

Temel Finans Matematiği

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

Giriş	6
1 Basit Faiz	7
1.1 Faiz, Anapara ve Birikmiş Değer	7
1.2 Basit Faiz	7
1.3 Zamanın Yıl Cinsinden Yazılması	9
1.4 İki Tarih Arasındaki Zaman Hesabı	9
1.5 Şimdiki Değer	11
1.6 Odak Noktası ve Denk Ödemeler	12
1.7 Taksitli Ödemeler: İki Kural	14
1.8 İki Kuralın Karşılaştırılması	15
1.9 Alıştırmalar	17
2 Basit İskonto, Senetler ve Bonolar	20
2.1 Basit İskonto	20
2.2 Bir İskonto Oranına Denk Olan Faiz Oranı	20
2.3 Senetler	23
2.4 Tahviller ve Bonolar	25
2.5 Alıştırmalar	25
3 Bileşik Faiz	28
3.1 Tanım ve Notasyon	28
3.2 Birikmiş Değer Formülü	29
3.3 Sürekli Bileşik Faiz	31
3.4 Eşdeğer Oranlar	31
3.5 Kesirli Toplam Dönemler	33
3.6 Faiz Oranının Bulunması	35
3.7 Zamanın Bulunması	36
3.8 Bileşik Faizde Paranın Değer Denklikleri	37
3.9 Bileşik İskonto	40
3.10 Alıştırmalar	40
4 Anüiteler	43
4.1 Kavramlar	43
4.2 Normal Basit Anüitede Birikmiş Değer	44
4.3 Normal Basit Anüitede İskontolu Değer	45
4.4 Uygulamalar	45
4.5 Peşin Anüiteler	50

4.6	Ertelenmiş (Tehirli) Anüiteler	52
4.7	Alıştırmalar	54
5	Anüitede Dönem, Faiz Oranı ve Özel Türler	57
5.1	Bilinmeyen Dönem Sayısı	57
5.2	Anüitenin Faiz Oranının Bulunması	60
5.3	Genel Anüiteler	62
5.4	Daimi Gelir	63
5.5	Değişik Ödemeli Anüiteler	64
5.6	Alıştırmalar	65
6	Amortisman Hesapları	68
6.1	Amortisman	68
6.2	Kalan Borcun Hesaplanması	72
6.3	Uzun Vadeli Kredi Örneği	73
6.4	Alıştırmalar	75
7	Tahviller	77
7.1	Tahvil Nedir?	77
7.2	Notasyon	77
7.3	İhraç Fiyatının Bulunması	78
7.4	Getiri Oranı ve Ortalama Metodu	80
7.5	İnterpolasyon Metodu	81
7.6	Alıştırmalar	83
8	Hayat Anüiteleri ve Hayat Sigortaları	85
8.1	Hayat Tabloları	85
8.2	Gerekli Formüller	85
8.3	Hayatta Olma Hâlinde Alınacak Tek Ödeme	87
8.4	Ömür Boyu Hayat Anüitesi	89
8.5	Geçici Hayat Anüitesi	92
8.6	Hayat Sigortası	94
8.7	Alıştırmalar	96
9	Hisse Senetleri: Getiri ve Risk	99
9.1	Hisse Senedi Nedir?	99
9.2	Getirinin Hesaplanması	99
9.3	İstatistik Hatırlatmaları	104
9.4	Riskin Hesaplanması	104
9.5	Standart Sapma Kullanarak Risk Hakkında Yorum Yapmak	105
9.6	Alıştırma	107
10	En Az Riskli Portföyün Oluşturulması	109
10.1	Korelasyon ve Portföyün Amacı	109

10.2	Yüksek Korelasyonlu İki Hisse	109
10.3	Çeşitlendirmenin İşe Yaradığı Durum	111
10.4	İkiden Daha Fazla Hisse Senedinden Portföy	112
10.5	Alıştırmalar	115
11	Portföyün Yeniden Dengelenmesi ve Çeşitlendirme	119
11.1	Bir Portföyün Yeniden Dengelenmesi	119
11.2	Çeşitlendirmenin Faydası	120

Giriş

Finans matematiğinin tek bir çekirdek fikri vardır: **paranın değeri zamana bağlıdır**. Bugünkü 100 lira ile bir yıl sonraki 100 lira aynı şey değildir; ikisini karşılaştırmak için birini diğerinin tarihine taşımak gerekir. Bu derste yaptığımız hemen her işlem, bu taşıma işleminin bir biçimidir.

Basit faizle başlayıp bileşik faize, oradan düzenli ödeme dizilerine (anüiteler), kredi geri ödeme planlarına (amortisman), tahvillere, hayat sigortalarına ve son olarak hisse senetlerinin getiri-risk analizine uzanıyoruz. Konular birbirinin üzerine kuruluyor: anüiteler bileşik faizin tekrarı, amortisman anüitenin tersi, tahvil ise bir anüite ile bir tek ödemenin toplamıdır.

💡 Notların kullanımı

Her bölüm bir konunun başladığı yerden, o konuyu kapatan alıştırmalara kadar uzanır. Önce formül türetilir, sonra derste çözülen örnekler adım adım işlenir, en sonunda da o konunun alıştırmaları **tam çözümleriyle** verilir. Zaman şemaları her problemin ilgili adımının yanına çizilmiştir; bir soruyu çözmeye başlamadan önce şemayı çizmek, hangi tutarın nereye taşınacağını görmenin en kısa yoludur.

1. Basit Faiz

Bir kimse parasını bir süreliğine başkasına verdiğinde, o süre boyunca o parayla yapabileceği her şeyden vazgeçmiş olur. Bu vazgeçişin bedeline **faiz** diyoruz. Finans matematiğinin bütün formülleri, aslında tek bir sorunun farklı biçimlerdeki cevabıdır: *bugünkü bir tutar ile gelecekteki bir tutar nasıl karşılaştırılır?* Bu ilk bölümde en yalın modeli, **basit faizi** kuruyoruz. Basit faizde faiz yalnızca anapara üzerinden işler; kazanılan faiz tekrar faiz getirmez. Önce faizin tanımını, zamanın yıl cinsinden nasıl yazılacağını ve iki tarih arasındaki gün sayısının nasıl hesaplanacağını göreceğiz. Ardından tek bir tutarı ileri geri taşımaktan, birden çok ödemeden oluşan planları karşılaştırmaya geçiyoruz; burada **odak noktası** kavramıyla ve basit faize özgü şaşırtıcı bir sonuçla karşılaşacağız. Bölümün son kısmı bir borcun ara ödemelerle kapatılmasına ayrılmıştır ve konunun tamamını kapsayan tam çözümlü alıştırmalarla kapanır.

! Bu derste geçerli yuvarlama ve gösterim kuralları

- **Para tutarları** ve **oranlar** virgülden sonra **iki basamağa** yuvarlanır: 1435,41 TL, %11,43.
- Ara işlemlerde hesap makinesindeki tam değerle devam edilir; yuvarlama yalnızca yazarken yapılır. (Amortisman ve Amerikan Kuralı gibi, bankanın fiilen kuruşa yuvarladığı hesaplarda yuvarlanmış değerle devam edilir; bu durumlar yeri geldiğinde ayrıca belirtilecektir.)
- Ondalık ayırıcı **virgüldür**: 0,06 yazılır, 0.06 yazılmaz.
- Yüzde işareti sayının **önüne** gelir: %12.
- Varyans ve standart sapmada da aynı kural geçerlidir: önce varyans iki basamağa yuvarlanır, karekök bu yuvarlanmış değerden alınır.

1.1 Faiz, Anapara ve Birikmiş Değer

Tanım 1.1 (Faiz). Paranın satın alma gücünden belli bir süre vazgeçme karşılığında ödenen ve paranın bir yüzdesi şeklinde tanımlanan bedele **faiz** denir.

Ders boyunca kullanacağımız üç temel büyüklük şunlardır:

Simge	Adı	Anlamı
P	Anapara	Paranın şimdiki değeri; S 'nin iskontolu değeri
I	Faiz	Anaparadan elde edilen faiz değeri
S	Toplam para	Anaparanın gelecekteki değeri; birikmiş değer

Tanım gereği $S := P + I$ 'dir. Buradan, P anaparası belli bir zaman sonra S toplamına erişmişse elde edilen faiz

$$I = S - P$$

formülüyle hesaplanır. Bu üç harf, dersin sonuna kadar aynı anlamda kullanılacaktır.

1.2 Basit Faiz

Tanım 1.2 (Yıllık Basit Faiz Oranı). Bir P anaparasından bir yıl sonra I faizi elde edilmişse, bu işlemde geçerli olan **yıllık basit faiz oranı**

$$r := \frac{I}{P}$$

ile belirlenir. Buna göre P ve r biliniyorsa **bir yıllık basit faiz** $I = P \cdot r$ olur.

Peki faizin işlediği süre bir yıl değil de birkaç yıl, birkaç ay ya da birkaç gün ise ne olacak? Basit faizin tanımı gereği faiz her yıl aynı anapara üzerinden hesaplandığı için, faiz süreyle **doğru orantılıdır**: iki katı sürede iki katı faiz elde edilir.

Önerme 1.1 (Basit Faiz Formülleri). t yıl cinsinden zamanı göstermek üzere, P anaparası üzerinden yıllık r basit faiz oranıyla t yılda elde edilecek basit faiz

$$I = P \cdot r \cdot t$$

ve birikmiş değer

$$S = P(1 + rt)$$

formülleriyle hesaplanır. Buradan anapara çekilirse

$$P = S(1 + rt)^{-1}$$

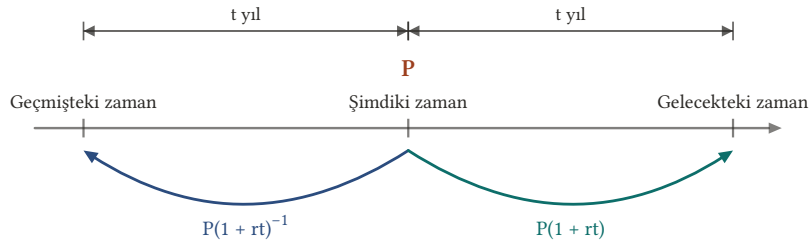
elde edilir.

İspat.

Bir yılda kazanılan faiz $P \cdot r$ 'dir ve basit faizde bu tutar her yıl aynı kalır (kazanılan faiz anaparaya eklenmez). Dolayısıyla t yıl boyunca kazanılan toplam faiz $I = P \cdot r \cdot t$ olur. O hâlde

$$S = P + I = P + P \cdot r \cdot t = P(1 + rt)$$

bulunur. Son eşitlikte $1 + rt \neq 0$ olduğundan iki yan bu çarpana bölünerek $P = S(1 + rt)^{-1}$ elde edilir.



Şekil 1.1: Basit faizde paranın zaman değeri: bugünkü P tutarı t yıl ileri taşınırken birikme çarpanı $1 + rt$ ile çarpılır, geriye taşınırken iskonto çarpanı $(1 + rt)^{-1}$ ile çarpılır. Zaman ekseninde sağa gitmek “çarp”, sola gitmek “böl” demektir.

■

Bu iki çarpmanın kendine ait adları vardır ve dersin sonuna kadar bu adlarla anılacaklardır.

Tanım 1.3 (Birikme ve İskonto Çarpanı). $S = P(1 + rt)$ formülündeki $1 + rt$ çarpımına **basit faizde birikme çarpanı**, $P = S(1 + rt)^{-1}$ formülündeki $(1 + rt)^{-1}$ çarpımına **basit faizde iskonto (indirim) çarpanı** denir. Bu durumda P değerine, S 'nin r oranından t yıl için **iskontolu değeri** veya **şimdiki değeri** denir.

Şemanın anlattığı şey tek cümleyle şudur: **zaman ekseninde sağa gitmek çarpmak, sola gitmek bölmektir**. Bir problemde hangi formülün kullanılacağını hatırlamaya çalışmak yerine, okun yönüne bakmak yeterlidir.

1.3 Zamanın Yıl Cinsinden Yazılması

⚠ Uyarı

t zamanı **mutlaka yıl cinsinden** yazılmalıdır. Formüldeki r yıllık bir oran olduğu için, süreyi ay ya da gün olarak bırakmak sonucu 12 ya da 360 kat şişirir.

Süre ay olarak verilmişse

$$t = \frac{\text{ay sayısı}}{12}$$

alınır. Süre gün olarak verilmişse iki ayrı hesap yapılabilir:

Tanım 1.4 (Tam ve Normal Basit Faiz). Süre gün cinsinden verildiğinde

1. **Tam basit faiz** için $t = \frac{\text{gün sayısı}}{365}$,
2. **Normal basit faiz** için $t = \frac{\text{gün sayısı}}{360}$

alınır.

⚠ Uyarı

Aksi belirtilmemişse **normal basit faiz** hesaplanacaktır.

Normal basit faiz, yılı 12 eşit aya (her biri 30 gün) bölmenin doğal sonucudur ve ticari hayatta hesabı kolaylaştırdığı için tercih edilir. Payda küçüldüğü için normal basit faiz her zaman tam basit faizden **büyük** çıkar — aradaki fark $\frac{365}{360} \approx 1,014$ katıdır, yani yaklaşık %1,4.

Örnek 1.1 (Tam ve Normal Basit Faiz). 2000 TL için %5'ten 50 günlük tam ve normal basit faizi bulunuz.

Çözüm.

$P = 2000$ TL, $r = 0,05$ ve süre 50 gündür.

Tam basit faiz: $t = \frac{50}{365}$ olduğundan

$$I = Prt = 2000 \cdot 0,05 \cdot \frac{50}{365} = 13,70 \text{ TL .}$$

Normal basit faiz: $t = \frac{50}{360}$ olduğundan

$$I = Prt = 2000 \cdot 0,05 \cdot \frac{50}{360} = 13,89 \text{ TL .}$$

Beklendiği gibi normal basit faiz biraz daha büyüktür.

■

1.4 İki Tarih Arasındaki Zaman Hesabı

Bir problemde süre doğrudan “50 gün” diye verilmeyip iki tarih verilmişse, önce aradaki gün sayısını bulmamız gerekir. Bunun da iki yolu vardır.

Tanım 1.5 (Tam ve Yaklaşık Zaman). Verilen iki tarih arasında

1. **Tam zaman:** Bir takvim yardımıyla günlerin sayısı tam olarak sayılır.
2. **Yaklaşık zaman:** Her bir ayın 30 gün olduğu kabul edilir; tarihler yıl : ay : gün biçiminde yazılıp çıkarılır.

⚠ Uyarı

Tam zaman sayılırken, verilen başlangıç ve bitiş tarihlerinden **yalnızca biri** toplama dâhil edilir; ikisi birden dâhil edilmez.

Örnek 1.2 (İki Tarih Arasındaki Zaman). 20 Haziran 2019 ile 24 Ağustos 2019 arasındaki tam ve yaklaşık zamanı bulunuz.

Çözüm.

Tam zaman. Haziran'ın 30 günü vardır; ayın 20'sinden sonra $30 - 20 = 10$ gün kalır. Temmuz tam olarak 31 gün, Ağustos'tan ise 24 gün sayılır:

$$\underbrace{10}_{\text{Haziran}} + \underbrace{31}_{\text{Temmuz}} + \underbrace{24}_{\text{Ağustos}} = 65 \text{ gün} .$$

Başlangıç günü (20 Haziran) sayılmamış, bitiş günü (24 Ağustos) sayılmıştır; kuralın istediği de budur.

Yaklaşık zaman. Tarihler yıl : ay : gün biçiminde alt alta yazılıp çıkarılır:

$$\begin{array}{r} 2019 \ 8 \ 24 \\ - 2019 \ 6 \ 20 \\ \hline 0 \ 2 \ 4 \end{array}$$

Yani 2 ay 4 gün; her ay 30 gün sayıldığından

$$2 \cdot 30 + 4 = 64 \text{ gün} .$$

■

1.4.1 Dört olası hesap ve Banker Kuralı

Zamanı iki türlü (tam / yaklaşık), faizi iki türlü (365 / 360) hesaplayabildiğimize göre karşımıza dört kombinasyon çıkar:

	Tam faiz (365)	Normal faiz (360)
Tam zaman (takvim)	Tam zaman – tam faiz	Banker Kuralı
Yaklaşık zaman (30'ar gün)	Yaklaşık zaman – tam faiz	Yaklaşık zaman – normal faiz

Tanım 1.6 (Banker Kuralı). Gün sayısı takvimden **tam** olarak sayılıp, faiz 360 günlük yıl üzerinden hesaplanırsa (yani tam zaman ile normal faiz birlikte kullanılırsa) uygulanan yöntem **Banker Kuralı** denir.

⚠ Uyarı

Aksi belirtilmedikçe **Banker Kuralı** ile hesap yapılacaktır.

Banker Kuralı'nın alacaklı için en kârlı seçenek olduğuna dikkat edin: gün sayısı en büyük (takvimden tam sayım), payda ise en küçük (360) alınır.

Örnek 1.3 (Dört Hesabın Karşılaştırılması). 20 Nisan 2019'da bankaya %6 faiz oranıyla yatırılan 2000 TL'nin 1 Temmuz 2019 tarihinde getirdiği tam ve normal faizi **a)** tam zaman, **b)** yaklaşık zaman kullanarak hesaplayınız.

Çözüm.

Önce iki tarih arasındaki süreyi iki türlü bulalım.

Tam zaman:

$$\underbrace{10}_{\text{Nisan}} + \underbrace{31}_{\text{Mayıs}} + \underbrace{30}_{\text{Haziran}} + \underbrace{1}_{\text{Temmuz}} = 72 \text{ gün} .$$

Yaklaşık zaman:

$$\begin{array}{r} 2019 \ 7 \ 1 \\ - 2019 \ 4 \ 20 \\ \hline 0 \ 2 \ 11 \end{array}$$

2 ay 11 gün, yani $2 \cdot 30 + 11 = 71$ gün.

i Gün çıkarma nasıl yapıldı?

1 – 20 eksi çıktığı için ay hanesinden 1 ay (30 gün) ödünç alınır: gün hanesi $1 + 30 = 31$, ay hanesi $7 - 1 = 6$ olur. Böylece $31 - 20 = 11$ gün ve $6 - 4 = 2$ ay bulunur.

Şimdi $P = 2000$, $r = 0,06$ ile dört hesabı yapalım.

a) Tam zaman (72 gün):

$$I = 2000 \cdot 0,06 \cdot \frac{72}{365} = 23,67 \text{ TL} \quad (\text{tam faiz})$$

$$I = 2000 \cdot 0,06 \cdot \frac{72}{360} = 24,00 \text{ TL} \quad (\text{normal faiz} = \text{Banker Kuralı})$$

b) Yaklaşık zaman (71 gün):

$$I = 2000 \cdot 0,06 \cdot \frac{71}{365} = 23,34 \text{ TL} \quad (\text{tam faiz})$$

$$I = 2000 \cdot 0,06 \cdot \frac{71}{360} = 23,67 \text{ TL} \quad (\text{normal faiz})$$

Dört sonuç arasında en büyüğü Banker Kuralı'nın verdiği 24,00 TL'dir. Soruda bir yöntem belirtilmemişse bu değeri alırız.

■

💡 Küçük bir kontrol alışkanlığı

Dört sonucun da birbirine yakın çıkması gerekir; aralarındaki fark yüzde birkaçı geçmez. Sonuçlardan biri diğerlerinden çok farklıysa, büyük olasılıkla süre yıla çevrilmemiş ya da gün sayımında bir ay atlanmıştır.

Bundan sonra bu formülleri tek bir tutar için değil, **birden çok ödemeden oluşan planlar** için kullanacağız; orada odak noktası kavramı devreye girecek.

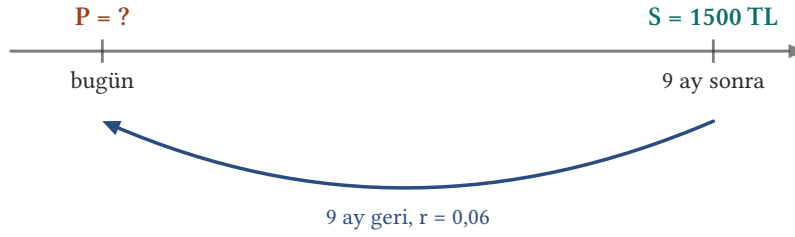
1.5 Şimdiki Değer

Gelecekteki bir tutarın bugünkü karşılığını bulmak, iskonto çarpanıyla çarpmaktan ibarettir ([Tanım 1.3](#)). Buna paranın **şimdiki değeri** diyoruz.

Örnek 1.4 (Bir Birikimin Şimdiki Değeri). 9 ayda %6 basit faiz ile 1500 TL olacak bir birikimin şimdiki değeri nedir?

Çözüm.

Verilenler: $S = 1500 \text{ TL}$, $r = 0,06$, $t = \frac{9}{12}$.



Şekil 1.2: 9 ay sonra eline 1500 TL geçecek bir birikimin bugünkü değeri aranıyor: ok geriye doğru olduğu için 1500 TL, $(1 + 0,06 \cdot 9/12)^{-1}$ iskonto çarpanıyla çarpılır.

Ok geriye doğru olduğu için iskonto çarpanı kullanılır:

$$P = S(1 + rt)^{-1} = \frac{1500}{1 + 0,06 \cdot \frac{9}{12}} = \frac{1500}{1,045} = 1435,41 \text{ TL} .$$

Aradaki $1500 - 1435,41 = 64,59$ TL, dokuz ayda işleyen faizdir.

■

1.6 Odak Noktası ve Denk Ödemeler

Tanım 1.7 (Odak Noktası). Paranın değerinin hesaplanacağı zamana, zaman şemasında **odak noktası** denir.

Tanım 1.8 (Denk Ödemeler). İki ödemeler kümesi, seçilen bir odak noktasına taşındıklarında toplam-ları eşit oluyorsa bu iki kümeye o odak noktasında **denk ödemeler** denir.

Denklik denklemi kurulurken izlenecek yol hep aynıdır:

1. Zaman şemasını çiz; ödemeleri kendi tarihlerine yerleştir.
2. Odak noktasını işaretle.
3. Her ödemeyi, **kendi tarihi ile odak noktası arasındaki** süreyle taşı: odaktan önceyse ileri (çarp), sonraysa geri (böl).
4. İki tarafın toplamlarını eşitle.

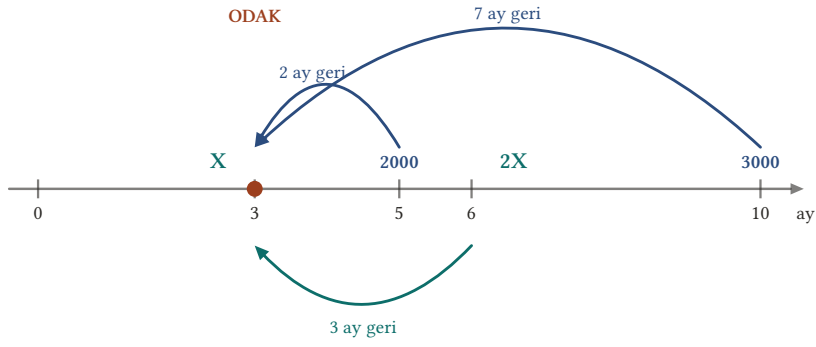
Örnek 1.5 (İki Ödeme Seçeneğinin Denkliği). Bir tüketicinin aldığı borcu ödemesi için iki seçeneği var olsun.

- **Birinci seçenek:** 5 ay sonra 2000 TL ve 10 ay sonra 3000 TL ödemek,
- **İkinci seçenek:** 3 ay sonra X TL ve 6 ay sonra $2X$ TL ödemek.

Her iki seçenek birbirine denk ve paranın değeri (enflasyon, piyasadaki basit faiz vb.) %12 ise X değerini odak noktalarını 6. ay ve 3. ay alarak bulup sonuçları karşılaştırınız.

Çözüm.

Odak noktası 3. ay alırsa. 5. aydaki ödeme 2 ay, 10. aydaki ödeme 7 ay geri gelir; 6. aydaki $2X$ ise 3 ay geri gelir. 3. aydaki X zaten yerindedir.



Şekil 1.3: Birinci seçenek (2000 ve 3000 TL) ile ikinci seçenek (X ve $2X$) 3. aya taşıyıp eşitlenirse $X = 1619,62$ TL bulunur. Basit faizde her ödeme, odak noktasına olan **kendi** süresiyle taşınır.

$$2000 \left(1 + 0,12 \cdot \frac{2}{12}\right)^{-1} + 3000 \left(1 + 0,12 \cdot \frac{7}{12}\right)^{-1} = X + 2X \left(1 + 0,12 \cdot \frac{3}{12}\right)^{-1}$$

Sol tarafı hesaplayalım:

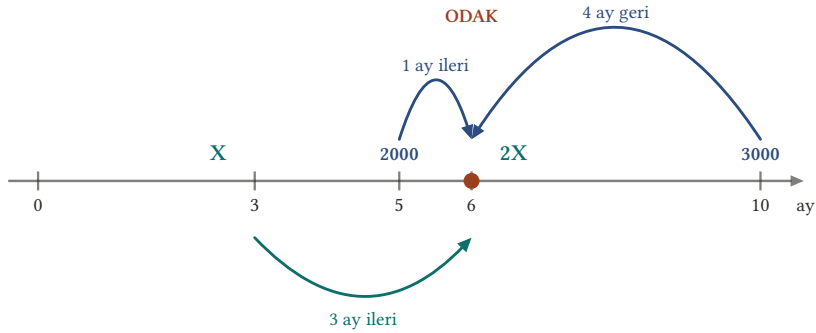
$$\frac{2000}{1,02} + \frac{3000}{1,07} = 1960,78 + 2803,74 = 4764,52.$$

Sağ tarafta $2X$ 'in çarpanı $\frac{2}{1,03} = 1,941747573$ olduğundan

$$4764,52 = X + 1,941747573 X = 2,941747573 X$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 1619,62 \text{ TL}}$$

Odak noktası 6. ay alınırsa. Bu kez 5. aydaki ödeme 1 ay **ileri**, 10. aydaki ödeme 4 ay geri gelir; 3. aydaki X ise 3 ay **ileri** gider. 6. aydaki $2X$ yerindedir.



Şekil 1.4: Aynı iki seçenek bu kez 6. aya taşınıyor: 5. aydaki 2000 TL bir ay **ileri**, 10. aydaki 3000 TL dört ay geri **gidiyor**. Sonuç $X = 1618,69$ TL – basit faizde odak noktası değişince cevap da değişir.

$$2000 \left(1 + 0,12 \cdot \frac{1}{12}\right) + 3000 \left(1 + 0,12 \cdot \frac{4}{12}\right)^{-1} = X \left(1 + 0,12 \cdot \frac{3}{12}\right) + 2X$$

$$2020 + 2884,62 = 1,03X + 2X = 3,03X$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 1618,69 \text{ TL}}$$

Dikkat edilirse odak noktası 3. ay olduğunda $X = 1619,62$ TL, 6. ay olduğunda $X = 1618,69$ TL bulunmuştur. Yani **farklı odak noktaları farklı değerler vermiştir**.

! Basit faizde odak noktası önemlidir

Basit faizde odak noktası değişince hesaplanan değerler farklılık gösterebilir. Bu nedenle basit faiz ile yapılan finansal işlemlerde odak noktası **önceden bellidir**; sözleşmede yazar ya da soruda verilir. İleride göreceğimiz gibi bileşik faizde böyle bir sorun yoktur (Bölüm 3.8).

Peki bu neden oluyor? Cevap tek satırlık bir cebirsel gözlemde saklı.

Önerme 1.2 (Basit Faizde Çarpanlar Birleşmez). $r > 0$ ve $t_1, t_2 > 0$ olsun. O zaman

$$(1 + rt_1)(1 + rt_2) > 1 + r(t_1 + t_2)$$

olur; yani bir tutarı önce t_1 , sonra t_2 kadar taşımak, doğrudan $t_1 + t_2$ kadar taşımakla **aynı sonucu vermez**.

İspat.

Sol tarafı açalım:

$$(1 + rt_1)(1 + rt_2) = 1 + rt_1 + rt_2 + r^2t_1t_2 = [1 + r(t_1 + t_2)] + r^2t_1t_2.$$

$r > 0$ ve $t_1, t_2 > 0$ olduğundan $r^2t_1t_2 > 0$ 'dır; dolayısıyla sol taraf sağ taraftan kesinlikle büyüktür.

Aradaki $r^2t_1t_2$ farkı, “faizin faizi”dir: iki adımda taşırken ilk adımda kazanılan faiz ikinci adımda da faiz getirir, oysa basit faiz tanımı gereği bunu yasaklar. İşte odak noktası değişince taşıma yollarının uzunlukları değiştiği için sonuç da kayar. Bileşik faizde çarpan $(1 + i)^n$ biçiminde olduğundan $(1 + i)^{n_1}(1 + i)^{n_2} = (1 + i)^{n_1+n_2}$ olur ve bu sorun tamamen ortadan kalkar.

🔍 Hangi odak noktası seçilmeli?

Soruda odak noktası belirtilmişse tartışma yoktur. Belirtilmemişse, **hesabı kolaylaştıran** tarih seçilir: genellikle bilinmeyen bulunduğu tarih ya da ödemelerden birinin tarihi. Örneğin **Örnek 1.5**'de odak 3. ay seçilirse X hiç taşınmadan denklemde yer alır.

1.7 Taksitli Ödemeler: İki Kural

Şimdiye kadar borçlar tek seferde ödeniyordu. Gerçekte ise borçlu, vadeden önce elindeki parayla ara ödemeler yapar. Bu ödemeler borcu nasıl azaltır? İki farklı hesap geleneği vardır ve ikisi **farklı sonuçlar** verir; hangisinin uygulanacağı sözleşmede belirlenir.

Tanım 1.9 (Tüccar Kuralı). Tüm taksitler ve ana borç, borcun **bitim tarihine** odaklanır. Yani odak noktası vade tarihidir; ana borcun o tarihe taşınmış değerinden, taksitlerin o tarihe taşınmış değerleri çıkarılarak kalan borç bulunur.

Tanım 1.10 (Amerikan Kuralı). Her taksitten sonra ödenmemiş geriye kalan kısım bir sonraki taksit zamanına faizlenir.

- Eğer o taksidin bedeli hesaplanan faizden **çok** ise ödeme yapılır ve geriye kalan kısım bir sonraki taksit zamanına faizlenir.
- Eğer o taksidin bedeli hesaplanan faizden **az** ise o taksit ödenmez ve o ödeme bir sonraki taksit ile birlikte hesaba katılır.

⚠ Uyarı

Aksi belirtilmedikçe **Tüccar Kuralı** ile hesap yapılacaktır.

Aradaki fark özde şudur: Tüccar Kuralı bütün ödemeleri tek bir odak noktasında toplar, Amerikan Kuralı ise borcu adım adım günceller. İkinci yöntemde ödenmemiş faizin faiz getirmemesi sağlandığı için borçlu lehinedir; bu yüzden tüketici kredilerinde daha yaygındır.

i Neden taksit faizi karşılamalı?

Amerikan Kuralı'ndaki ikinci madde, faizin faizini engellemek içindir. Küçük bir taksit, o güne kadar işlemiş faizden azsa ve yine de düşülseydi, kalan borcun içinde ödenmemiş faiz kalır ve sonraki dönemde o faiz de faiz getirirdi. Basit faiz sözleşmesinde bu kabul edilemez; bu yüzden küçük taksit bekletilir.

1.8 İki Kuralın Karşılaştırılması

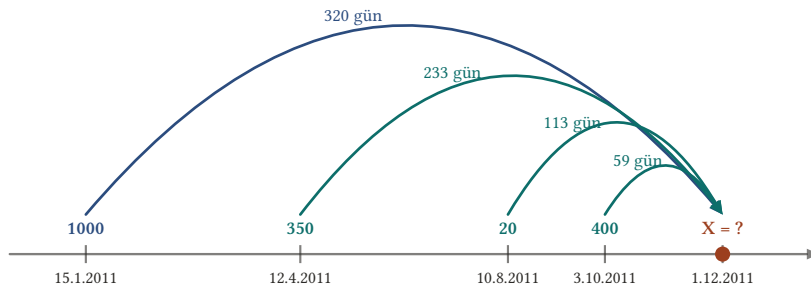
Örnek 1.6 (Aynı Borcun İki Kurala Göre Kapatılması). Bir tüketici 15.1.2011'de %16'dan 1000 TL borç aldı. 12.4.2011'de 350 TL, 10.8.2011'de 20 TL ve 3.10.2011'de 400 TL ödedi. 1.12.2011'de borcu kapatmak için ödeyeceği bedeli **a) Tüccar Kuralı b) Amerikan Kuralı** ile hesaplayınız.

Çözüm.

Önce gerekli gün sayılarını takvimden bulalım (Banker Kuralı: tam zaman, 360 günlük yıl):

Aralık	Gün
15.1.2011 → 1.12.2011	320
12.4.2011 → 1.12.2011	233
10.8.2011 → 1.12.2011	113
3.10.2011 → 1.12.2011	59
15.1.2011 → 12.4.2011	87
12.4.2011 → 10.8.2011	120
12.4.2011 → 3.10.2011	174

a) Tüccar Kuralı. Odak noktası 1.12.2011'dir; her şey oraya taşınır.



Şekil 1.5: Tüccar Kuralı: **bütün** tutarlar — ana borç da taksitler de — borcun bitiş tarihine taşınır ve orada eşitlenir. Ödeme yapılmayan aralarda faiz işlemeye devam eder.

$$1000 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{320}{360} \right) = X + 400 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{59}{360} \right) + 20 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{113}{360} \right) + 350 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{233}{360} \right)$$

Terimleri tek tek hesaplayalım:

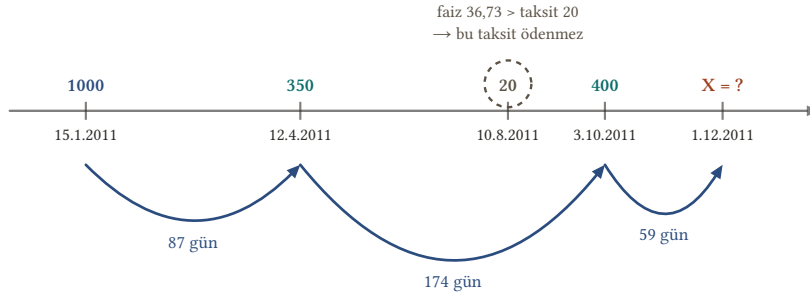
$$1000 \cdot 1,142222 = 1142,22, \quad 400 \cdot 1,026222 = 410,49,$$

$$20 \cdot 1,050222 = 21,00, \quad 350 \cdot 1,103556 = 386,24.$$

Böylece

$$1142,22 = X + 410,49 + 21,00 + 386,24 \Rightarrow \boxed{X = 324,49 \text{ TL}}$$

b) Amerikan Kuralı. Borcu taksitten taksite taşıyalım.



Şekil 1.6: Amerikan Kuralı: borç taksitten taksite taşınır. 10.8.2011 taksidi (20 TL), o güne kadar işlemiş 36,73 TL faizi karşılamadığı için ödenmez; 3.10.2011'de $400 + 20 = 420$ TL birlikte ödenir.

Birinci taksit. 1000 TL için 87 günlük faiz:

$$1000 \cdot 0,16 \cdot \frac{87}{360} = 38,67 \text{ TL}, \quad 38,67 < 350$$

Taksit faizden büyük olduğu için ödeme yapılır. 12.4.2011'deki toplam borç $1000 + 38,67 = 1038,67$ TL; 350 TL ödenince kalan borç

$$1038,67 - 350 = 688,67 \text{ TL}.$$

İkinci taksit. 688,67 TL için 120 günlük faiz:

$$688,67 \cdot 0,16 \cdot \frac{120}{360} = 36,73 \text{ TL}, \quad 36,73 < 20$$

Taksit (20 TL) faizden küçük olduğu için bu taksit **ödenmez**, sonraki taksite katılır.

Üçüncü taksit. Borç 12.4.2011'den 3.10.2011'e, yani 174 gün taşınır:

$$688,67 \cdot 0,16 \cdot \frac{174}{360} = 53,26 \text{ TL}, \quad 53,26 < 420$$

3.10.2011'deki toplam borç $688,67 + 53,26 = 741,93$ TL. Bu tarihte $400 + 20 = 420$ TL ödenince geriye kalan borç

$$741,93 - 420 = 321,93 \text{ TL}.$$

Kapanış. 1.12.2011'e 59 gün kalmıştır:

$$X = 321,93 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{59}{360} \right) = \boxed{330,37 \text{ TL}}$$

■

i İki sonuç neden farklı?

Tüccar Kuralı 324,49 TL, Amerikan Kuralı 330,37 TL verdi. Fark, 20 TL'lik taksidin işlem gördüğü tarihten kaynaklanır: Tüccar Kuralı onu 10.8.2011'de ödenmiş sayıp 113 gün faizlendirir, Amerikan Kuralı ise 3.10.2011'e erteler. Ayrıca Amerikan Kuralı'nda banka defterindeki tutarlar kuruşa yuvarlanarak taşındığı için, ara adımlarda yuvarlanmış değerlerle devam edilmiştir.

1.9 Alıştırmalar

Alıştırma 1.1 (Altı Yıllık Basit Faiz). 2019 yılında 60000 TL'yi %18'den bankaya yatıran bir kişi, parasını 6 yıl sonra çekerse bu yatırımdan elde edeceği faiz miktarını ve parasının birikmiş değerini bulunuz.

Çözüm.

$P = 60000$ TL, $r = 0,18$, $t = 6$ yıl. Süre zaten yıl cinsinden verilmiş:

$$I = Prt = 60000 \cdot 0,18 \cdot 6 = 64800 \text{ TL,}$$

$$S = P + I = 60000 + 64800 = \boxed{124800 \text{ TL}}$$

(Aynı sonuç $S = P(1 + rt)$ formülünden, $60000(1 + 1,08) = 60000 \cdot 2,08$ olarak da bulunur.)

■

Alıştırma 1.2 (Peşin mi, Vadeli mi?). Cep telefonu almak isteyen bir alıcıya, satıcı ya peşin 3000 TL ya da 6 ay sonra 3200 TL ödeme seçeneği sunmuş olsun. Paranın değerinin %6 olduğu biliniyorsa, alıcı hangi seçeneği tercih etmelidir, neden?

Çözüm.

İki seçeneği karşılaştırmak için ikisini de aynı tarihe taşımamız. Odak noktası olarak 6. ayı seçelim. Alıcı bugün 3000 TL ödemek yerine o parayı %6'dan değerlendirseydi 6 ay sonra

$$3000 \left(1 + 0,06 \cdot \frac{6}{12} \right) = 3000 \cdot 1,03 = 3090 \text{ TL}$$

olurdu. Vadeli seçenekte ise aynı tarihte 3200 TL ödeyecektir. Aradaki fark

$$3200 - 3090 = 110 \text{ TL .}$$

Yani **peşin almalıdır**; 6 ay sonra alırsa 110 TL fazladan ödemiş olur.

i Aynı sonuç bugüne taşıyarak

Odak bugün seçilseydi 3200 TL'nin şimdiki değeri $\frac{3200}{1,03} = 3106,80$ TL bulunur, yine peşin ödeme ucuz çıkardı ($3106,80 > 3000$). Sayısal fark (106,80'e karşı 110) odak noktasının değişmesinden kaynaklanır — **Önerme 1.2**'in söylediği tam da budur.

■

Alıştırma 1.3 (Paranın İki Katına Çıkması). Bankaya %12,5'ten yatırdığımız bir miktar paranın iki katına çıkması için kaç yıl gerekir?

Çözüm.

Anaparaya P diyelim; istenen $S = 2P$ olmasıdır:

$$2P = P(1 + 0,125t) \Rightarrow 2 = 1 + 0,125t \Rightarrow t = \frac{1}{0,125} = \boxed{8 \text{ yıl}}$$

Anaparanın kendisinin bilinmemesi sonucu etkilemez: basit faizde ikiye katlanma süresi yalnızca orana bağlıdır.

■

Alıştırma 1.4 (Bir Yatırım Teklifinin Değerlendirilmesi). Paranın değerinin %10 olduğu bir zaman diliminde, size 6 ay sonra 25000 TL ve 1 yıl sonra 20000 TL ödeme yapacak bir yatırımı şimdi 40000 TL'ye satın alırsanız? Neden?

Çözüm.

Odak noktası bugün alınır ve iki ödemenin şimdiki değerleri toplanır:

$$P = \frac{25000}{1 + 0,10 \cdot \frac{6}{12}} + \frac{20000}{1 + 0,10 \cdot 1} = \frac{25000}{1,05} + \frac{20000}{1,10}$$

$$P = 23809,52 + 18181,82 = 41991,34 \text{ TL}$$

Yatırımın bugünkü değeri 41991,34 TL, istenen fiyat ise 40000 TL'dir:

$$41991,34 - 40000 = \boxed{1991,34 \text{ TL}}$$

Evet, satın alınmalıdır; değerinin 1991,34 TL altında almış oluruz.

■

Alıştırma 1.5 (Erken Ödeme). Ahmet Bey, Osman Bey'den %15 oranından 9 ay sonra 2000 TL ödeyeceği bir miktar borç alsın. Eğer 3 ay sonra bu borcunu şimdiki değer üzerinden %14 oranı ile geri öderse Ahmet Bey bu erken ödeme işleminden kaç para kâr eder?

Bu sorunun tek bir cevabı yoktur.

Bu soru, birden çok okumaya açık olduğu için tek bir sayıya götürmez. Alınan borç

$$P = 2000 \left(1 + 0,15 \cdot \frac{9}{12} \right)^{-1} = \frac{2000}{1,1125} = 1797,75 \text{ TL}$$

olarak bellidir. Belirsizlik, “3 ay sonra şimdiki değer üzerinden %14 ile ödemek” ifadesindedir:

- **Birinci okuma:** 3. ayda, kalan 6 aylık süre için %14'ten iskonto edilmiş tutar ödenir: $2000 \left(1 + 0,14 \cdot \frac{6}{12} \right)^{-1} = 1869,16 \text{ TL}$.
- **İkinci okuma:** Alınan 1797,75 TL, 3 ay için %14 ile faizlendirilerek ödenir: $1797,75 \left(1 + 0,14 \cdot \frac{3}{12} \right) = 1860,67 \text{ TL}$.

Üstelik “kâr” da tanımsızdır: kârın hangi tarihe göre ölçüleceği (ödeme tarihi mi, vade tarihi mi) söylenmemiştir. Farklı seçimler farklı sayılar verdiğinden sorunun tek bir doğru cevabı yoktur. Bir problemde taşınacak tutarın, taşınacağı tarihin ve kullanılacak oranın üçünün birden belirtilmiş olması gerektiğini gösteren iyi bir örnektir.

☒

Alıştırma 1.6 (İki Kuralın Karşılaştırılması). A şirketinin 15 Ocak 2019 tarihinde B şirketine 3000 TL borcu var olsun. A şirketi 15 Nisan 2019'da 1000 TL ve 15 Ekim 2019'da 1500 TL borç ödemesi yapmış ise 15 Ocak 2020 tarihinde B şirketine ne kadarlık bir ödeme yaparsa borcunu kapatmış olur? Sonucu a) Tüccar Kuralı, b) Amerikan Kuralı kullanarak ve geçerli faiz oranını %16 alarak hesaplayınız.

Çözüm.

Gerekli gün sayıları (2019 artık yıl değildir):

Aralık	Gün
15.1.2019 → 15.1.2020	365
15.4.2019 → 15.1.2020	275
15.10.2019 → 15.1.2020	92
15.1.2019 → 15.4.2019	90
15.4.2019 → 15.10.2019	183

a) Tüccar Kuralı. Odak noktası 15.1.2020:

$$3000 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{365}{360} \right) = X + 1000 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{275}{360} \right) + 1500 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{92}{360} \right)$$

$$3486,67 = X + 1122,22 + 1561,33$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 803,12 \text{ TL}}$$

b) Amerikan Kuralı.

Birinci taksit. 15.1 → 15.4 arası 90 gün:

$$3000 \cdot 0,16 \cdot \frac{90}{360} = 120,00 \text{ TL}, \quad 120,00 < 1000$$

Taksit faizden büyük, ödeme yapılır. Kalan borç:

$$3000 + 120,00 - 1000 = 2120,00 \text{ TL} .$$

İkinci taksit. 15.4 → 15.10 arası 183 gün:

$$2120,00 \cdot 0,16 \cdot \frac{183}{360} = 172,43 \text{ TL}, \quad 172,43 < 1500$$

Kalan borç:

$$2120,00 + 172,43 - 1500 = 792,43 \text{ TL} .$$

Kapanış. 15.10 → 15.1.2020 arası 92 gün:

$$X = 792,43 \left(1 + 0,16 \cdot \frac{92}{360} \right) = 792,43 \cdot 1,040889 = \boxed{824,83 \text{ TL}}$$

Amerikan Kuralı burada da daha yüksek bir kapanış tutarı verdi; çünkü ödemeler borcu kademe kademe düşürürken ana borcun tamamı ilk günden itibaren faiz işletmeye devam etmemiş, buna karşılık taksitler de vade tarihine kadar faiz kazanmamıştır.

■

2. Basit İskonto, Senetler ve Bonolar

Şimdiye kadar bütün hesaplarımızda oran, elimizdeki **bugünkü** para üzerinden işledi. Oysa borçlanma işlemlerinin çoğu tersine kurulur: taraflar önce **gelecekte ödenecek tutarı** yazarlar, sonra bugün ne kadar para verileceğini o tutardan indirim yaparak bulurlar. Senet kırdırmak, hazine bonusu almak ya da kısa vadeli banka kredisi kullanmak böyle işler.

Bölümün ilk yarısında bu indirimin matematiğini kuruyoruz. Görünüşte küçük olan “hangi tutarın yüzdesi?” farkı, aynı yüzdeden farklı sonuçlar çıkmasına yol açar; iki oranı birbirine çeviren formülleri de burada elde edeceğiz. İkinci yarısında ise bu hesapların günlük hayatta üzerinde karşımıza çıktığı kâğıtları ele alıyoruz: senet, bono ve tahvil.

2.1 Basit İskonto

Tanım 2.1 (Basit İskonto). Gelecekteki bir S değeri üzerinden t yıl için d iskonto oranından yapılan **basit iskonto** (ya da **banka iskontosu**)

$$D = S \cdot d \cdot t$$

formülü ile hesaplanır. Burada

- D : basit iskonto değeri,
- S : birikmiş değer, gelecekteki değer ya da **vade değeri**,
- d : basit iskonto oranı,
- t : zaman (yıl cinsinden).

Alınan borcun şimdiki P değeri, borcun gelecekteki S değeri ile yapılan D iskontosu arasındaki farktır:

$$P = S - D = S - Sdt \Rightarrow \boxed{P = S(1 - dt)}$$

Buna S 'nin **iskontolu değeri** denir.

! Faiz mi, iskonto mu?

$S - P$ farkına hem I faizi hem de D iskontosu olarak bakmak mümkündür. Karışıklığı önlemek için tek bir cümleyi aklınızda tutun:

- **faiz**, şimdiki P değeri üzerinden hesaplanır: $I = Prt$;
- **iskonto**, gelecekteki S değeri üzerinden hesaplanır: $D = Sdt$.

i Neden $dt < 1$ olmalı?

$P = S(1 - dt)$ formülünde $dt \geq 1$ olursa iskontolu değer sıfır ya da negatif çıkar; yani borçlunun eline hiç para geçmez. Bu yüzden basit iskonto ancak $dt < 1$ iken, pratikte de kısa vadeli işlemlerde anlamlıdır. Örneğin $d = 0,20$ ise vade 5 yıla yaklaştığında formül çöker. Faiz oranında böyle bir sınır yoktur, çünkü $1 + rt$ hiçbir zaman sıfır olmaz.

2.2 Bir İskonto Oranına Denk Olan Faiz Oranı

Örnek 2.1 (Aynı Yüzde, Farklı Sonuç). Bir yıl sonra ödenecek 1000 TL'nin şimdiki değerini **a)** %12,5 basit faiz oranından, **b)** %12,5 basit iskonto oranından hesaplayınız.

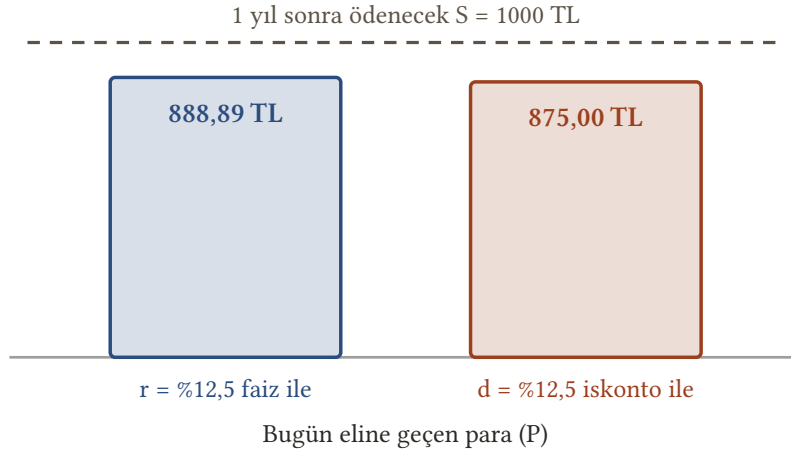
Çözüm.

a) $r = 0,125$, $S = 1000$ TL, $t = 1$:

$$P = S(1 + rt)^{-1} = \frac{1000}{1 + 0,125 \cdot 1} = \frac{1000}{1,125} = 888,89 \text{ TL} .$$

b) $d = 0,125$, $S = 1000$ TL, $t = 1$:

$$P = S(1 - dt) = 1000(1 - 0,125 \cdot 1) = 875,00 \text{ TL} .$$



Şekil 2.1: Aynı yüzde, iki farklı sonuç: faiz oranı bugünkü değer P üzerinden, iskonto oranı ise gelecekteki değer S üzerinden işler. Bu yüzden %12,5 iskonto, %12,5 faizden daha pahalıdır — borçlunun eline daha az para geçer.

■

Örnekten anlaşılacağı üzere aynı oranlardan hesaplanan şimdiki değerler arasında fark vardır: **iskonto oranı ile hesaplanan değer, faiz oranı ile hesaplanandan daha azdır**. Bu durumda iki oranı karşılaştırabilmek için birbirine çeviren formüllere ihtiyacımız var.

Önerme 2.1 (Denk Faiz ve İskonto Oranları). t yıl için aynı P ve S çiftini veren r faiz oranı ile d iskonto oranı arasında

$$d = \frac{r}{1 + rt} \quad \text{ve} \quad r = \frac{d}{1 - dt}$$

bağıntıları vardır.

İspat.

İki yöntem de aynı S ve P 'yi veriyorsa

$$P(1 - dt)^{-1} = P(1 + rt) \Rightarrow \frac{1}{1 - dt} = 1 + rt.$$

Buradan $1 = (1 - dt)(1 + rt)$, yani $1 - dt = \frac{1}{1 + rt}$ olur. İki yanı düzenlersek

$$dt = 1 - \frac{1}{1 + rt} = \frac{rt}{1 + rt} \Rightarrow d = \frac{r}{1 + rt}.$$

Aynı eşitlikten r çekilirse: $1 + rt = \frac{1}{1 - dt}$ olduğundan

$$rt = \frac{1}{1-dt} - 1 = \frac{dt}{1-dt} \Rightarrow r = \frac{d}{1-dt}.$$

■

Formüllerin paydalarına bakmak, hangisinin büyük olduğunu ezberlemeden görmeyi sağlar: $d = \frac{r}{1+rt} < r$ ve $r = \frac{d}{1-dt} > d$. Yani **bir iskonto oranına denk gelen faiz oranı her zaman daha büyüktür.**

Örnek 2.2 (İskontonun ve İskonto Oranının Bulunması). 5 ay sonra ödenecek 1000 TL'nin %12 basit faiz oranından bugünkü değerini, basit iskontoyu ve basit iskonto oranını bulunuz.

Çözüm.

$$S = 1000 \text{ TL}, r = 0,12, t = \frac{5}{12}.$$

$$P = S(1 + rt)^{-1} = \frac{1000}{1 + 0,12 \cdot \frac{5}{12}} = \frac{1000}{1,05} = 952,38 \text{ TL},$$

$$D = S - P = 1000 - 952,38 = 47,62 \text{ TL}.$$

İskonto oranını iki yoldan bulabiliriz. Doğrudan tanımdan:

$$D = Sdt \Rightarrow d = \frac{D}{St} = \frac{47,62}{1000 \cdot \frac{5}{12}} = 0,114288 \approx \boxed{\%11,43}$$

ya da [Önerme 2.1](#) ile:

$$d = \frac{r}{1 + rt} = \frac{0,12}{1 + 0,12 \cdot \frac{5}{12}} = \frac{0,12}{1,05} = 0,114285 \approx \boxed{\%11,43}$$

İki yol son basamakta ayrılıyor; çünkü ilkinde D önce kuruşa yuvarlandı. İki basamağa yuvarlandığında sonuç aynıdır.

■

Örnek 2.3 (Bankanın Vereceği Borç). Bir banka kısa süreli borçlanmalarda $d = 0,11$ basit iskonto oranından borç vermektedir. Buna göre

- a) 90 gün sonra 900 TL ödeyecek bir müşteriye banka şimdi ne kadarlık borç verir?
b) 15.10.2012'de 1500 TL ödeyecek bir müşteriye banka 3.5.2012'de ne kadarlık borç verir?

Çözüm.

a) $S = 900 \text{ TL}, d = 0,11, t = \frac{90}{360}$:

$$P = S(1 - dt) = 900 \left(1 - 0,11 \cdot \frac{90}{360} \right) = 900(1 - 0,0275) = \boxed{875,25 \text{ TL}}$$

b) Önce iki tarih arasındaki günleri sayalım:

Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Toplam
28	30	31	31	30	15	165

(Mayıs'ın 31 gününden, ayın 3'üne kadar geçen kısım düşülünce $31 - 3 = 28$ gün kalır.)

$$S = 1500 \text{ TL}, d = 0,11, t = \frac{165}{360}$$

$$P = 1500 \left(1 - 0,11 \cdot \frac{165}{360} \right) = 1500(1 - 0,050417) = \boxed{1424,38 \text{ TL}}$$

■

Özet

	Faiz	İskonto
Neyin yüzdesi?	P (bugünkü değer)	S (vade değeri)
Tutar	$I = Prt$	$D = Sdt$
İleri taşıma	$S = P(1 + rt)$	$S = P(1 - dt)^{-1}$
Geri taşıma	$P = S(1 + rt)^{-1}$	$P = S(1 - dt)$
Sınırlama	yok	$dt < 1$ olmalı

2.3 Senetler

Faiz ve iskonto hesapları günlük hayatta çoğunlukla bir **kâğıt** üzerinde karşımıza çıkar: senet, bono, tahvil. Bir senedin hayatında iki kritik an vardır – düzenlendiği an (faizle vade değeri hesaplanır) ve vadesinden önce el değiştirdiği an (iskontoyla satış fiyatı hesaplanır). İkisi farklı formüllerle, çoğu zaman farklı oranlarla yapılır.

Tanım 2.2 (Senet (Bono)). Borçlu tarafından belli bir miktar paranın faizli ya da faizsiz belirli bir tarihte (= **vade tarihi**) borç veren kişiye ya da belli birinin emrine ödenmek üzere hazırlanmış ve borçlu tarafından imzalanmış kıymetli evraklara **senet** ya da **bono** denir.

Bir senedin üzerinde bulunması gereken başlıca unsurlar şunlardır: ödeme günü (vade), ödenecek tutarın rakam ve yazıyla yazılışı, kime ya da kimin emrine ödeneceği, düzenlenme tarihi ve yeri, borçlunun kimlik bilgileri ile imzası, varsa kefil bilgileri. Bunlardan biri eksikse belge senet vasfını yitirir; matematiksel olarak bizi ilgilendirense yalnızca iki sayıdır: **vade değeri** ve **vade tarihi**.

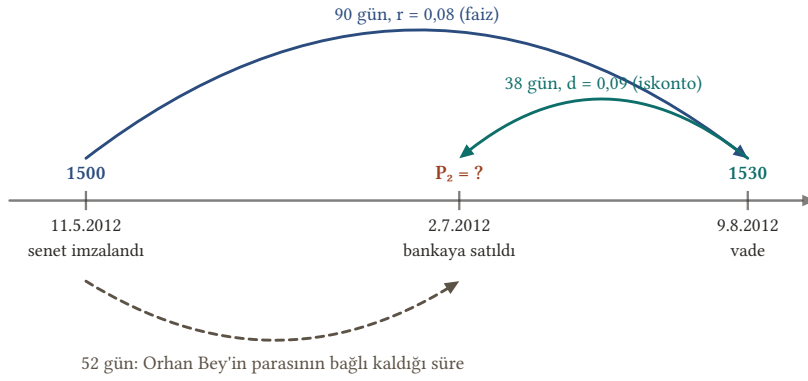
Örnek 2.4 (Senedin Kırdırılması). Murat Bey, Orhan Bey’den 1500 TL borç alsın ve bunun karşılığında Orhan Bey’e bu parayı 90 gün sonra %8 basit faizden ödeyeceğine dair 11.5.2012’de bir senet imzalasın.

- Bu senedin üzerinde yazılı olan vade değeri nedir?
- Orhan Bey, 2.7.2012’de (vadesinden önce) bu senedi bir bankaya %9 banka iskontosu ile satsa (kırdırsa) bankadan ne kadar para alır?
- Orhan Bey’in bu işlemler sonucunda yaptığı yatırımdan elde ettiği faiz oranı nedir?
- Eğer banka senedi, vade sonuna kadar elinde tutarsa yaptığı yatırımın faiz oranı ne olur?

Çözüm.

Vade tarihi 11.5.2012’den 90 gün sonrası, yani 9.8.2012’dir. Gerekli gün sayıları:

Aralık	Gün
11.5.2012 → 9.8.2012 (vade)	90
11.5.2012 → 2.7.2012 (Orhan Bey’in elinde)	52
2.7.2012 → 9.8.2012 (bankanın elinde)	38



Şekil 2.2: Senedin vade değeri **faiz** ile ileri taşınarak (1530 TL), bankanın ödediği tutar ise vade değerinden **iskonto** ile geri gelinerek (1515,47 TL) bulunur. Alttaki 52 gün, Orhan Bey'in getirisinin hangi süreye bölüneceğini gösterir.

a) Vade değeri, borç alınan tutarın **faizle** ileri taşınmasıyla bulunur:

$$S = P(1 + rt) = 1500 \left(1 + 0,08 \cdot \frac{90}{360} \right) = 1500 \cdot 1,02 = \boxed{1530 \text{ TL}}$$

b) Banka, vade değeri üzerinden **iskonto** yapar; kalan 38 gün için:

$$P_2 = S(1 - dt) = 1530 \left(1 - 0,09 \cdot \frac{38}{360} \right) = 1530(1 - 0,0095) = \boxed{1515,47 \text{ TL}}$$

c) Orhan Bey 1500 TL verip 52 gün sonra 1515,47 TL almıştır:

$$I = 1515,47 - 1500 = 15,47 \text{ TL},$$

$$I = Prt \Rightarrow r = \frac{I}{P \cdot t} = \frac{15,47}{1500 \cdot \frac{52}{360}} = \frac{15,47}{216,67} \approx \boxed{\%7,14}$$

d) Banka senedi 1515,47 TL'ye almıştır; banka için $P = 1515,47 \text{ TL}$, senedin vade değeri ise $S = 1530 \text{ TL}$ 'dir. Bu durumda

$$I = S - P = 1530 - 1515,47 = 14,53 \text{ TL},$$

$$r = \frac{I}{P \cdot t} = \frac{14,53}{1515,47 \cdot \frac{38}{360}} = \frac{14,53}{159,97} \approx \boxed{\%9,08}$$

i Son basamak farkı

P_2 kuruşa yuvarlanmadan (1515,465) hesaplanırsa aynı oran %9,09 çıkar. Yuvarlama zincirinden doğan bu tür son basamak farkları normaldir; burada yuvarlanmış değerlerle devam edilmiştir.

Bankanın elde ettiği %9,08'lik faiz oranının, uyguladığı %9'luk iskonto oranından **büyük** olduğuna dikkat edin — **Önerme 2.1** tam da bunu söylüyordu.

■

2.4 Tahviller ve Bonolar

Eğer borçlanan taraf devlet ise ilgili senetlere **Devlet İç Borçlanma Senetleri (DİBS)** denir. DİBS, Hazine tarafından yurt içi piyasada ihraç edilen (= satışa sunulan) borçlanma senetlerini ifade eder. Borçlu olan devlet, DİBS sahiplerine kupon ödeme tarihlerinde ve vade sonunda borçlu olduğu tutarı öder. Bu senetler vadeleri boyunca ikincil piyasalarda kişi ve kurumlar tarafından alınıp satılabilmektedir.

Tanım 2.3 (Bono ve Tahvil). Devlet veya özel sektör (anonim şirket) tarafından ödünç para bulmak amacıyla,

- vadesi **bir yıldan kısa** olarak çıkarılan ve iskontolu olarak işlem gören borçlanma senetlerine **Hazine Bonosu** veya **Özel Sektör Bonosu**,
- vadesi **bir yıl veya daha uzun** olanlara **Devlet Tahvili** veya **Özel Sektör Tahvili**

denir.

Tahviller, vadeleri en az 1 yıl olmak koşulu ile serbestçe belirlenebilir ve sabit ya da değişken faizli olarak ihraç edilebilirler. Genellikle bir veya birkaç aracı kuruluştan oluşan bir konsorsiyum aracılığıyla satışa sunulurlar. Tahvillerin ayrıntılı matematiği **Tahviller** bölümünde ele alınacaktır; burada yalnızca kısa vadeli, kuponsuz bir bononun nasıl fiyatlandırıldığına bakıyoruz.

Örnek 2.5 (Bononun İskonto ve Faiz Oranı). Bir banka ihraç ettiği 5000 TL'lik bir bonoya 91 gün için 4682 TL teklif vermektedir. Eğer verilen fiyat teklifi kabul edilirse bankanın uyguladığı **a)** basit iskonto oranını, **b)** basit faiz oranını bulunuz.

Çözüm.

a) $S = 5000$ TL, $P = 4682$ TL, $t = \frac{91}{360}$ olduğundan iskonto tutarı

$$D = S - P = 5000 - 4682 = 318 \text{ TL} .$$

$D = Sdt$ formülünden

$$d = \frac{D}{St} = \frac{318}{5000 \cdot \frac{91}{360}} = 0,251604395 \approx \boxed{\%25,16}$$

b) İki yol da aynı sonucu verir. **Önerme 2.1** ile:

$$r = \frac{d}{1 - dt} = \frac{0,251604395}{1 - 0,251604395 \cdot \frac{91}{360}} = 0,268693288 \approx \boxed{\%26,87}$$

ya da doğrudan tanımdan: $I = S - P = 318$ TL ve faiz, **bugün ödenen** 4682 TL üzerinden hesaplanır:

$$r = \frac{I}{Pt} = \frac{318}{4682 \cdot \frac{91}{360}} = 0,268693288 \approx \boxed{\%26,87}$$

Aynı 318 TL'lik farkın, 5000'in yüzdesi olarak %25,16, 4682'nin yüzdesi olarak %26,87 etmesi bu bölümün ana fikrinin somut hâlidir.

■

2.5 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (İskonto ve Şimdiki Değer). %10 basit iskonto oranından 3 ay sonra ödenecek olan 1500 TL'lik borcun iskontosunu ve şimdiki değerini hesaplayınız.

Çözüm.

$$S = 1500 \text{ TL}, d = 0,10, t = \frac{3}{12} = 0,25:$$

$$D = Sdt = 1500 \cdot 0,10 \cdot 0,25 = \boxed{37,50 \text{ TL}}$$

$$P = S - D = 1500 - 37,50 = \boxed{1462,50 \text{ TL}}$$

■

Alıştırma 2.2 (Gün Cinsinden İskonto). %10,5 iskonto oranından 120 gün için 568,30 TL üzerindeki iskontoyu ve şimdiki değeri bulunuz.

Çözüm.

$$S = 568,30 \text{ TL}, d = 0,105, t = \frac{120}{360}:$$

$$D = Sdt = 568,30 \cdot 0,105 \cdot \frac{120}{360} = 568,30 \cdot 0,035 = \boxed{19,89 \text{ TL}}$$

$$P = S - D = 568,30 - 19,89 = \boxed{548,41 \text{ TL}}$$

■

Alıştırma 2.3 (Hedeflenen Faize Denk İskonto Oranı). Bir kişi borç verdiği 6 ay için %12 oranında faiz elde etmek istiyor; bu kişi borç verirken hangi iskonto oranını kullanmalıdır?

Çözüm.

İstenen $r = 0,12$, süre $t = \frac{6}{12} = 0,5$ yıl. **Önerme 2.1** ile:

$$d = \frac{r}{1 + rt} = \frac{0,12}{1 + 0,12 \cdot 0,5} = \frac{0,12}{1,06} = 0,113208 \approx \boxed{\%11,32}$$

%12 faiz elde etmek isteyen kişi, %12 değil %11,32 iskonto uygulamalıdır; iskonto oranı daha büyük tutar üzerinden işlediği için daha küçük seçilir.

■

Alıştırma 2.4 (Senedin Bankaya Satılması). 15 Kasım 1992 tarihinde Epsilon Yazılım Şirketi'nin elinde 1200 TL'lik bir senet vardır. Senedin vade tarihi 15 Mayıs 1993 ve geçerli faiz oranı %16 olsun. Eğer Epsilon Yazılım Şirketi bu senedi 30 Ocak 1993 tarihinde bir bankaya %15 iskonto ile satarsa, bankadan alacağı para ne kadar olur?

Çözüm.

Senedin **vade değeri** $S = 1200$ TL'dir (senedin üzerinde yazan, 15 Mayıs 1993'te ödenecek tutar). Satış tarihinden vadeye kalan süre:

$$\underbrace{1}_{\text{Ocak}} + \underbrace{28}_{\text{Şubat}} + \underbrace{31}_{\text{Mart}} + \underbrace{30}_{\text{Nisan}} + \underbrace{15}_{\text{Mayıs}} = 105 \text{ gün}.$$

Banka iskontosu vade değeri üzerinden yapılır:

$$P = S(1 - dt) = 1200 \left(1 - 0,15 \cdot \frac{105}{360} \right) = 1200(1 - 0,04375) = \boxed{1147,50 \text{ TL}}$$

i Not

Banka iskontosu yalnızca vade değeri, iskonto oranı ve kalan süreye bakar; senedin hangi faiz oranıyla düzenlendiği bankayı ilgilendirmez. %16'lık oran ancak "Epsilon şirketi bu işlemde ne kazandı/kaybetti?" diye sorulsa idi gerekirdi.

■

Alıştırma 2.5 (Faizle mi, İskontoyla mı Borçlanmalı?). Bir kişi 1 yıl için ya %12,25 faiz oranından ya da %12 iskonto oranından borç almak zorunda ise hangisini tercih etmelidir? Neden?

Çözüm.

İki teklifi aynı dile çevirmek gerekir. %12 iskonto oranına denk gelen faiz oranı, $t = 1$ için

$$r = \frac{d}{1 - dt} = \frac{0,12}{1 - 0,12} = \frac{0,12}{0,88} = 0,136364 \approx \%13,64.$$

Karşılaştırma artık kolaydır: $\%12,25 < \%13,64$ olduğundan **faiz oranını, yani %12,25'i tercih etmelidir.**

Aynı sonuç somut bir tutarla da görülebilir: 1000 TL almak isteyen kişi

- faizle borçlanırsa 1 yıl sonra $1000(1 + 0,1225) = 1122,50$ TL öder;
- iskontoyla borçlanırsa eline 1000 TL geçmesi için $1000 = S(1 - 0,12)$, yani $S = 1136,36$ TL'lik senet imzalaması gerekir.

■

Alıştırma 2.6 (Senedin Vade Değeri ve Satış Fiyatı). 10 Ağustos 2019'da 300000 TL karşılığı imzalanın 90 günlük bir senedin 0,05 faiz oranından vade değeri ne olur? Bu senedi elinde bulunduran kişi 9 Eylül 2019'da 0,06 iskonto oranı ile senedi kaç TL satar?

Çözüm.

Vade değeri. $P = 300000$ TL, $r = 0,05$, $t = \frac{90}{360}$:

$$S = P(1 + rt) = 300000 \left(1 + 0,05 \cdot \frac{90}{360} \right) = 300000 \cdot 1,0125 = \boxed{303750 \text{ TL}}$$

Satış fiyatı. Vade tarihi 10 Ağustos +90 gün = 8 Kasım 2019'dur. 9 Eylül'den vadeye kalan süre:

$$\underbrace{21}_{\text{Eylül}} + \underbrace{31}_{\text{Ekim}} + \underbrace{8}_{\text{Kasım}} = 60 \text{ gün}.$$

$$P = S(1 - dt) = 303750 \left(1 - 0,06 \cdot \frac{60}{360} \right) = 303750 \cdot 0,99 = \boxed{300712,50 \text{ TL}}$$

Senedi elinde tutan kişi 30 günde 712,50 TL kazanmıştır.

■

3. Bileşik Faiz

Basit faizde kazanılan faiz kenarda bekler; anaparaya eklenmez ve kendisi faiz getirmez. Oysa bir bankada mevduatınız varsa, her ay işleyen faiz hesabınıza eklenir ve **ertesi ay o faiz de faiz getirir**. Bu düzeneğe bileşik faiz diyoruz ve modern finansın hemen tamamı bunun üzerine kuruludur.

Bu bölüm dersin en geniş bölümüdür, çünkü bileşik faizin bütün soru tipleri burada toplanmıştır: formülün kurulması ve faiz döneminin sonsuz sıklaştığı sınır durumu olan sürekli bileşik faiz; farklı sıklıktaki oranların birbirine çevrilmesi; dönem sayısının kesirli çıktığı durum; bilinmeyen oran ya da süre olduğu problemler; bileşik faizin basit faize göre en önemli üstünlüğü olan odak noktasından bağımsızlık; ve son olarak iskontonun bileşik hâli.

3.1 Tanım ve Notasyon

Tanım 3.1 (Bileşik Faiz). Faiz ödenen her dönemden sonra tahakkuk eden (elde edilen) faizin anaparaya eklenmesiyle hesaplanan faiz türüne **bileşik faiz** denir.

Bileşik faiz işlemlerinde faiz işleyen periyot yıl, yarıyıl (6 ayda bir), çeyrek yıl (3 ayda bir), ay, hafta, gün veya sürekli olabilir. Bu esneklik yüzünden notasyon biraz kalabalıktır; hepsini bir arada görmek en kolaydır.

Simge	Anlamı
P	Anapara; S 'nin şimdiki (iskontolu) değeri
S	Toplam değer, birikmiş değer; P 'nin bileşik değeri
t	Yıl cinsinden zaman
m	Bir yılda faiz ödenen dönem sayısı
n	Toplam faiz ödenen dönem sayısı: $n = m \cdot t$
j_m	Yılda m kez işleyecek olan yıllık faiz oranı
i	Dönem başına işleyen faiz oranı: $i = \frac{j_m}{m}$

! En sık yapılan hata

j_m yıllık, i ise dönemliktir. Formüllerde üsse giden dönem sayısı n ile birlikte **her zaman dönemlik oran i** kullanılır. $j_{12} = \%24$ demek, aylık oranın $\%2$ olması demektir – yılda 12 kez $\%24$ değil.

Örnek 3.1 (Dönem Faiz Oranı). $j_{12} = \%24$ ise $i = ?$

Çözüm.

$m = 12$ dönem (ay) vardır; aylık (dönemlik) faiz oranı

$$i = \frac{j_{12}}{12} = \frac{0,24}{12} = 0,02 = \boxed{\%2}$$

■

3.2 Birikmiş Değer Formülü

Önerme 3.1 (Bileşik Faizde Birikmiş Değer). Bir P anaparası, 1. dönemin başında dönem başına i faiz oranı ile yatırıldığında n . dönemin sonundaki birikmiş değeri

$$S = P(1 + i)^n$$

ya da daha açık bir ifadeyle

$$S = P \left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^{m \cdot t}$$

olur. Buradan şimdiki değer

$$P = S(1 + i)^{-n} = S \left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^{-m \cdot t}$$

formülüyle bulunur.

İspat.

İlk birkaç dönemi tek tek yazalım. 1. dönem sonunda faiz $I = P \cdot i$ ve birikmiş değer

$$S_1 = P + Pi = P(1 + i).$$

2. dönemde faiz artık P üzerinden değil, S_1 üzerinden işler:

$$I = P(1 + i) \cdot i, \quad S_2 = P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2.$$

3. dönemde aynı adım tekrarlanır:

$$S_3 = P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2i = P(1 + i)^2(1 + i) = P(1 + i)^3.$$

Genel durumu tümevarımla gösterelim. $n = 1$ için iddia yukarıda doğrulandı. $n = k$ için $S_k = P(1 + i)^k$ olduğunu varsayalım. $(k + 1)$. dönemde bu tutar üzerinden $S_k \cdot i$ kadar faiz işler ve anaparaya eklenir:

$$S_{k+1} = S_k + S_k i = S_k(1 + i) = P(1 + i)^k(1 + i) = P(1 + i)^{k+1}.$$

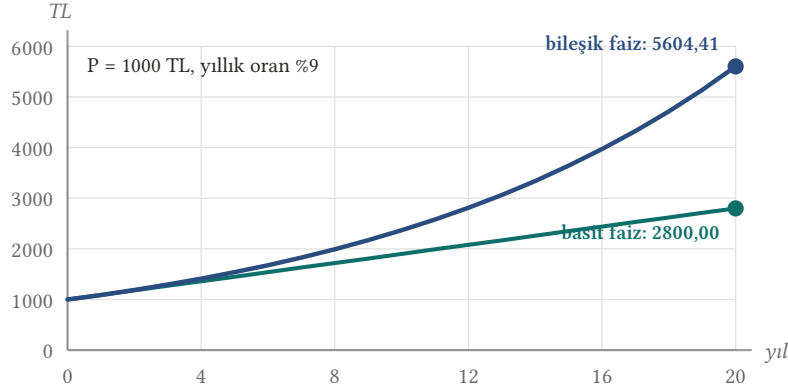
Böylece iddia her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. Son olarak $i = \frac{j_m}{m}$ ve $n = mt$ yerine konursa ikinci biçim elde edilir; $(1 + i)^n \neq 0$ olduğundan iki yan bu çarpana bölünerek $P = S(1 + i)^{-n}$ bulunur.

■

Basit faizle aradaki farkı bir grafikte görmek, formülü ezberlemekten daha kalıcıdır.

🔍 Doğru mu, eğri mi?

Basit faizde $S = P(1 + rt)$ ifadesi t 'nin **birinci dereceden** bir fonksiyonudur: grafiği bir doğrudur. Bileşik faizde $S = P(1 + i)^n$ ifadesi n 'nin **üstel** bir fonksiyonudur. İlk dönemlerde ikisi neredeyse aynıdır; fark, zaman uzadıkça açılır.



Şekil 3.1: Basit faizde yalnızca anapara faiz getirdiği için birikim bir **doğru** boyunca artar; bileşik faizde her dönemin faizi anaparaya eklendiğinden artış **üstel**dir. Fark kısa vadede küçük, uzun vadede belirleyicidir.

Örnek 3.2 (Basit Faiz ile Bileşik Faizin Karşılaştırılması). a) 1000 TL'nin %12'den 2 yıllık basit faizini bulunuz.

b) 1000 TL'nin 6 aylık faiz ödemeli %12'den 2 yıllık faizini bulunuz.

Çözüm.

a) $P = 1000$, $r = 0,12$, $t = 2$:

$$I = Prt = 1000 \cdot 0,12 \cdot 2 = \boxed{240 \text{ TL}}$$

b) Periyot 6 ay olduğundan 1 yıldaki dönem sayısı $m = 2$ ve $t = 2$ olduğundan toplam dönem sayısı $n = m \cdot t = 2 \cdot 2 = 4$ 'tür.

$$P = 1000, \quad j_2 = 0,12, \quad i = \frac{0,12}{2} = 0,06$$

$$S = P(1 + i)^n = 1000(1 + 0,06)^4 = 1262,48 \text{ TL}$$

Bu durumda faiz

$$I = S - P = 1262,48 - 1000 = \boxed{262,48 \text{ TL}}$$

Aynı %12'den, yalnızca faizin altı ayda bir anaparaya eklenmesi sayesinde 22,48 TL fazla kazanılmıştır. ■

Örnek 3.3 (Yirmi Yıllık Birikim). Bir kimse emekliliği için tasarruf yapmak üzere Şubat 2010'da bankaya 100000 TL yatırırsa, aylık faiz ödemeli %12 yıllık bileşik faiz oranından Şubat 2030'da kaç parası olur?

Çözüm.

$P = 100000$, $t = 20$ yıl, $m = 12$ olduğundan $n = 20 \cdot 12 = 240$ dönem ve

$$j_{12} = 0,12 \Rightarrow i = \frac{0,12}{12} = 0,01.$$

$$S = P(1 + i)^n = 100000 \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{240} = 100000 \cdot 10,892554 = \boxed{1089255,37 \text{ TL}}$$

Yirmi yılda para on kattan fazlasına çıkmıştır; oysa aynı sürede basit faiz yalnızca $100000(1 + 0,12 \cdot 20) = 340000$ TL verirdi.

■

3.3 Sürekli Bileşik Faiz

Faiz dönemini sıklaştırdıkça (m büyüdükçe) birikmiş değer artar. Peki m 'yi sonsuza götürürsek para da sonsuza mı gider? Cevap hayır; bir sınıra yaklaşır.

Tanım 3.2 (Sürekli Bileşik Faiz Oranı). $m \rightarrow \infty$ hâlinde faiz ödenen dönem kesikli olmaktan çıkıp sürekli hâle geldiğinden, bu durumda kullanılan bileşik faiz oranına **sürekli bileşik faiz oranı** denir ve j_∞ ile gösterilir.

Önerme 3.2 (Sürekli Bileşik Faizde Birikmiş Değer). *Sürekli bileşik faizde birikmiş değer*

$$S = P \cdot e^{j_\infty \cdot t}$$

formülüyle hesaplanır.

İspat.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x \text{ bilgisini kullanarak}$$

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m \cdot t} = P \cdot \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m \right]^t = P \cdot (e^{j_\infty})^t = P e^{j_\infty t}.$$

■

i Sınır ne kadar uzakta?

10000 TL, $j_m = \%12$ 'den 10 yıl bekletilsin. $m = 1$ için birikim 31058,48 TL, $m = 365$ için 33194,62 TL, sürekli bileşik faizde ise

$$10000 \cdot e^{0,12 \cdot 10} = 10000 e^{1,2} = 33201,17 \text{ TL}$$

olur. Yani günlük bileşik faizden sürekli bileşik faize geçiş yalnızca 6,55 TL kazandırır. Bu tablonun ayrıntısı **Örnek 3.4** içinde verilmiştir.

Bileşik faizin bu kadar çok “yıllık oran” tanımına izin vermesi bir sorun doğurur: $j_1 = \%10,08$ ile $j_{12} = \%9,64$ hangisi daha iyidir? İki oranı karşılaştırmak için önce onları **eşdeğer** kılmayı öğrenmemiz gerekiyor; bölümün bundan sonraki konusu budur.

3.4 Eşdeğer Oranlar

Bir banka “yıllık $\%10,08$, yılda bir ödemeli”, diğeri “yıllık $\%9,64$, ayda bir ödemeli” desin. Hangisi daha iyi? Oranların çıplak hâllerine bakarak karar veremeyiz; çünkü ikinci bankada faiz on iki kez anaparaya ekleniyor. Karşılaştırma yapabilmek için ikisini **aynı sıklığa** çevirmemiz gerekir.

Tanım 3.3 (Eşdeğer Oranlar). Farklı m değerlerine sahip iki j_m oranı, aynı zaman sürecinde aynı S değerini veriyorlarsa bunlara **eşdeğer oranlar** denir.

Önerme 3.3 (Eşdeğerlik Koşulu). j_{m_1} ve j_{m_2} oranlarının eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(1 + \frac{j_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{j_{m_2}}{m_2}\right)^{m_2}$$

olmasıdır.

İspat.

Aynı P anaparası için iki oranın t yıl sonunda aynı S 'yi vermesi

$$P\left(1 + \frac{j_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1 t} = P\left(1 + \frac{j_{m_2}}{m_2}\right)^{m_2 t}$$

demektir. $P \neq 0$ ile sadeleştirip iki yanın $\frac{1}{t}$. kuvvetini alırsak (tabanlar pozitif olduğundan bu işlem denkliği bozmaz) istenen eşitlik elde edilir. Tersine, eşitlik sağlanıyorsa iki yanın t . kuvveti alınıp P ile çarpılarak her t için aynı S bulunur.

■

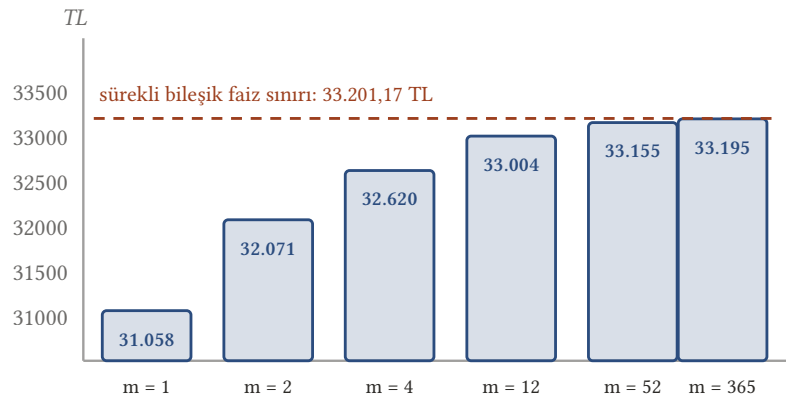
İfadenin anlamı basittir: **bir yılda paranın kaç katına çıktığı** eşitlenir. $\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m$ ifadesi bir yıllık büyüme çarpanıdır; iki oran ancak bu çarpanları aynıysa eşdeğerdir. Sürekli bileşik faiz için bu çarpan e^{j_∞} 'dur.

Örnek 3.4 (m Büyüdükçe Birikim). 10000 TL'nin $j_m = 0,12$ oranından $m = 1, 2, 4, 12, 52, 365$ için ayrı ayrı 10 yıl sonra ne kadar olacağını hesaplayınız.

Çözüm.

Her satırda $i = \frac{0,12}{m}$, $n = 10m$ ve $S = 10000(1 + i)^n$ hesaplanır:

m	t	n	i	P	$S = P(1 + i)^n$
1	10	10	0,12	10000	31058,48
2	10	20	$\frac{0,12}{2}$	10000	32071,35
4	10	40	$\frac{0,12}{4}$	10000	32620,38
12	10	120	$\frac{0,12}{12}$	10000	33003,87
52	10	520	$\frac{0,12}{52}$	10000	33155,30
365	10	3650	$\frac{0,12}{365}$	10000	33194,62



Şekil 3.2: 10000 TL, $j_m = \%12$ 'den 10 yıl bekletiliyor. Faiz dönemi sıklaştıkça (m büyüdükçe) birikmiş değer artar, ama artış giderek yavaşlar: kesikli çizgi, $10000e^{1,2} = 33.201,17$ TL olan sürekli bileşik faiz sınırıdır.

Görüldüğü gibi m arttıkça S de artar, ama artış hızla yavaşlar: $m = 1$ 'den $m = 2$ 'ye geçiş 1012,87 TL kazandırırken, $m = 52$ 'den $m = 365$ 'e geçiş yalnızca 39,32 TL kazandırır. Sınır değer sürekli bileşik faizin verdiği $10000 e^{1,2} = 33201,17$ TL'dir.

■

Örnek 3.5 (Denk Oranların Bulunması). Aşağıda istenilen denk oranları bulunuz.

a) $j_1 = \%10,08$ 'e denk gelen $j_{12} = ?$

b) $j_4 = \%12$ 'ye denk olan $j_2 = ?$

c) $j_\infty = \%9$ 'a denk olan $j_4 = ?$

Çözüm.

a) Bir yıllık büyüme çarpanlarını eşitleriz:

$$\left(1 + \frac{j_{12}}{12}\right)^{12} = \left(1 + \frac{j_1}{1}\right)^1 = 1 + 0,1008 = 1,1008$$

İki yanın 12. dereceden kökünü alalım:

$$1 + \frac{j_{12}}{12} = (1,1008)^{\frac{1}{12}} \Rightarrow j_{12} = 12[(1,1008)^{\frac{1}{12}} - 1] = 0,09642251 \approx \boxed{\%9,64}$$

b)

$$\left(1 + \frac{j_2}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{j_4}{4}\right)^4 = \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 = (1,03)^4$$

İki yanın karekökü alınırsa

$$1 + \frac{j_2}{2} = (1,03)^2 \Rightarrow j_2 = 2[(1,03)^2 - 1] = 2 \cdot 0,0609 = \boxed{\%12,18}$$

c) Sürekli bileşik faizde bir yıllık büyüme çarpanı e^{j_∞} 'dur:

$$\left(1 + \frac{j_4}{4}\right)^4 = e^{j_\infty} = e^{0,09}$$

$$1 + \frac{j_4}{4} = e^{\frac{0,09}{4}} \Rightarrow j_4 = 4[e^{\frac{0,09}{4}} - 1] = 0,0910201 \approx \boxed{\%9,10}$$

■

💡 Sağlama

Bulunan denk oran her zaman **daha sık ödemeli olan tarafta daha küçük** olmalıdır: $j_{12} = \%9,64 < j_1 = \%10,08$, $j_2 = \%12,18 > j_4 = \%12$, $j_4 = \%9,10 > j_\infty = \%9$. Sonucunuz bu sıralamaya uymuyorsa bir yerde m değerlerini karıştırmışsınızdır.

3.5 Kesirli Toplam Dönemler

Bileşik faizde faiz uygulanan toplam dönem sayısı tam sayı değil de kesirli olarak verilmişse iki yöntem kullanılır.

Tanım 3.4 (Teorik ve Pratik Metod).

- **Teorik Metod:** n toplam dönem sayısı kesirli olarak işleme katılır; yani $(1 + i)^n$ ifadesinde n kesirli üs olarak kullanılır.

- **Pratik Metod:** Birikmiş değeri bulurken ilgili tarihi geçmeyen en büyük tam dönem sayısı kadar ileriye doğru bileşik faiz, geriye kalan ve 1 dönem etmeyen kısım için de ileriye doğru **basit faiz** uygulanır. Geçmişteki değeri bulurken ise ilgili tarihi içeren en küçük dönem kadar geriye doğru bileşik faiz ile gidilir ve daha sonra ilgili tarihe kadar ileriye doğru basit faiz uygulanır.

⚠ Uyarı

Aksi belirtilmedikçe **pratik metod** uygulanır.

i İki metod neden farklı sonuç verir?

Bir dönemden kısa süreler için $(1+i)^x$ ile $1+ix$ aynı şey değildir. $0 < x < 1$ iken $(1+i)^x < 1+ix$ olur; yani pratik metod, kesirli parça için biraz **daha fazla** kazandırır. Fark küçüktür ama vardır — aşağıdaki örnekte 0,62 TL'dir.

Örnek 3.6 (Kesirli Dönemde Birikmiş Değer). 1000 TL'nin 5 yıl 7 ay sonra $j_2 = \%13,50$ oranından değerini a) Teorik, b) Pratik Metod uygulayarak bulunuz.

Çözüm.

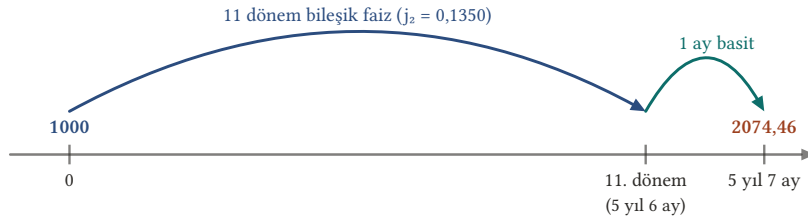
$P = 1000$, $j_2 = 0,1350$, dönem 6 aydır ($m = 2$), yani $i = \frac{0,1350}{2} = 0,0675$.

a) **Teorik Metod.** Süre yıl cinsinden $t = 5 + \frac{7}{12} = \frac{67}{12}$ yıl, dönem sayısı

$$n = 2 \cdot \frac{67}{12} = \frac{67}{6} \approx 11,1667.$$

$$S = 1000 \left(1 + \frac{0,1350}{2} \right)^{\frac{67}{6}} = 1000(1,0675)^{\frac{67}{6}} = \boxed{2073,84 \text{ TL}}$$

b) **Pratik Metod.** 5 yıl 7 ay = 11 tane 6 ay + 1 ay.



Şekil 3.3: Pratik metod: tarihi **geçmeyen** en büyük tam dönem sayısı kadar bileşik faiz uygulanır (11 dönem = 5 yıl 6 ay), artan 1 aylık parça için ileriye doğru basit faiz eklenir.

Önce 11 tam dönem bileşik faiz, sonra artan 1 ay için basit faiz:

$$S = 1000(1,0675)^{11} \cdot \left(1 + 0,1350 \cdot \frac{1}{12} \right) = 2051,382851 \cdot 1,01125 = \boxed{2074,46 \text{ TL}}$$

Kesirli parça için basit faiz kullanıldığından pratik metod 0,62 TL fazla vermiştir.

■

Örnek 3.7 (Kesirli Dönemde Şimdiki Değer). $j_1 = \%10$ 'dan 3 yıl 7 ay sonraki 2800 TL'nin şimdiki değerini a) Teorik, b) Pratik Metod uygulayarak bulunuz.

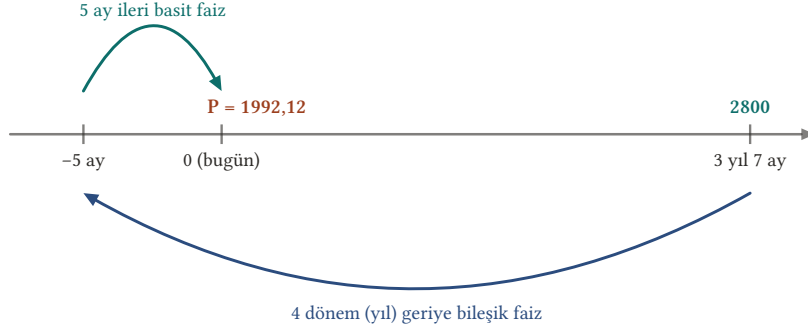
Çözüm.

$S = 2800$, $j_1 = 0,10$, $m = 1$ olduğundan $i = 0,10$ ve dönem 1 yıldır.

a) **Teorik Metod.** $t = 3 + \frac{7}{12} = \frac{43}{12}$ yıl, $n = \frac{43}{12}$ dönem:

$$P = S(1+i)^{-n} = 2800(1,10)^{-\frac{43}{12}} = \boxed{1989,91 \text{ TL}}$$

b) **Pratik Metod.** Geçmişteki değer arandığı için tarihi **içeren en küçük** tam dönem sayısı kadar geriye gidilir: 3 yıl 7 ay, 4 tam yılın içindedir. Yani $-3 \text{ yıl } -7 \text{ ay} = -4 \text{ tam yıl } +5 \text{ ay}$.



Şekil 3.4: Geçmişteki değeri bulurken pratik metod ters çalışır: tarihi **içeren en küçük** tam dönem kadar geriye bileşik faizle gidilir (4 yıl), sonra aranan tarihe kadar ileriye doğru basit faiz uygulanır (5 ay).

4 dönem geriye bileşik faiz, sonra 5 ay ileriye basit faiz:

$$P = 2800(1,10)^{-4} \left(1 + 0,10 \cdot \frac{5}{12} \right) = 2800 \cdot 0,683013 \cdot 1,041667 = \boxed{1992,12 \text{ TL}}$$

■

💡 Pratik metodun yönünü karıştırmamak için

İki durumda da **bileşik faiz adımı hedefin uzağına**, basit faiz adımı ise **hedefe doğru** atılır:

- İleri giderken: tarihi geçmeden dur (11 dönem), kalanı basit faizle **ileri** al.
- Geri gelirken: tarihi geçerek dur (4 dönem geri), fazlasını basit faizle **ileri** al.

3.6 Faiz Oranının Bulunması

Bileşik faiz formülü $S = P(1+i)^n$ dört harf içerir. Şimdiye kadar hep S ya da P arandı; sıra diğer ikisinde. Oran tabanda durduğu için kök olarak, süre üste yerleştiği için logaritma ile çekilir. Bilinmeyen i üste değil tabandadır; bu yüzden **kök olarak** çekilir.

Örnek 3.8 (Parayı Üç Katına Çıkaran Oran). Bir yatırım şirketi paranızı 10 yılda 3 katına çıkaracağını vaat etmektedir. Buna göre aylık ödemeli bileşik faiz oranı nedir?

Çözüm.

$P = X$, $S = 3X$, $t = 10$, $m = 12$ olduğundan $n = 120$ ve aranan j_{12} 'dir.

$$S = P \left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^n \Rightarrow 3X = X \left(1 + \frac{j_{12}}{12} \right)^{120}$$

$X \neq 0$ ile sadeleşir; iki yanın 120. dereceden kökü alınır:

$$3^{\frac{1}{120}} = 1 + \frac{j_{12}}{12} \Rightarrow j_{12} = 12 \left(3^{\frac{1}{120}} - 1 \right) = 0,1103656 \approx \boxed{\%11,04}$$

Anaparanın bilinmemesi sonucu etkilemedi; “kaç katına çıkma” sorusu her zaman anaparadan bağımsızdır.

■

Örnek 3.9 (Sürekli Bileşik Faiz Oranı). 3 yılda %50 değer artışı getirecek sürekli bileşik faiz oranı nedir?

Çözüm.

$P = X$, $S = 1,5X$, $t = 3$ ve aranan j_∞ ’dur.

$$S = Pe^{j_\infty t} \Rightarrow 1,5X = Xe^{3j_\infty}$$

İki yanın doğal logaritması alınır:

$$\ln 1,5 = 3j_\infty \ln e = 3j_\infty \Rightarrow j_\infty = \frac{\ln 1,5}{3} = \frac{0,405465}{3} \approx \boxed{\%13,52}$$

■

3.7 Zamanın Bulunması

Bilinmeyen üste olduğunda logaritma alınır. Çıkan n genellikle tam sayı değildir; sonucu yıl-ay-gün olarak yazmak için şu üç adım izlenir:

1. $t = \frac{n}{m}$ ile süre yılı çevrilir; tam kısmı **yıl** sayısıdır.
2. Kalan ondalık kısım 12 ile çarpılır; tam kısmı **ay** sayısıdır.
3. Kalan ondalık kısım 30 ile çarpılır ve en yakın tam sayıya yuvarlanarak **gün** sayısı bulunur.

Örnek 3.10 (Belli Bir Faizin Kazanılma Süresi). 2000 TL’nin $j_4 = 0,10$ oranından 800 TL faiz getirmesi için ne kadar zaman geçer?

Çözüm.

$P = 2000$, $j_4 = 0,10$, $m = 4$, $I = 800$. Önce hedef birikmiş değeri bulalım:

$$S = P + I = 2000 + 800 = 2800 \text{ TL .}$$

$$2800 = 2000 \left(1 + \frac{0,10}{4}\right)^n \Rightarrow \frac{28}{20} = (1,025)^n \Rightarrow 1,4 = 1,025^n$$

İki yanın logaritması alınır:

$$\log 1,4 = n \log 1,025 \Rightarrow n = \frac{\log 1,4}{\log 1,025} = 13,62643323 \text{ dönem .}$$

Şimdi yıl-ay-güne çevirelim ($m = 4$, yani dönem 3 aydır):

$$t = \frac{n}{m} = \frac{13,62643323}{4} = 3,406608306 \text{ yıl}$$

$$0,406608306 \times 12 = 4,879299672 \text{ ay}$$

$$0,879299672 \times 30 = 26,37899016 \text{ gün}$$

$$\boxed{3 \text{ yıl } 4 \text{ ay } 26 \text{ gün}}$$

■

Örnek 3.11 (İki Katından Üç Katına). Bir yatırım aylık ödemeli bir faiz oranıyla 6 yılda 2 katına çıkıyorsa, aynı yatırımın 3 katına çıkması için ne kadar zaman geçer?

Çözüm.

Önce verilen bilgiden dönem çarpanını çekelim. $P = X$, $S = 2X$, $t = 6$, $m = 12$ olduğundan $n = 72$:

$$2X = X(1+i)^{72} \Rightarrow 1+i = 2^{\frac{1}{72}}.$$

Oranı sayı olarak bulmaya gerek yok; doğrudan üç katına çıkma denklemine taşıyalım. Aranan dönem sayısına n_1 diyelim:

$$3X = X(1+i)^{n_1} = X\left(2^{\frac{1}{72}}\right)^{n_1} = X \cdot 2^{\frac{n_1}{72}}$$

$$\Rightarrow 3 = 2^{\frac{n_1}{72}} \Rightarrow \log 3 = \frac{n_1}{72} \log 2$$

$$n_1 = \frac{72 \log 3}{\log 2} = 114,1173001 \text{ dönem}.$$

Yıl-ay-güne çevirelim ($m = 12$):

$$\frac{114,1173001}{12} = 9,509775004 \text{ yıl}$$

$$0,509775004 \times 12 = 6,117300048 \text{ ay}$$

$$0,117300480 \times 30 = 3,51901440 \text{ gün} \approx 4 \text{ gün}$$

9 yıl 6 ay 4 gün

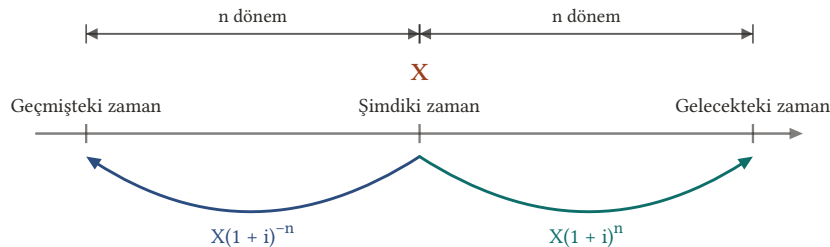
i Neden 12 yıl değil?

İki katına çıkmak 6 yıl sürdüğüne göre üç katına çıkmak 9 yıl civarındadır, 18 yıl değil. Çünkü bileşik faizde katlanma **çarpımsaldır**: 6 yılda 2 kat, 12 yılda 4 kat olur. 3 kat, 2 ile 4 arasında olduğundan süre de 6 ile 12 yıl arasına düşer.

■

3.8 Bileşik Faizde Paranın Değer Denklikleri

Basit faizde odak noktasını değiştirmek cevabı da değiştiriyordu (Önerme 1.2). Bileşik faizde ise durum çok daha rahattır: bir tutarı n dönem ileri taşımak $(1+i)^n$ ile, n dönem geri taşımak $(1+i)^{-n}$ ile çarpmaktır ve bu çarpanlar art arda uygulandığında üsler toplanır.



Şekil 3.5: Bileşik faizde de kural aynıdır, yalnızca çarpan değişir: n dönem ileri gitmek $(1+i)^n$ ile çarpmak, n dönem geri gitmek $(1+i)^{-n}$ ile çarpmaktır.

Önerme 3.4 (Değer Denkliğinin İki Özelliği). 1) X, Y, Z para değerlerini, n_1, n_2, n_3 ise dönemleri göstermek üzere

$$Y = X(1+i)^{n_2-n_1}, \quad Z = Y(1+i)^{n_3-n_2}$$

ise

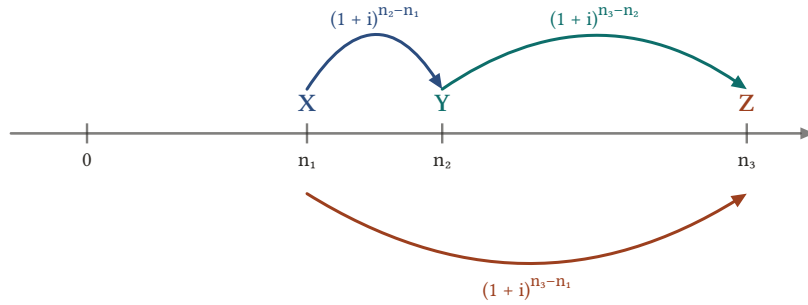
$$Z = X(1+i)^{n_2-n_1}(1+i)^{n_3-n_2} = X(1+i)^{n_3-n_1}$$

olur.

2) İki ayrı ödemeler kümesi aynı bir odak tarihinde birbirine denk iseler, bu iki ödemeler kümesi **herhangi bir** odak tarihinde de denktir.

İspat.

1) Doğrudan üs kuralıdır: $(1+i)^a(1+i)^b = (1+i)^{a+b}$ olduğundan iki adımda taşımak tek adımda taşımakla aynıdır.



Şekil 3.6: İki adımda taşımak ile tek adımda taşımak aynı sonucu verir: çarpanlar üst üste binerken üsler toplanır. Bu yüzden bileşik faizde **odak noktası önemsizdir** — bir odakta denk olan iki ödeme kümesi her tarihte denktir.

2) $\{A_k\}$ ve $\{B_l\}$ ödemeler kümeleri n_0 odak tarihinde denk olsun; yani her ödeme n_0 'a taşındığında

$$\sum_k A_k(1+i)^{n_0-a_k} = \sum_l B_l(1+i)^{n_0-b_l}.$$

Şimdi başka bir n^* odak tarihi alalım. Her terimi n^* 'a taşımak, üsse $n^* - n_0$ eklemek demektir; yani iki yan da $(1+i)^{n^*-n_0}$ sabitiyle çarpılır:

$$\sum_k A_k(1+i)^{n^*-a_k} = (1+i)^{n^*-n_0} \sum_k A_k(1+i)^{n_0-a_k}$$

ve aynısı B tarafı için geçerlidir. Bir eşitliğin iki yanı sıfırdan farklı aynı sayıyla çarpılınca eşitlik bozulmayacağından, iki küme n^* tarihinde de denktir.

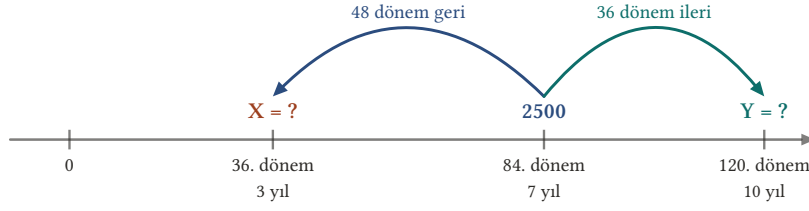
! Not

Yukarıdaki iki özellik **basit faiz için geçerli değildir**. Bunun nedenini **Önerme 1.2'**da görmüştük: basit faizde $(1+rt_1)(1+rt_2) \neq 1+r(t_1+t_2)$ 'dir. Bu yüzden basit faizde odak noktası sözleşmede belirtilirken, bileşik faizde istediğimiz tarihi seçebiliriz.

Örnek 3.12 (Bir Borcun Farklı Tarihlerdeki Denkleri). 7 yıl sonra ödenecek 2500 TL'lik bir borç ve paranın değeri $j_{12} = \%10$ olsun. a) 3 yıl sonundaki, b) 10 yıl sonundaki denk borcu bulunuz.

Çözüm.

$m = 12$ olduğundan dönem 1 aydır ve $i = \frac{0,10}{12}$. Yılları döneme çevirelim: 3 yıl = 36, 7 yıl = 84, 10 yıl = 120 dönem.



Şekil 3.7: $j_{12} = \%10$ olduğu için dönem = 1 ay: 3. yıl 36., 7. yıl 84., 10. yıl 120. dönemdir. 7. yıldaki 2500 TL, 3. yıla 48 dönem geri, 10. yıla 36 dönem ileri taşınır.

a) 84. dönemden 36. döneme $84 - 36 = 48$ dönem **geri** gidilir:

$$X = 2500 \left(1 + \frac{0,10}{12} \right)^{-48} = \boxed{1678,58 \text{ TL}}$$

b) 84. dönemden 120. döneme $120 - 84 = 36$ dönem **ileri** gidilir:

$$Y = 2500 \left(1 + \frac{0,10}{12} \right)^{36} = \boxed{3370,45 \text{ TL}}$$

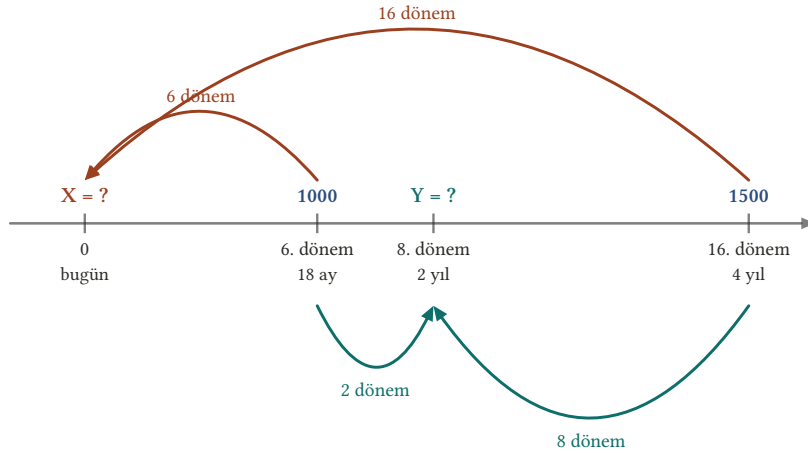
■

Örnek 3.13 (İki Borcun Tek Ödemeye Dönüştürülmesi). Bir kişinin 18 ay sonra ödemek üzere 1000 TL ve 4 yıl sonra ödemek üzere 1500 TL borcu vardır. Paranın değeri $j_4 = \%6$ ise bu borçları a) şimdi, b) 2 yıl sonra tek seferde ödemek kaç TL ile mümkündür?

Çözüm.

$m = 4$ olduğuna göre faiz periyodu 3 aydır. Şu hâlde 3 aylık periyot 1 dönem yapar ve $i = \frac{0,06}{4} = 0,015$. Süreleri döneme çevirelim:

$$18 \text{ ay} = 6 \text{ dönem}, \quad 2 \text{ yıl} = 8 \text{ dönem}, \quad 4 \text{ yıl} = 16 \text{ dönem}.$$



Şekil 3.8: $j_4 = \%6$ 'da dönem 3 aydır: 18 ay 6 dönem, 2 yıl 8 dönem, 4 yıl 16 dönem eder. İki borç önce bugüne (X, üstteki oklar), sonra 2. yıla (Y, alttaki oklar) taşınıyor.

a) Her iki borç da bugüne (0. döneme) geri taşınır:

$$X = 1000 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{-6} + 1500 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{-16} = 914,54 + 1182,05 = \boxed{2096,59 \text{ TL}}$$

b) 8. döneme taşınır: ilk borç 2 dönem **ileri**, ikinci borç 8 dönem **geri** gider:

$$Y = 1000 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^2 + 1500 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{-8} = 1030,23 + 1331,57 = \boxed{2361,79 \text{ TL}}$$

Sağlama: **Önerme 3.4** gereği X 'i 8 dönem ileri taşırsak Y 'yi bulmalıyız. Gerçekten $2096,59 \cdot (1,015)^8 = 2361,79 \text{ TL}$ 'dir. Basit faizde böyle bir sağlama yapılamazdı.

■

3.9 Bileşik İskonto

Tanım 3.5 (Bileşik İskonto). $d^{(m)}$ yılda m kez yapılan yıllık iskonto oranını, $\frac{d^{(m)}}{m}$ ise dönem başına yapılan iskonto oranını göstermek üzere, S üzerinden hesaplanan iskontolu değer

$$P = S \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^n$$

şeklinde bulunur. Bu durumda birikmiş değer

$$S = P \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-n}$$

formülü ile hesaplanır.

Basit iskontodaki mantığın aynısı burada dönem dönem uygulanır: her dönemde kalan tutardan $\frac{d^{(m)}}{m}$ oranında indirim yapılır, dolayısıyla çarpan n kez uygulanır.

Örnek 3.14 (Bileşik İskonto Hesabı). 2 yıl sonraki 1000 TL'nin iskontolu değerini a) $d^{(12)} = \%12$, b) $d^{(365)} = \%7$ için hesaplayınız.

Çözüm.

a) $m = 12$, $t = 2$ olduğundan $n = 24$ ve dönemlik iskonto oranı $\frac{0,12}{12} = 0,01$:

$$P = 1000 \left(1 - \frac{0,12}{12}\right)^{2 \cdot 12} = 1000(0,99)^{24} = \boxed{785,68 \text{ TL}}$$

b) $m = 365$, $n = 730$:

$$P = 1000 \left(1 - \frac{0,07}{365}\right)^{2 \cdot 365} = \boxed{869,35 \text{ TL}}$$

■

3.10 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (İki Eşit Taksitle Ödeme). Bir kişinin şimdi 50000 TL borcu var olsun. Bu borcu $j_1 = 0,09$ oranından 1. ve 2. yıl sonunda X TL eşit taksitlerle ödeyeceğine göre X nedir?

Çözüm.

$m = 1$ olduğundan $i = 0,09$ ve dönem 1 yıldır. Odak noktası olarak bugünü seçelim (bileşik faizde hangisini seçtiğimiz önemsizdir):

$$50000 = X(1,09)^{-1} + X(1,09)^{-2} = X[(1,09)^{-1} + (1,09)^{-2}]$$

$$50000 = X(0,917431 + 0,841680) = X \cdot 1,759111$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 28423,44 \text{ TL}}$$

İki taksidin toplamı 56846,88 TL'dir; aradaki 6846,88 TL ödenen faizdir.

■

Alıştırma 3.2 (Hedeflenen Tutara Ulaşma Süresi). Altı ayda bir ödemeli 0,07 bileşik faiz oranından 200 TL ne kadar zamanda 350 TL olur?

Çözüm.

$m = 2, j_2 = 0,07$ olduğundan $i = \frac{0,07}{2} = 0,035$.

$$350 = 200(1,035)^n \Rightarrow (1,035)^n = \frac{350}{200} = 1,75$$

$$n = \frac{\ln 1,75}{\ln 1,035} = \frac{0,559616}{0,034401} = 16,267226 \text{ dönem .}$$

Yıl-ay-güne çevirelim ($m = 2$, dönem 6 aydır):

$$t = \frac{16,267226}{2} = 8,133613 \text{ yıl}$$

$$0,133613 \times 12 = 1,603356 \text{ ay}$$

$$0,603356 \times 30 = 18,100680 \text{ gün} \approx 18 \text{ gün}$$

$$\boxed{8 \text{ yıl } 1 \text{ ay } 18 \text{ gün}}$$

■

Alıştırma 3.3 (Sürekli Bileşik Faizde Şimdiki Değer). 0,125 sürekli bileşik faiz oranından 3 yılda 25000 TL biriktirmek için şimdi kaç TL'lik yatırım yapmak gerekir?

Çözüm.

$S = 25000, j_\infty = 0,125, t = 3$. $S = Pe^{j_\infty t}$ formülünden P çekilir:

$$P = Se^{-j_\infty t} = 25000 e^{-0,125 \cdot 3} = 25000 e^{-0,375} = 25000 \cdot 0,687289 = \boxed{17182,23 \text{ TL}}$$

■

Alıştırma 3.4 (Denk İskonto ve Faiz Oranları). Aşağıda istenen denk oranları bulunuz.

a) $d^{(2)} = \%6$ 'ya denk olan $d^{(12)} = ?$

b) $j_{12} = \%12$ 'ye denk olan $d^{(4)} = ?$

c) $j_\infty = \%9$ 'a denk olan $d^{(1)} = ?$

Çözüm.

Eşdeğerlik ölçütü yine aynıdır: **bir yıllık çarpanlar eşitlenir.** İskonto tarafında bir yıllık çarpan $\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$ 'dir.

a)

$$\left(1 - \frac{d^{(12)}}{12}\right)^{12} = \left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2 = (1 - 0,03)^2 = (0,97)^2 = 0,9409$$

$$1 - \frac{d^{(12)}}{12} = (0,9409)^{\frac{1}{12}} = 0,994936$$

$$d^{(12)} = 12(1 - 0,994936) = 0,060764 \approx \boxed{\%6,08}$$

b) Faiz tarafındaki çarpan $\left(1 + \frac{j_{12}}{12}\right)^{12}$, iskonto tarafındaki $\left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}$, tür:

$$\left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4} = (1,01)^{12} = 1,126825$$

$$\left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^4 = \frac{1}{1,126825} = 0,887449 \Rightarrow 1 - \frac{d^{(4)}}{4} = (0,887449)^{\frac{1}{4}} = 0,970590$$

$$d^{(4)} = 4(1 - 0,970590) = 0,117639 \approx \boxed{\%11,76}$$

c)

$$(1 - d^{(1)})^{-1} = e^{j_{\infty}} = e^{0,09} \Rightarrow 1 - d^{(1)} = e^{-0,09} = 0,913931$$

$$d^{(1)} = 1 - 0,913931 = 0,086069 \approx \boxed{\%8,61}$$

Her üç sonuçta da iskonto oranının kendisine denk faiz oranından küçük çıktığına dikkat edin.

■

4. Anüiteler

Buraya kadar hep **tek** ödemelerle uğraştık. Oysa finansal hayatın çoğu düzenli tekrarlardan oluşur: her ay ödenen kredi taksiti, her yıl yatırılan birikim, altı ayda bir alınan kupon faizi, emekli maaşı. Bunların hepsine **anüite** diyoruz.

Bir anüitenin değerini bulmak için her ödemeyi tek tek taşıyıp toplamak gerekir — ama bu toplam bir **geometrik dizi** toplamıdır ve kapalı bir formülü vardır. Bu bölümde önce o formülü kuruyor, sonra ödemelerin dönem başında yapıldığı **peşin** ve ilk ödemesi geç başlayan **ertelenmiş** anüitelere geçiyoruz. Sonraki bölümler bu formüllerin varyasyonlarından ibarettir.

4.1 Kavramlar

Tanım 4.1 (Anüite). Eşit zaman aralıklarında ve genelde eşit tutarda yapılan ödemeler zincirine **anüite** denir.

Kullanacağımız kavramlar şunlardır:

Tanım 4.2 (Anüite Terimleri).

- **Ödeme Aralığı:** İki ödeme arasındaki zaman. (Yıl, altı ay, ay, hafta veya herhangi sabit bir aralık olabilir.)
- **Anüite Dönemi:** İlk ödeme aralığının başı ile son ödeme aralığının sonu arasındaki zaman.

Anüiteler dört ayrı ölçüte göre sınıflandırılır.

Tanım 4.3 (Anüite Çeşitleri). Dönemin belirliliğine göre

- **Belirli Anüite:** Anüite dönemi sabit olan anüitelerdir. (Ev kredisi ödemeleri vb.)
- **Belirsiz Anüite:** Bazı belirsiz olaylara bağlı olarak anüite dönemi değişen anüitelerdir. (Sosyal güvenlik sigortası ödemeleri, hayat sigortası ödemeleri.)

Ödemenin zamanına göre

- **Normal Anüite:** Ödemelerin, ödeme aralığının **sonunda** yapıldığı anüitelerdir.
- **Peşin Anüite:** Ödemelerin, ödeme aralığının **başında** yapıldığı anüitelerdir.

Başlangıcına göre

- **Ertelenmiş Anüite:** İlk ödemesi geç yatan anüitelerdir.

Ödeme aralığı ile faiz aralığının ilişkisine göre

- **Basit Anüite:** Ödeme aralığı ile faiz işleme aralığının çakıştığı anüitelerdir.
- **Genel Anüite:** Basit olmayan anüitelerdir.

⚠ Uyarı

Aksi belirtilmedikçe **normal basit anüite** kastedilecektir.

Notasyon şöyledir:

Simge	Anlamı
R	Periyodik olarak ödenen anüite ödemesi

Simge	Anlamı
n	Anüite dönemi boyunca faiz işleyen dönem sayısı (basit anüitelerde ödeme sayısı)
i	Dönem başına faiz oranı, $i = \frac{j_m}{m}$
S	Anüitenin toplam değeri ya da birikmiş değeri
A	Anüitenin iskontolu değeri ya da şimdiki değeri

4.2 Normal Basit Anüitede Birikmiş Değer

Önerme 4.1 (Anüitenin Toplam Değeri). Dönem sonlarında yapılan toplam n tane R ödemesi, dönem başına i faiz oranından

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

toplamını verir. Burada kısalık amacıyla

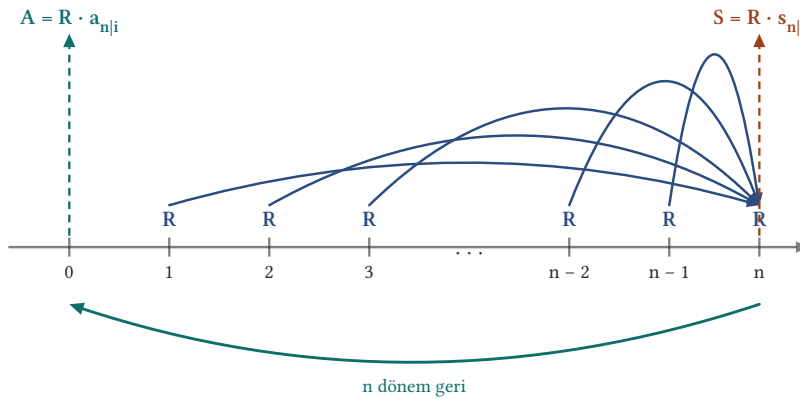
$$s_{\overline{n}|i} := \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

gösterimi kullanılmıştır.

İspat.

Ödemeleri son tarihe (yani n . dönem sonuna) taşıyalım. n . dönemdeki ödeme hiç faiz görmez, $(n-1)$. dönemdeki ödeme bir dönem, $(n-2)$. dönemdeki iki dönem faiz görür ve böyle devam eder; ilk ödeme $n-1$ dönem faiz görür:

$$S = R + R(1+i)^1 + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}.$$



Şekil 4.1: Normal basit anüite: n tane R ödemesi her dönemin **sonunda** yapılır. Bütün ödemeler son tarihe taşınırsa toplam değer $S = R \cdot s_{n|i}$, başlangıca taşınırsa iskontolu değer $A = R \cdot a_{n|i}$ elde edilir; ikisi arasında $S = A(1+i)^n$ bağıntısı vardır.

Sağ taraf, ilk terimi R ve ortak çarpanı $(1+i)$ olan bir geometrik dizinin n terimli toplamıdır. Geometrik dizinin kısmi toplamı

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$$

olduğundan, $r = 1 + i$ alınırsa $r - 1 = i$ olur ve

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

elde edilir. ($i > 0$ olduğundan $r \neq 1$ koşulu sağlanır.)

■

4.3 Normal Basit Anüitede İskontolu Değer

Önerme 4.2 (Anüitenin İskontolu Değeri). Dönem sonlarında yapılan toplam n tane R ödemesinin başlangıçtaki (iskontolu) değeri

$$A = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

olur; burada

$$a_{\overline{n}|i} := \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

İspat.

Toplam değeri bulduk; iskontolu değer, onu n dönem geri taşımaktan ibarettir. **Önerme 3.4** gereği bileşik faizde bu taşıma tek adımda yapılabilir:

$$A = S(1+i)^{-n} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^{-n} = R \cdot \frac{(1+i)^n(1+i)^{-n} - (1+i)^{-n}}{i} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

■

💡 İki çarpanı karıştırmamak için

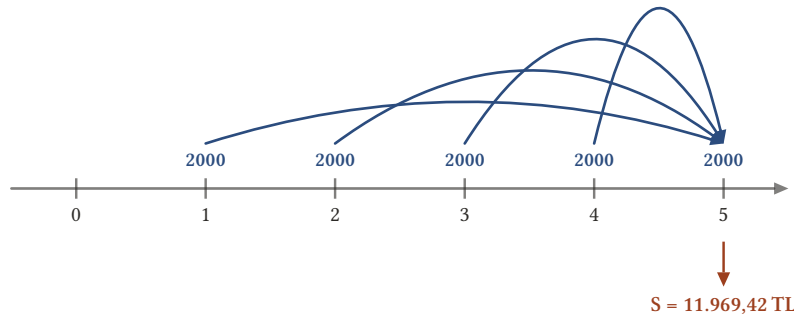
$s_{\overline{n}|i}$ her zaman n 'den **büyüktür** (ödemeler faiz kazanır), $a_{\overline{n}|i}$ ise n 'den **küçüktür** (ödemeler iskonto edilir). Örneğin $n = 5$, $i = 0,09$ için $s_{\overline{5}|0,09} = 5,9847$ ve $a_{\overline{5}|0,09} = 3,8897$ 'dir. Bulduğunuz çarpan bu sıralamaya uymuyorsa formülleri ters kullanmışsınızdır.

4.4 Uygulamalar

Örnek 4.1 (Beş Yıllık Anüitenin Toplam Değeri). Her yıl 2000 TL ödenen 5 yıllık bir normal basit anüitenin toplam değerini yıllık bileşik %9 faiz oranı için hesaplayınız.

Çözüm.

$R = 2000$, $j_1 = 0,09$ olduğundan $i = 0,09$ ve $n = 5$.



Şekil 4.2: Yıl sonlarında ödenen 5 taksitin her biri 5. yıla taşınıyor: son ödeme hiç faiz görmez, sondan bir önceki bir yıl faiz görür ... ilk ödeme dört yıl faiz görür. Toplamları $s_{5|0,09}$ çarpanını verir.

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i} = 2000 \cdot s_{\overline{5}|0,09} = 2000 \cdot \frac{(1 + 0,09)^5 - 1}{0,09} = 2000 \cdot 5,984711 = \boxed{11969,42 \text{ TL}}$$

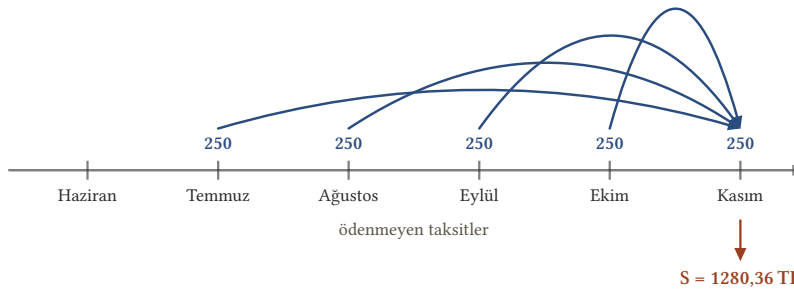
Yatırılan para $5 \cdot 2000 = 10000$ TL'dir; aradaki 1969,42 TL kazanılan faizdir.

■

Örnek 4.2 (Ödenmeyen Taksitlerin Toplanması). Bir kişi borcunu aylık 250 TL'lik ödemeler ile ödemektedir. Bu kişi Temmuz, Ağustos, Eylül ve Ekim aylarına ait borçlarını ödemedi. Ödeme denge-sinin sağlanması için borçlunun Kasım ayındaki taksidi ile birlikte ödemesi gereken miktar nedir? Paranın değeri $j_{12} = \%14,4$ olarak alınız.

Çözüm.

$R = 250, j_{12} = 0,144$ olduğundan $i = \frac{0,144}{12} = 0,012$. Ödenmeyen dört taksit ile Kasım taksidi birlikte $n = 5$ ödeme eder.



Şekil 4.3: Temmuz-Ekim taksitleri ödenmemiş, Kasım taksidiyle birlikte kapatılacaktır. Beş taksit de Kasım ayına taşındığında ödenmesi gereken tutar, beş dönemlik bir anüitenin toplam değeridir.

$$S = R \cdot s_{\overline{5}|0,012} = 250 \cdot \frac{(1,012)^5 - 1}{0,012} = 250 \cdot 5,121449 = \boxed{1280,36 \text{ TL}}$$

Beş taksidin toplamı 1250 TL olduğuna göre gecikmenin maliyeti 30,36 TL'dir.

■

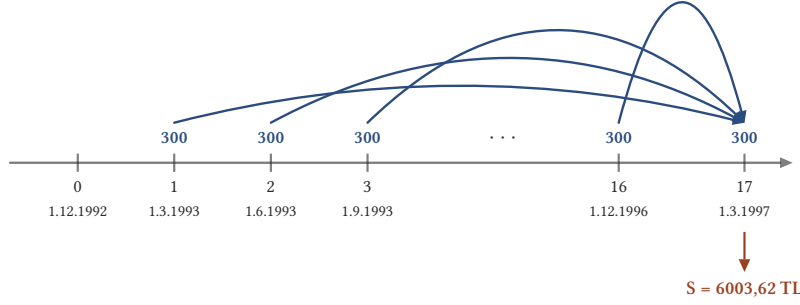
Örnek 4.3 (Üç Ayda Bir Yapılan Yatırım). Bir yatırımcı 3 ayda bir bankaya 300 TL yatırmaktadır. Bankanın uyguladığı faiz oranı $j_4 = \%8$ 'dir. Bu yatırımda ilk ödeme 1.3.1993'te yapılmış ise son ödeme 1.3.1997'de yapıldıktan sonra hesapta ne kadar birikmiş olur?

Çözüm.

$R = 300$, $j_4 = 0,08$ olduğundan $i = \frac{0,08}{4} = 0,02$.

Ödeme sayısını dikkatli bulalım: 1.3.1993 ile 1.3.1997 arası 4 yıl, yani 16 çeyrek dönemdir. Ödemeler bu 16 aralığın **her iki ucunda** da yapıldığından toplam ödeme sayısı bir fazladır:

$$n = 16 + 1 = 17.$$



Şekil 4.4: İlk ödeme 1.3.1993, son ödeme 1.3.1997: aradaki 4 yıl 16 çeyrek dönemdir, ödeme sayısı ise bir fazla, $n = 17$ 'dir. Normal anüitede ilk ödeme birinci dönemin sonunda yapıldığı için "0. dönem" 1.12.1992'ye düşer.

$$S = R \cdot s_{\overline{17}|0,02} = 300 \cdot \frac{(1,02)^{17} - 1}{0,02} = 300 \cdot 20,012071 = \boxed{6003,62 \text{ TL}}$$

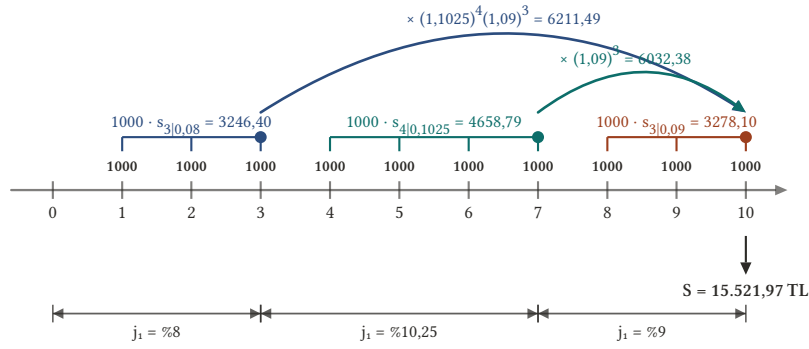
i Ödeme sayısında bir eksik, bir fazla

Anüitelerde en sık yapılan hata ödeme sayısını yanlış saymaktır. Kural şudur: **iki uç tarih arasındaki dönem sayısı ile ödeme sayısı aynı değildir.** İlk ve son ödemelerin ikisi de yapılıyorsa ödeme sayısı, aradaki dönem sayısının bir fazlasıdır.

Örnek 4.4 (Faiz Oranı Değişen Anüite). Bir kimse 10 yıl boyunca bir bankaya her yılın sonunda 1000 TL yatırıyor. Paranın değeri ilk 3 yıl için $j_1 = \%8$, sonraki 4 yıl için $j_1 = \%10,25$ ve son 3 yılda $j_1 = \%9$ ise **a)** Yatırımın toplam değeri nedir? **b)** Elde edilen faiz nedir?

Çözüm.

Oran değiştiği için tek bir $s_{\overline{n}|i}$ çarpanı kullanılamaz. Yapılacak şey, her bloğu **kendi oranıyla blok sonuna toplamak**, sonra bu tutarı kalan bloklardan geçirerek 10. yıla taşımaktır.



Şekil 4.5: Faiz oranı üç kez değişiyor. Her blok kendi oranıyla **blok sonuna** toplanır (yatay çubuklar), sonra biriken tutar sonraki blokların çarpanlarıyla topluca 10. yıla taşınır. Üç bloğun 10. yıldaki değerleri toplanınca 15.521,97 TL bulunur.

a) Üç bloğun katkısı:

- **1. blok** (1–3. yıl ödemeleri, %8): 3. yıldaki değeri $1000 \cdot s_{\overline{3}|0,08}$ 'dir. Bu tutar önce 4 yıl %10,25, sonra 3 yıl %9 ile taşınır:

$$1000 \cdot s_{\overline{3}|0,08} \cdot (1,1025)^4 (1,09)^3 = 1000 \cdot 3,246400 \cdot 1,477455 \cdot 1,295029 = 6211,49 \text{ TL}$$

- **2. blok** (4–7. yıl ödemeleri, %10,25): 7. yıldaki değeri $1000 \cdot s_{\overline{4}|0,1025}$ 'tir; kalan 3 yıl %9 ile taşınır:

$$1000 \cdot s_{\overline{4}|0,1025} \cdot (1,09)^3 = 1000 \cdot 4,658102 \cdot 1,295029 = 6032,38 \text{ TL}$$

- **3. blok** (8–10. yıl ödemeleri, %9): zaten 10. yılda toplanır:

$$1000 \cdot s_{\overline{3}|0,09} = 1000 \cdot 3,278100 = 3278,10 \text{ TL}$$

Toplam:

$$S = 6211,49 + 6032,38 + 3278,10 = \boxed{15521,97 \text{ TL}}$$

b) Yatırılan toplam para $10 \cdot 1000 = 10000$ TL olduğundan

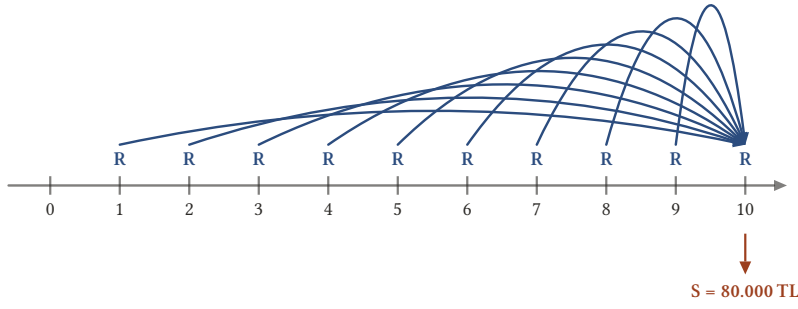
$$I = 15521,97 - 10000 = \boxed{5521,97 \text{ TL}}$$

■

Örnek 4.5 (Hedeflenen Birikim için Taksit). Paranın değeri $j_1 = \%8$ olduğu biliniyorsa 10 yıl sonra 80000 TL biriktirmek için her yıl ne kadarlık bir yatırım yapılmalıdır?

Çözüm.

Bu kez bilinmeyen R 'dir; formül ters çevrilir.



Şekil 4.6: Hedef belli, taksit aranıyor: 10 yıl sonunda 80.000 TL biriktirmek için her yıl sonunda yatırılması gereken R , toplam değer formülünden çekilir — $R = S / s_{10|0,08}$.

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i} \Rightarrow R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{80000}{\frac{(1,08)^{10}-1}{0,08}} = \frac{80000}{14,486562} = \boxed{5522,36 \text{ TL}}$$

On yıl boyunca yatırılacak toplam para 55223,60 TL'dir; kalan 24776,40 TL faizden gelir.

■

Örnek 4.6 (Aylık Yatırımın İskontolu Değeri). 3 yıl boyunca her ayın sonunda 380 TL yatırılan bir anüitenin $j_{12} = \%12$ 'den iskontolu değerini bulunuz.

Çözüm.

$$R = 380, n = 3 \cdot 12 = 36, i = \frac{0,12}{12} = 0,01.$$

$$A = R \cdot a_{\overline{n}|i} = 380 \cdot \frac{1 - (1,01)^{-36}}{0,01} = 380 \cdot 30,107505 = \boxed{11440,85 \text{ TL}}$$

Aynı sonuç önce toplam değeri bulup geri taşıyarak da elde edilir:

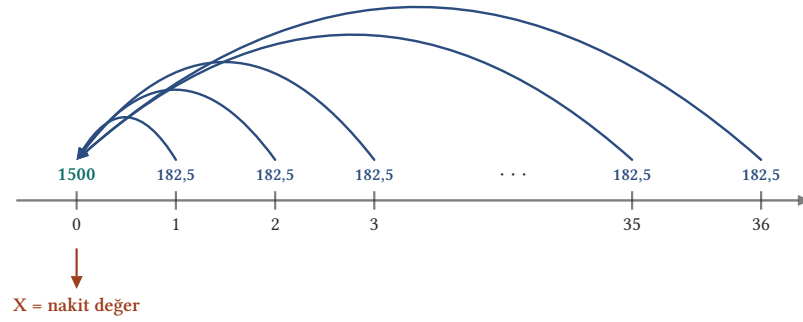
$$A = S(1 + i)^{-n} = R \cdot s_{\overline{36}|0,01} (1,01)^{-36} = 380 \cdot 43,076878 \cdot 0,698925 = 11440,85 \text{ TL}.$$

■

Örnek 4.7 (Peşinatlı Taksitli Satış). Bir cep telefonunu satın almak için 1500 TL peşin ve 3 yıl boyunca aylık 182,5 TL ödenecektir. Uygulanan faiz oranı $j_{12} = \%18$ olduğuna göre **a)** Telefonun nakit değeri nedir? **b)** Borçlanmanın toplam faizi nedir?

Çözüm.

$$R = 182,5, n = 36, j_{12} = 0,18 \text{ olduğundan } i = \frac{0,18}{12} = 0,015.$$



Şekil 4.7: Telefonun nakit değeri, bugün ödenen 1500 TL peşinat ile 36 taksidin **bugüne taşınmış** toplamıdır. Taksitlerin toplamı 6570 TL olsa da bugünkü değerleri 5048,07 TL'dir; aradaki fark ödenen faizdir.

a) Nakit değer, bugün ödenen peşinat ile taksitlerin **bugünkü** değerinin toplamıdır:

$$X = 1500 + 182,5 \cdot \frac{1 - (1,015)^{-36}}{0,015} = 1500 + 182,5 \cdot 27,660684$$

$$X = 1500 + 5048,07 = \boxed{6548,07 \text{ TL}}$$

b) Taksitlerin toplamı $182,5 \cdot 36 = 6570$ TL'dir; bunların bugünkü değeri ise 5048,07 TL. Aradaki fark ödenen faizdir:

$$I = 6570 - 5048,07 = \boxed{1521,93 \text{ TL}}$$

i Peşinat neden iskonto edilmedi?

Peşinat bugün ödendiği için zaten bugünkü değerindedir; taşınacak bir mesafesi yoktur. Aynı sebeple toplam faiz hesabına da girmez.

■

4.5 Peşin Anüiteler

Normal anüitede ödemeler dönem **sonunda** yapıyordu. Gerçek hayatta ise kira, sigorta primi ya da abonelik gibi pek çok ödeme dönem **başında** yapılır; emeklilik planlarında ise ödemeler bugün değil, yıllar sonra başlar. İyi haber şu: bu iki durum için yeni formül ezberlemeye gerek yok. İkisi de normal anüitenin formüllerine bir **taşınma çarpanı** eklemekten ibarettir.

Tanım 4.4 (Peşin Anüite). Ödemelerin dönem sonunda değil de **dönem başında** yapıldığı anüitelere **peşin anüite** denir.

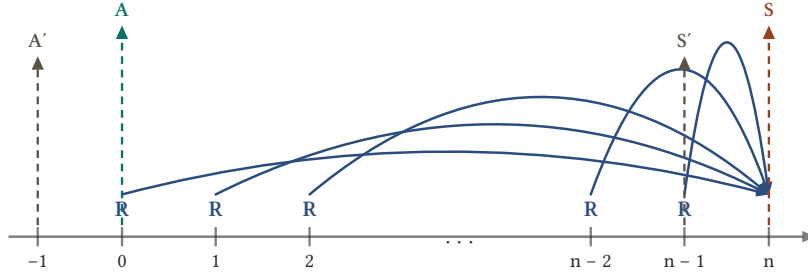
Önerme 4.3 (Peşin Anüitenin Değerleri). Dönem başlarında yapılan n tane R ödemesinin toplam ve iskontolu değerleri

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i} (1+i), \quad A = R \cdot a_{\overline{n}|i} (1+i)$$

olur.

İspat.

Ödemeleri bir dönem geriye kaydırıp bakalım: ödemeler $0, 1, \dots, n-1$ dönemlerinde yapılıyorsa, bu dizi -1 . dönemi “başlangıç” kabul eden **normal** bir anüitedir.



Şekil 4.8: Peşin anüitede ödemeler dönem **başında** yapılır. Ödemeler bir dönem erken olduğu için, normal anüite formülleriyle bulunan A' ve S' değerlerinin bir dönem ileri taşınması yeterlidir: $A = A'(1+i)$, $S = S'(1+i)$.

O hâlde normal anüite formülleri, şemadaki A' ve S' değerlerini verir:

$$S' = R \cdot s_{\overline{n}|i} \quad (\text{son ödemenin yapıldığı } n-1. \text{ dönemdeki değer}),$$

$$A' = R \cdot a_{\overline{n}|i} \quad (-1. \text{ dönemdeki değer}).$$

Bizim istediğimiz değerler ise bir dönem sağdadır: S , n . dönemdeki; A ise 0 . dönemdeki değerdir. Bir dönem ileri taşımak $(1+i)$ ile çarpmaktır:

$$S = S'(1+i) = R \cdot s_{\overline{n}|i}(1+i), \quad A = A'(1+i) = R \cdot a_{\overline{n}|i}(1+i).$$

■

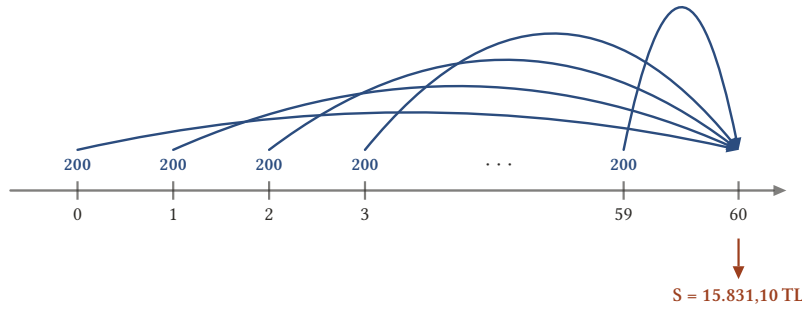
💡 Tek cümlelik kural

Peşin anüite, normal anüitenin **bir dönem erken** hâlidir; bu yüzden her iki değeri de $(1+i)$ ile çarpılır. Ödemeler erken yapıldığı için peşin anüite her zaman normal anüiteden daha değerlidir.

Örnek 4.8 (Ay Başlarında Yapılan Yatırım). Bir yatırımcı 5 yıl boyunca her ayın başında 200 TL'yi bir bankaya yatırmaktadır. $j_{12} = \%10,5$ ise 5 yıl sonundaki hesap toplamı ne olur?

Çözüm.

$$R = 200, n = 5 \cdot 12 = 60, i = \frac{0,105}{12}.$$



Şekil 4.9: Her ayın **başında** 200 TL yatırılıyor: 60 ödemenin ilki 0. anda, sonuncusu 59. ayın başında yapılır ve hesap 60. ayın sonunda kapatılır. Bu yüzden normal anüite toplamı bir dönem daha faizlendirilir.

$$S = R \cdot s_{\overline{60} | \frac{0,105}{12}} \left(1 + \frac{0,105}{12}\right) = 200 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,105}{12}\right)^{60} - 1}{\frac{0,105}{12}} \cdot \left(1 + \frac{0,105}{12}\right)$$

$$S = 200 \cdot 78,468912 \cdot 1,00875 = \boxed{15831,10 \text{ TL}}$$

Aynı ödemeler ay **sonlarında** yapılışaydı $200 \cdot 78,468912 = 15693,78$ TL birikirdi; peşin ödemenin kazandırdığı 137,32 TL'dir.

■

4.6 Ertelenmiş (Tehirli) Anüiteler

Tanım 4.5 (Ertelenmiş Anüite). k dönem **ertelenmiş anüite**, ilk ödemesi k dönem sonra yani $(k + 1)$. dönemde yapılan anüitedir.

Önerme 4.4 (Ertelenmiş Anüitenin Değerleri). k dönem ertelenmiş, n ödemeli bir anüitenin iskontolu ve toplam değerleri

$$A = R \cdot a_{\overline{n} | i} (1 + i)^{-k}, \quad S = R \cdot s_{\overline{n} | i}$$

olur.

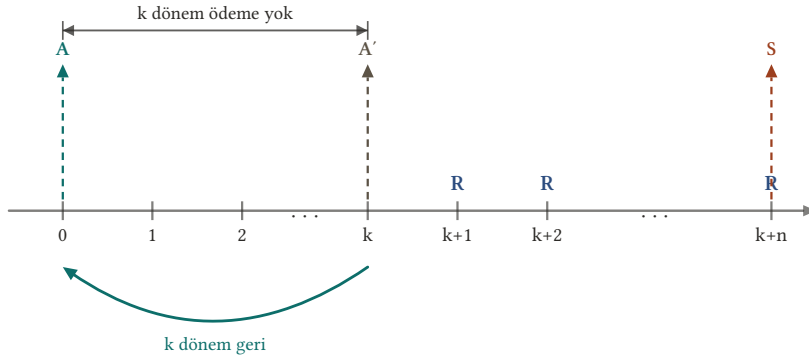
İspat.

Ödemeler $k + 1, k + 2, \dots, k + n$ dönemlerinde yapılıyor. Bu dizi, k . dönemi başlangıç kabul edersek **normal** bir anüitedir; dolayısıyla k . dönemdeki değeri

$$A' = R \cdot a_{\overline{n} | i}$$

olur. Bugünkü değere ulaşmak için k dönem geriye taşımak gerekir:

$$A = A' (1 + i)^{-k} = R \cdot a_{\overline{n} | i} (1 + i)^{-k}.$$



Şekil 4.10: Ertelenmiş anüitede ilk ödeme k dönem sonra, yani $(k+1)$. dönemde yapılır. Ödemeler k . döneme göre normal bir anüitedir: önce $A' = R \cdot a_{\overline{n}|i}$ bulunur, sonra k dönem geri taşınır. Toplam değer ise ertelemeden etkilenmez: $S = R \cdot s_{\overline{n}|i}$.

Toplam değer için A' 'yı son ödeme tarihine, yani $k + n$. döneme taşıyalım:

$$S = A(1+i)^{k+n} = R \cdot a_{\overline{n}|i} (1+i)^{-k} (1+i)^{k+n} = R \cdot a_{\overline{n}|i} (1+i)^n.$$

Son ifadeyi açarsak

$$R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{\overline{n}|i}$$

bulunur.

■

! Erteleme toplam değeri değiştirmez

$S = R \cdot s_{\overline{n}|i}$ ifadesinde k hiç görünmüyor. Bunun sebebi açıktır: toplam değer **son ödeme tarihine** göre ölçülür ve ödemelerin kendi aralarındaki mesafe ertelemeden etkilenmez. Erteleme yalnızca bugünkü değeri küçültür.

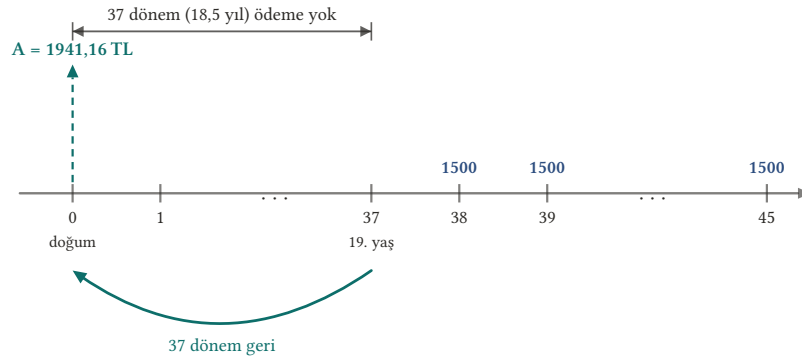
Örnek 4.9 (Doğumda Yatırılan Anapara). Bir çocuk doğduğunda ailesi tarafından ne kadarlık bir anapara bankaya yatırılmalıdır ki çocuk 19. doğum gününü kutladığında ödeme başlamak üzere altı ayda bir 1500 TL'lik 8 adet geri ödeme elde edilebilsin? Paranın değerini $j_2 = \%9$ alınız.

Çözüm.

$R = 1500$, $n = 8$, $j_2 = 0,09$ olduğundan $i = 0,045$ ve dönem 6 aydır.

Erteleme süresini bulalım: 19 yıl = $19 \cdot 2 = 38$ dönem eder. İlk ödeme 19. doğum gününde, yani 38. dönemde yapılacaktır. Ertelenmiş anüite tanımında ilk ödeme $(k + 1)$. dönemde olduğuna göre

$$k + 1 = 38 \Rightarrow k = 37.$$



Şekil 4.11: Dönem altı ay olduğundan 19. yaş 37. döneme düşer; ilk geri ödeme 38. dönemdedir. Sekiz ödemelik anüitenin 37. dönemdeki değeri bulunup 37 dönem geriye taşınırsa bugün yatırılması gereken anapara elde edilir.

Birinci yol (toplam değer üzerinden). Sekiz ödemenin son ödeme tarihindeki (45. dönem) değeri:

$$S = 1500 \cdot s_{\overline{8}|0,045} = 1500 \cdot 9,380014 = 14070,02 \text{ TL}$$

Bunu 45 dönem geri taşıyalım:

$$A = S(1,045)^{-45} = 14070,02 \cdot 0,137964 = \boxed{1941,16 \text{ TL}}$$

İkinci yol (iskontolu değer üzerinden). Sekiz ödemenin 37. dönemdeki değeri:

$$A' = 1500 \cdot a_{\overline{8}|0,045} = 1500 \cdot 6,595886 = 9893,83 \text{ TL},$$

$$A = A'(1,045)^{-37} = 9893,83 \cdot 0,196198 = \boxed{1941,16 \text{ TL}}$$

İki yol da aynı sonucu verir; hangisini seçeceğinizi yalnızca hangi çarpanı hesaplamayı kolay bulduğunuza bağlıdır.

■

4.7 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (İki Farklı Oranda Toplam Değer). 10 yıl boyunca yıl sonunda 5000 TL ödemeli bir anüitenin toplam değerini a) $j_1 = \%6$, b) $j_4 = \%12$ oranlarından hesaplayınız.

Çözüm.

a) $m = 1$ olduğundan ödeme aralığı ile faiz aralığı çakışır: **basit anüite**. $i = 0,06$, $n = 10$:

$$S = 5000 \cdot s_{\overline{10}|0,06} = 5000 \cdot \frac{(1,06)^{10} - 1}{0,06} = 5000 \cdot 13,180795 = \boxed{65903,97 \text{ TL}}$$

b) Ödemeler yılda bir, faiz ise üç ayda bir işliyor: bu bir **genel anüite**dir. Önce $j_4 = \%12$ 'ye denk gelen yıllık oranı bulmalıyız (Önerme 3.3):

$$1 + j_1 = \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 = (1,03)^4 = 1,12550881 \Rightarrow i = j_1 = 0,12550881.$$

Artık ödeme aralığı ile faiz aralığı çakışır; $n = 10$ ile

$$S = 5000 \cdot \frac{(1,12550881)^{10} - 1}{0,12550881} = 5000 \cdot 18,022940 = \boxed{90114,70 \text{ TL}}$$

■

Alıştırma 4.2 (Üç Ayda Bir Yatırılacak Tutar). Bir kişi her üç ayda bir bankaya $j_4 = \%5$ oranından ne kadar yatırmalıdır ki, 10 yıl sonra 5148,96 TL biriktirmiş olsun?

Çözüm.

$$i = \frac{0,05}{4} = 0,0125, n = 10 \cdot 4 = 40, S = 5148,96 \text{ TL.}$$

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{5148,96}{\frac{(1,0125)^{40}-1}{0,0125}} = \frac{5148,96}{51,489557} = \boxed{100,00 \text{ TL}}$$

■

Alıştırma 4.3 (Altı Aylık Anüitenin İskontolu Değeri). 5 yıl boyunca altı ayda bir 1500 TL yatırılacak bir anüitenin $j_2 = \%10$ 'dan iskontolu değerini bulunuz.

Çözüm.

$$i = \frac{0,10}{2} = 0,05, n = 5 \cdot 2 = 10, R = 1500.$$

$$A = R \cdot a_{\overline{10}|0,05} = 1500 \cdot \frac{1 - (1,05)^{-10}}{0,05} = 1500 \cdot 7,721735 = \boxed{11582,60 \text{ TL}}$$

■

Alıştırma 4.4 (Ertelenmiş Geri Ödemeler). Bir bankaya ne kadarlık bir anapara yatırılmalıdır ki 11. yılda ödeme başlamak üzere her yıl 15000 TL'lik 4 adet geri ödeme elde edilebilsin? Paranın değerini $j_1 = \%20$ alınız.

Çözüm.

$R = 15000, n = 4, i = 0,20$, dönem 1 yıldır. İlk ödeme 11. yılda, yani 11. dönemde yapılacağından

$$k + 1 = 11 \Rightarrow k = 10.$$

$$A = R \cdot a_{\overline{4}|0,20} (1,20)^{-10} = 15000 \cdot \frac{1 - (1,20)^{-4}}{0,20} \cdot (1,20)^{-10}$$

$$A = 15000 \cdot 2,588735 \cdot 0,161506 = \boxed{6271,43 \text{ TL}}$$

Toplam 60000 TL geri alınacak olmasına rağmen bugün yatırılması gereken tutarın bu kadar küçük olması, $\%20$ 'lik oranın 10 yıl boyunca işlemesindendir: $(1,20)^{10} \approx 6,19$, yani para on yılda altı katından fazlasına çıkar.

■

Alıştırma 4.5 (Bir Anüite Özdeşliği). $s_{\overline{m+n}|i} = s_{\overline{m}|i} (1+i)^n + s_{\overline{n}|i}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Cebirsel ispat. Tanımı yerine koyalım:

$$s_{\overline{m}|i} (1+i)^n + s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^m - 1}{i} (1+i)^n + \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ortak paydada toplayalım:

$$= \frac{[(1+i)^{m+n} - (1+i)^n] + [(1+i)^n - 1]}{i}$$

Köşeli parantezlerdeki $-(1+i)^n$ ile $+(1+i)^n$ sadeleşir:

$$= \frac{(1+i)^{m+n} - 1}{i} = s_{\overline{m+n}|i}$$

Finansal yorum. Eşitlik aslında apaçık bir gerçeği söylüyor. $m + n$ dönemlik bir anüiteyi iki parçaya ayıralım:

- İlk m ödeme, m . dönemde $R \cdot s_{\overline{m}|i}$ tutarını biriktirir; bu tutar kalan n dönem boyunca yalnızca faiz kazanır, yani $(1+i)^n$ ile çarpılır.
- Son n ödeme ise kendi başına $R \cdot s_{\overline{n}|i}$ biriktirir.

İkisinin toplamı, bütün ödemelerin son dönemdeki değeridir. (R ile bölünürse yukarıdaki özdeşlik kalır.)

■

5. Anüitede Dönem, Faiz Oranı ve Özel Türler

Anüite formüllerinde beş harf vardır: R , n , i , S ve A . Önceki bölümde hep S ya da A arandı; şimdi sıra diğer ikisinde. **Dönem sayısı** logaritma ile çekilir ama tam sayı çıkmayabilir; **faiz oranı** ise cebirsel olarak hiç çekilemez ve yaklaşık yöntem gerektirir.

Bölümün ikinci yarısında anüite ailesinin üç özel üyesini tamamlıyoruz: ödeme aralığı ile faiz aralığının uyuşmadığı **genel anüiteler**, hiç bitmeyen **daimi gelirler** ve ödemelerin sabit kalmayıp arttığı **değişik ödemeli anüiteler**. Üçünde de yeni bir teori kurmuyoruz; elimizdeki iki formülü uygun biçimde hazırlayıp kullanıyoruz.

5.1 Bilinmeyen Dönem Sayısı

Anüite formüllerinde n bilinmeyen olduğunda, o da üstte durduğu için logaritma ile çekilir. Ancak burada bileşik faizdekinden farklı bir sorun ortaya çıkar: bulunan n genellikle tam sayı değildir ve **kesirli sayıda taksit ödenemez**. Örneğin $n = 21,002$ çıkmışsa “21 tam ödeme yapılır, sonra ne olur?” sorusunu cevaplamamız gerekir.

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{ya da} \quad A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

eşitliklerinden n logaritma yardımıyla bulunur. Bulunan bu n dönem sayısı tam sayı olmayabilir; bu durumda **tam ödemeler** ve **son ödeme** kavramları yardımıyla ödeme planı oluşturulur.

Tanım 5.1 (Tam Ödemeler ve Son Ödeme). Kesirli çıkan n için ödeme planı iki yöntemden biriyle kurulur:

1. **Son ödemeye bir fark eklemek.**
2. **Son tam ödemeden 1 dönem sonra**, bir tam ödemenin miktarından küçük olan bir ödeme daha yapmak. Bazı durumlarda bu son küçük ödemeyi yapmaya gerek kalmayabilir.

⚠ Uyarı

Aksi belirtilmedikçe **2. yöntem** kullanılacaktır.

❓ Neden iki yöntem var?

Kesirli n , “hedefe tam bir ödemeden az bir şey kala varılıyor” demektir. Bu küçük açığı ya son taksidi biraz büyütürük kapatırsınız (1. yöntem) ya da bir dönem sonra küçük bir ödeme daha yaparak (2. yöntem). İkinci yöntemde ödeme bir dönem geç yapıldığından, arada geçen dönemde tam ödemeler de faiz kazanmaya devam eder; bu yüzden bazen açık kendiliğinden kapanır ve ek ödemeye gerek kalmaz.

Örnek 5.1 (Fon Oluşturmada Son Ödeme). Yarı-yıllık 200 TL’lik ödemeler ile 8000 TL’lik bir fon oluşturulmak istenmektedir; paranın değeri $j_2 = \%12$ ’dir. Tam ödemelerin sayısını ve son ödemeyi iki yöntem ile de bulunuz.

Çözüm.

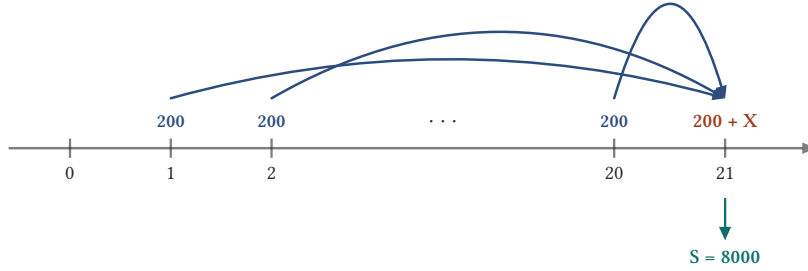
$$S = 8000, R = 200, i = \frac{0,12}{2} = 0,06.$$

$$200 \cdot \frac{(1,06)^n - 1}{0,06} = 8000 \Rightarrow (1,06)^n - 1 = \frac{8000 \cdot 0,06}{200} = 2,4$$

$$(1,06)^n = 3,4 \Rightarrow n = \frac{\log 3,4}{\log 1,06} = 21,00220291$$

Yani 21 tam ödeme yeterli değildir, ama 22 ödeme de fazladır. İki yöntemi sırayla uygulayalım.

1. yöntem: farkı son ödemeye eklemek. Bütün ödemeler 21. döneme taşınır; eksik kalan tutar aynı tarihte son ödemenin üzerine eklenir.



Şekil 5.1: 1. yöntem: bütün ödemeler 21. döneme taşınır. 21 tam ödeme hedefin biraz altında kaldığından aradaki fark X , aynı tarihte son ödemenin üzerine eklenir.

21 ödemenin 21. dönemdeki değeri:

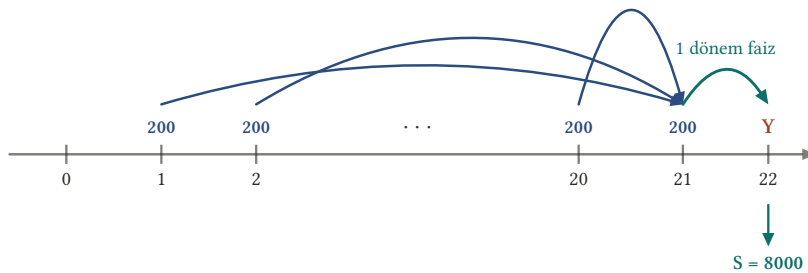
$$200 \cdot s_{\overline{21}|0,06} = 200 \cdot \frac{(1,06)^{21} - 1}{0,06} = 200 \cdot 39,992727 = 7998,55 \text{ TL} .$$

Eksik kalan tutar aynı tarihte eklenir:

$$7998,55 + X = 8000 \Rightarrow X = 1,45 \text{ TL} .$$

$$\boxed{21 \text{ tam ödeme; } 21. \text{ ödeme } 200 + 1,45 = 201,45 \text{ TL}}$$

2. yöntem: bir dönem sonra küçük bir ödeme. Bu kez odak noktası 22. dönemdir. Ödemeler önce kendi tarihlerinde, yani 21. dönemde toplanır; bu toplam bir dönem daha faiz görerek 22. döneme taşınır ve orada Y ödemesiyle tamamlanır.



Şekil 5.2: 2. yöntem: önce 21 tam ödeme kendi tarihinde toplanır, sonra bu toplam bir dönem daha faiz görerek 22. döneme taşınır. Eksik kalan tutar Y orada ödenir.

$$200 \cdot s_{\overline{21}|0,06}(1,06) + Y = 8000$$

$$7998,55 \cdot 1,06 + Y = 8000 \Rightarrow 8478,46 + Y = 8000 \Rightarrow Y = -478,46 \text{ TL} .$$

Buradaki eksi işareti, 22. dönemin sonunda ödeme yapılmasının **gerekmediği** anlamındadır; 21 ödemenin bir dönem daha faiz kazanması hedefi zaten aşmıştır.

21 tam ödeme; 22. dönemde ödeme yapmaya gerek yoktur

■

Örnek 5.2 (Borç Ödemesinde Son Taksit). 4000 TL'lik borç $j_2 = \%12$ 'den yarı-yıllık 400 TL'lik ödemeler ile geri ödenecektir. Tam ödemelerin sayısını ve son ödemeyi bulunuz.

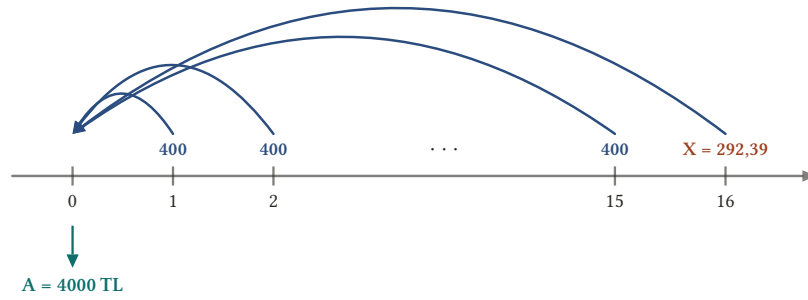
Çözüm.

$$A = 4000, R = 400, i = \frac{0,12}{2} = 0,06.$$

$$400 \cdot \frac{1 - (1,06)^{-n}}{0,06} = 4000 \Rightarrow 1 - (1,06)^{-n} = \frac{4000 \cdot 0,06}{400} = 0,6$$

$$(1,06)^{-n} = 0,4 \Rightarrow -n \log 1,06 = \log 0,4 \Rightarrow n = -\frac{\log 0,4}{\log 1,06} = 15,72520854$$

Demek ki 15 tam ödeme yapılacak, geri kalan küçük tutar 16. dönemde ödenecektir.



Şekil 5.3: 4000 TL'lik borç 15,73 dönemde bitiyor: 15 tam ödemeden sonra borcun bugünkü değerinden geriye kalan küçük parça, 16. dönemde yapılacak tek bir ödemeye dönüştürülür.

Bugünkü değerler eşitlenir: borç, 15 tam ödemenin bugünkü değeri ile 16. dönemdeki X ödemesinin bugünkü değerinin toplamına eşittir.

$$4000 = 400 \cdot a_{\overline{15}|0,06} + X(1,06)^{-16}$$

$$400 \cdot \frac{1 - (1,06)^{-15}}{0,06} = 400 \cdot 9,712249 = 3884,90 \text{ TL}$$

$$4000 - 3884,90 = 115,10 = X(1,06)^{-16}$$

$$X = 115,10 \cdot (1,06)^{16} = 115,10 \cdot 2,540352 = 292,39 \text{ TL}.$$

15 tam ödeme ve 16. dönemde 292,39 TL'lik son küçük ödeme

Son ödemenin bir tam taksitten (400 TL) küçük çıkması beklenen sonuçtur; büyük çıksaydı hesapta bir hata olduğunu anlardık.

■

❓ Hangi tarihe eşitleme yapılmalı?

Toplam değer (S) verilmişse ödemeleri **son tarihe**, borç (A) verilmişse **bugüne** taşımak en kısa yoldur. İki yol da doğrudur ama yanlış tarafı seçmek gereksiz bir taşıma çarpanı daha getirir.

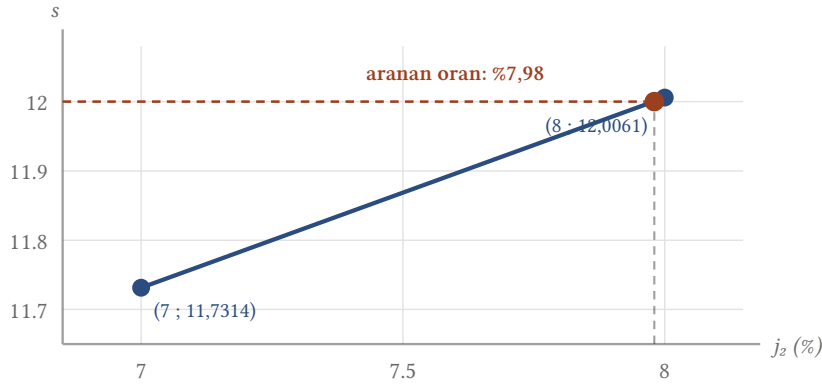
5.2 Anüitenin Faiz Oranının Bulunması

Anüitede R , n ve S (ya da A) biliniyor, faiz oranı aranıyorsa iş zorlaşır. Çünkü

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = k$$

denklemin i 'ye göre n . dereceden bir denklemdir; $n \geq 5$ için genel bir çözüm formülü **yoktur**. Bu yüzden oran, yaklaşık yöntemlerle bulunur. Bu derste kullanacağımız yöntem doğrusal yaklaşımdır.

Fikir basittir: $s_{\overline{n}|i}$ çarpanı i 'ye göre eğri bir fonksiyondur, ama **çok dar bir aralıkta** neredeyse düz görünür. Aranılan değeri içine alan iki oran seçilir, o iki noktadaki çarpanlar hesaplanır ve aradaki eğri bir **doğru** kabul edilerek aranılan oran okunur.



Şekil 5.4: İnterpolasyon, aradaki eğriyi bir **doğru** gibi kabul eder: aralarında %1 fark olan iki oran için hesaplanan iki nokta birleştirilir ve aranılan değere karşılık gelen oran bu doğru üzerinden okunur. Aralık dar tutulduğu için hata küçüktür.

Aramaya nereden başlanacağını belirlemek için de yaklaşık bir başlangıç değeri kullanılır.

Tanım 5.2 (Başlangıç Değeri).

1. Eğer $s_{\overline{n}|i} = k$ denkleminde i bulunmak isteniyorsa başlangıç değeri olarak

$$i_0 = \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1}{k}$$

2. Eğer $a_{\overline{n}|i} = k$ denkleminde i bulunmak isteniyorsa başlangıç değeri olarak

$$i_0 = \frac{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}{k}$$

alınır.

⚠ Uyarı

Bu derste bu tür sorularda aranan j_m oranını bulmak için kullanılacak doğrusal yaklaşım, aralarındaki fark %1 olan ilgili iki oran arasına sıkıştırılarak yapılacaktır. Farklı yaklaşımlar farklı sonuçlar verebilir.

İnterpolasyon formülü, iki noktadan geçen doğrunun denkleminde gelir. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) bilinen iki nokta, y aranan değere karşılık gelen çarpan olmak üzere

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

orantısı kurulur ve x çekilir.

i Başlangıç değeri bir tahmindir, sonuç değil

i_0 yalnızca “hangi iki tam yüzde arasına bakayım?” sorusunu cevaplar. Seçtiğiniz aralıkta hesapladığınız iki çarpan, aranan k değerini **arasına almıyorsa** (ikisi de k 'den büyük ya da ikisi de küçükse) aralık yanlıştır; bir alt ya da bir üst yüzdeye kayıp yeniden bakmak gerekir.

Örnek 5.3 (Anüitenin Faiz Oranı). Yarı-yıllık 500 TL'lik ödemeler ile 5 yılda 6000 TL toplanmak isteniyor. Bu durumda geçerli olan j_2 oranı nedir?

Çözüm.

$S = 6000, R = 500, n = 5 \cdot 2 = 10$ dönem.

Adım 1: Çarpanı yalnız bırak.

$$6000 = 500 \cdot s_{\overline{10}|i} \Rightarrow s_{\overline{10}|i} = \underbrace{12}_k$$

Adım 2: Başlangıç değerini hesapla. s tipi denklem olduğundan birinci formül kullanılır:

$$i_0 = \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1}{k} = \frac{\left(\frac{12}{10}\right)^2 - 1}{12} = \frac{1,44 - 1}{12} = 0,03666667$$

$$\Rightarrow j_2 = 2 \cdot i_0 = 0,0733 = \%7,33$$

Demek ki aranan oran %7 ile %8 arasındadır.

Adım 3: Aralığın uçlarındaki çarpanları hesapla.

$j_2 = \%7$ için $i = \frac{0,07}{2} = 0,035$:

$$s_{\overline{10}|0,035} = \frac{(1,035)^{10} - 1}{0,035} = 11,7314$$

$j_2 = \%8$ için $i = \frac{0,08}{2} = 0,04$:

$$s_{\overline{10}|0,04} = \frac{(1,04)^{10} - 1}{0,04} = 12,0061$$

Aranan 12 değeri bu ikisinin arasındadır ($11,7314 < 12 < 12,0061$), yani aralık doğrudur.

Adım 4: İnterpolasyon.

j_2	$s_{\overline{n} i}$
0,07	11,7314
x	12
0,08	12,0061

$$\frac{x - 0,07}{0,08 - 0,07} = \frac{12 - 11,7314}{12,0061 - 11,7314} \Rightarrow \frac{x - 0,07}{0,01} = \frac{0,2686}{0,2747}$$

$$x - 0,07 = 0,01 \cdot 0,977794 = 0,009778 \Rightarrow x = 0,0798$$

$$j_2 \approx \%7,98$$

💡 Sonucu kontrol etmek

Bulduğunuz oranı formüle geri koyup çarpanı hesaplayın: $i = \frac{0,0798}{2} = 0,0399$ için $s_{\overline{10}|0,0399} = 12,0005$ çıkar; hedef 12 olduğuna göre yaklaşım çok iyidir. Kalan küçük sapma, eğriyi doğru saymanın bedelidir ve aralık ne kadar dar tutulursa o kadar küçülür.

5.3 Genel Anüiteler

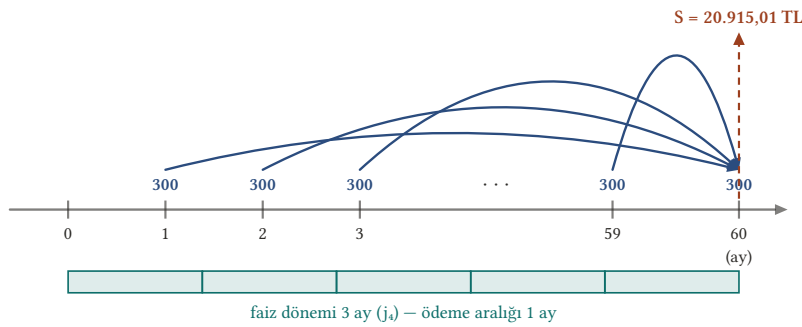
Tanım 5.3 (Genel Anüite). Ödeme aralığı ile faiz aralığının çakışmadığı anüitelere **genel anüite** denir. Genel anüiteler basit anüitelere dönüştürülerek hesaplanırlar.

Dönüştürme yolu şudur: verilen faiz oranına **denk** olan ve ödeme aralığıyla çakışan yeni bir oran bulunur (Önerme 3.3). Artık problem basit bir anüitedir.

Örnek 5.4 (Aylık Ödeme, Üç Aylık Faiz). 5 yıl boyunca her ayın sonunda 300 TL'lik ödemelerin $j_4 = 0,06$ oranından toplam değeri ne olur?

Çözüm.

Ödeme aralığı 1 ay, ancak faiz periyodu 3 aydır. Dolayısıyla bu bir genel anüitedir. Bu anüiteyi basit anüiteye çevirmek için verilen j_4 oranına denk olan j_{12} oranı bulunup işlem yapılır.



Şekil 5.5: Genel anüitede ödeme aralığı ile faiz dönemi çakışmaz (altta gri bloklar üç aylık faiz dönemleri). Çözüm, verilen j_4 oranına **denk** olan j_{12} oranını bulup problemi basit anüiteye çevirmektir.

Bileşik faizdeki denk oranların bulunmasında kullandığımız yöntem yardımıyla, $i = \frac{j_{12}}{12}$ olmak üzere bir yıllık büyüme çarpanları eşitlenir:

$$(1 + i)^{12} = \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^4 = (1,015)^4$$

$$1 + i = (1,015)^{\frac{4}{12}} = (1,015)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow i = 0,004975209$$

Artık ödeme aralığı ile faiz aralığı çakışıyor; $n = 5 \cdot 12 = 60$ ile

$$S = 300 \cdot \frac{(1,004975209)^{60} - 1}{0,004975209} = 300 \cdot 69,716709 = \boxed{20915,01 \text{ TL}}$$

■

5.4 Daimi Gelir

Tanım 5.4 (Daimi Gelir). Belli bir tarihte başlayan ve **sonsuz** kadar devam eden ödemelerin oluşturduğu anüitelere **daimi gelir** denir.

Bazı yatırımlar anaparayı muhafaza edip sadece faizini kullanırlar. Örneğin bir hayırseverin sonsuza dek her yıl 5000 TL’lik bir burs verebilmek için her yıl 5000 TL faiz getirecek bir bağış bırakması; ya da vakıf gibi bağış fonları ile yaşamlarını sürdüren kurumların fonları; ya da geri çağrılabilir olmayan hisse senetleri üzerindeki kâr payları daimi gelir örnekleridir. Pratikte bu ödemeler sonsuza kadar sürmez ancak matematiksel olarak sonsuza dek sürdüğü kabul edilebilir.

! Toplam değeri yoktur

Daimi gelirin **toplam değerini** bulmak mümkün değildir — ödemeler bitmediği için taşınacak bir “son tarih” yoktur ve toplam sonsuza gider. Ancak **şimdiki değerini** tespit edebiliriz; çünkü uzaktaki ödemelerin bugünkü değeri hızla küçülür.

Önerme 5.1 (Daimi Gelirin Şimdiki Değeri). Dönem sonlarında sonsuza kadar ödenen R tutarlarının şimdiki değeri

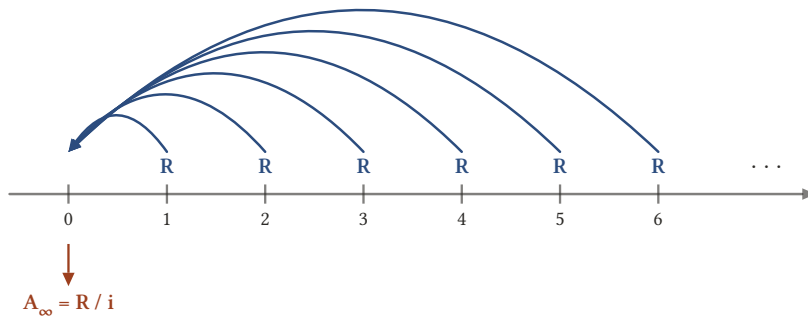
$$A_{\infty} = \frac{R}{i}$$

olur.

İspat.

Bütün ödemeleri bugüne taşıyıp toplayalım:

$$A_{\infty} = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \dots$$



Şekil 5.6: Daimi gelirden ödemeler hiç bitmez, bu yüzden bir toplam değerden söz edilemez; ama iskontolu değer sonludur. Uzaktaki ödemelerin bugünkü değeri hızla küçüldüğü için sonsuz toplam R/i sayısına yakınsar — yani “yalnızca faizini harcamak”.

Ortak çarpan $R(1+i)^{-1}$ parantezine alınırsa

$$A_{\infty} = R(1+i)^{-1} [1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots]$$

Köşeli parantez içi, ortak çarpanı $(1+i)^{-1}$ olan sonsuz geometrik seridir. $i > 0$ olduğundan $0 < (1+i)^{-1} < 1$ 'dir ve seri yakınsar; toplamı $\frac{1}{1 - (1+i)^{-1}}$ 'dir. Böylece

$$A_{\infty} = R \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = R \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1+i}{i} = \frac{R}{i}.$$

■

💡 Formülün sezgisi

$A_{\infty} = \frac{R}{i}$ eşitliğini $R = A_{\infty} \cdot i$ diye ters çevirirsek anlamı ortaya çıkar: elinizde A_{∞} kadar anapara varsa, her dönem yalnızca onun faizi olan $A_{\infty} \cdot i$ kadarını harcarsanız anapara hiç azalmaz ve ödeme sonsuza dek sürer.

Örnek 5.5 (Aylık Daimi Gelirin Şimdiki Değeri). Her ay 50 TL ödenen daimi gelirin şimdiki değerini a) $j_{12} = \%9$ ve b) $j_{12} = \%12$ oranlarına göre hesaplayınız.

Çözüm.

a) $i = \frac{0,09}{12} = 0,0075$:

$$A_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{50}{0,0075} = \boxed{6666,67 \text{ TL}}$$

b) $i = \frac{0,12}{12} = 0,01$:

$$A_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{50}{0,01} = \boxed{5000,00 \text{ TL}}$$

Faiz oranı yükseldiğinde aynı geliri sağlamak için gereken anapara azalır; çünkü her lira daha çok faiz üretir.

■

5.5 Değişik Ödemeli Anüiteler

Tanım 5.5 (Değişik Ödemeli Anüite). Anüite ödemeleri üzerinde belli bir artma ya da azalma koşulu olan anüitelere **değişik ödemeli anüite** denir. Örneğin bir sonraki ödemesi önceki ödemenin $\%10$ fazlası olan ya da 2 katı olan anüiteler böyledir.

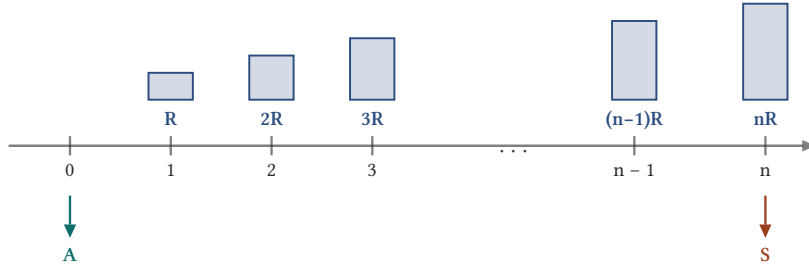
En sık karşılaşılan biçim, ödemelerin $R, 2R, 3R, \dots$ diye sabit bir miktarda arttığı **aritmetik artan** anüitedir.

Örnek 5.6 (Artan Ödemeli Anüitenin Kapalı Formülü). Dönem sonunda $R, 2R, 3R, \dots, nR$ ödemelerinin yapıldığı ve dönem başına faiz oranının i olduğu anüitenin iskontolu ve toplam değerini bulunuz.

Çözüm.

Bütün ödemeleri bugüne taşıyıp toplayalım:

$$A = R(1+i)^{-1} + 2R(1+i)^{-2} + \dots + (n-1)R(1+i)^{-(n-1)} + nR(1+i)^{-n} \quad (1)$$



Şekil 5.7: Ödemeler her dönem R kadar artıyor. Böyle bir dizinin iskontolu değeri, sabit ödemeli anüite formülüyle doğrudan bulunamaz; toplamı $(1+i)$ ile çarpıp kendisinden çıkarma hilesiyle kapalı biçime getirilir.

Bu toplam ne geometrik ne aritmetiktir; doğrudan bir formülü yoktur. Kullanılan hile şudur: (1) eşitliğinin iki tarafını $(1+i)$ ile çarpalım. Her terimin üssü bir azalır:

$$(1+i)A = R + 2R(1+i)^{-1} + \dots + (n-1)R(1+i)^{-(n-2)} + nR(1+i)^{-(n-1)} \quad (2)$$

(2) eşitliğinden (1) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa, aynı üsse sahip terimlerin katsayıları $k - (k-1) = 1$ olur ve elimizde **sabit ödemeli** bir anüite kalır:

$$iA = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \dots + R(1+i)^{-(n-1)} - nR(1+i)^{-n}$$

Baştaki n terim, ortak çarpanı $(1+i)^{-1}$ olan geometrik bir toplamdır:

$$iA = R \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} - nR(1+i)^{-n}$$

Payı ve paydayı -1 ile çarpıp paydayı düzenleyelim: $1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$ olduğundan

$$iA = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{\frac{i}{1+i}} - nR(1+i)^{-n} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i) - nR(1+i)^{-n}$$

$$iA = R \left[(1+i) a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n} \right]$$

Buradan aranan değerler bulunur:

$$\boxed{A = \frac{R}{i} \left[(1+i) a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n} \right]} \quad \text{ve} \quad \boxed{S = A(1+i)^n}$$

■

5.6 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Tam Ödemeler ve Son Ödeme). Bir kişi 5000 TL biriktirmek için her yıl sonu bankaya 1000 TL yatırsın. $j_1 = \%5$ oranından kaç tam ödeme yapmalı ve son ödeme ne olmalıdır?

Çözüm.

$S = 5000$, $R = 1000$, $i = 0,05$.

$$1000 \cdot \frac{(1,05)^n - 1}{0,05} = 5000 \Rightarrow (1,05)^n = 1 + \frac{5000 \cdot 0,05}{1000} = 1,25$$

$$n = \frac{\ln 1,25}{\ln 1,05} = \frac{0,223144}{0,048790} = 4,573536$$

Demek ki 4 tam ödeme yapılacak, kalan tutar 5. dönemde ödenecektir (2. yöntem). 4 ödemenin 5. dönemdeki değeri:

$$1000 \cdot s_{\overline{4}|0,05}(1,05) = 1000 \cdot 4,310125 \cdot 1,05 = 4525,63 \text{ TL}$$

$$X = 5000 - 4525,63 = \boxed{474,37 \text{ TL}}$$

4 tam ödeme ve 5. dönemde 474,37 TL'lik son ödeme

■

Alıştırma 5.2 (Çekilişte Kazanılan Paranın Taksitlendirilmesi). Bir çekilişte 10000 TL kazanan biri onun yerine 12 aylık 1000 TL almayı kabul etmiş ise talihlinin bu tercih ile elde ettiği faiz oranı j_{12} nedir? Talihliye ilk ödeme 1 ay sonra yapılacaktır.

Çözüm.

Bugün vazgeçilen 10000 TL, 12 aylık ödemelerin bugünkü değerine eşittir:

$$10000 = 1000 \cdot a_{\overline{12}|i} \Rightarrow a_{\overline{12}|i} = \underbrace{10}_k$$

Başlangıç değeri. a tipi denklem olduğundan ikinci formül kullanılır ($n = 12$):

$$i_0 = \frac{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}{k} = \frac{1 - \left(\frac{10}{12}\right)^2}{10} = \frac{1 - 0,694444}{10} = 0,030556$$

$$j_{12} = 12 \cdot i_0 = 0,366667 = \%36,67$$

Aralığın kontrolü. Başlangıç değeri %36 ile %37 arasını işaret ediyor; oraya bakalım:

$$a_{\overline{12}|\frac{0,36}{12}} = a_{\overline{12}|0,03} = 9,9540, \quad a_{\overline{12}|\frac{0,37}{12}} = 9,9041$$

İkisi de aranan 10 değerinden **küçüktür**; yani 10 bu aralıkta değildir. $a_{\overline{n}|i}$ oran büyüdükçe küçüldüğüne göre daha küçük oranlara bakmalıyız. Bir alt aralığı deneyelim:

$$a_{\overline{12}|\frac{0,35}{12}} = a_{\overline{12}|0,0291667} = 10,0037, \quad a_{\overline{12}|0,03} = 9,9540$$

Bu kez $9,9540 < 10 < 10,0037$ olduğundan aralık doğrudur.

İnterpolasyon.

j_{12}	$a_{\overline{n} i}$
0,35	10,0037
x	10
0,36	9,9540

$$\frac{x - 0,35}{0,36 - 0,35} = \frac{10 - 10,0037}{9,9540 - 10,0037} = \frac{-0,0037}{-0,0497} = 0,074447$$

$$x = 0,35 + 0,01 \cdot 0,074447 = 0,350744 \Rightarrow \boxed{j_{12} \approx \%35,07}$$

i Başlangıç değeri neden şaşırdı?

i_0 formülü yalnızca kaba bir tahmindir ve oranın büyük olduğu durumlarda sapması artar. Bu yüzden **aralığı doğrulama adımı atlanmamalıdır**: hesapladığınız iki çarpan aranan değeri arasına almıyorsa aralık kaydırılır.

■

Alıştırma 5.3 (Her Yıl %10 Artan Ödemeler). İlk ödemesi 1000 TL olan ve bir sonraki yıllarda her yıl %10 artış ile 4 yıl ödenen bir anüitenin $j_1 = 0,12$ oranından toplam değerini bulunuz.

Çözüm.

Ödemeler her yıl 1,10 katına çıkıyor:

$$R_1 = 1000, \quad R_2 = 1100, \quad R_3 = 1210, \quad R_4 = 1331.$$

Her ödemeyi 4. yıla taşıyıp toplayalım ($i = 0,12$):

$$S = 1000(1,12)^3 + 1100(1,12)^2 + 1210(1,12)^1 + 1331$$

$$S = 1404,93 + 1379,84 + 1355,20 + 1331,00 = \boxed{5470,97 \text{ TL}}$$

💡 Kapalı formül

Ödemeler $q = 1,10$ katıyla **geometrik** olarak arttığında toplam da geometrik bir seridir ve kapalı biçimi vardır. $q \neq 1 + i$ olmak üzere

$$S = \sum_{k=1}^n R q^{k-1} (1+i)^{n-k} = R \cdot \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}.$$

Bu örnekte

$$S = 1000 \cdot \frac{(1,12)^4 - (1,10)^4}{1,12 - 1,10} = 1000 \cdot \frac{1,57351936 - 1,4641}{0,02} = 1000 \cdot 5,470968 = 5470,97 \text{ TL}.$$

Dört terim için elle toplamak kolaydır; ödeme sayısı büyükse bu formül işi çok kısaltır.

■

6. Amortisman Hesapları

Bir kredi çektiğinizde banka size bir **ödeme planı** verir: her ay şu kadar ödeyeceksiniz, şu kadar faiz, şu kadar anapara, kalan borcunuz şu kadar olacak. Bu tabloyu üreten hesaba **amortisman** diyoruz.

Matematiği yeni değil: bir amortisman, bugünkü değeri borca eşit olan bir anüitedir. Yeni olan, o anüitenin **içini açıp** her taksidin ne kadarının faize, ne kadarının anaparaya gittiğini göstermektir. Bölümün ikinci yarısında da uzun vadeli bir kredide en sık sorulan soruyu cevaplıyoruz: bugün itibarıyla ne kadar borç kaldı?

6.1 Amortisman

Tanım 6.1 (Amortisman). Faize bağlı borçların eşit taksitlerle ve eşit zaman aralıklarıyla geri ödenmesine **amortisman** denir.

Anüitelerin en önemli uygulama alanlarından biri de uzun vadeli borçların amortismanıdır. Ev kredisi gibi uzun vadeli borçlar genellikle eşit taksitlerle ve eşit zaman aralıklarıyla geri ödenirler. Çözüm sırası hep aynıdır:

1. **Periyodik ödeme** R belirlenir: borç, taksitlerin bugünkü değerine eşitlenir.
2. **Son ödeme** hesaplanır (yuvarlamadan doğan farkı kapatmak için).
3. **Amortisman tablosu** oluşturulur.

Tablonun her satırı üç basit kuralla doldurulur:

Tanım 6.2 (Amortisman Tablosunun Kuralları). Her satırda sırasıyla

- **Ödemenin faiz kısmı** = (bir önceki satırdaki kalan borç) $\times i$,
- **Ödemenin borç kısmı** = periyodik ödeme – faiz kısmı,
- **Kalan borç** = (bir önceki kalan borç) – borç kısmı

hesaplanır. Son satırdaki kalan borç 0 olmalıdır.

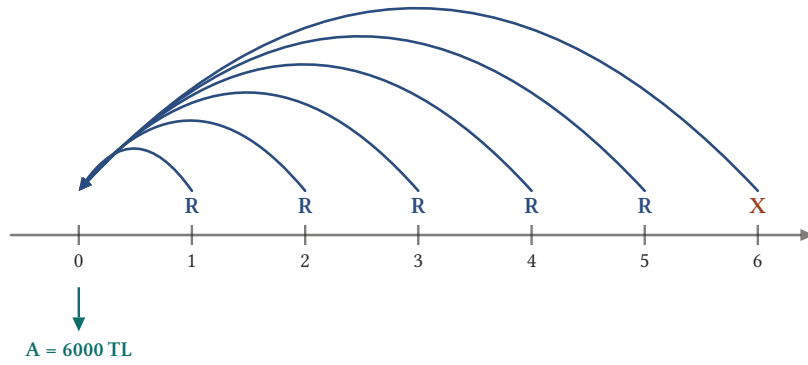
💡 Tablo neden hep kapanır?

Her satırda ödemeden önce o dönemin faizi ayrılır, geri kalan anaparayı düşürür. Kalan borç azaldıkça faiz kısmı da azalır, dolayısıyla anaparaya giden pay her dönem büyür. Ödeme tutarı R tam olarak borcun bugünkü değerinden hesaplandığı için son dönemin sonunda borç sıfırlanır.

Örnek 6.1 (Altı Dönemlik Amortisman). 6000 TL'lik bir borç $j_2 = \%16$ oranından 3 yılda altı aylık eşit R ödemeleri ile amorti edilecektir. İlk ödeme altı ay sonra yapılacağına göre **a)** Periyodik R ödemesini bulunuz, **b)** Son ödemeyi bulunuz, **c)** Amortisman tablosunu oluşturunuz.

Çözüm.

$$A = 6000, i = \frac{0,16}{2} = 0,08, n = 3 \cdot 2 = 6.$$



Şekil 6.1: Amortismanda mantık terstir: taksitler bilinmez, **borç** bilinir. Altı taksidin bugüne taşınmış toplamı 6000 TL'ye eşitlenir ve R buradan çekilir. Son ödeme X , yuvarlamadan doğan farkı kapatmak için ayrıca hesaplanır.

a) Altı taksidin bugünkü değeri borca eşittir:

$$6000 = R \cdot \frac{1 - (1,08)^{-6}}{0,08} = R \cdot 4,622880$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 1297,89 \text{ TL}}$$

b) Son ödemeyi bulmak için ilk 5 taksidi tam ödeme kabul edip, 6. dönemdeki ödemeye X diyelim:

$$6000 = 1297,89 \cdot \frac{1 - (1,08)^{-5}}{0,08} + X(1,08)^{-6}$$

$$6000 = 1297,89 \cdot 3,992710 + X \cdot 0,630170 = 5182,10 + X \cdot 0,630170$$

$$X = \frac{6000 - 5182,10}{0,630170} = \boxed{1297,91 \text{ TL}}$$

c) Amortisman tablosu.

Ödeme sayısı	Periyodik ödeme	Ödemenin faiz kısmı	Ödemenin borç kısmı	Kalan borç
				6000,00
1	1297,89	480,00	817,89	5182,11
2	1297,89	414,57	883,32	4298,79
3	1297,89	343,90	953,99	3344,80
4	1297,89	267,58	1030,31	2314,49
5	1297,89	185,16	1112,73	1201,76
6	1297,90*	96,14	1201,76	0,00

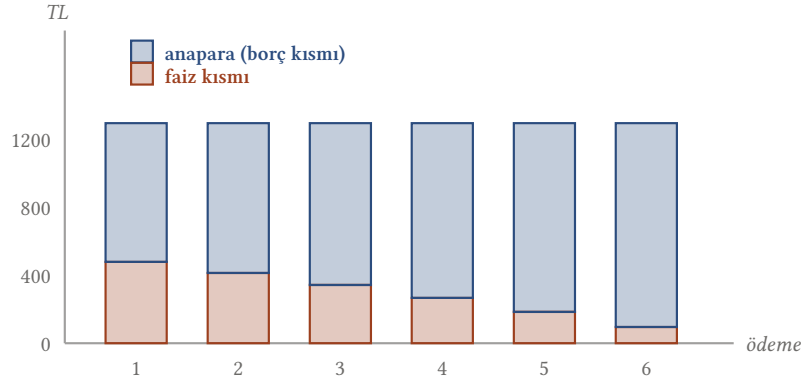
* Son ödeme yuvarlamadan kaynaklanan hatayı gidermek için yeniden düzenlenmiştir.

İlk satırın nasıl doldurulduğuna bakalım: faiz kısmı $6000 \cdot 0,08 = 480,00$ TL, borç kısmı $1297,89 - 480,00 = 817,89$ TL, kalan borç $6000 - 817,89 = 5182,11$ TL. İkinci satırda faiz artık $5182,11 \cdot 0,08 = 414,57$ TL üzerinden hesaplanır ve böyle devam eder.

i Son ödeme neden 1297,90?

Tablodaki son ödeme, o satırdaki kalan borç ile faizinin toplamıdır: $1201,76 + 96,14 = 1297,90$ TL. **b)** şıkkında bulduğumuz 1297,91 TL'den 1 kuruş farklıdır; çünkü tablo her satırda kuruşa yuvarlanmış değerlerle ilerler, **b)** şıkkı ise tek adımda hesaplar. Bankalar tabloyu esas alır.

Taksitin içeriğinin dönemden döneme nasıl kaydığını görmek öğreticidir:



Şekil 6.2: Taksit hep aynı (1297,89 TL) ama içeriği değişir: kalan borç azaldıkça faiz kısmı küçülür, anaparadan düşen kısım büyür. Amortisman tablosunun anlattığı şey tam olarak bu kaymadır.

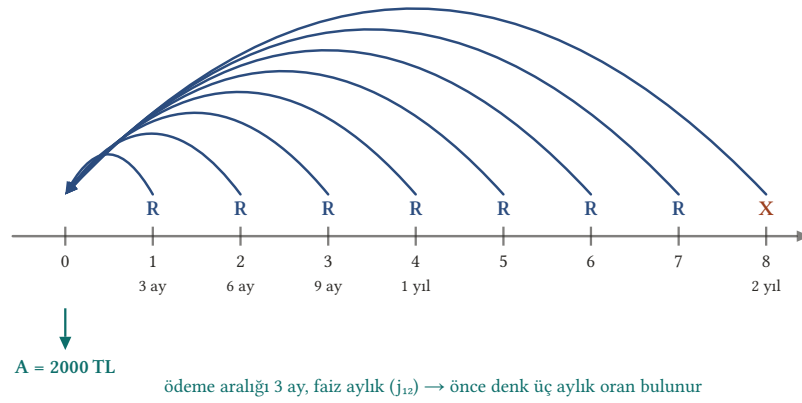
■

Örnek 6.2 (Genel Anüite Biçiminde Amortisman). 2000 TL'lik bir borç $j_{12} = \%24$ oranından 3 aylık ödemeler ile 2 yılda bitirilecektir. İlk ödeme 3 ay sonra yapılacaktır. **a)** Periyodik R ödemesini bulunuz, **b)** Son ödemeyi bulunuz, **c)** Amortisman tablosunu oluşturunuz.

Çözüm.

$A = 2000$, $n = 2 \cdot 4 = 8$ ödeme. Ödemeler üç ayda bir, faiz ise aylık işlediğinden bu bir **genel anüite**-dir; önce üç aylık denk oranı bulmalıyız:

$$(1+i)^4 = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} = (1,02)^{12} \Rightarrow 1+i = (1,02)^3 \Rightarrow i = 0,061208$$



Şekil 6.3: Ödemeler üç ayda bir, faiz ise aylık işliyor: bu bir genel anüitedir. Önce $j_{12} = \%24$ 'e denk gelen üç aylık i oranı bulunur $((1+i)^4 = (1,02)^{12})$, sonra her şey basit anüite gibi yürür.

a)

$$2000 = R \cdot \frac{1 - (1,061208)^{-8}}{0,061208} = R \cdot 6,180214 \Rightarrow \boxed{R = 323,61 \text{ TL}}$$

b) İlk 7 ödeme tam, 8. ödeme X olsun:

$$2000 = 323,61 \cdot \frac{1 - (1,061208)^{-7}}{0,061208} + X(1,061208)^{-8}$$

$$2000 = 323,61 \cdot 5,558492 + X \cdot 0,621721 = 1798,78 + X \cdot 0,621721$$

$$X = \frac{2000 - 1798,78}{0,621721} = \boxed{323,64 \text{ TL}}$$

c) Amortisman tablosu.

Ödeme sayısı	Periyodik ödeme	Ödemenin faiz kısmı	Ödemenin borç kısmı	Kalan borç
				2000,00
1	323,61	122,42	201,19	1798,81
2	323,61	110,10	213,51	1585,30
3	323,61	97,03	226,58	1358,72
4	323,61	83,16	240,45	1118,27
5	323,61	68,45	255,16	863,11
6	323,61	52,83	270,78	592,33
7	323,61	36,26	287,35	304,98
8	323,65*	18,67	304,98	0,00

* Son ödeme yuvarlamadan kaynaklanan hatayı gidermek için yeniden düzenlenmiştir.

Sekiz taksidin toplamı $7 \cdot 323,61 + 323,65 = 2588,92$ TL'dir; borç 2000 TL olduğuna göre ödenen toplam faiz 588,92 TL'dir. Aynı sayıyı tablonun faiz sütununu toplayarak da bulabilirsiniz.

■

⚠ Tabloyu doldururken üç sık hata

1. Faiz kısmını **ilk** kalan borç yerine sabit anapara üzerinden hesaplamak. Faiz her zaman bir önceki satırın kalan borcu üzerinden işler.
2. Genel anüitede denk oranı bulmayı atlayıp j_m/m 'yi doğrudan kullanmak.
3. Son satırda kalan borcun sıfırlanmasını kontrol etmemek. Sıfırlanmıyorsa ya R ya da bir satırın aritmetiği yanlıştır.

6.2 Kalan Borcun Hesaplanması

Uzun vadeli bir kredide “şu an ne kadar borcum kaldı?” sorusu sık sorulur: erken kapatma, yeniden yapılandırma ya da evi satma durumunda gerekir. Cevabı bulmak için yüzlerce satırlık tabloyu doldurmaya gerek yoktur; iki kısa formülden biri yeter.

Bir A borcu dönem başına i faiz oranından n dönemde, dönem sonu R ödemeleri ile ödensin. k . ödemedен sonra kalan borcu P_k ile gösterelim.

Önerme 6.1 (Kalan Borcun İki Hesabı). 1. **Yöntem (geçmişe bakarak hesaplama).** Ana borcun k . döneme taşınmış değerinden, yapılan ödemelerin o tarihte biriktirdiği tutar çıkarılır:

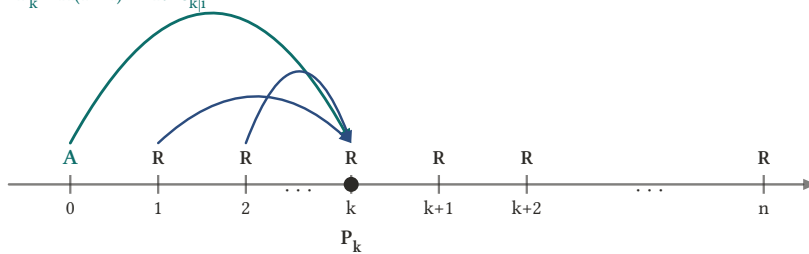
$$A(1+i)^k = R \cdot s_{\overline{k}|i} + P_k \Rightarrow \boxed{P_k = A(1+i)^k - R \cdot s_{\overline{k}|i}}$$

2. **Yöntem (geleceğe bakarak hesaplama).** Henüz yapılmamış $n - k$ ödemenin o tarihteki iskontolu değeri alınır:

$$\boxed{P_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|i}}$$

İspat.

1. yöntem (geçmişe bakarak):
 $P_k = A(1+i)^k - R \cdot s_{\overline{k}|i}$



2. yöntem (geleceğe bakarak):
 $P_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|i}$

Şekil 6.4: k . ödemedен sonraki kalan borcu iki yönden görebiliriz: **geçmişe bakarak** (ana borcun o güne taşınmış değerinden, yapılan ödemelerin biriktirdiği tutarı çıkararak) ya da **geleceğe bakarak** (henüz yapılmamış $n - k$ ödemenin o güne taşınmış değerini alarak). İkisi aynı sayıyı verir.

1. yöntem. k . dönemi odak noktası seçelim. Borç ile ödemeler denk olduğuna göre, ana borcun o tarihteki değeri, yapılan k ödemenin o tarihteki değeri ile kalan borcun toplamına eşittir. Bu, tanımı gereği doğrudur: kalan borç, “henüz karşılığı ödenmemiş olan kısım”dır.

2. yöntem. Aynı odak noktasında borç-ödeme denkleğini yazalım. Bütün ödemelerin k . dönemdeki değeri ana borcun o tarihteki değerine eşittir:

$$A(1+i)^k = \underbrace{R \cdot s_{\overline{k}|i}}_{\text{yapılmış } k \text{ ödeme}} + \underbrace{R \cdot a_{\overline{n-k}|i}}_{\text{kalan } n-k \text{ ödeme}}$$

(Kalan ödemeler k . dönemden sonra geldiği için, o tarihe göre normal bir anüite oluşturur.) İlk yöntemdeki eşitlikle karşılaştırılırsa

$$P_k = A(1+i)^k - R \cdot s_{\overline{k}|i} = R \cdot a_{\overline{n-k}|i}$$

bulunur.



⚠ Uyarı

Aksi belirtilmedikçe amortisman hesaplarında kalan borç **1. yöntem** ile hesaplanacaktır.

İki yöntem tam olarak aynı sonucu verir mi?

R yuvarlanmamışsa evet, birebir aynı. Uygulamada R kuruşa (bazen 10 kuruşa) yuvarlandığı için aralarında birkaç kuruşluk fark oluşabilir. Gerçekte ödenen taksit yuvarlanmış tutar olduğundan, borçlunun defterindeki doğru değer **1. yöntemin** verdiği'dir.

6.3 Uzun Vadeli Kredi Örneği

Örnek 6.3 (Yirmi Dokuz Yıllık Ev Kredisi). Bir aile 1.5.1994'te 65000 TL'ye bir ev satın alıyor. % 20 peşin ödeme yapılıyor. Geriye kalan kısım $j_{12} = \%10$ oranından 29 yılda ödenecek şekilde sözleşme imzalanıyor. Borç, virgülden sonra bir basamağa yuvarlanmış olan aylık eşit taksitlerle amorti edilecektir. İlk ödeme 1.6.1994'te yapılırsa 1994 yılı içinde ödenen faiz ve borç miktarlarını bulunuz. Amortisman tablosunun ilk üç ve son üç satırını oluşturunuz.

Çözüm.

Ana borç. Peşinat $65000 \cdot 0,20 = 13000$ TL olduğundan

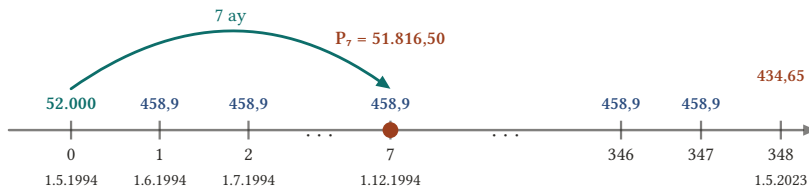
$$A = 65000 - 13000 = 52000 \text{ TL .}$$

$$n = 29 \cdot 12 = 348 \text{ aylık ödeme vardır ve } i = \frac{0,10}{12} = \frac{5}{600}.$$

Periyodik ödeme.

$$52000 = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{5}{600}\right)^{-348}}{\frac{5}{600}} = R \cdot 113,317392$$

$$R = 458,89 \approx 458,9 \text{ TL} \quad (\text{soru gereği bir basamağa yuvarlandı})$$



Şekil 6.5: 29 yıllık kredi 348 aylık taksite bölünüyor. 1994 yılı içinde yalnızca 7 taksit ödenmiştir; o tarihteki kalan borç 51.816,50 TL'dir, yani yedi ayda anaparadan düşen tutar sadece 183,50 TL'dir — ödenen 3212,30 TL'nin geri kalanı faizdir.

1994 yılı. İlk ödeme 1.6.1994'te yapıldığına göre 1994 içinde Haziran'dan Aralık'a 7 ödeme yapılır; 1.12.1994'teki kalan borç P_7 'dir. 1. yöntemle:

$$P_7 = 52000 \left(1 + \frac{5}{600}\right)^7 - 458,9 \cdot s_{\overline{7}| \frac{5}{600}} = 55110,23 - 3293,73 = 51816,50 \text{ TL}$$

Buradan

$$1994 \text{ içinde ana borçtan ödenen} = 52000 - 51816,50 = \boxed{183,50 \text{ TL}}$$

$$1994 \text{ içinde ödenen faiz} = 7 \cdot 458,9 - 183,50 = 3212,30 - 183,50 = \boxed{3028,80 \text{ TL}}$$

Yani yedi ayda ödenen 3212,30 TL'nin yalnızca 183,50 TL'si borcu azaltmıştır; geri kalanı faizdir.

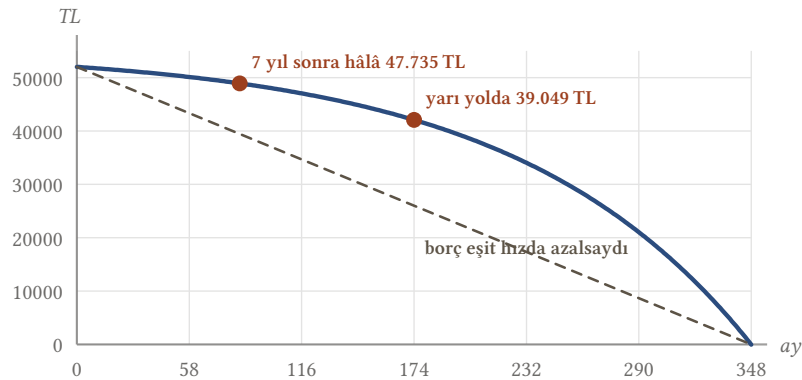
Tablo. Son üç satırı yazabilmek için 345. ödemeden sonraki kalan borca ihtiyacımız var:

$$P_{345} = 52000 \left(1 + \frac{5}{600}\right)^{345} - 458,9 \cdot s_{\overline{345}| \frac{5}{600}} = 1330,41 \text{ TL}$$

Ödeme sayısı	Periyodik ödeme	Ödemenin faiz kısmı	Ödemenin borç kısmı	Kalan borç
				52000,00
1	458,9	433,33	25,57	51974,43
2	458,9	433,12	25,78	51948,65
3	458,9	432,91	25,99	51922,66
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
345	458,9			1330,41
346	458,9	11,09	447,81	882,60
347	458,9	7,36	451,54	431,06
348	434,65*	3,59	431,06	0,00

* Son ödeme yuvarlamadan kaynaklanan hatayı gidermek için yeniden düzenlenmiştir.

Tablonun iki ucu arasındaki fark çarpıcıdır: **1.** ödemede 458,9 TL'nin 433,33 TL'si faize giderken, **346.** ödemede yalnızca 11,09 TL'si faize gider. Kalan borcun zamana göre nasıl eridiğini görelim:



Şekil 6.6: Uzun vadeli kredide kalan borç **doğrusal azalmaz**: ilk yıllarda taksitin neredeyse tamamı faize gittiği için borç çok yavaş erir, sona doğru hızlanır. Kesikli çizgi, borç eşit hızda azalsaydı izleyeceği yoldur.



6.4 Alıştırmalar

Alıştırma 6.1 (İki Yıllık Amortisman Tablosu). 40000 TL'lik bir borç $j_4 = \%4$ oranından 2 yılda üç aylık eşit R ödemeleri ile amorti edilecektir. İlk ödeme üç ay sonra yapılacağına göre **a)** Periyodik R ödemesini bulunuz, **b)** Son ödemeyi bulunuz, **c)** Amortisman tablosunu oluşturunuz.

Çözüm.

$$A = 40000, i = \frac{0,04}{4} = 0,01, n = 2 \cdot 4 = 8.$$

a)

$$40000 = R \cdot \frac{1 - (1,01)^{-8}}{0,01} = R \cdot 7,651678 \Rightarrow \boxed{R = 5227,61 \text{ TL}}$$

b) İlk 7 ödeme tam, 8. ödeme X olsun:

$$40000 = 5227,61 \cdot a_{\overline{7}|0,01} + X(1,01)^{-8} = 5227,61 \cdot 6,728195 + X \cdot 0,923483$$

$$40000 = 35172,39 + X \cdot 0,923483 \Rightarrow X = \frac{4827,61}{0,923483} = \boxed{5227,62 \text{ TL}}$$

c) Amortisman tablosu.

Ödeme sayısı	Periyodik ödeme	Ödemenin faiz kısmı	Ödemenin borç kısmı	Kalan borç
				40000,00
1	5227,61	400,00	4827,61	35172,39
2	5227,61	351,72	4875,89	30296,50
3	5227,61	302,97	4924,64	25371,86
4	5227,61	253,72	4973,89	20397,97
5	5227,61	203,98	5023,63	15374,34
6	5227,61	153,74	5073,87	10300,47
7	5227,61	103,00	5124,61	5175,86
8	5227,62*	51,76	5175,86	0,00

* Son ödeme yuvarlamadan kaynaklanan hatayı gidermek için yeniden düzenlenmiştir.

Vade kısa ve oran düşük olduğu için taksitin büyük kısmı en baştan itibaren anaparaya gitmiştir; **Örnek 6.3'**ndeki 29 yıllık kredinin tam tersi bir tablo.



Alıştırma 6.2 (Altı Yıllık Konut Kredisi). 1.12.2004'te 120000 TL'ye bir ev satın alınsın. Borç $j_{12} = \%12$ oranından 6 yılda ödenecek şekilde anlaşma yapılsın. Borç aylık eşit taksitlerle ödenecek olup ilk taksit 1.1.2005'te ödenecek olsun. Bu durumda **a)** Periyodik R ödemesini bulunuz, **b)** P_{36} ve P_{48} değerlerini bulunuz, **c)** 2008 yılı içinde ödenen toplam faiz ve ana borçtan düşen toplam miktarı bulunuz, **d)** Amortisman tablosunun ilk üç ve son üç satırını oluşturunuz.

Çözüm.

$$A = 120000, i = \frac{0,12}{12} = 0,01, n = 6 \cdot 12 = 72.$$

a)

$$120000 = R \cdot \frac{1 - (1,01)^{-72}}{0,01} = R \cdot 51,150391 \Rightarrow \boxed{R = 2346,02 \text{ TL}}$$

b) İlk taksit 1.1.2005'te ödendiğine göre 36. ödeme 1.12.2007'de, 48. ödeme 1.12.2008'de yapılır. 1. yöntemle:

$$P_{36} = 120000(1,01)^{36} - 2346,02 \cdot s_{\overline{36}|0,01} = 171692,25 - 101059,22 = \boxed{70633,03 \text{ TL}}$$

$$P_{48} = 120000(1,01)^{48} - 2346,02 \cdot s_{\overline{48}|0,01} = 193467,13 - 143629,46 = \boxed{49837,67 \text{ TL}}$$

c) 2008 yılı, 37. ödemeden 48. ödemeye kadar olan 12 taksidi kapsar. Ana borçtan düşen miktar iki kalan borcun farkıdır:

$$P_{36} - P_{48} = 70633,03 - 49837,67 = \boxed{20795,36 \text{ TL}}$$

Bir yılda ödenen toplam tutar $12 \cdot 2346,02 = 28152,24$ TL olduğuna göre faiz kısmı

$$28152,24 - 20795,36 = \boxed{7356,88 \text{ TL}}$$

d) Amortisman tablosu (ilk üç ve son üç satır). Son satırlar için 69. ödemeden sonraki kalan borç gerekir:

$$P_{69} = 120000(1,01)^{69} - 2346,02 \cdot s_{\overline{69}|0,01} = 238427,33 - 231527,41 = 6899,92 \text{ TL}$$

Ödeme sayısı	Periyodik ödeme	Ödemenin faiz kısmı	Ödemenin borç kısmı	Kalan borç
				120000,00
1	2346,02	1200,00	1146,02	118853,98
2	2346,02	1188,54	1157,48	117696,50
3	2346,02	1176,96	1169,06	116527,44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
69	2346,02			6899,92
70	2346,02	69,00	2277,02	4622,90
71	2346,02	46,23	2299,79	2323,11
72	2346,34*	23,23	2323,11	0,00

* Son ödeme yuvarlamadan kaynaklanan hatayı gidermek için yeniden düzenlenmiştir.

■

7. Tahviller

Tahvil, bir kurumun “şu tarihte şu kadar ödeyeceğim” taahhüdünü kâğıda dökmüş hâlidir. Yatırımcı açısından bakınca ise iki tanınmış parçanın toplamıdır: düzenli kupon ödemelerinden oluşan bir **anüite** ve vadede alınacak **tek bir tutar**. Bu yüzden tahvil fiyatlaması, elimizdeki iki formülün toplanmasından ibarettir.

Zor olan kısım matematik değil, hangi sayının hangi harfe karşılık geldiğini şaşırmamaktır: nominal değer, kupon oranı, getiri oranı ve vade değeri sık sık birbirine karıştırılır. Bölümün ikinci yarısında da ters soruyu ele alıyoruz: fiyat belliyken yatırımcının eline geçen getiri oranı nedir?

7.1 Tahvil Nedir?

Tanım 7.1 (Tahvil). Devletin ya da özel sektör şirketlerinin borçlanarak orta ve uzun vadeli fon sağlamak üzere çıkarttıkları borç senetlerine **tahvil** denir.

Devlet tahvili, özel sektör tahvili, güvenceli, güvencesiz, kuponsuz, kuponlu, dövize endeksli tahviller gibi çeşitleri vardır. Tahvilin vadesi 1 yıldan az olmamak üzere serbestçe belirlenebilir.

Tahvil sahibi, tahvili çıkaran kuruluşun **uzun vadeli alacaklısıdır**; alacağından başka hiçbir hakka sahip değildir. Şirketin yönetimine katılamaz, herhangi bir ortaklık hakkı yoktur. Buna karşılık şirketin brüt kârından önce tahvil sahiplerinin faizleri ödenir. Tahvil sahibi ile şirket arasındaki hukuki ilişki vade sonunda sona erer. Tahvil sahibi tahvili çıkaran şirketin kâr–zarar riskine katılmaz; şirket zarar etse de günü gelince belli miktardaki anapara ve faizini alır.

Tahvil bir borç senedi olduğuna göre, borcun anapara ve faizleri gerektiğinde yargı yoluna başvurarak tahsil edilebilir. Şirketin iflası veya tasfiyesi hâlinde de, tasfiyede önce borçlar ödendiği için, tahvil sahipleri şirket ortaklarından (hisse senedi sahiplerinden) önce alacaklarını alırlar. Tahvilin **anapara** alacakları için zaman aşımı vadesinden veya en son kupon vadesinden itibaren 10 yıldır; **faiz** alacaklarında ise zaman aşımı 5 yıldır.

7.2 Notasyon

Tanım 7.2 (Tahvil Notasyonu).

Simge	Anlamı
F	Nominal değer: tahvilin üzerinde yazan değerdir; vadesinde yatırımcının eline geçecek olan para miktarıdır, sabittir, değişmez
r	Kuponlu tahvillerde kupon oranı ; nominal değer üzerinden yüzde olarak belirlenir
$F \cdot r$	Kupon ödemesi: tahvil sahibinin elde ettiği faiz getirileridir; yılda bir veya iki kez ödenir
i	Tahvilin dönem başına düşen faiz (getiri) oranı
P	İhraç değeri , satış değeri; i getiri oranını garanti eden ilk satış fiyatı

Simge	Anlamı
C	Vade değeri: vadesinde tahvil sahibine geri ödenecek (itfa edilecek) değerdir; ayrıca belirtilmemişse F değerine eşittir
n	Faiz ödemesi yapılan toplam dönem sayısı

Tahvilin fiyatı ile nominal değeri arasındaki ilişkiye göre üç durum adlandırılır:

- $P > F$ ise tahvil **primli** ihraç edilmiştir denir.
- $P = F$ ise tahvile **başabaş tahvil** denir.
- $P < F$ ise tahvil **iskontolu** ihraç edilmiştir denir.

! Kupon oranı ile getiri oranı aynı şey değildir

r kupon oranı, **ne kadar ödeneceğini** belirler ve nominal değer üzerinden sabittir. i getiri oranı ise piyasanın o gün istediği orandır ve **fiyatı** belirler. İkisi eşitse tahvil başabaş satılır; $r > i$ ise tahvil primli, $r < i$ ise iskontolu satılır.

7.3 İhraç Fiyatının Bulunması

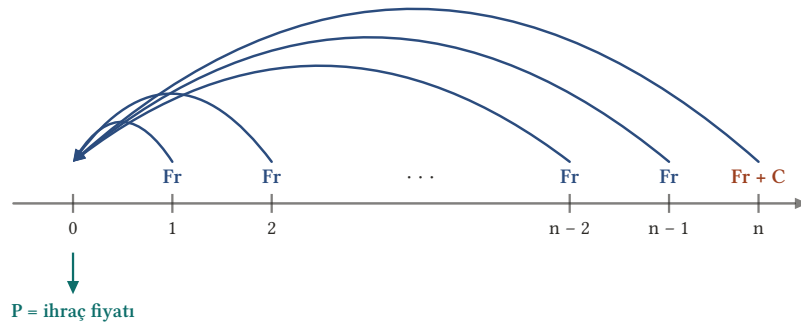
Önerme 7.1 (Kuponlu Bir Tahvilin İhraç Fiyatı). Dönem başına i getiri oranı isteyen bir yatırımcı için tahvilin ihraç fiyatı

$$P = F \cdot r \cdot \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right) + C(1 + i)^{-n} = F \cdot r \cdot a_{\overline{n}|i} + C(1 + i)^{-n}$$

olur.

İspat.

Tahvilin yatırımcıya sağladığı nakit akışı iki parçadan oluşur:



Şekil 7.1: Tahvil iki parçadan oluşur: her dönem ödenen Fr kupon anüitesi ve vadede ödenen C vade değeri. İhraç fiyatı, bu iki parçanın istenen i getiri oranından bugüne taşınmış toplamıdır.

1. Her dönem sonunda alınan $F \cdot r$ kupon ödemesi. Bunlar n ödemelik normal bir anüitedir; bugünkü değeri $F \cdot r \cdot a_{\overline{n}|i}$ 'dir (Önerme 4.2).
2. Vadede alınan C vade değeri. Bu tek ödemenin bugünkü değeri $C(1 + i)^{-n}$ 'dir.

Fiyat, bu iki bugünkü değer toplamıdır; çünkü yatırımcı bugün ödediği tutar karşılığında tam olarak bu akışı satın alır.

■

Örnek 7.1 (Primli Bir Tahvilin Fiyatı). $j_2 = \%12$ kupon ödemeli 1000 TL'lik bir tahvil, 10 yıl sonunda üzerindeki değerinden itfa edilecektir (geri ödenecektir). Bu tahvilin $j_2 = \%10$ oranında faiz getirmesi için ihraç fiyatı ne olmalıdır?

Çözüm.

“Üzerindeki değerinden itfa” dendiğine göre $C = F = 1000$ TL'dir. Kupon yılda iki kez ödendiğinden dönem 6 aydır:

$$r = \frac{0,12}{2} = 0,06 \Rightarrow F \cdot r = 1000 \cdot 0,06 = 60 \text{ TL},$$

$$i = \frac{0,10}{2} = 0,05, \quad n = 2 \cdot 10 = 20.$$

$$P = Fr \cdot a_{\overline{20}|0,05} + C(1,05)^{-20} = 60 \cdot 12,462210 + 1000 \cdot 0,376889$$

$$P = 747,73 + 376,89 = \boxed{1124,62 \text{ TL}}$$

$P > F$ olduğundan tahvil **primli** ihraç edilmiştir. Bu beklenen sonuçtur: kupon oranı (%12) piyasanın istediği getiriden (%10) yüksek olduğu için tahvil nominal değerinin üzerinde alıcı bulur.

■

Örnek 7.2 (Vade Değeri Nominalden Farklı Tahvil). $j_2 = \%10,50$ kupon ödemeli 5000 TL'lik bir tahvil 1 Ekim 2002'de 1,03 katından itfa edilecektir. $j_2 = \%9,5$ oranında getiri elde etmek için 1 Nisan 1995'te tahvilin alış fiyatı ne olmalıdır?

Çözüm.

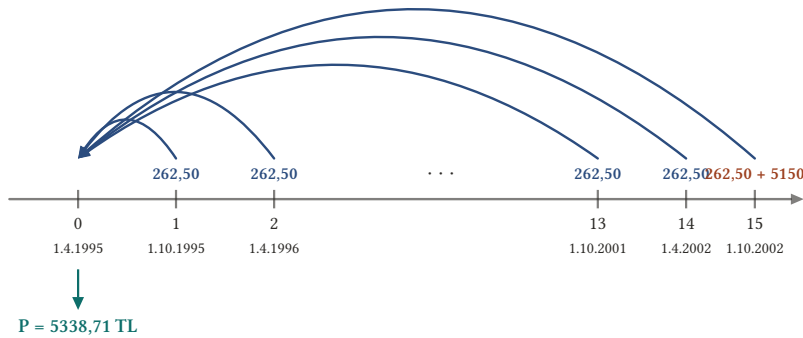
$F = 5000$ TL. İtfa nominalin 1,03 katından yapılacağına göre

$$C = 5000 \cdot 1,03 = 5150 \text{ TL}.$$

$$r = \frac{0,1050}{2} = 0,0525 \Rightarrow F \cdot r = 5000 \cdot 0,0525 = 262,50 \text{ TL}, \quad i = \frac{0,0950}{2} = 0,0475.$$

Dönem sayısı: 1 Nisan 1995 ile 1 Ekim 2002 arası 7 yıl 6 ay, yani 7,5 yıldır; altı ayda bir ödeme yapıldığından

$$n = 7,5 \cdot 2 = 15.$$



Şekil 7.2: 1.4.1995 ile 1.10.2002 arası 7,5 yıl, yani altı ayda bir ödemeye 15 dönemdir. Kupon $5000 \cdot 0,0525 = 262,50$ TL, vade değeri ise nominalin 1,03 katı olan 5150 TL'dir.

$$P = 262,50 \cdot a_{\overline{15}|0,0475} + 5150 \cdot (1,0475)^{-15} = 262,50 \cdot 10,557306 + 5150 \cdot 0,498528$$

$$P = 2771,29 + 2567,42 = \boxed{5338,71 \text{ TL}}$$

■

Örnek 7.3 (Erken İtfa Seçeneği Olan Tahvil). $j_2 = \%13$ kuponlu 2000 TL’lik bir tahvil 20 yıl sonra üzerindeki fiyattan ödenecektir. Bu tahvil istenirse 15 yıl sonra $\%5$ primle itfa edilebilir olduğuna göre her iki seçenekte de tahvilin $j_4 = \%16$ faiz getirebilmesi için ihraç fiyatları ne olmalıdır?

Çözüm.

Kuponlar altı ayda bir ödendiği hâlde getiri oranı üç aylık verilmiş: önce **denk altı aylık oranı** bulmalıyız.

$$\left(1 + \frac{j_2}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{j_4}{4}\right)^4 \Rightarrow (1 + i)^2 = \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^4 = (1,04)^4$$

$$1 + i = (1,04)^2 = 1,0816 \Rightarrow i = 0,0816$$

Kupon ödemesi her iki seçenekte de aynıdır:

$$r = \frac{0,13}{2} = 0,065 \Rightarrow F \cdot r = 2000 \cdot 0,065 = 130 \text{ TL}.$$

a) Vadeye kadar tutulursa. $C = F = 2000 \text{ TL}$ ve $n = 2 \cdot 20 = 40$:

$$P_1 = 130 \cdot a_{\overline{40}|0,0816} + 2000(1,0816)^{-40} = 130 \cdot 11,723231 + 2000 \cdot 0,043384$$

$$P_1 = 1524,02 + 86,77 = \boxed{1610,79 \text{ TL}}$$

b) 15 yıl sonra $\%5$ primle itfa edilirse. $C = 2000(1 + 0,05) = 2100 \text{ TL}$ ve $n = 2 \cdot 15 = 30$:

$$P_2 = 130 \cdot a_{\overline{30}|0,0816} + 2100(1,0816)^{-30} = 130 \cdot 11,089946 + 2100 \cdot 0,095060$$

$$P_2 = 1441,69 + 199,63 = \boxed{1641,32 \text{ TL}}$$

i Hangisi geçerli olur?

İki fiyat farklıdır ($P_2 > P_1$); yani erken itfa seçeneği tahvili yatırımcı için daha değerli kılar. İhraç eden taraf seçeneği kendi lehine kullanacağı için, ihtiyatlı yatırımcı **düşük** olan fiyattan, yani 1610,79 TL’den alım yapmayı tercih eder; böylece hangi senaryo gerçekleşirse gerçekleşsin istediği getiriye garanti eder.

■

7.4 Getiri Oranı ve Ortalama Metodu

Yukarıda getiri oranı verilip fiyat soruluyordu. Piyasada ise durum çoğunlukla terstir: fiyat bellidir (tahvil o fiyattan alınıp satılmaktadır) ve yatırımcı “bu fiyattan alırsam yıllık kaç kazanırım?” diye sorar. Bu, Bölüm 5.2’de anüiteler için karşılaştığımız sorunun aynısıdır: i hem üstte hem paydada geçtiği için cebirsel olarak çekilemez. Çözüm de aynıdır — önce kaba bir tahmin, sonra doğrusal yaklaşım.

Tanım 7.3 (Ortalama Metodu). Aranılan i oranı yaklaşık olarak

$$i_0 \approx \frac{\frac{n \cdot F \cdot r + C - P}{n}}{\frac{P + C}{2}}$$

değeri olarak alınır.

🔍 Formül nereden geliyor?

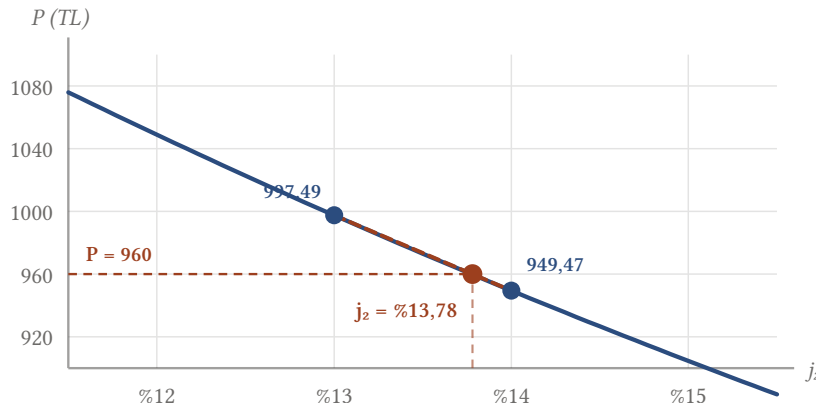
Pay ve payda ayrı ayrı okununca formül kendini açıklar:

- **Pay:** $n \cdot Fr$ vade boyunca alınacak bütün kuponların toplamı, $C - P$ ise alış fiyatı ile vade değeri arasındaki kazanç (ya da kayıp). İkisinin toplamı toplam kazançtır; n 'e bölününce **dönem başına ortalama kazanç** elde edilir.
- **Payda:** Yatırımcının parası başta P , sonda C 'dir; ikisinin ortalaması $\frac{P+C}{2}$ **ortalama bağlı sermaye**dir.

Oran = ortalama kazanç ÷ ortalama sermaye. Bu yalnızca bir tahmindir, çünkü paranın zaman değerini yok sayar.

7.5 İnterpolasyon Metodu

Ortalama metodu ile bulunan i_0 başlangıç değeri kullanılarak, aralarında %1 fark olan iki oran seçilir, bu oranlardan tahvilin fiyatı hesaplanır ve doğrusal interpolasyon yapılır.



Şekil 7.3: Tahvilin fiyatı ile getirisi ters yönlü hareket eder: oran büyüdükçe fiyat düşer. Eğri hafifçe bükümlü olduğu için, %1 aralıktaki iki nokta bir **doğru** ile birleştirilip aranan fiyata karşılık gelen oran okunur.

! Fiyat ve getiri ters yönlüdür

Getiri oranı büyüdükçe tahvilin fiyatı **düşer**; çünkü aynı nakit akışı daha yüksek oranla iskonto edilir. Bu yüzden interpolasyon tablosunda fiyat sütunu azalan, oran sütunu artan sırada yazılır. Aranan fiyat iki hesaplanan fiyatın arasında değilse aralık kaydırılmalıdır.

Örnek 7.4 (Alım-Satımdan Elde Edilen Getiri). Bir şirketin 1000 TL değerindeki bir tahvilinin kuponları $j_2 = \%12,50$ oranında faiz vermektedir. Tahvil 1.9.2003'te üzerindeki değerden ödenecektir. 1.9.1987'de bir yatırımcı bu tahvili nominal değerinin 0,96'sına satın alır ve 1.9.1995'te 1,06 katına satar. Bu alım satım işinde yatırımcının elde ettiği j_2 faiz oranını interpolasyon metodu ile bulunuz.

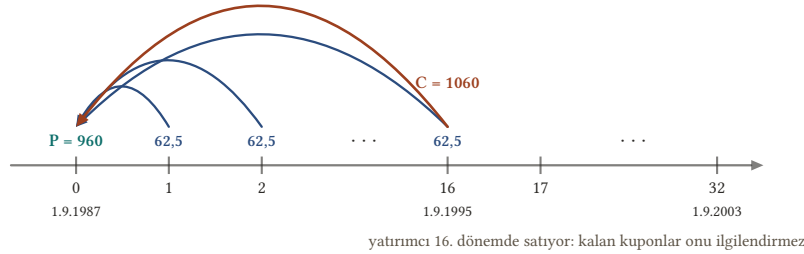
Çözüm.

Yatırımcının nakit akışını kuralım. $F = 1000$ TL ve

$$r = \frac{0,1250}{2} = 0,0625 \Rightarrow F \cdot r = 62,5 \text{ TL} .$$

Alış fiyatı $P = 1000 \cdot 0,96 = 960$ TL, satış tarihinde eline geçen tutar ise $C = 1000 \cdot 1,06 = 1060$ TL'dir. 1.9.1987 ile 1.9.1995 arası 8 yıl olduğundan

$$n = 8 \cdot 2 = 16 \text{ dönem .}$$



Şekil 7.4: Yatırımcı tahvili 1.9.1987'de 960 TL'ye alıp 1.9.1995'te 1060 TL'ye satıyor. Onun için nakit akışı 16 kupon ile satış tutarından ibarettir; bu akışı 960 TL'ye eşitleyen oran, elde ettiği getiridir.

i 2003 tarihi neden kullanılmadı?

Tahvilin vadesi 1.9.2003'tür ama **bu yatırımcı** onu 1.9.1995'te satmaktadır. Onun için nakit akışı 16 kupon ile satış tutarından ibarettir; 1995 sonrasındaki kuponlar tahvili satın alan kişiyi ilgilendirir. Bu yüzden C , vade değeri değil **satış** değeridir.

Adım 1: Başlangıç tahmini (ortalama metodu).

$$i_0 \approx \frac{\frac{16 \cdot 62,5 + 1060 - 960}{16}}{\frac{960 + 1060}{2}} = \frac{\frac{1000 + 100}{16}}{1010} = \frac{68,75}{1010} = 0,06806930$$

$$j_2 = 2 \cdot i_0 = 0,1361386 \approx 0,1361$$

Demek ki %13 ile %14 arasına bakacağız.

Adım 2: Aralığın uçlarında fiyatı hesapla.

$j_2 = 0,13$ için $i = 0,065$:

$$P = 62,5 \cdot a_{\overline{16}|0,065} + 1060(1,065)^{-16} = 62,5 \cdot 9,767764 + 1060 \cdot 0,365095 = 997,49 \text{ TL}$$

$j_2 = 0,14$ için $i = 0,07$:

$$P = 62,5 \cdot a_{\overline{16}|0,07} + 1060(1,07)^{-16} = 62,5 \cdot 9,446649 + 1060 \cdot 0,338735 = 949,47 \text{ TL}$$

Aranan 960 TL bu iki fiyatın arasındadır ($949,47 < 960 < 997,49$); aralık doğrudur.

Adım 3: İnterpolasyon.

P	j_2
997,49	0,13
960	j_2
949,47	0,14

$$\frac{j_2 - 0,13}{0,01} = \frac{960 - 997,49}{949,47 - 997,49} = \frac{-37,49}{-48,02} = 0,780716$$

$$j_2 = 0,13 + 0,01 \cdot 0,780716 = 0,137807 \Rightarrow \boxed{j_2 \approx \%13,78}$$

■

7.6 Alıştırmalar

Alıştırma 7.1 (Kuponsuz Tahvilin Fiyatı). 2000 TL'lik bir tahvil, 5 yıl sonunda üzerindeki değerinden itfa edilecektir. Bu tahvilin $j_2 = \%12$ faiz getirisi için ihraç fiyatı ne olmalıdır?

Çözüm.

Soruda bir kupon oranı verilmediğine göre tahvil **kuponsuzdur**: $F \cdot r = 0$ 'dır. Vade değeri nominale eşittir, $C = F = 2000$ TL.

$$i = \frac{0,12}{2} = 0,06, \quad n = 5 \cdot 2 = 10.$$

Fiyat formülünde kupon terimi düştüğü için geriye tek ödemenin bugünkü değeri kalır:

$$P = C(1 + i)^{-n} = 2000(1,06)^{-10} = 2000 \cdot 0,558395 = \boxed{1116,79 \text{ TL}}$$

Kuponsuz tahvil daima **iskontolu** satılır ($P < F$); yatırımcının tek kazancı alış fiyatı ile vade değeri arasındaki farktır.

■

Alıştırma 7.2 (Primli İtfa Edilecek Tahvilin Fiyatı). $j_2 = \%16$ kuponlu 1000 TL'lik bir tahvil 10 yıl sonra $\%5$ primle itfa edilebilir olduğuna göre tahvilin $j_2 = \%10$ faiz getirebilmesi için ihraç fiyatı ne olmalıdır?

Çözüm.

$F = 1000$ TL ve

$$r = \frac{0,16}{2} = 0,08 \Rightarrow F \cdot r = 80 \text{ TL},$$

$$C = 1000(1 + 0,05) = 1050 \text{ TL}, \quad i = \frac{0,10}{2} = 0,05, \quad n = 2 \cdot 10 = 20.$$

$$P = 80 \cdot a_{\overline{20}|0,05} + 1050(1,05)^{-20} = 80 \cdot 12,462210 + 1050 \cdot 0,376889$$

$$P = 996,98 + 395,73 = \boxed{1392,71 \text{ TL}}$$

Tahvil hem yüksek kuponlu ($\%16$ karşısında $\%10$ getiri beklentisi) hem de primli itfa edildiği için nominalin çok üzerinde bir fiyata satılmaktadır.

■

Alıştırma 7.3 (Başabaş Alınan Tahvilin Getirisi). $j_2 = \%10$ kuponlu 1500 TL'lik başabaş bir tahvil, 3 yıl sonunda 1,2 katına itfa edilecektir. Buna göre yatırımcının elde ettiği j_2 faiz oranını interpolasyon metodu ile bulunuz.

Çözüm.

“Başabaş” alındığına göre $P = F = 1500$ TL'dir. Ayrıca

$$r = \frac{0,10}{2} = 0,05 \Rightarrow F \cdot r = 75 \text{ TL}, \quad C = 1500 \cdot 1,2 = 1800 \text{ TL}, \quad n = 3 \cdot 2 = 6.$$

Adım 1: Ortalama metodu.

$$i_0 \approx \frac{\frac{6 \cdot 75 + 1800 - 1500}{6}}{\frac{1500 + 1800}{2}} = \frac{\frac{450 + 300}{6}}{1650} = \frac{125}{1650} = 0,075758$$

$$j_2 = 2 \cdot i_0 = 0,151515 \approx \%15,15$$

Aranan oran %15 ile %16 arasındadır.

Adım 2: Uçlardaki fiyatlar.

$j_2 = 0,15$ için $i = 0,075$:

$$P = 75 \cdot a_{\overline{6}|0,075} + 1800(1,075)^{-6} = 75 \cdot 4,693846 + 1800 \cdot 0,647962 = 352,04 + 1166,33 = 1518,37 \text{ TL}$$

$j_2 = 0,16$ için $i = 0,08$:

$$P = 75 \cdot a_{\overline{6}|0,08} + 1800(1,08)^{-6} = 75 \cdot 4,622880 + 1800 \cdot 0,630170 = 346,72 + 1134,31 = 1481,02 \text{ TL}$$

Aranan 1500 TL bu ikisinin arasındadır.

Adım 3: İnterpolasyon.

P	j_2
1518,37	0,15
1500	j_2
1481,02	0,16

$$\frac{j_2 - 0,15}{0,01} = \frac{1500 - 1518,37}{1481,02 - 1518,37} = \frac{-18,37}{-37,35} = 0,491834$$

$$j_2 = 0,15 + 0,01 \cdot 0,491834 = 0,154918 \Rightarrow \boxed{j_2 \approx \%15,49}$$

Getirinin kupon oranından (%10) yüksek çıkması, vadede nominalın 1,2 katının ödenmesindendir.

■

8. Hayat Anüiteleri ve Hayat Sigortaları

Şimdiye kadarki bütün ödemeler **kesindi**: taksit tarihi geldiğinde ödeme yapılırdı. Sigortacılıkta ise ödemenin yapılıp yapılmayacağı bir olaya bağlıdır — kişinin o tarihte hayatta olup olmamasına. Böyle ödemelerin değerini bulurken paranın zaman değerine bir çarpan daha eklenir: **olasılık**.

Bölüm üç adımda ilerler. Önce o olasılıkların nereden geldiğini, yani hayat tablosunu tanıtır en basit ürünü, “yaşarsan alırsın” biçimindeki tek ödemeyi fiyatlıyoruz. Sonra bunu bir diziye çevirip **hayat anüitelerine** geçiyoruz; emekli maaşının matematiksel modeli budur. En sonda da tersini, yani “ölürsen varislerin alır” diyen **hayat sigortalarını** ele alıyoruz.

8.1 Hayat Tabloları

Tanım 8.1 (Hayat Anüitesi). Hayat anüiteleri, toplu veya belirli süreler içinde yapılan primlere karşılık, sigortalının yaşaması hâlinde hemen veya belli bir süre sonra başlayan; sigortalı, sigorta ettiren veya belirli şartlar dâhilinde lehtarlarına ömür boyu veya belirli süreler için yapılan düzenli ödemelerdir.

Hesaplamalar için hayat (ölüm) tablosuna ihtiyaç vardır.

Tanım 8.2 (Hayat Tablosu ve Notasyonu). Büyük bir popülasyondaki gözlenen ölüm sayılarının tutulduğu kayıtlara **hayat tabloları** denir. Notasyon şöyledir:

Simge	Anlamı
x	yaş
ℓ_x	x yaşına erişenlerin sayısı
d_x	x yaşında ölenlerin sayısı (yani x ile $x + 1$ arasında ölenlerin sayısı)
q_x	x yaşındaki birinin 1 yıl içinde ölme olasılığı
${}_nq_x$	x yaşındaki birinin n yıl içinde ölme olasılığı
p_x	x yaşındaki birinin en az 1 yıl yaşama olasılığı
${}_np_x$	x yaşındaki birinin en az n yıl yaşama olasılığı

⚠ Uyarı

Dersimizde kişilerin 100 yaşına erişemedikleri kabul edilmektedir; yani $\ell_{100} = 0$ 'dır. Bu kabul, ileride karşımıza çıkacak “sonsuz” toplamaların aslında **sonlu** olmasını sağlar.

8.2 Gerekli Formüller

Önerme 8.1 (Hayat Tablosu Bağlılıkları).

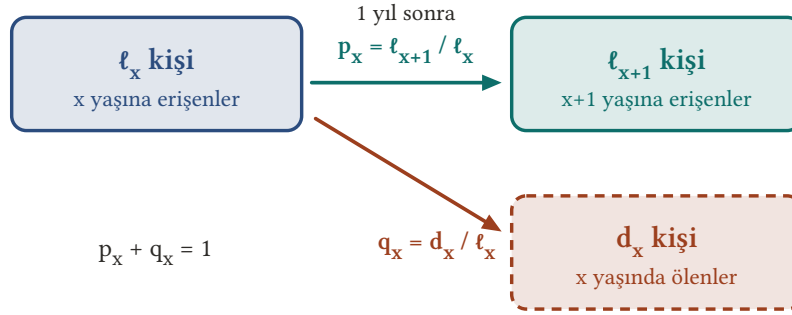
$$d_x = \ell_x \cdot q_x, \quad \ell_{x+1} = \ell_x - d_x \Rightarrow d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

$$p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}, \quad {}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}, \quad {}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

İspat.

Bütün formüller tek bir fikirden çıkar: **olasılık = uygun durum sayısı / tüm durum sayısı.**



Şekil 8.1: Hayat tablosu bir **kuşağı** izler: x yaşına erişen ℓ_x kişiden d_x tanesi o yıl içinde ölür, kalan ℓ_{x+1} kişi bir sonraki yaşa geçer. Bütün olasılıklar bu iki sayının ℓ_x 'e oranıdır.

x yaşına erişen ℓ_x kişiyi düşünelim. Bunlardan ℓ_{x+n} tanesi $x+n$ yaşına da erişir; dolayısıyla rastgele seçilen birinin n yıl daha yaşama olasılığı $\frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$ 'dir. $n=1$ alınırsa p_x elde edilir.

x yaşındaki biri ya en az n yıl yaşar ya da bu süre içinde ölür; iki olay birbirinin tümleyeni olduğundan olasılıkları toplamı 1'dir. Buradan ${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$ çıkar. Son olarak x ile $x+1$ arasında ölenlerin sayısı, x yaşına erişenlerden $x+1$ yaşına erişmeyenler kadardır: $d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$; olasılığa çevrilirse $q_x = \frac{d_x}{\ell_x}$, yani $d_x = \ell_x q_x$ bulunur.

■

🔗 Bileşik olasılıklarda sadeleşme

“ x yaşındaki biri $x+n$ ile $x+m$ yaşları arasında ölür” tipindeki olasılıklar iki çarpanın çarpımıdır: önce $x+n$ yaşına erişmek, sonra o yaştan itibaren $m-n$ yıl içinde ölmek:

$${}_n p_x \cdot {}_{m-n} q_{x+n} = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+m}}{\ell_{x+n}} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+m}}{\ell_x}$$

Görüldüğü gibi ara terim sadeleşir; sonuçta yalnızca **iki uçtaki** sayılar kalır. Bu sadeleşmeyi hatırlamak, uzun hesaplardan kurtarır.

8.2.1 Bu bölümde kullanılan tablo değerleri

Tam hayat tablosu 0 yaşından 99 yaşına kadar yüz satırdır. Aşağıda yalnızca buradaki örnek ve alıştırmalarda geçen ℓ_x değerleri verilmiştir; kadınlar ve erkekler için ayrı tablolar kullanıldığına dikkat edin.

Kadınlar

x	20	21	22	45	47	50	60	65	70	71	72
ℓ_x	98208219810509980001294092449340119921913086038018134022744881672841237107629										

Erkekler

x	30	40	50	65	70	75	76	95	96	97	98	99	100
ℓ_x	9579998	8377228	966618	329746	274160	898904	584446	146721	98309	60504	31450	10757	0

Örnek 8.1 (Yaşama ve Ölme Olasılıkları). 20 yaşındaki bir kadının **a)** 45 yaşına erişebilmesinin, **b)** 60 yaşından önce ölmesinin, **c)** 50 ile 65 yaş arasında ölmesinin, **d)** 70 yaşında ölmesinin olasılıklarını bulunuz.

Çözüm.

a) $45 - 20 = 25$ yıl yaşama olasılığı:

$${}_{25}p_{20} = \frac{\ell_{45}}{\ell_{20}} = \frac{9409244}{9820821} = \boxed{0,958091385}$$

b) $60 - 20 = 40$ yıl içinde ölme olasılığı:

$${}_{40}q_{20} = \frac{\ell_{20} - \ell_{60}}{\ell_{20}} = \frac{9820821 - 8603801}{9820821} = \frac{1217020}{9820821} = \boxed{0,123922429}$$

c) Önce 50 yaşına erişecek (30 yıl), sonra 15 yıl içinde ölecek:

$${}_{30}p_{20} \cdot {}_{15}q_{50} = \frac{\ell_{50}}{\ell_{20}} \cdot \frac{\ell_{50} - \ell_{65}}{\ell_{50}} = \frac{\ell_{50} - \ell_{65}}{\ell_{20}} = \frac{9219130 - 8134022}{9820821} = \boxed{0,110490558}$$

d) Önce 70 yaşına erişecek (50 yıl), sonra o yıl içinde ölecek:

$${}_{50}p_{20} \cdot q_{70} = \frac{\ell_{70}}{\ell_{20}} \cdot \frac{\ell_{70} - \ell_{71}}{\ell_{70}} = \frac{d_{70}}{\ell_{20}} = \frac{164693}{9820821} = \boxed{0,016769779}$$

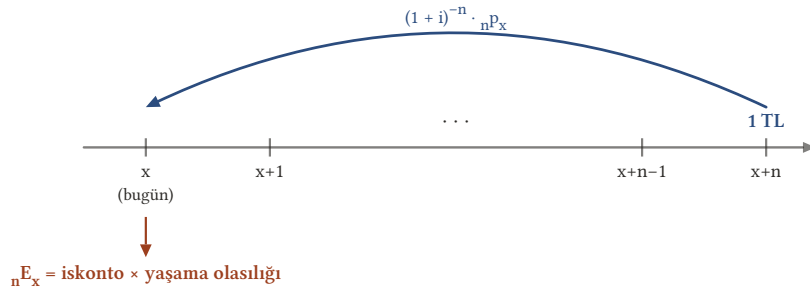
■

8.3 Hayatta Olma Hâlinde Alınacak Tek Ödeme

Tanım 8.3 (Net Tek Prim). x yaşındaki birine n yıl sonra **eğer hâlâ hayatta ise** yapılacak olan 1 TL'lik tek ödemenin iskontolu beklenen değeri (= **net tek primi**)

$$1 \cdot {}_nE_x = 1 \cdot \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} (1+i)^{-n} = 1 \cdot (1+i)^{-n} \cdot {}_np_x$$

ile hesaplanır; burada $i = \frac{j_1}{1}$, dir.



Şekil 8.2: x yaşındaki birine, n yıl sonra **hayatta ise** ödenecek 1 TL'nin bugünkü beklenen değeri iki çarpandan oluşur: parayı geri taşıyan $(1+i)^{-n}$ ve ödemenin gerçekleşme olasılığı olan ${}_np_x$.

Formülü ezberlemeye gerek yok; iki çarpandan oluşuyor:

- $(1+i)^{-n}$ – parayı n yıl geri taşır (bildiğimiz iskonto),
- ${}_np_x$ – ödemenin gerçekleşme olasılığı.

Ödeme kesin olmadığı için beklenen değeri, kesin bir ödemenin bugünkü değerinden **küçüktür**.

Örnek 8.2 (Emeklilikte Ödenecek Tutarın Bugünkü Değeri). Şu an 30 yaşında olan Ahmet Bey’e eğer 65 yaşına erişirse ödenecek olan 50000 TL’nin iskontolu beklenen değerini $j_1 = \%10$ ’a göre hesaplayınız.

Çözüm.

$x = 30, n = 35, i = 0,10$ ve erkek tablosu kullanılır:

$$50000 \cdot {}_{35}E_{30} = 50000 \cdot \frac{\ell_{65}}{\ell_{30}} (1,10)^{-35} = 50000 \cdot \frac{7329740}{9579998} \cdot (1,10)^{-35}$$

$$= 50000 \cdot 0,765109 \cdot 0,035584 = \boxed{1361,29 \text{ TL}}$$

Ödeme kesin olsaydı bugünkü değeri $50000 \cdot 0,035584 = 1779,20$ TL olurdu; aradaki fark, 65 yaşına erişememe riskinin bedelidir.

■

Örnek 8.3 (Mezuniyet Yıl Dönümünde Beklenen Kişi Sayısı). 1993 yılında bir kız kolejinden mezun olanlardan 21 yaşında olanlar 200 kişi, 22 yaşında olanlar 300 kişi ise bu mezunların 50. mezuniyet yıl dönümünde kaç tanesinin hayatta olması beklenir?

Çözüm.

Her yaş grubu için 50 yıl yaşama olasılığını bulup kişi sayısı ile çarpalım (kadın tablosu):

$${}_{50}p_{21} = \frac{\ell_{71}}{\ell_{21}} = \frac{7284123}{9810509} = 0,742481659$$

$${}_{50}p_{22} = \frac{\ell_{72}}{\ell_{22}} = \frac{7107629}{9800012} = 0,725267377$$

$$200 \cdot 0,742481659 = 148,4963318$$

$$300 \cdot 0,725267377 = 217,5802131$$

$$148,4963318 + 217,5802131 = 366,0765449 \Rightarrow \boxed{366 \text{ kişi}}$$

■

Örnek 8.4 (Şarta Bağlı Ödeme ile Banka Mevduatının Karşılaştırılması). Özge Hanım’a 47. doğum gününde 100000 TL’lik miras kalır. Bu parayla, 60 yaşına erişmesi hâlinde $j_4 = \%8$ oranından getirisi olacak bir anlaşma yapar.

a) Eğer yaşarsa 60 yaşında ne kadar alır?

b) Bu anlaşmayı yapmayıp parayı $j_4 = \%8$ ’den bir bankaya yatırsaydı 60 yaşında ne kadar alırdı?

Çözüm.

Hayat tablosu yıllık çalıştığı için önce j_4 ’e **denk yıllık** oranı bulmalıyız:

$$(1+i)^1 = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 = (1,02)^4 \Rightarrow i = 0,08243216$$

Süre $60 - 47 = 13$ yıldır ve kadın tablosu kullanılır.

a) Bugün ödenen 100000 TL, 13 yıl sonra hayatta olması hâlinde alınacak X tutarının **beklenen** bugünkü değerine eşittir:

$$100000 = X \cdot {}_{13}E_{47} = X \cdot \frac{\ell_{60}}{\ell_{47}} (1 + 0,08243216)^{-13}$$

$$100000 = X \cdot \frac{8603801}{9340119} \cdot (1,08243216)^{-13} = X \cdot 0,921166 \cdot 0,357100$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 303998,18 \text{ TL}}$$

b) Bankada ölüm-kalım şartı yoktur; para her hâlükârda birikir:

$$X = 100000(1,08243216)^{13} = \boxed{280032,82 \text{ TL}}$$

i Fark neden bu kadar büyük?

Anlaşma 23965,36 TL fazla ödüyor; çünkü Özge Hanım 60 yaşına erişemezse hiçbir şey almayacak. Sigorta şirketi, ödemeyeceği durumların karşılığını hayatta kalanlara dağıtır. Bu farkın oranı tam olarak $\frac{1}{{}_{13}p_{47}} = \frac{1}{0,921166} = 1,0856$ 'dır, yani %8,56.

■

8.4 Ömür Boyu Hayat Anüitesi

Yukarıda tek bir şartlı ödemeyi fiyatladık. Şimdi bunu bir **diziye** çeviriyoruz: kişi yaşadığı sürece her yıl ödenen tutarlar. Emekli maaşının matematiksel modeli budur.

Formüller ilk bakışta korkutucu görünür, çünkü içlerinde sonsuza giden toplam sembolü vardır. Ama iki gözlem her şeyi basitleştirir:

1. Toplamdaki her terim, tanıdık iki çarpanın çarpımıdır: **iskonto** $\times$ **yaşama olasılığı**.
2. Kimse 100 yaşına erişemediği için ($\ell_{100} = 0$) toplam aslında **sonludur**; belli bir terimden sonra hepsi sıfırdır.

Bu yüzden her formülü önce toplam sembolüyle yazacak, hemen ardından **terim terim açacağız**.

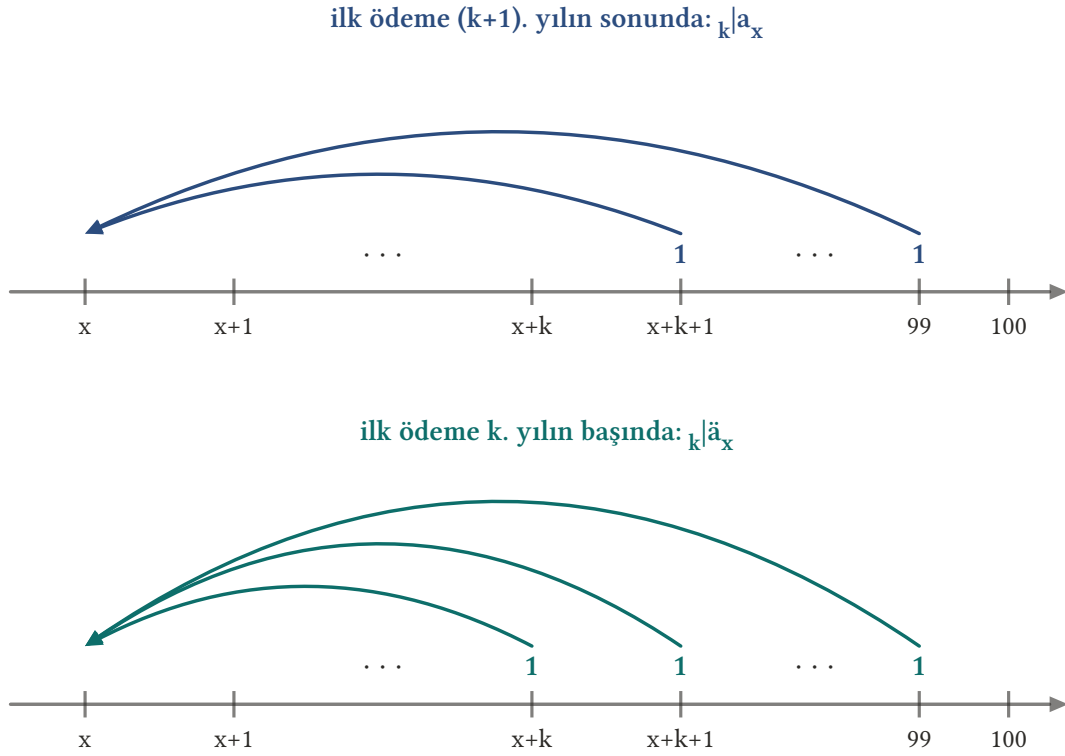
Tanım 8.4 (Ömür Boyu Ertelenmiş Hayat Anüitesi). x yaşındaki birisine k yıl sonra başlamak üzere ömür boyu (= yaşadığı sürece) her yıl ödenecek 1 TL'lik ödemelerin beklenen iskontolu değeri (= net tek primi):

i) İlk ödeme k yıl sonra yıl sonunda yapılırsa:

$$1 \cdot {}_k|a_x = 1 \cdot {}_{k+1}E_x + 1 \cdot {}_{k+2}E_x + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} (1+i)^{-(k+t)} \frac{\ell_{x+k+t}}{\ell_x}$$

ii) İlk ödeme k yıl sonra yıl başında yapılırsa:

$$1 \cdot {}_k|\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} (1+i)^{-(k+t)} \frac{\ell_{x+k+t}}{\ell_x}$$



Şekil 8.3: Ömür boyu ertelenmiş hayat anüitesinin iki biçimi. Aradaki tek fark k . yılda bir ödeme olup olmadığıdır: $\ddot{a}$ biçiminde toplam $t = 0$ 'dan, a biçiminde $t = 1$ 'den başlar. Ödemeler 100 yaşından önce biter, çünkü kimsenin 100 yaşına erişmediği kabul edilmektedir.

8.4.1 Toplamı açalım

İki formül arasındaki tek fark, toplamın $t = 1$ 'den mi yoksa $t = 0$ 'dan mı başladığıdır. Yıl **başı** biçiminde ($\ddot{a}$) k . yılda da bir ödeme vardır; yıl **sonu** biçiminde (a) ilk ödeme $(k + 1)$. yıldadır. $\ddot{a}$ biçimini açık yazalım:

$${}_k|\ddot{a}_x = \underbrace{(1+i)^{-k} \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x}}_{t=0} + \underbrace{(1+i)^{-(k+1)} \frac{\ell_{x+k+1}}{\ell_x}}_{t=1} + \underbrace{(1+i)^{-(k+2)} \frac{\ell_{x+k+2}}{\ell_x}}_{t=2} + \dots$$

Her terim tek bir yıla aittir ve iki çarpandan oluşur:

$$\underbrace{(1+i)^{-(k+t)}}_{\text{o yıla ait iskonto}} \times \underbrace{\frac{\ell_{x+k+t}}{\ell_x}}_{\text{o yılda hayatta olma olasılığı}}$$

! Toplam nerede biter?

Payda geçen ℓ_{x+k+t} , $x + k + t$ yaşına erişenlerin sayısıdır. $\ell_{100} = 0$ olduğuna göre $x + k + t \geq 100$ olan **bütün terimler sıfırdır**. Dolayısıyla toplam, $x + k + t = 99$ olan terimde biter: yazılacak terim sayısı

$$99 - (x + k) + 1 \quad \text{tanedir (yıl başı biçiminde).}$$

Sonsuz sembolü, formülü genel yazabilmek içindir; hesapta hiçbir zaman sonsuz terim toplanmaz.

Örnek 8.5 (Doksan Beş Yaşından Sonra Ömür Boyu Anüite). 70 yaşındaki bir erkeğe 95. yaşından başlamak üzere ömür boyu her yıl ödenecek 1000 TL'lik hayat anüitesinin $j_1 = \%8$ 'den net tek primini bulunuz.

Çözüm.

$x = 70$, ilk ödeme 95 yaşında yapılacağından $k = 95 - 70 = 25$; ödemeler yıl **başında** yapıldığı için $\ddot{a}$ biçimi kullanılır ve $i = 0,08$ 'dir.

$$1000 \cdot {}_{25}\ddot{a}_{70} = 1000 \sum_{t=0}^{\infty} (1,08)^{-(25+t)} \frac{\ell_{95+t}}{\ell_{70}}$$

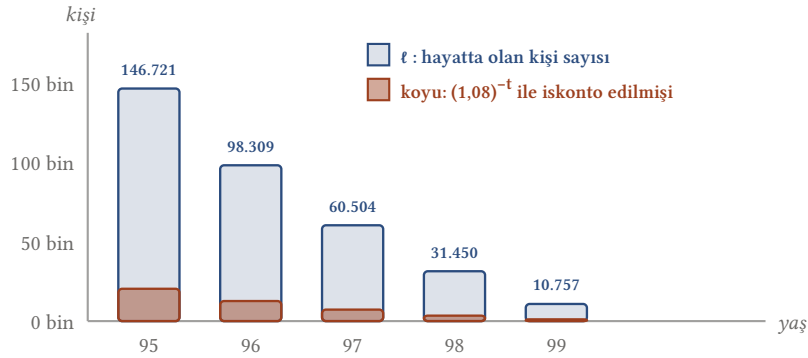
Toplam kaç terim? $70 + 25 + t \leq 99$ olmalı, yani $t \leq 4$. Demek ki yalnızca **beş** terim vardır: 95, 96, 97, 98, 99 yaşları.

$$= \frac{1000}{\ell_{70}} \left[(1,08)^{-25} \ell_{95} + (1,08)^{-26} \ell_{96} + (1,08)^{-27} \ell_{97} + (1,08)^{-28} \ell_{98} + (1,08)^{-29} \ell_{99} \right]$$

Değerleri yerine koyalım ($\ell_{70} = 6274160$, erkek tablosu):

t	Yaş	ℓ_{95+t}	$(1,08)^{-(25+t)}$	Çarpım
0	95	146721	0,14601790	21423,8930
1	96	98309	0,13520176	13291,5502
2	97	60504	0,12518682	7574,3033
3	98	31450	0,11591372	3645,4865
4	99	10757	0,10732752	1154,5221
Toplam				47089,75512

$$1000 \cdot {}_{25}\ddot{a}_{70} = \frac{1000}{6274160} \cdot 47089,75512 = \boxed{7,51 \text{ TL}}$$



Şekil 8.4: Ömür boyu anüitenin sonsuz toplamı aslında beş terimden ibarettir: 95, 96, 97, 98 ve 99 yaşlarında hayatta olan kişi sayıları. Koyu kısımlar aynı sayıların 25–29 yıl geri iskonto edilmiş hâlidir — uzaktaki ödemelerin katkısı bu yüzden çok küçüktür.

i Neden bu kadar küçük?

Sonuç şaşırtıcı derecede düşüktür: yılda 1000 TL ödeyecek bir anüite için bugün yalnızca 7,51 TL isteniyor. İki sebep birlikte çalışır: 70 yaşındaki bir erkeğin 95 yaşına erişme olasılığı $\frac{146721}{6274160} = 0,0234$, yani yaklaşık %2,3'tür; üstelik ödemeler 25-29 yıl uzakta olduğu için %8'den iskonto edilince yedide birine iner.

■

8.5 Geçici Hayat Anüitesi

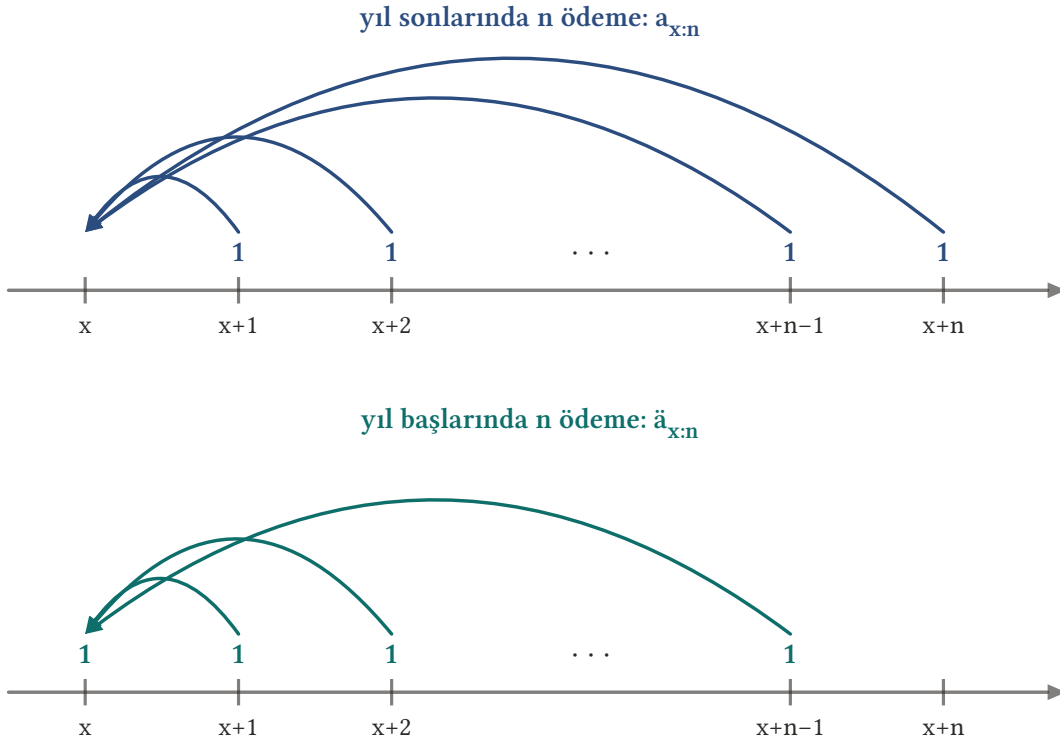
Ömür boyu değil de **belli bir süre** ödeme yapılıyorsa anüite geçicidir.

Tanım 8.5 (Geçici Hayat Anüitesi). i) x yaşındaki birine n yıl boyunca **her yılın sonunda** ödenecek 1 TL'lik ödemelerin net tek primi:

$$1 \cdot a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n (1+i)^{-t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

ii) x yaşındaki birine n yıl boyunca **her yılın başında** ödenecek 1 TL'lik ödemelerin net tek primi:

$$1 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$



Şekil 8.5: Geçici hayat anüitesinde ödemeler n yıllı sınırlıdır. Yıl sonu biçiminde ilk ödeme $x+1$ yaşında, yıl başı biçiminde ise hemen x yaşında yapılır; ikincisinde ilk ödeme kesin olduğu için ne iskonto edilir ne de olasılıkla çarpılır.

Bu kez toplamın üst sınırı zaten sonludur; ayrıca bir kesme yapmaya gerek yoktur. İki biçimi açık yazalım:

$$a_{x:\overline{n}|} = (1+i)^{-1} \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} + (1+i)^{-2} \frac{\ell_{x+2}}{\ell_x} + \dots + (1+i)^{-n} \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \underbrace{1}_{t=0} + (1+i)^{-1} \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} \frac{\ell_{x+n-1}}{\ell_x}$$

❓ İlk terim neden 1?

Yıl başı biçiminde $t = 0$ terimi $(1+i)^0 \frac{\ell_x}{\ell_x} = 1$ 'dir. Mantıklıdır: bugün yapılan ödeme ne iskonto edilir ne de olasılıkla çarpılır – kişinin bugün hayatta olduğunu zaten biliyoruz.

Örnek 8.6 (Beş Yıllık Geçici Hayat Anüitesi). 25 yaşındaki bir kadına 5 yıl için yapılan, yılda 1000 TL ödenecek geçici hayat anüitesinin $j_1 = \%9$ 'dan net tek primini bulunuz.

Çözüm.

$x = 25$, $n = 5$, $i = 0,09$ ve ödemeler yıl sonunda yapılıyor:

$$1000 \cdot a_{25:\overline{5}|} = 1000 \sum_{t=1}^5 (1,09)^{-t} \frac{\ell_{25+t}}{\ell_{25}}$$

Toplamı açalım:

$$= \frac{1000}{\ell_{25}} \left[(1,09)^{-1} \ell_{26} + (1,09)^{-2} \ell_{27} + (1,09)^{-3} \ell_{28} + (1,09)^{-4} \ell_{29} + (1,09)^{-5} \ell_{30} \right]$$

Beş satırın her biri, o yıl hayatta olma olasılığının iskonto edilmiş hâlidir. Kadın hayat tablosundan $\ell_{25}, \ell_{26}, \dots, \ell_{30}$ değerleri okunup yerine konduğunda

$$1000 \cdot a_{25:\overline{5}|} = \boxed{3876,47 \text{ TL}}$$

bulunur.

⚠ Tablo değerleri

Bu hesapta gereken $\ell_{25}-\ell_{30}$ (kadın) satırları bu bölümdeki kısmi hayat tablosunda yer almadığından ara toplam sayısal olarak açılmamıştır. Tam hayat tablosundan bu altı değeri okuyup yukarıdaki beş terimi toplamak, yazılan sonucu verir.

i Sağlama: ölüm riski yok sayılsaydı

Genç yaşlarda ölüm olasılığı çok küçüktür. Eğer bütün olasılıkları 1 kabul etseydik sonuç sıradan bir anüite olurdu:

$$1000 \cdot a_{\overline{5}|} \mid 0,09 = 1000 \cdot 3,889651 = 3889,65 \text{ TL} .$$

Bulunan 3876,47 TL bunun yalnızca %0,34 altındadır; aradaki küçük fark, 25–30 yaş arasındaki ölüm riskinin bedelidir.

8.6 Hayat Sigortası

Hayat anüitesi “yaşırsan alırsın” diyordu; hayat sigortası tam tersini söyler: **ölürsen varislerin alır**. Matematiği aynı kalıptadır, yalnızca olasılık çarpanı değişir — yaşama olasılığı p ’nin yerini ölme olasılığı q alır.

Tanım 8.6 (Hayat Sigortası). Hayat sigortası, sigorta şirketinin belli bir prim karşılığında sigortalının sözleşmede belirtilen süre içinde ve sözleşmede belirtilen hâllerde yaşam kaybı veya sözleşmede belirtilen süreden daha uzun hayatta kalması hâlinde size veya belirlediğiniz kişilere sigorta bedelini ödediği sigorta türüdür.

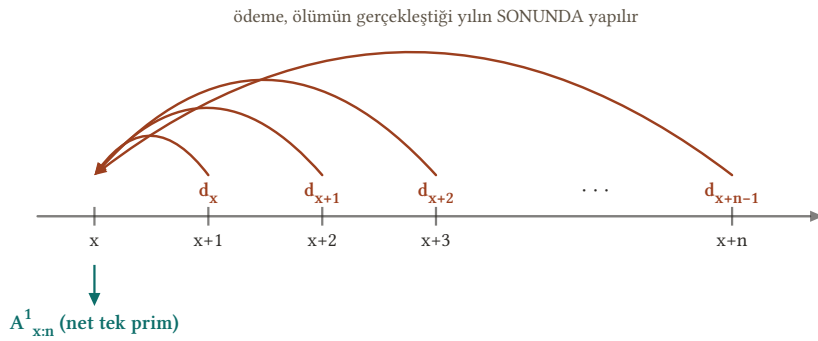
Hayat sigortaları başınıza beklenmedik bir olay gelmesi durumunda, sizi ve sevdiklerinizi güvenceye almasının yanı sıra tasarruf yapmanıza da olanak sağlar.

Tanım 8.7 (Net Tek Prim Formülleri). n yıllık hayat sigortaları. x yaşındaki birinin n yıl içinde ölmesi hâlinde varislerine ödenecek 1 TL’lik ödemenin net tek primi:

$$1 \cdot A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-(t+1)} \frac{d_{x+t}}{\ell_x}$$

Ömür boyu hayat sigortaları. x yaşındaki birinin ölmesi durumunda varislerine ödenecek 1 TL’lik ödemenin net tek primi:

$$1 \cdot A_{x:\infty}^1 = \sum_{t=0}^{\infty} (1+i)^{-(t+1)} \frac{d_{x+t}}{\ell_x}$$



Şekil 8.6: Hayat sigortasında ödeme, **ölüm hâlinde** ve ölümün gerçekleştiği yılın sonunda yapılır. Bu yüzden her yılın katkısı, o yıl ölenlerin oranı d_{x+t}/ℓ_x ile $(1+i)^{-(t+1)}$ çarpanının çarpımıdır.

8.6.1 Toplamı açalım

Formüldeki her terim yine iki çarpandan oluşur:

$$\underbrace{(1+i)^{-(t+1)}}_{\text{ödemenin iskontosu}} \times \underbrace{\frac{d_{x+t}}{\ell_x}}_{\text{o yıl ölme olasılığı}}$$

n yıllık sigortayı açık yazalım:

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \underbrace{(1+i)^{-1} \frac{d_x}{\ell_x}}_{\text{1. yıl ölürse}} + \underbrace{(1+i)^{-2} \frac{d_{x+1}}{\ell_x}}_{\text{2. yıl ölürse}} + \dots + \underbrace{(1+i)^{-n} \frac{d_{x+n-1}}{\ell_x}}_{\text{n. yıl ölürse}}$$

! Üsteki (t+1) neden?

Ödeme, ölümün gerçekleştiği **yılın sonunda** yapılır. t . yıl içinde (yani $x + t$ yaşındayken) ölen biri için para $t + 1$ yıl sonra ödenir; bu yüzden iskonto çarpanı $(1 + i)^{-(t+1)}$ 'dir. Hayat anüitelerinde ise ödeme yılın başında ya da sonunda yapıldığı için t ya da $t + 1$ olabiliyordu.

💡 Ömür boyu sigorta da sonlu bir toplamdır

Üst sınır ∞ yazılsa da, $x + t \geq 100$ olduğunda $d_{x+t} = 0$ 'dır (kimse 100 yaşına erişemez). Dolayısıyla toplamda en fazla $100 - x$ terim bulunur. Örneğin 95 yaşındaki biri için yalnızca **beş** terim vardır: 95, 96, 97, 98, 99 yaşları.

Örnek 8.7 (Doksan Beş Yaşındaki Biri İçin Ömür Boyu Sigorta). 95 yaşındaki bir erkek için 50000 TL'lik ömür boyu hayat sigortasının $j_1 = \%8$ 'den net tek primini bulunuz.

Çözüm.

$x = 95$, $i = 0,08$ ve $\ell_{95} = 146721$ (erkek tablosu).

$$50000 \cdot A_{95:\infty}^1 = 50000 \sum_{t=0}^{\infty} (1,08)^{-(t+1)} \frac{d_{95+t}}{\ell_{95}}$$

Önce ölüm sayılarını bulalım. $d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$ formülüyle:

Yaş	ℓ_x	$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$
95	146721	$146721 - 98309 = 48412$
96	98309	$98309 - 60504 = 37805$
97	60504	$60504 - 31450 = 29054$
98	31450	$31450 - 10757 = 20693$
99	10757	$10757 - 0 = 10757$

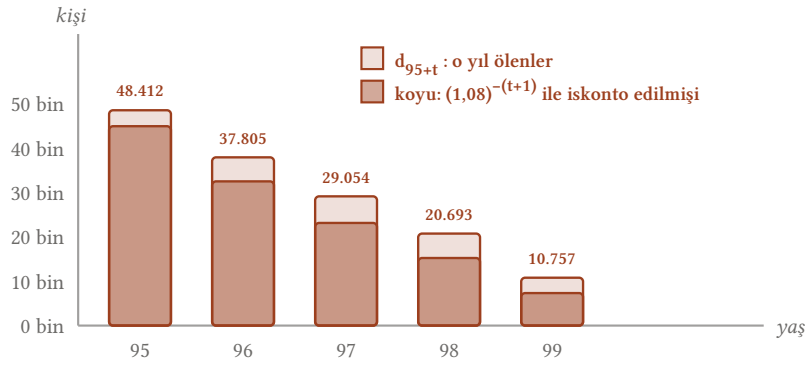
$\ell_{100} = 0$ olduğundan 99 yaşındakilerin **tamamı** o yıl ölür ve toplam beş terimde biter.

Toplamı açalım.

$$= \frac{50000}{146721} \left[(1,08)^{-1}d_{95} + (1,08)^{-2}d_{96} + (1,08)^{-3}d_{97} + (1,08)^{-4}d_{98} + (1,08)^{-5}d_{99} \right]$$

t	Yaş	d_{95+t}	$(1,08)^{-(t+1)}$	Çarpım
0	95	48412	0,92592593	44825,9259
1	96	37805	0,85733882	32411,6941
2	97	29054	0,79383224	23064,0019
3	98	20693	0,73502985	15209,9727
4	99	10757	0,68058320	7321,0335
Toplam				122832,6282

$$50000 \cdot A_{95:\infty}^1 = \frac{50000 \cdot 122832,6282}{146721} = 50000 \cdot 0,837185 = \boxed{41859,25 \text{ TL}}$$



Şekil 8.7: 95 yaşındaki bir erkeğin ömür boyu sigortasında toplam beş terim vardır, çünkü 100 yaşına kimse erişmez. Ölüm sayıları önce iskonto edilir (koyu sütunlar), sonra $\ell_{95} = 146.721$ 'e bölünür: sonuç, 1 TL'lik teminatın net tek primidir.

i Prim neden teminata bu kadar yakın?

50000 TL'lik teminat için istenen prim 41859,25 TL, yani teminatın %83,7'si. Sebep açık: 95 yaşındaki biri **kesinlikle** en geç 5 yıl içinde ölecektir, yani ödeme neredeyse kesindir. Geriye yalnızca ödemenin 1-5 yıl geciktiği için yapılan iskonto kalır.

■

8.7 Alıştırmalar

Alıştırma 8.1 (Kırk Yaşındaki Bir Erkeğin Olasılıkları). 40 yaşındaki bir erkeğin **a)** 65 yaşına erişebilmesinin, **b)** 50 yaşından önce ölmesinin, **c)** 65 ile 75 yaş arasında ölmesinin, **d)** 75 yaşında ölmesinin olasılıklarını bulunuz.

Çözüm.

Erkek tablosundan gereken değerler: $\ell_{40} = 9377225$, $\ell_{50} = 8966618$, $\ell_{65} = 7329740$, $\ell_{75} = 4898907$, $\ell_{76} = 4584446$.

a) 65 – 40 = 25 yıl yaşama olasılığı:

$${}_{25}p_{40} = \frac{\ell_{65}}{\ell_{40}} = \frac{7329740}{9377225} = \boxed{0,78165342}$$

b) 50 – 40 = 10 yıl içinde ölme olasılığı:

$${}_{10}q_{40} = \frac{\ell_{40} - \ell_{50}}{\ell_{40}} = \frac{9377225 - 8966618}{9377225} = \frac{410607}{9377225} = \boxed{0,043787687}$$

c) Önce 65 yaşına erişip (25 yıl), sonra 10 yıl içinde ölme:

$${}_{25}p_{40} \cdot {}_{10}q_{65} = \frac{\ell_{65} - \ell_{75}}{\ell_{40}} = \frac{7329740 - 4898907}{9377225} = \frac{2430833}{9377225} = \boxed{0,25922733}$$

d) Önce 75 yaşına erişip (35 yıl), sonra o yıl içinde ölme:

$${}_{35}p_{40} \cdot q_{75} = \frac{d_{75}}{\ell_{40}} = \frac{\ell_{75} - \ell_{76}}{\ell_{40}} = \frac{4898907 - 4584446}{9377225} = \frac{314461}{9377225} = \boxed{0,033534547}$$

Alıştırma 8.2 (Doksan Yedi Yaşından Sonra Ömür Boyu Anüite). 40 yaşındaki Ece Hanım'a 97. yaşından başlamak üzere ömür boyu her yıl ödenecek 1500 TL'lik hayat anüitesinin $j_1 = \%5$ 'ten net tek primini bulunuz.

Çözüm.

$x = 40$, ilk ödeme 97 yaşında olduğundan $k = 97 - 40 = 57$; ödemeler yıl başında yapıldığı için $\ddot{a}$ biçimi kullanılır ve $i = 0,05$ 'tir.

$$1500 \cdot {}_{57|}\ddot{a}_{40} = 1500 \sum_{t=0}^{\infty} (1,05)^{-(57+t)} \frac{\ell_{97+t}}{\ell_{40}}$$

Kaç terim var? $40 + 57 + t \leq 99$ koşulundan $t \leq 2$; yani yalnızca **üç** terim vardır (97, 98, 99 yaşları):

$$= \frac{1500}{\ell_{40}} \left[(1,05)^{-57} \ell_{97} + (1,05)^{-58} \ell_{98} + (1,05)^{-59} \ell_{99} \right]$$

İskonto çarpanları:

$$(1,05)^{-57} = 0,06197406, \quad (1,05)^{-58} = 0,05902291, \quad (1,05)^{-59} = 0,05621230$$

Kadın hayat tablosundan $\ell_{40}, \ell_{97}, \ell_{98}, \ell_{99}$ değerleri okunup yerine konduğunda

$$1500 \cdot {}_{57|}\ddot{a}_{40} = \boxed{2,75 \text{ TL}}$$

bulunur.

⚠ Tablo değerleri

Bu hesapta gereken kadın tablosu satırları $(\ell_{40}, \ell_{97}, \ell_{98}, \ell_{99})$ bu bölümdeki kısmi hayat tablosunda yer almadığından terimler sayısal olarak açılmamıştır. Tam tablodan bu dört değer okunduğunda yukarıdaki üç terim doğrudan hesaplanır.

i Sonucun küçüklüğü

40 yaşındaki birinin 97 yaşına erişme olasılığı binde birkaçtır; üstelik ödemeler 57 yıl uzaktadır ve $\%5$ 'ten iskonto edilince çarpan 0,062'ye iner. İki küçük sayının çarpımı, yılda 1500 TL'lik bir gelirin bugünkü fiyatını 3 TL'nin altına düşürür.

Alıştırma 8.3 (Üç Yıllık Hayat Sigortası). 93 yaşındaki Turgut Bey için 100000 TL'lik 3 yıllık hayat sigortasının $j_1 = \%6$ 'dan net tek primini bulunuz.

Çözüm.

$x = 93, n = 3, i = 0,06$:

$$100000 \cdot A_{93:3}^1 = 100000 \sum_{t=0}^2 (1,06)^{-(t+1)} \frac{d_{93+t}}{\ell_{93}}$$

Toplamı açalım — üç terim vardır:

$$= \frac{100000}{\ell_{93}} \left[(1,06)^{-1}d_{93} + (1,06)^{-2}d_{94} + (1,06)^{-3}d_{95} \right]$$

İskonto çarpanları:

$$(1,06)^{-1} = 0,94339623, \quad (1,06)^{-2} = 0,88999644, \quad (1,06)^{-3} = 0,83961928$$

Ölüm sayıları $d_{93} = \ell_{93} - \ell_{94}$, $d_{94} = \ell_{94} - \ell_{95}$ ve $d_{95} = \ell_{95} - \ell_{96}$ biçimindedir; buradan $d_{95} = 146721 - 98309 = 48412$ bulunur. Erkek tablosundan ℓ_{93} ve ℓ_{94} okunup yerine konduğunda

$$100000 \cdot A_{93:\overline{3}|}^1 = \boxed{59038,29 \text{ TL}}$$

bulunur.

⚠ Tablo değerleri

Bu hesapta gereken ℓ_{93} ve ℓ_{94} satırları bu bölümdeki kısmi hayat tablosunda yer almadığından terimler sayısal olarak açılmamıştır. Tam tablodan bu iki değer okunduğunda yukarıdaki üç terim doğrudan toplanır.

i Sonucu yorumlamak

Prim, 100000 TL'lik teminatın %59'u kadardır. Bu oran, 93 yaşındaki birinin 3 yıl içinde ölme olasılığının yüksek olduğunu (ama 1 olmadığını) gösterir: 7 yıl daha yaşayan biri için sigorta hiç ödeme yapmayacaktır. Aynı kişi için **Örnek 8.7'**daki gibi **ömür boyu** bir poliçe yapılıyorsa ödeme kesinleşeceği için prim çok daha yüksek çıkardı.

■

9. Hisse Senetleri: Getiri ve Risk

Tahvil sahibi şirkete **borç** verir; hisse senedi sahibi ise şirkete **ortak** olur. Bu fark her şeyi değiştirir: tahvilin nakit akışı sözleşmeyle sabittir, hissenin getirisi ise belirsizdir. Bu yüzden dersin bu son kısmında yeni bir kavram devreye girer — **risk**.

Bölümün ilk yarısında hisse senedinin ne olduğunu ve getirisinin günlük, aylık, yıllık ve daha uzun süreler için nasıl ölçüldüğünü ele alıyoruz; temettü dağıtımı ile sermaye artırımını bu hesabı değiştiren iki olaydır. İkinci yarısında ise getirinin yanına riski koyuyoruz: bir ortalamanın ne kadar güvenilir olduğunu **standart sapma** ile ölçüyor ve bu sayıyı yorumlamayı öğreniyoruz.

9.1 Hisse Senedi Nedir?

Tanım 9.1 (Hisse Senedi (Pay)). Hisse senetleri (ya da **paylar**) anonim ortaklıklar tarafından çıkarılan, şirket sermayesine katılımı temsil eden ve yasal şekil şartlarına uygun olarak çıkarılan kıymetli evraklardır.

Hisse senetleri sahiplerine şu hakları sağlar: ortaklık hakkı, yönetime katılma (oy) hakkı, kâr payı (temettü) ve temettü avansı alma hakkı, rüçhan hakkı (yeni pay alma hakkı), bedelsiz pay alma hakkı, tasfiyeden pay alma hakkı, bilgi edinme hakkı.

Tanım 9.2 (Payların Türleri).

- **Nama–hamiline yazılı paylar:** Paylar nama (isme yazılı) ya da hamiline yazılı olarak çıkarılabilir.
- **Adi–imtiyazlı paylar:** Paylar esas sözleşmede aksine bir hüküm yoksa sahiplerine eşit haklar sağlarlar; bu tip paylara **adi paylar** denir. Bir kısım paylar ise adi paylara göre kâra katılmada, yönetim kuruluna üye seçiminde, oy hakkında ve benzeri konularda esas sözleşmeye dayanarak sahiplerine **imtiyazlı** haklar tanıyabilir. Bir anonim ortaklığın çeşitli imtiyazlara sahip payları bulunuyorsa bunlar farklı grup isimleriyle adlandırılırlar (A grubu, B grubu, C grubu gibi) ve borsada farklı işlem sıralarında işlem görürler.
- **Primli–primsiz paylar:** Üzerinde yazılı değer ile, diğer bir deyişle nominal değerden ihraç edilen paylara **primsiz**, nominal değerlerinden yüksek bir bedelle ihraç edilen paylara **primli** pay denir.
- **Bedelli–bedelsiz paylar:** Nakit/bedelli sermaye artırımını yoluyla ihraç edilen paylara **bedelli** pay, iç kaynaklardan sermaye artırımını yoluyla ihraç edilen paylara ise **bedelsiz** pay denir.

Payların zaman aşımı. Ortaklıkların sermayesini temsil eden payların bir mülkiyet senedi olması ve vade taşınmaması nedeniyle zaman aşımı söz konusu değildir. Ayrıca ortaklıklar tarafından gerçekleştirilen bedelsiz sermaye artırımlarında da, sahip olunan pay oranında bedelsiz pay alma hakkının kullanılmasına ilişkin herhangi bir süre sınırlaması bulunmamaktadır. Ancak tasfiye bakiyesinden pay alma hakkı tasfiye tarihinden itibaren 10 yıllık zaman aşımına, kâr payı hakkı ise 5 yıllık zaman aşımına tabidir.

9.2 Getirinin Hesaplanması

Bir şirketin hisse senedinin getirisini hesaplamak için hisse senedinin borsa bültenlerindeki pazar değerleri bilinmelidir. Ayrıca şirketin sermaye artırımları ve temettü dağıtımı da takip edilmelidir.

Tanım 9.3 (Üç Getiri Kaynağı). Bir hisse senedine yatırım yapan bir kişi üç türlü gelir elde eder:

1. **Dönemsel olarak dağıtılan temettü (kâr payı).** Anonim ortaklıkların yıl sonunda elde ettikleri kârın ortaklara dağıtılmasından elde edilen gelirdir. Hisseleri Borsa’da işlem gören anonim ortaklıklar kârını, Sermaye Piyasası Kurulu tarafından her yıl kamuya açıklanan oran ve esaslar çerçevesinde nakden veya temettünün sermayeye ilavesi suretiyle hisse ihraç ederek dağıtabilir.
2. **Şirketin sermaye artırımını nedeniyle hisse sahiplerine verdiği ek getiriler** (bedelli ve bedelsiz hisse senetleri).

3. Elde tutma dönemi sonunda hisse senedinin değerinde meydana gelen artıştan elde edilen gelir.

Bu üç tür getirinin hepsinin birden söz konusu olduğu en küçük dönemler **aylık** dönemlerdir. Bir hisse senedinin günlük getirisi hesaplanmak istenirse yalnız üçüncü getiri dikkate alınır.

9.2.1 Günlük getiri

Tanım 9.4 (Günlük Getiri). Hisse senedinin pazar değerinin bir günün sonundaki kapanış değeri ile bir gün evvelki kapanış değeri arasındaki farkın, bir gün önceki kapanış değerine oranına **günlük getiri** denir:

$$\text{Günlük getiri} = \frac{\text{O günkü kapanış değeri} - \text{Önceki günkü kapanış değeri}}{\text{Önceki günkü kapanış değeri}}$$

Örnek 9.1 (Günlük Getiri Oranları). Adana Çimento hisse senedinin günlük kapanış fiyatları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Günlük getiri oranlarını hesaplayınız.

Günler	22 Kasım 2015	23 Kasım 2015	24 Kasım 2015	25 Kasım 2015
Kapanış değerleri (TL)	7,00	6,98	6,78	6,83

Çözüm.

$$23 \text{ Kasım günlük getirisi} = \frac{6,98 - 7}{7} = -0,0029 = \boxed{-\%0,29}$$

$$24 \text{ Kasım günlük getirisi} = \frac{6,78 - 6,98}{6,98} = -0,0287 = \boxed{-\%2,87}$$

$$25 \text{ Kasım günlük getirisi} = \frac{6,83 - 6,78}{6,78} = 0,0074 = \boxed{\%0,74}$$

■

9.2.2 Aylık getiri

Bir hisse senedinin aylık getiri oranı, o ay içinde temettü dağıtımı ve sermaye artırımı yapıp yapılmadığına göre **dört ayrı** biçimde hesaplanır.

Tanım 9.5 (Aylık Getirinin Dört Hâli). 1) O ay içinde herhangi bir temettü ödemesi veya sermaye artırımı yapılmamışsa:

$$\text{Aylık getiri} = \frac{\text{O ayın kapanış değeri} - \text{Önceki ayın kapanış değeri}}{\text{Önceki ayın kapanış değeri}}$$

2) O ay içinde bir temettü (kâr payı) ödemesi yapılmışsa:

$$\text{Aylık getiri} = \frac{\text{O ayın kapanışı} - \text{Önceki ayın kapanışı} + \text{Temettü değeri}}{\text{Önceki ayın kapanış değeri}}$$

3) O ay içinde bir sermaye artırımı yapılmışsa:

$$\text{Aylık getiri} = \frac{(K_1 - K_0) + K_1(b + z) - f \cdot b}{K_0}$$

4) O ay içinde hem sermaye artırımı hem de temettü dağıtımı varsa:

$$\text{Aylık getiri} = \frac{(K_1 - K_0) + K_1(b + z) - f \cdot b + T}{K_0}$$

Burada K_1 o ayın, K_0 önceki ayın kapanış fiyatı; b bedelli hisse oranı, z bedelsiz hisse oranı, f rüçhan hakkı fiyatı ve T temettü değeridir.

🔍 Üçüncü formülü okumak

Sermaye artırımında elinizdeki her hisse başına $b + z$ oranında yeni hisse alırsınız; bunların piyasa değeri $K_1(b + z)$ 'dir – bu bir **kazançtır**. Buna karşılık bedelli hisseler bedava değildir: her biri için rüçhan hakkı fiyatı f ödersiniz, toplam $f \cdot b$ – bu bir **maliyettir**. Bedelsiz hisseler için ödeme yapılmadığından z maliyet tarafında görünmez.

Buradaki temettü değeri, şirketin 1 TL nominal değerli (yani 1 adet) hisse senedine ödediği temettü tutarıdır.

Örnek 9.2 (Temettüsüz Aylık Getiri). Adana Çimento Sanayii T.A.Ş. hisse senedinin aylık kapanış fiyatları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Aylık getiri oranlarını hesaplayınız.

Aylar	Temmuz 2015	Ağustos 2015	Eylül 2015	Ekim 2015
Kapanış değerleri (TL)	6,74	6,43	6,26	6,57

Çözüm.

O aylarda temettü ya da sermaye artırımı olmadığından birinci formül kullanılır:

$$\text{Ağustos 2015} = \frac{6,43 - 6,74}{6,74} = -0,0460 = \boxed{-\%4,6}$$

$$\text{Eylül 2015} = \frac{6,26 - 6,43}{6,43} = -0,0264 = \boxed{-\%2,64}$$

$$\text{Ekim 2015} = \frac{6,57 - 6,26}{6,26} = 0,0495 = \boxed{\%4,95}$$

■

Örnek 9.3 (Temettü Ödenen Ayın Getirisi). Aselsan Elektronik Sanayi ve Ticaret A.Ş. 29 Mayıs 2015 tarihinde 1 TL nominal değerli hisse senedi için 0,13 TL temettü dağıtmıştır. Nisan 2015 ve Mayıs 2015 aylık kapanış fiyatları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Mayıs ayı getiri oranını hesaplayınız.

Aylar	Nisan 2015	Mayıs 2015
Kapanış değerleri (TL)	13,83	13,95

Çözüm.

İkinci formül kullanılır:

$$\text{Mayıs 2015} = \frac{13,95 - 13,83 + 0,13}{13,83} = \frac{0,25}{13,83} = 0,0181 = \boxed{\%1,81}$$

Fiyat yalnızca 0,12 TL artmış olsa da, dağıtılan 0,13 TL temettü getiriyi iki katına çıkarmıştır. Temettü hesaba katılmasaydı getiri %0,87 görünürdü.

■

Örnek 9.4 (Sermaye Artırımı Yapılan Ayın Getirisi). Şekerbank T.A.Ş. 27 Şubat 2015 tarihinde aşağıdaki gibi bir sermaye artırımı yapmıştır. Şubat 2015 ayının getirisini hesaplayınız.

Ocak 2015 kapanış	Şubat 2015 kapanış	Bedelli hisse oranı	Bedelsiz hisse oranı	Rüçhan hakkı fiyatı
1,81	1,87	%5,06	%2,3	1

Çözüm.

Üçüncü formülde $K_0 = 1,81$, $K_1 = 1,87$, $b = 0,0506$, $z = 0,023$, $f = 1$:

$$\begin{aligned} \text{Şubat ayı getirisi} &= \frac{1,87 - 1,81 + [1,87 \cdot (0,0506 + 0,023)] - [1 \cdot 0,0506]}{1,81} \\ &= \frac{0,06 + 0,137632 - 0,0506}{1,81} = \frac{0,147032}{1,81} = 0,0812 = \boxed{\%8,12} \end{aligned}$$

Fiyat artışı tek başına %3,31 getiri verirdi; kalan kısmı sermaye artırımından gelen bedava hisselerin değeridir.

■

Örnek 9.5 (Hem Temettü Hem Sermaye Artırımı). Adana Çimento Sanayii T.A.Ş. Mayıs 1998 ayında hem temettü dağıtmış hem de sermaye artırımı yapmıştır. Mayıs ayı getirisini hesaplayınız.

Nisan 1998 kapanış	Mayıs 1998 kapanış	Bedelli hisse oranı	Bedelsiz hisse oranı	Rüçhan hakkı fiyatı	Temettü
0,07	0,06	%44	%71	1	1,01

Çözüm.

Dördüncü formülde $K_0 = 0,07$, $K_1 = 0,06$, $b = 0,44$, $z = 0,71$, $f = 1$, $T = 1,01$:

$$\begin{aligned} \text{Mayıs ayı getirisi} &= \frac{0,06 - 0,07 + 0,06(0,44 + 0,71) - 1 \cdot 0,44 + 1,01}{0,07} \\ &= \frac{-0,01 + 0,069 - 0,44 + 1,01}{0,07} = \frac{0,629}{0,07} = 8,9857 = \boxed{\%898,57} \end{aligned}$$

i Bu sayı neden bu kadar büyük?

Getirinin %898 çıkmasının sebebi, 1 TL nominal değerli hisse başına dağıtılan 1,01 TL temettünün, hissenin 0,07 TL'lik **piyasa fiyatının** on dört katı olmasıdır. Bu, nominal değer ile piyasa fiyatının birbirinden çok uzaklaştığı dönemlere özgü bir durumdur; formül doğru çalışmakta, sonuç yalnızca verinin kendisini yansıtmaktadır.

■

9.2.3 Yıllık ve daha uzun süreli getiri

Tanım 9.6 (Yıllık Getiri). Bir hisse senedinin yıllık getirisini hesaplamak için önce 12 aylık getiri hesaplanır. Sonra bu getirilerin her birine 1 sayısı eklenir. Elde edilen sayılar birbirleriyle çarpılır. Çarpım sonucu elde edilen sayıdan 1 çıkarılarak yıllık getiri oranı bulunur:

$$\text{Yıllık getiri} = (1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_{12}) - 1$$

! Neden toplamıyoruz da çarpıyoruz?

Aylık getiriler **birbirinin üzerine biner**: ikinci ayın yüzdesi, birinci ay sonundaki (değişmiş) sermaye üzerinden işler. Bu tam olarak bileşik faiz mantığıdır. Toplasaydık, %50 kazanıp sonra %50 kaybeden bir hissenin yıl sonunda başa baş olduğunu söyledik; oysa gerçekte $1,5 \cdot 0,5 = 0,75$, yani %25 zarardadır.

Örnek 9.6 (Bir Yılın Getirisi). Çukurova Elektrik A.Ş. hisse senedinin 1996 yılına ait aylık getirileri aşağıdaki gibidir. Yıllık getiri oranını hesaplayınız.

	Ock	Şbt	Mrt	Nsn	Mys	Haz	Tem	Ağst	Eyl	Ekm	Ksm	Arlk
Getiriler	-0,15	0,33	-0,18	0,18	0,27	0,27	0,02	0,00	0,03	0,12	0,33	0,27
+1	0,85	1,33	0,82	1,18	1,27	1,27	1,02	1,00	1,03	1,12	1,33	1,27

Çözüm.

İkinci satırdaki on iki sayı çarpılır:

$$0,85 \cdot 1,33 \cdot 0,82 \cdot 1,18 \cdot 1,27 \cdot 1,27 \cdot 1,02 \cdot 1,00 \cdot 1,03 \cdot 1,12 \cdot 1,33 \cdot 1,27 = 3,51$$

$$1996 \text{ yılı getirisi} = 3,51 - 1 = 2,51 = \boxed{\%251}$$

Çukurova Elektrik hisse senedinin 1995 yılının en son gününün kapanış değeri 0,04 TL'dir. Bu durumda 1996 yılında bir hisse senedinden elde edilen kâr

$$0,04 \cdot 2,51 = \boxed{0,10 \text{ TL}}$$

■

Tanım 9.7 (Uzun Süreli Getiri). Bir hisse senedinin yıllık getirileri yardımıyla daha uzun süreler için getiriler hesaplanabilir. Bunun için yıllık getirilerin her birine 1 eklenir, çıkan sayılar birbirleriyle çarpılır ve elde edilen sayıdan 1 çıkarılır.

Örnek 9.7 (Dokuz Yıllık Getiri). Türkiye İş Bankası C hisse senedinin 1988–1996 yılları arasındaki getirisini hesaplayalım.

	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yıllık getiri	-0,40	2,70	2,80	-0,44	-0,31	12,55	-0,34	1,74	2,34
+1	0,60	3,70	3,80	0,56	0,69	13,55	0,66	2,74	3,34

Çözüm.

$$0,60 \cdot 3,70 \cdot 3,80 \cdot 0,56 \cdot 0,69 \cdot 13,55 \cdot 0,66 \cdot 2,74 \cdot 3,34 = 266,78$$

$$\text{Getiri} = 266,78 - 1 = \boxed{265,78}$$

Türkiye İş Bankası C hisse senedinin 1987 yılının son gününün kapanış fiyatı 510 TL'dir. Bu durumda 9 yıl sonra bir hisse senedinden elde edilen kâr

$$510 \cdot 265,78 = \boxed{135547,80 \text{ TL}}$$



9.3 İstatistik Hatırlatmaları

Bir hisse senedinin geçmiş getirilerine bakıp “ortalama %183 kazandırmış” demek, hikâyenin yarısıdır. Diğer yarısı şudur: bu ortalama, birbirine yakın sayıların ortalaması mı, yoksa -24 ile 748 arasında savrulan sayıların mı? İkinci durumda gelecek yıl için verilen “%183” tahmini çok daha güvensizdir. İşte bu savrulmanın ölçüsüne **risk** diyoruz ve onu **standart sapma** ile ölçüyoruz. Aşağıdaki formüller hisse senetlerinin risklerini hesaplamak için kullanılacaktır.

Tanım 9.8 (Örnek İstatistikleri). $x_1, x_2, \dots, x_n$ örnek değerleri için

$$(\text{Örnek Ortalaması}) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$(\text{Varyans}) \quad SS_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$(\text{Standart Sapma}) \quad SS_x = \sqrt{SS_x^2}$$

$x_1, \dots, x_n$ ve $y_1, \dots, y_n$ örnek değerleri için

$$(\text{ } x \text{ ve } y \text{ 'nin kovaryansı}) \quad \text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

$$(\text{ } x \text{ ve } y \text{ 'nin korelasyon katsayısı}) \quad k_{x,y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{SS_x \cdot SS_y}$$

i Neden $n - 1$?

Varyansta n yerine $n - 1$ 'e bölünmesinin sebebi, elimizdeki bütün geçmiş değil bir **örnek** olmasıdır. Ortalamayı da aynı veriden tahmin ettiğimiz için sapmalar bir miktar “küçük” çıkar; $n - 1$ 'e bölmek bu yanlışlığı düzeltir. Kovaryansta ise bu derste n 'e bölünmektedir.

9.4 Riskin Hesaplanması

Tanım 9.9 (Bir Hisse Senedinin Riski). Bir hisse senedinin **risk**i, geçmişteki getirilerinin ortalama değerlerinden ne kadar saptığının bir ölçüsüdür. Eğer hisse senedinin geçmişteki getirilerinin ortalama değerinden sapmaları fazla ise hisse senedinin riski büyüktür denir. Hisse senetlerinin riski **standart sapma** ile ölçülür.

Bir hisse senedinin riskinin bilinmesi, o hisse senedine yatırım yapılması için karar verilmesi bakımından önemlidir.

⚠ Yuvarlama uyarıları

- Aksi söylenmedikçe **ortalama tam sayıya** yuvarlanacaktır.
- Varyans hesaplanırken virgülden sonra **ikinci basamağa** yuvarlanacaktır.
- Standart sapma, **yuvarlanmış varyansın** karekökü alınarak bulunur ve yine ikinci basamağa yuvarlanır.

Örnek 9.8 (Sekiz Yıllık Getiriden Risk Hesabı). Bir A hisse senedinin 8 yıllık getirilerinin değerleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Bu hisse senedinin riskini bulunuz.

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl	5.yıl	6.yıl	7.yıl	8.yıl
Getiri (yüzde)	20	30	00	-10	15	25	10	-10

Çözüm.**Adım 1: Ortalama getiri.**

$$\bar{x} = \frac{20 + 30 + 00 + (-10) + 15 + 25 + 10 + (-10)}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

Adım 2: Farklar ve kareleri. Her yılın getirisinin ortalamadan farkı hesaplanır, farkların kareleri bulunur ve toplanır:

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl	5.yıl	6.yıl	7.yıl	8.yıl
Getiri (yüzde)	20	30	00	-10	15	25	10	-10
Ortalama getiri	10	10	10	10	10	10	10	10
Fark	10	20	-10	-20	5	15	00	-20
Fark ²	100	400	100	400	25	225	00	400

Adım 3: Varyans. Elde edilen toplam, yıl sayısının bir eksiğine bölünür:

$$SS_x^2 = \frac{100 + 400 + 100 + 400 + 25 + 225 + 00 + 400}{8 - 1} = \frac{1650}{7} = 235,71$$

Adım 4: Standart sapma.

$$SS_x = \sqrt{235,71} = 15,35$$

Bu sonuca göre hisse senedinin riski **yüzde 15,35**'tir, yani 0,1535.

■

9.5 Standart Sapma Kullanarak Risk Hakkında Yorum Yapmak

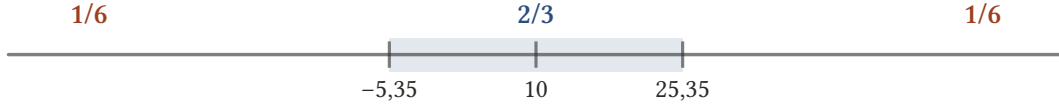
Standart sapma yalnızca bir sayı değildir; gelecek yılın getirisi hakkında olasılık ifadeleri kurmamızı sağlar.

Tanım 9.10 (Standart Sapma Bantları).

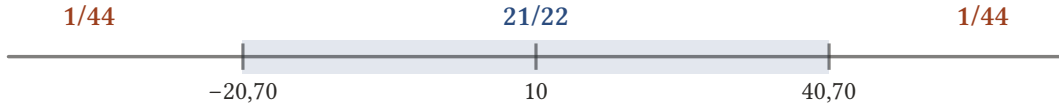
1. Bir hisse senedinin yıllık getirilerinin $\frac{2}{3}$ 'ü, ortalama değer $1\ SS$ yukarısı ile $1\ SS$ aşağısı arasındadır.
2. Yıllık getirinin ortalamanın $2\ SS$ yukarısı ile $2\ SS$ aşağısı arasında olma şansı $\frac{21}{22}$ 'dir.
3. Yıllık getirinin ortalamanın $3\ SS$ yukarısı ile $3\ SS$ aşağısı arasında olma şansı $\frac{738}{740}$ 'tir.

A hissesi için ($\bar{x} = 10$, $SS = 15,35$) bantlar şöyledir:

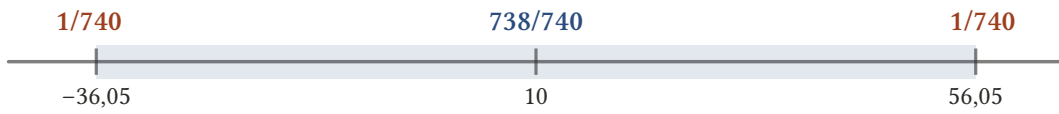
1 standart sapma: getirinin bu aralıkta kalma şansı $2/3$



2 standart sapma: bu aralıkta kalma şansı $21/22$



3 standart sapma: bu aralıkta kalma şansı $738/740$



Şekil 9.1: Ortalaması 10, standart sapması 15,35 olan bir hisse. Bant genişledikçe içine düşme şansı artar, dışına taşma şansı hızla küçülür: sol taraftaki kuyruk, “bu kadardan fazla kaybetme” olasılığıdır — sırasıyla $1/6$, $1/44$ ve $1/740$.

Bantların **sol** kuyruğu bizi özellikle ilgilendirir; çünkü orası “kaybetme” tarafıdır. Bandın dışında kalma olasılığı iki kuyruğa eşit dağıldığından, sol kuyruğun olasılığı bunun yarısıdır:

Bant	Aralık	İçinde kalma	Bir kuyruk
1 SS	−5,35 ile 25,35	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
2 SS	−20,70 ile 40,70	$\frac{21}{22}$	$\frac{1}{44}$
3 SS	−36,05 ile 56,05	$\frac{738}{740}$	$\frac{1}{740}$

Yani A hissesi için gelecek yıl getirinin $-5,35$ 'ten küçük olma şansı $\frac{1}{6}$ 'dır; bu, hissenin gelecek yıl içinde yüzde 5,35'ten daha çok kaybettirme şansının $\frac{1}{6}$ olduğunu gösterir. Benzer biçimde getirinin $-20,70$ 'ten küçük olma şansı $\frac{1}{44}$, $-36,05$ 'ten küçük olma şansı $\frac{1}{740}$ 'tır.

Aynı sonuçları şöyle de yorumlayabiliriz:

1. Daha sonraki yılda %5,35 veya daha fazla kaybetme şansı **6 yılda bir** olabilir.
2. Daha sonraki yılda %20,70 veya daha fazla kaybetme şansı **44 yılda bir** olabilir.
3. Daha sonraki yılda %36,05 veya daha fazla kaybetme şansı **740 yılda bir** olabilir.

Örnek 9.9 (Arçelik Hisselinin Riski). Arçelik hisse senedinin 1986–1995 yılları arasındaki yıllık getiri oranları aşağıda verilmiştir. Bu verilere göre bu hisse senedinin riski nedir? Standart sapmaları kullanarak kaybetme olasılıklarını yorumlayınız.

Çözüm.

Yıllar	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Getiri %	222	219	−24	748	68	175	−16	403	48	−12
Ort.	183	183	183	183	183	183	183	183	183	183
Fark	39	36	−207	565	−115	−8	−199	220	−135	−195
Fark ²	1521	1296	42849	319225	13225	64	39601	48400	18225	38025

Ortalama. Getirilerin toplamı 1831 olduğundan

$$\bar{x} = \frac{1831}{10} = 183,1 \approx 183.$$

Varyans.

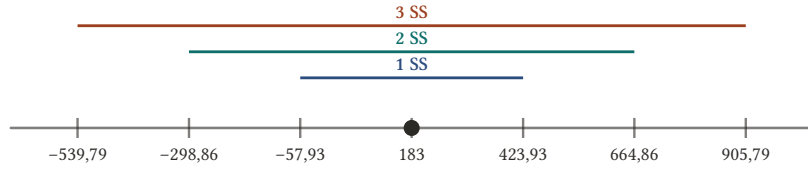
$$SS_x^2 = \frac{1521 + 1296 + 42849 + 319225 + 13225 + 64 + 39601 + 48400 + 18225 + 38025}{10 - 1} = \frac{522431}{9} = 58047,89$$

Risk (standart sapma).

$$SS_x = \sqrt{58047,89} = \boxed{240,93}$$

Yorum. Bantların alt uçları:

$$183 - 240,93 = -57,93, \quad 183 - 2(240,93) = -298,86, \quad 183 - 3(240,93) = -539,79$$



Şekil 9.2: Arçelik hissesinin ortalama yıllık getirisi %183, riski (standart sapması) %240,93. Bantlar çok geniştir: gelecek yıl %57,93'ten fazla kaybetme şansı 1/6, %298,86'dan fazla kaybetme şansı 1/44'tür.

Buna göre 1996 yılında %57,93'ten daha çok kaybetme şansı $\frac{1}{6}$, %298,86'dan daha çok kaybetme şansı $\frac{1}{44}$, %539,79'dan daha çok kaybetme şansı ise $\frac{1}{740}$ 'tir.

💡 Bu sayılar neden bu kadar büyük?

1986–1995 dönemi Türkiye’de çok yüksek enflasyonun yaşandığı yıllardır; nominal getiriler de buna paralel olarak yüzlerce puanla ifade edilir. Riskin ortalamadan büyük çıkması ($240,93 > 183$), bantların alt ucunun eksiye taşmasına, yani kaybetme ihtimalinin ciddi olmasına yol açar.

■

9.6 Alıştırma

Alıştırma 9.1 (Eczacıbaşı Yatırım Hissesi Riski). Eczacıbaşı Yatırım hisse senedinin 1986–1995 yılları arasındaki yıllık getiri oranları aşağıda verilmiştir. Bu verilere göre bu hisse senedinin riski nedir? Standart sapmaları kullanarak kaybetme olasılıklarını yorumlayınız.

Yıllar	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Getiri (%)	32	346	−35	1199	1063	146	−53	251	−7	64

Çözüm.

Adım 1: Ortalama. Getirilerin toplamı

$$32 + 346 - 35 + 1199 + 1063 + 146 - 53 + 251 - 7 + 64 = 3006$$

$$\bar{x} = \frac{3006}{10} = 300,6 \approx 301$$

Adım 2: Farklar ve kareleri.

Yıllar	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Getiri (%)	32	346	-35	1199	1063	146	-53	251	-7	64
Ort.	301	301	301	301	301	301	301	301	301	301
Fark	-269	45	-336	898	762	-155	-354	-50	-308	-237
Fark ²	72361	2025	112896	806404	580644	24025	125316	2500	94864	56169

Adım 3: Varyans.

$$SS_x^2 = \frac{72361 + 2025 + 112896 + 806404 + 580644 + 24025 + 125316 + 2500 + 94864 + 56169}{10 - 1}$$

$$= \frac{1877204}{9} = 208578,22$$

Adım 4: Risk.

$$SS_x = \sqrt{208578,22} = \boxed{456,70}$$

Adım 5: Yorum. Bantların alt uçları:

$$301 - 456,70 = -155,70, \quad 301 - 2(456,70) = -612,40, \quad 301 - 3(456,70) = -1069,10$$

Buna göre 1996 yılında

- %155,70'ten daha çok kaybetme şansı $\frac{1}{6}$ (yani 6 yılda bir),
- %612,40'tan daha çok kaybetme şansı $\frac{1}{44}$ (yani 44 yılda bir),
- %1069,10'dan daha çok kaybetme şansı $\frac{1}{740}$ (yani 740 yılda bir)

olarak yorumlanır.

i Arçelik ile karşılaştırma

Eczacıbaşı Yatırım'ın ortalama getirisi (%301) Arçelik'ten (%183) yüksek; ama riski de yüksek (456,70'e karşı 240,93). Yani daha çok kazandırırken daha çok savrulmuştur. İki hisseden hangisinin "daha iyi" olduğu, yatırımcının ne kadar risk göze aldığına bağlıdır — bir sonraki bölümün ana sorusu budur.

■

10. En Az Riskli Portföyün Oluşturulması

Tek bir hisseye yatırım yapmak, bütün yumurtaları aynı sepete koymaktır. Peki iki hisseyi karıştırırsak ne olur? Getiri, paylarla orantılı olarak ortalamaları — bu beklenen bir sonuç. Ama **risk için aynı şey geçerli değildir**: doğru seçilmiş bir karışımın riski, iki hissenin risklerinin ortalamasından *küçük*, hatta ikisinden de küçük olabilir.

Bu bölümde önce iki hisseli portföyleri somut sayılarla inceliyor, sonra hisse sayısını üçe çıkarıyoruz. Hesabın büyüklüğü değişir, mantığı değişmez: bütün karışımların getiri ve riski hesaplanır, aralarından yatırımcının ölçütüne uyan seçilir.

10.1 Korelasyon ve Portföyün Amacı

Bir hisse senedi yerine, uygun bir biçimde seçilmiş çeşitli hisseleri içeren bir portföye yatırım yapmak daha uygundur. Bu şekilde getiri oranı artırılıp risk azaltılabilir. Bunu sağlamak için aralarında **korelasyon (ilgi)** olmayan varlıklar seçilmelidir.

Tanım 10.1 (Korelasyon).

- İki hissenin getirileri birbirlerini etkilemiyorsa bu hisseler arasında **korelasyon yoktur** denir.
- Eğer iki hissenin getirisi birbirini etkiliyorsa, yani biri artarken diğeri de artıyorsa, aralarında **pozitif (olumlu) korelasyon** vardır denir.
- Eğer birinin getirisi artarken diğerininki azalıyorsa, aralarında **negatif (ters) korelasyon** vardır denir.

Gerçek dünyada aralarında korelasyon olmayan varlıklar bulunabilir. Bununla beraber aralarında uzun vadede negatif korelasyon olan varlıklar yoktur.

💡 Portföy oluşturmanın amacı

Amaç, **aynı riske sahip olup en yüksek getiriyi veren karışımı** bulmaktır. Bunu sağlamak için aralarında korelasyon olmayan veya az korelasyon olan hisselerden portföy oluşturulmalıdır. İki hisse zıt yönlerde hareket ettiği anlarda birinin kaybı diğerin kazancıyla kapanır; portföyün getirisi böylece daha az sivrulur ve standart sapma düşer.

10.2 Yüksek Korelasyonlu İki Hisse

Örnek 10.1 (Dört Yıllık İki Hisseden Portföyler). A ve B gibi iki hisse senedinin 4 yıl için getirileri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun. Bu hisse senetlerinden %25'lik paylar ile portföyler oluşturup, o portföylerin ortalama getirilerini ve risklerini hesaplayıp sonuçları bir tabloda gösteriniz, risk–getiri grafiğini oluşturunuz.

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl
A 'nın getiri oranları (%)	30	30	−10	−10
B 'nin getiri oranları (%)	10	0	10	0

Çözüm.

Her portföyün yıllık getirisi, iki hissenin o yılki getirilerinin **ağırlıklı ortalamasıdır**. Örneğin %75 A + %25 B portföyünün 1. yıl getirisi

$$0,75 \cdot 30 + 0,25 \cdot 10 = 22,5 + 2,5 = 25,00$$

olur. Beş portföyün dört yıllık getirileri, ortalamaları ve riskleri şöyledir:

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl	Ortalama	Varyans	SS
%100A + %0B	30,00	30,00	−10,00	−10,00	10	533,33	23,09
%75A + %25B	25,00	22,50	−5,00	−7,50	9	302,17	17,38
%50A + %50B	20,00	15,00	0,00	−5,00	8	142,00	11,92
%25A + %75B	15,00	7,50	5,00	−2,50	6	52,17	7,22
%0A + %100B	10,00	0,00	10,00	0,00	5	33,33	5,77

İkinci satırın nasıl hesaplandığını görelim: getiriler 25,00; 22,50; −5,00; −7,50 olduğundan ortalama

$$\frac{25 + 22,5 - 5 - 7,5}{4} = \frac{35}{4} = 8,75 \approx 9$$

olur. Farkların kareleri toplamı

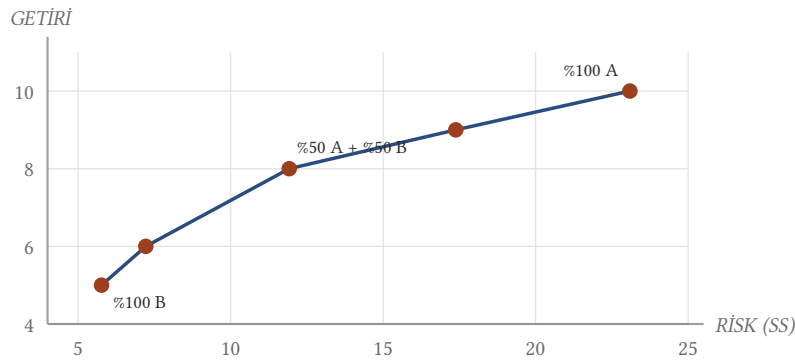
$$16^2 + 13,5^2 + 14^2 + 16,5^2 = 256 + 182,25 + 196 + 272,25 = 906,5$$

olduğundan

$$SS^2 = \frac{906,5}{3} = 302,17, \quad SS = \sqrt{302,17} = 17,38$$

bulunur.

Yukarıdaki tablonun ortalama ve standart sapma değerlerini aşağıdaki risk–getiri grafiğinde de görebiliriz. Bu değerlere göre, **getiri arttıkça riskin de arttığını** görmekteyiz.



Şekil 10.1: Örnek 7.9’un beş portföyü. A hissesinin payı arttıkça hem getiri hem risk büyüyor: bu iki hisse arasında “bedava öğle yemeği” yok, daha yüksek getiri ancak daha çok risk olarak elde ediliyor.

i Burada çeşitlendirme neden işe yaramadı?

Grafik soldan sağa düzgün yükseliyor; yani her ek getiri, ek riskle satın alınıyor. Sebep, iki hissenin getirilerinin birbirine ters düşmemesidir: A kötü giderken B ancak “az iyi” gidiyor. Bir sonraki örnekte, getirileri gerçekten farklı yönlerde savrulan iki hisse ile çok daha ilginç bir grafik elde edeceğiz.

■

10.3 Çeşitlendirmenin İşe Yaradığı Durum

Örnek 10.2 (Yüzde Onluk Paylarla Portföyler). A ve B hisse senetlerinden %10'luk paylar ile portföy oluşturarak getirinin ve riskin nasıl değiştiğini inceleyiniz. Bunun için 1991–1995 yılları arasındaki 6'şar aylık dönemlerin getirilerini göz önüne alalım.

	1991- 1	1991- 2	1992- 1	1992- 2	1993- 1	1993- 2	1994- 1	1994- 2	1995- 1	1995- 2
A (%)	155	50	2	80	190	74	10	35	36	−34
B (%)	−23	−37	415	−27	76	118	−52	6	45	17

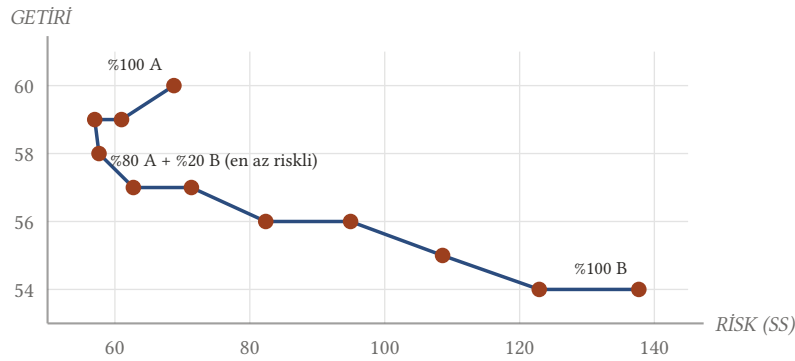
Çözüm.

Yukarıdaki veriler yardımıyla aşağıdaki tablo elde edilir:

	Ort.	Varyans	SS	$-1SS$	$+1SS$
$\%100A + \%0B$	60	4724,67	68,74	−8,74	128,74
$\%90A + \%10B$	59	3716,34	60,96	−1,96	119,96
$\%80A + \%20B$	59	3248,62	57,00	2,00	116,00
$\%70A + \%30B$	58	3321,06	57,63	0,37	115,63
$\%60A + \%40B$	57	3934,31	62,72	−5,72	119,72
$\%50A + \%50B$	57	5087,72	71,33	−14,33	128,33
$\%40A + \%60B$	56	6781,73	82,35	−26,35	138,35
$\%30A + \%70B$	56	9016,34	94,95	−38,95	150,95
$\%20A + \%80B$	55	11791,11	108,59	−53,59	163,59
$\%10A + \%90B$	54	15106,70	122,91	−68,91	176,91
$\%0A + \%100B$	54	18962,44	137,70	−83,70	191,70

Yukarıdaki sonuçlara göre riski en az olan portföy 3. satırdaki $\%80A + \%20B$ portföyüdür. Buna göre bir yatırımcı 1995 yılının sonunda elindeki paranın %80'ini A hissesine, %20'sini B hissesine yatırırsaydı 1996 yılının ilk 6 aylık döneminde elde edeceği ortalama getiri %59 ve bunun riski %57 olacaktı.

Bu sonucu 1 standart sapmaya göre yorumlarsak: 1996 yılının ilk 6 ayında %2'den daha az kâr etme veya zarar etme şansı $\frac{1}{6}$ 'dır, %2 ile %116 arasında getiri elde etme şansı $\frac{2}{3}$ 'tür ve %116'dan daha fazla getiri elde etme şansı $\frac{1}{6}$ 'dır.



Şekil 10.2: Örnek 7.10'un portföyleri geriye kıvrılan bir eğri çiziyor. Sol uçtaki %80A + %20B portföyü, tek başına A'dan da B'den de **daha az risklidir** — çeşitlendirmenin sağladığı kazanç budur. Eğrinin alt kolundaki portföyler ise hem daha riskli hem daha az getirilidir; kimse onları seçmez.

! Grafiğin geriye kıvrılması

Bu kez eğri düz değil, sola doğru bir burun yapıyor. En sol nokta (%80A + %20B) hem tek başına A'dan hem de tek başına B'den **daha az risklidir** — üstelik getirisi B'ninkinden yüksektir. Bu, çeşitlendirmenin ilk somut kazancıdır ve iki hissenin farklı dönemlerde iyi/kötü gitmesinden kaynaklanır: 1992-1 döneminde A yalnızca %2 getirirken B %415 getirmiştir.

Yukarıdaki tablodan başka bir portföy seçsek riskin arttığını görürüz. Bazılarında risk artmasına rağmen getiri azalmaktadır (eğrinin alt kolu). Burada seçilecek risk oranı yatırımcının tercihinine kalmaktadır; seçilen risk oranına karşı getirinin en büyük olması için **eğrinin üst tarafında kalan noktalar** seçilmelidir.

Eğer yatırımcının amacı bu iki hisse senedinden en yüksek getiri oranına sahip portföye yatırım yapmak ise, parasının tamamını A hisse senedine yatırmalıdır. Eğer amacı riski düşük bir portföy oluşturmak ise %80A + %20B portföyüne yatırım yapmalıdır. Eğer göze aldığı bir risk oranı var ise, örneğin %70 olsun, bu durumda yatırımcı oluşturulan portföylerin riski en fazla %70 olanlar arasından getiri oranı en fazla olanı tercih etmelidir.

Bazı durumlarda ise getirilerdeki değişiklik oranlarına karşılık ilgili risklerdeki değişiklik oranlarının karşılaştırılması da karar vermede faydalı olabilir.

■

10.4 İki'den Daha Fazla Hisse Senedinden Portföy

İki hisse ile çalışırken tek bir korelasyona bakmak yetiyordu. Hisse sayısı arttıkça hesap hızla büyür — ama getirisi de büyür: çeşitlendirme, portföy riskini tek tek hisselerin riskinin çok altına indirebilir.

İki'den daha fazla hisse senedinden en az riskli portföyü oluşturmak için biraz daha fazla işlem yapmak gerekir. Hisse senedi sayısı arttıkça optimal portföyü bulmak için daha fazla sayıda işlem yapmak gerekmektedir. Çünkü

- 2 hisse senedi için 1 korelasyon,
- 3 hisse senedi için 3 korelasyon,
- 4 hisse senedi için 6 korelasyon

hesaplanması gerekmektedir.

i Kaç korelasyon?

n hisse arasında hesaplanacak korelasyon sayısı, n elemandan 2'li seçim sayısıdır:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$n = 2$ için 1, $n = 3$ için 3, $n = 4$ için 6, $n = 10$ için 45, $n = 50$ için 1225 eder. Sayı **karesel** büyüdüğü için belli bir noktadan sonra el ile hesap imkânsızlaşır; bilgisayar kullanmak zorunlu olur.

Örnek 10.3 (Üç Hisseden Portföyler). A , B ve C hisse senetleri için 1996–1997 yılları arasındaki 3'er aylık getiri verileri aşağıdaki tabloda verilmiştir. %25'lik paylar ile portföyler oluşturarak

a) En büyük getiriye sahip portföyü, **b)** En düşük riske sahip portföyü, **c)** %30 risk göze alınmışsa tercih edilmesi gereken portföyü, **d)** $\frac{2}{3}$ ihtimal ile kaybetmeyeceğiniz en iyi portföyü belirleyiniz.

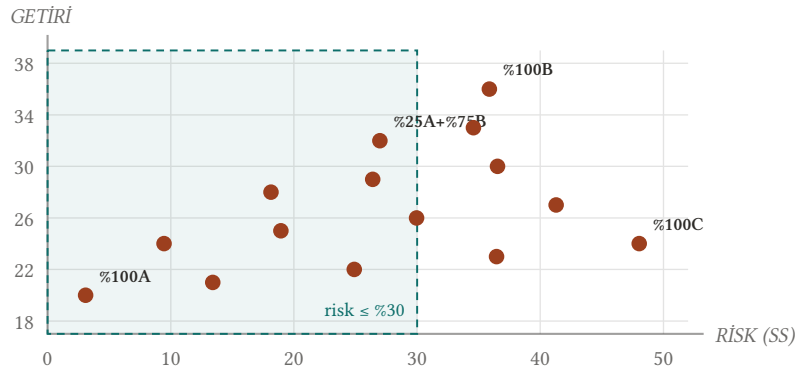
	1996-1	1996-2	1996-3	1996-4	1997-1	1997-2	1997-3	1997-4
A 'nın getiri oranları (%)	26	22	20	20	17	16	19	21
B 'nin getiri oranları (%)	92	24	27	15	54	79	9	−12
C 'nin getiri oranları (%)	127	−34	8	29	41	−11	28	5

Çözüm.

%25'lik paylaşımlara göre elde ettiğimiz ortalama getiri değerleri ve standart sapmalar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Payların toplamı 1 olmak zorunda olduğundan toplam 15 portföy vardır.

Portföy	Ort.	Varyans	SS	$-1SS$	$+1SS$
%100 A + %0 B + %0 C	20	9,57	3,09	16,91	23,09
%75 A + %25 B + %0 C	24	89,29	9,45	14,55	33,45
%75 A + %0 B + %25 C	21	179,96	13,41	7,59	34,41
%50 A + %50 B + %0 C	28	328,75	18,13	9,87	46,13
%50 A + %25 B + %25 C	25	358,65	18,94	6,06	43,94
%50 A + %0 B + %50 C	22	619,57	24,89	−2,89	46,89
%25 A + %75 B + %0 C	32	727,94	26,98	5,02	58,98
%25 A + %50 B + %25 C	29	697,07	26,40	2,60	55,40

Portföy	Ort.	Varyans	SS	$-1SS$	$+1SS$
%25A + %25B + %50C	26	897,22	29,95	-3,95	55,95
%25A + %0B + %75C	23	1328,39	36,45	-13,45	59,45
%0A + %100B + %0C	36	1286,86	35,87	0,13	71,87
%0A + %75B + %25C	33	1195,22	34,57	-1,57	67,57
%0A + %50B + %50C	30	1334,61	36,53	-6,53	66,53
%0A + %25B + %75C	27	1705,01	41,29	-14,29	68,29
%0A + %0B + %100C	24	2306,43	48,03	-24,03	72,03



Şekil 10.3: Örnek 7.11'in on beş portföyü artık bir eğri değil bir **bulut** oluşturuyor. Yatırımcı bu bulutun sol-üst sınırındaki noktalarla ilgilenir: aynı riske karşılık en yüksek getiri verenler. Taralı bölge, %30'u aşmayan risk sınırını gösterir.

a) En büyük ortalama getiri 36 ile

$$\%0A + \%100B + \%0C$$

yani paranın tamamının B hisse senedine yatırıldığı portföydür.

b) En küçük standart sapma 3,09 ile

$$\%100A + \%0B + \%0C$$

yani paranın tamamının A hisse senedine yatırıldığı portföydür.

c) Riski %30'u geçmeyen portföyler tablonun ilk dokuz satırıdır; bunlar arasında en fazla getiri oranına (32) sahip olan

$$\%25A + \%75B + \%0C$$

portföyüdür.

d) Portföylerin 1 standart sapmaya göre yorumları yapıldığında, $\frac{2}{3}$ ihtimal ile kaybettirmeyen portföyler $-1SS$ sütunu **pozitif** olanlardır: ilk beş satır ile $\%25A + \%75B$, $\%25A + \%50B + \%25C$ ve $\%0A + \%100B$. Bunlar arasında yine $\frac{2}{3}$ ihtimal ile en fazla getiri oranına sahip olan

$$\%0A + \%100B + \%0C$$

yani paranın tamamının B hisse senedine yatırıldığı portföydür.

i Tablodaki bir kuruş

Üçüncü satırın standart sapması **yuvarlanmış varyansın** karekökü alınarak bulunmuştur: $\sqrt{179,96} = 13,4149 \rightarrow 13,41$. Varyans yuvarlanmadan karekök alınsaydı 13,42 çıkar, buna bağlı olarak $-1SS$ ve $+1SS$ sütunları da bir kuruş değişirdi. Bu derste yuvarlama sırası her zaman önce varyans, sonra karekök biçimindedir.

■

10.5 Alıştırımlar

Alıştırma 10.1 (Getirileri Ters Yönlü İki Hisse). A ve B gibi iki hisse senedinin 4 yıl için getirileri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl
A 'nın getiri oranları (%)	20	10	5	0
B 'nin getiri oranları (%)	-10	-5	0	5

a) Bu hisse senetlerinden $\%25$ 'lik paylar ile portföyler oluşturup, o portföylerin ortalama getirilerini ve risklerini hesaplayıp sonuçları bir tabloda gösteriniz. b) Risk-getiri grafiğini oluşturunuz. c) En fazla $\%3$ risk göze alınabiliyorsa hangi portföye yatırım yapılmalıdır? d) $\%5$ 'e kadar risk alınabiliyorsa hangi portföye yatırım yapılmalıdır? e) $\%67$ olasılıkla kaybettirmeyecek en iyi portföy hangisidir?

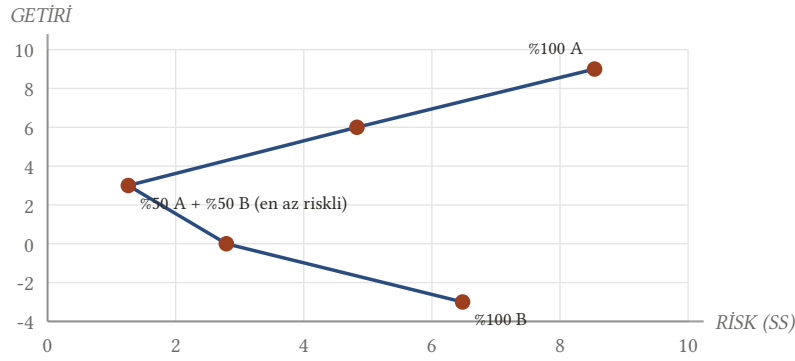
Çözüm.

a) Her portföyün yıllık getirileri ağırlıklı ortalamayla bulunur; örneğin $\%50A + \%50B$ portföyünün 1. yıl getirisi $0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot (-10) = 5,00$ 'dir.

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl	Ortalama	Varyans	SS
$\%100A + \%0B$	20,00	10,00	5,00	0,00	9	73,00	8,54
$\%75A + \%25B$	12,50	6,25	3,75	1,25	6	23,31	4,83
$\%50A + \%50B$	5,00	2,50	2,50	2,50	3	1,58	1,26
$\%25A + \%75B$	-2,50	-1,25	1,25	3,75	0	7,81	2,79
$\%0A + \%100B$	-10,00	-5,00	0,00	5,00	-3	42,00	6,48

Üçüncü satırın hesabı: getiriler 5,00; 2,50; 2,50; 2,50 olduğundan ortalama $\frac{12,5}{4} = 3,125 \approx 3$; farkların kareleri $2^2 + 0,5^2 + 0,5^2 + 0,5^2 = 4,75$ ve $SS^2 = \frac{4,75}{3} = 1,58$, $SS = \sqrt{1,58} = 1,26$.

b) Risk-getiri grafiği.



Şekil 10.4: Alıştırma 1'in portföyleri. En az riskli karışım uçlarda değil **ortada**: %50A + %50B portföyünün riski 1,26, oysa tek başına A'nın riski 8,54, B'nin 6,48.

c) Riski %3'ü geçmeyen portföyler: %50A + %50B ($SS = 1,26$, ortalama 3) ve %25A + %75B ($SS = 2,79$, ortalama 0). Bunlar arasında getirisi en yüksek olan

%50A + %50B portföyü

d) Riski %5'i geçmeyen portföyler: %50A + %50B (1,26), %25A + %75B (2,79) ve %75A + %25B (4,83). En yüksek getirili olan

%75A + %25B portföyü (ortalama 6)

e) “%67 olasılıkla kaybettirmemek”, 1 standart sapma bandının **alt ucunun pozitif** olması demektir; yani $\bar{x} - SS > 0$ olmalıdır:

Portföy	$\bar{x} - SS$	Kaybettirmez mi?
%100A	$9 - 8,54 = 0,46$	evet
%75A + %25B	$6 - 4,83 = 1,17$	evet
%50A + %50B	$3 - 1,26 = 1,74$	evet
%25A + %75B	$0 - 2,79 = -2,79$	hayır
%0A + %100B	$-3 - 6,48 = -9,48$	hayır

Koşulu sağlayan üç portföy arasında getirisi en yüksek olan

%100A portföyü (ortalama 9)

■

Alıştırma 10.2 (Dört Yıllık İkinci Portföy Alıştırması). A ve B gibi iki hisse senedinin 4 yıl için getirileri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl
A'nın getiri oranları (%)	30	0	20	10
B'nin getiri oranları (%)	-10	5	15	-5

a) Bu hisse senetlerinden %25'lik paylar ile portföyler oluşturup, o portföylerin ortalama getirilerini ve risklerini hesaplayıp sonuçları bir tabloda gösteriniz. b) Risk-getiri grafiğini oluşturunuz. c) En fazla %

10 risk göze alınabiliyorsa hangi portföye yatırım yapılmalıdır? **d)** %8'e kadar risk alınabiliyorsa hangi portföye yatırım yapılmalıdır? **e)** %3'ten daha fazla kaybettirme olasılığı 0,17 olan portföy hangisidir?

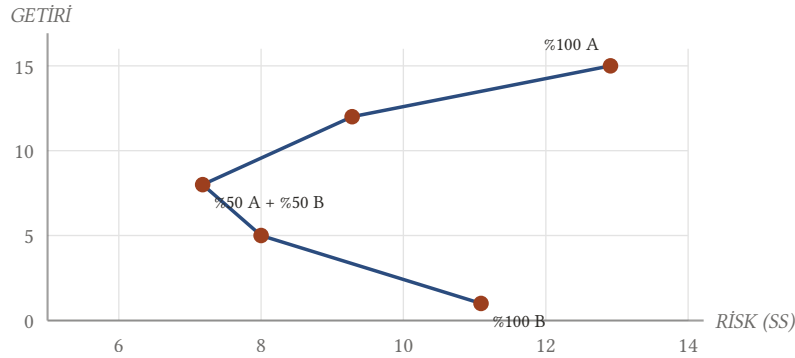
Çözüm.

a)

	1.yıl	2.yıl	3.yıl	4.yıl	Ortalama	Varyans	SS
%100A + %0B	30,00	0,00	20,00	10,00	15	166,67	12,91
%75A + %25B	20,00	1,25	18,75	6,25	12	86,06	9,28
%50A + %50B	10,00	2,50	17,50	2,50	8	51,58	7,18
%25A + %75B	0,00	3,75	16,25	-1,25	5	64,06	8,00
%0A + %100B	-10,00	5,00	15,00	-5,00	1	123,00	11,09

En az riskli portföy yine **ortadadır**: %50A + %50B karışımının riski 7,18, oysa tek başına A'nın riski 12,91, B'nin 11,09'dur.

b) Risk-getiri grafiğı.



Şekil 10.5: Alıştırma 2'nin portföyleri. Burada da eğri geriye kıvrılıyor: %50A + %50B karışımı hem B'den daha az riskli hem de ondan çok daha yüksek getirili.

c) Riski %10'u geçmeyenler: %75A + %25B (9,28, ortalama 12), %50A + %50B (7,18, ortalama 8) ve %25A + %75B (8,00, ortalama 5). En yüksek getirili

%75A + %25B portföyü (ortalama 12)

d) Riski %8'i geçmeyenler: %50A + %50B (7,18, ortalama 8) ve %25A + %75B (8,00, ortalama 5). En yüksek getirili

%50A + %50B portföyü (ortalama 8)

e) $0,17 \approx \frac{1}{6}$ olduğuna göre soru, 1 standart sapma bandının alt ucunun tam olarak -3 olduğu portföyü soruyor:

Portföy	$\bar{x} - SS$
%100A	$15 - 12,91 = 2,09$
%75A + %25B	$12 - 9,28 = 2,72$
%50A + %50B	$8 - 7,18 = 0,82$
%25A + %75B	$5 - 8,00 = -3,00$
%0A + %100B	$1 - 11,09 = -10,09$

Aranan portföy

$$\boxed{\%25A + \%75B}$$

çünkü bu portföy için “%3’ten fazla kaybetme” olayının olasılığı, 1 SS bandının sol kuyruğu olan $\frac{1}{6} \approx 0,17$ ’dir.

■

11. Portföyün Yeniden Dengelenmesi ve Çeşitlendirme

Portföy bir kez kurulup bırakılmaz. Piyasadaki dalgalanmalar zamanla payları kaydırır ve portföyün getiri-risk düzeyi yatırımcının hedeflediği yerden sapar. Bu düzeye geri dönmek için yapılan işleme portföyün **yeniden dengelenmesi** denir.

Dersin bu son bölümünde önce yeniden dengelemenin ne olduğunu ve portföy yönetiminin pratik kurallarını sıralıyor, sonra çeşitlendirmenin nereye kadar işe yaradığını – ve hangi noktada durduğunu – görüyoruz.

11.1 Bir Portföyün Yeniden Dengelenmesi

Tanım 11.1 (Yeniden Dengeleme). Bir yatırımcı portföyünü hazırlarken kendine belirli bir risk ve getiri oranı tespit eder; yatırımını bu hedefe göre yapar. Zaman ilerledikçe pazarda oluşan dalgalanmalar sonunda mevcut portföyünün getirisi ve riski hedeflediği değerden sapmış olabilir. Yatırımcının portföyünü tekrar eski hedeflediği getiri-risk düzeyine getirmek için portföyünde yaptığı değişikliğe **portföyün yeniden dengelenmesi** denir.

Bunun için daha önceki bölümlerde öğrenildiği şekilde yeni verilerle tekrar hesap yapılır ve portföyün nasıl olması gerektiği tespit edilir. Bu amaçla elindeki bazı hisselerin satılıp yerine başka varlıkların alınmasına karar verilir.

Portföy oluştururken ve portföyü dengelerken dikkat edilmesi gereken temel prensipler şunlardır:

1. Risk taşıması ancak uzun vadelerde dengelenebilir.
2. Bir yatırımda güven isteniyorsa getiriler düşük seviyede tutulmalıdır.
3. Risk ve kazanç birbirlerine ayrılmayacak derecede karışmışlardır. Yüksek risk olmadan yüksek getiri beklemeyin; düşük getiriye razı olmadan güven beklemeyin.
4. Standart sapmasını bilmediğiniz bir hisse senedini satın almayınız.
5. İstatistiki sonuçlara göre hisse senetleri uzun süre elde tutulmalıdır. Borsanın kısa dönem değişimlerinden etkilenmeyip endişelenmeden beklenmelidir.
6. Uzun vadelerde hisse senetlerinin tahvil ve bonolardan daha yüksek getiri sağladığı istatistiki olarak tespit edilmiştir.
7. Bazen bir portföyün riskini küçültmek için portföye küçük miktarda çok riskli bir hisse senedi eklenebilir.
8. Riskli bir hisse senedi elde ne kadar uzun süre tutulursa zayıf bir sonuç elde etme şansı o kadar azalır.
9. Bir hissenin yeteri kadar uzun bir dönemdeki sonuçları bize bu hissenin gelecekteki getiri ve riskleri için iyi bir rehber olur.
10. İki varlığın uzun vadedeki getirileri ve riskleri benzer ise ve aralarındaki korelasyon zayıf ise, bunlar arasındaki en uygun karışımlar %50-%50'ye yakın olanlardır.
11. Eğer iki varlığın uzun vadede benzer getiri ve riskleri varsa ve aralarındaki korelasyon tam değilse, bu ikisini belli bir oranda karıştırmak riski azaltır ve getiriye artırır.
12. Bir portföyün yeniden dengelenmesi ayda bir, 3 ayda bir, 6 ayda bir veya en az senede bir defa olmalıdır. Bir hisse senedi iyi sonuç vermişse onun portföydeki riski artar; dolayısıyla yeterli bir miktarda satılarak bu para ile daha zayıf performans gösteren varlıklara yatırılmalıdır. Böylece hedeflenen getiri-risk düzeyi elde tutulmuş olur.
13. Belirsiz olan ortamlarda portföyü farklı varlıklar ile çeşitlendirmek en iyisidir.
14. Bir portföy ne kadar çeşitlendirilse de riski tamamen ortadan kaldırmak mümkün değildir. Her zaman fazladan bir piyasa riski söz konusudur. Unutulmamalıdır ki ekonomik felaketler ulusal sınır tanımazlar.
15. İki varlık arasında yapılan korelasyon hesapları aylık, 3 aylık, 6 aylık veya yıllık yapıldıklarında farklı çıkarlar. Bir portföyün yeniden dengelenmesi en küçük korelasyonun olduğu periyotta yapılmalıdır.
16. Portföyün yeniden dengelenmesi riskin azaltılması yanında ayrıca psikolojik rahatlama da sağlar.

17. Küçük riskli portföyler daha çok kısa vadeli iç borçlanma senetleri (bonolar vb.) içermelidir.
18. Portföye yatırdığınız paraya tekrar ne zaman nakit olarak ihtiyacınızın olabileceğini baştan düşünün. Eğer yatırdığınız paraya uzun süre ihtiyacınız olmayacaksa, portföyünüzde hisse senetlerine o kadar fazla yer verebilirsiniz.

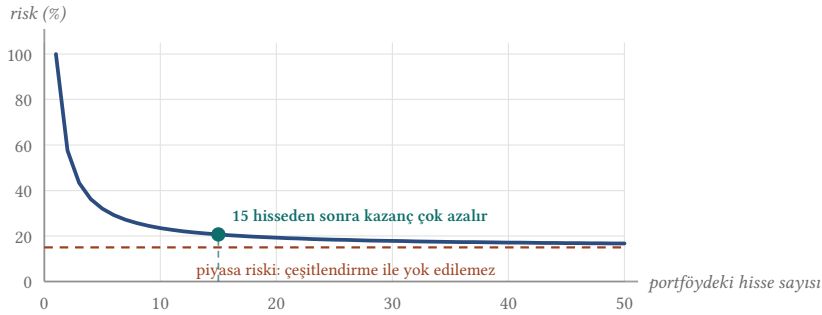
💡 Yedinci prensip nasıl olabilir?

“Riski küçültmek için çok riskli bir hisse eklemek” ilk bakışta çelişkili görünür, ama **Örnek 10.2**’de tam olarak bunu gördük: *B* hissesinin riski (137,70) *A*’ninkinden (68,74) iki kat fazlaydı; buna rağmen %20 oranında eklenmesi portföyün riskini 57,00’ye düşürdü. Önemli olan hissenin tek başına riski değil, diğerleriyle **aynı anda** hareket edip etmediğidir.

11.2 Çeşitlendirmenin Faydası

Tanım 11.2 (Çeşitlendirme). Portföydeki hisse senetlerinin sayısını artırdığımızda standart sapmanın, yani riskin azalmasına **çeşitlendirme** denir.

Yani çeşitlendirme yoluyla riski azaltmak mümkündür. Hisse senedi sayısı arttıkça hesapların basit hesap makineleriyle yapılması zorlaşır; bunun için bilgisayar kullanılması zorunlu olur. Hisse senedi sayısının artması hâlinde portföyün riskinin nasıl azaldığı aşağıdaki grafikte gösterilmektedir.



Şekil 11.1: Portföye yeni hisse eklendikçe risk düşer, ama düşüş hızla yavaşlar ve bir tabana dayanır: hisselerle özgü riskler birbirini götürebilir, piyasanın tamamını etkileyen risk götüremez. Bu yüzden 15–20 hisseden sonra yeni hisse eklemenin faydası küçüktür.

2013 Nobel Ekonomi Ödülü sahibi Eugene Fama tarafından yapılan bir çalışmada, portföye giren hisse senetleri arasında korelasyon katsayısının 1’den küçük olması ve her bir hissenin payının aynı olması koşulu ile portföydeki hisse senedi sayısı 15’i geçtikten sonra riskin %4 civarında olduğu gösterilmiştir.

! Çeşitlendirmenin sınırı

Grafikteki eğri sıfıra inmez, bir tabana dayanır. Hisselere özgü riskler (bir şirketin fabrikasının yanması, yöneticisinin istifası) birbirini götürebilir; ama bütün piyasayı birlikte etkileyen riskler (kriz, savaş, faiz kararı) götüremez. Bu yüzden çeşitlendirme ile yok edilemeyen kısma **piyasa riski** denir ve 14. prensipte söylenen tam olarak budur.

Böylece dersi, başladığımız yerin tam karşısında bitiriyoruz: ilk bölümde paranın zaman içindeki değerini **kesin** olarak hesaplıyorduk; son bölümde ise geleceğin belirsiz olduğunu kabul edip bu belirsizliği ölçmeyi ve yönetmeyi öğrendik. Finans matematiğinin iki yarısı budur.