatı için $\psi = \vartheta$ alınır ve $\omega_{12} = d\vartheta$, $\theta_1 = dr$, $\theta_2 = r\, d\vartheta$ bulunur; silindirik çatının düzlemdeki izi budur.



Şekil 16.5: Düzlemde bir çatı alanı, bir açı fonksiyonuyla. Solda $\psi = x/2$ için çatı alanının örnek noktalardaki değerleri (oklar yarı boyda çizilmiştir): x arttıkça çatı saatin tersi yönünde döner, y değişince hiç değişmez. Sağda tek bir noktada doğal çatı U_1, U_2 (gri) ve onun ψ açısı kadar döndürülmüşü olan E_1 (turuncu), E_2 (yeşil).

■

Alıştırma 16.8 (Düzlemde Yapı Denklemleri). Alıştırma 16.7'daki düzlem çatı alanı için yapı denklemleri nelerdir? Bulunan formların bu denklemleri sağladığını doğrulayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Denklemler. $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$ ve $\theta_3 = dz$ olduğundan Önerme 16.2′deki altı denklemden içerik taşıyanlar şunlardır:

$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2, \qquad d\theta_2 = -\omega_{12} \wedge \theta_1, \qquad d\omega_{12} = 0.$$

Öteki üç denklemde ($d\theta_3 = 0$, $d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}$, $d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}$) iki yan da sıfırdır. Düzlemde birinci yapı denklemleri iki, ikinci yapı denklemi tek denklemdir.
Birinci denklem. Bileşke kuralıyla

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= d(\cos\psi) \wedge dx + d(\sin\psi) \wedge dy = -\sin\psi\, d\psi \wedge dx + \cos\psi\, d\psi \wedge dy \\ &= d\psi \wedge (-\sin\psi\, dx + \cos\psi\, dy), \end{aligned}$$

yani $d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2$.
İkinci denklem. Aynı biçimde

$$\begin{aligned} d\theta_2 &= -\cos\psi\, d\psi \wedge dx - \sin\psi\, d\psi \wedge dy \\ &= -\,d\psi \wedge (\cos\psi\, dx + \sin\psi\, dy) = -\,\omega_{12} \wedge \theta_1. \end{aligned}$$

Üçüncü denklem. $\omega_{12} = d\psi$ bir diferansiyel olduğundan $d\omega_{12} = d(d\psi) = 0$ (Alıştırma 6.8).
Açık yazılış. $d\psi = \psi_x\, dx + \psi_y\, dy$ yazalım. Birinci denklemin sol yanında $dx \wedge dx$ ve $dy \wedge dy$ içeren terimler düşer ve

$$-\sin\psi\,\psi_y\, dy \wedge dx + \cos\psi\,\psi_x\, dx \wedge dy = (\psi_x \cos\psi + \psi_y \sin\psi)\, dx \wedge dy$$

kalır; sağ yan da aynı 2-formu verir. Benzer biçimde ikinci denklemin iki yanı $(\psi_y \cos\psi - \psi_x \sin\psi)\, dx \wedge dy$'dir.
Yorum. Düzlemde ikinci yapı denklemi $d\omega_{12} = 0$'dır; düzlemin düz oluşunun ifadesi budur. Yüzeylerde bu denklemin yerini, sağ yanında yüzeyin eğriliğini taşıyan bir denklem alacak.
■

Bu bölümde her çatı alanına, bir teğet vektörün çatıya göre koordinatlarını okuyan dual 1-formları eşledik, her 1-formun bu formlarla tek türlü açıldığını ve dual formların duruş matrisiyle $\theta = A\, d\xi$ diye yazıldığını gördük; ardından Cartan'ın yapı denklemleri $d\theta = \omega\theta$ ve $d\omega = \omega\omega$'yı ispatladık ve doğal, yükseklikle dönen, silindirik ve küresel çatılarda doğruladık. Sıradaki bölümde (Çatı Alanlarının Özeti) eğriler için Frenet çatısıyla, uzay için keyfi çatı alanlarıyla yaptığımız işleri yan yana koyup çatı alanları yönteminin genel resmini çıkaracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

17. Çatı Alanlarının Özeti

Bu kısmı açarken (İç Çarpım) bir yöntem seçmiştik: incelenen nesnenin her noktasına birbirine dik üç birim vektör yerleştirmek ve bu çatının nasıl döndüğünü yine çatının kendi vektörleri cinsinden yazmak. Bu hedefe vardık. "Hareketli çatı" sezgisi kesin bir nesneye, çatı alanına dönüştü; çatı alanı ya bir eğri boyunca ya da $\mathbb{R}^3$'ün bir açık kümesi üzerinde tanımlıdır. Eğri durumunda yalnızca eğrinin Frenet çatısını, T, N, B'yi kullandık; bu alanların türevlerini alanların kendisi cinsinden yazınca eğrilik ve burulma ortaya çıktı. Açık küme durumunda keyfi bir E_1, E_2, E_3 çatı alanıyla çalıştık; Cartan'ın bağlantı denklemleri aynı işi yaptı ve katsayılar bu kez 1-formlar, yani bağlantı formları oldu.
Bu bölüm yeni tanım getirmiyor. Kısmın nesnelerini ve türevlerini bir tabloda topluyor, Cartan'ın denklemlerini Frenet formüllerinin yanına koyuyor ve iki yöntemin ortak iskeletini görünür kılıyor: her türev ortonormal açılımla çatının kendisi cinsinden yazılır, katsayılar birer dönme hızıdır ve ters simetriktir, bu simetri de hep aynı yerden, sabit iç çarpımların türevinden gelir. Sonda birden çok bölümün araçlarını birlikte kullanan çözümlü tekrar soruları var.

17.1 Nesneler ve Türevleri

Tabloda α düzgün, β birim hızlı bir eğridir (Frenet çatısının geçtiği satırlarda ayrıca $\kappa > 0$); $v = \| \alpha' \|$ ise α'nın süratidir; Y, Z bir eğri üzerinde, V, W ise uzayda vektör alanlarıdır. Kısmın ilk bölümündeki iki araç bütün satırların altında durur: bir noktadaki çatıya göre ortonormal açılım (Teorem 9.1) ve bir çatının doğal çatıya göre duruş matrisi (Tanım 9.8).

nesne	türevi	çatı cinsinden	kurallar ve hesap
Eğri: α	hız α', ivme α'' (Tanım 10.4); sürat v ve yay uzunluğu (Tanım 10.1)	$\alpha' = vT$, $\alpha'' = v'T + \kappa v^2 N$ (Lemma 12.2)	düzgün her eğrinin birim hızlı bir yeniden parametrelendirmesi vardır (Teorem 10.1)
Eğri üzerinde vektör alanı: Y	Y', koordinat fonksiyonlarının türevi (Tanım 10.4)	bir çatıya göre katsayılar iç çarpımlardır	$(fY)' = f'Y + fY'$ ve $(Y \cdot Z)' = Y' \cdot Z + Y \cdot Z'$ (Lemma 10.1); $\| Y \|$ sabitse $Y' \cdot Y = 0$ (Lemma 10.2); $Y' = 0$ ancak ve ancak Y paralel (Lemma 10.4)
Frenet çatısı: T, N, B, β boyunca	T', N', B'	$T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T + \tau B$, $B' = -\tau N$ (Teorem 11.1)	$\kappa = \| T' \|$ (Tanım 11.1); $N = T'/\kappa$, $B = T \times N$ (Tanım 11.2); $\tau = -B' \cdot N$ (Tanım 11.3)
Keyfi hızlı eğrinin çatısı: T, N, B, α boyunca	T', N', B'	aynı formüller, katsayılar v ile çarpılmış (Lemma 12.1)	$\kappa = \| \alpha' \times \alpha'' \| / \| \alpha' \|^3$ ve $\tau = (\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' / \| \alpha' \times \alpha'' \|^2$ (Teorem 12.1)
Vektör alanı: W	kovaryant türev $\nabla_{\mathbf{v}} W = \big(W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \big)'(0)$ (Tanım 13.2) ve $\nabla_V W$ (Tanım 13.3)	$\nabla_{\mathbf{v}} W = \sum_i \mathbf{v}[w_i]\, U_i(\mathbf{p})$ (Lemma 13.1)	lineerlik ve Leibniz kuralları (Teorem 13.1); eğri boyunca $\nabla_{\alpha'(t)} W = W'_\alpha(t)$ (Alıştırma 13.11)

 CC BY-NC-SA 4.0

nesne	türevi	çatı cinsinden	kurallar ve hesap
Çatı alanı: E_1, E_2, E_3	$\nabla_V E_i$	$\nabla_V E_i = \sum_j \omega_{ij}(V)\, E_j$ (Teorem 15.1)	$\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p})$ (Tanım 15.1); $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ (Lemma 15.1); $\omega = dA\, A^T$ (Teorem 15.2)
Dual formlar ve bağlantı formları: θ_i, ω_{ij}	dış türevler $d\theta_i$, $d\omega_{ij}$	$d\theta = \omega\,\theta$ ve $d\omega = \omega\,\omega$ (Teorem 16.1)	$\theta_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot E_i(\mathbf{p})$ (Tanım 16.1); $\theta = A\, d\xi$ (Önerme 16.1); $df = \sum_i E_i[f]\,\theta_i$ (Sonuç 16.1)

Üçüncü sütunda bir örüntü var: her satırda türev, yeni bir nesne getirilmeden eldeki nesnelerin diliyle yazılıyor. Frenet satırında T', N', B' yine T, N, B cinsinden; çatı alanı satırında $\nabla_V E_i$ yine E_1, E_2, E_3 cinsinden; son satırda dual formların ve bağlantı formlarının dış türevleri yine aynı formların kama çarpımları cinsinden yazılıyor. Basamaktan basamağa yalnızca katsayıların türü değişir: Frenet formüllerinde katsayılar fonksiyondur (κ ve τ), bağlantı denklemlerinde 1-formdur (ω_{ij}), yapı denklemlerinin sağ yanlarında ise 1-formların kama çarpımları, yani 2-formlar durur.
Satırlar birbirine de bağlanır. Keyfi hızlı eğri satırı birim hızlı satırın, zamanı $s(t)$ yay uzunluğu fonksiyonuyla yeniden ayarlanmış hâlidir; formüllerdeki v çarpanı bu ayarın izidir. Kovaryant türev, eğri üzerindeki alanlar için tanımladığımız türevi uzaya yayılmış alanlara taşır ve bir eğri boyunca yeniden ona döner: $\nabla_{\alpha'(t)} W = W'_\alpha(t)$. Bu son eşitlik, Frenet formülleri ile bağlantı denklemleri arasındaki köprüdür; bir sonraki başlıkta bu köprüden geçeceğiz.

17.2 Cartan ve Frenet Yan Yana

Bağlantı denklemlerinde V'yi gösterimden çıkarıp kısaca $\nabla E_i = \sum_j \omega_{ij} E_j$ yazalım; bu yazılış, her V vektör alanı için $\nabla_V E_i = \sum_j \omega_{ij}(V)\, E_j$ demektir. Ters simetriyi ve sıfır köşegeni kullanarak açarsak solda Cartan'ın denklemleri, sağda Frenet formülleri yan yana durur:

$$\begin{aligned} \nabla E_1 &= \omega_{12}E_2 + \omega_{13}E_3, & T' &= \kappa N, \\ \nabla E_2 &= -\omega_{12}E_1 + \omega_{23}E_3, & N' &= -\kappa T + \tau B, \\ \nabla E_3 &= -\omega_{13}E_1 - \omega_{23}E_2, & B' &= -\tau N. \end{aligned}$$

İki sistemin kalıbı aynıdır: her satırda bir çatı üyesinin türevi öteki iki üyenin bir bileşimidir, katsayı matrisleri ters simetriktir ve köşegenleri sıfırdır. Cartan'ın denklemleri Frenet'inkilerden gözle görülür ölçüde karmaşık değildir. Bunun nedeni, katsayılar için hazır bir kavramımızın, 1-formların, bulunmasıdır: bir çatı alanı uzayda her yöne başka bir hızla döner ve 1-form, her yöne kendi sayısını lineer biçimde veren nesnedir. 1-formlar olmasaydı her yön için ayrı bir katsayı takımı taşımamız gerekirdi.
Benzerlikleri ve farkları bir tabloda toplayalım.

	Frenet	Cartan
çatı	eğriye uyarlanmış T, N, B (Tanım 11.2)	keyfi E_1, E_2, E_3 (Tanım 14.2)
nerede tanımlı	yalnızca eğri boyunca	$\mathbb{R}^3$'ün bir açık kümesinde
türev	eğri boyunca türev (Tanım 10.4)	her yönde kovaryant türev (Tanım 13.2)
katsayılar	iki fonksiyon: κ, τ	üç 1-form: $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$
katsayının anlamı	birim yol başına dönme hızı	seçilen yönde dönme hızı
katsayının hesabı	$\kappa = T' \cdot N$, $\tau = N' \cdot B$	$\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p})$ ya da $\omega = dA\, A^T$
ters simetrinin kaynağı	T, N, B ortonormaldir; Lemma 10.2	$E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$; Teorem 13.1, (4)

 CC BY-NC-SA 4.0

	Frenet	Cartan
hep sıfır olan katsayı	T''nün B bileşeni, çünkü N öyle seçildi	yok; üç form da sıfırdan farklı olabilir
katsayılar sıfırsa	$\kappa = 0$: doğru (Önerme 11.2); $\tau = 0$: düzlem eğrisi (Sonuç 11.1)	$\omega = 0$: $\mathbb{R}^3$ üzerinde çatı her noktada aynı (Örnek 15.10)
dış türev basamağı	yok: κ ve τ yalnızca eğri boyunca tanımlı fonksiyonlardır	yapı denklemleri (Teorem 16.1)

Tablonun iki sütunu birbirinden bağımsız değildir: Frenet formülleri, bağlantı denklemlerinin bir eğri boyunca yazılışıdır. β, $\kappa > 0$ olan birim hızlı bir eğri ve E_1, E_2, E_3, β'nın noktalarını içeren bir açık kümede tanımlı ve β boyunca T, N, B ile çakışan bir çatı alanı olsun. Böyle bir alan her eğri için bulunmayabilir; örneğin kendini kesen bir eğri kesişme noktasından iki farklı teğetle geçiyorsa E_1 o noktada iki değer birden alamaz. Bulunduğunda ise Sonuç 15.1 T', N', B' türevlerini katsayıları $\omega_{ij}(T)$ olan bir sistemle verir; bu sistemi Frenet formülleriyle karşılaştırınca (Alıştırma 15.12)

$$\omega_{12}(T) = \kappa, \qquad \omega_{13}(T) = 0, \qquad \omega_{23}(T) = \tau$$

bulunur. Yani eğrilik ve burulma, eğriye uyarlanmış bir çatı alanının bağlantı formlarının birim teğete uygulanmasıyla okunur; Frenet formüllerinde ω_{13}'ün karşılığının bulunmaması da N'nin seçiminin sonucudur. Eğri keyfi hızlıysa $\alpha' = vT$'dir ve bağlantı formları her noktada lineer olduğundan $\omega_{ij}(\alpha') = v\,\omega_{ij}(T)$ olur: keyfi hızlı eğrilerin Frenet formüllerindeki v çarpanı buradan gelir (Alıştırma 17.2). Helisler için böyle bir çatı alanını Örnek 15.5'te açıkça kurmuştuk; aşağıdaki örnek, onun bağlantı formlarının helis boyunca ve başka yönlerde ne söylediğini karşılaştırıyor.

Örnek 17.1 (Bir Form Matrisi, Her Yöne Bir Sayı Matrisi). E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı olmak üzere Örnek 15.5'teki çatı alanını $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ için alalım:

$$H_1 = \frac{4}{5}\,E_2 + \frac{3}{5}\,E_3, \qquad H_2 = -E_1, \qquad H_3 = -\frac{3}{5}\,E_2 + \frac{4}{5}\,E_3.$$

Birim hızlı

$$\beta(s) = \big(\, 4\cos(s/5),\, 4\sin(s/5),\, 3s/5 \,\big)$$

helisinin $\mathbf{p} = \beta(0) = (4, 0, 0)$ noktasında, bu çatı alanının bağlantı formlarının matrisini helisin birim teğetine, silindirik E_2'ye, E_1'e ve E_3'e uygulayalım.

Çözüm.
Form matrisi. Örnek 15.5'e göre $\omega_{12} = \frac{4}{5}\,d\vartheta$, $\omega_{13} = 0$ ve $\omega_{23} = \frac{3}{5}\,d\vartheta$'dır. Ters simetriyle

$$\omega = d\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. $\mathbf{p}$'deki bir $\mathbf{v}$ teğet vektörü için $\omega(\mathbf{v})$, girdileri $\omega_{ij}(\mathbf{v})$ sayıları olan matristir; yani sabit matrisin $d\vartheta(\mathbf{v})$ katıdır.
$d\vartheta$'nın değerleri. $d\vartheta = (-y\,dx + x\,dy)/(x^2 + y^2)$ olduğundan (Örnek 15.3) $\mathbf{p} = (4, 0, 0)$'da $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}}$ için $d\vartheta(\mathbf{v}) = v_2/4$'tür. Helisin hızının vektör kısmı $\big(-\frac{4}{5}\sin(s/5), \frac{4}{5}\cos(s/5), \frac{3}{5}\big)$ olduğundan $T(0) = (0, 4/5, 3/5)_{\mathbf{p}}$; ayrıca $E_1(\mathbf{p}) = (1, 0, 0)_{\mathbf{p}}$, $E_2(\mathbf{p}) = (0, 1, 0)_{\mathbf{p}}$, $E_3(\mathbf{p}) = (0, 0, 1)_{\mathbf{p}}$'dir. Buradan

$$d\vartheta(T) = \frac{1}{5}, \qquad d\vartheta(E_2) = \frac{1}{4}, \qquad d\vartheta(E_1) = d\vartheta(E_3) = 0.$$

Helis boyunca. T yönünde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\omega(T) = \begin{pmatrix} 0 & 4/25 & 0 \\ -4/25 & 0 & 3/25 \\ 0 & -3/25 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu, Frenet formüllerinin katsayı matrisidir: $\kappa = 4/25$ ve $\tau = 3/25$. Örnek 11.5'teki $\kappa = a/c^2$ ve $\tau = b/c^2$ formülleri de aynı sayıları verir.

Eksen etrafında yatay. Silindirik E_2 yönünde

$$\omega(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 0 & 3/20 \\ 0 & -3/20 & 0 \end{pmatrix}$$

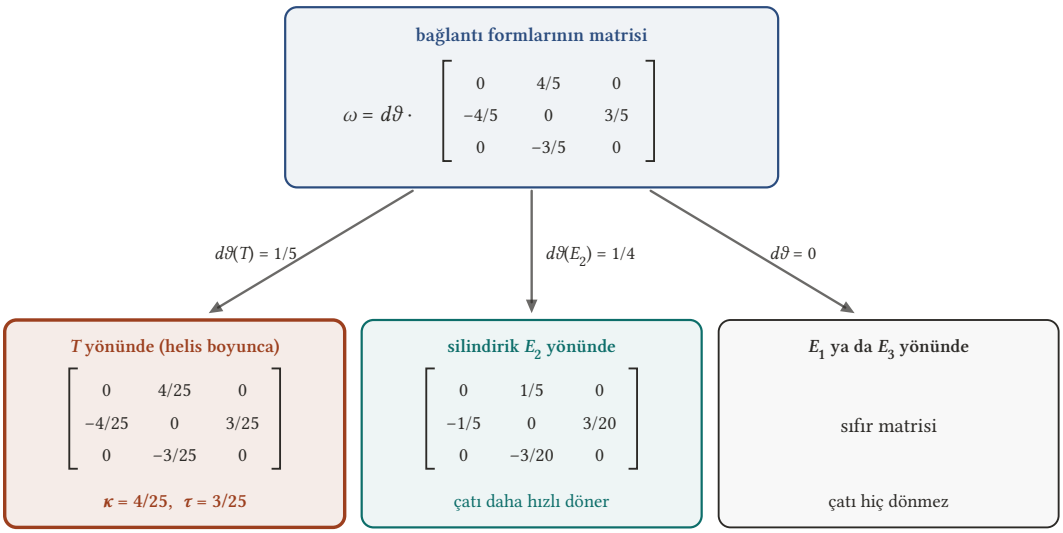
olur. Burada çatı helis boyuncakinden daha hızlı döner: $\mathbf{p}$ noktası eksen etrafında yatay ve birim hızla ilerlerken ϑ açısı $1/r = 1/4$ hızıyla artar; helis boyunca ise hızın bir kısmı yukarı çıkmaya gider. Gerçekten $T = \frac{4}{5}\,E_2(\mathbf{p}) + \frac{3}{5}\,E_3(\mathbf{p})$ ve bağlantı formları lineer olduğundan

$$\omega(T) = \frac{4}{5}\,\omega(E_2) + \frac{3}{5}\,\omega(E_3) = \frac{4}{5}\,\omega(E_2);$$

örneğin $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ ve $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{20} = \frac{3}{25}$.

Dışa ve yukarı. E_1 ve E_3 yönünde $d\vartheta$ sıfırdır, dolayısıyla $\omega(E_1)$ ve $\omega(E_3)$ sıfır matrisidir: eksenden dışa ya da yukarı ilerleyişte çatı hiç dönmez.

Yorum. Bir 1-form matrisi her teğet vektöre bir sayı matrisi verir. Frenet formüllerinin κ ve τ sayıları bu sayı matrislerinden yalnızca birini, helisin kendi yönündekini okur; öteki yönlerdeki matrisler aynı çatı alanının dönmesini anlatır, ama helis hakkında bilgi taşımaz.



Şekil 17.1: Helise uyarlanmış H_1, H_2, H_3 çatı alanının bağlantı formları tek bir matriste toplanır: $\omega = d\vartheta$ çarpı sabit bir ters simetrik matris (üstte). Bir 1-form matrisi her teğet vektöre bir sayı matrisi verir. $\mathbf{p} = (4, 0, 0)$ noktasında helisin birim teğeti T'ye uygulanınca Frenet formüllerinin katsayı matrisi çıkar ve $\kappa = 4/25$, $\tau = 3/25$ okunur (solda). Eksen etrafında yatay ilerleyişte çatı daha hızlı döner (ortada); dışa ya da yukarı ilerleyişte hiç dönmez (sağda). $T = (4/5)E_2 + (3/5)E_3$ olduğundan soldaki matris, ortadakinin 4/5 katıdır.

■

17.3 Ortak Örüntüler

Kısmın bütün hesapları birkaç basit fikrin üzerine kurulu. Bunları ayrı ayrı adlandırmak, ileride yüzeylere uyarlanmış çatılarla çalışırken nereye bakacağımızı bilmemizi sağlar.

Katsayılar iç çarpımdır. Bir noktadaki çatıya göre bir vektörün katsayısı, o vektörün çatı üyesiyle iç çarpımıdır (Teorem 9.1). Kısmın adı konmuş büyüklüklerinin çoğu bu tek işlemin örnekleridir: duruş matrisinin girdileri $a_{ij} = E_i \cdot U_j$, eğrilik ve burulma $\kappa = T' \cdot N$ ve $\tau = N' \cdot B$, bağlantı formları $\omega_{ij}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} E_i \cdot E_j(\mathbf{p})$, dual formlar $\theta_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot E_i(\mathbf{p})$.

Ters simetri hep aynı yerden gelir. $F_i \cdot F_j = \delta_{ij}$ sabittir; Leibniz kuralıyla türev alınca $F_i' \cdot F_j + F_i \cdot F_j' = 0$ bulunur. Eğri üzerindeki alanlarda bu Lemma 10.2'dır ve bir eğri üzerindeki her çatının türev katsayılarını ters simetrik yapar (Alıştırma 17.1). Uzaydaki alanlarda aynı hesabı kovaryant türevin iç çarpım kuralı yapar (Lemma 15.1); matris dilinde ise $AA^T = I$ eşitliğinin diferansiyeli $\omega + \omega^T = 0$ verir (Örnek 15.9). Ters simetri dokuz katsayıyı üçe indirir; Frenet çatısında N'nin seçimi bir katsayıyı daha sıfırlar ve geriye iki fonksiyon, κ ile τ, kalır.

Katsayılar dönme hızıdır. $\omega_{ij}(\mathbf{v})$, $\mathbf{p}$ noktası $\mathbf{v}$ yönünde harekete geçtiğinde E_i'nin E_j'ye doğru dönmeye başlama hızıdır. κ, birim yol başına T'nin N'ye doğru, τ da N'nin B'ye doğru dönme hızıdır. Düzlemde dönme tek bir açıyla anlatılır ve iki dil tam olarak çakışır: açısı ψ olan bir çatı alanının bağlantı formu $d\psi$'dir (Örnek 15.3), eğim açısı φ olan bir eğrinin düzlem eğriliği φ''dür (Alıştırma 11.13) ve ikincisi birincisinin eğri boyunca değeridir (Alıştırma 17.4).

Uyarlanmış çatı. Frenet çatısı eğriye uyarlanmıştır; bu yüzden κ ve τ eğrinin kendisi hakkında bilgi verir. Keyfi bir çatı alanının bağlantı formları ise yalnızca o çatı alanının dönmesini kaydeder. Yöntemin gücü, çatıyı probleme göre seçebilmemizdedir; Cartan Yapı Denklemleri bölümünün sonundaki dört adımlı reçete bunu söyler. Uyarlanmış bir çatı alanı birden çok nesneye aynı anda uyarlanmış olabilir: Örnek 15.6'ndeki çatı alanı ekseni z ekseni ve eğimi $3/4$ olan bütün helislerin, silindirik çatıdan kurulan bir düzlem çatı alanı da xy düzleminde merkezi orijin olan ve saatin tersi yönünde dolaşılan bütün çemberlerin Frenet çatısını birden taşır.

17.4 Tekrar Soruları

Her soru birden çok bölümün araçlarını birlikte kullanır.

Alıştırma 17.1 (Bir Eğri Üzerindeki Çatının Türev Katsayıları). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bir eğri, F_1, F_2, F_3 de α üzerinde, her t için $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ bir çatı olacak biçimde vektör alanları olsun. $c_{ij} = F_i' \cdot F_j$ fonksiyonları için

$$F_i' = \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, F_j \qquad \text{ve} \qquad c_{ij} = -c_{ji}$$

olduğunu gösteriniz; Frenet formüllerinin ve bir eğri boyunca bağlantı denklemlerinin bu sistemin özel hâlleri olduğunu açıklayınız.

Çözüm.
Açılım. $t \in I$ sabit olsun. $F_i'(t)$, $\alpha(t)$ noktasında bir teğet vektördür (Tanım 10.4) ve aynı noktada $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ bir çatıdır. Ortonormal açılım (Teorem 9.1)

$$F_i'(t) = \sum_{j=1}^{3} \big(F_i'(t) \cdot F_j(t) \big)\, F_j(t) = \sum_{j=1}^{3} c_{ij}(t)\, F_j(t)$$

verir. Bu her t için doğru olduğundan $F_i' = \sum_j c_{ij} F_j$'dir.

Ters simetri. Çatı koşulu gereği $F_i \cdot F_j$ fonksiyonu sabittir: $i = j$ ise 1, $i \neq j$ ise 0. Lemma 10.2 bu durumda $F_i' \cdot F_j = -F_i \cdot F_j'$ verir. İç çarpım simetrik olduğundan sağ yan $-F_j' \cdot F_i = -c_{ji}$'dir; yani $c_{ij} = -c_{ji}$. Özel olarak $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$ olur ve sistem üç fonksiyonla, c_{12}, c_{13}, c_{23} ile belirlenir.

Frenet formülleri. $\alpha = \beta$ birim hızlı, $\kappa > 0$ ve $F_1, F_2, F_3 = T, N, B$ olsun. N'nin tanımı gereği $T' = \kappa N$'dir (Tanım 11.2), dolayısıyla $c_{12} = \kappa N \cdot N = \kappa$ ve $c_{13} = \kappa N \cdot B = 0$. Burulmanın tanımı $B' = -\tau N$ olduğundan (Tanım 11.3) $c_{32} = -\tau$, ters simetriyle $c_{23} = \tau$. Genel sistem bu üç sayıyla

$$T' = \kappa N, \qquad N' = -\kappa T + \tau B, \qquad B' = -\tau N$$

olur; Frenet formüllerinin ispatının özü (Teorem 11.1) tam olarak bu hesaptır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bağlantı denklemleri. F_i, bir E_1, E_2, E_3 çatı alanının α'ya kısıtlanışı olsun. Sonuç 15.1 $F_i' = \sum_j \omega_{ij}(\alpha')\, F_j$ verir. Açılımdaki katsayılar tek olduğundan her t için $c_{ij}(t) = \omega_{ij}\,(\,\alpha'(t)\,)$'dir. Bu durumda ters simetri iki yoldan gelir: yukarıdaki hesaptan ve bağlantı formlarının kendi ters simetrisinden (Lemma 15.1).
Yani bir eğri boyunca her çatı, Frenet biçiminde ters simetrik bir sistemle değişir. Frenet çatısının özelliği, $F_1 = T$ seçildiğinde $c_{13} = T' \cdot F_3$ katsayısının sıfır olmasıdır; N tam da bunu sağlayacak biçimde seçilmiştir; bağlantı denklemlerini ayıran ise katsayıların uzaydaki 1-formlardan, yani eğriden bağımsız bir kaynaktan gelmesidir.
■

Alıştırma 17.2 (Sürat Çarpanı Bağlantı Formlarının Lineerliğinden Gelir). $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, eğriliği $\kappa > 0$ olan düzgün bir eğri, v sürati ve T, N, B Frenet çatı alanı olsun. E_1, E_2, E_3, tanım kümesi α'nın noktalarını içeren ve her t için $E_1(\alpha(t)) = T(t)$, $E_2(\alpha(t)) = N(t)$, $E_3(\alpha(t)) = B(t)$ eşitliklerini sağlayan bir çatı alanı olsun. Keyfi hızlı eğriler için Frenet formüllerini (Lemma 12.1) bağlantı denklemlerinden çıkarınız.

Çözüm.
Birim hızlı kopyada. $\bar\alpha$, α'nın birim hızlı yeniden parametrelendirmesi olsun: s bir yay uzunluğu fonksiyonu ve $\alpha = \bar\alpha(s)$. $\bar\alpha$, s'nin görüntüsü olan aralıkta tanımlıdır; yani her parametre değeri bir $t \in I$ için $s(t)$ biçimindedir. Frenet aparatının tanımı (Tanım 12.1) $T(t) = \bar T(s(t))$ der; dolayısıyla

$$E_1\,(\,\bar\alpha(s(t))\,) = E_1\,(\,\alpha(t)\,) = T(t) = \bar T\,(\,s(t)\,),$$

ve aynı biçimde E_2, E_3 de $\bar\alpha$ boyunca $\bar N$, $\bar B$ ile çakışır. Alıştırma 15.12'i $\bar\alpha$'ya uygulayıp $s(t)$'de değerlendirirsek

$$\omega_{12}\,(\,T(t)\,) = \kappa(t), \qquad \omega_{13}\,(\,T(t)\,) = 0, \qquad \omega_{23}\,(\,T(t)\,) = \tau(t)$$

buluruz; çünkü $\bar T(s(t)) = T(t)$, $\bar\kappa(s(t)) = \kappa(t)$ ve $\bar\tau(s(t)) = \tau(t)$'dir.
Lineerlik. Lemma 12.2 gereği $\alpha'(t) = v(t)\,T(t)$'dir. Bağlantı formları her noktada lineer olduğundan (Lemma 15.1)

$$\omega_{ij}\,(\,\alpha'(t)\,) = v(t)\,\omega_{ij}\,(\,T(t)\,)\,.$$

Böylece $\omega_{12}(\alpha') = \kappa v$, $\omega_{13}(\alpha') = 0$ ve $\omega_{23}(\alpha') = \tau v$.
Bağlantı denklemleri eğri boyunca. E_1, E_2, E_3'ün α'ya kısıtlanışları T, N, B'dir. Sonuç 15.1 ile, ters simetriyi ve sıfır köşegeni kullanarak,

$$\begin{aligned} T' &= \omega_{12}(\alpha')\,N + \omega_{13}(\alpha')\,B = \kappa v\,N, \\ N' &= -\omega_{12}(\alpha')\,T + \omega_{23}(\alpha')\,B = -\kappa v\,T + \tau v\,B, \\ B' &= -\omega_{13}(\alpha')\,T - \omega_{23}(\alpha')\,N = -\tau v\,N. \end{aligned}$$

Bunlar keyfi hızlı eğrinin Frenet formülleridir.
Yorum. κ ve τ birim yol başına dönme hızlarıdır; T' ise birim zaman başına değişimdir. Birim zamanda v kadar yol gidildiğinden araya v çarpanı girer. Keyfi hızlı eğriler bölümünde bu çarpan zincir kuralından gelmişti; burada 1-formların lineerliğinden geliyor, çünkü hız vektörü birim teğetin v katıdır.
■

Alıştırma 17.3 (Keyfi Hızlı Bir Helis Boyunca Bağlantı Formları). $\alpha(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$ helisi ile Örnek 17.1'ndeki H_1, H_2, H_3 çatı alanı verilsin. $\omega_{ij}\,(\,\alpha'(t)\,)$ sayılarını hesaplayınız ve α'nın sürati, eğriliği ve burulmasıyla $\omega_{12}(\alpha') = \kappa v$, $\omega_{13}(\alpha') = 0$, $\omega_{23}(\alpha') = \tau v$ eşitliklerini doğrulayınız.

Çözüm.
Çatı eğri boyunca. Örnek 17.1'ndeki birim hızlı β helisi için $\beta(5t) = \alpha(t)$'dir; $s = 5t$ artan bir yeniden parametrelendirmedir. Örnek 15.5'e göre H_1, H_2, H_3 alanları β boyunca β'nın Frenet çatısıdır; Frenet aparatının tanımı (Tanım 12.1) gereği α boyunca da α'nın Frenet çatısıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Formların değeri. $\alpha'(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 3)_{\alpha(t)}$ ve $\alpha(t)$'de $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $x^2 + y^2 = 16$ olduğundan

$$d\vartheta\,(\,\alpha'(t)\,) = \frac{-4\sin t\cdot(-4\sin t) + 4\cos t\cdot 4\cos t}{16} = 1.$$

Bağlantı formları $\omega_{12} = \frac{4}{5}\,d\vartheta$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = \frac{3}{5}\,d\vartheta$ olduğundan

$$\omega_{12}(\alpha') = \frac{4}{5}, \qquad \omega_{13}(\alpha') = 0, \qquad \omega_{23}(\alpha') = \frac{3}{5}.$$

Değerin 1 çıkması şaşırtıcı değildir: $d\vartheta(\alpha')$, $\vartheta(\alpha(t))$ fonksiyonunun t'ye göre türevidir (Tanım 5.5, Lemma 4.2) ve ϑ'nın tanımlı olduğu her parçada helis üzerinde $\vartheta = t + 2\pi k$'dir. $d\vartheta$'nın kendisi z ekseni dışında her yerde tanımlı olduğundan sonuç bütün helis boyunca geçerlidir.
Aparat. Türevler

$$\alpha'' = (-4\cos t, -4\sin t, 0), \qquad \alpha''' = (4\sin t, -4\cos t, 0)$$

ve sürat $v = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9} = 5$'tir. Vektörel çarpım

$$\alpha'\times\alpha'' = (12\sin t, -12\cos t, 16), \qquad \|\,\alpha'\times\alpha''\,\| = \sqrt{144+256} = 20$$

olur. Teorem 12.1 ile

$$\kappa = \frac{20}{5^3} = \frac{4}{25}, \qquad \tau = \frac{48\sin^2 t + 48\cos^2 t}{20^2} = \frac{48}{400} = \frac{3}{25}.$$

Karşılaştırma. $\kappa v = \frac{4}{25}\cdot 5 = \frac{4}{5}$ ve $\tau v = \frac{3}{25}\cdot 5 = \frac{3}{5}$; üç eşitlik de tutar.
Doğrudan denetim. $T = \alpha'/5$ alanının vektör kısmını türevleyelim:

$$T = \big(-\frac{4}{5}\sin t, \frac{4}{5}\cos t, \frac{3}{5}\,\big),$$
$$T' = \big(-\frac{4}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\sin t, 0\,\big) = \frac{4}{5}\,(-\cos t, -\sin t, 0).$$

$H_2 = -E_1$'in $\alpha(t)$'deki vektör kısmı $(-\cos t, -\sin t, 0)$ olduğundan $T' = \frac{4}{5}\,H_2 = \omega_{12}(\alpha')\,N$.
■

Alıştırma 17.4 (Düzlem Eğriliği Bir Bağlantı Formunun Değeridir). $\beta(s) = (\,x(s), y(s), 0\,)$, xy düzleminde birim hızlı bir eğri; φ eğim açısı, N birim teğetin $+90^\circ$ döndürülmüşü ve $\tilde\kappa$ düzlem eğriliği olsun (Alıştırma 11.12, Alıştırma 11.13). ψ, β'nın noktalarını içeren bir açık kümede diferansiyellenebilir ve her s için $\psi(\beta(s)) = \varphi(s)$ olan bir fonksiyon;

$$F_1 = \cos\psi\,U_1 + \sin\psi\,U_2, \qquad F_2 = -\sin\psi\,U_1 + \cos\psi\,U_2, \qquad F_3 = U_3$$

de Örnek 15.3′deki çatı alanı olsun. $\tilde\kappa = \omega_{12}(T) = d\psi(T)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Çatı eğri boyunca. $T = \beta' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ ve onun $+90^\circ$ döndürülmüşü $N = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$'dır. $\psi(\beta(s)) = \varphi(s)$ olduğundan $F_1(\beta(s)) = T(s)$ ve $F_2(\beta(s)) = N(s)$; $F_3 = U_3$ ise düzleme diktir.
Bağlantı denklemleri. Örnek 15.3'e göre $\omega_{12} = d\psi$ ve $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$'dır. Sonuç 15.1′yı $\beta' = T$ ile uygularsak

$$T' = \omega_{12}(T)\,N + \omega_{13}(T)\,U_3 = d\psi(T)\,N,$$
$$N' = -\omega_{12}(T)\,T + \omega_{23}(T)\,U_3 = -d\psi(T)\,T$$

bulunur. Düzlem eğriliği $T' = \tilde\kappa N$ ile tanımlanmıştı ve N birim olduğundan katsayı tektir: $\tilde\kappa = d\psi(T) = \omega_{12}(T)$. İkinci denklem de Alıştırma 11.12′deki $N' = -\tilde\kappa T$ eşitliğidir.
Eğim açısının türevi. Diferansiyelin tanımı (Tanım 5.5) ve Lemma 4.2 ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\psi\,\big(\,T(s)\,\big) = T(s)[\psi] = \frac{d\,\big(\,\psi(\beta)\,\big)}{ds}(s) = \varphi'(s).$$

Böylece $\tilde{\kappa} = \varphi'$ eşitliği, yani Alıştırma 11.13, bağlantı denklemlerinden yeniden çıkar. Yukarıdaki ilk iki adımda ψ'nin yalnızca F_1, F_2 alanlarının β boyunca T, N ile çakışmasını sağladığını kullandık; $\tilde{\kappa} = \omega_{12}(T)$ sonucu bu çakışma olan her durumda geçerlidir.
Bir örnek: merkezi orijin olan çemberler. $R > 0$ olsun ve

$$\beta(s) = \big(\, R\cos(s/R),\, R\sin(s/R),\, 0 \,\big)$$

çemberini alalım; çember saatin tersi yönünde dolaşılır ve $T = \big(-\sin(s/R), \cos(s/R), 0\,\big)$'dır. E_1, E_2, E_3 silindirik çatı alanı olmak üzere

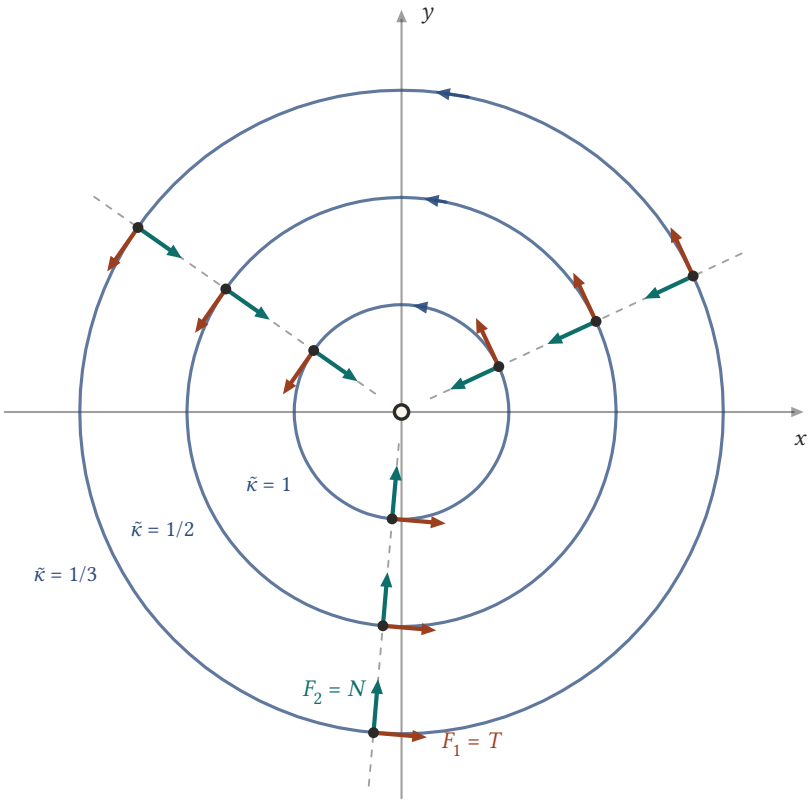
$$F_1 = E_2 = -\sin\vartheta\, U_1 + \cos\vartheta\, U_2, \qquad F_2 = -E_1 = -\cos\vartheta\, U_1 - \sin\vartheta\, U_2$$

alalım. Bu çatı alanı z ekseni dışında her yerde tanımlıdır ve ϑ'nın tanımlı olduğu her açık parçada $\psi = \vartheta + \pi/2$ açısıyla dönen çatıdır. Tam çemberin çevresinde tek değerli bir ψ seçilemez, çünkü bir turda φ açısı 2π artar; ama yukarıda gördüğümüz gibi $\tilde{\kappa} = \omega_{12}(T)$ eşitliği için yalnızca $F_1 = T$ ve $F_2 = N$ çakışması gerekir. Çember üzerinde F_1 ile F_2'nin vektör kısımları $\big(-\sin(s/R), \cos(s/R), 0\,\big)$ ve $\big(-\cos(s/R), -\sin(s/R), 0\,\big)$'dır, yani $F_1 = T$ ve $F_2 = N$. Bağlantı formu, z ekseni dışında her yerde tanımlı olan $\omega_{12} = d\vartheta$'dır (Örnek 15.3) ve $u = s/R$ yazarak

$$\tilde{\kappa} = d\vartheta(T) = \frac{-R\sin u\cdot(-\sin u) + R\cos u\cdot\cos u}{R^2} = \frac{1}{R}$$

buluruz. Bu, çemberin eğriliğidir (Örnek 11.1); saatin tersi yönünde dolaşılan çemberin düzlem eğriliği de budur (Alıştırma 11.14). Aynı çatı alanı, xy düzleminde merkezi orijin olan ve saatin tersi yönünde dolaşılan bütün çemberlere birden uyarlanmıştır: aynı ışın üzerindeki noktalarda çatı aynıdır ve yarıçap yalnızca T yönünde yürürken açının ne hızla değiştiğini belirler.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.2: Düzlemde $F_1 = -\sin\vartheta\, U_1 + \cos\vartheta\, U_2$ (turuncu), $F_2 = -\cos\vartheta\, U_1 - \sin\vartheta\, U_2$ (yeşil) çatı alanı; oklar yarıçapı 1, 2 ve 3 olan çemberler üzerinde aynı üç kutupsal açıda çizilmiştir. Merkezi orijin olan, saatin tersi yönünde dolaşılan her çember boyunca F_1 birim teğet T, F_2 birim normal N'dir. Aynı ışın üzerindeki çatılar aynıdır; yarıçap yalnızca bir tur boyunca katedilen yolu, dolayısıyla $d\vartheta(T) = 1/r$ düzlem eğriliğini belirler. Çatı alanı orijinde tanımlı değildir.

■

Alıştırma 17.5 (Helise Uyarlanmış Çatıda Yapı Denklemleri). $a > 0$, $b \neq 0$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve H_1, H_2, H_3, Örnek 15.5'teki çatı alanı olsun. Bu çatı alanının dual 1-formlarını r, ϑ, z silindirik koordinatlarıyla yazınız ve altı yapı denklemini doğrulayınız.

Çözüm.
Dual formlar. H çatı alanının dual formlarını $\bar\theta_1, \bar\theta_2, \bar\theta_3$ ile, silindirik çatınınkileri $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ile gösterelim. Bir $\mathbf{p}$ noktasındaki her $\mathbf{v}$ için, iç çarpımın lineerliğiyle,

$$\bar\theta_1(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot H_1(\mathbf{p}) = \frac{a}{c}\,\mathbf{v}\cdot E_2(\mathbf{p}) + \frac{b}{c}\,\mathbf{v}\cdot E_3(\mathbf{p}) = \frac{a}{c}\,\theta_2(\mathbf{v}) + \frac{b}{c}\,\theta_3(\mathbf{v})$$

olur; öteki ikisi aynı biçimde bulunur. Alıştırma 16.3'daki $\theta_1 = dr$, $\theta_2 = r\,d\vartheta$, $\theta_3 = dz$ ile

$$\bar\theta_1 = \frac{a}{c}\,r\,d\vartheta + \frac{b}{c}\,dz, \qquad \bar\theta_2 = -dr, \qquad \bar\theta_3 = -\frac{b}{c}\,r\,d\vartheta + \frac{a}{c}\,dz.$$

Bağlantı formları Örnek 15.5'ten: $\omega_{12} = \frac{a}{c}\,d\vartheta$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = \frac{b}{c}\,d\vartheta$.
Dış türevler. $d(dr) = d(d\vartheta) = d(dz) = 0$ ve $d(r\,d\vartheta) = dr\wedge d\vartheta$ olduğundan (Alıştırma 16.6)

$$d\bar\theta_1 = \frac{a}{c}\,dr\wedge d\vartheta, \qquad d\bar\theta_2 = 0, \qquad d\bar\theta_3 = -\frac{b}{c}\,dr\wedge d\vartheta,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve üç bağlantı formunun dış türevi sıfırdır.
Birinci yapı denklemleri. Açık yazılışla (Önerme 16.2) sağ yanları hesaplayalım; $d\vartheta \wedge d\vartheta = 0$'dır. $i = 1$ için

$$\omega_{12} \wedge \bar{\theta}_2 + \omega_{13} \wedge \bar{\theta}_3 = \frac{a}{c}\, d\vartheta \wedge (-dr) = \frac{a}{c}\, dr \wedge d\vartheta = d\bar{\theta}_1.$$

$i = 2$ için $\omega_{21} = -\frac{a}{c}\, d\vartheta$ ile

$$\begin{aligned}\omega_{21} \wedge \bar{\theta}_1 + \omega_{23} \wedge \bar{\theta}_3 &= -\frac{a}{c}\, d\vartheta \wedge \frac{b}{c}\, dz + \frac{b}{c}\, d\vartheta \wedge \frac{a}{c}\, dz \\ &= -\frac{ab}{c^2}\, d\vartheta \wedge dz + \frac{ab}{c^2}\, d\vartheta \wedge dz = 0 = d\bar{\theta}_2.\end{aligned}$$

$i = 3$ için $\omega_{31} = 0$ ve $\omega_{32} = -\frac{b}{c}\, d\vartheta$ ile

$$\omega_{31} \wedge \bar{\theta}_1 + \omega_{32} \wedge \bar{\theta}_2 = -\frac{b}{c}\, d\vartheta \wedge (-dr) = -\frac{b}{c}\, dr \wedge d\vartheta = d\bar{\theta}_3.$$

İkinci yapı denklemleri. Sol yanlar sıfırdır. Sağ yanlar da sıfırdır:

$$\omega_{13} \wedge \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{12} \wedge \omega_{23} = \frac{ab}{c^2}\, d\vartheta \wedge d\vartheta = 0, \qquad \omega_{21} \wedge \omega_{13} = 0.$$

Yorum. Sıfırdan farklı iki dış türev, $d\bar{\theta}_1$ ve $d\bar{\theta}_3$, silindirik çatının $\theta_2 = r\, d\vartheta$ formundan gelir; bu form bir diferansiyel değildir ve dış türevi çatının ϑ yönündeki dönmesini taşır. İkinci yapı denklemlerinin burada kendiliğinden sağlanması, bağlantı formlarının hepsinin aynı $d\vartheta$ formunun sabit katları olmasındandır.
■

Alıştırma 17.6 (Çatının Bir Eğri Boyunca Değişmemesi). E_1, E_2, E_3, bağlantı formları ω_{ij} olan bir çatı alanı ve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tanım kümesinde kalan bir eğri olsun. E_1, E_2, E_3'ün α'ya kısıtlanışlarının üçünün de paralel olması için gerek ve yeter koşulun her i, j ve her t için $\omega_{ij}\left(\, \alpha'(t) \,\right) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Türevler. Sonuç 15.1 ile

$$(E_i)'_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\left(\, \alpha'(t) \,\right) (E_j)_\alpha(t).$$

Yeterlik. Bütün $\omega_{ij}(\alpha'(t))$ sayıları sıfırsa her $(E_i)_\alpha$'nın türevi sıfırdır ve Lemma 10.4'in (3) şıkkı gereği her kısıtlanış paraleldir.
Gereklilik. Kısıtlanışlar paralelse türevleri sıfırdır (yine Lemma 10.4). Her t'de $E_1(\alpha(t)), E_2(\alpha(t)), E_3(\alpha(t))$ bir çatıdır ve bir vektörün çatıya göre katsayıları iç çarpımlarla belirlidir (Teorem 9.1); sıfır vektörünün bütün katsayıları sıfırdır. Dolayısıyla

$$\omega_{ij}\left(\, \alpha'(t) \,\right) = (E_i)'_\alpha(t) \cdot E_j\left(\, \alpha(t) \,\right) = 0.$$

Silindirik çatıda. Tek sıfırdan farklı bağlantı formu $\omega_{12} = d\vartheta$'dır; koşul $d\vartheta(\alpha') = 0$'a, yani eğri boyunca ϑ açısının değişmemesine indirgenir.
$\alpha(t) = (t, 2t, 3t)$, $t > 0$ için $\alpha' = (1, 2, 3)$ ve

$$d\vartheta(\alpha') = \frac{-2t \cdot 1 + t \cdot 2}{t^2 + 4t^2} = 0.$$

Çatı bu ışın boyunca değişmez: $E_1 = (1, 2, 0)/\sqrt{5}$, $E_2 = (-2, 1, 0)/\sqrt{5}$ ve $E_3 = (0, 0, 1)$ vektör kısımları sabittir. Işın, z ekseninden geçen bir yarım düzlemde kalır (bkz. Örnek 15.4).
$\gamma(t) = (1, t, 0)$ doğrusu için ise $\gamma' = (0, 1, 0)$ ve

$$d\vartheta(\gamma') = \frac{-t\cdot 0 + 1\cdot 1}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \neq 0;$$

kısıtlanışlar paralel değildir. Doğrudan denetim: $(E_1)_\gamma = (1,t,0)/\sqrt{1+t^2}$'nin türevi

$$\left(\frac{-t}{(1+t^2)^{3/2}}, \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}, 0\right) = \frac{1}{1+t^2}\,(E_2)_\gamma$$

olur; çünkü $(E_2)_\gamma = (-t,1,0)/\sqrt{1+t^2}$'dir. Eğri düz bir doğru olduğu hâlde çatı onun üzerinde döner: t artarken $\vartheta = \arctan t$ açısı $-\pi/2$'den $\pi/2$'ye çıkar ve çatı doğru boyunca toplam yarım tur döner. ■

Bu kısımda eğrileri Frenet çatısıyla inceleyip eğrilik ile burulmayı bulduk, sonra aynı yöntemi uzaya yayılmış keyfi çatı alanlarına taşıyıp bağlantı formlarına ve Cartan'ın yapı denklemlerine ulaştık. Sıradaki kısım olan Öklid Geometrisi'nde $\mathbb{R}^3$'ün uzaklığı koruyan dönüşümlerini, yani izometrileri inceleyecek ve eğrilik ile burulmanın bir eğriyi uzaydaki konumu dışında tamamen belirlediğini göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

18. Öklid Uzayının İzometrileri

Önceki kısımda (Çatı Alanlarının Özeti) eğrileri Frenet çatısıyla, uzayın kendisini de keyfi çatı alanlarıyla inceledik; eğrilik, burulma, bağlantı formları ve yapı denklemleri gibi güçlü araçlar kurduk. Bu bölümle açılan **Öklid Geometrisi** kısmında bir adım geri çekilip şu soruyu soracağız: bu araçlarla ölçtüğümüz büyüklüklerden hangileri gerçekten geometriktir, yani incelenen nesnenin uzayda nerede durduğuna ve nasıl çevrildiğine bağlı değildir?
Sorunun en tanıdık hâli düzlem geometrisinden gelir. İki üçgenden birini düzlemde kaydırıp döndürerek (gerekirse ters çevirerek) ötekinin tam üstüne oturtabiliyorsak bu iki üçgene **eş** (congruent) deriz. Eş üçgenlerin karşılıklı açıları eşittir, karşılıklı kenarları aynı uzunluktadır, sınırladıkları alanlar aynıdır; kısacası bir üçgenin her geometrik özelliği, ona eş olan her üçgende kendiliğinden vardır. Tersine, iki üçgenin eş olup olmadığına karar vermenin basit yolları da vardır: örneğin iki üçgenin kenar uzunlukları aynı üç sayıysa üçgenler eştir.
Bu gözlemleri uzaya ve üçgenlerden çok daha genel nesnelere, örneğin eğrilere, taşımak istiyoruz. Bunun için önce "kaydırma ve döndürme" fikrini kesin bir tanıma dönüştürmeliyiz. Bir hareketin üçgeni bozmaması, köşeler arasındaki uzaklıkları değiştirmemesi demektir; uzaklığı koruyan bu hareketlere izometri diyeceğiz. Bu bakış, Felix Klein'ın 1872'de ilan ettiği Erlangen programında genel bir ilkeye dönüşmüştür: bir geometri, bir dönüşüm grubunun ve bu grubun değiştirmediği özelliklerin incelenmesidir. Öklid geometrisinin grubu, bu bölümde tanıyacağımız izometri grubudur.
Plan şöyle. Önce izometriyi tanımlayıp iki temel örneği, ötelemeleri ve dönmeleri, inceleyeceğiz. Dönmelerin ortak özelliği iç çarpımı korumalarıdır; bu bizi ortogonal dönüşüm kavramına götürecek. Bölümün merkezindeki teorem, her izometrinin bir ortogonal dönüşüm ve ardından gelen bir öteleme olarak tek türlü yazıldığını söyler. Bu teoremden sonra izometrileri matrislerle açıkça hesaplayacak; bir eksen çevresindeki dönmeleri, düzlemlere göre yansımaları, bileşkeleri, sabit noktaları ve bir helisin izometriler altında neye dönüştüğünü örneklerle göreceğiz. Bölümü, izometrilerin bir grup oluşturduğunu gösteren cebirsel bir bakışla kapatacağız.

18.1 Uzaklığı Koruyan Fonksiyonlar

Uzaklığı İç Çarpım bölümünde tanımlamıştık: $\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$ arasındaki Öklid uzaklığı $d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \| \mathbf{p}-\mathbf{q} \|$ sayısıdır (Tanım 9.3). İzometri, bu sayıyı hiçbir nokta çifti için değiştirmeyen fonksiyondur.

Tanım 18.1 (İzometri). $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bir fonksiyon olsun. $\mathbb{R}^3$'ün her $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ noktası için

$$d\left(\, F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q}) \,\right) = d(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

oluyorsa F'ye $\mathbb{R}^3$'ün bir **izometrisi** (isometry) ya da **katı hareketi** (rigid motion) denir.

Yani bir izometri uzayı hiçbir yerde germez, sıkıştırmaz, yırtmaz: hangi iki noktayı alırsak alalım, görüntüleri arasındaki uzaklık kendi aralarındaki uzaklığın aynısıdır.
Tanımda F'nin diferansiyellenebilir olmasını istemedik; yalnızca uzaklığı koruyan bir fonksiyon olmasını istedik. Bölümün ana teoremi (Teorem 18.2) her izometrinin koordinat fonksiyonlarının birinci dereceden polinomlar olduğunu gösterecek. Dolayısıyla her izometri kendiliğinden bir dönüşümdür (Tanım 7.1), hatta bir difeomorfizmadır (Sonuç 18.1).
Tanımdan hemen çıkan bir gözlem: bir izometri birebirdir. Gerçekten $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{q})$ ise

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = d\left(\, F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q}) \,\right) = 0$$

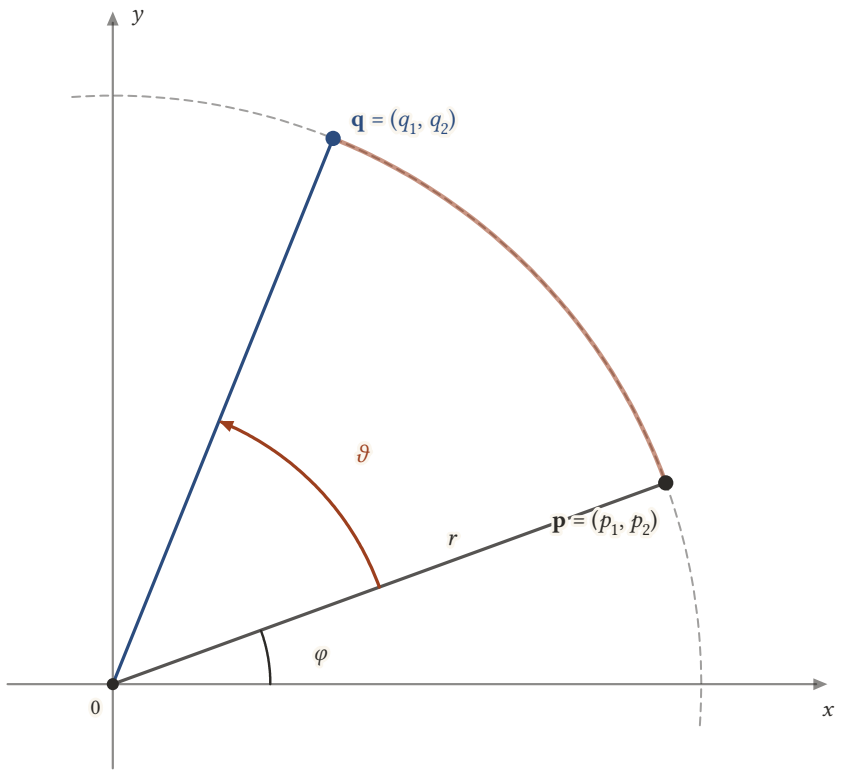
olur ve normun pozitif tanımlılığı $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ verir. Bir izometrinin örten olduğunu ise henüz bilmiyoruz; bunu da ana teoremden sonra göreceğiz.
Uzaya geçmeden önce düzlemde ısınalım. Tanımda 3 sayısının özel bir rolü yoktur: $\mathbb{R}^2$'de uzaklık $d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2}$ ile verilir ve $\mathbb{R}^2$'nin izometrileri aynı biçimde, uzaklığı koruyan fonksiyonlar olarak tanımlanır. Düzlemin en tanıdık iki hareketi, dönme ve yansımadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 18.1 (Düzlemde Dönme). Düzlemin başlangıç noktası çevresinde ϑ açısıyla dönmesi, (p_1, p_2) noktasını

$$q_1 = p_1 \cos\vartheta - p_2 \sin\vartheta, \qquad q_2 = p_1 \sin\vartheta + p_2 \cos\vartheta$$

koordinatlı (q_1, q_2) noktasına götürür. Bu formülü kutupsal koordinatlardan çıkaralım ve dönmenin düzlemin bir izometrisi olduğunu gösterelim.



Şekil 18.1: Düzlemin başlangıç noktası çevresinde ϑ açısıyla dönmesi. $\mathbf{p}$ noktası başlangıç noktasına uzaklığı r aynı kalarak, x ekseniyle yaptığı φ açısı $\varphi + \vartheta$ olacak biçimde $\mathbf{q}$ noktasına gider; turuncu yay noktanın çember üzerinde aldığı yoldur.

Çözüm.
Formül. $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ noktasını kutupsal koordinatlarıyla $\mathbf{p} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ diye yazalım; $r = \| \mathbf{p} \|$ başlangıç noktasına uzaklık, φ ise x ekseniyle yapılan açıdır. Dönme uzaklığı değiştirmez ve açıya ϑ ekler, yani görüntü

$$\mathbf{q} = \big(r\cos(\varphi + \vartheta), r\sin(\varphi + \vartheta) \big)$$

noktasıdır. Toplam formüllerini uygulayıp $r\cos\varphi = p_1$, $r\sin\varphi = p_2$ yazarsak

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos\varphi\cos\vartheta - r\sin\varphi\sin\vartheta = p_1\cos\vartheta - p_2\sin\vartheta, \\ q_2 &= r\cos\varphi\sin\vartheta + r\sin\varphi\cos\vartheta = p_1\sin\vartheta + p_2\cos\vartheta \end{aligned}$$

bulunur. $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ için formül $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ verir: başlangıç noktası yerinde kalır.
Lineerlik. Dönmeyi R ile gösterelim. q_1 ve q_2, p_1 ile p_2'nin sabit katsayılı birinci dereceden ifadeleridir; bu yüzden $R(\mathbf{p}) - R(\mathbf{q}) = R(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ olur.
Uzaklık. $\mathbf{p} - \mathbf{q} = (d_1, d_2)$ yazalım ve $c = \cos\vartheta$, $s = \sin\vartheta$ kısaltmalarını kullanalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\| R(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \|^2 &= (d_1c - d_2s)^2 + (d_1s + d_2c)^2 \\ &= d_1^2(c^2+s^2) + d_2^2(s^2+c^2) - 2d_1d_2cs + 2d_1d_2sc \\ &= d_1^2 + d_2^2 = \| \mathbf{p}-\mathbf{q} \|^2 .\end{aligned}$$

Karekök alınca $d\left(R(\mathbf{p}), R(\mathbf{q}) \right) = d(\mathbf{p},\mathbf{q})$ çıkar; R bir izometridir.
Sayısal denetim. $\vartheta = \pi/2$ için $c=0$, $s=1$ ve formül $R(p_1,p_2) = (-p_2, p_1)$ olur. $\mathbf{p}=(2,1)$ ve $\mathbf{q}=(-1,3)$ için $R(\mathbf{p})=(-1,2)$, $R(\mathbf{q})=(-3,-1)$. Farklar $\mathbf{p}-\mathbf{q}=(3,-2)$ ve $R(\mathbf{p})-R(\mathbf{q})=(2,3)$; ikisinin de uzunluğu $\sqrt{13}$'tür.
■

Örnek 18.2 (Düzlemde Yansıma). Düzlemin x eksenine göre yansıması $S(p_1,p_2)=(p_1,-p_2)$ fonksiyonudur. S'nin bir izometri olduğunu ve hiçbir dönmeyle aynı olmadığını gösterelim.

Çözüm.
İzometri. İki görüntünün farkı

$$S(\mathbf{p}) - S(\mathbf{q}) = \left(p_1 - q_1, -(p_2 - q_2) \right)$$

olduğundan

$$\| S(\mathbf{p}) - S(\mathbf{q}) \|^2 = (p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 = \| \mathbf{p}-\mathbf{q} \|^2 .$$

Dönme değildir. Bir dönme $(1,0)$ noktasını $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ noktasına götürür. $S(1,0)=(1,0)$ olduğundan S bir dönme olsaydı $\cos\vartheta = 1$, $\sin\vartheta = 0$ olurdu; o zaman formül her noktayı yerinde bırakırdı. Oysa $S(0,1)=(0,-1)\neq(0,1)$.
Ne değişir? Köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ olan üçgeni bu sırayla dolaşmak saat yönünün tersine bir turdur. Görüntüleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ ise aynı sırayla saat yönünde dolaşılır. Yansıma kenar uzunluklarını korur ama dolaşma yönünü ters çevirir; dönme ise çevirmez. İzometrilerin bu "ters çevirip çevirmeme" özelliğini Yönlendirme bölümünde inceleyeceğiz.
Aynı hesap, $y=x$ doğrusuna göre yansıma olan $(p_1,p_2)\mapsto(p_2,p_1)$ için de geçerlidir: koordinatların yer değiştirmesi, kareler toplamını değiştirmez. Örneğin $(2,1)$ noktası $(1,2)$ noktasına gider.
■

Bir izometri her nokta çifti arasındaki uzaklığı korumalıdır; yalnızca noktaların orijine uzaklıklarını korumak yetmez. Aşağıdaki örnek bu farkı gösteriyor ve ileride (Lemma 18.3) neden bütün nokta çiftlerine ihtiyaç duyduğumuzu açıklıyor.

Örnek 18.3 (Normu Koruyan Ama İzometri Olmayan Fonksiyon). $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F(\mathbf{p}) = (\| \mathbf{p} \|, 0, 0)$ fonksiyonu orijini sabit bırakır ve her noktanın normunu korur. F'nin bir izometri olmadığını gösterelim.

Çözüm.
Norm. $\| F(\mathbf{p}) \| = \sqrt{\| \mathbf{p} \|^2 + 0 + 0} = \| \mathbf{p} \|$ ve $F(\mathbf{0})=(0,0,0)$.
Uzaklık. Birim noktalar $\mathbf{u}_1=(1,0,0)$ ve $\mathbf{u}_2=(0,1,0)$ için $F(\mathbf{u}_1)=F(\mathbf{u}_2)=(1,0,0)$. Dolayısıyla

$$d\left(F(\mathbf{u}_1), F(\mathbf{u}_2) \right) = 0 \neq \sqrt{2} = d(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2).$$

F izometri değildir; zaten birebir de değildir. F, orijin merkezli r yarıçaplı her küreyi $(r,0,0)$ noktasına ezer: orijine uzaklıkları korur, ama böyle bir küre üzerindeki noktalar arasındaki uzaklıkları sıfıra indirir.
■

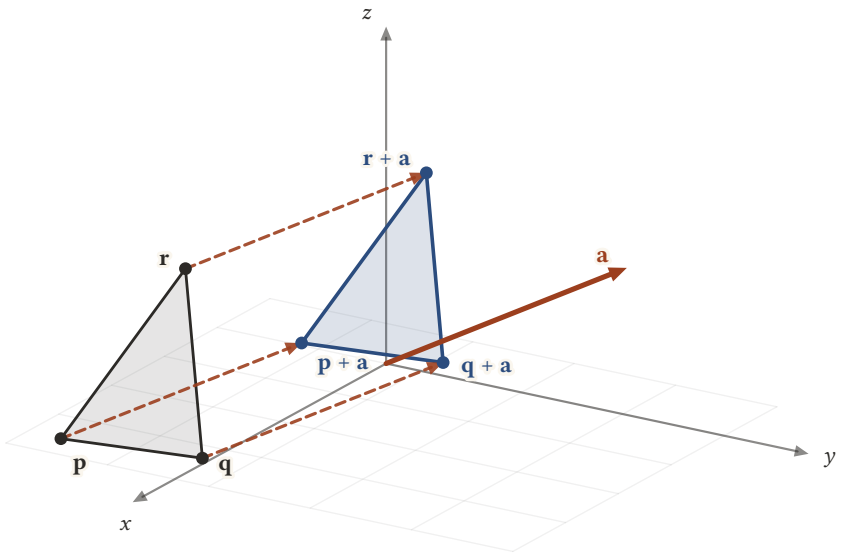
18.2 Ötelemeler

İzometrilerin en basit türü, bütün uzayı aynı yönde aynı miktarda kaydıran fonksiyonlardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 18.2 (Öteleme). $\mathbf{a}$, $\mathbb{R}^3$'ün sabit bir noktası olsun. Her $\mathbf{p}$ noktası için $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{a}$ kuralıyla tanımlanan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonuna **$\mathbf{a}$ ile öteleme** (translation by $\mathbf{a}$) denir. Hangi noktayla öteleme yapıldığını belirtmek gerektiğinde T yerine $T_{\mathbf{a}}$ yazarız.

Yani $\mathbf{a}$ ile öteleme her noktaya aynı $\mathbf{a}$ noktasını ekler: uzayın bütün noktaları birbirine paralel ve eşit uzunlukta yollarla, aynı oku izleyerek kayar. $\mathbf{0}$ ile öteleme, her noktayı yerinde bırakan **özdeşlik dönüşümü** I'dır: her $\mathbf{p}$ için $I(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.



Şekil 18.2: $\mathbf{a}$ ile öteleme. Köşeleri $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ olan üçgenin her köşesi aynı $\mathbf{a}$ okunu (turuncu, kesikli) izleyerek kayar ve $\mathbf{p}+\mathbf{a}$, $\mathbf{q}+\mathbf{a}$, $\mathbf{r}+\mathbf{a}$ köşeli üçgene (mavi) gider. Kenar farkları, örneğin $(\mathbf{q}+\mathbf{a}) - (\mathbf{p}+\mathbf{a}) = \mathbf{q} - \mathbf{p}$, hiç değişmez; bu yüzden kenar uzunlukları da değişmez.

Dönüşümler bölümünde ötelemenin teğet dönüşümünü hesaplamış ve ötelemenin okları paralel olarak taşıdığını görmüştük (Örnek 7.8). Şimdi uzaklığı koruduğunu görelim.

Önerme 18.1 (Ötelemeler İzometridir). *Her öteleme $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisidir.*

> ***İspat.***
> *T, $\mathbf{a}$ ile öteleme olsun. Her $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ için*
>
> $$\begin{aligned} d\left(\, T(\mathbf{p}), T(\mathbf{q}) \,\right) &= d(\mathbf{p}+\mathbf{a}, \mathbf{q}+\mathbf{a}) \\ &= \| \,(\mathbf{p}+\mathbf{a}) - (\mathbf{q}+\mathbf{a}) \,\| \\ &= \| \,\mathbf{p} - \mathbf{q} \,\| = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \end{aligned}$$
>
> *Üçüncü satıra geçerken noktaların toplamının birleşme ve değişme özelliklerini kullandık: iki $\mathbf{a}$ birbirini götürür (aynı hesap Örnek 9.12 içinde de yapılmıştı).*
> ■

Ötelemeleri art arda uygulamak ve geri almak için bileşke ve ters fonksiyon gösterimine ihtiyacımız var. F ve G, $\mathbb{R}^3$'ten $\mathbb{R}^3$'e iki fonksiyonsa önce F'yi, sonra G'yi uygulayan bileşkeyi kısaca yan yana yazarak gösteririz:

$$GF = G \circ F, \qquad (GF)(\mathbf{p}) = G\left(\, F(\mathbf{p}) \,\right).$$

Sıraya dikkat: sağdaki fonksiyon önce uygulanır. Birebir ve örten bir F'nin **tersi** F^{-1}, her $F(\mathbf{p})$ noktasını $\mathbf{p}$'ye geri götüren fonksiyondur. F ile tersinin ilişkisi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$FF^{-1} = I, \qquad F^{-1}F = I$$

eşitlikleriyle özetlenir. Tersine, $GF = I$ ve $FG = I$ olacak biçimde bir G varsa F birebir ve örtendir ve $G = F^{-1}$'dir: $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{q})$ eşitliğine G uygulanınca $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ çıkar ve her $\mathbf{y}$ noktası $\mathbf{y} = F\big(G(\mathbf{y})\big)$ olduğundan bir görüntüdür.

Lemma 18.1 (Ötelemelerin Özellikleri). *1. S ve T ötelemelerse $ST = TS$'dir ve bu bileşke de bir ötelemedir.*
2. T, $\mathbf{a}$ ile öteleme ise T'nin tersi vardır ve T^{-1}, $-\mathbf{a}$ ile ötelemedir.
3. $\mathbb{R}^3$'ün her $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ noktası için $T(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ olan bir ve yalnız bir T ötelemesi vardır.

> ***İspat.***
> Birinci özellik. *S, $\mathbf{b}$ ile ve T, $\mathbf{a}$ ile öteleme olsun. Her $\mathbf{p}$ için*
>
> $$(ST)(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}+\mathbf{a}) = \mathbf{p}+\mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad (TS)(\mathbf{p}) = T(\mathbf{p}+\mathbf{b}) = \mathbf{p}+\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$
>
> *Noktaların toplamı değişmeli olduğundan iki sonuç aynıdır. Demek ki $ST = TS$ ve bu bileşke $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ile ötelemedir.*
> İkinci özellik. *T', $-\mathbf{a}$ ile öteleme olsun. Her $\mathbf{p}$ için*
>
> $$(TT')(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}-\mathbf{a})+\mathbf{a} = \mathbf{p}, \qquad (T'T)(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}+\mathbf{a})-\mathbf{a} = \mathbf{p}.$$
>
> *Yani $TT' = I$ ve $T'T = I$. Yukarıdaki gözlem gereği T birebir ve örtendir ve $T^{-1} = T'$'dür.*
> Üçüncü özellik. *Varlık: $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ ile öteleme $\mathbf{p}$'yi $\mathbf{p}+(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ noktasına götürür. Teklik: T, $\mathbf{a}$ ile öteleme ve $T(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ ise $\mathbf{p}+\mathbf{a} = \mathbf{q}$, yani $\mathbf{a} = \mathbf{q}-\mathbf{p}$ olmak zorundadır. Bir öteleme, hangi noktayla öteleme olduğuyla belirlendiğinden yalnızca bir öteleme vardır.*
> ■

Üçüncü özelliğin sık kullanılacak bir özel hâli şudur: bir öteleme tek bir noktayı bile yerinde bırakıyorsa, yani bir $\mathbf{p}$ için $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ ise, $T = I$'dır. Gerçekten $\mathbf{p}$'yi $\mathbf{p}$'ye götüren öteleme $\mathbf{p}-\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ile ötelemedir. Bir başka örnek: $(2,0,1)$ noktasını $(-1,5,3)$ noktasına götüren tek öteleme, $(-1,5,3)-(2,0,1) = (-3,5,2)$ ile ötelemedir.

Örnek 18.4 (İki Ötelemenin Bileşkesi). S, $(1,-2,0)$ ile, T de $(3,1,4)$ ile öteleme olsun. ST bileşkesinin hangi ötelemeyle aynı olduğunu ve tersini bulalım; $\mathbf{p} = (2,0,1)$ ile $\mathbf{q} = (-1,5,3)$ arasındaki uzaklığın ST altında korunduğunu sayılarla görelim.

> **Çözüm.**
> *Bileşke.* Lemma 18.1 gereği $ST = TS$, $(1,-2,0)+(3,1,4) = (4,-1,4)$ ile ötelemedir.
> *Ters.* Aynı lemmanın ikinci özelliği gereği $(ST)^{-1}$, $(-4,1,-4)$ ile ötelemedir.
> *Uzaklık.* $(ST)(\mathbf{p}) = (6,-1,5)$ ve $(ST)(\mathbf{q}) = (3,4,7)$. Farklar
>
> $$\mathbf{p}-\mathbf{q} = (3,-5,-2), \qquad (ST)(\mathbf{p})-(ST)(\mathbf{q}) = (3,-5,-2)$$
>
> aynı noktadır; uzunluklarının karesi $9+25+4 = 38$'dir. Ötelemede fark noktası hiç değişmez; bu, uzaklığın korunmasının en doğrudan biçimidir.
> ■

18.3 İzometrilerin Bileşkesi

Ötelemelerin bileşkesinin yine bir öteleme olduğunu gördük. Daha genel olarak, uzaklığı koruyan iki hareketi art arda yapmak da uzaklığı korur.

Lemma 18.2 (İzometrilerin Bileşkesi). *F ve G, $\mathbb{R}^3$'ün izometrileriyse GF bileşkesi de $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisidir.*

> ***İspat.***
> *$\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ iki nokta olsun. G bir izometri olduğundan, G'yi $F(\mathbf{p})$ ve $F(\mathbf{q})$ noktalarına uygulayınca aralarındaki uzaklık değişmez:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d\Big(\,G\,(\,F(\mathbf{p})\,),G\,(\,F(\mathbf{q})\,)\Big) = d\,(\,F(\mathbf{p}),F(\mathbf{q})\,)\,.$$

F de bir izometri olduğundan sağ yan $d(\mathbf{p},\mathbf{q})$'dir. Sol yan, tanım gereği $d\,(\,(GF)(\mathbf{p}),(GF)(\mathbf{q})\,)$ olduğundan GF uzaklığı korur.
■

Yani izometriler bileşke altında kapalıdır: kaç izometriyi art arda uygularsak uygulayalım, sonuç yine bir izometridir.

18.4 Dönmeler ve Ortogonal Dönüşümler

İkinci temel örnek dönmelerdir. Düzlemde başlangıç noktası çevresindeki dönmeyi Örnek 18.1 içinde gördük. Uzayda bir dönmenin bir ekseni vardır: eksen üzerindeki noktalar yerinde kalır, eksene dik her düzlem kendi içinde döner.

Örnek 18.5 (Bir Koordinat Ekseni Çevresinde Dönme). ϑ bir sayı olsun. $\mathbb{R}^3$'ü z ekseni çevresinde ϑ açısıyla döndüren C fonksiyonunun formülünü yazalım; C'nin lineer olduğunu, iç çarpımı ve uzaklığı koruduğunu gösterelim.

Çözüm.
Formül. z ekseni çevresindeki dönme her yatay düzlemi kendi içinde döndürür ve yüksekliği değiştirmez. Demek ki $\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3)$'ün ilk iki koordinatına düzlemdeki dönmeyi (Örnek 18.1) uygular, üçüncüsüne dokunmaz:

$$C(\mathbf{p}) = (p_1\cos\vartheta - p_2\sin\vartheta,\; p_1\sin\vartheta + p_2\cos\vartheta,\; p_3).$$

Lineerlik. Her koordinat, p_1,p_2,p_3'ün sabit katsayılı birinci dereceden bir ifadesidir. $a\mathbf{p}+b\mathbf{q}$'nun koordinatları $ap_i + bq_i$ olduğundan, örneğin birinci koordinatta

$$\begin{aligned}&(ap_1+bq_1)\cos\vartheta - (ap_2+bq_2)\sin\vartheta\\ &\quad = a(p_1\cos\vartheta - p_2\sin\vartheta) + b(q_1\cos\vartheta - q_2\sin\vartheta)\end{aligned}$$

olur; öteki koordinatlar da aynı biçimde ayrılır. Dolayısıyla $C(a\mathbf{p}+b\mathbf{q}) = a\,C(\mathbf{p}) + b\,C(\mathbf{q})$.
İç çarpım. Yine $c=\cos\vartheta$, $s=\sin\vartheta$ yazalım. İç çarpımı açarsak

$$\begin{aligned}C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q}) &= (p_1c-p_2s)(q_1c-q_2s) + (p_1s+p_2c)(q_1s+q_2c) + p_3q_3\\ &= p_1q_1(c^2+s^2) + p_2q_2(s^2+c^2)\\ &\quad + p_1q_2(-cs+sc) + p_2q_1(-sc+cs) + p_3q_3\\ &= p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}.\end{aligned}$$

Uzaklık. Lineerlik gereği $C(\mathbf{p}) - C(\mathbf{q}) = C(\mathbf{p}-\mathbf{q})$. Bu noktanın kendisiyle iç çarpımı, iç çarpım korunduğundan, $(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{q})$'dur. Karekök alınca $d\,(\,C(\mathbf{p}),C(\mathbf{q})\,) = d(\mathbf{p},\mathbf{q})$.
Sayısal denetim. $\vartheta=\pi/2$ için $C(\mathbf{p}) = (-p_2,p_1,p_3)$. $\mathbf{p}=(1,2,3)$ ve $\mathbf{q}=(2,-1,1)$ için $C(\mathbf{p}) = (-2,1,3)$ ve $C(\mathbf{q}) = (1,2,1)$. İç çarpımlar

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 2-2+3 = 3, \qquad C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q}) = -2+2+3 = 3.$$

■

Örnekteki hesabın özü şuydu: C lineerdir ve iç çarpımı korur; uzaklığın korunması bu ikisinden çıktı. Bu iki özelliği taşıyan dönüşümlere bir ad verelim. "Lineer" sözünü lineer cebirdeki anlamıyla kullanıyoruz: $C(a\mathbf{p}+b\mathbf{q}) = a\,C(\mathbf{p}) + b\,C(\mathbf{q})$. Lineer bir fonksiyonun koordinat fonksiyonları sabit katsayılı birinci dereceden polinomlardır (Alıştırma 7.10); bu yüzden lineer bir fonksiyon her zaman bir dönüşümdür.

Tanım 18.3 (Ortogonal Dönüşüm). $C:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineer bir dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^3$'ün her $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ noktası için

$$C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

oluyorsa C'ye bir **ortogonal dönüşüm** (orthogonal transformation) denir.

Yani ortogonal dönüşüm, iç çarpımı koruyan lineer dönüşümdür. Normlar ve açılar iç çarpımla tanımlandığından (Tanım 9.2, Tanım 9.5) bir ortogonal dönüşüm, noktaların orijine uzaklıklarını ve orijinden bakınca iki nokta arasında görülen açıyı değiştirmez. Lineer olduğundan orijini de yerinde bırakır: $C(\mathbf{0}) = C(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot C(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Teorem 18.1 (Ortogonal Dönüşümler İzometridir). *Her $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal dönüşümü $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisidir.*

> ***İspat.***
> Normlar korunur. *Normun tanımı* $\| \mathbf{p} \|^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ *olduğundan*
>
> $$\| C(\mathbf{p}) \|^2 = C(\mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \| \mathbf{p} \|^2 .$$
>
> *Normlar negatif olmadığından her* $\mathbf{p}$ *için* $\| C(\mathbf{p}) \| = \| \mathbf{p} \|$.
> Uzaklıklar korunur. C *lineer olduğundan*
>
> $$C(\mathbf{p}) - C(\mathbf{q}) = C(\mathbf{p}) + (-1)\, C(\mathbf{q}) = C(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$
>
> *Dolayısıyla*
>
> $$\begin{aligned} d\left(C(\mathbf{p}), C(\mathbf{q}) \right) &= \| C(\mathbf{p}) - C(\mathbf{q}) \| = \| C(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \| \\ &= \| \mathbf{p} - \mathbf{q} \| = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \end{aligned}$$
>
> ■

Böylece Örnek 18.5 içindeki uzaklık hesabını her ortogonal dönüşüm için bir kez yapmış olduk. Aşağıdaki örnekler, ortogonal dönüşümlerin dönmelerden ibaret olmadığını ve lineerliğin tek başına yetmediğini gösteriyor.

Örnek 18.6 (Birinci Eksen Çevresinde Dönme). x ekseni çevresinde ϑ açısıyla dönmenin formülünü yazalım, ortogonal olduğunu gösterelim ve $\vartheta = \pi/2$ için $(1, 2, 3)$ noktasının görüntüsünü bulalım.

> **Çözüm.**
> *Formül.* z ekseni çevresindeki dönmede (x, y) koordinatlarının oynadığı rolü burada (y, z) koordinatları oynar: dönme yz düzlemini, pozitif y yönünden pozitif z yönüne doğru döndürür ve x koordinatına dokunmaz:
>
> $$C_x(\mathbf{p}) = (p_1,\, p_2 \cos\vartheta - p_3 \sin\vartheta,\, p_2 \sin\vartheta + p_3 \cos\vartheta).$$
>
> *Ortogonallik.* Koordinatlar sabit katsayılı birinci dereceden ifadeler olduğundan C_x lineerdir. İç çarpımda son iki koordinatın katkısı, Örnek 18.5 içindeki hesabın indisleri bir kaydırılmış hâlidir:
>
> $$(p_2 c - p_3 s)(q_2 c - q_3 s) + (p_2 s + p_3 c)(q_2 s + q_3 c) = p_2 q_2 + p_3 q_3 .$$
>
> Birinci koordinatın katkısı $p_1 q_1$ olduğundan $C_x(\mathbf{p}) \cdot C_x(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$; C_x ortogonaldir.
> *Sayısal değer.* $\vartheta = \pi/2$ için $C_x(\mathbf{p}) = (p_1, -p_3, p_2)$ ve $C_x(1, 2, 3) = (1, -3, 2)$. Bu dönme $\mathbf{u}_2$'yi $\mathbf{u}_3$'e, $\mathbf{u}_3$'ü $-\mathbf{u}_2$'ye götürür.
> ■

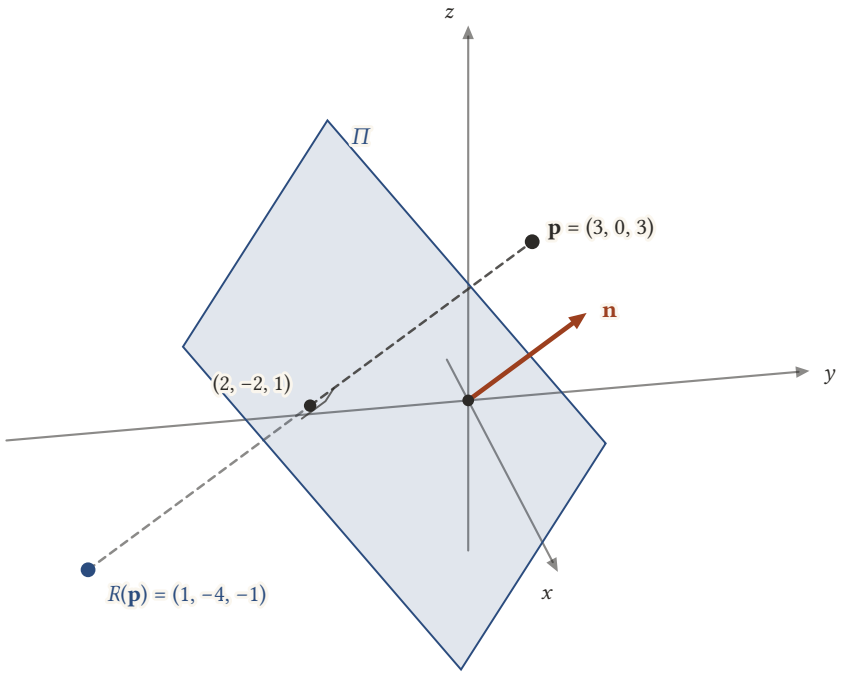
Üç eksen için dönme yönü sağ el kuralıyla seçilir: başparmak eksenin pozitif yönünü gösterdiğinde öteki dört parmak dönme yönünü gösterir. Bu kuralla z ekseni çevresinde dönme x'ten y'ye, x ekseni çevresinde dönme y'den z'ye, y ekseni çevresinde dönme ise z'den x'e doğrudur. Son durumda sıra (z, x) olduğundan işaretler ilk bakışta beklenenin tersine yerleşir:

$$C_y(\mathbf{p}) = (p_1 \cos\vartheta + p_3 \sin\vartheta,\, p_2,\, -p_1 \sin\vartheta + p_3 \cos\vartheta).$$

Örneğin $\vartheta = \pi/2$ için $C_y(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 18.7 (Bir Düzleme Göre Yansıma). $\mathbf{n}$, $\| \mathbf{n} \| = 1$ olan bir nokta ve Π, orijinden geçen ve $\mathbf{n}$'ye dik olan düzlem, yani $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$ koşulunu sağlayan noktaların kümesi olsun. $R(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$ fonksiyonunun Π düzlemine göre yansıma olduğunu ve ortogonal bir dönüşüm olduğunu gösterelim; $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1,2,2)$ için $\mathbf{p} = (3,0,3)$ noktasının görüntüsünü bulalım.



Şekil 18.3: Birim normali $\mathbf{n}$ = (1, 2, 2)/3 olan Π: $x + 2y + 2z = 0$ düzlemine göre yansıma. $\mathbf{p}$ = (3, 0, 3) noktası düzlemin öbür yanındaki $R(\mathbf{p})$ = (1, −4, −1) noktasına gider. İki noktayı birleştiren kesikli doğru parçası $\mathbf{n}$'ye paraleldir ve düzlemi orta noktası (2, −2, 1)'de dik keser.

Çözüm.
Neden yansıma? $\mathbf{p}$'yi $\mathbf{n}$ doğrultusundaki bileşeni ile düzlemdeki bileşenine ayıralım:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n} + \mathbf{p}_\Pi, \qquad \mathbf{p}_\Pi = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}.$$

$\mathbf{p}_\Pi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$ olduğundan $\mathbf{p}_\Pi$ düzlemdedir. Formül

$$R(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_\Pi - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$$

biçimini alır: düzlemdeki bileşen aynen kalır, düzleme dik bileşenin işareti değişir. Özel olarak Π'nin noktaları yerinde kalır ve $R(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$ olur. $\mathbf{p}$ ile $R(\mathbf{p})$'nin orta noktası $\mathbf{p}_\Pi$ düzlemdedir ve aralarındaki fark $2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}$ düzleme diktir: Π, $\mathbf{p}$ ile $R(\mathbf{p})$'yi birleştiren doğru parçasının dik orta düzlemidir. Ayna görüntüsünden beklediğimiz tam olarak budur.
Lineerlik. $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$ iç çarpımın bilineerliği gereği lineerdir; bu yüzden $R(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = a\,R(\mathbf{p}) + b\,R(\mathbf{q})$.
İç çarpım. Bilineerlikle açıp $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ kullanalım:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{p}) \cdot R(\mathbf{q}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) \\ &\quad + 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + (-2 - 2 + 4)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \end{aligned}$$

R ortogonaldir; Teorem 18.1 gereği bir izometridir.
Sayısal değer. $\| \mathbf{n} \|^2 = (1 + 4 + 4)/9 = 1$ ve $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = (3 + 0 + 6)/3 = 3$. Dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$R(\mathbf{p}) = (3,0,3) - 6\cdot\frac{1}{3}(1,2,2) = (3,0,3) - (2,4,4) = (1,-4,-1).$$

Denetim. $\| \mathbf{p} \|^2 = 9+0+9 = 18$ ve $\| R(\mathbf{p}) \|^2 = 1+16+1 = 18$. Orta nokta $(2,-2,1)$ için $2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 2 = 0$; orta nokta Π'nin $x+2y+2z=0$ denklemini sağlar. Fark $R(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$, yani $(-2,-4,-4) = -6\,\mathbf{n}$, düzleme diktir.
Yansımayı iki kez uygulamak her noktayı yerine geri getirir: $R(R(\mathbf{p})) = \mathbf{p}$, yani $R^{-1} = R$.
■

Örnek 18.8 (Lineer Ama Ortogonal Olmayan Dönüşüm). $L(\mathbf{p}) = (p_1 + p_2, p_2, p_3)$ kayma dönüşümünün lineer olduğu hâlde ortogonal olmadığını ve bir izometri olmadığını gösterelim.

Çözüm.
Lineerlik. Koordinatlar sabit katsayılı birinci dereceden ifadelerdir; L lineerdir.
Ortogonal değil. $L(\mathbf{u}_2) = (1,1,0)$ olduğundan $L(\mathbf{u}_2)\cdot L(\mathbf{u}_2) = 2$; oysa $\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2 = 1$.
İzometri değil. $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ile $L(\mathbf{u}_2) = (1,1,0)$ arasındaki uzaklık $\sqrt{2}$'dir, ama $d(\mathbf{0},\mathbf{u}_2) = 1$.
Geometrik anlam. L, $y = c$ yüksekliğindeki her yatay çizgiyi x doğrultusunda c kadar kaydırır. Birim kare, tabanı ve yüksekliği aynı kalan bir paralelkenara dönüşür: alan korunur ama kenar uzunlukları ve açılar korunmaz.
■

18.5 Orijini Sabit Bırakan İzometriler

Ortogonal dönüşümlerin orijini yerinde bırakan izometriler olduğunu gördük. Şaşırtıcı olan, bunun tersinin de doğru olmasıdır: orijini yerinde bırakan her izometri, hakkında hiçbir lineerlik varsayımı yapmadığımız hâlde, bir ortogonal dönüşümdür. Bu sonuç, bölümün ana teoreminin asıl adımıdır.
İspatta ortonormal açılımı (Teorem 9.1) noktalara uygulayacağız. Teorem teğet vektörler için ifade edilmişti; ama bir noktadaki teğet vektörlerin işlemleri vektör kısımlarında yapıldığından, noktaları herhangi sabit bir noktada uygulanmış teğet vektörler olarak düşünürsek teorem noktalar için de aynen geçerlidir.

Lemma 18.3 (Orijini Sabit Bırakan İzometri Ortogonaldir). *F, $\mathbb{R}^3$'ün $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir izometrisi ise F bir ortogonal dönüşümdür.*

İspat.
Önce F'nin iç çarpımı koruduğunu, sonra lineer olduğunu göstereceğiz.
Adım 1: F normları korur. *Bir noktanın normu orijine uzaklığıdır:* $\| \mathbf{p} \| = d(\mathbf{0},\mathbf{p})$. *$F$ uzaklığı koruduğundan ve $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ olduğundan*

$$\| F(\mathbf{p}) \| = d\big(\mathbf{0}, F(\mathbf{p})\big) = d\big(F(\mathbf{0}), F(\mathbf{p})\big) = d(\mathbf{0},\mathbf{p}) = \| \mathbf{p} \|.$$

Adım 2: F iç çarpımı korur. *Her $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ için* $\| F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q}) \| = \| \mathbf{p} - \mathbf{q} \|$. *Kareleri iç çarpım olarak yazarsak*

$$\big(F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})\big)\cdot\big(F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})\big) = (\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

olur. İki yanı bilineerlik ve simetriyle açalım:

$$\begin{aligned} &\| F(\mathbf{p}) \|^2 - 2\,F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{q}) + \| F(\mathbf{q}) \|^2 \\ &= \| \mathbf{p} \|^2 - 2\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \| \mathbf{q} \|^2 . \end{aligned}$$

Birinci adım gereği normların kareleri iki yanda aynıdır ve birbirini götürür. Geriye $-2\,F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{q}) = -2\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$, yani

$$F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$$

kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: birim noktaların görüntüleri ortonormaldir. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ *birim noktaları ortonormaldir:* $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$. *İkinci adım gereği*

$$F(\mathbf{u}_i) \cdot F(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

yani $F(\mathbf{u}_1), F(\mathbf{u}_2), F(\mathbf{u}_3)$ *de ortonormaldir.*
Adım 4: F'nin açık formülü. *Ortonormal açılımı* $F(\mathbf{u}_1), F(\mathbf{u}_2), F(\mathbf{u}_3)$*'e göre* $F(\mathbf{p})$ *noktasına uygulayalım:*

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \big(F(\mathbf{p}) \cdot F(\mathbf{u}_i) \big) F(\mathbf{u}_i).$$

İkinci adım gereği katsayılar $F(\mathbf{p}) \cdot F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_i = p_i$*'dir. Dolayısıyla her* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ *için*

$$F(\mathbf{p}) = p_1\, F(\mathbf{u}_1) + p_2\, F(\mathbf{u}_2) + p_3\, F(\mathbf{u}_3).$$

Adım 5: F lineerdir. $a\mathbf{p} + b\mathbf{q}$*'nun koordinatları* $ap_i + bq_i$ *olduğundan dördüncü adımdaki formül*

$$\begin{aligned} F(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^{3} (ap_i + bq_i)\, F(\mathbf{u}_i) \\ &= a \sum_{i=1}^{3} p_i\, F(\mathbf{u}_i) + b \sum_{i=1}^{3} q_i\, F(\mathbf{u}_i) = a\, F(\mathbf{p}) + b\, F(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

verir. F *lineerdir ve ikinci adım gereği iç çarpımı korur; yani ortogonal bir dönüşümdür.*
■

İspatın ikinci adımındaki hileye **kutuplama** (polarization) denir: iç çarpım, uzunluklardan geri kazanılabilir (Alıştırma 9.29). Kutuplamanın çalışması için yalnızca orijine uzaklıkların değil, bütün nokta çiftleri arasındaki uzaklıkların korunması gerekir; Örnek 18.3 bunun neden zorunlu olduğunu gösterir. $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ koşulu da gereklidir: sıfırdan farklı bir noktayla öteleme bir izometridir ama lineer değildir, çünkü orijini yerinde bırakmaz.

Örnek 18.9 (Dört Noktada Belirlenen İzometri). F, $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir izometri olsun ve $F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$, $F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_3$, $F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1$ olduğu bilinsin. F'nin formülünü bulalım ve $F(2, -1, 5)$ noktasını hesaplayalım.

Çözüm.
Formül. Lemma 18.3 ispatının dördüncü adımı gereği

$$F(\mathbf{p}) = p_1\, \mathbf{u}_2 + p_2\, \mathbf{u}_3 + p_3\, \mathbf{u}_1 = (p_3, p_1, p_2).$$

Değer. $F(2, -1, 5) = (5, 2, -1)$.
Denetim. F koordinatları yalnızca yer değiştirir; kareler toplamı değişmediğinden $\| F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q}) \| = \| \mathbf{p} - \mathbf{q} \|$ ve F gerçekten bir izometridir. Verilen bilgi de tutarlıdır: $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1$ ortonormaldir, üçüncü adımın istediği gibi.
Yorum. Dört noktadaki değerler ($\mathbf{0}$ ve üç birim nokta) izometriyi tamamen belirledi. F, $(1,1,1)$ noktasını ve dolayısıyla orijinden bu noktaya giden köşegenin bütün noktalarını yerinde bırakır; üç birim noktayı ise döngüsel olarak birbirine götürür. Örnek 18.13 içinde F'nin bu köşegen çevresinde $2\pi/3$ açısıyla bir dönme olduğunu göreceğiz.
■

18.6 Ayrıştırma Teoremi

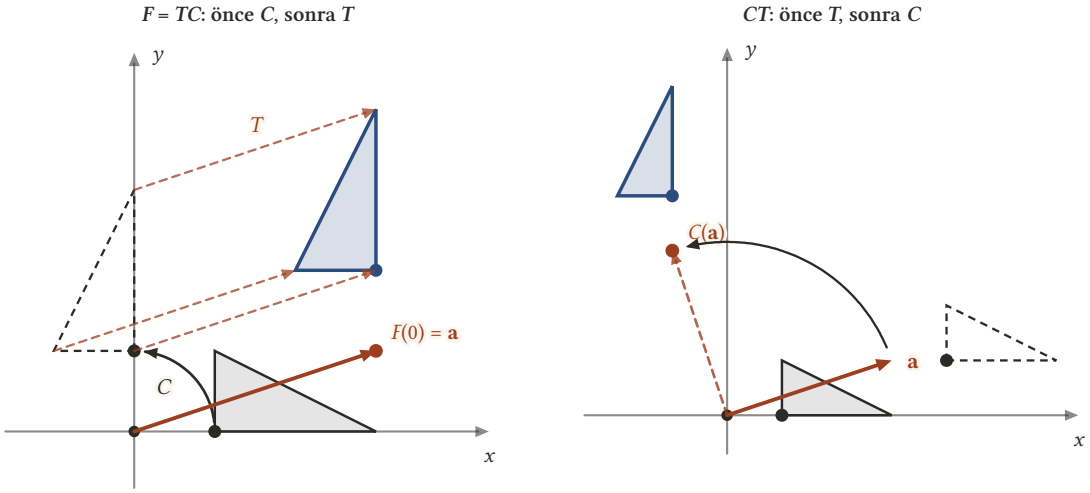
Artık her izometriyi tanıdığımız iki türün, bir ortogonal dönüşümün ve bir ötelemenin, bileşkesi olarak yazmaya hazırız. Fikir basittir: bir izometri orijini $F(\mathbf{0})$ noktasına götürür; ardından $-F(\mathbf{0})$ ile ötelersek orijini yerine geri getiren bir izometri elde ederiz ve bu izometri, az önce gördüğümüz gibi, ortogonaldir.

Teorem 18.2 (İzometrilerin Ayrıştırılması). F, $\mathbb{R}^3$*'ün bir izometrisi ise*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F = TC$$

olacak biçimde bir ve yalnız bir T ötelemesi ile bir ve yalnız bir C ortogonal dönüşümü vardır.



Şekil 18.4: z ekseni çevresinde dik açılık dönme C *ile (3, 1, 0) ile öteleme* T, xy *düzleminde. Gri üçgen başlangıç, kesikli üçgen ara adım, mavi üçgen sonuçtur. Solda* F = TC*: üçgen önce orijin çevresinde döner, sonra* ***a*** *kadar kayar; orijin* ***a****'ya gider. Sağda* CT*: üçgen önce kayar, sonra orijin çevresinde döner; orijin* C(***a***) *= (−1, 3)'e gider. İki sonuç farklıdır.*

İspat.
Varlık. T, $F(\mathbf{0})$ *ile öteleme olsun. Lemma 18.1 gereği* T^{-1}, $-F(\mathbf{0})$ *ile ötelemedir; Önerme 18.1 gereği bir izometridir. Lemma 18.2 gereği* $T^{-1}F$ *bileşkesi de bir izometridir. Üstelik*

$$(T^{-1}F)(\mathbf{0}) = T^{-1}\left(\ F(\mathbf{0})\ \right) = F(\mathbf{0}) - F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Lemma 18.3 gereği $T^{-1}F$ *bir ortogonal dönüşümdür; ona* C *diyelim:* $T^{-1}F = C$*. İki yana soldan* T *uygularsak, bileşkenin birleşme özelliğiyle*

$$TC = T(T^{-1}F) = (TT^{-1})F = IF = F.$$

Teklik. F *başka bir biçimde de* $F = \bar{T}\bar{C}$ *diye yazılsın; burada* $\bar{T}$ *bir öteleme,* $\bar{C}$ *bir ortogonal dönüşümdür.* $\bar{T} = T$ *ve* $\bar{C} = C$ *olduğunu göstermeliyiz.* $TC = \bar{T}\bar{C}$ *eşitliğine soldan* T^{-1} *uygularsak*

$$C = T^{-1}\bar{T}\bar{C}$$

buluruz. C *ve* $\bar{C}$ *lineer olduğundan orijini yerinde bırakır; bu eşitliği* $\mathbf{0}$*'da değerlendirirsek*

$$\mathbf{0} = C(\mathbf{0}) = (T^{-1}\bar{T})\left(\ \bar{C}(\mathbf{0})\ \right) = (T^{-1}\bar{T})(\mathbf{0})$$

olur. Lemma 18.1 gereği $T^{-1}\bar{T}$ *bir ötelemedir ve orijini yerinde bıraktığı için özdeşliktir:* $T^{-1}\bar{T} = I$*. Soldan* T *uygulayınca* $\bar{T} = T$ *çıkar. Bu durumda* $TC = T\bar{C}$ *olur ve soldan* T^{-1} *uygulamak* $C = \bar{C}$ *verir.*
■

Yani her izometri iki adımda gerçekleşir: önce orijini yerinde bırakan bir ortogonal dönüşüm uzayı orijin çevresinde "çevirir" (bir dönme ya da bir yansıma gibi), sonra bir öteleme her şeyi aynı ok boyunca kaydırır. İspat, ötelemenin hangi noktayla yapıldığını da söylüyor: T, $F(\mathbf{0})$ ile ötelemedir. Teoremin ispatı uzaklık, norm ve iç çarpımın yanında yalnızca ortonormal açılımı kullanır. Ortonormal açılımın n boyutlu karşılığıyla aynı ispat her $\mathbb{R}^n$ için de geçerlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 18.4 (Ortogonal Kısım ve Öteleme Kısmı). $F = TC$, F izometrisinin Teorem 18.2 ile verilen ayrıştırması olsun. C'ye F'nin **ortogonal kısmı** (orthogonal part), T'ye de F'nin **öteleme kısmı** (translation part) denir.

Yani bir izometrinin öteleme kısmı, orijinin gittiği $F(\mathbf{0})$ noktasıyla ötelemedir; ortogonal kısmı ise $C(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{0})$ formülüyle verilen ortogonal dönüşümdür. T, $\mathbf{a}$ ile öteleme ise her $\mathbf{p}$ için

$$F(\mathbf{p}) = T\,\big(\,C(\mathbf{p})\,\big) = \mathbf{a} + C(\mathbf{p}).$$

Ayrıştırmada sıra önemlidir: önce C, sonra T uygulanır. Ters sırada, önce öteleyip sonra çevirirsek genellikle başka bir izometri elde ederiz; CT ile TC genellikle aynı değildir. Teoremin içindeki şekil bunu z ekseni çevresinde $\pi/2$ açısıyla dönme ile $(3,1,0)$ ile öteleme için gösteriyor: TC orijini $(3,1,0)$'a, CT ise $C(3,1,0) = (-1,3,0)$'a götürür. CT'nin öteleme ve ortogonal kısımlarını Alıştırma 18.1 içinde bulacağız.

Ayrıştırma teoremi izometriler hakkındaki her soruyu ötelemeler ve ortogonal dönüşümler hakkındaki sorulara indirger. İlk meyvesi, izometrilerin tersinin varlığıdır.

Sonuç 18.1 (İzometrilerin Bileşkesi ve Tersi). *1. Özdeşlik dönüşümü I bir izometridir ve iki izometrinin bileşkesi bir izometridir.*
2. Her izometri birebir ve örtendir ve tersi de bir izometridir. Öteleme kısmı T, ortogonal kısmı C olan $F = TC$ için C'nin tersi vardır, bir ortogonal dönüşümdür ve $F^{-1} = C^{-1}T^{-1}$'dir.
3. Her izometri bir difeomorfizmadır.

> ***İspat.***
> Birinci madde. *$I(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ olduğundan I uzaklığı korur. Bileşke Lemma 18.2 ile verilmiştir.*
> *C'nin tersi. Önce C'nin birebir olduğunu görelim. $C(\mathbf{p}) = C(\mathbf{q})$ ise lineerlik $C(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ verir; C normları koruduğundan $\|\,\mathbf{p}-\mathbf{q}\,\| = \|\,C(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\| = 0$ ve $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. C, $\mathbb{R}^3$'ten kendisine lineer ve birebir olduğundan örtendir de (Lemma 7.1). Dolayısıyla C^{-1} vardır. C^{-1} lineerdir: her $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve a, b için C'nin lineerliği*
>
> $$C\,\big(\,a\,C^{-1}(\mathbf{x}) + b\,C^{-1}(\mathbf{y})\,\big) = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$$
>
> *verir; iki yana C^{-1} uygulayınca*
>
> $$C^{-1}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\,C^{-1}(\mathbf{x}) + b\,C^{-1}(\mathbf{y})$$
>
> *çıkar. C^{-1} iç çarpımı da korur, çünkü C korur:*
>
> $$C^{-1}(\mathbf{x})\cdot C^{-1}(\mathbf{y}) = C\,\big(\,C^{-1}(\mathbf{x})\,\big)\cdot C\,\big(\,C^{-1}(\mathbf{y})\,\big) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}.$$
>
> *Demek ki C^{-1} bir ortogonal dönüşümdür.*
> İkinci madde. *$G = C^{-1}T^{-1}$ olsun. Bileşkenin birleşme özelliğiyle*
>
> $$GF = C^{-1}T^{-1}TC = C^{-1}C = I, \qquad FG = TCC^{-1}T^{-1} = TT^{-1} = I.$$
>
> *Ters fonksiyonlarla ilgili gözlemimiz ($GF = I$ ve $FG = I$ ise F birebir ve örtendir) gereği $F^{-1} = G$'dir. T^{-1} bir öteleme, C^{-1} bir ortogonal dönüşüm olduğundan ikisi de izometridir (Önerme 18.1, Teorem 18.1); bileşkeleri F^{-1} de birinci madde gereği bir izometridir.*
> Üçüncü madde. *T, $\mathbf{a}$ ile öteleme ise $F(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + C(\mathbf{p})$. C lineer olduğundan koordinat fonksiyonları sabit katsayılı birinci dereceden polinomlardır; onlara a_i sabitlerini eklemek bunu değiştirmez. Dolayısıyla F'nin koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilirdir ve F bir dönüşümdür. İkinci madde gereği F^{-1} de bir izometridir; aynı akıl yürütmeyle o da bir dönüşümdür. Birebir, örten ve tersi diferansiyellenebilir olan F bir difeomorfizmadır (Tanım 7.5).*
> ■

Yani izometriler bileşke ve ters alma altında kapalı bir topluluk oluşturur ve hepsi düzgün, tersi de düzgün olan dönüşümlerdir. Bölümün sonunda bu yapıya bir ad vereceğiz: izometriler bir grup oluşturur (Tanım 18.5).

 CC BY-NC-SA 4.0

18.7 İzometrilerin Matrisleri

Ayrıştırma teoremi bir izometriyi bir öteleme ile bir ortogonal dönüşüme böldü. Ötelemeyi bir nokta belirler; ortogonal dönüşümü ise, her lineer dönüşüm gibi, bir matris belirler. Bu bölümde ortogonal dönüşümlerin matrislerini tanıyıp her izometrinin açık formülünü yazacağız.
Lineer bir C dönüşümü alalım ve $C(\mathbf{u}_j)$'nin i-inci koordinatını c_{ij} ile gösterelim. Her nokta $\mathbf{p} = p_1\mathbf{u}_1 + p_2\mathbf{u}_2 + p_3\mathbf{u}_3$ biçiminde yazıldığından lineerlik $C(\mathbf{p}) = \sum_j p_j\, C(\mathbf{u}_j)$ verir; koordinat koordinat

$$C(p_1,p_2,p_3) = \Big(\sum_j c_{1j}p_j, \sum_j c_{2j}p_j, \sum_j c_{3j}p_j\Big).$$

3×3'lük (c_{ij}) matrisine C'nin (doğal tabana göre) **matrisi** denir ve çoğu zaman aynı C harfiyle gösterilir. Noktaları sütun olarak yazarsak $\mathbf{q} = C(\mathbf{p})$ eşitliği matris çarpımı olur:

$$\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Matrisin j-inci sütunu, j-inci birim noktanın görüntüsü $C(\mathbf{u}_j)$'dir. Ortogonal matrisi İç Çarpım bölümünde tanımlamıştık: $CC^T = I$ koşulunu sağlayan kare matris; bu koşul $C^TC = I$ ile ve $C^T = C^{-1}$ ile denktir (Sonuç 9.1).

Önerme 18.2 (Ortogonal Dönüşüm ve Ortogonal Matris). *Lineer bir $C:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dönüşümünün ortogonal olması için gerek ve yeter koşul, matrisinin ortogonal olmasıdır. Bu da matrisin sütunlarının, yani $C(\mathbf{u}_1), C(\mathbf{u}_2), C(\mathbf{u}_3)$ noktalarının, ortonormal olması demektir.*

> ***İspat.***
> Sütunlar ve C^TC. *C^TC'nin (j,k) girdisi, C^T'nin j-inci satırı ile C'nin k-inci sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamıdır. C^T'nin j-inci satırı C'nin j-inci sütunu olduğundan*
>
> $$(C^TC)_{jk} = \sum_{i=1}^{3} c_{ij}\,c_{ik} = C(\mathbf{u}_j)\cdot C(\mathbf{u}_k).$$
>
> *Demek ki $C^TC = I$ koşulu, sütunların ortonormal olması, yani $C(\mathbf{u}_j)\cdot C(\mathbf{u}_k) = \delta_{jk}$ koşuludur.*
> Ortogonal dönüşümden ortogonal matrise. *C iç çarpımı koruyorsa $C(\mathbf{u}_j)\cdot C(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_k = \delta_{jk}$; yani $C^TC = I$. Lemma 9.4 gereği $CC^T = I$ de doğrudur ve matris ortogonaldir.*
> Ortogonal matristen ortogonal dönüşüme. *Matris ortogonalse $C^TC = I$, yani $C(\mathbf{u}_j)\cdot C(\mathbf{u}_k) = \delta_{jk}$. $\mathbf{p} = \sum_j p_j\mathbf{u}_j$ ve $\mathbf{q} = \sum_k q_k\mathbf{u}_k$ için lineerlik ve iç çarpımın bilineerliği*
>
> $$C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_jq_k\, C(\mathbf{u}_j)\cdot C(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^{3} p_jq_j = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$$
>
> *verir; çift toplamda yalnızca $j=k$ terimleri kalır. C ortogonal bir dönüşümdür.*
> ■

Ayrıştırma teoremini matrislerle birleştirince her izometrinin açık formülü çıkar. $F = TC$ ve T, $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3)$ ile öteleme ise $F(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + C(\mathbf{p})$, yani

$$F(\mathbf{p}) = \Big(a_1 + \sum_j c_{1j}p_j,\ a_2 + \sum_j c_{2j}p_j,\ a_3 + \sum_j c_{3j}p_j\Big).$$

Sütun yazımıyla $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$ eşitliği

$$\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3 \end{pmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçimini alır. Demek ki bir izometriyi vermek, bir $\mathbf{a}$ noktası ile bir 3×3 ortogonal matris vermekle aynı şeydir; tersine, her $\mathbf{a}$ ile her ortogonal matris bu formülle bir izometri tanımlar (Önerme 18.2, Teorem 18.1, Lemma 18.2).
Şimdiye kadar gördüğümüz ortogonal dönüşümlerin matrisleri şöyledir. Koordinat eksenleri çevresindeki dönmeler için

$$C_z = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

$$C_y = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1,2,2)$ normalli düzleme göre yansıma (Örnek 18.7) için $R(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j - 2n_j\mathbf{n}$ sütunlarından

$$R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Her ortogonal matrisin determinantı ± 1'dir (Alıştırma 9.18). Üç dönmenin determinantı $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$'dir. Yansımanınki ise birinci satıra göre açılımla

$$\frac{1}{729}\,\big(\,7(1-64) + 4(-4-32) - 4(32+4)\,\big) = \frac{-441-144-144}{729} = -1$$

olur. Bu işaret, izometrinin Örnek 18.2 içinde gördüğümüz anlamda "ters çevirip çevirmediğini" söyler; Yönlendirme bölümünde ona izometrinin işareti adını vereceğiz (Tanım 20.2).
Ayrıştırma teoremi, verilen bir fonksiyonun izometri olup olmadığını denetlemek için de bir yöntem verir.

Üç adımda bir izometriyi ayrıştırmak

Koordinatlarıyla verilen bir $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu için:

1. **Öteleme kısmı.** $\mathbf{a} = F(\mathbf{0})$ noktasını hesapla.
2. **Ortogonal kısım adayı.** $C(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - \mathbf{a}$ fonksiyonunu yaz.
3. **Denetim.** C lineer mi ve matrisinin sütunları ortonormal mi? İkisi de doğruysa $F = T_{\mathbf{a}}C$ bir izometridir. Biri bozuluyorsa F izometri değildir: F izometri olsaydı ortogonal kısmı, teklik gereği, tam olarak bu C olurdu.

Örnek 18.10 (Bir İzometriyi Ayrıştırmak).

$$F(\mathbf{p}) = \Big(\,\frac{2p_1 - p_2 + 2p_3}{3} + 1,\ \frac{2p_1 + 2p_2 - p_3}{3},\ \frac{-p_1 + 2p_2 + 2p_3}{3} - 1\,\Big)$$

fonksiyonunun bir izometri olduğunu üç adımlı yöntemle gösterip öteleme ve ortogonal kısımlarını bulalım.

Çözüm.
Birinci adım. $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ koyarsak $\mathbf{a} = F(\mathbf{0}) = (1, 0, -1)$.
İkinci adım. $C(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - \mathbf{a}$ fonksiyonunun koordinatları $\frac{1}{3}(2p_1 - p_2 + 2p_3)$, $\frac{1}{3}(2p_1 + 2p_2 - p_3)$ ve $\frac{1}{3}(-p_1 + 2p_2 + 2p_3)$'tür. Sabit katsayılı birinci dereceden olduklarından C lineerdir ve matrisi

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

olur.
Üçüncü adım. Sütunlar $\frac{1}{3}(2,2,-1)$, $\frac{1}{3}(-1,2,2)$ ve $\frac{1}{3}(2,-1,2)$'dir. Her birinin normunun karesi $(4+4+1)/9 = 1$'dir. Karşılıklı iç çarpımlar

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{-2+4-2}{9}=0,\qquad \frac{4-2-2}{9}=0,\qquad \frac{-2-2+4}{9}=0.$$

Sütunlar ortonormaldir; Önerme 18.2 gereği C ortogonaldir. Sonuç: $F=T_{\mathbf{a}}C$ bir izometridir; öteleme kısmı $(1,0,-1)$ ile öteleme, ortogonal kısmı yukarıdaki matrisle verilen C'dir.
Sayısal denetim. $\mathbf{p}=(3,0,0)$ ve $\mathbf{q}=(0,3,0)$ için $F(\mathbf{p})=(3,2,-2)$ ve $F(\mathbf{q})=(0,2,1)$. Farklar $\mathbf{p}-\mathbf{q}=(3,-3,0)$ ve $F(\mathbf{p})-F(\mathbf{q})=(3,0,-3)$; ikisinin de normunun karesi 18'dir.
Ortogonal kısım ne yapıyor? $C(1,1,1)=\frac{1}{3}(3,3,3)=(1,1,1)$: köşegen yerinde kalır. Birinci satıra göre açılım

$$\det C=\frac{1}{27}\,\big(\,2(4+2)+1\cdot(4-1)+2(4+2)\,\big)=\frac{27}{27}=1$$

verir. Örnek 18.13 içinde C'nin köşegen çevresinde $\pi/3$ açısıyla dönme olduğunu göreceğiz.
■

Örnek 18.11 (Yöntemin Bir İzometri Olmayanı Yakalaması). $G(\mathbf{p})=(p_1+1,\,p_1+p_2,\,p_3)$ fonksiyonuna üç adımlı yöntemi uygulayalım.

Çözüm.
Birinci adım. $\mathbf{a}=G(\mathbf{0})=(1,0,0)$.
İkinci adım. $C(\mathbf{p})=G(\mathbf{p})-\mathbf{a}$ fonksiyonu $(p_1,\,p_1+p_2,\,p_3)$'tür. C lineerdir ve matrisi

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Üçüncü adım. Birinci sütun $(1,1,0)$'ın normunun karesi 2'dir; sütunlar ortonormal değildir. Dolayısıyla G bir izometri değildir.
Doğrudan denetim. $G(\mathbf{0})=(1,0,0)$ ile $G(\mathbf{u}_1)=(2,1,0)$ arasındaki uzaklık $\|\,(1,1,0)\,\|=\sqrt{2}$'dir, oysa $d(\mathbf{0},\mathbf{u}_1)=1$. Yöntemin vardığı sonuç, tek bir nokta çiftiyle de doğrulanır: G, Örnek 18.8 içindekine benzer bir kaymanın ötelenmiş hâlidir.
■

Örnek 18.12 (Dört Noktadaki Değerlerden Matris). F bir izometri ve

$$F(\mathbf{0})=(1,2,3),\quad F(\mathbf{u}_1)=(1,3,3),\quad F(\mathbf{u}_2)=(0,2,3),\quad F(\mathbf{u}_3)=(1,2,4)$$

olsun. F'nin formülünü bulup sabit noktası olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm.
Öteleme kısmı. $\mathbf{a}=F(\mathbf{0})=(1,2,3)$.
Ortogonal kısım. $C(\mathbf{u}_j)=F(\mathbf{u}_j)-\mathbf{a}$ olduğundan matrisin sütunları

$$C(\mathbf{u}_1)=(0,1,0),\qquad C(\mathbf{u}_2)=(-1,0,0),\qquad C(\mathbf{u}_3)=(0,0,1)$$

olur. Bu, $\vartheta=\pi/2$ için C_z matrisidir: C, z ekseni çevresinde dik açılık dönmedir.
Formül. $C(\mathbf{p})=(-p_2,p_1,p_3)$ olduğundan

$$F(\mathbf{p})=(1-p_2,\,2+p_1,\,3+p_3).$$

Denetim: $F(1,1,1)=(0,3,4)$ ve bu noktanın $F(\mathbf{0})=(1,2,3)$ noktasına uzaklığı $\|\,(-1,1,1)\,\|=\sqrt{3}$'tür; $(1,1,1)$'in orijine uzaklığı da $\sqrt{3}$'tür. Verilen dört nokta da tutarlıdır: $F(\mathbf{0})$'ın öteki üç görüntüye uzaklığı 1, bu üçünün birbirine uzaklıkları $\sqrt{2}$'dir; tıpkı $\mathbf{0},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ arasındaki uzaklıklar gibi.
Sabit nokta yok. $F(\mathbf{p})=\mathbf{p}$ olsaydı üçüncü koordinatlardan $3+p_3=p_3$ çıkardı, bu da olanaksızdır. F'nin yatay kısmı $(p_1,p_2)\mapsto(1-p_2,2+p_1)$ ise $(-\tfrac12,\tfrac32)$ noktasını yerinde bırakır: $1-\tfrac32=-\tfrac12$ ve $2-\tfrac12=\tfrac32$. Demek ki F her noktayı $x=-\tfrac12$, $y=\tfrac32$ dikey doğrusu çevresinde dik açı kadar döndürüp 3 birim yukarı kaldırır. Bir eksen çevresinde dönme ile o eksen boyunca ötelemenin bu bileşkesine **vida hareketi** (screw motion) denir; bir cıvatanın somun içinde ilerlerken yaptığı harekettir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

18.8 Bir Eksen Çevresinde Dönmeler

Koordinat eksenleri çevresindeki dönmeleri yazdık. Orijinden geçen keyfi bir doğru çevresindeki dönmenin formülü de vektörel çarpımla kolayca yazılır. Vektörel çarpımı İç Çarpım bölümünde aynı noktadaki teğet vektörler için tanımlamıştık (Tanım 9.9); aynı koordinat formülünü noktalara uygulayıp $\mathbf{e} \times \mathbf{p}$ yazacağız.

Önerme 18.3 (Bir Eksen Çevresinde Dönme Formülü). *$\mathbf{e}$, $\| \mathbf{e} \| = 1$ olan bir nokta ve ϑ bir sayı olsun.*

$$C(\mathbf{p}) = \cos\vartheta\, \mathbf{p} + \sin\vartheta\, (\mathbf{e} \times \mathbf{p}) + (1 - \cos\vartheta)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e}$$

formülüyle tanımlanan C bir ortogonal dönüşümdür. C, $\mathbf{e}$ doğrultusundaki eksenin noktalarını yerinde bırakır ve eksene dik her düzlemi, eksenin o düzlemi kestiği nokta çevresinde ϑ açısıyla, $\mathbf{e}$'ye göre sağ el yönünde döndürür. $\mathbf{e} = \mathbf{u}_3$ için C, z ekseni çevresindeki dönmedir.

İspat.
Ayrışım. *$\mathbf{p}$'yi eksen doğrultusundaki bileşeni ile eksene dik bileşenine ayıralım: $\mathbf{p} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e} + \mathbf{p}_\perp$, burada $\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{e} = 0$. $\mathbf{e} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$ olduğundan $\mathbf{e} \times \mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{p}_\perp$. Formülde $\mathbf{p}$ yerine ayrışımı yazıp eksen doğrultusundaki terimleri toplarsak*

$$\cos\vartheta\, (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e} + (1 - \cos\vartheta)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e}$$

ve dolayısıyla

$$C(\mathbf{p}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e} + \cos\vartheta\, \mathbf{p}_\perp + \sin\vartheta\, (\mathbf{e} \times \mathbf{p}_\perp)$$

buluruz. $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{0}$ ise, yani $\mathbf{p}$ eksen üzerindeyse, $C(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.
Eksene dik düzlemde dönme. *$\mathbf{p}_\perp \neq \mathbf{0}$ olsun; $r = \| \mathbf{p}_\perp \|$, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{p}_\perp / r$ ve $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{f}_1$ yazalım. $\mathbf{f}_2$ hem $\mathbf{e}$'ye hem $\mathbf{f}_1$'e diktir (Lemma 9.5) ve $\mathbf{e} \perp \mathbf{f}_1$ olduğundan uzunluğu 1'dir (Sonuç 9.2). Böylece $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{e}$ ortonormaldir ve*

$$C(\mathbf{p}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e} + r\, (\cos\vartheta\, \mathbf{f}_1 + \sin\vartheta\, \mathbf{f}_2).$$

$\mathbf{p}$ ve $C(\mathbf{p})$, eksene dik ve ekseni $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e}$ noktasında kesen düzlemdedir; bu noktaya uzaklıkları r'dir. $\mathbf{p} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})\, \mathbf{e} + r\, \mathbf{f}_1$ olduğundan C, $\mathbf{p}$'yi bu düzlemde $\mathbf{f}_1$'den $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{f}_1$'e doğru ϑ açısıyla döndürür; bu da $\mathbf{e}$'ye göre sağ el yönüdür.
Lineerlik. *Formüldeki üç terim, iç çarpımın ve vektörel çarpımın bilineerliği gereği $\mathbf{p}$'ye lineer bağlıdır.*
İç çarpım. *$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{e}$ ortonormal olduğundan Pisagor teoremi*

$$\| C(\mathbf{p}) \|^2 = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})^2 + r^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})^2 + \| \mathbf{p}_\perp \|^2 = \| \mathbf{p} \|^2$$

verir; $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{0}$ iken de doğrudur. C lineer ve normları koruduğundan kutuplama özdeşliği (Alıştırma 9.29) iç çarpımın da korunduğunu gösterir:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{q}) &= \frac{1}{4} \left(\| C(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \|^2 - \| C(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\| \mathbf{p} + \mathbf{q} \|^2 - \| \mathbf{p} - \mathbf{q} \|^2 \right) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \end{aligned}$$

z ekseni. *$\mathbf{e} = \mathbf{u}_3$ için $\mathbf{e} \cdot \mathbf{p} = p_3$ ve $\mathbf{u}_3 \times \mathbf{p} = (-p_2, p_1, 0)$. Formül*

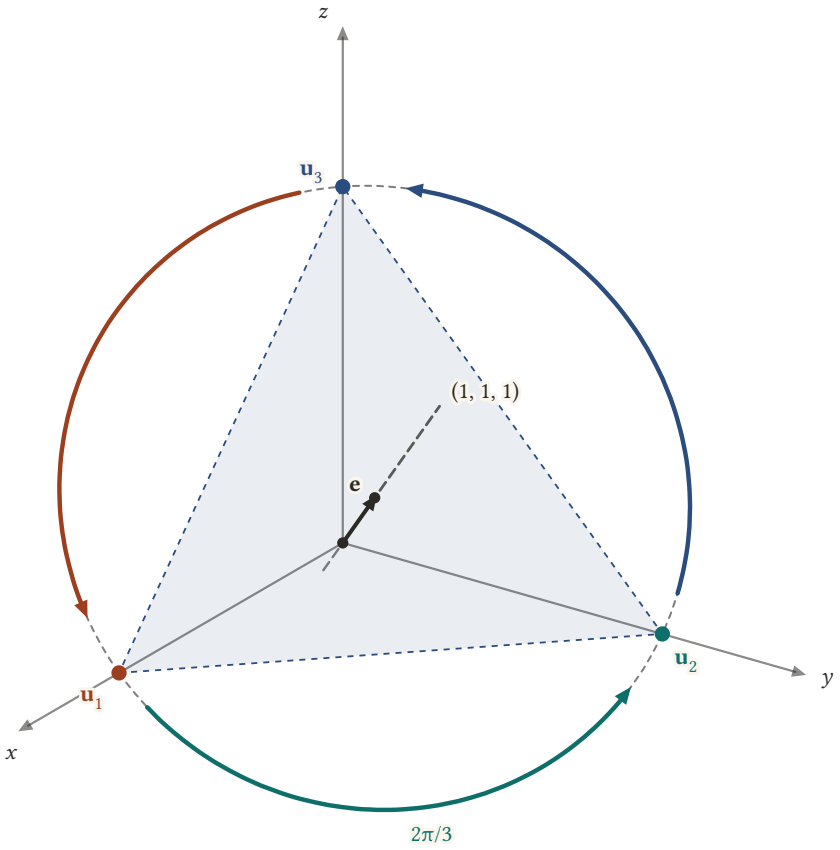
$$C(\mathbf{p}) = (p_1 \cos\vartheta - p_2 \sin\vartheta,\, p_1 \sin\vartheta + p_2 \cos\vartheta,\, p_3)$$

verir; üçüncü koordinat $p_3 \cos\vartheta + (1 - \cos\vartheta) p_3 = p_3$'tür. Bu, Örnek 18.5 içindeki formüldür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu formüle **Rodrigues formülü** denir. Üç terimi şöyle okunur: eksene dik bileşen $\cos\vartheta$ ile kısalır, ona dik olan $\mathbf{e}\times\mathbf{p}$ doğrultusunda $\sin\vartheta$ kadar bir bileşen eklenir, eksen doğrultusundaki bileşen ise olduğu gibi kalır.

Örnek 18.13 (Köşegen Çevresinde Üçte Bir Tur). $\mathbf{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ doğrultusundaki köşegen çevresinde $\vartheta=2\pi/3$ açısıyla dönmenin birim noktaları birbirine götürdüğünü gösterelim ve dönmenin formülünü bulalım.



Şekil 18.5: Köşegen $\mathbf{e}=(1,1,1)/\sqrt{3}$ çevresinde $2\pi/3$ açısıyla dönme. Birim noktalar $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, eksene dik $x+y+z=1$ düzlemindeki eşkenar üçgenin köşeleridir; üçgenin merkezi $(1,1,1)/3$ eksen üzerindedir. Dönme her köşeyi kesikli çember üzerinde üçte bir tur ilerletir: $\mathbf{u}_1\to\mathbf{u}_2\to\mathbf{u}_3\to\mathbf{u}_1$.

Çözüm.
Katsayılar. $\cos(2\pi/3)=-\frac{1}{2}$, $\sin(2\pi/3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve her j için $\mathbf{e}\cdot\mathbf{u}_j=\frac{1}{\sqrt{3}}$; dolayısıyla Rodrigues formülündeki son terim

$$(1-\cos\vartheta)(\mathbf{e}\cdot\mathbf{u}_j)\,\mathbf{e}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\frac{1}{2}(1,1,1).$$

Birinci birim nokta. $(1,1,1)\times(1,0,0)=(0,1,-1)$ olduğundan $\mathbf{e}\times\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1)$ ve

$$C(\mathbf{u}_1)=\Big(-\frac{1}{2},0,0\Big)+\frac{1}{2}(0,1,-1)+\frac{1}{2}(1,1,1)=(0,1,0)=\mathbf{u}_2.$$

İkinci birim nokta. $(1,1,1)\times(0,1,0)=(-1,0,1)$ ve

$$C(\mathbf{u}_2)=\Big(0,-\frac{1}{2},0\Big)+\frac{1}{2}(-1,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,1)=(0,0,1)=\mathbf{u}_3.$$

Üçüncü birim nokta. $(1,1,1)\times(0,0,1)=(1,-1,0)$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$C(\mathbf{u}_3) = \Big(0,0,-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}(1,-1,0) + \frac{1}{2}(1,1,1) = (1,0,0) = \mathbf{u}_1.$$

Formül. Sütunlar $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1$ olduğundan

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C(\mathbf{p}) = (p_3, p_1, p_2).$$

Bu, Örnek 18.9 içinde dört değerinden bulduğumuz izometridir; artık onun köşegen çevresinde üçte bir tur olduğunu biliyoruz.
Geometri. Üç birim nokta $x + y + z = 1$ düzlemindedir ve bu düzlem $\mathbf{e}$'ye diktir. Düzlemi eksen $\frac{1}{3}(1,1,1)$ noktasında keser; birim noktaların bu noktaya uzaklığı $\| \frac{1}{3}(2,-1,-1) \| = \sqrt{6}/3$'tür. Birim noktalar, merkezi eksende olan bir eşkenar üçgenin köşeleridir ve üçte bir tur onları döngüsel olarak birbirine götürür.
Altıda bir tur. Aynı formül $\vartheta = \pi/3$ için, $\cos\vartheta = \frac{1}{2}$ ve $\sin\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ile,

$$C(\mathbf{u}_1) = \Big(\frac{1}{2},0,0\Big) + \frac{1}{2}(0,1,-1) + \frac{1}{6}(1,1,1) = \frac{1}{3}(2,2,-1)$$

verir; öteki iki birim nokta için aynı hesap $\frac{1}{3}(-1,2,2)$ ve $\frac{1}{3}(2,-1,2)$ sütunlarını verir. Bunlar Örnek 18.10 içindeki matrisin sütunlarıdır: o izometrinin ortogonal kısmı, köşegen çevresinde altıda bir turdur. Altıda bir turu iki kez yapmak üçte bir turdur ve gerçekten o matrisin karesi yukarıdaki C'dir.
■

Farklı eksenler çevresindeki dönmeleri art arda yapınca ne olur? Sonuç yine bir ortogonal dönüşümdür, çünkü iki ortogonal matrisin çarpımı ortogonaldir: $(AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^TB = I$. Ama sıra önemlidir.

Örnek 18.14 (İki Dik Açılık Dönmenin Bileşkesi). *A, z ekseni çevresinde, B de x ekseni çevresinde $\pi/2$ açısıyla dönme olsun. BA ve AB bileşkelerini bulup karşılaştıralım.*

Çözüm.
İki dönme. $\vartheta = \pi/2$ için $A(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, p_3)$ ve $B(\mathbf{p}) = (p_1, -p_3, p_2)$.
BA: önce A, sonra B.

$$(BA)(\mathbf{p}) = B(-p_2, p_1, p_3) = (-p_2, -p_3, p_1).$$

AB: önce B, sonra A.

$$(AB)(\mathbf{p}) = A(p_1, -p_3, p_2) = (p_3, p_1, p_2).$$

Karşılaştırma. İki bileşke farklıdır: örneğin $(BA)(\mathbf{u}_1) = B(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_3$, oysa $(AB)(\mathbf{u}_1) = A(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$. Dönmelerin bileşkesi değişmeli değildir; bir kitabı önce dikey eksen, sonra yatay eksen çevresinde çeyrek tur çevirmekle ters sırada çevirmek kitabı farklı duruşlara getirir.
Bileşkeler de dönmedir. AB, Örnek 18.13 içindeki C'dir: $(1,1,1)$ köşegeni çevresinde üçte bir tur. BA ise $(1,-1,1)$ noktasını yerinde bırakır: $(BA)(1,-1,1) = (1,-1,1)$. Rodrigues formülünü $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ ve $\vartheta = 2\pi/3$ ile uygulayınca, Örnek 18.13 içindeki hesabın aynısı $\mathbf{u}_1 \mapsto \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_2 \mapsto -\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_3 \mapsto -\mathbf{u}_2$ verir; bunlar BA'nın sütunlarıdır. Yani BA, $(1,-1,1)$ doğrultusundaki eksen çevresinde üçte bir turdur. İki çeyrek tur, her iki sırada da üçte bir tur verir; ama eksenler farklıdır.
■

18.9 Sabit Noktalar

Bir izometrinin ne yaptığını anlamanın iyi bir yolu, hangi noktaları yerinde bıraktığına bakmaktır. $F = T_{\mathbf{a}}C$ için $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ denklemi $\mathbf{a} + C(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, yani $\mathbf{p} - C(\mathbf{p}) = \mathbf{a}$ lineer denklem sistemidir. Açısı 2π'nin bir katı olmayan bir dönmenin sabit noktaları tam olarak ekseni oluşturur; vida hareketinin ise (Örnek 18.12) hiç sabit noktası yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 18.15 (Kaydırılmış Eksen Çevresinde Dönme). C, z ekseni çevresinde $\pi/2$ açısıyla dönme ve $\mathbf{a} = (2,0,0)$ olsun. $F = T_{\mathbf{a}}C$ izometrisinin sabit noktalarını bulup F'nin ne yaptığını yorumlayalım.

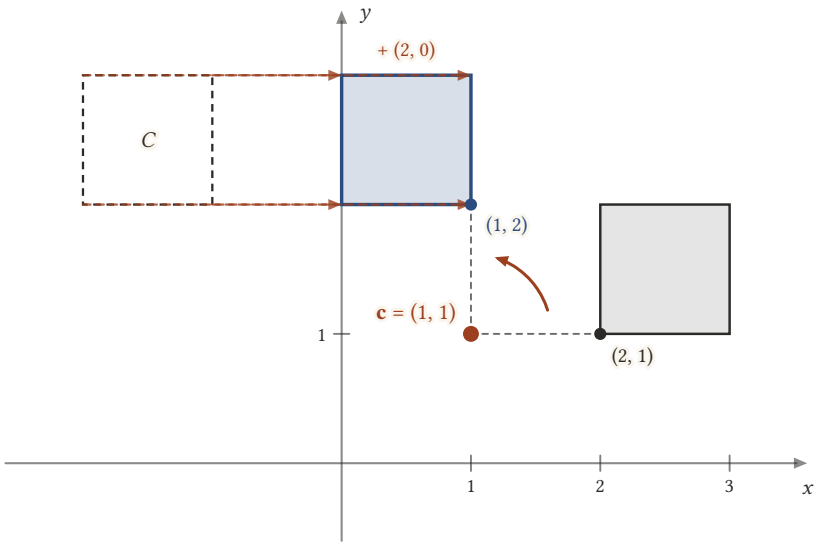
Çözüm.
Formül. $C(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, p_3)$ olduğundan $F(\mathbf{p}) = (2 - p_2, p_1, p_3)$.
Sabit noktalar. $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ denklemi

$$2 - p_2 = p_1, \qquad p_1 = p_2, \qquad p_3 = p_3$$

sistemidir. İkinci denklemi birinciye koyarsak $2 - p_1 = p_1$, yani $p_1 = p_2 = 1$; p_3 ise serbesttir. Sabit noktalar, $\mathbf{c} = (1,1,0)$ noktasından geçen dikey doğrunun noktalarıdır.
Yorum. Her $\mathbf{p}$ için

$$\mathbf{c} + C(\mathbf{p} - \mathbf{c}) = (1,1,0) + \big(-(p_2 - 1), p_1 - 1, p_3\big) = (2 - p_2, p_1, p_3) = F(\mathbf{p}).$$

Yani F önce $\mathbf{c}$'yi orijine taşır, orada z ekseni çevresinde döndürür, sonra geri taşır: $F = T_{\mathbf{c}}\, C\, T_{-\mathbf{c}}$. F, z eksenine paralel ve $\mathbf{c}$'den geçen doğru çevresinde dik açılık dönmedir. Öteleme kısmı $(2,0,0)$ olduğu hâlde F hiçbir şeyi "ötelemez"; öteleme kısmı yalnızca dönme ekseninin orijinden geçmediğini haber verir.
Bir kare. xy düzlemindeki köşeleri $(2,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(2,2)$ olan kare, önce C ile $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(-2,3)$, $(-2,2)$ köşeli kareye döner, sonra $(2,0)$ kadar kayarak $(1,2)$, $(1,3)$, $(0,3)$, $(0,2)$ köşeli kareye gelir. Sonuç, ilk karenin $(1,1)$ çevresinde çeyrek tur döndürülmüş hâlidir.



Şekil 18.6: $F = T_{\mathbf{a}}C$, $\mathbf{a}$ = (2, 0, 0), yukarıdan bakış. Gri kare C ile orijin çevresinde çeyrek tur döner (kesikli kare), sonra (2, 0) kadar kayar (turuncu oklar) ve mavi kareye gelir. Sonuç, gri karenin $\mathbf{c}$ = (1, 1) çevresinde çeyrek tur döndürülmüş hâlidir: örneğin (2, 1) köşesi (1, 2)'ye gider. F, $\mathbf{c}$'den geçen dikey doğru çevresinde bir dönmedir.

■

18.10 İzometriler ve Eğriler

Bir izometri eğrileri eğrilere götürür. α bir eğri ve $F = T_{\mathbf{a}}C$ ise α'nın görüntüsü (Tanım 7.2)

$$\beta(t) = F\,\big(\,\alpha(t)\,\big) = \mathbf{a} + C\,\big(\,\alpha(t)\,\big)$$

eğrisidir. β'nın i-inci koordinatı $a_i + \sum_j c_{ij}\,\alpha_j(t)$'dir; sabit katsayılar türevin dışına çıktığından $\beta'(t)$'nin vektör kısmı, $\alpha'(t)$'nin vektör kısmına C uygulanarak bulunur ve aynısı ikinci ve üçüncü türevler için de

 CC BY-NC-SA 4.0

geçerlidir. C normları koruduğundan β ile α'nın süratleri her an aynıdır. Bu gözlemi bir sonraki bölümde teğet dönüşümü diliyle genel olarak ele alacağız; şimdilik bir helisin izometriler altında neye dönüştüğüne bakalım.

Örnek 18.16 (Döndürülüp Ötelenen Helis). $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ helisini (Örnek 4.2) $F = T_{\mathbf{a}}C$ izometrisiyle taşıyalım; burada C, x ekseni çevresinde $\pi/2$ açısıyla dönme ve $\mathbf{a} = (0, -3, 3)$'tür. Görüntü eğrisinin süratini, eğriliğini ve burulmasını α'nınkilerle karşılaştıralım.

Çözüm.
Görüntü. $C(\mathbf{p}) = (p_1, -p_3, p_2)$ olduğundan

$$\beta(t) = (0,-3,3) + C(2\cos t, 2\sin t, t) = (2\cos t, -t - 3, 2\sin t + 3).$$

Rota. Her t için

$$\beta_1(t)^2 + \big(\,\beta_3(t) - 3\big)^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4.$$

β, $x = 0$, $z = 3$ doğrusu çevresindeki 2 yarıçaplı silindirin üzerinde kalır ve t arttıkça bu doğru boyunca negatif y yönünde ilerler: ekseni bu doğru olan bir helistir.
Türevler. İki eğrinin ilk üç türevi:

$$\begin{aligned} \alpha' &= (-2\sin t, 2\cos t, 1), & \beta' &= (-2\sin t, -1, 2\cos t),\\ \alpha'' &= (-2\cos t, -2\sin t, 0), & \beta'' &= (-2\cos t, 0, -2\sin t),\\ \alpha''' &= (2\sin t, -2\cos t, 0), & \beta''' &= (2\sin t, 0, -2\cos t). \end{aligned}$$

Her satırda sağdaki, soldakine C uygulanmış hâlidir; örneğin $C(\alpha') = (-2\sin t, -1, 2\cos t) = \beta'$ noktasıdır.
Sürat. $\| \alpha' \|^2 = 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1 = 5$ ve $\| \beta' \|^2 = 4\sin^2 t + 1 + 4\cos^2 t = 5$; iki eğri de $\sqrt{5}$ süratiyle gider.
Vektörel çarpımlar.

$$\alpha' \times \alpha'' = (2\sin t, -2\cos t, 4), \qquad \beta' \times \beta'' = (2\sin t, -4, -2\cos t).$$

İkisinin de normunun karesi $4 + 16 = 20$'dir.
Eğrilik ve burulma. Keyfi hızlı eğrilerin formülleri (Teorem 12.1) iki eğri için de

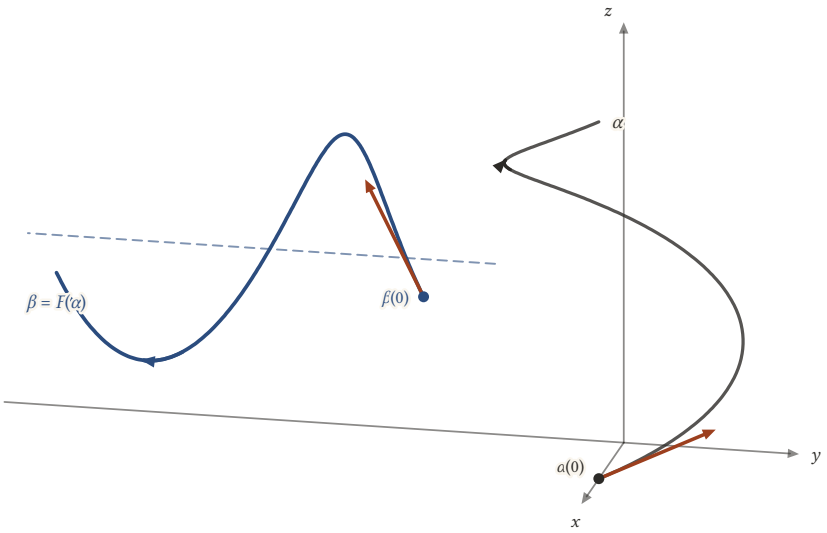
$$\kappa = \frac{\sqrt{20}}{(\sqrt{5})^3} = \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

verir. Burulmanın payları

$$\begin{aligned} (\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' &= 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 0 = 4,\\ (\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' &= 4\sin^2 t + 0 + 4\cos^2 t = 4 \end{aligned}$$

olduğundan iki eğri için de $\tau = 4/20 = 1/5$. Bu değerler $a = 2$, $b = 1$ helisi için bildiğimiz $\kappa = a/(a^2+b^2)$ ve $\tau = b/(a^2+b^2)$ formülleriyle uyumludur (Örnek 11.5).
Sonuç. β, α ile aynı helistir; yalnızca uzayda başka bir yere konmuş ve başka bir yöne çevrilmiştir. Sürat, eğrilik ve burulma bu yer değiştirmeden etkilenmez.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.7: $\alpha(t) = (2\cos t,\, 2\sin t,\, t)$ helisi (gri) ve onun $F = T_{\mathbf{a}}C$ altındaki görüntüsü $\beta(t) = (2\cos t,\, -t-3,\, 2\sin t + 3)$ (mavi), $0 \le t \le 2\pi$. C, x ekseni çevresinde dik açılık dönme, $\mathbf{a} = (0, -3, 3)$'tür. β'nın ekseni $x = 0$, $z = 3$ doğrusudur (kesikli); küçük oklar hareket yönünü gösterir. Turuncu oklar $t = 0$ anındaki hızlardır; ikisinin de uzunluğu $\sqrt{5}$'tir.

■

Örnek 18.17 (Aynadaki Helis). Aynı $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ helisini xy düzlemine göre yansıma $M(\mathbf{p}) = (p_1, p_2, -p_3)$ ile taşıyalım ve görüntünün süratini, eğriliğini ve burulmasını bulalım.

Çözüm.
Yansıma. M, $\mathbf{n} = \mathbf{u}_3$ için Örnek 18.7 içindeki yansımadır; ortogonaldir ve matrisinin determinantı -1'dir.
Görüntü ve türevleri. Görüntü eğrisi $\gamma(t) = M\big(\,\alpha(t)\,\big)$ ve türevleri

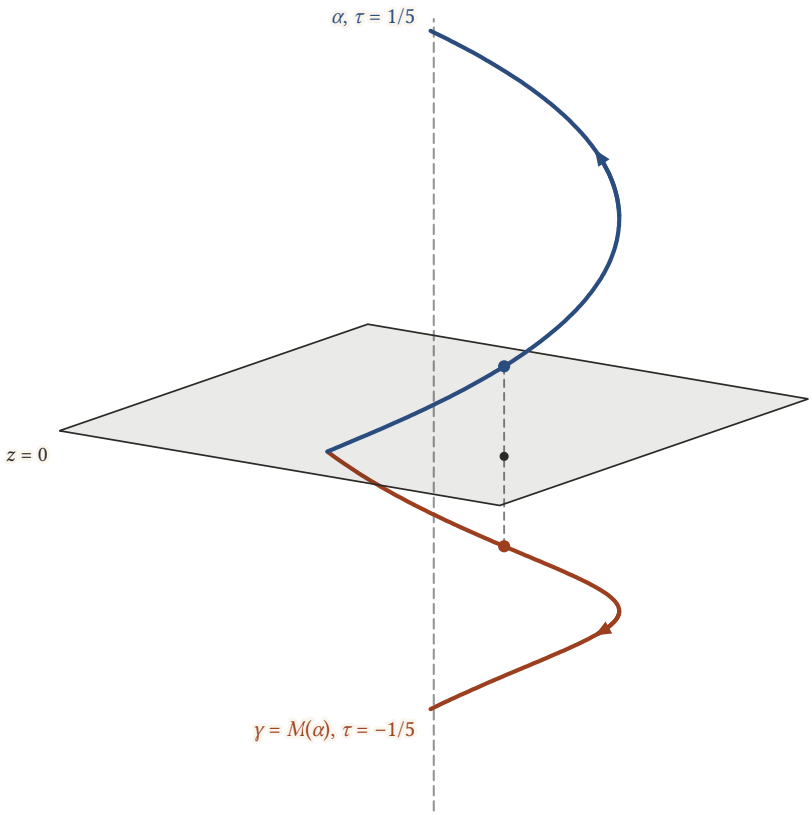
$$\gamma = (2\cos t, 2\sin t, -t), \qquad \gamma' = (-2\sin t, 2\cos t, -1),$$
$$\gamma'' = (-2\cos t, -2\sin t, 0), \gamma''' = (2\sin t, -2\cos t, 0).$$

Sürat ve eğrilik. $\| \gamma' \|^2 = 5$. Vektörel çarpım $\gamma' \times \gamma'' = (-2\sin t, 2\cos t, 4)$ ve normunun karesi 20'dir; dolayısıyla $\kappa = 2/5$, α'nınkiyle aynı.
Burulma. Pay ve burulma

$$(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = -4\sin^2 t - 4\cos^2 t + 0 = -4, \qquad \tau = \frac{-4}{20} = -\frac{1}{5}.$$

Sonuç. Yansıma sürati ve eğriliği korudu, ama burulmanın işaretini değiştirdi. α yukarı doğru sağ el yönünde burulan bir helistir; aynadaki görüntüsü γ ise aşağı inerken aynı yönde döner, yani sol el yönünde burulur. Bu, Örnek 11.5 içindeki helisin $b = -1$ alınmış hâlidir. Yansımanın determinantının -1 olmasıyla burulmanın işaret değiştirmesi arasındaki bağı Yönlendirme bölümünde kuracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.8: $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ helisi (mavi) ve xy düzlemindeki aynadaki görüntüsü $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, -t)$ (turuncu), $0 \le t \le 6\pi/5$. Kesikli doğru bir nokta çiftini birleştirir ve aynaya diktir. Oklar hareket yönünü gösterir: iki eğri yukarıdan bakınca aynı yönde döner, ama α dönerken yükselir, γ alçalır. Eğrilikleri aynıdır (2/5), burulmaları zıt işaretlidir.

■

18.11 İzometri Grubu

İzometriler hakkında öğrendiklerimizi bir cebirsel yapı altında toplayalım. Bileşke, iki izometriden yeni bir izometri üreten bir işlemdir; bu işlemin özdeşlik dönüşümü gibi bir "etkisiz" elemanı ve her izometri için bir tersi vardır. Bu özellikleri taşıyan yapılar matematiğin her yerinde karşımıza çıkar.

Tanım 18.5 (Grup). $\mathcal{G}$ bir küme olsun ve her $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ çiftine $\mathcal{G}$'nin bir $g_1 g_2$ elemanını karşılık getiren bir işlem verilsin. Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa $\mathcal{G}$'ye bu işlemle bir **grup** (group) denir:

1. **Birleşme:** her g_1, g_2, g_3 için $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.
2. **Birim eleman:** her g için $eg = ge = g$ olan bir $e \in \mathcal{G}$ vardır.
3. **Ters eleman:** her $g \in \mathcal{G}$ için $gg^{-1} = g^{-1} g = e$ olan bir $g^{-1} \in \mathcal{G}$ vardır.

Yani bir grup, elemanlarını birleştirmenin bir yolu olan ve bu birleştirmenin "hiçbir şey yapmayan" bir elemanı ile her adımı geri alan bir tersi bulunan kümedir. Birim eleman tektir: e ve e' ikisi de birim elemansa $e = ee' = e'$. Örnekler: tam sayılar toplamayla ($e = 0$, $g^{-1} = -g$), sıfırdan farklı gerçel sayılar çarpmayla ($e = 1$, $g^{-1} = 1/g$), $\mathbb{R}^3$'ün noktaları toplamayla ($e = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{p}$'nin tersi $-\mathbf{p}$). Buna karşılık tam sayılar çıkarmayla bir grup değildir, çünkü çıkarma birleşmeli değildir: $(1-1)-1 = -1$ iken $1-(1-1) = 1$.

$\mathbb{R}^3$'ün bütün izometrilerinin kümesini $\mathcal{E}(3)$ ile gösterelim. Sonuç 18.1 tam olarak şunu söyler: bileşke $\mathcal{E}(3)$ üzerinde bir işlemdir, I birim elemandır ve her izometrinin $\mathcal{E}(3)$ içinde bir tersi vardır. Birleşme özelliği

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonların bileşkesinde her zaman doğrudur. Böylece $\mathcal{E}(3)$ bileşkeyle bir gruptur; bu grubu **Öklid grubu** diye anacağız ve grup koşullarının ayrıntılı denetimini Alıştırma 18.14 içinde yapacağız.

Tanım 18.6 (Alt Grup). $\mathcal{G}$ bir grup ve $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\mathcal{H}$'nin iki elemanının çarpımı ve $\mathcal{H}$'nin her elemanının tersi yine $\mathcal{H}$'de ise $\mathcal{H}$'ye $\mathcal{G}$'nin bir **alt grubu** (subgroup) denir.

Yani bir alt grup, grubun işlemi ve ters alma altında kapalı olan boş olmayan bir parçasıdır. Bir alt grup birim elemanı da içerir: $\mathcal{H}$'nin bir h elemanını alırsak h^{-1} ve dolayısıyla $hh^{-1} = e$ de $\mathcal{H}$'dedir. Grubun işlemi alt grupta da birleşmeli olduğundan bir alt grup kendi başına bir gruptur. $\mathcal{E}(3)$'ün iki önemli alt grubu vardır: bütün ötelemelerin kümesi $\mathcal{T}(3)$ ve bütün ortogonal dönüşümlerin kümesi $O(3)$; ikincisine **ortogonal grup** denir. Bunların alt grup olduğunu Alıştırma 18.15 ve Alıştırma 18.16 içinde göstereceğiz. Ayrıştırma teoremi, $\mathcal{E}(3)$'ün her elemanının $\mathcal{T}(3)$'ten bir elemanla $O(3)$'ten bir elemanın bileşkesi olarak tek türlü yazıldığını söyler.
Uzaklık ile iç çarpım her boyutta aynı formüllerle tanımlandığından bu bölümdeki tanımlar $\mathbb{R}^n$'de de anlamlıdır. İspatlar da, $\mathbb{R}^3$ için kullandığımız lineer cebir sonuçlarının (ortonormal açılım, kare matrislerde tek yanlı tersin iki yanlı olması) n boyutlu karşılıklarıyla aynen yürür: $\mathbb{R}^n$'nin her izometrisi, $n \times n$'lik bir ortogonal matrisle verilen bir ortogonal dönüşüm ile bir ötelemenin bileşkesi olarak tek türlü yazılır. Düzlem ve doğru için bunu Alıştırma 18.18 ve Alıştırma 18.19 içinde açıkça göreceğiz.

18.12 Alıştırmalar

Bu alıştırmalarda A, B ve C ortogonal dönüşümleri (ya da matrislerini), $T_{\mathbf{a}}$ da $\mathbf{a}$ ile ötelemeyi gösterir.

Alıştırma 18.1 (Önce Öteleyip Sonra Çevirmek). C bir ortogonal dönüşüm ve $\mathbf{a}$ bir nokta olsun. $CT_{\mathbf{a}} = T_{C(\mathbf{a})}C$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
İspat. Her $\mathbf{p}$ için, C'nin lineerliğiyle

$$(CT_{\mathbf{a}})(\mathbf{p}) = C(\mathbf{p}+\mathbf{a}) = C(\mathbf{p}) + C(\mathbf{a}) = T_{C(\mathbf{a})}\left(\, C(\mathbf{p}) \,\right) = (T_{C(\mathbf{a})}C)(\mathbf{p}).$$

Anlamı. $CT_{\mathbf{a}}$ bir izometridir; öteleme kısmı $C(\mathbf{a})$ ile öteleme, ortogonal kısmı C'dir. Ayrıştırmanın tekliği gereği $CT_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}}C$ eşitliği ancak öteleme kısımları aynıysa, yani $C(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ ise doğrudur.
Örnek. C, z ekseni çevresinde $\pi/2$ açısıyla dönme ve $\mathbf{a} = (3,1,0)$ ise $C(\mathbf{a}) = (-1,3,0) \neq \mathbf{a}$; $CT_{\mathbf{a}}$ orijini $(-1,3,0)$'a, $T_{\mathbf{a}}C$ ise $(3,1,0)$'a götürür ve iki izometri farklıdır (Teorem 18.2 içindeki şekil). Buna karşılık $\mathbf{a} = (0,0,5)$ eksen üzerinde olduğundan $C(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ ve iki sıra aynı izometriyi, bir vida hareketini verir.
■

Alıştırma 18.2 (Bir Bileşkenin Parçaları). $F = T_{\mathbf{a}}A$ ve $G = T_{\mathbf{b}}B$ izometriler olsun. FG bileşkesinin öteleme ve ortogonal kısımlarını bulunuz.

Çözüm.
Ötelemeyi sola taşımak. Bileşkenin birleşme özelliğiyle $FG = T_{\mathbf{a}}(AT_{\mathbf{b}})B$. Alıştırma 18.1 gereği $AT_{\mathbf{b}} = T_{A(\mathbf{b})}A$, dolayısıyla

$$FG = T_{\mathbf{a}}T_{A(\mathbf{b})}AB = T_{\mathbf{a}+A(\mathbf{b})}\,AB;$$

son adımda Lemma 18.1 kullanıldı.
AB ortogonaldir. İki lineer dönüşümün bileşkesi lineerdir ve iki ortogonal dönüşüm art arda iç çarpımı korur:

$$AB(\mathbf{p}) \cdot AB(\mathbf{q}) = B(\mathbf{p}) \cdot B(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}.$$

Sonuç. Ayrıştırmanın tekliği gereği FG'nin öteleme kısmı $\mathbf{a} + A(\mathbf{b})$ ile öteleme, ortogonal kısmı AB'dir. Doğrudan denetim:

$$(FG)(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + A\left(\, \mathbf{b} + B(\mathbf{p}) \,\right) = \mathbf{a} + A(\mathbf{b}) + AB(\mathbf{p}).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sayısal örnek. A, z ekseni çevresinde ve B, x ekseni çevresinde $\pi/2$ açısıyla dönme, $\mathbf{a} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,0,1)$ olsun. $A(\mathbf{b}) = (0,0,1)$ olduğundan öteleme kısmı $(1,0,1)$ ile ötelemedir; ortogonal kısım Örnek 18.14 içindeki $AB(\mathbf{p}) = (p_3, p_1, p_2)$'dir. Örneğin

$$(FG)(1,2,3) = (1,0,1) + (3,1,2) = (4,1,3).$$

■

Alıştırma 18.3 (Ters Sıradaki Bileşkenin Parçaları). $F = T_{\mathbf{a}}A$ ve $G = T_{\mathbf{b}}B$ izometriler olsun. GF bileşkesinin öteleme ve ortogonal kısımlarını bulunuz.

Çözüm.
Hesap. Bir önceki alıştırmadaki hesap, harflerin rolleri değiştirilerek tekrarlanır:

$$GF = T_{\mathbf{b}}(BT_{\mathbf{a}})A = T_{\mathbf{b}}T_{B(\mathbf{a})}BA = T_{\mathbf{b}+B(\mathbf{a})}\,BA.$$

Sonuç. GF'nin öteleme kısmı $\mathbf{b} + B(\mathbf{a})$ ile öteleme, ortogonal kısmı BA'dır. Doğrudan: $(GF)(\mathbf{p}) = \mathbf{b} + B(\mathbf{a}) + BA(\mathbf{p})$.
Sayısal örnek. Önceki alıştırmadaki veriyle $B(\mathbf{a}) = B(1,0,0) = (1,0,0)$, dolayısıyla öteleme kısmı yine $(1,0,1)$ ile ötelemedir. Ama ortogonal kısım $BA(\mathbf{p}) = (-p_2, -p_3, p_1)$'dir ve AB'den farklıdır. Örneğin

$$(GF)(1,2,3) = (1,0,1) + (-2,-3,1) = (-1,-3,2),$$

oysa $(FG)(1,2,3) = (4,1,3)$. Öteleme kısımları aynı olsa bile $FG \neq GF$.
■

Alıştırma 18.4 (Bir İzometrinin Tersinin Parçaları). $F = T_{\mathbf{a}}C$ izometrisinin bir ters dönüşümü olduğunu ve F^{-1}'in de bir izometri olduğunu gösteriniz; F^{-1}'in öteleme ve ortogonal kısımlarını bulunuz.

Çözüm.
Varlık. Sonuç 18.1 gereği F birebir ve örtendir, C^{-1} ortogonaldir ve $F^{-1} = C^{-1}T_{\mathbf{a}}^{-1} = C^{-1}T_{-\mathbf{a}}$ bir izometridir.
Parçalar. Alıştırma 18.1 ortogonal C^{-1} dönüşümüne uygulanırsa

$$F^{-1} = C^{-1}T_{-\mathbf{a}} = T_{C^{-1}(-\mathbf{a})}C^{-1} = T_{-C^{-1}(\mathbf{a})}\,C^{-1}.$$

Öteleme kısmı $-C^{-1}(\mathbf{a})$ ile öteleme, ortogonal kısmı C^{-1}'dir. Matrislerle $C^{-1} = C^T$ olduğundan (Önerme 18.2)

$$F^{-1}(\mathbf{q}) = C^T(\mathbf{q} - \mathbf{a}).$$

Denetim. İki bileşke de özdeşliktir:

$$F^{-1}\left(\,F(\mathbf{p})\,\right) = -C^{-1}(\mathbf{a}) + C^{-1}\left(\,\mathbf{a} + C(\mathbf{p})\,\right) = \mathbf{p},$$
$$F\left(\,F^{-1}(\mathbf{q})\,\right) = \mathbf{a} + C\left(\,C^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{a})\,\right) = \mathbf{q}.$$

Sayısal örnek. C, z ekseni çevresinde $\pi/2$ açısıyla dönme ve $\mathbf{a} = (1,0,0)$ ise $F(\mathbf{p}) = (1 - p_2, p_1, p_3)$. $C^T(\mathbf{p}) = (p_2, -p_1, p_3)$ ve $-C^T(\mathbf{a}) = (0,1,0)$, dolayısıyla $F^{-1}(\mathbf{q}) = (q_2, 1 - q_1, q_3)$. Gerçekten $F^{-1}(1 - p_2, p_1, p_3) = (p_1, p_2, p_3)$.
■

Alıştırma 18.5 (Bir Matrisin Ortogonalliği). Matrisi

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olan C lineer dönüşümünün ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sütunlar. Önerme 18.2 gereği sütunların ortonormal olduğunu göstermek yeter. Sütunlar $\frac{1}{3}(-2,2,1)$, $\frac{1}{3}(2,1,2)$ ve $\frac{1}{3}(-1,-2,2)$'dir.
Uzunluklar. Normların kareleri $(4+4+1)/9$, $(4+1+4)/9$ ve $(1+4+4)/9$, yani üçü de 1'dir.
Diklik. Karşılıklı iç çarpımlar

$$\frac{-4+2+2}{9}=0, \qquad \frac{2-4+2}{9}=0, \qquad \frac{-2-2+4}{9}=0.$$

Sütunlar ortonormaldir; C ortogonaldir.
Determinant. Birinci satıra göre açılım

$$\det C = \frac{1}{27}\,\big(-2(2+4)-2(4+2)-(4-1)\big) = \frac{-27}{27} = -1$$

verir. C bir dönme değildir; Örnek 18.2 içindeki anlamda "ters çeviren" bir ortogonal dönüşümdür.
■

Alıştırma 18.6 (İç Çarpımın Korunmasını Sayılarla Görmek). C, bir önceki alıştırmadaki ortogonal dönüşüm, $\mathbf{p}=(3,1,-6)$ ve $\mathbf{q}=(1,0,3)$ olsun. $C(\mathbf{p})$ ve $C(\mathbf{q})$ noktalarını hesaplayıp $C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$ olduğunu denetleyiniz.

Çözüm.
$C(\mathbf{p})$. Satırları $\mathbf{p}$ ile çarpalım:

$$C(\mathbf{p}) = \frac{1}{3}\,\big(-6+2+6,\ 6+1+12,\ 3+2-12\big) = \Big(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}, -\frac{7}{3}\Big).$$

$C(\mathbf{q})$. Aynı biçimde

$$C(\mathbf{q}) = \frac{1}{3}\,\big(-2+0-3,\ 2+0-6,\ 1+0+6\big) = \Big(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\Big).$$

İç çarpımlar.

$$C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q}) = \frac{-10-76-49}{9} = \frac{-135}{9} = -15,$$
$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 3+0-18 = -15.$$

Normlar da korunur.

$$\|\,C(\mathbf{p})\,\|^2 = \frac{4+361+49}{9} = 46 = 9+1+36 = \|\,\mathbf{p}\,\|^2,$$
$$\|\,C(\mathbf{q})\,\|^2 = \frac{25+16+49}{9} = 10 = 1+0+9 = \|\,\mathbf{q}\,\|^2.$$

■

Alıştırma 18.7 (Bir Noktanın Görüntüsü). $F = T_{\mathbf{a}}C$ olsun; burada $\mathbf{a}=(1,3,-1)$ ve

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{p}=(2,-2,8)$ için $\mathbf{q}=F(\mathbf{p})$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

C nedir? Sütunlar ortonormaldir ve C, $\vartheta = -\pi/4$ için C_y matrisidir: y ekseni çevresinde $-\pi/4$ açısıyla dönme.
$C(\mathbf{p})$. Satırları $\mathbf{p}$ ile çarpalım:

$$C(\mathbf{p}) = \Big(\frac{2-8}{\sqrt{2}}, -2, \frac{2+8}{\sqrt{2}} \Big) = (-3\sqrt{2}, -2, 5\sqrt{2}).$$

Öteleme. $\mathbf{a}$'yı ekleyelim:

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + C(\mathbf{p}) = (1 - 3\sqrt{2}, 1, -1 + 5\sqrt{2}).$$

Denetim. C normu korumalıdır ve gerçekten

$$\| C(\mathbf{p}) \|^2 = 18 + 4 + 50 = 72 = 4 + 4 + 64 = \| \mathbf{p} \|^2 .$$

■

Alıştırma 18.8 (Bir Noktanın Ters Görüntüsü). Bir önceki alıştırmadaki $F = T_{\mathbf{a}} C$ ve $\mathbf{p} = (2, -2, 8)$ için $\mathbf{q} = F^{-1}(\mathbf{p})$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Formül. Alıştırma 18.4 gereği $F^{-1}(\mathbf{p}) = C^{T}(\mathbf{p} - \mathbf{a})$.
Fark. Koordinat koordinat çıkaralım:

$$\mathbf{p} - \mathbf{a} = (2 - 1, -2 - 3, 8 + 1) = (1, -5, 9).$$

Transpozla çarpım. C^{T}'nin satırları C'nin sütunlarıdır: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ ve $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. Dolayısıyla

$$\mathbf{q} = \Big(\frac{1+9}{\sqrt{2}}, -5, \frac{-1+9}{\sqrt{2}} \Big) = (5\sqrt{2}, -5, 4\sqrt{2}).$$

Denetim. $\mathbf{q}$'ya F uygulayınca $\mathbf{p}$'ye dönmeliyiz:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}) &= \Big(\frac{5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -5, \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Big) = (1, -5, 9), \\ F(\mathbf{q}) &= \mathbf{a} + (1, -5, 9) = (2, -2, 8) = \mathbf{p}. \end{aligned}$$

■

Alıştırma 18.9 (Ters Sıradaki Bileşkede Bir Nokta). Aynı $\mathbf{a} = (1, 3, -1)$, aynı C ve $\mathbf{p} = (2, -2, 8)$ için $\mathbf{q} = (C T_{\mathbf{a}})(\mathbf{p})$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Doğrudan hesap. $(C T_{\mathbf{a}})(\mathbf{p}) = C(\mathbf{p} + \mathbf{a})$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{a} = (3, 1, 7)$. Dolayısıyla

$$\mathbf{q} = C(3, 1, 7) = \Big(\frac{3-7}{\sqrt{2}}, 1, \frac{3+7}{\sqrt{2}} \Big) = (-2\sqrt{2}, 1, 5\sqrt{2}).$$

İkinci yol. Alıştırma 18.1 gereği $C T_{\mathbf{a}} = T_{C(\mathbf{a})} C$. Burada

$$C(\mathbf{a}) = \Big(\frac{1+1}{\sqrt{2}}, 3, \frac{1-1}{\sqrt{2}} \Big) = (\sqrt{2}, 3, 0)$$

ve $C(\mathbf{p}) = (-3\sqrt{2}, -2, 5\sqrt{2})$ olduğundan

$$\mathbf{q} = C(\mathbf{a}) + C(\mathbf{p}) = (\sqrt{2} - 3\sqrt{2}, 3 - 2, 5\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2}, 1, 5\sqrt{2}).$$

Karşılaştırma. $F(\mathbf{p}) = (1 - 3\sqrt{2}, 1, -1 + 5\sqrt{2})$ ile karşılaştırınca $C T_{\mathbf{a}} \neq T_{\mathbf{a}} C$ olduğu sayılarla da görülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 18.10 (Orijine Göre Yansıma). $F(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi olup olmadığına karar veriniz; izometriyse öteleme ve ortogonal kısımlarını bulunuz.

Çözüm.
Birinci adım. $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
İkinci adım. $C(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - \mathbf{0} = -\mathbf{p}$; C lineerdir ve matrisi $-I$'dır.
Üçüncü adım. Sütunlar $-\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_3$ ortonormaldir. F bir izometridir.
Sonuç. Öteleme kısmı $\mathbf{0}$ ile öteleme, yani I; ortogonal kısmı F'nin kendisidir. F, her noktayı orijine göre simetriğine götüren **orijine göre yansımadır**. Determinantı $(-1)^3 = -1$'dir; F, z ekseni çevresinde π açısıyla dönme $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (-p_1, -p_2, p_3)$ ile xy düzlemine göre yansımanın bileşkesidir.
■

Alıştırma 18.11 (Bir Doğruya İzdüşüm). $\| \mathbf{a} \| = 1$ olsun. $F(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi olup olmadığına karar veriniz; izometriyse öteleme ve ortogonal kısımlarını bulunuz.

Çözüm.
Geometri. $F(\mathbf{p})$, $\mathbf{p}$'nin $\mathbf{a}$ doğrultusundaki bileşenidir: F, uzayı orijinden geçen ve $\mathbf{a}$ doğrultusundaki doğruya dik olarak izdüşürür.
İzometri değildir. $\mathbf{a}$'ya dik, sıfırdan farklı bir $\mathbf{b}$ noktası alalım; örneğin $\mathbf{a} = \tfrac{1}{3}(1,2,2)$ için $\mathbf{b} = (2,-1,0)$, çünkü $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (2 - 2 + 0)/3 = 0$. O zaman $F(\mathbf{b}) = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} = F(\mathbf{0})$, oysa $d(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = \| \mathbf{b} \| \neq 0$. F birebir bile değildir; dolayısıyla izometri değildir. Böyle bir $\mathbf{b}$ her birim $\mathbf{a}$ için vardır: $\mathbf{a}$'yı bir çatıya tamamlayan iki öteki vektör buna örnektir.
Yöntemle. $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ve $C = F$ lineerdir; j-inci sütun $F(\mathbf{u}_j) = a_j\,\mathbf{a}$'nın uzunluğu $|\,a_j\,|$'dir. Sütunların üçü birden birim olsaydı $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 3$ olurdu, oysa bu toplam 1'dir.
■

Alıştırma 18.12 (Koordinatları Değiştirip Kaydırmak). $F(\mathbf{p}) = (p_3 - 1, p_2 - 2, p_1 - 3)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi olup olmadığına karar veriniz; izometriyse öteleme ve ortogonal kısımlarını bulunuz.

Çözüm.
Birinci adım. $\mathbf{a} = F(\mathbf{0}) = (-1,-2,-3)$.
İkinci adım. $C(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - \mathbf{a} = (p_3, p_2, p_1)$; C lineerdir ve matrisi

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Üçüncü adım. Sütunlar $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1$ ortonormaldir. F bir izometridir.
Sonuç. Öteleme kısmı $(-1,-2,-3)$ ile öteleme, ortogonal kısmı x ile z koordinatlarının yerini değiştiren C'dir. C, $x = z$ düzlemine göre yansımadır: $\mathbf{n} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ için Örnek 18.7 formülü

$$\mathbf{p} - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n} = \mathbf{p} - (p_1 - p_3)(1,0,-1) = (p_3, p_2, p_1)$$

verir. Determinantı -1'dir.
■

Alıştırma 18.13 (Bir Düzleme İzdüşüm). $F(\mathbf{p}) = (p_1, p_2, 1)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi olup olmadığına karar veriniz; izometriyse öteleme ve ortogonal kısımlarını bulunuz.

Çözüm.
İzometri değildir. $F(\mathbf{0}) = (0,0,1) = F(\mathbf{u}_3)$, oysa $d(\mathbf{0}, \mathbf{u}_3) = 1$. F birebir değildir, dolayısıyla izometri değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yöntemle. $\mathbf{a} = (0,0,1)$ ve $C(\mathbf{p}) = (p_1, p_2, 0)$; üçüncü sütun sıfırdır, sütunlar ortonormal olamaz.
Geometri. F, uzayı $z = 1$ düzlemine dik olarak izdüşürür: her dikey doğruyu tek bir noktaya ezer.
■

Alıştırma 18.14 (Öklid Grubu). $\mathbb{R}^3$'ün bütün izometrilerinin kümesi $\mathcal{E}(3)$'ün, fonksiyonların bileşkesi işlemiyle bir grup olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
İşlem. $F, G \in \mathcal{E}(3)$ ise $GF \in \mathcal{E}(3)$ (Lemma 18.2); bileşke $\mathcal{E}(3)$ üzerinde bir işlemdir.
Birleşme. $F, G, H \in \mathcal{E}(3)$ ve $\mathbf{p}$ bir nokta olsun. Bileşkenin tanımıyla

$$\big(\,(HG)F\,\big)\,(\mathbf{p}) = (HG)\,\big(\,F(\mathbf{p})\,\big) = H\Big(\,G\,\big(\,F(\mathbf{p})\,\big)\Big) = \big(\,H(GF)\,\big)\,(\mathbf{p}).$$

Her $\mathbf{p}$ için doğru olduğundan $(HG)F = H(GF)$.
Birim eleman. $I \in \mathcal{E}(3)$ ve her F için $(IF)(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) = (FI)(\mathbf{p})$, yani $IF = FI = F$.
Ters eleman. Sonuç 18.1 gereği her $F \in \mathcal{E}(3)$ birebir ve örtendir, tersi F^{-1} bir izometridir ve $FF^{-1} = F^{-1}F = I$.
Üç koşul sağlandığından $\mathcal{E}(3)$ bir gruptur. Bu grup değişmeli değildir: Örnek 18.14 içinde $AB \neq BA$ bulduk.
■

Alıştırma 18.15 (Ötelemeler Bir Alt Gruptur). Bütün ötelemelerin kümesi $\mathcal{T}(3)$'ün $\mathcal{E}(3)$'ün bir alt grubu olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Alt küme. Her öteleme bir izometridir (Önerme 18.1); $\mathcal{T}(3) \subset \mathcal{E}(3)$. $I = T_{\mathbf{0}}$ bir öteleme olduğundan $\mathcal{T}(3)$ boş değildir.
Bileşke. Lemma 18.1 gereği iki ötelemenin bileşkesi bir ötelemedir: $T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$.
Ters. Aynı lemma gereği $T_{\mathbf{a}}^{-1} = T_{-\mathbf{a}}$ bir ötelemedir.
İki koşul sağlandığından $\mathcal{T}(3)$ bir alt gruptur. Üstelik bu alt grup değişmelidir: $T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{b}}T_{\mathbf{a}}$.
■

Alıştırma 18.16 (Ortogonal Grup). Bütün ortogonal dönüşümlerin kümesi $O(3)$'ün $\mathcal{E}(3)$'ün bir alt grubu olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Alt küme. Her ortogonal dönüşüm bir izometridir (Teorem 18.1); $O(3) \subset \mathcal{E}(3)$. Özdeşlik I lineerdir ve iç çarpımı korur; dolayısıyla $O(3)$ boş değildir.
Bileşke. $A, B \in O(3)$ olsun. AB lineerdir:

$$AB(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = A\,\big(\,a\,B(\mathbf{p}) + b\,B(\mathbf{q})\,\big) = a\,AB(\mathbf{p}) + b\,AB(\mathbf{q}).$$

İç çarpımı da korur:

$$AB(\mathbf{p}) \cdot AB(\mathbf{q}) = B(\mathbf{p}) \cdot B(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}.$$

Dolayısıyla $AB \in O(3)$.
Ters. Sonuç 18.1 ispatında $C \in O(3)$ ise C^{-1}'in de lineer olduğunu ve iç çarpımı koruduğunu gösterdik: $C^{-1} \in O(3)$.
İki koşul sağlandığından $O(3)$ bir alt gruptur. Matris diliyle $O(3)$, 3×3 ortogonal matrislerin matris çarpımıyla oluşturduğu gruptur.
■

Alıştırma 18.17 (İki Alt Grubun Kesişimi). $\mathbb{R}^3$'ün hangi izometrileri hem $\mathcal{T}(3)$'e hem $O(3)$'e aittir?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerek. F hem bir öteleme, örneğin $F = T_{\mathbf{a}}$, hem de bir ortogonal dönüşüm olsun. Ortogonal dönüşümler lineer olduğundan orijini yerinde bırakır: $\mathbf{0} = F(\mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$. Demek ki $F = T_{\mathbf{0}} = I$.
Yeter. I, $\mathbf{0}$ ile öteleme ve ortogonal bir dönüşümdür.
Sonuç. İki alt grubun ortak elemanı yalnızca özdeşlik dönüşümüdür. Aynı sonuç ayrıştırmanın tekliğinden de okunur: hem öteleme hem ortogonal olan F için $F = F \cdot I$ ve $F = I \cdot F$, aynı izometrinin iki ayrıştırmasıdır; teklik gereği $F = I$.
■

Alıştırma 18.18 (İki Boyutlu Ortogonal Matrisler). 2×2'lik keyfi bir C ortogonal matrisini, bir açı ve bir işaret kullanarak açıkça betimleyiniz.

Çözüm.
Sütunlar. $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ yazalım. Önerme 18.2 ispatının ilk adımı iki boyutta da aynen geçerlidir: $C^T C$'nin (j,k) girdisi j-inci ve k-inci sütunların iç çarpımıdır, yani $C^T C = I$ koşulu sütunların ortonormal olması demektir. Ortogonal matrisin tanımı ise $CC^T = I$'dır. Üç boyutta bu iki koşulun denkliğini Lemma 9.4 ile ispatlamıştık; iki boyutta doğrudan görelim.
Tek yanlı ters. $D = \det C = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ diyelim ve C'nin köşegen girdilerinin yerini değiştirip öteki iki girdinin işaretini çevirerek $\tilde{C}$ matrisini kuralım. Çarpım

$$\tilde{C}C = \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = DI$$

verir. $CC^T = I$ olsun. Bu eşitliği soldan $\tilde{C}$ ile çarpınca $(\tilde{C}C)C^T = \tilde{C}$, yani $DC^T = \tilde{C}$ olur. $D = 0$ olsaydı $\tilde{C}$ sıfır matris olurdu; $\tilde{C}$'nin girdileri C'ninkilerle işaret dışında aynı olduğundan C de sıfır matris olurdu ve $CC^T = I$ sağlanamazdı. Demek ki $D \neq 0$ ve $C^T = \tilde{C}/D$; buradan $C^T C = \tilde{C}C/D = I$. Aynı akıl yürütmeyi C^T matrisine uygularsak $C^T C = I$ eşitliğinden de $CC^T = I$ çıkar. Sonuç olarak C'nin ortogonal olması için sütunlarının ortonormal olması gerekir ve yeter.
Birinci sütun. $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$ olduğundan (c_{11}, c_{21}) birim çemberin bir noktasıdır; $(c_{11}, c_{21}) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ olacak biçimde bir ϑ vardır.
İkinci sütun. (c_{12}, c_{22}), birinci sütuna diktir: $c_{12}\cos\vartheta + c_{22}\sin\vartheta = 0$. $\lambda = -c_{12}\sin\vartheta + c_{22}\cos\vartheta$ diyelim. Diklik koşulu $c_{12}\cos\vartheta = -c_{22}\sin\vartheta$ ve $c_{22}\sin\vartheta = -c_{12}\cos\vartheta$ verdiğinden

$$\begin{aligned} -\lambda\sin\vartheta &= c_{12}\sin^2\vartheta - c_{22}\sin\vartheta\cos\vartheta = c_{12}\sin^2\vartheta + c_{12}\cos^2\vartheta = c_{12}, \\ \lambda\cos\vartheta &= -c_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta + c_{22}\cos^2\vartheta = c_{22}\sin^2\vartheta + c_{22}\cos^2\vartheta = c_{22}. \end{aligned}$$

Yani $(c_{12}, c_{22}) = \lambda(-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$. İkinci sütun birim olduğundan $\lambda^2 = 1$, yani $\lambda = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$.
Sonuç. Her 2×2 ortogonal matris, bir ϑ açısı ve bir $\varepsilon = \pm 1$ işareti için

$$C = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varepsilon\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \varepsilon\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

biçimindedir; tersine bu biçimdeki her matrisin sütunları ortonormaldir. $\det C = \varepsilon$.
İki tür. $\varepsilon = 1$ ise C, ϑ açısıyla dönmedir (Örnek 18.1). $\varepsilon = -1$ ise

$$C = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

olur. Bu matris $(\cos\frac{\vartheta}{2}, \sin\frac{\vartheta}{2})$ noktasını yerinde bırakır ve ona dik $(-\sin\frac{\vartheta}{2}, \cos\frac{\vartheta}{2})$ noktasının işaretini değiştirir; örneğin birinci koordinat $\cos\vartheta\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\vartheta\sin\frac{\vartheta}{2} = \cos\frac{\vartheta}{2}$'dir. Yani C, x ekseniyle $\vartheta/2$ açısı yapan doğruya göre yansımadır. $\vartheta = 0$ için x eksenine göre, $\vartheta = \pi/2$ için $y = x$ doğrusuna göre yansıma çıkar (Örnek 18.2).
Düzlemin her izometrisi, ayrıştırma teoreminin iki boyutlu hâli gereği, $F(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + C(\mathbf{p})$ biçimindedir: bir dönme ya da bir doğruya göre yansıma, ardından bir öteleme.
■

Alıştırma 18.19 (Doğrunun İzometrileri). $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$'in keyfi bir F izometrisi için bir formül veriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Ayrıştırmayla. Ayrıştırma teoreminin bir boyutlu hâli gereği $F(p) = a + C(p)$; burada $a = F(0)$ ve C, $\mathbb{R}$'nin bir ortogonal dönüşümüdür. Lineer bir $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bir c sayısıyla $C(p) = cp$ biçimindedir ve iç çarpımı (burada sıradan çarpımı) koruması $c^2 = 1$, yani $c = \pm 1$ demektir.
Doğrudan. Aynı sonucu ayrıştırma teoremini kullanmadan da görelim. $G(p) = F(p) - F(0)$ bir izometridir ve $G(0) = 0$. Her p için $\mid G(p) \mid = \mid G(p) - G(0) \mid = \mid p \mid$, yani $G(p) = \pm p$. $\varepsilon = G(1)$ diyelim; $\varepsilon = \pm 1$. Bir $p \neq 0$ için $G(p) = -\varepsilon p$ olsaydı

$$\mid p - 1 \mid = \mid G(p) - G(1) \mid = \mid -\varepsilon p - \varepsilon \mid = \mid p + 1 \mid$$

olurdu; bu da yalnızca $p = 0$ için doğrudur. Dolayısıyla her p için $G(p) = \varepsilon p$.
Sonuç. $\mathbb{R}$'nin her izometrisi, bir a sayısı ve bir $\varepsilon = \pm 1$ işareti için

$$F(p) = \varepsilon p + a$$

biçimindedir; tersine bu biçimdeki her fonksiyon $\mid F(p) - F(q) \mid = \mid p - q \mid$ sağlar. $\varepsilon = 1$ ise F, a ile ötelemedir; $\varepsilon = -1$ ise $F(p) = a - p$, $a/2$ noktasına göre yansımadır (bu nokta yerinde kalır).
■

Alıştırma 18.20 (Dört Noktada Anlaşan İzometriler). F ve G, $\mathbb{R}^3$'ün iki izometrisi olsun. F ile G, $\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ noktalarının her birinde aynı değeri alıyorsa $F = G$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Karşılaştırma izometrisi. $H = G^{-1}F$ olsun; Sonuç 18.1 gereği H bir izometridir.
Sabit noktalar. $F(\mathbf{0}) = G(\mathbf{0})$ olduğundan $H(\mathbf{0}) = G^{-1}\big(G(\mathbf{0})\big) = \mathbf{0}$; aynı biçimde her i için $H(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$.
$H = I$. H orijini sabit bıraktığından Lemma 18.3 ispatının dördüncü adımı uygulanır:

$$H(\mathbf{p}) = p_1\,H(\mathbf{u}_1) + p_2\,H(\mathbf{u}_2) + p_3\,H(\mathbf{u}_3) = p_1\mathbf{u}_1 + p_2\mathbf{u}_2 + p_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{p}.$$

Sonuç. $G^{-1}F = I$; soldan G uygulanınca $F = G$. Bir izometri, dört noktadaki değerleriyle tamamen belirlenir; Örnek 18.9 ve Örnek 18.12 bu olguyu kullanıyordu.
■

Alıştırma 18.21 (İki Yansımanın Bileşkesi Bir Dönmedir). S_1, xz düzlemine göre yansıma; S_2 de z eksenini içeren ve xz düzlemiyle φ açısı yapan düzleme, yani $\mathbf{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ normalli düzleme göre yansıma olsun. S_2S_1 bileşkesinin z ekseni çevresinde 2φ açısıyla dönme olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
S_1. xz düzleminin normali $\mathbf{u}_2$'dir; Örnek 18.7 formülü $S_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2p_2\,\mathbf{u}_2 = (p_1, -p_2, p_3)$ verir.
S_2*'nin matrisi.* j-inci sütun $S_2(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j - 2n_j\,\mathbf{n}$'dir. Girdiler

$$1 - 2\sin^2\varphi = \cos 2\varphi, \qquad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi, \qquad 1 - 2\cos^2\varphi = -\cos 2\varphi$$

özdeşlikleriyle sadeleşir:

$$S_2 = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denetim: S_2, düzlemdeki $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ noktasını yerinde bırakır, çünkü bu nokta $\mathbf{n}$'ye diktir.
Bileşke. S_1'in matrisi $\operatorname{diag}(1, -1, 1)$'dir; sağdan bu matrisle çarpmak ikinci sütunun işaretini değiştirir:

$$S_2S_1 = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu, $\vartheta = 2\varphi$ için C_z matrisidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

> *Yorum.* Aralarında φ açısı olan iki aynada art arda yansımak, aynaların kesişme doğrusu çevresinde 2φ kadar döndürmektir. Determinantlar da uyumludur: $(-1)(-1) = 1$. Sıra değişince dönme yönü de değişir: $S_1 S_2$, -2φ açısıyla dönmedir. Örneğin $\varphi = \pi/4$ için S_2, x ile y'nin yerini değiştirir ve $S_2 S_1(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, p_3)$ dik açılık dönmedir.
> ■

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$'ün bütün izometrilerini bulduk: her biri bir ortogonal dönüşüm ile bir ötelemenin bileşkesidir ve bir nokta ile bir ortogonal matrisle açıkça yazılır. Sıradaki bölümde (Bir İzometrinin Teğet Dönüşümü) bir izometrinin teğet vektörleri nasıl taşıdığına bakacağız: teğet dönüşümü her noktada aynı ortogonal kısımla çalışır ve bu yüzden iç çarpımları ve çatıları korur.

 CC BY-NC-SA 4.0

19. Bir İzometrinin Teğet Dönüşümü

Önceki bölümde (Öklid Uzayının İzometrileri) uzaklığı koruyan dönüşümleri, yani izometrileri inceledik ve en önemli sonuca ulaştık: $\mathbb{R}^3$'ün her izometrisi bir ortogonal dönüşümün ardından uygulanan bir ötelemedir ve $F = TC$ yazılışı tektir (Teorem 18.2). C'ye F'nin ortogonal kısmı, T'ye öteleme kısmı dedik (Tanım 18.4). Bu bölümde bu ayrışımı noktalardan teğet vektörlere taşıyoruz.

Dönüşümler bölümünde her dönüşümün bir teğet dönüşümü olduğunu gördük (Tanım 7.3): F_*, $\mathbf{p}$ noktasındaki her teğet vektörü $F(\mathbf{p})$ noktasındaki bir teğet vektöre götürür ve her noktada lineerdir. Genel bir dönüşümde bu lineer dönüşüm noktadan noktaya değişir. Jacobi matrisinin girdileri $\mathbf{p}$'nin fonksiyonlarıdır; dönüşüm bir yerde okları uzatırken başka bir yerde kısaltır, bir yerde sağa başka bir yerde sola çevirir. İzometrilerde ise tablo şaşırtıcı derecede sadedir: teğet dönüşümü her noktada aynı ortogonal dönüşümdür ve noktaya bağlı olan tek şey okun nereye yerleştirildiğidir.

Bu bölümde teğet vektör ile nokta arasındaki ayrım çok önemli olduğundan uygulama noktasını gösterimde yeniden açıkça yazacağız. $\mathbf{v}_\mathbf{p}$, vektör kısmı $\mathbf{v}$ olan ve $\mathbf{p}$'de uygulanan teğet vektördür; $\mathbf{v}$ ise $\mathbb{R}^3$'ün bir noktasıdır. F noktalara, F_* ise teğet vektörlere uygulanır; ikisini karıştırmamak bu bölümün bütün hesaplarının anahtarıdır.

Plan şöyle. Önce teğet dönüşümünün formülünü ispatlayıp düzlemde dönme, vida hareketi, bir köşegen etrafında dönme ve yansıma örneklerinde göreceğiz. Ardından izometrilerin teğet vektörlerin iç çarpımlarını, dolayısıyla uzunluklarını, açılarını ve çatıları koruduğunu göstereceğiz. Son olarak, iki noktanın tek bir öteleme belirlemesine benzer biçimde, iki çatının tek bir izometri belirlediğini ispatlayıp bu izometriyi duruş matrisleriyle hesaplayacağız.

19.1 Teğet Dönüşümünün Formülü

Elimizde iki hazır hesap var. Bir öteleme okları paralel taşır: $\mathbf{a}$ ile öteleme için $T_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}+\mathbf{a}}$ (Örnek 7.8). Lineer bir L dönüşümü ise okun vektör kısmına kendisini uygular ve oku $L(\mathbf{p})$'ye yerleştirir: $L_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = L(\mathbf{v})_{L(\mathbf{p})}$ (Alıştırma 7.10). Bir izometri bu iki türün bileşkesi olduğuna göre teğet dönüşümünün de ikisinin birleşimi olmasını bekleriz. Önce düzlemde bir örnekle bakalım; izometri ve ortogonal dönüşüm tanımları $\mathbb{R}^2$'de de kelimesi kelimesine geçerlidir.

Örnek 19.1 (Düzlemde Bir Dönme ve Öteleme). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$F(x,y) = \left(\frac{3x-4y}{5} + 5,\ \frac{4x+3y}{5}\right)$$

ile verilsin. $\mathbf{v} = (2,1)$ vektör kısmını $\mathbf{p} = (-2,1)$ ve $\mathbf{q} = (1,-1)$ noktalarına uygulayıp F_* altındaki görüntüleri tanımdan hesaplayalım ve sonucu F'nin ayrışımıyla karşılaştıralım.

Çözüm.
Ayrışım. $F(\mathbf{r}) = C(\mathbf{r}) + (5,0)$ yazılır; burada

$$C(x,y) = \left(\frac{3x-4y}{5},\ \frac{4x+3y}{5}\right)$$

lineerdir; yani $F = TC$, burada T, $\mathbf{a} = (5,0)$ ile ötelemedir. C iç çarpımları korur: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ için

$$\begin{aligned} 25\, C(\mathbf{x}) \cdot C(\mathbf{y}) &= (3x_1 - 4x_2)(3y_1 - 4y_2) + (4x_1 + 3x_2)(4y_1 + 3y_2) \\ &= 25\, x_1 y_1 + 25\, x_2 y_2, \end{aligned}$$

çünkü x_1y_2 ve x_2y_1 içeren karışık terimler (∓ 12 katsayılarıyla) birbirini götürür. C, düzlemin $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$ olan $\varphi \approx 53{,}13°$ açılı dönmesidir; F ise bu dönmenin ardından $(5,0)$ ile ötelemedir.
$\mathbf{p}$'de tanımdan. $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (-2+2t,\ 1+t)$. Payları hesaplayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$3(-2+2t)-4(1+t)=-10+2t, \qquad 4(-2+2t)+3(1+t)=-5+11t.$$

Böylece

$$F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=\left(3+\frac{2t}{5},-1+\frac{11t}{5}\right).$$

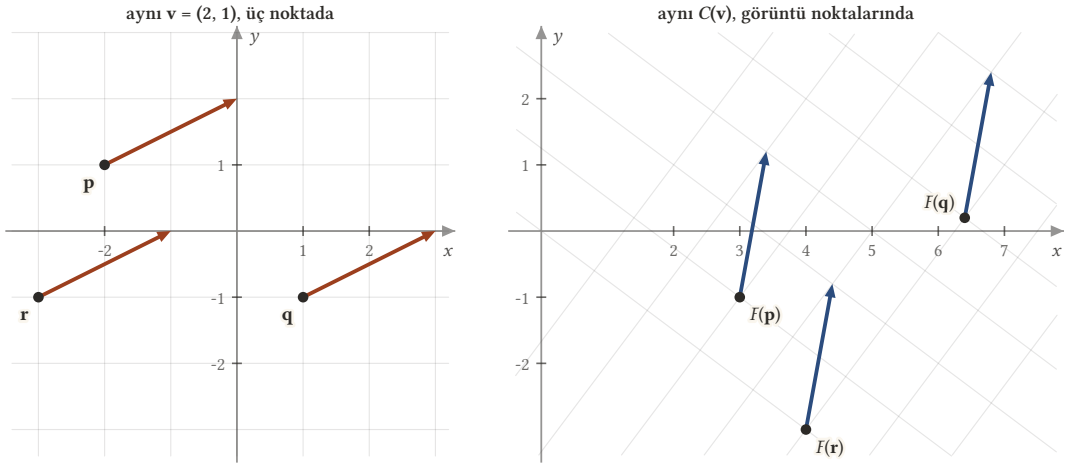
Bu, $(3,-1)$ noktasından geçen bir doğrudur; $t=0$'daki hızı $(2/5,11/5)$'tir. Tanım gereği $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})=(2/5,11/5)_{(3,-1)}$.
$\mathbf{q}$'da tanımdan. $\mathbf{q}+t\mathbf{v}=(1+2t,-1+t)$ için paylar $7+2t$ ve $1+11t$ olur:

$$F(\mathbf{q}+t\mathbf{v})=\left(\frac{32}{5}+\frac{2t}{5},\frac{1}{5}+\frac{11t}{5}\right).$$

Hız yine $(2/5,11/5)$'tir; bu kez $F(\mathbf{q})=(32/5,1/5)$ noktasında uygulanır.
Karşılaştırma. $C(\mathbf{v})$'nin koordinatları $(6-4)/5=2/5$ ve $(8+3)/5=11/5$'tir. İki noktada da görüntü okunun vektör kısmı $C(\mathbf{v})=(2/5,11/5)$'tir; değişen yalnızca uygulama noktasıdır. Uzunluk da korunur: $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{5}$ ve $\|C(\mathbf{v})\|=(4+121)/25=5$.
Jacobi matrisi. Kısmi türevler sabittir:

$$J_F(\mathbf{r})=\begin{pmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{pmatrix} \quad \text{her } \mathbf{r} \text{ için .}$$

Bu, C'nin matrisidir. $F(u,v)=(u+v,uv)$ gibi genel bir dönüşümde ise Jacobi matrisi noktayla değişiyordu (Örnek 7.12).



Şekil 19.1: Düzlemde $F(x,y)=((3x-4y)/5+5,(4x+3y)/5)$ izometrisi. Solda aynı $\mathbf{v}=(2,1)$ vektör kısmı $\mathbf{p}=(-2,1)$, $\mathbf{q}=(1,-1)$ ve $\mathbf{r}=(-3,-1)$ noktalarına uygulanmıştır. Sağda F-altındaki görüntüleri: üç ok da aynı $C(\mathbf{v})=(0{,}4;2{,}2)$ vektör kısmına sahiptir ve $F(\mathbf{p})=(3,-1)$, $F(\mathbf{q})=(6{,}4;0{,}2)$, $F(\mathbf{r})=(4,-3)$ noktalarında uygulanır. Paralel oklar paralel oklara gider. Soldaki silik ızgara, sağda bütünüyle dönmüş ve kaymış bir ızgaraya dönüşür; iki panelin ölçeği aynıdır.

■

Örnekte gördüğümüz, her izometri için doğrudur.

Teorem 19.1 (İzometrinin Teğet Dönüşümü). *F, $\mathbb{R}^3$'ün ortogonal kısmı C olan bir izometrisi olsun. $\mathbb{R}^3$'e teğet her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ vektörü için*

$$F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})=C(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Ayrışım. *Teorem 18.2 gereği $F = TC$ yazalım; T, bir $\mathbf{a}$ noktası ile öteleme olsun. Her $\mathbf{p}$ için $F(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + C(\mathbf{p})$.*
Görüntü eğrisi. *Tanım 7.3 gereği $F_*(\mathbf{v_p})$, $\beta(t) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ eğrisinin $t = 0$ anındaki hız vektörüdür. C lineer olduğundan $C(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = C(\mathbf{p}) + t\,C(\mathbf{v})$ ve*

$$\beta(t) = \mathbf{a} + C(\mathbf{p}) + t\,C(\mathbf{v}) = F(\mathbf{p}) + t\,C(\mathbf{v}).$$

Hız. *β, $F(\mathbf{p})$'den geçen ve $C(\mathbf{v})$ doğrultusundaki doğrudur. i-inci koordinatı $F(\mathbf{p})_i + t\,C(\mathbf{v})_i$ olup türevi $C(\mathbf{v})_i$'dir ve t'ye bağlı değildir. $t = 0$'da $\beta(0) = F(\mathbf{p})$ olduğundan hız vektörü $F(\mathbf{p})$'de uygulanır (Tanım 4.2):*

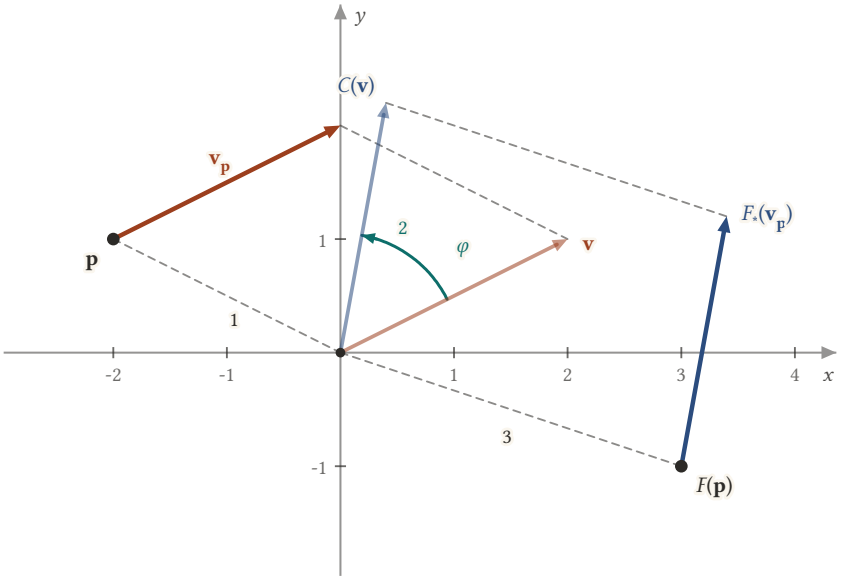
$$F_*(\mathbf{v_p}) = \beta'(0) = C(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})}.$$

İkinci yol. *Aynı sonuca genel zincir kuralıyla da ulaşılır. $F = T \circ C$ olduğundan Alıştırma 7.16 gereği $F_* = T_* \circ C_*$. C lineer olduğundan $C_*(\mathbf{v_p}) = C(\mathbf{v})_{C(\mathbf{p})}$ (Alıştırma 7.10); öteleme okları paralel taşıdığından da $T_*(\mathbf{w_q}) = \mathbf{w_{q+a}}$ (Örnek 7.8). Birleştirirsek*

$$F_*(\mathbf{v_p}) = T_*\left(\,C(\mathbf{v})_{C(\mathbf{p})}\,\right) = C(\mathbf{v})_{C(\mathbf{p})+\mathbf{a}} = C(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})}.$$

■

Yani $F_*(\mathbf{v_p})$'yi üç adımda buluruz. Önce $\mathbf{v_p}$ okunu başlangıç noktasına kaydırıp onu $\mathbf{v}$ noktası olarak düşünürüz; sonra bu noktaya F'nin ortogonal kısmı C'yi uygularız; son olarak $C(\mathbf{v})$ noktasını yeniden bir oka çevirip $F(\mathbf{p})$'ye yerleştiririz. Öteleme kısmı T ikinci adımda hiç görünmez: okun yönünü ve uzunluğunu yalnızca C belirler, T ise yalnızca okun yeni uygulama noktasına katkıda bulunur.
Teoremin en çarpıcı tarafı şudur: $\mathbb{R}^3$'ün bütün noktalarındaki teğet vektörler F_* tarafından tamamen aynı biçimde "döndürülür". $\mathbf{p}$'ye bağlı olan tek şey yeni uygulama noktası $F(\mathbf{p})$'dir. Özel olarak paralel oklar, yani vektör kısımları aynı, uygulama noktaları farklı oklar, yine paralel oklara gider: görüntülerin vektör kısmı aynı $C(\mathbf{v})$'dir ve F birebir olduğundan uygulama noktaları yine farklıdır. Örnek 19.1 bunu sayılarla göstermişti.



Şekil 19.2: Teğet dönüşümünün üç adımı, düzlemdeki örneğin verileriyle: C, $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$ olan dönme, F ise bu dönmenin ardından (5, 0) ile ötelemedir. $\mathbf{p}$ = (−2, 1) noktasındaki $\mathbf{v_p}$ (turuncu) önce başlangıç noktasına kaydırılır ve $\mathbf{v}$ = (2, 1) noktası olur (1), sonra C ile döndürülür ve $C(\mathbf{v})$ = (0,4; 2,2) olur (2), son olarak $F(\mathbf{p})$ = (3, −1) noktasına taşınır (3). Mavi ok $F_*(\mathbf{v_p})$'dir; okun yönünü ve uzunluğunu yalnızca C belirler, öteleme yalnızca okun yerini değiştirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teoremi Öklid koordinatlarıyla yazalım. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ birim noktaları ve (c_{ij}), C'nin doğal tabana göre matrisi olsun; yani $C(\mathbf{u}_j) = \sum_i c_{ij}\,\mathbf{u}_i$. Bu matris C'yi tamamen belirler: $\mathbf{v}$ sütun vektörü olarak yazılınca $C(\mathbf{v})$, $(c_{ij})\,\mathbf{v}$ matris çarpımıdır.

Sonuç 19.1 (Koordinatlarla Teğet Dönüşümü). *F, ortogonal kısmının matrisi (c_{ij}) olan bir izometri olsun. Her $\mathbf{p}$ noktası ve her v_1, v_2, v_3 sayısı için*

$$F_*\Big(\sum_{j=1}^{3} v_j\, U_j(\mathbf{p})\Big) = \sum_{i,j=1}^{3} c_{ij}\, v_j\, U_i\ \big(\ F(\mathbf{p})\ \big)\ .$$

Özel olarak F'nin Jacobi matrisi her noktada (c_{ij})'dir.

> ***İspat.***
> Vektör kısmı. *Sol yandaki teğet vektörün vektör kısmı $\mathbf{v} = \sum_j v_j\,\mathbf{u}_j$'dir (Sonuç 2.1). C lineer olduğundan*
>
> $$C(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{3} v_j\, C(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, v_j\Big)\,\mathbf{u}_i.$$
>
> Teorem. *Teorem 19.1 gereği $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = C(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})}$. Koordinatları $\sum_j c_{ij}v_j$ olan ve $F(\mathbf{p})$'de uygulanan bu teğet vektör, Sonuç 2.1 gereği $\sum_i \big(\sum_j c_{ij}v_j\ \big)\,U_i(F(\mathbf{p}))$'dir.*
> Jacobi matrisi. *Sonuç 7.3 gereği $J_F(\mathbf{p})$'nin j-inci sütunu $F_*(U_j(\mathbf{p}))$'nin vektör kısmıdır. Formülde $v_j = 1$, öteki katsayıları 0 alırsak bu vektör kısmının i-inci koordinatı c_{ij} çıkar; yani $J_F(\mathbf{p})$'nin j-inci sütunu (c_{ij})'nin j-inci sütunudur.*
> ■

Formülün iki yanında doğal çatı farklı noktalarda değerlendirilir: solda U_j alanları $\mathbf{p}$'de, sağda U_i alanları $F(\mathbf{p})$'de. Bir izometrinin Jacobi matrisi böylece sabittir; Örnek 7.12 ile karşılaştırınca bu, izometrilerin dönüşümler arasında ne kadar özel olduğunu gösterir. Şimdi uzayda üç örneğe bakalım.

Örnek 19.2 (Helisi Kendi Üzerinde Kaydıran Vida Hareketi). $F(x,y,z) = (-y, x, z + \pi/2)$ olsun. F'nin bir izometri olduğunu, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisini kendi üzerinde kaydırdığını gösterelim ve $F_*(\alpha'(t))$'yi helisin başka bir andaki hızıyla karşılaştıralım.

> **Çözüm.**
> *Ayrışım.* $C(x,y,z) = (-y,x,z)$ lineerdir; birim noktalarda $C(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$, $C(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_1$ ve $C(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3$ verir. Matrisi aşağıdadır ve iç çarpımı korur:
>
> $$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C(\mathbf{x})\cdot C(\mathbf{y}) = x_2y_2 + x_1y_1 + x_3y_3.$$
>
> C, z ekseni etrafında $\pi/2$ açılı dönmedir ve $F = TC$, burada T, $(0,0,\pi/2)$ ile ötelemedir. Önce z ekseni etrafında dönüp sonra bu eksen boyunca kayan bu harekete **vida hareketi** (screw motion) denir.
> *İzometri olduğu.* C lineerdir ve iç çarpımı korur, yani bir ortogonal dönüşümdür; dolayısıyla bir izometridir (Teorem 18.1). T de bir izometridir (Önerme 18.1) ve izometrilerin bileşkesi izometridir (Sonuç 18.1). Demek ki $F = TC$ bir izometridir.
> *Helis kendi üzerine gider.* $\cos(t+\pi/2) = -\sin t$ ve $\sin(t+\pi/2) = \cos t$ olduğundan
>
> $$F(\alpha(t)) = (-\sin t, \cos t, t + \pi/2) = \alpha(t + \pi/2).$$
>
> F, helisin her noktasını çeyrek tur ilerideki noktaya götürür; helisin rotası bir bütün olarak yerinde kalır.
> *Hızlar.* $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)_{\alpha(t)}$. Teorem 19.1 gereği
>
> $$F_*(\alpha'(t)) = C(-\sin t, \cos t, 1)_{F(\alpha(t))} = (-\cos t, -\sin t, 1)_{\alpha(t+\pi/2)}.$$
>
> Öte yandan $\alpha'(t+\pi/2)$ teğet vektörü $\alpha(t+\pi/2)$'de uygulanır ve vektör kısmı
>
> $$\big(\ -\sin(t+\pi/2), \cos(t+\pi/2), 1\ \big) = (-\cos t, -\sin t, 1)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. İkisi aynıdır, Sonuç 7.2 ile de uyumlu olarak: $F(\alpha)$ eğrisinin t anındaki hızı, α'nın $t+\pi/2$ anındaki hızıdır.
Bir an. $t=0$'da $\alpha(0)=(1,0,0)$ ve $\alpha'(0)=(0,1,1)_{(1,0,0)}$. Görüntü $F_*(\alpha'(0))=(-1,0,1)_{(0,1,\pi/2)}$'dir; bu da $\alpha'(\pi/2)$'dir.
Bütün bir aile. Aynı hesap her θ için z ekseni etrafında θ açılı dönmenin ardından $(0,0,\theta)$ ile ötelemenin $\alpha(t)$'yi $\alpha(t+\theta)$'ya götürdüğünü gösterir. Helisin her noktası, bir izometriyle öbür her noktasına taşınabilir ve bu izometri helisi kendi üzerine götürür. Helisin bütün noktalarında aynı görünmesi, eğrilik ve burulmasının sabit çıkmasıyla (Örnek 11.5) uyumludur.
■

Örnek 19.3 (Köşegen Çevresinde Dönmenin Teğet Dönüşümü). $F(x,y,z)=(z+1,x,y-1)$ olsun. F'nin ortogonal kısmını bulalım, F_*'ın doğal çatıyı nasıl taşıdığını görelim, $\mathbf{p}=(1,2,3)$ ve $\mathbf{v}=(1,-1,2)$ için $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})$'yi hesaplayalım; son olarak F'nin sabit noktalarında teğet dönüşümünün ne yaptığını görelim.

Çözüm.
Ayrışım. $C(x,y,z)=(z,x,y)$ ve $\mathbf{a}=(1,0,-1)$ için $F=TC$. C, $(1,1,1)$ doğrultusundaki köşegen çevresinde $2\pi/3$ açısıyla, yani 120° dönmedir (Örnek 18.13); koordinatların yerini döngüsel olarak değiştirir. Birim noktalarda

$$C(\mathbf{u}_1)=\mathbf{u}_2,\qquad C(\mathbf{u}_2)=\mathbf{u}_3,\qquad C(\mathbf{u}_3)=\mathbf{u}_1.$$

Doğal çatı. Sonuç 19.1 gereği her $\mathbf{p}$ noktasında

$$F_*(U_1(\mathbf{p}))=U_2(F(\mathbf{p})),\quad F_*(U_2(\mathbf{p}))=U_3(F(\mathbf{p})),\quad F_*(U_3(\mathbf{p}))=U_1(F(\mathbf{p})).$$

Bir vektör, iki yoldan. $F(\mathbf{p})=(3+1,1,2-1)=(4,1,1)$ ve $C(\mathbf{v})=(2,1,-1)$; teorem $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})=(2,1,-1)_{(4,1,1)}$ verir. Tanımla: $\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(1+t,2-t,3+2t)$ ve

$$F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=(4+2t,1+t,1-t);$$

hız $(2,1,-1)$'dir. Aynı sonuç.
Sabit noktalar. $F(x,y,z)=(x,y,z)$ koşulu $z+1=x$, $x=y$, $y-1=z$ denklemlerine denktir; çözümler $(s,s,s-1)$ noktalarıdır. F, $(0,0,-1)$'den geçen ve $(1,1,1)$ doğrultusundaki ℓ doğrusunun her noktasını yerinde bırakır.
Kaydırılmış eksen. $\mathbf{r}_0\in\ell$ ve herhangi bir $\mathbf{w}$ için

$$F(\mathbf{r}_0+\mathbf{w})=F(\mathbf{r}_0)+C(\mathbf{w})=\mathbf{r}_0+C(\mathbf{w}).$$

F, ℓ'nin noktalarını sabit tutar ve ℓ'den ölçülen yer değiştirmeyi C ile döndürür. Örnek 18.15 içindeki dönme gibi, F de kaydırılmış bir eksen, burada köşegene paralel ℓ doğrusu çevresinde 120° dönmedir.
Sabit bir noktada teğet dönüşümü. $\mathbf{r}_0\in\ell$ ise $F(\mathbf{r}_0)=\mathbf{r}_0$ ve F_*, $T_{\mathbf{r}_0}(\mathbb{R}^3)$'ü kendisine götürür: eksen doğrultusundaki $(1,1,1)_{\mathbf{r}_0}$ okunu sabit tutar, ona dik düzlemdeki okları 120° döndürür.
■

Örnek 19.4 (Bir Düzlemde Yansıma). $F(x,y,z)=(z+2,y,x-2)$ olsun. F'nin $x-z=2$ düzlemindeki yansıma olduğunu gösterelim, ortogonal kısmını bulalım ve aynanın bir noktasında teğet dönüşümünün ne yaptığını görelim.

Çözüm.
Ayrışım. $C(x,y,z)=(z,y,x)$ birinci ile üçüncü koordinatın yerini değiştirir; lineerdir ve iç çarpımı korur. $\mathbf{a}=(2,0,-2)$ için $F=TC$ ve teorem gereği $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})=(v_3,v_2,v_1)_{F(\mathbf{p})}$.
Sabit noktalar. $F(x,y,z)=(x,y,z)$ ancak ve ancak $z+2=x$ (ve buna denk olarak $x-2=z$) ise; yani sabit noktalar tam olarak $P: x-z=2$ düzlemidir.
Yansıma olduğu. $\mathbf{p}=(x,y,z)$ için

$$F(\mathbf{p})-\mathbf{p}=(z+2-x,0,x-2-z)=-(x-z-2)\,(1,0,-1).$$

Bu fark P'nin normali $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$'e paraleldir. Orta noktanın birinci koordinatı $(x + z + 2)/2$, üçüncüsü $(x + z - 2)/2$'dir ve farkları 2'dir; orta nokta P üzerindedir. Demek ki $\mathbf{p}$ ile $F(\mathbf{p})$, P'ye göre birbirinin ayna görüntüsüdür. Örneğin başlangıç noktası $(2, 0, -2)$'ye gider ve orta nokta $(1, 0, -1)$ aynanın üzerindedir.
Aynada teğet dönüşümü. $\mathbf{p}_0 = (3, 1, 1)$ noktası P üzerindedir $(3 - 1 = 2)$ ve $F(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$. Bu noktada F_*, $T_{\mathbf{p}_0}(\mathbb{R}^3)$'ü kendisine götürür:

- aynaya teğet $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$ için $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0)$ $C(\mathbf{w}) = (1, 0, 1)$: ok yerinde kalır;
- $U_2(\mathbf{p}_0)$ de aynaya teğettir ve yerinde kalır;
- normal ok $\mathbf{n}_{\mathbf{p}_0}$ ise $C(\mathbf{n}) = (-1, 0, 1) = -\mathbf{n}$ olduğundan ters çevrilir.

Yani aynanın bir noktasında teğet dönüşümü, o noktadaki teğet uzayının teğet düzleme göre yansımasıdır.
Genel formül. Birim normali $\mathbf{n}$ olan $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$ düzlemindeki yansıma

$$R(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - 2\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - d)\,\mathbf{n} = \big[\ \mathbf{r} - 2\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}\ \big] + 2d\,\mathbf{n}$$

biçiminde yazılır: $R(\mathbf{r}) - \mathbf{r}$ farkı $\mathbf{n}$'ye paraleldir ve orta nokta için

$$\frac{1}{2}\,\big(\ \mathbf{r} + R(\mathbf{r})\ \big) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - d) = d,$$

yani orta nokta aynadadır. Köşeli parantez, aynaya paralel olup başlangıç noktasından geçen düzlemdeki yansımadır (Örnek 18.7); ortogonal kısım odur. $2d\,\mathbf{n}$ ise öteleme kısmıdır. Bizim düzlemimiz için $\mathbf{n} = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$, $d = \sqrt{2}$; köşeli parantez $(x, y, z) - (x - z)(1, 0, -1)$, yani (z, y, x) olur ve $2d\,\mathbf{n} = (2, 0, -2)$. Teorem gereği her yansımada $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \big(\ \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}\big)_{F(\mathbf{p})}$.
■

19.2 İç Çarpımlar ve Çatılar Korunur

Bir ortogonal dönüşüm, tanımı gereği noktaların iç çarpımlarını korur (Tanım 18.3). Teğet dönüşümünün formülü bu özelliği hemen teğet vektörlere taşır.

Sonuç 19.2 (İzometriler İç Çarpımı Korur). *F, $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi ve $\mathbf{v}_\mathbf{p}$, $\mathbf{w}_\mathbf{p}$ aynı $\mathbf{p}$ noktasındaki iki teğet vektör olsun. O zaman*

$$F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) \cdot F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p}) = \mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_\mathbf{p}.$$

İspat.
C, F'nin ortogonal kısmı olsun. Teorem 19.1 gereği $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = C(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})}$ ve $F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p}) = C(\mathbf{w})_{F(\mathbf{p})}$; ikisi de aynı $F(\mathbf{p})$ noktasında uygulanır, dolayısıyla iç çarpımları tanımlıdır. Teğet vektörlerin iç çarpımının tanımını (Tanım 9.4) iki kez kullanarak

$$\begin{aligned} F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) \cdot F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p}) &= C(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})} \cdot C(\mathbf{w})_{F(\mathbf{p})} = C(\mathbf{v}) \cdot C(\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_\mathbf{p} \end{aligned}$$

bulunur. Ortadaki eşitlik, C'nin iç çarpımları korumasıdır.
■

Yani bir izometri, aynı noktadaki iki okun iç çarpımını değiştirmez: okları başka bir noktaya taşır ve döndürür, ama aralarındaki ölçüm ilişkilerine dokunmaz.
İç çarpımdan türetilen her kavram da kendiliğinden korunur. Uzunluk iç çarpımın karekökü olduğundan $\| F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) \| = \| \mathbf{v}_\mathbf{p} \|$. Sıfırdan farklı iki ok arasındaki açının kosinüsü iç çarpım ve uzunluklardan hesaplandığından (Tanım 9.5) açı da korunur; özel olarak dik oklar dik oklara gider. Eğriler için de bir sonuç çıkar: $\beta = F(\alpha)$ ise $\beta'(t) = F_*(\alpha'(t))$ (Sonuç 7.2), dolayısıyla $\| \beta'(t) \| = \| \alpha'(t) \|$. Bir izometri eğrilerin süratini ve bu yüzden yay uzunluklarını (Tanım 10.1) korur.

Örnek 19.5 (Uzunluk ve Açı Hesabı). z ekseni etrafında $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$ açılı dönmenin ardından $(1, 1, 1)$ ile öteleme olan

$$F(x,y,z)=\left(\frac{3x-4y}{5}+1,\ \frac{4x+3y}{5}+1,\ z+1\right)$$

izometrisini alalım. $\mathbf{p}=(1,1,0)$ noktasında $\mathbf{v}=(1,2,2)$ ve $\mathbf{w}=(2,-1,1)$ vektör kısımlı okların ve görüntülerinin iç çarpımlarını, uzunluklarını ve aralarındaki açıyı karşılaştıralım.

Çözüm.
Görüntüler. Ortogonal kısım C, ilk iki koordinata Örnek 19.1 içindeki dönmeyi uygular ve üçüncüye dokunmaz. $C(\mathbf{p})=(-1/5,7/5,0)$ olduğundan $F(\mathbf{p})=(4/5,12/5,1)$ ve

$$C(\mathbf{v})=\left(\frac{3-8}{5},\frac{4+6}{5},2\right)=(-1,2,2),\qquad C(\mathbf{w})=\left(\frac{6+4}{5},\frac{8-3}{5},1\right)=(2,1,1).$$

Teorem gereği $F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})=(-1,2,2)_{F(\mathbf{p})}$ ve $F_*(\mathbf{w}_\mathbf{p})=(2,1,1)_{F(\mathbf{p})}$.
İç çarpımlar. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=2-2+2=2$ ve $C(\mathbf{v})\cdot C(\mathbf{w})=-2+2+2=2$.
Uzunluklar. $\|\,\mathbf{v}\,\|=\sqrt{1+4+4}=3$ ve $\|\,C(\mathbf{v})\,\|=\sqrt{1+4+4}=3$; $\|\,\mathbf{w}\,\|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ ve $\|\,C(\mathbf{w})\,\|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.
Açı. İki çiftte de

$$\cos\vartheta=\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}\approx 0{,}272,\qquad \vartheta\approx 74{,}2^\circ.$$

Vektör kısımlarının koordinatları değişti (her birinde bir koordinatın işareti döndü), ama iç çarpımdan hesaplanan her sayı aynı kaldı.
■

Örnek 19.6 (Bir Helisin Başka Bir Helise Gitmesi). $F(x,y,z)=(x,z+2,1-y)$ ve $\alpha(t)=(\cos t,\sin t,t)$ olsun. F'nin bir izometri olduğunu, $\beta=F(\alpha)$'nın başka bir eksen etrafında dolanan bir helis olduğunu gösterelim; β' ile $F_*(\alpha')$'yı ve iki eğrinin süratlerini karşılaştıralım. Önceki bölümde (Örnek 18.16) benzer bir helisin görüntüsünü doğrudan türevleyerek incelemiştik; burada aynı olguyu teğet dönüşümünden okuyoruz.

Çözüm.
Ayrışım. $C(x,y,z)=(x,z,-y)$ için $C(\mathbf{u}_1)=\mathbf{u}_1$, $C(\mathbf{u}_2)=-\mathbf{u}_3$, $C(\mathbf{u}_3)=\mathbf{u}_2$. Bu, x ekseni etrafında -90°'lik dönmedir (Örnek 18.6) ve iç çarpımı korur: $C(\mathbf{x})\cdot C(\mathbf{y})=x_1y_1+x_3y_3+x_2y_2$. $\mathbf{a}=(0,2,1)$ için $F=TC$.
İzometri olduğu. C lineer olup iç çarpımı koruduğundan bir ortogonal dönüşümdür, dolayısıyla bir izometridir (Teorem 18.1). Ötelemeler de izometridir (Önerme 18.1) ve izometrilerin bileşkesi izometridir (Sonuç 18.1). Demek ki $F=TC$ bir izometridir.
Görüntü eğrisi.

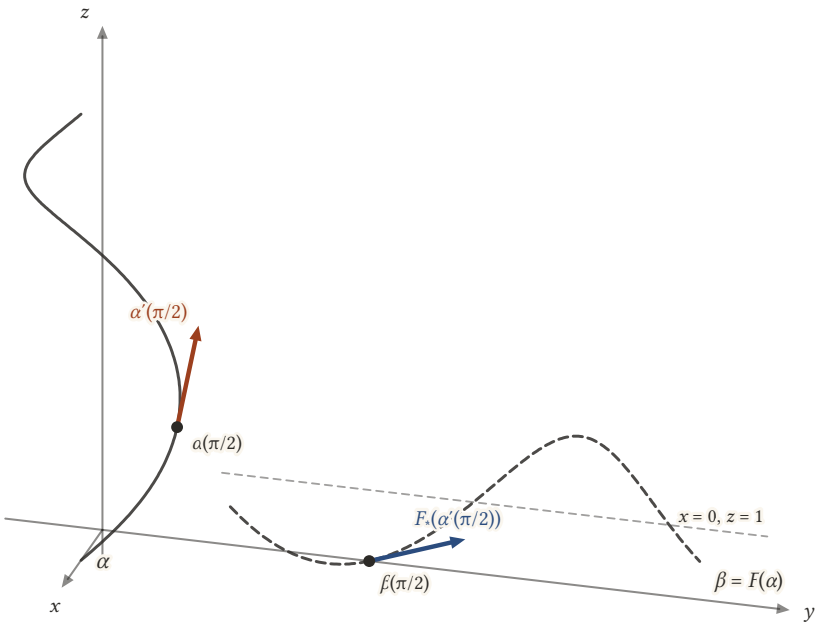
$$\beta(t)=F(\cos t,\sin t,t)=(\cos t,t+2,1-\sin t).$$

Her t için $x^2+(z-1)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$. β, $x=0$, $z=1$ doğrusu (y eksenine paralel) etrafındaki 1 yarıçaplı silindirin üzerindedir; açısı t ile dönerken y koordinatı da t ile ilerler. β, ekseni bu doğru olan bir helistir.
Hızlar. Doğrudan türevle $\beta'(t)=(-\sin t,1,-\cos t)_{\beta(t)}$. Teoremle

$$F_*(\alpha'(t))=C(-\sin t,\cos t,1)_{F(\alpha(t))}=(-\sin t,1,-\cos t)_{\beta(t)}.$$

İki yol aynı oku verir (Sonuç 7.2).
Süratler. $\|\,\alpha'(t)\,\|^2=\sin^2 t+\cos^2 t+1=2$ ve $\|\,\beta'(t)\,\|^2=\sin^2 t+1+\cos^2 t=2$; iki sürat de $\sqrt{2}$'dir. Bir tam turun yay uzunluğu iki eğride de $2\pi\sqrt{2}$'dir.
Bir an. $t=\pi/2$'de $\alpha(\pi/2)=(0,1,\pi/2)$ ve $\alpha'(\pi/2)=(-1,0,1)$; görüntüde $\beta(\pi/2)=(0,2+\pi/2,0)$ ve $\beta'(\pi/2)=(-1,1,0)$, yani $C(-1,0,1)$. İki okun uzunluğu da $\sqrt{2}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.3: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helisinin bir turu (düz) ve $F(x, y, z) = (x, z + 2, 1 - y)$ izometrisi altındaki görüntüsü $\beta(t) = (\cos t, t + 2, 1 - \sin t)$ (kesikli). β, $x = 0$, $z = 1$ doğrusu (silik kesikli) etrafında dolanan bir helistir. $t = \pi/2$ anında $\alpha'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$ (turuncu), F_* ile $(-1, 1, 0)$ okuna (mavi) gider; bu, $\beta'(\pi/2)$'dir. İki okun uzunluğu da $\sqrt{2}$'dir: izometri süratleri korur.

■

Bir dönüşümün açıları koruması onun izometri olması için yetmez; iç çarpımın kendisi korunmalıdır. Aşağıdaki örnek bu farkı gösterir.

Örnek 19.7 (Açıları Koruyan Ama İzometri Olmayan Bir Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$ olsun (Alıştırma 7.20). F_*'ın her noktada açıları koruduğunu ama uzunlukları e^u ile çarptığını gösterelim ve $\mathbf{p} = (\ln 2, \pi/2)$ noktasında sayılarla görelim.

Çözüm.
Jacobi matrisi. Kısmi türevlerden

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{pmatrix} = e^u \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}.$$

Sağdaki matris v açılı dönmedir; ona R_v diyelim. $\mathbf{p} = (u_0, v_0)$ noktasında $F_*(\mathbf{x}_\mathbf{p})$'nin vektör kısmı $e^{u_0} R_{v_0} \mathbf{x}$'tir.
İç çarpım. R_{v_0} iç çarpımı koruduğundan

$$F_*(\mathbf{x}_\mathbf{p}) \cdot F_*(\mathbf{y}_\mathbf{p}) = e^{2u_0}\, R_{v_0}\mathbf{x} \cdot R_{v_0}\mathbf{y} = e^{2u_0}\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Uzunluklar e^{u_0} ile çarpılır. Açının kosinüsünde pay ve payda aynı e^{2u_0} çarpanını aldığından açı değişmez. İç çarpım ancak $u_0 = 0$ olan noktalarda korunur.
Sayılarla. $\mathbf{p} = (\ln 2, \pi/2)$ için $e^{u_0} = 2$, $\cos v_0 = 0$, $\sin v_0 = 1$:

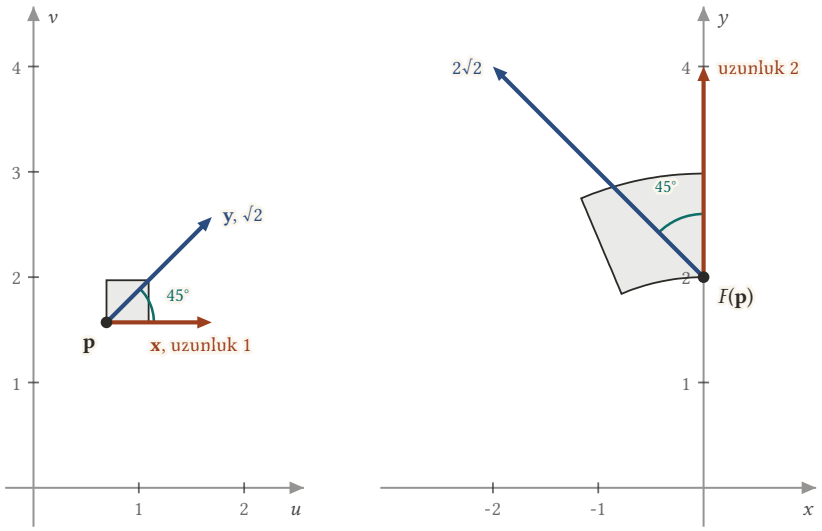
$$J_F(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(\mathbf{p}) = (0, 2).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$\mathbf{x} = (1,0)$ ve $\mathbf{y} = (1,1)$ için görüntülerin vektör kısımları $(0,2)$ ve $(-2,2)$'dir. İç çarpım 1'den 4'e, uzunluklar 1 ve $\sqrt{2}$'den 2 ve $2\sqrt{2}$'ye çıkar; açının kosinüsü ise iki durumda da $1/\sqrt{2}$'dir, yani açı 45° kalır.

İzometri değil. $F(0,0) = F(0,2\pi) = (1,0)$ olduğundan F birebir değildir. Oysa her G izometrisi birebirdir: $G(\mathbf{p}) = G(\mathbf{q})$ ise $d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = d(G(\mathbf{p}),G(\mathbf{q})) = 0$, yani $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Teğet vektörler de aynı farkı gösterir: $u_0 \neq 0$ olan noktalarda F_* iç çarpımı e^{2u_0} ile çarpar; $\mathbb{R}^3$'te bir izometrinin teğet dönüşümü ise iç çarpımı korur (Sonuç 19.2).

Açıları koruyan dönüşümlere **konform** (conformal) dönüşümler denir. Örnek, konform olmanın izometri olmaktan çok daha zayıf bir koşul olduğunu gösterir. Daha kötüsü de olabilir: $S(x,y) = (x+y, y)$ kayma dönüşümünde $S_*(U_1) = U_1$ ve $S_*(U_2) = U_1 + U_2$ olur; dik iki ok 45° açılı iki oka gider.



Şekil 19.4: $F(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$ dönüşümü $\mathbf{p} = (\ln 2, \pi/2)$ noktasında. Solda $\mathbf{p}$'deki $\mathbf{x} = (1, 0)$ ve $\mathbf{y} = (1, 1)$ okları ile kenarı 0,4 olan küçük bir kare; sağda $F(\mathbf{p}) = (0, 2)$ noktasındaki görüntü okları $(0, 2)$ ve $(-2, 2)$ ile karenin görüntüsü. İki panelin ölçeği aynıdır. Oklar 90° döner ve uzunlukları iki katına çıkar, ama aralarındaki 45°'lik açı korunur: F açıları korur ama iç çarpımı korumaz.

■

Bir çatı, iç çarpım koşullarıyla tanımlanır (Tanım 9.7): karşılıklı dik üç birim ok. Öyleyse iç çarpımı koruyan bir dönüşüm çatıları da korumalıdır.

Sonuç 19.3 (İzometriler Çatıları Çatılara Götürür). *e_1, e_2, e_3, $\mathbb{R}^3$'ün bir $\mathbf{p}$ noktasında bir çatı ve F, $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi olsun. O zaman $F_*(e_1), F_*(e_2), F_*(e_3)$, $F(\mathbf{p})$ noktasında bir çatıdır.*

İspat.
Üç ok da $F(\mathbf{p})$'de uygulanır. Çatı koşulu $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$'dir ve Sonuç 19.2 gereği

$$F_*(e_i) \cdot F_*(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \qquad (1 \le i, j \le 3).$$

Görüntü okları karşılıklı dik birim oklardır, yani $F(\mathbf{p})$'de bir çatıdır.
■

Yani bir izometri bir noktadaki "cetvel takımını" başka bir noktaya bozmadan taşır. Duruş matrisleri diliyle de söyleyelim. Bir çatının oklarıyla bu okların vektör kısımlarını ayırt etmek için e_i okunun vektör kısmını $\hat{\mathbf{e}}_i$ ile gösterelim; $\hat{\mathbf{e}}_i$, $\mathbb{R}^3$'ün bir noktasıdır ve $e_i = (\hat{\mathbf{e}}_i)_{\mathbf{p}}$. Çatının duruş matrisi A olsun (Tanım 9.8), yani A'nın i-inci satırı $\hat{\mathbf{e}}_i$ olsun. O zaman $F_*(e_i)$'nin vektör kısmı $C(\hat{\mathbf{e}}_i)$ olup k-inci koordinatı $\sum_l c_{kl}\, a_{il}$'dir. Bu, $A\,C^T$ matrisinin (i,k) girdisidir; görüntü çatının duruş matrisi $A\,C^T$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 19.8 (Yansıma Altında Bir Çatı). Örnek 19.4 içindeki $F(x,y,z) = (z+2, y, x-2)$ yansımasını ve $\mathbf{p} = (1,0,1)$ noktasında

$$e_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \qquad e_2 = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}, \qquad e_3 = (0,0,1)$$

çatısını alalım (Örnek 9.20). Görüntü çatıyı ve duruş matrisini bulalım; iki çatıda vektörel çarpımları karşılaştıralım.

Çözüm.
Görüntü noktası. $F(\mathbf{p}) = (1+2, 0, 1-2)$, yani $(3,0,-1)$. $\mathbf{p}$, $x - z = 0$ düzleminde, $F(\mathbf{p})$ ise $x - z = 4$ düzlemindedir; ayna $x - z = 2$ tam ortadadır.
Görüntü çatı. Ortogonal kısım $C(x,y,z) = (z,y,x)$ olduğundan

$$F_*(e_1) = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}, \qquad F_*(e_2) = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}, \qquad F_*(e_3) = (1,0,0),$$

üçü de $(3,0,-1)$'de. Denetim: uzunlukların kareleri $(0+1+1)/2 = 1$, 1 ve 1; karşılıklı iç çarpımlar $(0+1-1)/2 = 0$, 0 ve 0. Bir çatıdır.
Duruş matrisi. C'nin matrisi simetriktir ($C^T = C$) ve bir satır vektörünü sağdan C ile çarpmak koordinatların sırasını ters çevirir:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad A\,C^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satırlar tam olarak görüntü çatının vektör kısımlarıdır.
Vektörel çarpımlar. Özgün çatıda

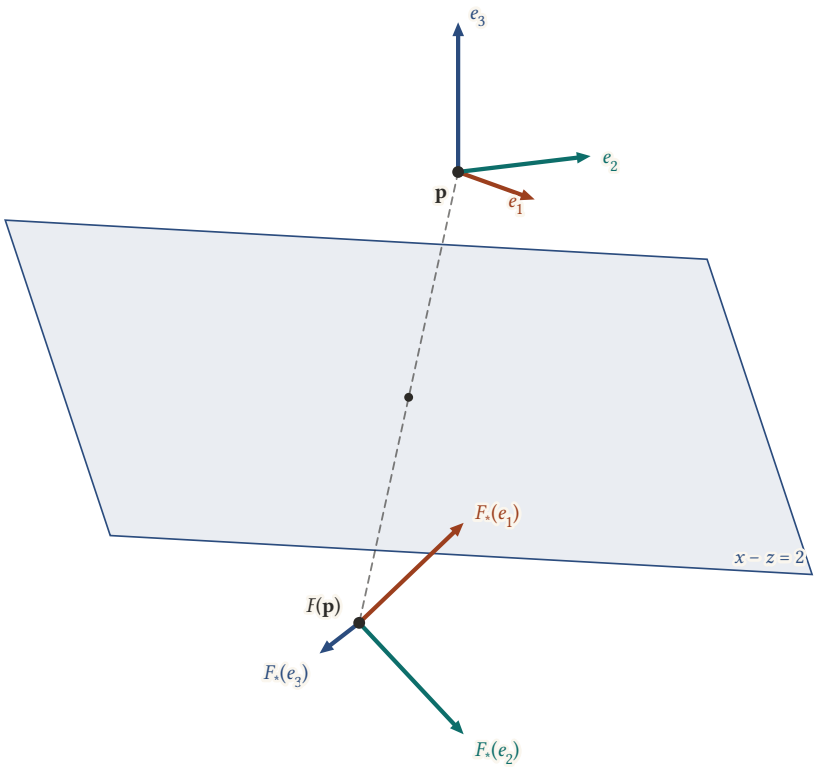
$$e_1 \times e_2 = \frac{1}{2}\,(1\cdot 0 - 0\cdot 1,\, 0\cdot(-1) - 1\cdot 0,\, 1\cdot 1 - 1\cdot(-1)) = (0,0,1) = e_3.$$

Görüntüde ise

$$F_*(e_1) \times F_*(e_2) = \frac{1}{2}\,(1\cdot(-1) - 1\cdot 1, 0, 0) = (-1,0,0) = -F_*(e_3).$$

Yansıma bütün iç çarpımları korudu, ama $e_1 \times e_2 = e_3$ bağıntısını işaret değiştirmiş bir bağıntıya çevirdi. Aynadaki sağ elin sol ele dönüşmesi gibi; bu farkı bir sonraki bölümde inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.5: $x - z = 2$ aynasındaki $F(x, y, z) = (z + 2, y, x - 2)$ yansıması. $\mathbf{p} = (1, 0, 1)$'deki e_1, e_2, e_3 çatısı (turuncu, yeşil, mavi), $F(\mathbf{p}) = (3, 0, -1)$'deki $(0, 1, 1)/\sqrt{2}$, $(0, 1, -1)/\sqrt{2}$, $(1, 0, 0)$ çatısına gider. Kesikli doğru parçası aynaya diktir ve aynayı orta noktası $(2, 0, 0)$'da keser. Görüntü yine bir çatıdır, ama $e_1 \times e_2 = e_3$ iken görüntüde birinci iki okun vektörel çarpımı üçüncünün tersidir.

■

19.3 İki Çatı Bir İzometri Belirler

Önceki bölümde iki noktanın tek bir öteleme belirlediğini gördük (Lemma 18.1): $\mathbf{p}$'yi $\mathbf{q}$'ya götüren tek öteleme, $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ ile ötelemedir. Gerçekten $\mathbf{a}$ ile öteleme $\mathbf{p}$'yi $\mathbf{p} + \mathbf{a}$'ya götürür ve $\mathbf{p} + \mathbf{a} = \mathbf{q}$ ancak $\mathbf{a} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ iken sağlanır. İzometriler için benzer bir sonuç vardır, ama noktalar yerine çatılarla. Bir izometrinin bir çatıyı bir çatıya götürdüğünü biliyoruz (Sonuç 19.3); şimdi tersini soruyoruz: iki çatı verildiğinde birini öbürüne götüren kaç izometri vardır?
İspatta da, Sonuç 19.3 sonrasında olduğu gibi, e_i okunun vektör kısmını $\hat{\mathbf{e}}_i$ ile, f_i okununkini $\hat{\mathbf{f}}_i$ ile göstereceğiz.

Teorem 19.2 (İki Çatıyı Eşleyen Tek İzometri). *e_1, e_2, e_3, $\mathbb{R}^3$'ün $\mathbf{p}$ noktasında ve f_1, f_2, f_3 de $\mathbf{q}$ noktasında iki çatı olsun. $1 \le i \le 3$ için*

$$F_*(e_i) = f_i$$

koşulunu sağlayan bir ve yalnız bir F izometrisi vardır.

İspat.
Vektör kısımları. $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ ve $\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2, \hat{\mathbf{f}}_3$ iki çatının vektör kısımları olsun. Teğet vektörlerin iç çarpımı vektör kısımlarınınki olduğundan $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$ ve $\hat{\mathbf{f}}_i \cdot \hat{\mathbf{f}}_j = \delta_{ij}$. Karşılıklı dik birim vektörler lineer bağımsızdır: $\sum_i x_i \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0}$ eşitliğini $\hat{\mathbf{e}}_j$ ile iç çarpınca $x_j = 0$ çıkar. Lemma 9.3 gereği $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ bir tabandır: her $\mathbf{x}$, tek türlü $\mathbf{x} = \sum_i x_i \hat{\mathbf{e}}_i$ biçiminde yazılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Ortogonal kısmın kurulması. $C(\mathbf{x}) = \sum_i x_i\,\hat{\mathbf{f}}_i$ *kuralıyla* $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tanımlayalım. Katsayılar tek olduğundan* C *iyi tanımlıdır;* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$*'nin katsayıları* $x_i + y_i$*,* $c\mathbf{x}$*'inkiler* $c\,x_i$ *olduğundan lineerdir ve* $C(\hat{\mathbf{e}}_i) = \hat{\mathbf{f}}_i$*. Bu koşulu sağlayan lineer dönüşüm de tektir: lineer bir* C' *için* $C(\hat{\mathbf{e}}_i) = C'(\hat{\mathbf{e}}_i)$ *ise* $C'(\mathbf{x}) = \sum_i x_i\,C'(\hat{\mathbf{e}}_i) = C(\mathbf{x})$.
C ortogonaldir. $\mathbf{x} = \sum_i x_i\hat{\mathbf{e}}_i$ *ve* $\mathbf{y} = \sum_j y_j\hat{\mathbf{e}}_j$ *için iç çarpımın bilineerliği*

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i,j} x_i y_j\,\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_i x_i y_i$$

verir. Aynı hesap $\hat{\mathbf{f}}$ *vektörleriyle*

$$C(\mathbf{x})\cdot C(\mathbf{y}) = \sum_{i,j} x_i y_j\,\hat{\mathbf{f}}_i\cdot\hat{\mathbf{f}}_j = \sum_i x_i y_i$$

verir. İki sonuç eşittir; C *bir ortogonal dönüşümdür.*
Öteleme kısmı. T, $\mathbf{q} - C(\mathbf{p})$ *ile öteleme olsun ve* $F = TC$ *diyelim. Ortogonal dönüşümler ve ötelemeler izometri olduğundan ve izometrilerin bileşkesi izometri olduğundan (Teorem 18.1, Sonuç 18.1)* F *bir izometridir ve*

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{q} - C(\mathbf{p}) + C(\mathbf{p}) = \mathbf{q}.$$

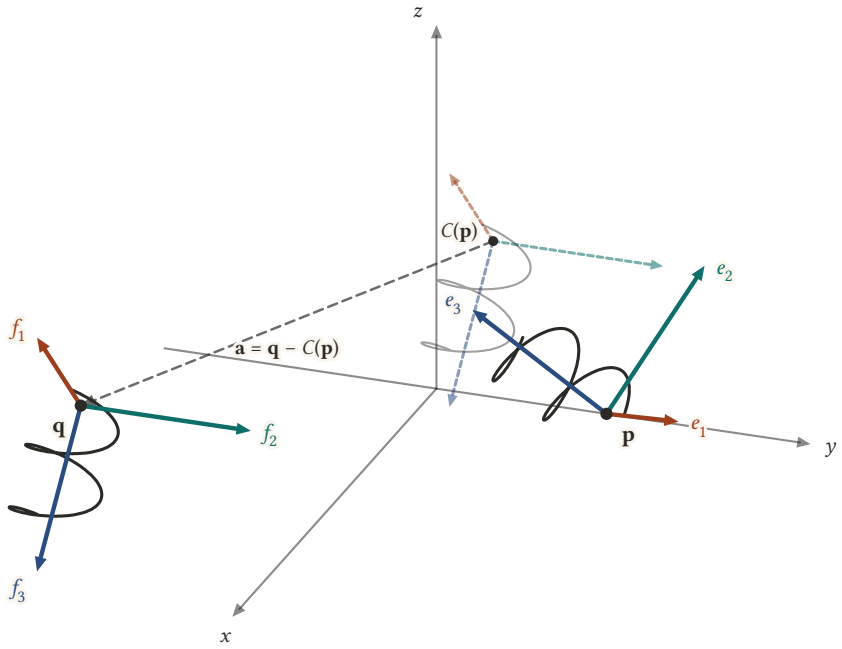
F çatıyı çatıya götürür. *Teorem 19.1 gereği*

$$F_*(e_i) = C(\hat{\mathbf{e}}_i)_{F(\mathbf{p})} = (\hat{\mathbf{f}}_i)_{\mathbf{q}} = f_i \qquad (1 \le i \le 3).$$

Teklik. G, $G_*(e_i) = f_i$ *koşulunu sağlayan herhangi bir izometri olsun ve Teorem 18.2 gereği* $G = T'C'$ *yazalım;* T'*, bir* $\mathbf{b}$ *ile öteleme olsun. Teoreme göre* $G_*(e_i) = C'(\hat{\mathbf{e}}_i)_{G(\mathbf{p})}$*. İki teğet vektör ancak uygulama noktaları ve vektör kısımları aynıysa eşittir; dolayısıyla* $G(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ *ve her* i *için* $C'(\hat{\mathbf{e}}_i) = \hat{\mathbf{f}}_i$*. İkinci koşul, yukarıdaki teklik gereği* $C' = C$ *verir. Birinci koşul* $\mathbf{b} + C(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$*, yani* $\mathbf{b} = \mathbf{q} - C(\mathbf{p})$ *verir;* $T' = T$*. Sonuç olarak* $G = TC = F$*.*
■

Yani bir izometri, tek bir çatıya ne yaptığıyla tamamen belirlenir. Bir katı cismi düşünelim: cismin bir noktasının nereye gittiğini ve o noktaya çakılı üç dik çubuğun nasıl durduğunu bilirsek cismin her noktasının yerini biliriz. Teoremin ispatı bu bilginin nasıl kullanılacağını da söyler: önce ortogonal kısım $\hat{\mathbf{e}}_i$'leri $\hat{\mathbf{f}}_i$'lere götürür, sonra öteleme $C(\mathbf{p})$'yi $\mathbf{q}$'ya kaydırır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.6: İki çatıyı eşleyen izometrinin iki adımı, alıştırmadaki çatılarla. $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$'daki e_1, e_2, e_3 çatısını önce ortogonal kısım $C = B^{\mathrm{T}}A$ döndürür; $C(\mathbf{p}) = (0, 1/3, 2\sqrt{2}/3)$ noktasındaki silik kesikli çatı, $\mathbf{q} = (3, -1, 1)$'deki f_1, f_2, f_3 çatısına paraleldir. Sonra öteleme onu $\mathbf{a} = \mathbf{q} - C(\mathbf{p})$ kadar kaydırır. e çatısına iliştirilmiş kısa helis parçası da birlikte taşınır ve görüntüde hedef çatıya aynı biçimde iliştirilmiş çıkar; bu izometri bir yansıma içerdiğinden görüntü helis ters yönde döner.

İspattaki C'yi hesaplamanın kolay bir yolu var. A, e çatısının duruş matrisi olsun (Tanım 9.8): i-inci satırı $\hat{\mathbf{e}}_i$'nin koordinatları a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}'tür. B de f çatısının duruş matrisi olsun. Noktaları sütun vektörü olarak yazıyoruz; bir matrisin bir noktaya uygulanması matris çarpımıdır.

Önerme 19.1 (Ortogonal Kısmın Matrisi). *Teorem 19.2 içinde e çatısını f çatısına götüren izometrinin ortogonal kısmının matrisi $B^T A$'dır; öteleme kısmı $\mathbf{q} - B^T A\,\mathbf{p}$ ile ötelemedir.*

İspat.
A, $\hat{\mathbf{e}}_i$'yi birim noktaya götürür. $A\hat{\mathbf{e}}_i$ sütununun k-inci girdisi, A'nın k-inci satırı ile $\hat{\mathbf{e}}_i$'nin karşılıklı çarpımlarının toplamıdır; k-inci satır $\hat{\mathbf{e}}_k$ olduğundan bu sayı $\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \delta_{ki}$'dir:

$$A\hat{\mathbf{e}}_i = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \end{pmatrix} = \mathbf{u}_i.$$

B^T, birim noktayı $\hat{\mathbf{f}}_i$'ye götürür. Bir matrisin $\mathbf{u}_i$ ile çarpımı o matrisin i-inci sütunudur. B^T'nin i-inci sütunu B'nin i-inci satırı, yani $\hat{\mathbf{f}}_i$'dir. Dolayısıyla

$$B^T A\,\hat{\mathbf{e}}_i = B^T \mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{f}}_i \qquad (1 \le i \le 3).$$

Sonuç. $\mathbf{x} \mapsto B^T A\,\mathbf{x}$ lineer bir dönüşümdür ve $\hat{\mathbf{e}}_i$'leri $\hat{\mathbf{f}}_i$'lere götürür. Teoremin ispatında böyle bir lineer dönüşümün tek olduğunu gördük; bu dönüşüm C'dir. Öteleme kısmı ispatta $\mathbf{q} - C(\mathbf{p})$ ile öteleme olarak bulunmuştu.
■

Ara adım şunu da söyler: A, e çatısının vektör kısımlarını birim noktalara, B^T ise birim noktaları f çatısının vektör kısımlarına götürür. C, doğal çatı üzerinden geçen bu iki adımın bileşkesidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda iki çatıyı eşleyen izometri

1. Çatıların duruş matrislerini yazın: A'nın satırları e_1, e_2, e_3'ün, B'ninkiler f_1, f_2, f_3'ün koordinatlarıdır.
2. Ortogonal kısım $C = B^T A$'dır.
3. Öteleme vektörü $\mathbf{a} = \mathbf{q} - C\mathbf{p}$'dir ve $F(\mathbf{r}) = C\mathbf{r} + \mathbf{a}$. Denetim için $C\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i$ ve $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ eşitliklerine bakın.

Örnek 19.9 (Bir Çatıyı Başlangıç Noktasındaki Doğal Çatıya Götürmek). $\mathbf{p} = (1, 0, 2)$ noktasında vektör kısımları

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$$

olan çatıyı (Örnek 9.28) başlangıç noktasındaki $U_1(\mathbf{0}), U_2(\mathbf{0}), U_3(\mathbf{0})$ doğal çatısına götüren izometriyi bulalım ve anlamını görelim.

Çözüm.
Adım 1. A'nın satırları $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$'tür; hedef çatı doğal çatı olduğundan $B = I$.
Adım 2. $C = I^T A = A$:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Adım 3. $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ olduğundan $\mathbf{a} = -A\mathbf{p}$. Satırları $\mathbf{p} = (1, 0, 2)$ ile çarparsak

$$A\mathbf{p} = \left(\frac{1+0+2}{\sqrt{6}}, \frac{-1+0+2}{\sqrt{2}}, \frac{1-0+2}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3} \right).$$

Böylece $F(\mathbf{r}) = A\mathbf{r} - A\mathbf{p} = A(\mathbf{r} - \mathbf{p})$; açıkça

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x + 2y + z - 3}{\sqrt{6}}, \frac{-x + z - 1}{\sqrt{2}}, \frac{x - y + z - 3}{\sqrt{3}} \right).$$

Denetim. $F(\mathbf{p}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. $C\hat{\mathbf{e}}_1$'in girdileri $\hat{\mathbf{e}}_1$'in satırlarla iç çarpımlarıdır: $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = (1+4+1)/6 = 1$, $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = (-1+0+1)/\sqrt{12} = 0$, $\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = (1-2+1)/\sqrt{18} = 0$; yani $C\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{u}_1$. Öteki ikisi de aynı biçimde $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ çıkar.
Anlamı. $F(\mathbf{r})$'nin koordinatları $(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_1$, $(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$ ve $(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3$'tür; Teorem 9.1 gereği bunlar $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ yer değiştirmesinin e çatısına göre koordinatlarıdır. Örneğin $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2$ noktası $(1, 2, 0)$'a gider. Uzayı bir çatıya göre okumak, kısacası, bir izometridir.
Ters yön. $A^T A = I$ olduğundan (Sonuç 9.1) tersi

$$F^{-1}(\mathbf{s}) = \mathbf{p} + A^T \mathbf{s} = \mathbf{p} + s_1\hat{\mathbf{e}}_1 + s_2\hat{\mathbf{e}}_2 + s_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

olur; başlangıç noktasındaki doğal çatıyı $\mathbf{p}$'deki e çatısına götürür.
■

Son örnekteki gözlem genelleşir. Başlangıç noktasındaki doğal çatıyı sabit bir başvuru çatısı olarak seçelim. $\mathbf{q}$'daki her f çatısı için bu başvuru çatısını f'ye götüren tek bir izometri vardır: $A = I$ olduğundan $C = B^T$, yani C'nin sütunları $\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2, \hat{\mathbf{f}}_3$'tür ve

$$F(\mathbf{r}) = \mathbf{q} + r_1\hat{\mathbf{f}}_1 + r_2\hat{\mathbf{f}}_2 + r_3\hat{\mathbf{f}}_3.$$

Tersine her F izometrisi, $F(\mathbf{0})$'da $F_*(U_1(\mathbf{0})), F_*(U_2(\mathbf{0})), F_*(U_3(\mathbf{0}))$ çatısını verir. Böylece izometriler ile çatılar arasında birebir ve örten bir eşleme vardır: bir izometri seçmek, uzayda bir çatı seçmekle aynı şeydir.

 CC BY-NC-SA 4.0

19.4 Alıştırmalar

Alıştırmalarda, önceki bölümdeki gibi, $\mathbf{a}$ ile ötelemeyi $T_{\mathbf{a}}$ diye yazıyoruz.

Alıştırma 19.1 (Ötelemenin Teğet Dönüşümü Okları Paralel Taşır). T, $\mathbb{R}^3$'ün bir ötelemesi olsun. Her $\mathbf{v_p}$ teğet vektörü için $T_*(\mathbf{v_p})$ ile $\mathbf{v_p}$'nin aynı Öklid koordinatlarına sahip olduğunu, dolayısıyla T özdeşlik değilse bu iki okun paralel olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Ortogonal kısım. $T = T_{\mathbf{a}}$ olsun ve I, özdeşlik dönüşümü olsun. I lineerdir ve iç çarpımı korur; $T = T_{\mathbf{a}} I$ yazılışı bir ortogonal dönüşümün ardından bir ötelemedir. Teorem 18.2 içindeki teklik gereği T'nin ortogonal kısmı I'dır.
Teorem. Teorem 19.1 gereği

$$T_*(\mathbf{v_p}) = I(\mathbf{v})_{T(\mathbf{p})} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}+\mathbf{a}}.$$

Görüntünün Öklid koordinatları $\mathbf{v_p}$'ninkilerle aynıdır, yani (v_1, v_2, v_3); yalnızca uygulama noktası $\mathbf{a}$ kadar kaymıştır. Teğet Vektörler bölümündeki tanıma göre vektör kısımları aynı, uygulama noktaları farklı olan iki ok paraleldir. Dolayısıyla $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ise $T_*(\mathbf{v_p})$ ile $\mathbf{v_p}$ paraleldir; $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ise T özdeşliktir ve iki ok eşittir. Aynı sonucu tanımdan doğrudan hesaplamıştık (Örnek 7.8).
Sayısal örnek. $\mathbf{a} = (1, -2, 4)$, $\mathbf{p} = (2, 2, 2)$ ve $\mathbf{v} = (3, 0, -1)$ için $T_*(\mathbf{v_p}) = (3, 0, -1)_{(3,0,6)}$.
Tersi de doğrudur. Ortogonal kısmı C olan bir F izometrisi her okun vektör kısmını koruyorsa, yani her $\mathbf{v_p}$ için $F_*(\mathbf{v_p})$'nin vektör kısmı $\mathbf{v}$ ise, her $\mathbf{v}$ için $C(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ olur; yani $C = I$ ve F bir ötelemedir. Ötelemeler, okları döndürmeyen tek izometrilerdir.
■

Alıştırma 19.2 (İki İzometrinin Bileşkesinin Teğet Dönüşümü). F ve G, $\mathbb{R}^3$'ün iki izometrisi olsun. Genel zincir kuralını kullanmadan, Teorem 19.1 yardımıyla $(GF)_* = G_* F_*$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Ayrışımlar. $F = T_{\mathbf{a}} C$ ve $G = T_{\mathbf{b}} D$ yazalım. Her $\mathbf{p}$ için D'nin lineerliğiyle

$$GF(\mathbf{p}) = D\left(\, C(\mathbf{p}) + \mathbf{a} \,\right) + \mathbf{b} = DC(\mathbf{p}) + \left(\, D(\mathbf{a}) + \mathbf{b} \,\right).$$

DC ortogonaldir. İki lineer dönüşümün bileşkesi lineerdir; D ve C iç çarpımı koruduğundan $DC(\mathbf{x}) \cdot DC(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Demek ki $GF = T_{D(\mathbf{a})+\mathbf{b}}\,(DC)$ ve Teorem 18.2 içindeki teklik gereği GF'nin ortogonal kısmı DC'dir; bu, Alıştırma 18.3 sonucudur.
Sol yan. Teorem GF'ye uygulanınca $(GF)_*(\mathbf{v_p}) = DC(\mathbf{v})_{GF(\mathbf{p})}$.
Sağ yan. Teorem önce F'ye, sonra G'ye uygulanınca

$$G_*\left(\, F_*(\mathbf{v_p}) \,\right) = G_*\left(\, C(\mathbf{v})_{F(\mathbf{p})} \,\right) = D\left(\, C(\mathbf{v})\right)_{G(F(\mathbf{p}))}.$$

İki yan aynı noktada uygulanır ve vektör kısımları aynıdır; her $\mathbf{v_p}$ için eşittirler.
Sayısal denetim. F, Örnek 19.3 içindeki dönme ($C(x, y, z) = (z, x, y)$, $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$), G de Örnek 19.4 içindeki yansıma ($D(x, y, z) = (z, y, x)$, $\mathbf{b} = (2, 0, -2)$) olsun. $DC(x, y, z) = D(z, x, y) = (y, x, z)$; $D(\mathbf{a}) = (-1, 0, 1)$ olduğundan $D(\mathbf{a}) + \mathbf{b} = (1, 0, -1)$. $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ için sağ yan: $F_*(\mathbf{v_p}) = (2, 1, -1)_{(4,1,1)}$ ve G_* bunu $(-1, 1, 2)_{(3,1,2)}$'ye götürür. Sol yan: $DC(\mathbf{v}) = (-1, 1, 2)$ ve $GF(\mathbf{p}) = DC(\mathbf{p}) + (1, 0, -1)$, yani $(2, 1, 3) + (1, 0, -1) = (3, 1, 2)$. Aynı ok.
Genel zincir kuralı (Alıştırma 7.16) bu eşitliği her dönüşüm için verir; izometrilerde ise yalnızca ortogonal kısımların bileşkesine indirgenir.
■

Alıştırma 19.3 (Ters İzometrinin Teğet Dönüşümü). F, $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi olsun. Teorem 19.1 yardımıyla $(F^{-1})_* = (F_*)^{-1}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
F^{-1}'in ayrışımı. $F = T_{\mathbf{a}} C$ olsun. Sonuç 18.1 gereği F birebir ve örtendir, F^{-1} bir izometridir ve C'nin tersi C^{-1} bir ortogonal dönüşümdür. $\mathbf{q} = C(\mathbf{p}) + \mathbf{a}$ denklemi, C^{-1}'in lineerliğiyle,

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{p} = C^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{a}) = C^{-1}(\mathbf{q}) - C^{-1}(\mathbf{a})$$

verir. Demek ki

$$F^{-1} = T_{-C^{-1}(\mathbf{a})}\, C^{-1}$$

ve teklik gereği F^{-1}'in ortogonal kısmı C^{-1}'dir (Alıştırma 18.4). Teorem gereği $(F^{-1})_*(\mathbf{w}_\mathbf{q}) = C^{-1}(\mathbf{w})_{F^{-1}(\mathbf{q})}$.
İki bileşke. Her $\mathbf{w}_\mathbf{q}$ ve her $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ için

$$F_*\left(\,(F^{-1})_*(\mathbf{w}_\mathbf{q})\,\right) = C\left(\,C^{-1}(\mathbf{w})\right)_{F(F^{-1}(\mathbf{q}))} = \mathbf{w}_\mathbf{q},$$
$$(F^{-1})_*\left(\,F_*(\mathbf{v}_\mathbf{p})\,\right) = C^{-1}\left(\,C(\mathbf{v})\right)_{F^{-1}(F(\mathbf{p}))} = \mathbf{v}_\mathbf{p}.$$

İki bileşke de özdeşliktir; F_* birebir ve örtendir ve tersi $(F^{-1})_*$'tır. Matris diliyle C^{-1}'in matrisi C^T'dir (Sonuç 9.1).
Sayısal denetim. Örnek 19.3 içinde $C(x,y,z) = (z,x,y)$ için $C^{-1}(x,y,z) = (y,z,x)$. $\mathbf{q} = F(\mathbf{p}) = (4,1,1)$ için $\mathbf{q} - \mathbf{a} = (3,1,2)$ ve $F^{-1}(\mathbf{q}) = (1,2,3) = \mathbf{p}$. Ayrıca

$$(F^{-1})_*\left(\,(2,1,-1)_\mathbf{q}\,\right) = C^{-1}(2,1,-1)_\mathbf{p} = (1,-1,2)_\mathbf{p};$$

bu, başladığımız $\mathbf{v}_\mathbf{p}$'dir.
■

Alıştırma 19.4 (Verilen İki Çatıyı Eşleyen İzometri). $\mathbf{p} = (0,1,0)$ noktasında

$$e_1 = \frac{(2,2,1)}{3}, \qquad e_2 = \frac{(-2,1,2)}{3}, \qquad e_3 = \frac{(1,-2,2)}{3}$$

çatısı ve $\mathbf{q} = (3,-1,1)$ noktasında

$$f_1 = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \qquad f_2 = (0,1,0), \qquad f_3 = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$$

çatısı verilsin. $F = T_\mathbf{a} C$ izometrisinin e çatısını f çatısına götürmesini sağlayan $\mathbf{a}$ ve C'yi bulunuz.

Çözüm.
Adım 1. Duruş matrisleri

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bu iki üçlünün gerçekten çatı olduğunu Alıştırma 19.7 içinde denetleyeceğiz.
Adım 2. B simetriktir, $B^T = B$. $C = B^T A$'nın (i,j) girdisi, B^T'nin i-inci satırı ile A'nın j-inci sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamıdır. A'nın sütunları $(2,-2,1)/3$, $(2,1,-2)/3$ ve $(1,2,2)/3$'tür.

- Birinci satır $(1,0,1)/\sqrt{2}$: $(2+1)/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, $(2-2)/(3\sqrt{2}) = 0$, $(1+2)/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$.
- İkinci satır $(0,1,0)$: A'nın ikinci satırı, yani $-2/3$, $1/3$, $2/3$.
- Üçüncü satır $(1,0,-1)/\sqrt{2}$: $(2-1)/(3\sqrt{2})$, $(2+2)/(3\sqrt{2})$, $(1-2)/(3\sqrt{2})$.

Böylece

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/6 \end{pmatrix}.$$

Adım 3. $C\mathbf{p}$, $\mathbf{p} = \mathbf{u}_2$ olduğundan C'nin ikinci sütunudur: $C\mathbf{p} = (0, 1/3, 2\sqrt{2}/3)$. Öyleyse

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{a} = \mathbf{q} - C\mathbf{p} = \left(3, -\frac{4}{3}, 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Sonuç. İstenen izometri $F(\mathbf{r}) = C\mathbf{r} + \mathbf{a}$'dır; $F(\mathbf{p}) = C\mathbf{p} + \mathbf{a} = \mathbf{q}$. $C\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i$ eşitliklerini Alıştırma 19.8 içinde tek tek denetleyeceğiz; Teorem 19.2 gereği bu izometri tektir.
Bir gözlem. $e_1 \times e_2 = (3, -6, 6)/9 = e_3$ iken $f_1 \times f_2 = (-1, 0, 1)/\sqrt{2} = -f_3$. Bu izometri de Örnek 19.8 içindeki yansıma gibi $e_1 \times e_2 = e_3$ bağıntısını işaret değiştirmiş bir bağıntıya çevirir.
■

Alıştırma 19.5 (İzometri Düzlemi Düzleme Götürür). $F = TC$, $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisi, $\mathbf{p}$ bir nokta ve $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ olsun. F'nin, $\mathbf{p}$'den geçen ve $\mathbf{q}$'ya dik olan düzlemi, $F(\mathbf{p})$'den geçen ve $C(\mathbf{q})$'ya dik olan düzlemin üzerine götürdüğünü ispatlayınız.

Çözüm.
Düzlemler. $P = \{\mathbf{r} : (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = 0\}$ ve $P' = \{\mathbf{s} : (\mathbf{s} - F(\mathbf{p})) \cdot C(\mathbf{q}) = 0\}$ olsun. $\| C(\mathbf{q}) \| = \| \mathbf{q} \| \neq 0$ olduğundan $C(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0}$ ve P' gerçekten bir düzlemdir.
Temel özdeşlik. $F(\mathbf{r}) = C(\mathbf{r}) + \mathbf{a}$ ise C'nin lineerliğiyle

$$F(\mathbf{r}) - F(\mathbf{p}) = C(\mathbf{r}) - C(\mathbf{p}) = C(\mathbf{r} - \mathbf{p}).$$

$F(P) \subset P'$. $\mathbf{r} \in P$ ise

$$\big(\, F(\mathbf{r}) - F(\mathbf{p}) \,\big) \cdot C(\mathbf{q}) = C(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{q}) = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = 0.$$

$P' \subset F(P)$. $\mathbf{s} \in P'$ olsun. Alıştırma 19.3 içinde gördüğümüz C^{-1} ile $\mathbf{r} = \mathbf{p} + C^{-1}\big(\, \mathbf{s} - F(\mathbf{p}) \,\big)$ alalım. Temel özdeşlik $F(\mathbf{r}) = F(\mathbf{p}) + \big(\, \mathbf{s} - F(\mathbf{p}) \,\big) = \mathbf{s}$ verir. Ayrıca

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = C(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{q}) = \big(\, \mathbf{s} - F(\mathbf{p}) \,\big) \cdot C(\mathbf{q}) = 0,$$

yani $\mathbf{r} \in P$ ve $\mathbf{s} = F(\mathbf{r}) \in F(P)$. İki kapsama birlikte $F(P) = P'$ verir.
Teğet vektörlerle okuma. $\mathbf{q}_\mathbf{p}$ düzlemin $\mathbf{p}$'deki normalidir ve Teorem 19.1 gereği $F_*(\mathbf{q}_\mathbf{p}) = C(\mathbf{q})_{F(\mathbf{p})}$. Yani görüntü düzlemin normali, normal okun teğet dönüşümü altındaki görüntüsüdür. Sonuç 19.2 de aynı şeyi söyler: $\mathbf{p}$'de $\mathbf{q}_\mathbf{p}$'ye dik oklar, $F(\mathbf{p})$'de $F_*(\mathbf{q}_\mathbf{p})$'ye dik oklara gider.
■

Alıştırma 19.6 (Verilen Bir Düzlemi Verilen Bir Düzleme Götürmek). P, $(1/2, -1, 0)$ noktasından geçen ve $(0, 1, 0)$'a dik olan düzlem olsun. $F(P)$'nin $(1, -2, 1)$ noktasından geçen ve $(1, 0, -1)$'e dik olan düzlem olmasını sağlayan bir $F = TC$ izometrisi bulunuz.

Çözüm.
Strateji. $\mathbf{p} = (1/2, -1, 0)$ ve $\mathbf{q} = (0, 1, 0) = \mathbf{u}_2$ olsun. Alıştırma 19.5 gereği $F(P)$, $F(\mathbf{p})$'den geçen ve $C(\mathbf{u}_2)$'ye dik düzlemdir. Dolayısıyla iki koşul yeter: $C(\mathbf{u}_2)$, $(1, 0, -1)$'e paralel olsun ve $F(\mathbf{p}) = (1, -2, 1)$ olsun. $\| C(\mathbf{u}_2) \| = 1$ olduğundan $C(\mathbf{u}_2) = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$ seçelim.
Ortogonal kısım. C'nin sütunları $C(\mathbf{u}_1), C(\mathbf{u}_2), C(\mathbf{u}_3)$'tür. İkinci sütuna dik bir birim vektör olarak $\mathbf{c}_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$, üçüncü sütun olarak da $\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = (0, 1, 0)$ alalım:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sütunlar ortonormaldir: $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = (1 - 1)/2 = 0$, $\mathbf{c}_3$ ise ikisine de diktir ve üçü de birim uzunluktadır. Önerme 18.2 gereği C ortogonaldir.
Öteleme. $C\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ olduğundan

$$C\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - 1, 0, \frac{1}{2} + 1\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve $\mathbf{a} = (1,-2,1) - C\mathbf{p}$:

$$\mathbf{a} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}, -2, 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right).$$

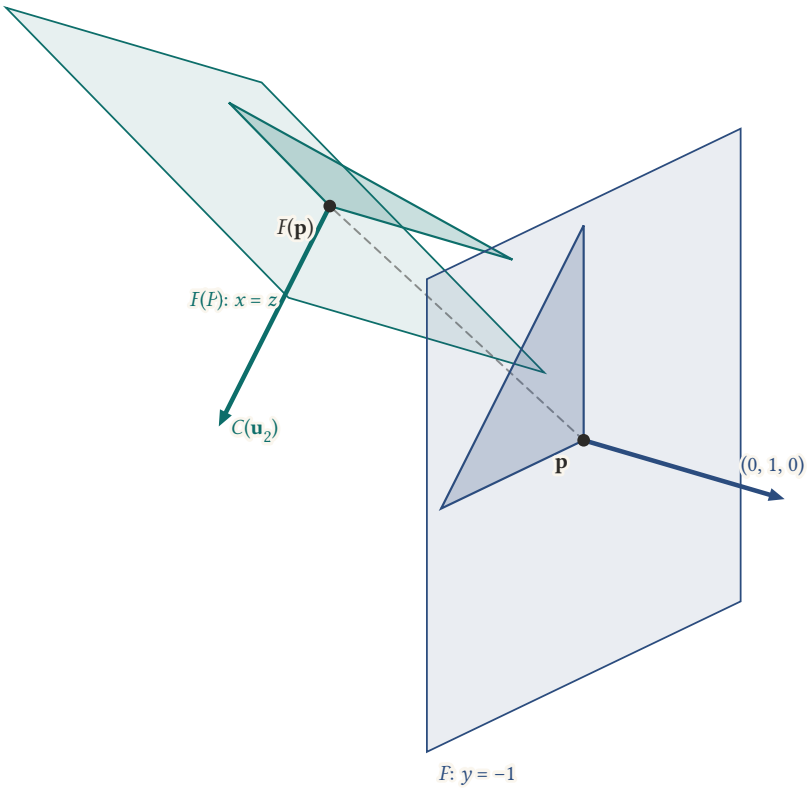
İzometri. $F(\mathbf{r}) = C\mathbf{r} + \mathbf{a}$, yani

$$F(x,y,z) = \Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}, z - 2, \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\Big).$$

Denetim. P, $y = -1$ düzlemidir. $(x,-1,z)$ noktasının görüntüsünün birinci koordinatından üçüncüsünü çıkarırsak

$$\frac{(x-1)-(x+1)}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

bulunur. $F(P)$, $x - z = 0$ düzlemindedir; bu düzlem $(1,-2,1)$'den geçer ve $(1,0,-1)$'e diktir. Ayrıca $F(\mathbf{p}) = (1,-2,1)$. Alıştırma 19.5 gereği $F(P)$ bu düzlemin tamamıdır.
Tek çözüm değil. $\mathbf{c}_1$ yerine $(1,0,-1)$'e dik başka bir birim vektör, $C(\mathbf{u}_2)$ için $-(1,0,-1)/\sqrt{2}$ ya da $F(\mathbf{p})$ için hedef düzlemin başka bir noktası seçilebilirdi. Teorem 19.2 bir izometriyi belirlemek için bütün bir çatı ister; bir düzlem bu bilginin yalnızca bir kısmını verir.



Şekil 19.7: P: $y = -1$ düzlemi (mavi) ve F altındaki görüntüsü $x - z = 0$ düzlemi (yeşil). $\mathbf{p}$ = (1/2, −1, 0) noktası (1, −2, 1)'e gider; P'nin normali (0, 1, 0), ortogonal kısım altında görüntü düzlemin normali $C(\mathbf{u}_2)$ = (1, 0, −1)/√2 olur. P içindeki $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} + \mathbf{u}_1$, $\mathbf{p} + \mathbf{u}_3$ üçgeni, görüntü düzlemde kenarları $C(\mathbf{u}_1)$ = (1, 0, 1)/√2 ve $C(\mathbf{u}_3)$ = (0, 1, 0) olan eş bir üçgene gider.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 19.7 (Alıştırmadaki Üçlülerin Çatı Olduğu). Alıştırma 19.4 içindeki iki vektör üçlüsünün de çatı olduğunu, duruş matrisleri için $AA^T = I$ ve $BB^T = I$ eşitliklerini göstererek doğrulayınız.

Çözüm.
Ölçüt. Önerme 9.5 gereği AA^T'nin (i,j) girdisi A'nın i-inci ve j-inci satırlarının iç çarpımıdır; $AA^T = I$ olması satırların bir çatı oluşturmasına denktir.
A için. Ortak çarpan $1/9$'dur. Satırların kendileriyle iç çarpımları $4+4+1=9$, $4+1+4=9$ ve $1+4+4=9$; karşılıklı iç çarpımlar

$$(2,2,1)\cdot(-2,1,2) = -4+2+2 = 0,$$

$$(2,2,1)\cdot(1,-2,2) = 2-4+2 = 0,$$

$$(-2,1,2)\cdot(1,-2,2) = -2-2+4 = 0.$$

Dolayısıyla

$$AA^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I.$$

B için. Satırların kendileriyle iç çarpımları $(1+0+1)/2 = 1$, 1 ve $(1+0+1)/2 = 1$. Karşılıklı iç çarpımlar: birinci ile ikinci satır ve ikinci ile üçüncü satır ortak bir sıfırdan farklı koordinat taşımadığından 0; birinci ile üçüncü satırın iç çarpımı $(1\cdot 1 + 0 + 1\cdot(-1))/2 = 0$. Yani $BB^T = I$.
Sonuç. İki üçlü de çatıdır. Sonuç 9.1 gereği $A^TA = I$ ve $B^TB = I$ de sağlanır; sütunlar da ortonormaldir.
■

Alıştırma 19.8 (Çatıyı Çatıya Götüren Matris). Alıştırma 19.4 içindeki $\hat{\mathbf{e}}_i$ noktalarını $\hat{\mathbf{f}}_i$ noktalarına götüren C matrisini bulunuz ve $C\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i$ eşitliğini $i = 1,2,3$ için tek tek denetleyiniz.

Çözüm.
İkinci bir yol. Bir $\mathbf{f}$ sütunu ile bir $\mathbf{e}$ satırının çarpımı $\mathbf{f}\,\mathbf{e}^T$, (k,l) girdisi $f_k e_l$ olan 3×3 matristir ve bir $\mathbf{x}$ sütununa $\mathbf{f}\,\mathbf{e}^T\mathbf{x} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{f}$ olarak etki eder. Buna göre

$$M = \hat{\mathbf{f}}_1\hat{\mathbf{e}}_1^T + \hat{\mathbf{f}}_2\hat{\mathbf{e}}_2^T + \hat{\mathbf{f}}_3\hat{\mathbf{e}}_3^T$$

matrisi için $M\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_k (\hat{\mathbf{e}}_k\cdot\hat{\mathbf{e}}_i)\,\hat{\mathbf{f}}_k = \hat{\mathbf{f}}_i$ olur. M, aradığımız C'dir.
Üç terim.

$$\hat{\mathbf{f}}_1\hat{\mathbf{e}}_1^T = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{f}}_2\hat{\mathbf{e}}_2^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{f}}_3\hat{\mathbf{e}}_3^T = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Toplam. Birinci satır $\frac{1}{3\sqrt{2}}(3,0,3)$, ikinci satır $\frac{1}{3}(-2,1,2)$, üçüncü satır $\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,4,-1)$:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/6 \end{pmatrix}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu, Alıştırma 19.4 içinde $B^T A$ olarak bulduğumuz matristir. Rastlantı değildir: $B^T A$ çarpımı, B^T'nin k-inci sütunu ($\hat{\mathbf{f}}_k$) ile A'nın k-inci satırının ($\hat{\mathbf{e}}_k^T$) çarpımlarının toplamı olarak da yazılabilir.
$i = 1$. $\hat{\mathbf{e}}_1 = (2,2,1)/3$ ile satırların iç çarpımları

$$\frac{2+1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-4+2+2}{9} = 0, \qquad \frac{2+8-1}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$C\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,0,1)/\sqrt{2} = \hat{\mathbf{f}}_1$.
$i = 2$. $\hat{\mathbf{e}}_2 = (-2,1,2)/3$ ile

$$\frac{-2+2}{3\sqrt{2}} = 0, \qquad \frac{4+1+4}{9} = 1, \qquad \frac{-2+4-2}{9\sqrt{2}} = 0;$$

$C\hat{\mathbf{e}}_2 = (0,1,0) = \hat{\mathbf{f}}_2$.
$i = 3$. $\hat{\mathbf{e}}_3 = (1,-2,2)/3$ ile

$$\frac{1+2}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-2-2+4}{9} = 0, \qquad \frac{1-8-2}{9\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$C\hat{\mathbf{e}}_3 = (1,0,-1)/\sqrt{2} = \hat{\mathbf{f}}_3$. Üç eşitlik de sağlanır.
■

Bu bölümde bir izometrinin teğet dönüşümünün her noktada ortogonal kısmın kendisi olduğunu gördük: oklar her yerde aynı biçimde döner, yalnızca uygulama noktası $F(\mathbf{p})$'ye taşınır. Bundan izometrilerin iç çarpımları, uzunlukları, açıları ve çatıları koruduğu çıktı; iki çatının tek bir izometri belirlediğini ispatlayıp bu izometriyi duruş matrisleriyle hesapladık. Yansıma örneğinde bir izometrinin bütün ölçümleri koruduğu hâlde $e_1 \times e_2 = e_3$ bağıntısının işaretini değiştirebildiğini gördük. Sıradaki bölümde (Yönlendirme) bu farkı bir izometrinin işaretiyle ölçecek ve vektörel çarpımın izometriler altında nasıl davrandığını göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

20. Yönlendirme

Önceki bölümde (Bir İzometrinin Teğet Dönüşümü) bir izometrinin teğet dönüşümünün her noktada ortogonal kısmın kendisi olduğunu, bu yüzden iç çarpımları koruduğunu ve çatıları çatılara götürdüğünü gördük (Teorem 19.1, Sonuç 19.3). Bu bölümde geometrinin en ilginç ama ilk bakışta en kaygan kavramlarından birini ele alıyoruz: yönlendirmeyi.

Bir sağ el eldiveni ile bir sol el eldiveni düşünelim. İkisinde de parmakların uzunlukları, aralarındaki açılar, kumaşın her ölçüsü aynıdır; yine de sağ eldiveni ne kadar kaydırıp döndürürsek döndürelim sol eldivenin yerine oturtamayız. Aynada ise sağ el sol el olarak görünür. Bu farkı uzunluklar ve açılar yakalayamaz; onu yakalayan kavram **yönlendirmedir** (orientation). Fark doğada da karşımıza çıkar: 1848'de Louis Pasteur, tartarik asidin bir tuzunun birbirinin ayna görüntüsü olan iki kristal biçimini elle, tek tek ayırmıştır.

Eldivenleri matematiğe taşımak için onların yerine çatıları koyacağız. Plan şöyledir: önce her çatıya $+1$ ya da -1 olan bir işaret verip çatıları iki sınıfa ayıracağız; sonra her izometriye bir işaret verip izometrilerin bu iki sınıfı nasıl taşıdığını göreceğiz; son olarak, iç çarpımı tam olarak koruyan izometrilerin vektörel çarpımı neden yalnızca işaretine kadar koruduğunu ispatlayacağız.

20.1 Pozitif ve Negatif Yönlü Çatılar

Her çatıya bir sayı eşlemenin yolunu aslında biliyoruz. e_1, e_2, e_3, bir $\mathbf{p}$ noktasında bir çatı ve A onun duruş matrisi olsun (Tanım 9.8). Üçlü skaler çarpım, satırları üç vektörün koordinatları olan determinanttır (Alıştırma 9.11) ve bir çatı için bu sayı ± 1'dir (Alıştırma 9.17):

$$e_1 \cdot e_2 \times e_3 = \det A = \pm 1.$$

İki değer de gerçekten ortaya çıkar; çatıları bu işarete göre iki sınıfa ayırıyoruz.

Tanım 20.1 (Pozitif ve Negatif Yönlü Çatı). e_1, e_2, e_3, $\mathbb{R}^3$'ün bir noktasında bir çatı olsun. $e_1 \cdot e_2 \times e_3 = +1$ ise çatıya **pozitif yönlü** (positively oriented) ya da **sağ elli** (right-handed), $e_1 \cdot e_2 \times e_3 = -1$ ise **negatif yönlü** (negatively oriented) ya da **sol elli** (left-handed) denir.

Yani bir çatının yönü tek bir sayıyla okunur: üç okun gerdiği birim küpün işaretli hacmi. Hacmin büyüklüğü her çatıda 1'dir; çatıdan çatıya değişen yalnızca işarettir. Tanımda sıranın önemli olduğuna dikkat edelim: "çatı" sözü üç vektörün kümesini değil, e_1, e_2, e_3 sırasıyla yazılmış listesini anlatır. Aynı üç ok başka bir sırayla yazılınca yön değişebilir; bunu birazdan göreceğiz.

Örnek 20.1 (Doğal Çatı Pozitif Yönlüdür). Her $\mathbf{p}$ noktasında $U_1(\mathbf{p}), U_2(\mathbf{p}), U_3(\mathbf{p})$ çatısının pozitif yönlü olduğunu gösterelim.

> **Çözüm.**
> Duruş matrisinin satırları $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$'dir; matris birim matristir. Birinci satıra göre açılımla
>
> $$\det I = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 0 + 0 = 1.$$
>
> Aynı sonuç vektörel çarpımdan da okunur: $U_2 \times U_3 = U_1$ olduğundan (Örnek 9.30) $U_1 \cdot U_2 \times U_3 = U_1 \cdot U_1 = 1$'dir. Doğal çatı her noktada pozitif yönlüdür; deyim yerindeyse, pozitif yönün ölçü birimi odur.
> ■

Üçlü çarpımı hesaplamak yerine çoğu zaman tek bir vektörel çarpıma bakmak yeter.

Önerme 20.1 (Yönün Vektörel Çarpımla Okunması). *e_1, e_2, e_3 bir çatı ve $\varepsilon = e_1 \cdot e_2 \times e_3$ olsun. O zaman*

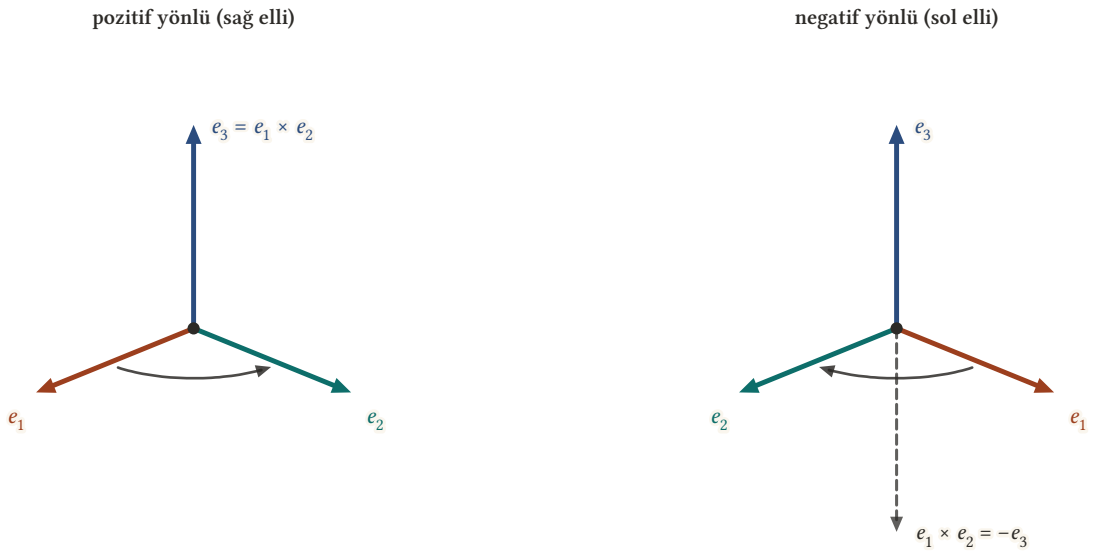
$$e_1 \times e_2 = \varepsilon\, e_3.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Özel olarak çatı ancak ve ancak $e_1 \times e_2 = e_3$ ise pozitif yönlü, ancak ve ancak $e_1 \times e_2 = -e_3$ ise negatif yönlüdür.

> ***İspat.***
> *$e_1 \times e_2$ hem e_1'e hem e_2'ye diktir (Lemma 9.5). Bu vektörü çatıda açalım (Teorem 9.1):*
>
> $$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= (e_1 \times e_2 \cdot e_1)\, e_1 + (e_1 \times e_2 \cdot e_2)\, e_2 + (e_1 \times e_2 \cdot e_3)\, e_3 \\ &= (e_1 \times e_2 \cdot e_3)\, e_3. \end{aligned}$$
>
> *Kalan katsayıda nokta ile çarpının yeri değişebilir (Alıştırma 9.14): $e_1 \times e_2 \cdot e_3 = e_1 \cdot e_2 \times e_3 = \varepsilon$. Böylece $e_1 \times e_2 = \varepsilon\, e_3$.*
> *İkinci cümle bunun sonucudur. $\varepsilon = 1$ ise $e_1 \times e_2 = e_3$'tür. Tersine $e_1 \times e_2 = e_3$ ise $\varepsilon\, e_3 = e_3$, yani $(\varepsilon - 1)\, e_3 = \mathbf{0}$ olur; e_3 birim vektör olduğundan sıfır değildir, dolayısıyla $\varepsilon = 1$. -1 için akıl yürütme aynıdır.*
> ■

Yani bir çatının sağ elli olup olmadığını anlamak için $e_1 \times e_2$'yi hesaplayıp e_3 ile karşılaştırmak yeter: sonuç ya e_3'tür ya da $-e_3$, üçüncü bir olasılık yoktur. Pratikte bu karşılaştırma İç Çarpım bölümündeki sağ el kuralıyla gözle de yapılır. Sağ elin parmakları e_1'i kısa yoldan e_2'ye döndüren yönde kıvrılınca başparmak e_3'ü gösteriyorsa çatı sağ elli, tam tersini gösteriyorsa sol ellidir. Aşağıdaki iki çatı aynı üç oktan yapılmıştır; aralarındaki tek fark, e_1 ile e_2'nin adlarının yer değiştirmiş olmasıdır.



Şekil 20.1: Solda pozitif yönlü, sağda negatif yönlü bir çatı. Kavisli ok e_1'i kısa yoldan e_2'ye döndürür. Sağ elin parmakları bu yönde kıvrılınca başparmak $e_1 \times e_2$ yönünü gösterir. Solda bu yön e_3'tür; sağda ise e_3'ün tersidir (kesikli ok).

Frenet çatısının hangi sınıfta olduğunu tanımı söyler.

Sonuç 20.1 (Frenet Çatısı Pozitif Yönlüdür). *β, eğriliği pozitif olan birim hızlı bir eğri olsun. β'nın her noktasındaki T, N, B Frenet çatısı pozitif yönlüdür.*

> ***İspat.***
> *T, N, B her noktada bir çatıdır (Lemma 11.1) ve binormal tanım gereği $B = T \times N$'dir (Tanım 11.2). Bu, Önerme 20.1 içindeki $e_1 \times e_2 = e_3$ koşulunun $e_1 = T$, $e_2 = N$, $e_3 = B$ için yazılışıdır; dolayısıyla $T \cdot N \times B = +1$.*
> ■

Önermenin ispatındaki fikir bir çatının bütün vektörel çarpımlarını verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 20.2 (Bir Çatının Vektörel Çarpım Tablosu). *e_1, e_2, e_3 bir çatı ve $\varepsilon = e_1 \cdot e_2 \times e_3$ olsun. O zaman*

$$e_1 \times e_2 = \varepsilon\, e_3, \qquad e_2 \times e_3 = \varepsilon\, e_1, \qquad e_3 \times e_1 = \varepsilon\, e_2,$$

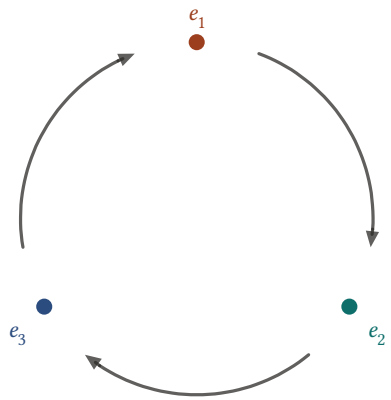
ve sırası ters çevrilmiş çarpımlar bunların eksi işaretlisidir:

$$e_2 \times e_1 = -\varepsilon\, e_3, \qquad e_3 \times e_2 = -\varepsilon\, e_1, \qquad e_1 \times e_3 = -\varepsilon\, e_2.$$

Pozitif yönlü bir çatıda ($\varepsilon = 1$) bu,

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 \times e_3 = -\,e_3 \times e_2, \\ e_2 &= e_3 \times e_1 = -\,e_1 \times e_3, \\ e_3 &= e_1 \times e_2 = -\,e_2 \times e_1 \end{aligned}$$

demektir. Negatif yönlü bir çatıda ise her vektörel çarpımdaki iki çarpanın yeri değişir: $e_1 = e_3 \times e_2$, $e_2 = e_1 \times e_3$, $e_3 = e_2 \times e_1$.



ok yönünde	ters yönde
$e_1 \times e_2 = \varepsilon e_3$	$e_2 \times e_1 = -\varepsilon e_3$
$e_2 \times e_3 = \varepsilon e_1$	$e_3 \times e_2 = -\varepsilon e_1$
$e_3 \times e_1 = \varepsilon e_2$	$e_1 \times e_3 = -\varepsilon e_2$

Şekil 20.2: Bir çatının vektörel çarpım tablosunu hatırlamanın yolu. Oklar boyunca ardışık iki vektörün çarpımı üçüncünün ε katıdır (örneğin $e_2 \times e_3 = \varepsilon\, e_1$); oklara karşı gidince işaret değişir. Burada $\varepsilon = e_1 \cdot e_2 \times e_3$'tür.

İspat.
Birinci eşitliği Önerme 20.1 verir. Ötekiler için aynı önermeyi, aynı üç vektörün çevrimsel olarak kaydırılmış listelerine uygularız. e_2, e_3, e_1 listesi de bir çatıdır ve üçlü çarpımı

$$e_2 \cdot e_3 \times e_1 = e_2 \times e_3 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_2 \times e_3 = \varepsilon$$

olur: birinci adımda nokta ile çarpının yerini değiştirdik (Alıştırma 9.14), ikincide iç çarpımın simetrisini kullandık. Önerme bu çatıya uygulanınca $e_2 \times e_3 = \varepsilon\, e_1$ verir. Aynı biçimde e_3, e_1, e_2 listesinin üçlü çarpımı

$$e_3 \cdot e_1 \times e_2 = e_3 \times e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 \times e_1 = \varepsilon$$

olur ve $e_3 \times e_1 = \varepsilon\, e_2$ çıkar. Sırası ters çevrilmiş çarpımlar ters değişme kuralından gelir (Önerme 9.6): örneğin $e_2 \times e_1 = -\,e_1 \times e_2 = -\varepsilon\, e_3$.
Son olarak $\varepsilon^2 = 1$ olduğundan $e_i \times e_j = \varepsilon\, e_k$ eşitliği $e_k = \varepsilon\, e_i \times e_j$ eşitliğine denktir. $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = -1$ yazınca listelenen biçimler çıkar.
■

Yani pozitif yönlü bir çatıyla, doğal çatıyla hesap yapar gibi hesap yaparız: $U_1 \times U_2 = U_3$ tablosu harfi harfine geçerlidir. Negatif yönlü bir çatıda ise her çarpım ters işaret alır. Tabloyu ezberlemeye gerek yoktur; yukarıdaki çevrim ya da sağ el kuralı onu her seferinde doğru verir.

Örnek 20.2 (Sağ Elli Bir Çatı). Herhangi bir noktada uygulanan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$e_1 = \frac{1}{3}(2,2,1), \qquad e_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2), \qquad e_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$$

vektörleri bir çatıdır (Örnek 14.5). Bu çatının yönünü iki yoldan bulalım.

Çözüm.
Determinantla. Duruş matrisinin her satırında bir $\frac{1}{3}$ çarpanı vardır. Determinant her satırında lineer olduğundan bu çarpanlar dışarı alınır ve toplam çarpan $\frac{1}{27}$ olur:

$$\det A = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2(2+4) - 2(-4-2) + 1(4-1)}{27} = \frac{12+12+3}{27} = 1.$$

Çatı pozitif yönlüdür.
Vektörel çarpımla. Kesir çarpanlarını dışarıda tutarak

$$(2,2,1) \times (-2,1,2) = \big(\, 2\cdot 2 - 1\cdot 1, 1\cdot(-2) - 2\cdot 2, \\ 2\cdot 1 - 2\cdot(-2) \, \big) = (3,-6,6)$$

ve $e_1 \times e_2 = \frac{1}{9}(3,-6,6)$, yani $e_1 \times e_2 = \frac{1}{3}(1,-2,2) = e_3$. Önerme 20.1 aynı sonucu verir. Tablonun bir satırını daha denetleyelim:

$$(-2,1,2) \times (1,-2,2) = \big(\, 1\cdot 2 - 2\cdot(-2), 2\cdot 1 - (-2)\cdot 2, \\ (-2)(-2) - 1\cdot 1 \, \big) = (6,6,3),$$

yani $e_2 \times e_3 = \frac{1}{9}(6,6,3)$; bu da $\frac{1}{3}(2,2,1) = e_1$ demektir.
■

Örnek 20.3 (Sol Elli Bir Çatı). $\mathbf{q} = (3,-1,1)$ noktasında

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \qquad f_2 = (0,1,0), \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

vektörlerinin bir çatı olduğunu gösterelim ve bu çatının yönünü bulalım.

Çözüm.
Çatı olma. Normların kareleri $(1+0+1)/2 = 1, 1$ ve $(1+0+1)/2 = 1$'dir. Karşılıklı iç çarpımlar $f_1 \cdot f_2 = 0$, $f_2 \cdot f_3 = 0$ ve $f_1 \cdot f_3 = (1+0-1)/2 = 0$'dır. Üçlü bir çatıdır.
Yön. Vektörel çarpımı hesaplayalım:

$$f_1 \times f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\, 0\cdot 0 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot 1 - 0\cdot 0 \, \big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) = -f_3.$$

Önerme 20.1 gereği çatı negatif yönlüdür; üçlü çarpım $f_1 \cdot f_2 \times f_3 = -1$'dir. Tablonun öteki satırları da buna uyar; örneğin

$$f_3 \times f_1 = \frac{1}{2}\big(\, 0\cdot 1 - (-1)\cdot 0, (-1)\cdot 1 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - 0\cdot 1 \, \big) \\ = (0,-1,0) = -f_2.$$

Onarma. Sol elli bir çatıyı sağ elliye çevirmenin iki kolay yolu vardır. Birincisi bir vektörün işaretini değiştirmektir: $f_1, f_2, -f_3$ listesinde $f_1 \times f_2 = -f_3$ olduğundan bu çatı sağ ellidir. İkincisi iki vektörün yerini değiştirmektir: f_2, f_1, f_3 listesinde ters değişme kuralıyla $f_2 \times f_1 = -\,f_1 \times f_2 = f_3$ olur.
■

Örnek 20.4 (Sıra Değişince Yön Nasıl Değişir). e_1, e_2, e_3 çatısının (Örnek 20.2) vektörleri altı farklı sırayla yazılabilir. Her sıralamanın yönünü bulalım.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 9.13 gereği üçlü çarpımda iki vektörün yeri değişince işaret değişir. $e_1 \cdot e_2 \times e_3 = 1$'den başlayıp her satırı bir öncekinden tek bir yer değiştirmeyle elde edelim:

sıralama	elde ediliş	üçlü çarpım	yön
e_1, e_2, e_3	başlangıç	$+1$	pozitif
e_2, e_1, e_3	ilk ikisinin yeri değişti	-1	negatif
e_2, e_3, e_1	son ikisinin yeri değişti	$+1$	pozitif
e_3, e_2, e_1	ilk ikisinin yeri değişti	-1	negatif
e_3, e_1, e_2	son ikisinin yeri değişti	$+1$	pozitif
e_1, e_3, e_2	ilk ikisinin yeri değişti	-1	negatif

Kural şudur: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ çevrimini koruyan üç sıralama pozitif, ötekiler negatif yönlüdür. Bir vektörün işaretini değiştirmek de yönü değiştirir, çünkü üçlü çarpım her çarpanında lineerdir: $e_1 \cdot e_2 \times (-e_3) = -1$. İki vektörün işaretini birden değiştirmek ise yönü korur: $(-e_1) \cdot (-e_2) \times e_3 = +1$.
■

Örnek 20.5 (Düzlemde Yönlendirme). Aynı soruyu düzlemde soralım. $\mathbb{R}^2$'nin bir noktasında, karşılıklı dik iki birim vektörden oluşan bir e_1, e_2 çatısı alalım ve $e_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ yazalım. e_2'nin olası değerlerini bulup her birinde satırları e_1 ve e_2 olan 2×2 determinantı hesaplayalım.

Çözüm.
$(-\sin\varphi, \cos\varphi)$, e_1'e dik bir birim vektördür. $e_2 = (a, b)$ de e_1'e dik olsun: $a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0$. $\lambda = -a\sin\varphi + b\cos\varphi$ dersek

$$\lambda\,(-\sin\varphi, \cos\varphi) = (a\sin^2\varphi - b\sin\varphi\cos\varphi,\, -a\sin\varphi\cos\varphi + b\cos^2\varphi) = (a, b)$$

olur; çünkü dikliğe göre $b\sin\varphi = -a\cos\varphi$ ve $a\cos\varphi = -b\sin\varphi$'dir. Yani e_2, $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$'nin bir katıdır ve birim olduğu için katsayı ± 1'dir. İki olasılık vardır:

$$e_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \qquad \text{ya da} \qquad e_2 = (\sin\varphi, -\cos\varphi).$$

Determinantlar:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = -1.$$

Birinci durumda e_2, e_1'in saatin tersi yönünde $90°$ döndürülmüşüdür; ikincide saat yönünde. Düzlemde de çatılar iki sınıfa ayrılır: determinantı $+1$ olanlarda birinci vektörden ikinciye kısa dönüş saatin tersi yönünde, -1 olanlarda saat yönündedir. Örneğin $\varphi = \pi/6$ için $e_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$; $e_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ pozitif, $e_2 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ negatif yönlü bir çatı verir.
Üç boyutla bağlantı da kurulabilir. Düzlemi $\mathbb{R}^3$'ün xy düzlemi sayıp $e_1 = (a_{11}, a_{12})$ ve $e_2 = (a_{21}, a_{22})$'yi $(a_{11}, a_{12}, 0)$ ve $(a_{21}, a_{22}, 0)$ olarak yazalım ve üçüncü vektör olarak U_3'ü ekleyelim. Birinci satıra göre açılım

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} - 0) - a_{12}(a_{21} - 0) + 0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

verir: uzaydaki çatı ancak ve ancak düzlemdeki çatı pozitif yönlüyse pozitif yönlüdür. "Saatin tersi yönü", U_3'ün ucundan bakınca sağ el kuralının düzlemdeki karşılığıdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 20.6 (Bir Çatı Alanının Yönü Değişmez). E_1, E_2, E_3, bütün $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı bir çatı alanı (Tanım 14.2) olsun. $E_1 \cdot E_2 \times E_3$ fonksiyonunun sabit olduğunu, yani çatı alanının ya her noktada pozitif ya da her noktada negatif yönlü olduğunu gösterelim.

Çözüm.
$g = E_1 \cdot E_2 \times E_3$ diyelim. Üçlü çarpımın altı terimli açılımına göre g, E_i'lerin Öklid koordinat fonksiyonlarının üçlü çarpımlarının toplamıdır. Bu fonksiyonlar türevlenebilir olduğundan g türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir. Her noktada $E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}), E_3(\mathbf{p})$ bir çatı olduğundan g yalnızca 1 ve -1 değerlerini alır.
$\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ iki nokta olsun ve $0 \le t \le 1$ için

$$h(t) = g\,\big(\,\mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,\big)$$

diyelim; h, g'nin iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki değerlerini okur. h süreklidir ve yalnızca ± 1 değerlerini alır. $h(0) \neq h(1)$ olsaydı biri 1, öteki -1 olurdu ve ara değer teoremine göre h bir t değerinde 0'ı da alırdı; bu olanaksızdır. Demek ki $g(\mathbf{p}) = h(0) = h(1) = g(\mathbf{q})$. Noktalar keyfi olduğundan g sabittir.
Örneğin yükseklikle dönen çatı alanında (Örnek 14.6) $E_1 = \cos z\,U_1 + \sin z\,U_2$, $E_2 = -\sin z\,U_1 + \cos z\,U_2$ ve $E_3 = U_3$'tür. Vektörel çarpım

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 = {} & (\sin z \cdot 0 - 0 \cdot \cos z)\,U_1 \\ & - \big(\cos z \cdot 0 - 0 \cdot (-\sin z)\big)\,U_2 \\ & + (\cos^2 z + \sin^2 z)\,U_3 = U_3 = E_3 \end{aligned}$$

verir; bu çatı alanı her noktada pozitif yönlüdür. Aynı akıl yürütme bir eğri boyunca tanımlı çatılara da uygulanır: bir aralık üzerinde sürekli değişen bir çatı yönünü değiştiremez. Eldiven benzetmesiyle söylersek, sağ eldiveni sürekli bir hareketle ne kadar oynatırsak oynatalım o hep sağ eldiven kalır.
■

20.2 Bir İzometrinin İşareti

Her çatıya bir işaret verdik; şimdi aynı şeyi izometriler için yapacağız. Hatırlayalım: her F izometrisi tek türlü olarak $F = TC$ biçiminde yazılır; burada C bir ortogonal dönüşüm, T bir ötelemedir (Teorem 18.2). C, F'nin ortogonal kısmı, T de öteleme kısmıdır (Tanım 18.4).
Bir lineer dönüşümü ve matrisini aynı harfle gösteriyoruz; birim noktalar $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$'dir ve matrisin j-inci sütunu $C(\mathbf{u}_j)$'dir. Bir lineer dönüşüm ancak ve ancak matrisi ortogonal bir matrisse ortogonaldir (Önerme 18.2); Alıştırma 9.18 gereği de böyle bir matrisin determinantı $+1$ ya da -1'dir.

Tanım 20.2 (Bir İzometrinin İşareti). F, $\mathbb{R}^3$'ün ortogonal kısmı C olan bir izometrisi olsun. F'nin **işareti** (sign)

$$\operatorname{sgn} F = \det C$$

sayısıdır. Bu sayı $+1$ ya da -1'dir.

Yani bir izometrinin işareti yalnızca ortogonal kısma bakar; öteleme kısmı işaretle hiç ilgilenmez. İşaretin geometrik anlamı, izometrinin çatıların yönüne ne yaptığıdır. Bunu ispatlamak için önce determinantın iki özelliğine ihtiyacımız var. Bunları da İç Çarpım bölümünde yaptığımız gibi doğrudan determinantın tanımından çıkaracağız.

Lemma 20.1 (Transpozun Determinantı). *Her 3×3 A matrisi için* $\det A^T = \det A$.

İspat.
$A = (a_{ij})$ için birinci satıra göre açılım altı terimli şu formülü verir (Alıştırma 9.13 içindeki açılımın aynısı):

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Her terim, her satırdan ve her sütundan tam bir girdi seçen üç girdinin çarpımıdır. A^T'nin (i,j) girdisi a_{ji} olduğundan aynı formül A^T için

$$\begin{aligned}\det A^T = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}\end{aligned}$$

verir. Terimleri karşılaştıralım: $a_{21}a_{32}a_{13}$, $\det A$'daki $a_{13}a_{21}a_{32}$'dir ve $a_{31}a_{12}a_{23}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$'dir. Eksi işaretlilerde $a_{11}a_{32}a_{23} = a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$ ve $a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$'dir. İki toplam aynı altı terimden, aynı işaretlerle oluşur.
■

Şimdi bölümün anahtar hesabı geliyor: bir lineer dönüşüm, üç vektörün üçlü skaler çarpımını determinantıyla çarpar. Burada ve bundan sonra, Frenet Formülleri bölümünde anlaştığımız gibi, noktalarla vektör kısımları arasında sessizce geçiyoruz.

Lemma 20.2 (Lineer Dönüşüm Üçlü Çarpımı Determinantıyla Çarpar). *$C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, matrisi C olan bir lineer dönüşüm olsun. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ için*

$$C(\mathbf{x}) \cdot C(\mathbf{y}) \times C(\mathbf{z}) = (\det C)\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \times \mathbf{z}.$$

İspat.
$D(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = C(\mathbf{x}) \cdot C(\mathbf{y}) \times C(\mathbf{z})$ *diyelim.*
Adım 1: D'nin iki özelliği. *C lineerdir; iç çarpım ve vektörel çarpım da her çarpanlarında lineerdir (Önerme 9.1, Önerme 9.6). Dolayısıyla D her bir girdisinde lineerdir. Ayrıca iki girdinin yeri değişince D işaret değiştirir, çünkü bu, üçlü çarpımda iki vektörün yerini değiştirmektir (Alıştırma 9.13). Bundan, iki girdisi aynı olduğunda D'nin sıfır olduğu çıkar; örneğin $D(\mathbf{x},\mathbf{x},\mathbf{z}) = -D(\mathbf{x},\mathbf{x},\mathbf{z})$.*
Adım 2: açılım. $\mathbf{x} = \sum_i x_i\,\mathbf{u}_i$, $\mathbf{y} = \sum_j y_j\,\mathbf{u}_j$, $\mathbf{z} = \sum_k z_k\,\mathbf{u}_k$ *yazıp lineerliği üç kez kullanalım:*

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i\,y_j\,z_k D(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_k).$$

Yirmi yedi terimden iki indisi aynı olan yirmi biri sıfırdır. Kalan altısında (i,j,k), $(1,2,3)$'ün bir sıralamasıdır. $\delta = D(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ diyelim. Örnek 20.4 örneğindeki yer değiştirme zinciri burada da işler, çünkü her yer değiştirme D'nin işaretini değiştirir:

$$\begin{aligned}D(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_1) = D(\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) &= \delta, \\ D(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3) = D(\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1) = D(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_2) &= -\delta.\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}D(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \delta\big(& x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 \\ & -x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 \big) = \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \times \mathbf{z},\end{aligned}$$

çünkü parantezdeki ifade üçlü çarpımın altı terimli açılımıdır (Alıştırma 9.13).
Adım 3: $\delta = \det C$. *$C(\mathbf{u}_j)$, C'nin j-inci sütunudur. Dolayısıyla $\delta = C(\mathbf{u}_1) \cdot C(\mathbf{u}_2) \times C(\mathbf{u}_3)$, satırları C'nin sütunları olan matrisin, yani C^T'nin determinantıdır (Alıştırma 9.11). Lemma 20.1 ile $\delta = \det C^T = \det C$.*
■

Yani üç vektörün gerdiği paralelyüzün işaretli hacmi (Alıştırma 9.20) bir lineer dönüşüm altında $\det C$ çarpanıyla değişir. Determinantın en önemli geometrik anlamı budur: hacimlerin büyüme çarpanı, işaretiyle birlikte. Lemmanın hemen bir sonucu, lineer cebirden bilinen çarpım formülüdür.

Sonuç 20.2 (Çarpımın Determinantı). *Her 3×3 X ve Y matrisi için $\det(XY) = \det X \cdot \det Y$.*

İspat.
$X = (x_{ik})$'in satırları $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ve C, matrisi Y^T olan lineer dönüşüm olsun. XY'nin i-inci satırının j-inci girdisi

$$\sum_{k=1}^{3} x_{ik}\, y_{kj} = \sum_{k=1}^{3} (Y^T)_{jk}\, x_{ik}$$

olup bu, $C(\mathbf{x}_i)$'nin j-inci koordinatıdır. Yani XY'nin satırları $C(\mathbf{x}_1), C(\mathbf{x}_2), C(\mathbf{x}_3)$'tür. Alıştırma 9.11, Lemma 20.2 ve Lemma 20.1 ile

$$\begin{aligned}\det(XY) &= C(\mathbf{x}_1) \cdot C(\mathbf{x}_2) \times C(\mathbf{x}_3) \\ &= \det Y^T\, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 = \det Y \cdot \det X.\end{aligned}$$

■

Artık bir izometrinin çatıların yönüne etkisini söyleyebiliriz. Bir izometrinin teğet dönüşümü çatıları çatılara götürür (Sonuç 19.3); aşağıdaki lemma bu çatıların yönlerine ne olduğunu söyler.

Lemma 20.3 (İzometri Altında Çatının Yönü). *e_1, e_2, e_3, $\mathbb{R}^3$'ün bir $\mathbf{p}$ noktasında bir çatı ve F bir izometri ise*

$$F_*(e_1) \cdot F_*(e_2) \times F_*(e_3) = (\operatorname{sgn} F) e_1 \cdot e_2 \times e_3.$$

İspat.
C, F'nin ortogonal kısmı olsun. Teorem 19.1 gereği $F_*(e_i)$, vektör kısmı e_i'nin vektör kısmının C altındaki görüntüsü olan ve $F(\mathbf{p})$'de uygulanan teğet vektördür; bunu kısaca $C(e_i)$ diye yazalım. Aynı noktadaki teğet vektörlerin üçlü çarpımı vektör kısımlarından hesaplandığından Lemma 20.2

$$F_*(e_1) \cdot F_*(e_2) \times F_*(e_3) = C(e_1) \cdot C(e_2) \times C(e_3) = \det C\, e_1 \cdot e_2 \times e_3$$

verir ve $\det C = \operatorname{sgn} F$'dir.
■

Lemmayı duruş matrisleriyle de okuyabiliriz. $A = (a_{jk})$, e_1, e_2, e_3'ün duruş matrisi, yani $e_j = \sum_k a_{jk}\, U_k(\mathbf{p})$ olsun. F_* lineerdir ve $F_*(U_k(\mathbf{p}))$'nin vektör kısmı C'nin k-inci sütunudur; $\overline{U}_i = U_i(F(\mathbf{p}))$ yazarsak

$$F_*(e_j) = \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{k=1}^{3} c_{ik}\, a_{jk} \Big) \overline{U}_i$$

olur. Yeni çatının duruş matrisinin (j,i) girdisi $\sum_k a_{jk}\, c_{ik} = \sum_k a_{jk}\, (C^T)_{ki}$, yani matrisin kendisi $A\, C^T$'dir. Lemma, Sonuç 20.2 ve Lemma 20.1 ile elde edilen $\det(A\, C^T) = \det A \cdot \det C$ eşitliğinin geometrik okunuşudur.
Yani $\operatorname{sgn} F = +1$ ise F_* pozitif yönlü çatıları pozitif yönlü, negatif yönlüleri negatif yönlü çatılara götürür. $\operatorname{sgn} F = -1$ ise pozitifi negatife, negatifi pozitife çevirir. İzometrileri buna göre adlandırıyoruz.

Tanım 20.3 (Yönü Koruyan ve Ters Çeviren İzometri). Ortogonal kısmı C olan bir F izometrisine $\operatorname{sgn} F = \det C = +1$ ise **yönü koruyan** (orientation-preserving), $\operatorname{sgn} F = \det C = -1$ ise **yönü ters çeviren** (orientation-reversing) izometri denir.

Yani yönü koruyan bir izometri sağ eldiveni sağ eldivene, yönü ters çeviren bir izometri sağ eldiveni sol eldivene götürür. Her izometri bu iki türden tam olarak birindendir.

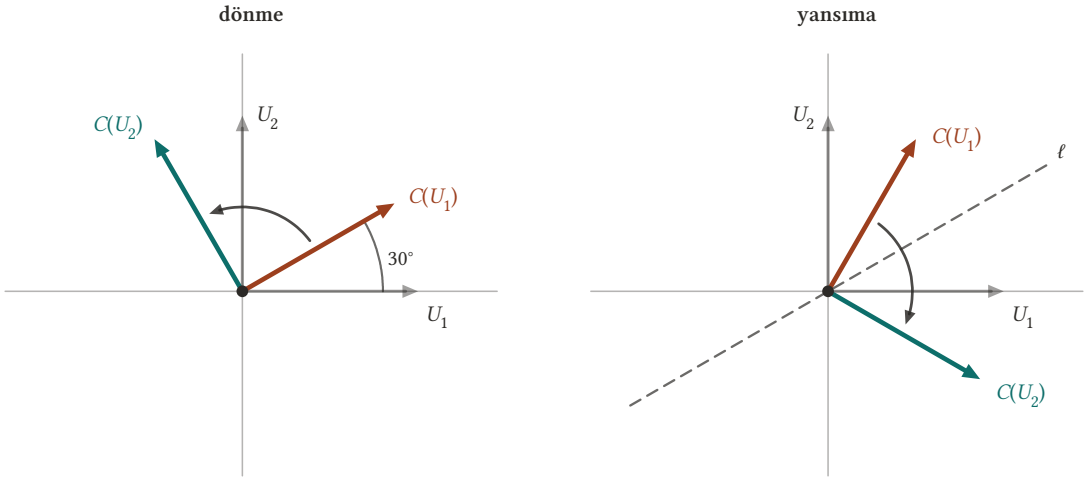
20.3 Ötelemeler, Dönmeler ve Yansımalar

Tanımları en tanıdık izometriler üzerinde deneyelim. Bunların formüllerini ve matrislerini Öklid Uzayının İzometrileri bölümünde kurmuştuk; burada işaretlerine ve çatılara etkilerine bakacağız. Önce düzlemde ısınalım.

Örnek 20.7 (Düzlemde Dönme ve Yansıma). Düzlemde başlangıç noktası etrafında 30°'lik dönme ve başlangıç noktasından geçip x ekseniyle 30° açı yapan ℓ doğrusunda yansıma (Örnek 18.1, Örnek 18.2)

 CC BY-NC-SA 4.0

doğal çatı U_1, U_2'yi nereye götürür? Matrislerini ve determinantlarını bulup görüntü çatıların yönünü belirleyelim.



Şekil 20.3: Düzlemde doğal çatı U_1, U_2 (gri) ve iki ortogonal dönüşüm altındaki görüntüsü. Solda 30° dönme: görüntüde de birinci oktan ikinciye kısa dönüş saatin tersi yönündedir. Sağda başlangıç noktasından geçen ve x ekseniyle 30° açı yapan ℓ doğrusunda yansıma: görüntüde bu dönüş saat yönüne çevrilmiştir.

Çözüm.
Dönme. φ açısı kadar dönme (x, y) noktasını

$$(x\cos\varphi - y\sin\varphi,\, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$

noktasına götürür. $\varphi = 30°$ için matris ve determinant

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \qquad \det C = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Sütunlar görüntülerdir: $C(U_1) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ ve $C(U_2) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. İkincisi birincinin saatin tersi yönünde 90° döndürülmüşüdür; görüntü çatı da pozitif yönlüdür (Örnek 20.5).
Yansıma. x ekseniyle θ açısı yapan bir birim vektör, ℓ doğrusuna göre yansıyınca doğrunun öbür yanında doğruyla aynı açıyı yapar; yeni açısı $2\cdot 30° - \theta$'dır. U_1 için $\theta = 0°$ ve görüntünün açısı 60°'dir; U_2 için $\theta = 90°$ ve görüntünün açısı $-30°$'dir:

$$C(U_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad C(U_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Matris ve determinant:

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \det C = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$$

Görüntü çatıda ikinci vektör birincinin saat yönünde 90° döndürülmüşüdür; çatı negatif yönlüdür. Düzlemde de dönmeler yönü korur, yansımalar ters çevirir.
■

Düzlemdeki bu ayrım $\mathbb{R}^3$'e de taşınır ve bir ad hak eder.

Tanım 20.4 (Dönme). Determinantı $+1$ olan bir ortogonal dönüşüme **dönme** (rotation) denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani dönmeler, yönü koruyan ortogonal dönüşümlerdir. Bütün dönmelerin kümesi $O^+(3)$ ile gösterilir. Adın haklı olduğunu, yani her dönmenin gerçekten bir eksen etrafında döndürdüğünü alıştırmalarda ispatlayacağız (Alıştırma 20.6).

Örnek 20.8 (Ötelemeler Yönü Korur). $\mathbf{a}$ ile öteleme olan T'nin (Tanım 18.2) yönü koruduğunu gösterelim ve bunun geometrik anlamını görelim.

> **Çözüm.**
> $T(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + \mathbf{p} = \mathbf{a} + I(\mathbf{p})$ yazılışı, T'nin ortogonal kısmının birim dönüşüm I, öteleme kısmının da T'nin kendisi olduğunu gösterir. Birim matrisin determinantı 1 olduğundan $\operatorname{sgn} T = \det I = +1$.
> Geometrik anlamı: Teorem 19.1 gereği $T_*(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}+\mathbf{a}}$'dır. Öteleme bir çatının oklarını hiç döndürmeden yeni noktaya taşır; vektör kısımları değişmediği için üçlü çarpım da değişmez.
> ■

Örnek 20.9 (Düşey Eksen Etrafında Dönme). $\mathbb{R}^3$'ü z ekseni etrafında θ açısı kadar döndüren (Örnek 18.5)

$$C_\theta(p_1, p_2, p_3) = (p_1\cos\theta - p_2\sin\theta,\; p_1\sin\theta + p_2\cos\theta,\; p_3)$$

ortogonal dönüşümünün işaretini bulalım. $\theta = \pi/2$ için Örnek 20.2 örneğindeki çatıya etkisini de hesaplayalım.

> **Çözüm.**
> Matris
>
> $$C_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> ve birinci satıra göre açılım
>
> $$\det C_\theta = \cos\theta\,(\cos\theta - 0) - (-\sin\theta)(\sin\theta - 0) + 0 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
>
> verir. Her θ için C_θ bir dönmedir ve yönü korur. x ve y eksenleri etrafındaki dönmelerin matrislerinde de aynı $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ toplamı çıkar; üç koordinat ekseni etrafındaki dönmelerin hepsi bu anlamda dönmedir.
> $\theta = \pi/2$ için $C(p_1, p_2, p_3) = (-p_2, p_1, p_3)$'tür. Çatının görüntüsünün vektör kısımları
>
> $$C(e_1) = \frac{1}{3}(-2, 2, 1), \qquad C(e_2) = \frac{1}{3}(-1, -2, 2), \qquad C(e_3) = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$$
>
> olur. Önerme 20.1 ile denetleyelim:
>
> $$(-2,2,1) \times (-1,-2,2) = \big(\, 2\cdot 2 - 1\cdot(-2),\; 1\cdot(-1) - (-2)\cdot 2,\; (-2)(-2) - 2\cdot(-1) \,\big) = (6, 3, 6),$$
>
> yani $C(e_1) \times C(e_2) = \frac{1}{9}(6,3,6) = C(e_3)$. Görüntü çatı da sağ ellidir; Lemma 20.3 de bunu söyler.
> ■

Dönmelerin karşıtı yansımalardır; yönlendirmenin ters çevrilmesini, kelimenin tam anlamıyla, bir aynada görebiliriz. Başlangıç noktasından geçen ve birim normali $\mathbf{n}$ olan düzlemde yansıma, $C(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$ formülüyle verilen bir ortogonal dönüşümdür (Örnek 18.7): $\mathbf{p}$'nin $\mathbf{n}$ doğrultusundaki bileşeni ters çevrilir, düzlemdeki bileşeni olduğu gibi kalır. En basit durum bir koordinat düzlemidir.

Örnek 20.10 (Bir Koordinat Düzleminde Yansıma). $\mathbf{n} = (1,0,0)$ için yansıma

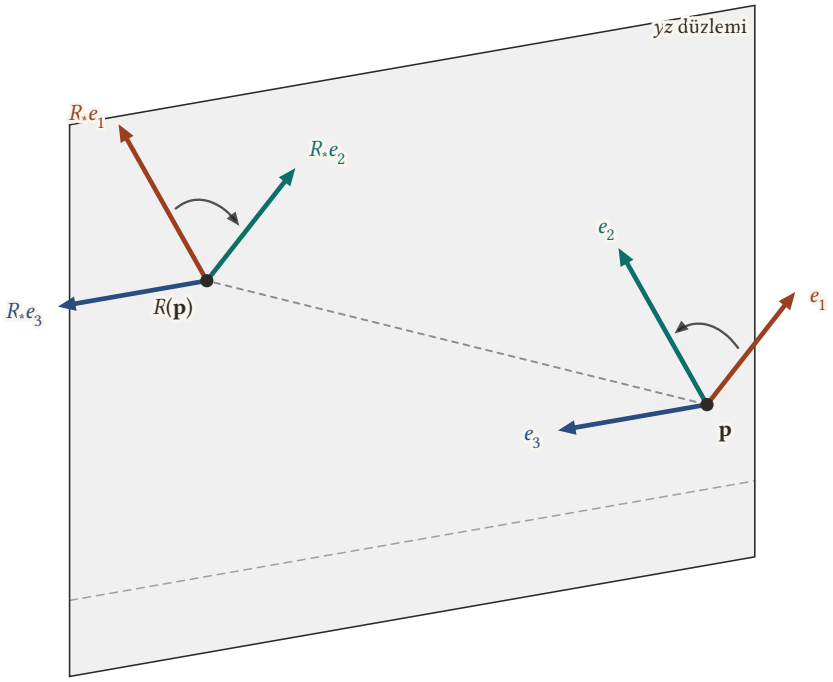
$$R(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - 2p_1\,(1,0,0) = (-p_1, p_2, p_3)$$

olur. yz düzlemine bakan bir göz, $\mathbf{p}$ noktasının görüntüsünü aynanın arkasında, $R(\mathbf{p})$ noktasında görür. R'nin yönü ters çeviren bir izometri olduğunu gösterelim ve $\mathbf{p} = (2,1,1)$ noktasındaki

 CC BY-NC-SA 4.0

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \qquad e_3 = (0,-1,0)$$

çatısına etkisini bulalım.



Şekil 20.4: yz düzleminde yansıma. $\mathbf{p}$ = (2, 1, 1) noktasındaki sağ elli e_1, e_2, e_3 çatısı (sağda) ve $R(\mathbf{p})$ = (−2, 1, 1) noktasındaki görüntüsü (solda). Kavisli oklar birinci vektörden ikinciye kısa dönüşü gösterir. Ayna e_1 ile e_2'nin doğrultularını yer değiştirir, e_3'ü olduğu gibi bırakır; bu yüzden görüntüde dönüş tersine çevrilir ve görüntü çatı sol ellidir.

Çözüm.
Ortogonal dönüşüm. R, Örnek 18.7 içindeki yansımanın $\mathbf{n} = \mathbf{u}_1$ için yazılışıdır; iç çarpımı koruduğu doğrudan da görülür:

$$R(\mathbf{p}) \cdot R(\mathbf{q}) = (-p_1)(-q_1) + p_2q_2 + p_3q_3 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}.$$

Dolayısıyla bir ortogonal dönüşümdür, özel olarak bir izometridir (Teorem 18.1); ortogonal kısmı kendisidir.
İşaret. Matris ve determinant:

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det R = -1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 0 + 0 = -1.$$

R yönü ters çevirir.
Verilen üçlü sağ elli bir çatıdır. Vektörler birimdir; $e_1 \cdot e_2 = (-1+0+1)/2 = 0$ ve $e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$'dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= \frac{1}{2}\big(\,0\cdot 1 - 1\cdot 0,\, 1\cdot(-1) - 1\cdot 1,\, 1\cdot 0 - 0\cdot(-1)\,\big) \\ &= (0,-1,0) = e_3. \end{aligned}$$

Görüntü çatı. Teorem 19.1 gereği $R_*(e_i)$, vektör kısmı $R(e_i)$ olan ve $R(\mathbf{p}) = (-2,1,1)$'de uygulanan vektördür:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$R(e_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\qquad R(e_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\qquad R(e_3)=(0,-1,0).$$

Bunlar sırasıyla e_2, e_1 ve e_3'ün vektör kısımlarıdır: ayna e_1 ile e_2'nin doğrultularının yerini değiştirmiş, e_3'e dokunmamıştır. Vektör kısımlarıyla hesaplarsak

$$R(e_1)\times R(e_2)=e_2\times e_1=-\,e_1\times e_2=-e_3=-R(e_3)$$

olur; Önerme 20.1 gereği görüntü çatı sol ellidir. Bu, Lemma 20.3 içindeki $(-1)\cdot(+1)=-1$ hesabının ta kendisidir. Deneysel gerçek de bunu doğrular: sağ elin aynadaki görüntüsü sol eldir.
■

Aynı hesap, bir koordinat düzleminde değil başlangıç noktasından geçen herhangi bir düzlemde yansıma için de yapılabilir.

Örnek 20.11 (Her Yansıma Yönü Ters Çevirir). $\mathbf{n}$ bir birim vektör ve $C(\mathbf{p})=\mathbf{p}-2\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$'ye dik olan ve başlangıç noktasından geçen düzlemde yansıma olsun. C'nin bir ortogonal dönüşüm olduğunu biliyoruz (Örnek 18.7). $\det C=-1$ olduğunu, yani her yansımanın yönü ters çevirdiğini gösterelim; $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ için de matrisini yazalım.

Çözüm.
İşaret. $\mathbf{n}$'yi bir çatıya tamamlayalım: $\mathbf{n}$'ye dik bir birim e_1 seçip $e_2=\mathbf{n}\times e_1$ ve $e_3=\mathbf{n}$ alalım. e_1 ve e_2, $\mathbf{n}$'ye dik olduğundan $C(e_1)=e_1$ ve $C(e_2)=e_2$; ayrıca $C(\mathbf{n})=\mathbf{n}-2\mathbf{n}=-\mathbf{n}$. Lemma 20.2 bu üç vektöre uygulanınca

$$\det C\; e_1\cdot e_2\times e_3=C(e_1)\cdot C(e_2)\times C(e_3)=e_1\cdot e_2\times(-e_3)=-\,e_1\cdot e_2\times e_3$$

bulunur. $e_1\cdot e_2\times e_3=\pm1\neq0$ olduğundan $\det C=-1$.
Sayısal örnek. $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ için $2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}=(p_1+p_2)(1,1,0)$ ve

$$C(p_1,p_2,p_3)=(p_1,p_2,p_3)-(p_1+p_2,p_1+p_2,0)=(-p_2,-p_1,p_3).$$

Matris ve determinant:

$$C=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \det C=0-(-1)\,\big(\,(-1)\cdot1-0\cdot0\,\big)+0=-1.$$

Örneğin $C(1,2,3)=(-2,-1,3)$. Ayna $x+y=0$ düzlemidir: $(1,-1,0)$ gibi bu düzlemdeki noktalar yerinde kalır, $(1,1,0)$ ise $(-1,-1,0)$'a gider.
■

Örnek 20.12 (Başlangıç Noktasına Göre Yansıma). $F(\mathbf{p})=-\mathbf{p}$ izometrisinin işaretini $\mathbb{R}^3$'te ve düzlemde karşılaştıralım.

Çözüm.
F lineerdir ve $(-\mathbf{p})\cdot(-\mathbf{q})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$ olduğundan ortogonaldir (Alıştırma 18.10); matrisi $-I$'dır. $\mathbb{R}^3$'te

$$\det(-I)=(-1)\,\big(\,(-1)(-1)-0\cdot0\,\big)-0+0=-1:$$

başlangıç noktasına göre yansıma yönü ters çevirir. Bunu üç yansımanın bileşkesi olarak da görebiliriz: $-I$, köşegenleri $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ ve $(1,1,-1)$ olan köşegen matrislerin çarpımıdır, yani yz, xz ve xy düzlemlerindeki yansımaların bileşkesidir. Sonuç 20.2 ile determinant $(-1)^3=-1$ olur.
Düzlemde ise $-I$'nın determinantı

$$\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}=(-1)(-1)-0\cdot0=1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur: düzlemde $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$, başlangıç noktası etrafında π kadar dönmedir ve yönü korur. Fark boyutun tek ya da çift oluşundan gelir: $-I$'nın determinantı $\mathbb{R}^2$'de $(-1)^2$, $\mathbb{R}^3$'te $(-1)^3$'tür. Aynı tek–çift farkı, alıştırmalarda her dönmenin bir ekseni olduğunu ispatlarken yeniden karşımıza çıkacak.
■

Formülü verilmiş bir izometrinin işaretini bulmak için önce onu Öklid Uzayının İzometrileri bölümündeki gibi öteleme kısmına ve ortogonal kısmına ayırır, sonra ortogonal kısmın determinantını hesaplarız.

Örnek 20.13 (Formülü Verilen Bir İzometrinin İşareti). $F(\mathbf{p}) = (p_3 - 1, p_2 - 2, p_1 - 3)$ izometrisinin (Alıştırma 18.12) işaretini bulalım ve geometrik anlamını görelim.

Çözüm.
Ayrışım. Öteleme kısmı $\mathbf{a} = F(\mathbf{0}) = (-1, -2, -3)$ ile öteleme, ortogonal kısmı $C(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - \mathbf{a} = (p_3, p_2, p_1)$'dir (Alıştırma 18.12). Matris:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

İşaret. Birinci satıra göre açılım

$$\det C = 0 - 0 + 1 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -1$$

verir. F yönü ters çevirir.
Geometrik anlamı. C, x ile z koordinatlarının yerini değiştirir; bu, $x = z$ düzleminde yansımadır. Gerçekten yansıma formülü $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ için $2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n} = (p_1 - p_3)(1, 0, -1)$ ve

$$\mathbf{p} - (p_1 - p_3)(1, 0, -1) = (p_3, p_2, p_1)$$

verir. Yani F, bir yansımadan sonra bir ötelemedir. Sağlama: $F(1, 2, 3) = (2, 0, -2)$ ve

$$\mathbf{a} + C(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) + (3, 2, 1) = (2, 0, -2).$$

■

20.4 Vektörel Çarpım ve İzometriler

İç çarpım ve vektörel çarpım başlangıçta Öklid koordinatlarıyla tanımlandı. İç çarpımın, hangi çatıda koordinat alırsak alalım aynı formülle hesaplandığını gördük (Önerme 9.4):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \Big(\sum_i v_i\, e_i\Big) \cdot \Big(\sum_i w_i\, e_i\Big) = \sum_i v_i\, w_i.$$

Vektörel çarpım için de hemen hemen aynı şey doğrudur; ama bu kez yönlendirme işe karışır.

Lemma 20.4 (Vektörel Çarpımın Bir Çatıdaki Formülü). *e_1, e_2, e_3 bir noktada bir çatı ve $\varepsilon = e_1 \cdot e_2 \times e_3$ olsun. $\mathbf{v} = \sum_i v_i\, e_i$ ve $\mathbf{w} = \sum_i w_i\, e_i$ ise*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \varepsilon \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

yani

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \varepsilon \left[\, (v_2 w_3 - v_3 w_2)\, e_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\, e_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\, e_3 \,\right].$$

İspat.
Vektörel çarpım her iki çarpanında lineer olduğundan (Önerme 9.6)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \sum_{i,j=1}^{3} v_i\, w_j e_i \times e_j.$$

Dokuz terimden $i = j$ olan üçü sıfırdır. Kalan altı çarpımı Önerme 20.2 verir:

$$\begin{aligned} v_1 w_2\, e_1 \times e_2 + v_2 w_1\, e_2 \times e_1 &= \varepsilon\,(v_1 w_2 - v_2 w_1)\, e_3, \\ v_2 w_3\, e_2 \times e_3 + v_3 w_2\, e_3 \times e_2 &= \varepsilon\,(v_2 w_3 - v_3 w_2)\, e_1, \\ v_3 w_1\, e_3 \times e_1 + v_1 w_3\, e_1 \times e_3 &= \varepsilon\,(v_3 w_1 - v_1 w_3)\, e_2. \end{aligned}$$

Üç satırın toplamı iddia edilen formüldür. Biçimsel determinantın birinci satıra göre açılımı da tam bu katsayıları verir.
■

Yani pozitif yönlü bir çatıda vektörel çarpım, doğal koordinatlardaki formülün aynısıyla hesaplanır; negatif yönlü bir çatıda ise aynı formülün önüne bir eksi işareti gelir.

Örnek 20.14 (Sağ Elli Çatıda Vektörel Çarpım). Örnek 20.2 örneğindeki e_1, e_2, e_3 çatısında $\mathbf{v} = 2e_1 + e_2$ ve $\mathbf{w} = e_2 + 3e_3$ olsun. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$'yi lemmayla ve Öklid koordinatlarıyla hesaplayıp karşılaştıralım.

Çözüm.
Lemmayla. Çatıdaki koordinatlar $(2, 1, 0)$ ve $(0, 1, 3)$'tür ve $\varepsilon = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (1 \cdot 3 - 0 \cdot 1)\, e_1 + (0 \cdot 0 - 2 \cdot 3)\, e_2 + (2 \cdot 1 - 1 \cdot 0)\, e_3 \\ &= 3e_1 - 6e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

Öklid koordinatlarına çevirirsek

$$3e_1 - 6e_2 + 2e_3 = (2, 2, 1) + (4, -2, -4) + \frac{1}{3}(2, -4, 4) = \frac{1}{3}(20, -4, -5).$$

Öklid koordinatlarıyla. Önce iki vektörü yazalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{3}(4, 4, 2) + \frac{1}{3}(-2, 1, 2) = \frac{1}{3}(2, 5, 4), \\ \mathbf{w} &= \frac{1}{3}(-2, 1, 2) + (1, -2, 2) = \frac{1}{3}(1, -5, 8). \end{aligned}$$

Sonra vektörel çarpım:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \frac{1}{9}\left(5 \cdot 8 - 4 \cdot (-5),\, 4 \cdot 1 - 2 \cdot 8,\, 2 \cdot (-5) - 5 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{9}(60, -12, -15), \end{aligned}$$

yani $\frac{1}{3}(20, -4, -5)$. İki yol aynı sonucu verir.
■

Örnek 20.15 (Sol Elli Çatıda Vektörel Çarpım). Örnek 20.3 örneğindeki f_1, f_2, f_3 çatısında aynı katsayılarla $\mathbf{v} = 2f_1 + f_2$ ve $\mathbf{w} = f_2 + 3f_3$ alalım. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$'yi iki yoldan bulalım ve ε çarpanının neden gerekli olduğunu görelim.

Çözüm.
Lemmayla. Koordinatlar öncekiyle aynıdır, determinant yine $3f_1 - 6f_2 + 2f_3$ verir; ama bu çatıda $\varepsilon = -1$'dir:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -(3f_1 - 6f_2 + 2f_3) = -3f_1 + 6f_2 - 2f_3.$$

Öklid koordinatlarına çevirirsek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-\frac{3}{\sqrt{2}}(1,0,1)+(0,6,0)-\frac{2}{\sqrt{2}}(1,0,-1)=\Big(-\frac{5}{\sqrt{2}},6,-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Öklid koordinatlarıyla. $\mathbf{v}=(\sqrt{2},1,\sqrt{2})$ ve $\mathbf{w}=\big(\frac{3}{\sqrt{2}},1,-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)$'dir. Vektörel çarpımın üç koordinatı:

$$\begin{aligned}
v_2w_3-v_3w_2 &= 1\cdot\big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)-\sqrt{2}\cdot 1=-\frac{5}{\sqrt{2}},\\
v_3w_1-v_1w_3 &= \sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\cdot\big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\big)=6,\\
v_1w_2-v_2w_1 &= \sqrt{2}\cdot 1-1\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

İki yol uyuşur. ε çarpanını unutsaydık tam ters işaretli vektörü bulurduk: sol elli bir çatıda doğal koordinatların formülü vektörel çarpımın tersini verir.
■

Lemmadan bir izometrinin vektörel çarpıma etkisi hemen çıkar; orada da yönlendirme işin içindedir.

Önerme 20.3 (İzometriler Vektörel Çarpımı İşaretine Kadar Korur). $\mathbf{v}$ *ve* $\mathbf{w}$, $\mathbb{R}^3$*'ün bir* $\mathbf{p}$ *noktasında teğet vektörler ve* F *bir izometri ise*

$$F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\operatorname{sgn} F)F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w}).$$

İspat.
$\mathbf{v}=\sum_i v_i\,U_i(\mathbf{p})$ *ve* $\mathbf{w}=\sum_i w_i\,U_i(\mathbf{p})$ *yazalım ve* $e_i=F_*(U_i(\mathbf{p}))$ *diyelim. Sonuç 19.3 gereği* e_1,e_2,e_3, $F(\mathbf{p})$ *noktasında bir çatıdır.* F_* *lineer olduğundan (Sonuç 7.1)*

$$F_*(\mathbf{v})=\sum_i v_i\,e_i,\qquad F_*(\mathbf{w})=\sum_i w_i\,e_i.$$

Bu çatıda Lemma 20.4 uygulanır; katsayılar $\mathbf{v}$ *ile* $\mathbf{w}$*'nin doğal koordinatlarıdır:*

$$\begin{aligned}
F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w}) = \varepsilon\big[\,&(v_2w_3-v_3w_2)\,e_1+(v_3w_1-v_1w_3)\,e_2\\
&+(v_1w_2-v_2w_1)\,e_3\,\big].
\end{aligned}$$

Öte yandan vektörel çarpımın tanımına göre

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(v_2w_3-v_3w_2)\,U_1(\mathbf{p})+(v_3w_1-v_1w_3)\,U_2(\mathbf{p})+(v_1w_2-v_2w_1)\,U_3(\mathbf{p})$$

olur. F_* *lineer olup* $U_i(\mathbf{p})$*'yi* e_i*'ye götürdüğünden köşeli parantezdeki vektör* $F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$*'dir. Yani* $F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w})=\varepsilon\,F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$*. Burada*

$$\varepsilon=e_1\cdot e_2\times e_3=F_*(U_1(\mathbf{p}))\cdot F_*(U_2(\mathbf{p}))\times F_*(U_3(\mathbf{p}))$$

dir. Doğal çatı pozitif yönlü olduğundan (Örnek 20.1) Lemma 20.3 $\varepsilon=\operatorname{sgn} F$ *verir. Böylece*

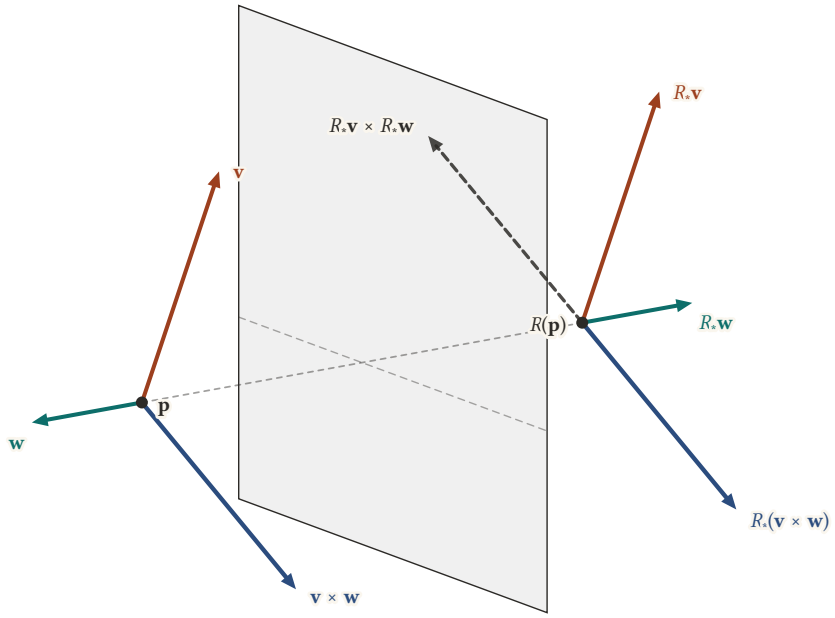
$$F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w})=(\operatorname{sgn} F)\,F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

olur; iki yanı $\operatorname{sgn} F$ *ile çarpıp* $(\operatorname{sgn} F)^2=1$ *eşitliğini kullanırsak iddia çıkar.*
■

Yani izometriler iç çarpımı tam olarak korur (Sonuç 19.2), vektörel çarpımı ise işaretine kadar: ötelemeler ve dönmeler vektörel çarpımla tam uyumludur, yansımalar onu ters çevirir. Bunun nedeni, vektörel çarpımın tanımına sağ el kuralının, yani bir yönlendirme seçiminin gizlice girmiş olmasıdır.

Örnek 20.16 (Yansımada Vektörel Çarpım). R, yz düzleminde yansıma olsun; $\mathbf{v}=(0,1,2)$ ve $\mathbf{w}=(1,0,0)$ de $\mathbf{p}=(2,0,0)$ noktasında teğet vektörler olsun. Önerme 20.3 ile verilen eşitliği bu vektörlerle denetleyelim.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.5: $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 2, -1)$ (solda) ile yz düzlemindeki yansımada görüntüleri (sağda). Aynaya paralel olan $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ değişmez, aynaya dik olan $\mathbf{w}$ ters döner. Bu yüzden $R_*\mathbf{v} \times R_*\mathbf{w}$ (kesikli ok), $R_*(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (mavi ok) ile zıt yönlüdür.

Çözüm.
Teorem 19.1 gereği R_* vektör kısımlarına R'yi uygular; hesabı vektör kısımlarıyla yapıyoruz. Önce

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (1 \cdot 0 - 2 \cdot 0,\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (0, 2, -1),$$

dolayısıyla $R_*(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$'nin vektör kısmı $R(0, 2, -1) = (0, 2, -1)$'dir. Öte yandan $R_*(\mathbf{v})$ ve $R_*(\mathbf{w})$'nin vektör kısımları $(0, 1, 2)$ ve $(-1, 0, 0)$'dır ve

$$\begin{aligned} R_*(\mathbf{v}) \times R_*(\mathbf{w}) &= \big(\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0,\ 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)\ \big) \\ &= (0, -2, 1). \end{aligned}$$

İki sonuç birbirinin tersidir: $R_*(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\,R_*(\mathbf{v}) \times R_*(\mathbf{w})$; $\operatorname{sgn} R = -1$ olduğundan önermenin öngördüğü budur.
Şekil durumu açıklıyor. Aynaya paralel olan $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ yansımada değişmez; aynaya dik olan $\mathbf{w}$ ters döner. Görüntülerin vektörel çarpımı bu yüzden $\mathbf{v} \times (-\mathbf{w}) = -\,\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ olur, vektörel çarpımın görüntüsü ise $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$'nin kendisidir.
■

Örnek 20.17 (Dönmede Vektörel Çarpım). Aynı $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ ve $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$ vektörlerine, z ekseni etrafında $\pi/2$ kadar dönme olan $C(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, p_3)$'ü uygulayalım ve vektörel çarpımın korunduğunu görelim.

Çözüm.
$C(\mathbf{v}) = (-1, 0, 2)$ ve $C(\mathbf{w}) = (0, 1, 0)$'dır. Buradan

$$\begin{aligned} C(\mathbf{v}) \times C(\mathbf{w}) &= \big(\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1,\ 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 0,\ (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0\ \big) \\ &= (-2, 0, -1). \end{aligned}$$

Öte yandan $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 2, -1)$ ve $C(0, 2, -1) = (-2, 0, -1)$. İki sonuç aynıdır; $\operatorname{sgn} C = +1$ olduğundan Önerme 20.3 de bunu öngörür.
■

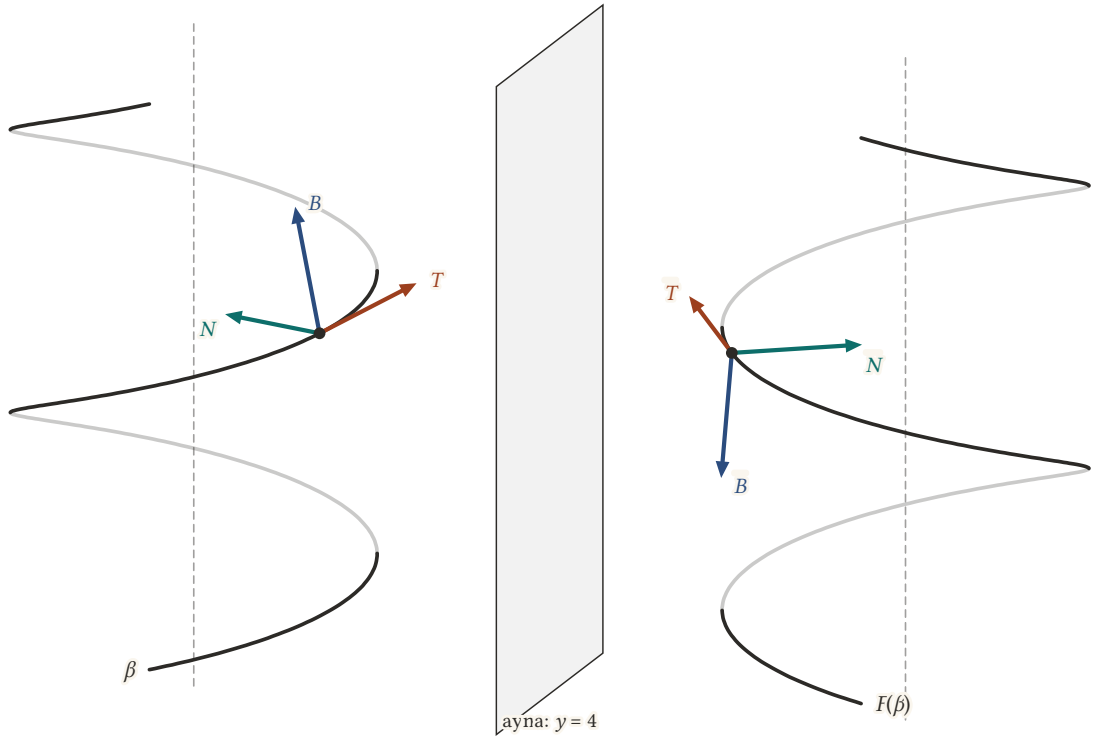
 CC BY-NC-SA 4.0

Önermenin eğriler için ne anlama geldiğini en iyi helis gösterir. Örnek 18.17 örneğinde, aynaya tutulan sağ elli bir helisin sol elli bir helise dönüştüğünü ve burulmasının işaret değiştirdiğini doğrudan hesapla görmüştük. Şimdi bunun nedenini Frenet çatısında görelim: binormal bir vektörel çarpımdır ve yansıma vektörel çarpımı ters çevirir.

Örnek 20.18 (Helisin Ayna Görüntüsü). $a > 0, b > 0$ ve $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ olsun. Örnek 11.5 örneğindeki birim hızlı

$$\beta(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$$

helisini ve $y = 4$ düzlemindeki aynada yansıtan $F(x, y, z) = (x, 8 - y, z)$ izometrisini alalım. $F(\beta)$ eğrisinin Frenet çatısını β'nınkiyle karşılaştıralım ve eğriliğiyle burulmasını bulalım.



Şekil 20.6: $a = 2$, $b = 1/2$ için sağ elli helis β (solda) ve $y = 4$ düzlemindeki ayna görüntüsü $F(\beta)$ (sağda). Arkada kalan kısımlar soluk çizilmiştir. Karşılıklı noktalarda Frenet çatıları gösterilmiştir. Teğet ve asli normal aynaya göre simetriktir; binormal ise aynadaki karşılığının tersine döner: $\bar{B} = -F_*(B)$.

Çözüm.
İzometrinin parçaları. $F(\mathbf{0}) = (0, 8, 0)$'dır ve $C(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{0})$ farkı $(p_1, -p_2, p_3)$'tür: F, xz düzleminde yansımadan sonra $(0, 8, 0)$ ile ötelemedir. C'nin matrisi köşegeni $(1, -1, 1)$ olan köşegen matristir ve $\det C = -1$; yani $\operatorname{sgn} F = -1$.
Görüntü eğrisi. $\bar{\beta} = F(\beta)$ ve $u = s/c$ diyelim:

$$\bar{\beta}(s) = (a\cos u, 8 - a\sin u, bu).$$

Teğet ve asli normal. Dönüşümler hızları korur (Sonuç 7.2): $\bar{\beta}' = F_*(\beta')$. Teorem 19.1 gereği F_* vektör kısımlarına C'yi uygular ve uzunlukları korur; dolayısıyla $\bar{\beta}$ da birim hızlıdır ve $\bar{T} = F_*(T)$. C sabit katsayılı lineer bir dönüşüm olduğundan türev C'nin içinden geçer: $\bar{T}' = F_*(T')$. Uzunluklar korunduğu için $\bar{\kappa} = \| \bar{T}' \| = \| T' \| = \kappa$ ve $\bar{N} = \bar{T}'/\bar{\kappa} = F_*(N)$. Açık yazarsak, Örnek 11.5 örneğindeki

$$T = \left(-\frac{a}{c}\sin u, \frac{a}{c}\cos u, \frac{b}{c}\right), \qquad N = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

vektörlerinin ikinci koordinatları işaret değiştirir:

$$\bar{T} = \left(-\frac{a}{c}\sin u, -\frac{a}{c}\cos u, \frac{b}{c}\right), \qquad \bar{N} = (-\cos u, \sin u, 0).$$

Binormal. Önerme 20.3 ile

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = F_*(T) \times F_*(N) = (\operatorname{sgn} F)\, F_*(T \times N) = -F_*(B).$$

Örnek 11.5 örneğindeki $B = \left(\frac{b}{c}\sin u, -\frac{b}{c}\cos u, \frac{a}{c} \right)$ ile

$$\bar{B} = -\left(\frac{b}{c}\sin u, \frac{b}{c}\cos u, \frac{a}{c}\right) = \left(-\frac{b}{c}\sin u, -\frac{b}{c}\cos u, -\frac{a}{c}\right).$$

Doğrudan hesap da aynı sonucu verir:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_2\bar{N}_3 - \bar{T}_3\bar{N}_2 &= 0 - \frac{b}{c}\sin u, \\
\bar{T}_3\bar{N}_1 - \bar{T}_1\bar{N}_3 &= -\frac{b}{c}\cos u - 0, \\
\bar{T}_1\bar{N}_2 - \bar{T}_2\bar{N}_1 &= -\frac{a}{c}\sin^2 u - \frac{a}{c}\cos^2 u = -\frac{a}{c}.
\end{aligned}$$

Burulma. $\bar{B}$'nin türevi

$$\bar{B}' = \left(-\frac{b}{c^2}\cos u, \frac{b}{c^2}\sin u, 0\right) = \frac{b}{c^2}\,(-\cos u, \sin u, 0) = \frac{b}{c^2}\,\bar{N}.$$

Frenet formülü $\bar{B}' = -\bar{\tau}\,\bar{N}$ ile karşılaştırınca $\bar{\tau} = -b/c^2$ çıkar. β'nın burulması $\tau = b/c^2$ idi: eğrilik aynı kaldı, burulma işaret değiştirdi.
Sayısal olarak şekildeki $a = 2$, $b = 1/2$ helisinde $c^2 = 17/4$, $\kappa = \bar{\kappa} = 8/17$, $\tau = 2/17$ ve $\bar{\tau} = -2/17$'dir. Geometrik anlamı şekilde görünür: β, yükselirken yukarıdan bakınca saatin tersi yönünde dolanan sağ elli bir helistir; aynadaki görüntüsü ise yükselirken saat yönünde dolanan sol elli bir helistir. Bu örnekte burulmanın işareti helisin elliliğini kaydeder: yönü ters çeviren ayna sağ elli helisi sol elli bir helise çevirmiş, burulmanın işaretini de değiştirmiştir.
■

20.5 Alıştırmalar

Aşağıda A, B, C ortogonal dönüşümleri ya da matrislerini, $T_{\mathbf{a}}$ da $\mathbf{a}$ ile ötelemeyi gösterir. FG, önce G'nin sonra F'nin uygulandığı bileşkedir.

Alıştırma 20.1 (Bileşkenin İşareti). F ve G, $\mathbb{R}^3$'ün izometrileri olsun.

$$\operatorname{sgn}(FG) = \operatorname{sgn} F \cdot \operatorname{sgn} G = \operatorname{sgn}(GF)$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.
Bileşkenin ortogonal kısmı. $F = T_{\mathbf{a}}A$ ve $G = T_{\mathbf{b}}B$ yazalım. Her $\mathbf{p}$ için A'nın lineerliğiyle

$$FG(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + A\left(\mathbf{b} + B(\mathbf{p})\right) = \left(\mathbf{a} + A(\mathbf{b})\right) + AB(\mathbf{p}).$$

AB iki ortogonal dönüşümün bileşkesi olarak ortogonaldir: $AB(\mathbf{p}) \cdot AB(\mathbf{q}) = B(\mathbf{p}) \cdot B(\mathbf{q})$ ve bu da $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$'ya eşittir. Ayrışımın tekliğinden (Teorem 18.2) FG'nin ortogonal kısmı AB, öteleme kısmı ise $\mathbf{a} + A(\mathbf{b})$ ile ötelemedir.
Bileşkenin matrisi. AB'nin matrisinin j-inci sütunu $AB(\mathbf{u}_j) = A\left(B(\mathbf{u}_j)\right)$'dir. $B(\mathbf{u}_j)$, B'nin j-inci sütunu (b_{1j}, b_{2j}, b_{3j})'dir; A uygulanınca i-inci koordinat $\sum_k a_{ik}\, b_{kj}$ olur. Bu da matris çarpımı AB'nin (i,j) girdisidir: bileşkenin matrisi matrislerin çarpımıdır.
İşaret. Sonuç 20.2 ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\operatorname{sgn}\,(FG) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \operatorname{sgn}\,F \cdot \operatorname{sgn}\,G.$$

Aynı hesap GF için $\operatorname{sgn}\,(GF) = \det B \cdot \det A$ verir ve sayıların çarpımı değişmeli olduğundan bu da aynı sayıdır. FG ile GF genellikle farklı izometrilerdir, ama işaretleri her zaman aynıdır.
Örnek. Başlangıç noktasından geçen bir düzlemdeki her yansımanın işareti -1'dir (Örnek 20.11). Böyle iki yansımanın bileşkesinin işareti bu yüzden $(-1)(-1) = +1$'dir; bileşke ortogonal olduğundan bir dönmedir (Tanım 20.4). Örneğin önce xz düzleminde, sonra z eksenini içeren ve xz düzlemiyle φ açısı yapan düzlemde yansımak, z ekseni çevresinde 2φ açısıyla döndürmektir (Alıştırma 18.21).
■

Alıştırma 20.2 (Tersin İşareti). Her F izometrisi için $\operatorname{sgn}\,(F^{-1}) = \operatorname{sgn}\,F$ olduğunu Alıştırma 20.1 sonucunu kullanarak çıkarınız.

Çözüm.
F^{-1} vardır ve bir izometridir (Sonuç 18.1); $FF^{-1} = I$ birim dönüşümdür. Birim dönüşümün ortogonal kısmı kendisidir ve $\operatorname{sgn}\,I = \det I = 1$. Önceki alıştırmaya göre

$$1 = \operatorname{sgn}\,(FF^{-1}) = \operatorname{sgn}\,F \cdot \operatorname{sgn}\,(F^{-1}).$$

İki çarpan da ± 1'dir ve çarpımları 1 olduğundan eşittirler: $\operatorname{sgn}\,(F^{-1}) = \operatorname{sgn}\,F$.
Doğrudan da görülebilir. $F(\mathbf{p}) = \mathbf{a} + C(\mathbf{p})$ ise matrisi C^T olan dönüşüm C'nin tersidir, çünkü $C^TC = CC^T = I$'dır (Sonuç 9.1). $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$ eşitliğinden

$$\mathbf{p} = C^T(\mathbf{q} - \mathbf{a}) = -C^T(\mathbf{a}) + C^T(\mathbf{q})$$

bulunur; F^{-1}'in ortogonal kısmı C^T'dir ve Lemma 20.1 ile $\det C^T = \det C$.
■

Alıştırma 20.3 (Yönü Ters Çeviren İzometrilerin Ayrışımı). H_0, $\mathbb{R}^3$'ün yönü ters çeviren bir izometrisi olsun. Yönü ters çeviren her H izometrisinin, F yönü koruyan bir izometri olmak üzere, $H = H_0F$ biçiminde tek türlü yazılabildiğini gösteriniz.

Çözüm.
Varlık. $F = H_0^{-1}H$ alalım. İzometrilerin bileşkesi ve tersi izometri olduğundan (Sonuç 18.1) F bir izometridir ve $H_0F = H_0H_0^{-1}H = H$. İşareti, Alıştırma 20.1 ve Alıştırma 20.2 ile

$$\operatorname{sgn}\,F = \operatorname{sgn}\,(H_0^{-1}) \cdot \operatorname{sgn}\,H = (-1)(-1) = +1$$

bulunur; F yönü korur.
Teklik. $H = H_0F = H_0F'$ ise iki yanı soldan H_0^{-1} ile bileştirerek $F = F'$ buluruz.
Örnek. $H_0 = R$, yz düzlemindeki yansıma olsun; $RR = I$ olduğundan $R^{-1} = R$'dir. Örnek 20.13 örneğindeki $H(\mathbf{p}) = (p_3 - 1, p_2 - 2, p_1 - 3)$ için

$$F(\mathbf{p}) = R\,\big(\,H(\mathbf{p})\,\big) = (1 - p_3, p_2 - 2, p_1 - 3).$$

$F(\mathbf{0}) = (1, -2, -3)$ olduğundan F'nin ortogonal kısmı $C(\mathbf{p}) = (-p_3, p_2, p_1)$'dir. Matrisi ve determinantı

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det C = 0 - 0 + (-1)(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1.$$

Bu, y ekseni etrafında $-\pi/2$ kadar dönmenin matrisidir: $\mathbf{u}_1 \mapsto \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_2 \mapsto \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3 \mapsto -\mathbf{u}_1$. Yani F, bir dönmeden sonra bir ötelemedir ve $H = RF$. Sağlama: $H(1,2,3) = (2,0,-2)$; öte yandan $F(1,2,3) = (-2,0,-2)$ ve $R(-2,0,-2) = (2,0,-2)$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 20.4 (Bir Ortogonal Dönüşümde Vektörel Çarpımı Denetlemek). Matrisi

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

olan ortogonal dönüşüm ve aynı noktadaki $\mathbf{v} = (3,1,-1)$, $\mathbf{w} = (-3,-3,1)$ teğet vektörleri için

$$C_*(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\operatorname{sgn} C) C_*(\mathbf{v}) \times C_*(\mathbf{w})$$

formülünü denetleyiniz.

Çözüm.
Ortogonallik. Kesir çarpanını dışarıda tutarak satırlar $(-2,2,-1)$, $(2,1,-2)$ ve $(1,2,2)$'dir. Her birinin kareleri toplamı 9'dur. Karşılıklı iç çarpımlar

$$-4+2+2=0, \qquad -2+4-2=0, \qquad 2+2-4=0$$

olur. $\frac{1}{3}$ çarpanıyla satırlar ortonormaldir; C ortogonaldir.
İşaret. Birinci satıra göre açılım:

$$\det C = \frac{-2(2+4) - 2(4+2) + (-1)(4-1)}{27} = \frac{-12-12-3}{27} = -1.$$

C yönü ters çevirir; $\operatorname{sgn} C = -1$.
Sol yan. Önce vektörel çarpım:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \big(\,1\cdot 1 - (-1)(-3),\ (-1)(-3) - 3\cdot 1,\ 3\cdot(-3) - 1\cdot(-3) \,\big) \\ &= (-2, 0, -6). \end{aligned}$$

C_* vektör kısımlarına C'yi uygular (Teorem 19.1):

$$C(-2,0,-6) = \frac{1}{3}\,(4+0+6,\ -4+0+12,\ -2+0-12) = \frac{1}{3}(10,8,-14).$$

Sağ yan. İki görüntü:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{v}) &= \frac{1}{3}\,(-6+2+1,\ 6+1+2,\ 3+2-2) = (-1,3,1), \\ C(\mathbf{w}) &= \frac{1}{3}\,(6-6-1,\ -6-3-2,\ -3-6+2) = \frac{1}{3}(-1,-11,-7). \end{aligned}$$

Vektörel çarpımları:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{v}) \times C(\mathbf{w}) = \frac{1}{3}\big(&\,3\cdot(-7) - 1\cdot(-11),\ 1\cdot(-1) - (-1)(-7), \\ &(-1)(-11) - 3\cdot(-1) \,\big) = \frac{1}{3}(-10,-8,14). \end{aligned}$$

Sağ yan $(-1)\cdot\frac{1}{3}(-10,-8,14)$, yani $\frac{1}{3}(10,8,-14)$'tür ve sol yanla aynıdır. Formül doğrulanmıştır; $\operatorname{sgn} C$ çarpanı olmasaydı iki yan birbirinin tersi çıkardı.
■

Alıştırma 20.5 (Bir Dönmenin Sabit Bıraktığı Doğrultu). C bir dönme (Tanım 20.4) olsun. $C(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $\mathbf{p}$ noktası bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$C(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ denklemi $(C - I)\,\mathbf{p} = \mathbf{0}$ demektir. Önce $\det(C-I) = 0$ olduğunu, sonra bundan sıfırdan farklı bir çözüm çıktığını göstereceğiz.
Adım 1: $\det(C-I) = 0$. $CC^{T} = I$ olduğundan

$$C - I = C - CC^T = C\,(I - C^T).$$

Sonuç 20.2 ve $\det C = 1$ ile $\det(C - I) = \det(I - C^T)$. $I - C^T$, $I - C$'nin transpozudur; Lemma 20.1 ile $\det(C - I) = \det(I - C)$. Son olarak $I - C$, $C - I$'nın her satırının -1 ile çarpılmasıyla elde edilir. Determinant her satırında lineer olduğundan bu, determinantı $(-1)^3 = -1$ ile çarpar:

$$\det(C - I) = \det(I - C) = (-1)^3 \det(C - I) = -\det(C - I).$$

Demek ki $\det(C - I) = 0$. Boyutun tek olması burada kullanıldı. Düzlemde aynı hesap $(-1)^2 = 1$ verir ve hiçbir şey söylemez; gerçekten de düzlemde açısı 2π'nin katı olmayan bir dönme sıfırdan farklı hiçbir noktayı yerinde bırakmaz.

Adım 2: bir çözüm. $C - I$'nın satırları $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ olsun. $(C - I)\,\mathbf{p}$'nin i-inci koordinatı $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}$'dir; aradığımız şey üç satıra da dik, sıfırdan farklı bir $\mathbf{p}$'dir. Determinant sıfır olduğundan satırların üçlü çarpımı sıfırdır ve satırlar lineer bağımlıdır (Alıştırma 9.12): hepsi sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ile $\alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 + \alpha_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$. İki durum var.

Satırlardan ikisi, örneğin $\mathbf{r}_i$ ile $\mathbf{r}_j$, bağımsızsa $\mathbf{p} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \neq \mathbf{0}$'dır (Alıştırma 9.15) ve bu vektör $\mathbf{r}_i$ ile $\mathbf{r}_j$'ye diktir. Üçüncü satır $\mathbf{r}_k$'nın katsayısı α_k sıfır olamaz, yoksa bağıntı $\mathbf{r}_i$ ile $\mathbf{r}_j$ arasında sıfır olmayan bir bağıntı olurdu. Dolayısıyla $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_i$ ile $\mathbf{r}_j$'nin bir bileşimidir ve $\mathbf{p}$ ona da diktir.

Hiçbir iki satır bağımsız değilse bütün satırlar sıfırdan farklı tek bir $\mathbf{r}$ vektörünün katlarıdır ya da hepsi sıfırdır. İlk durumda $\mathbf{r}$'ye dik ve sıfırdan farklı herhangi bir $\mathbf{p}$, ikincisinde sıfırdan farklı herhangi bir $\mathbf{p}$ işe yarar.

Her durumda $(C - I)\,\mathbf{p} = \mathbf{0}$, yani $C(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ ve $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

Örnek. Matrisi

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

olan dönüşümün satırları ortonormaldir: kesir çarpanı dışarıda, kareler toplamları 9 ve karşılıklı iç çarpımlar $4 - 2 - 2 = 0$, $-2 - 2 + 4 = 0$, $-2 + 4 - 2 = 0$'dır. Determinantı

$$\det C = \frac{1}{27}\,\big(\,2(4+2) + 1\cdot(4-1) + 2(4+2)\,\big) = 1$$

olduğundan C bir dönmedir. $C - I$'nın satırları $\frac{1}{3}(-1,-1,2)$, $\frac{1}{3}(2,-1,-1)$ ve $\frac{1}{3}(-1,2,-1)$'dir. İlk ikisi bağımsızdır ve $\frac{1}{3}$ çarpanlarını atarak

$$\begin{aligned}(-1,-1,2) \times (2,-1,-1) = \big(\,&(-1)(-1) - 2\cdot(-1),\, 2\cdot 2 - (-1)(-1),\\ &(-1)(-1) - (-1)\cdot 2\,\big) = (3,3,3)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\mathbf{p} = (1,1,1)$ alınabilir. Gerçekten

$$C(1,1,1) = \frac{1}{3}\,(2 - 1 + 2,\, 2 + 2 - 1,\, -1 + 2 + 2) = (1,1,1).$$

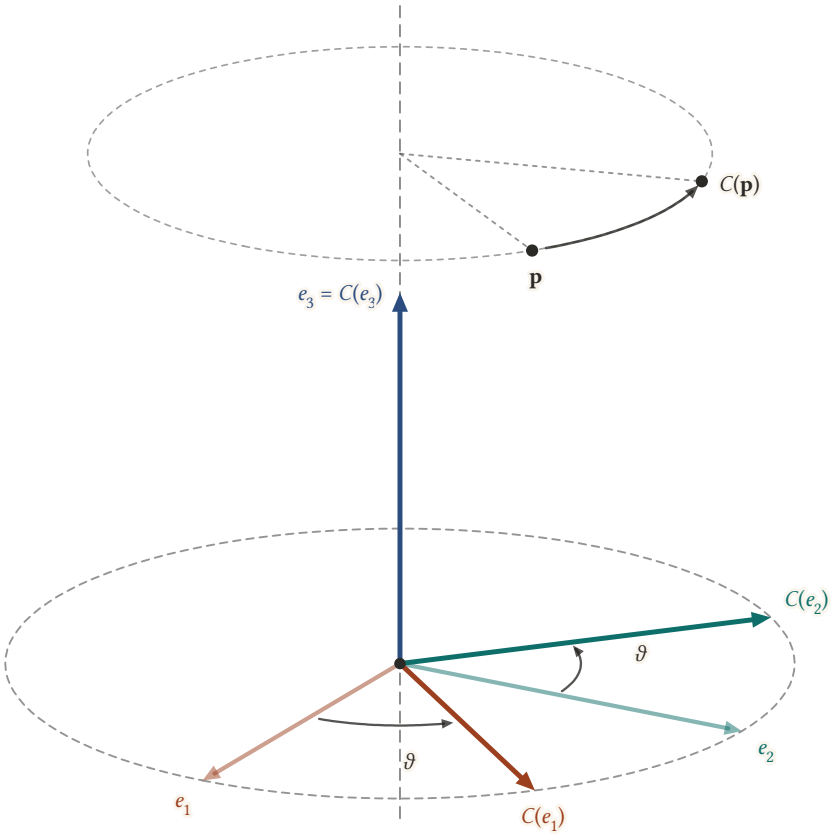
■

Alıştırma 20.6 (Her Dönme Bir Eksen Etrafında Döner). C bir dönme olsun. $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ koşulunu sağlayan e_1, e_2, e_3 noktaları ve bir ϑ sayısı bulunduğunu, öyle ki

$$\begin{aligned} C(e_1) &= \cos\vartheta e_1 + \sin\vartheta e_2,\\ C(e_2) &= -\sin\vartheta e_1 + \cos\vartheta e_2,\\ C(e_3) &= e_3 \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz. Yani C, uzayı e_3 doğrultusundaki eksen etrafında ϑ açısı kadar döndürür. Bu, Önerme 18.3 önermesinin tersidir: orada her eksen ve her açı için bir dönme kurulmuştu, burada her dönmenin böyle kurulduğu gösterilecektir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.7: Bir dönmenin ekseni ve açısı. e_3 eksen üzerindedir ve yerinde kalır; e_1 ile e_2 eksene dik düzlemde aynı ϑ açısı kadar döner (resimde $\vartheta = 50°$). Her $\mathbf{p}$ noktası eksene dik bir çember üzerinde aynı açıyla $C(\mathbf{p})$'ye taşınır.

Çözüm.
Eksen. Alıştırma 20.5 gereği $C(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ olan bir $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ vardır. $e_3 = \mathbf{p}/\parallel \mathbf{p} \parallel$ birim vektördür ve lineerlikle $C(e_3) = e_3$.
Çatı. e_3'e dik bir birim vektör e_1 seçelim. Örneğin $e_3 = (a, b, c)$ ve $(a, b) \neq (0, 0)$ ise $e_1 = (-b, a, 0)/\sqrt{a^2 + b^2}$, aksi hâlde $e_1 = (1, 0, 0)$ alınabilir. Sonra $e_2 = e_3 \times e_1$ diyelim. e_2 hem e_3'e hem e_1'e diktir ve uzunluğu $1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = 1$'dir (Sonuç 9.2); e_1, e_2, e_3 bir çatıdır. Önerme 20.2 içindeki $e_3 \times e_1 = \varepsilon\, e_2$ eşitliği burada $\varepsilon = 1$ verir: çatı pozitif yönlüdür.
$C(e_1)$ eksene dik düzlemdedir. C iç çarpımı korur: $C(e_1) \cdot e_3 = C(e_1) \cdot C(e_3)$ ve bu da $e_1 \cdot e_3 = 0$'a eşittir. Ortonormal açılımla (Teorem 9.1)

$$C(e_1) = \alpha\, e_1 + \beta\, e_2, \qquad \alpha = C(e_1) \cdot e_1, \quad \beta = C(e_1) \cdot e_2.$$

$C(e_1)$ birim uzunlukta olduğundan $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (Önerme 9.4); dolayısıyla $\alpha = \cos\vartheta$ ve $\beta = \sin\vartheta$ olacak biçimde bir ϑ vardır.
$C(e_2)$'nin iki adayı. Aynı biçimde $C(e_2) \cdot e_3 = 0$'dır ve $C(e_2), e_1, e_2$ düzlemindedir. Ayrıca birimdir ve $C(e_1)$'e diktir. Bu düzlemde $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$'ya dik birim vektörler yalnızca $\pm(-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$'dır (Örnek 20.5 içindeki hesap). Yani bir $\sigma = \pm 1$ için

$$C(e_2) = \sigma\,(-\sin\vartheta e_1 + \cos\vartheta e_2).$$

İşaret $\sigma = +1$'dir. Bir yandan Lemma 20.2 ile

$$C(e_1) \cdot C(e_2) \times C(e_3) = \det C\; e_1 \cdot e_2 \times e_3 = 1 \cdot 1 = 1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Öte yandan Lemma 20.4, e çatısında ($\varepsilon = 1$) koordinatları $(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0)$ ve $\sigma(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$ olan iki vektöre uygulanınca yalnızca e_3 katsayısı kalır:

$$C(e_1) \times C(e_2) = \sigma\,(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)e_3 = \sigma\, e_3.$$

Nokta ile çarpının yeri değişebildiğinden (Alıştırma 9.14)

$$C(e_1) \cdot C(e_2) \times C(e_3) = C(e_1) \times C(e_2) \cdot e_3 = \sigma\, e_3 \cdot e_3 = \sigma.$$

İki hesap $\sigma = 1$ verir. İstenen üç eşitlik sağlanmıştır.
Geometrik anlamı şekildeki gibidir: $\mathbf{p} = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ noktası

$$C(\mathbf{p}) = (x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)\,e_1 + (x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\,e_2 + z\,e_3$$

noktasına gider. e_3 doğrultusundaki doğru noktası noktasına yerinde kalır, ona dik her düzlem kendi içinde ϑ açısı kadar döner; e_3'ün ucundan bakınca dönüş e_1'den e_2'ye doğrudur.
Örnek. Alıştırma 20.5 içindeki C için eksen $(1,1,1)$ doğrultusundadır. $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ve $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ alalım; o zaman

$$\begin{aligned} e_2 = e_3 \times e_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\big(\,1\cdot 0 - 1\cdot(-1),\, 1\cdot 1 - 1\cdot 0,\, 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\,\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2). \end{aligned}$$

Ayrıca

$$C(1,-1,0) = \frac{1}{3}(2+1, 2-2, -1-2) = (1,0,-1)$$

olduğundan $C(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ ve

$$\cos\vartheta = C(e_1)\cdot e_1 = \frac{1+0+0}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\vartheta = C(e_1)\cdot e_2 = \frac{1+0+2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Yani $\vartheta = \pi/3$: C, $(1,1,1)$ ekseni etrafında 60°'lik bir dönmedir.
■

Alıştırma 20.7 (Bir Vektörel Çarpım Formülünün Tanımladığı Ortogonal Dönüşüm). $\mathbf{a}$, $\|\,\mathbf{a}\,\| = 1$ olan bir nokta olsun.

$$C(\mathbf{p}) = \mathbf{a} \times \mathbf{p} + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$$

formülünün bir ortogonal dönüşüm tanımladığını ispatlayınız.

Çözüm.
Lineerlik. Vektörel çarpım ikinci çarpanında, iç çarpım her çarpanında lineerdir; dolayısıyla $C(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) = s\,C(\mathbf{p}) + t\,C(\mathbf{q})$.
Yardımcı özdeşlik. Her $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ için

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}).$$

Bunu uzunluk formülünden (Lemma 9.5) çıkarırız. $\|\,\mathbf{a}\,\| = 1$ iken formül her $\mathbf{x}$ için $\|\,\mathbf{a}\times\mathbf{x}\,\|^2 = \|\,\mathbf{x}\,\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2$ der. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ yazıp iki yanı bilineerlikle açalım:

$$\begin{aligned} &\|\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}\,\|^2 + 2\,(\mathbf{a}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{q}) + \|\,\mathbf{a}\times\mathbf{q}\,\|^2 \\ &\quad = \|\,\mathbf{p}\,\|^2 + 2\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \|\,\mathbf{q}\,\|^2 \\ &\qquad - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})^2 - 2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{q})^2. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Formülü $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ ve $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ için ayrı ayrı yazıp bu eşitlikten çıkarırsak ve 2'ye bölersek özdeşlik çıkar.
İç çarpımın korunması. $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$ ve $\mathbf{a} \times \mathbf{q}$, $\mathbf{a}$'ya diktir. Bu yüzden $C(\mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{q})$ açılırken karma terimler düşer:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{p}) \cdot C(\mathbf{q}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{q}) + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{a} \\ &\quad + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{q}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{q}) + 0 + 0 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \end{aligned}$$

C lineerdir ve iç çarpımı korur; bir ortogonal dönüşümdür (Tanım 18.3).
Başka bir yol. Formül, Önerme 18.3 içindeki dönme formülünün $\mathbf{e} = \mathbf{a}$ ve $\vartheta = \pi/2$ için yazılışıdır: $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ ve $1 - \cos(\pi/2) = 1$. Ortogonallik oradan da okunur.
Örnek. $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ için $\mathbf{a} \times \mathbf{p} = (-p_2, p_1, 0)$ ve $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a} = (0, 0, p_3)$'tür; $C(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, p_3)$. Bu, Örnek 20.9 örneğindeki $\pi/2$ dönmesidir.
■

Alıştırma 20.8 (Formülün Geometrik Anlamı). $\| \mathbf{a} \| = 1$ ve $C(\mathbf{p}) = \mathbf{a} \times \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a}$ olsun (Alıştırma 20.7). C'nin $\mathbb{R}^3$ üzerindeki genel etkisini betimleyiniz.

Çözüm.
$\mathbf{a}$'yı pozitif yönlü bir çatıya tamamlayalım: $e_3 = \mathbf{a}$, e_1 ona dik bir birim vektör ve $e_2 = e_3 \times e_1$ (Alıştırma 20.6 çözümündeki gibi). Pozitif yönlü çatının tablosuyla (Önerme 20.2)

$$\begin{aligned} C(e_1) &= e_3 \times e_1 + 0 = e_2, \\ C(e_2) &= e_3 \times e_2 + 0 = -e_1, \\ C(e_3) &= e_3 \times e_3 + (e_3 \cdot e_3)\,e_3 = e_3. \end{aligned}$$

Bunlar Alıştırma 20.6 içindeki eşitliklerin $\vartheta = \pi/2$ için yazılışıdır: $\cos(\pi/2) = 0$ ve $\sin(\pi/2) = 1$. Dolayısıyla C, uzayı $\mathbf{a}$ ekseni etrafında 90° döndüren dönmedir. Dönüş, $\mathbf{a}$'nın ucundan bakınca saatin tersi yönündedir: sağ elin başparmağı $\mathbf{a}$ yönünde tutulunca parmakların kıvrıldığı yön. Özel olarak $\det C = +1$'dir; Lemma 20.2 çatıya uygulanınca

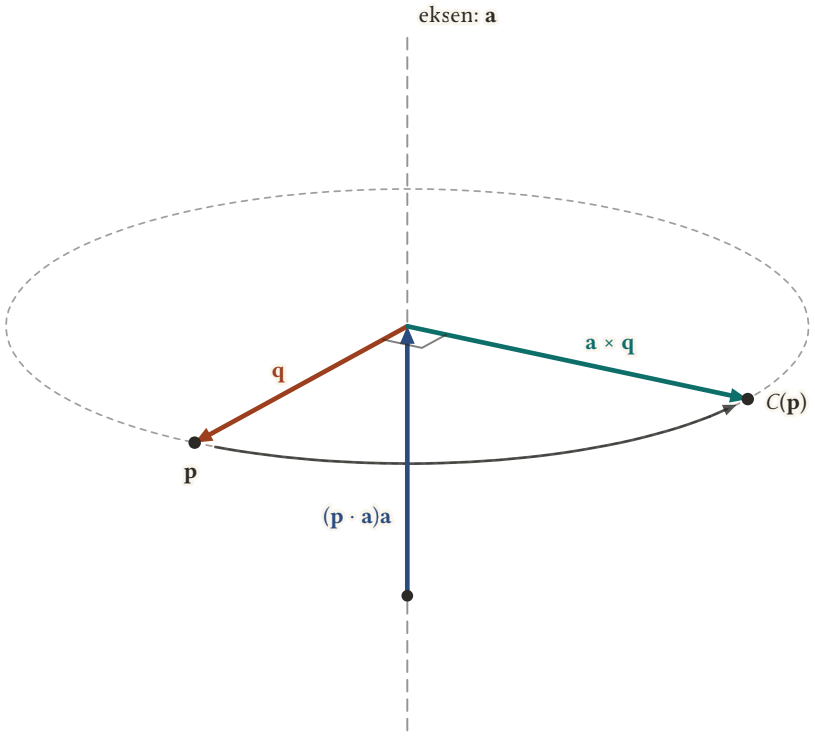
$$C(e_1) \cdot C(e_2) \times C(e_3) = e_2 \cdot (-e_1) \times e_3 = -\,e_2 \cdot e_1 \times e_3 = -\,e_2 \cdot (-e_2) = 1$$

bulunur.
Aynı sonucu çatı kurmadan da görebiliriz. $\mathbf{p}$'yi eksen doğrultusundaki $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a}$ parçasına ve eksene dik $\mathbf{q} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a}$ parçasına ayıralım. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ olduğundan $\mathbf{a} \times \mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{q}$ ve

$$C(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{q}.$$

Eksen bileşeni yerinde kalır; dik bileşen $\mathbf{q}$ ise $\mathbf{a} \times \mathbf{q}$'ya gider. Bu vektör hem $\mathbf{a}$'ya hem $\mathbf{q}$'ya diktir ve uzunluğu $\| \mathbf{a} \| \| \mathbf{q} \| \sin(\pi/2) = \| \mathbf{q} \|$'dur: $\mathbf{q}$ eksen etrafında dik açı kadar dönmüştür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.8: $C(\mathbf{p}) = \mathbf{a} \times \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$ dönüşümü. $\mathbf{p}$, $\mathbf{a}$ doğrultusundaki $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$ parçasına ve ona dik $\mathbf{q}$ parçasına ayrılır. Birinci parça yerinde kalır, $\mathbf{q}$ ise $\mathbf{a} \times \mathbf{q}$'ya, yani eksen etrafında dik açı kadar döndürülmüş hâline gider.

Örnek. $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ için $\mathbf{q} = (1,-1,0)$ eksene diktir ve

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}) = \mathbf{a} \times \mathbf{q} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1\cdot 0 - 1\cdot(-1),\, 1\cdot 1 - 1\cdot 0,\, 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-2). \end{aligned}$$

Uzunlukları $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{6/3} = \sqrt{2}$, iç çarpımları $(1 - 1 + 0)/\sqrt{3} = 0$'dır: $\mathbf{q}$ dik açı kadar dönmüştür. $C(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{a} = \mathbf{a}$ ise eksenin yerinde kaldığını söyler.
■

Alıştırma 20.9 (Dönmeler Bir Alt Grup Oluşturur). Bütün ortogonal dönüşümlerin kümesi $O(3)$, Öklid grubunun bir alt grubudur (Alıştırma 18.16); dolayısıyla kendisi de bileşke işlemiyle bir gruptur (Tanım 18.5). Bütün dönmelerin kümesi $O^+(3)$'ün $O(3)$'ün bir alt grubu (Tanım 18.6) olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$O^+(3)$, $O(3)$'ün bir alt kümesidir. Tanım 18.6 gereği bileşke ve ters alma altında kapalı olduğunu göstermeliyiz.
Bileşke. $C_1, C_2 \in O^+(3)$ olsun. C_1C_2 ortogonaldir ve matrisi matrislerin çarpımıdır (Alıştırma 20.1). Sonuç 20.2 ile $\det(C_1C_2) = 1 \cdot 1 = 1$; yani $C_1C_2 \in O^+(3)$.
Ters. $C \in O^+(3)$ olsun. C^{-1} ortogonaldir, çünkü C iç çarpımı koruduğundan

$$C^{-1}(\mathbf{p}) \cdot C^{-1}(\mathbf{q}) = C\left(C^{-1}(\mathbf{p}) \right) \cdot C\left(C^{-1}(\mathbf{q}) \right) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}.$$

Matrisi C^T'dir (Sonuç 9.1) ve Lemma 20.1 ile $\det C^{-1} = \det C^T = \det C = 1$. Yani $C^{-1} \in O^+(3)$. Özel olarak birim dönüşüm $I = CC^{-1}$ de $O^+(3)$'tedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Buna karşılık determinantı -1 olan ortogonal dönüşümlerin kümesi bir alt grup değildir: birim dönüşümü içermez ve bileşke altında kapalı değildir. Örneğin başlangıç noktasından geçen iki düzlemdeki yansımaların determinantı -1'dir (Örnek 20.11), bileşkelerinin determinantı ise Sonuç 20.2 gereği $(-1)(-1) = +1$'dir; yani bileşke bir dönmedir. $O^+(3)$'e **özel ortogonal grup** da denir ve $SO(3)$ ile de gösterilir.
■

Alıştırma 20.10 (Yönü Koruyan İzometriler Bir Alt Grup Oluşturur). Yönü koruyan bütün izometrilerin kümesi $\mathcal{E}^+(3)$'ün, bütün izometrilerin grubu olan Öklid grubu $\mathcal{E}(3)$'ün (Alıştırma 18.14) bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$F, G \in \mathcal{E}^+(3)$ olsun. Alıştırma 20.1 gereği $\operatorname{sgn}(FG) = \operatorname{sgn} F \cdot \operatorname{sgn} G = 1$, yani $FG \in \mathcal{E}^+(3)$. Alıştırma 20.2 gereği $\operatorname{sgn}(F^{-1}) = \operatorname{sgn} F = 1$, yani $F^{-1} \in \mathcal{E}^+(3)$. İki kapalılık koşulu sağlandığından $\mathcal{E}^+(3)$ bir alt gruptur; $\operatorname{sgn} I = 1$ olduğundan birim dönüşüm de ondadır.
$\mathcal{E}^+(3)$'ün elemanları tam olarak ötelemeler ve dönmelerle yapılabilen hareketlerdir: Teorem 18.2 gereği her elemanı TC biçimindedir ve $\det C = 1$, yani C bir dönmedir. Katı bir cismin uzaydaki hareketleri bu gruptadır. Eldiven benzetmesine dönersek, sağ eldiveni sol eldivene götüren hiçbir hareket bu grupta yoktur. Alıştırma 20.3 gereği geri kalan izometrilerin hepsi, sabit tek bir yansımanın bu grubun elemanlarıyla bileşkesidir.
■

Bu bölümde çatıları üçlü skaler çarpımın işaretine göre sağ elli ve sol elli diye iki sınıfa ayırdık. Her izometriye ortogonal kısmının determinantı olan bir işaret verdik ve teğet dönüşümünün çatının yönünü tam bu işaretle çarptığını gördük. Bunun sonucu olarak izometriler iç çarpımı tam olarak, vektörel çarpımı ise işaretine kadar korur: ötelemeler ve dönmeler yönü korur, yansımalar ters çevirir. Helis örneğinde bu fark burulmanın işaretinde ortaya çıktı. Sırada, izometriler altında korunan kavramların, yani Öklid geometrisinin kavramlarının, eğriler hakkında ne söylediğine bakmak var.

 CC BY-NC-SA 4.0