

Kısmi Diferansiyel Denklemler

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

	Giriş	6
1	Kısmi Diferansiyel Denklemlere Giriş ve Sınıflandırma	7
1.1	Temel Notasyonlar ve Kavramsal Çerçeve	7
1.2	Mertebe (Order)	7
1.3	Homojenlik (Homogeneity)	8
1.4	Lineerlik (Linearity) ve Alt Sınıfları	8
1.5	Denklemler Arası Kapsama İlişkisi	10
1.6	Karışık Sınıflandırma Örnekleri	10
2	Çözüm Türleri ve Analitik Örnekler	12
2.1	Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Çözüm Kavramı	12
2.2	Çözüm Türleri	12
2.3	Analitik Örnekler	12
3	Yardımcı Koşullar ve İyi Konulmuş Problemler	16
3.1	Başlangıç Koşulları	16
3.2	Sınır Koşulları	16
3.3	Veri ve Verinin Sürekliliği	17
3.4	İyi Konulmuş Problem	17
4	Doğrudan İntegrasyon ve ADD Yaklaşımı	18
4.1	Doğrudan İntegrasyon Yöntemi	18
4.2	Denklemi ADD Gibi Görmek	19
4.3	Karma Türevli Denklemlerde Ara Değişken	20
5	Birinci Mertebeden Denklemlerin Ortaya Çıkışı	22
5.1	Keyfi Sabitlerin Yok Edilmesi	22
5.2	Keyfi Fonksiyonların Yok Edilmesi	23
5.3	İki Fonksiyonlu Aileler: $F(u, v) = 0$	24
6	Sabit Katsayılı Lineer Denklemler	26
6.1	Koordinat Dönüşümü	26
6.2	Üstel Sağ Taraf: Özel Çözüm	27
7	Değişken Katsayılı Lineer Denklemler ve Karakteristik Denklemler	29
7.1	Lineer Operatör ve İntegral Yüzeyi	29
7.2	Genel Dönüşüm	29

7.3	Karakteristik Denklem	30
7.4	Çözümlü Uygulama	30
8	Kuazi-Linear Denklemler ve Lagrange Yöntemi	32
8.1	Lagrange Yöntemi	32
8.2	Çözümlü Uygulamalar	33
9	Kuazi-Linear Denklemlerde Cauchy Problemi	37
9.1	Geometrik Bakış	37
9.2	Cauchy Problemi	37
9.3	Çözümlü Uygulamalar	38
10	Tam, Genel ve Tekil İntegraller	43
10.1	Üç İntegral Türü	43
10.2	Çözümlü Uygulama: Birim Küreler Ailesi	44
10.3	Clairaut Tipine İlk Bakış	45
11	Uyumlu Sistemler	46
11.1	Uyumluluğun Koşulu	46
11.2	Uyumluluk Parantezi	46
11.3	Çözümlü Uygulama	47
12	Charpit Yöntemi	49
12.1	Charpit–Lagrange Sistemi	49
12.2	Çözümlü Uygulamalar	50
12.3	Alıştırma	52
13	Charpit Yönteminde Özel Durumlar	53
13.1	Durum 1: Yalnızca p ve $q - f(p, q) = 0$	53
13.2	Durum 2: x ve y Yok $- f(z, p, q) = 0$	53
13.3	Durum 3: Ayrılabilir Denklemler $- f_1(x, p) = f_2(y, q)$	54
13.4	Durum 4: Clairaut Tipi $- z = p x + q y + h(p, q)$	55
14	Linear Olmayan Denklemlerde Cauchy Problemi	57
14.1	Karakteristik Şerit Denklemleri	57
14.2	Başlangıç Şeridinin Kurulması	57
14.3	Çözümlü Uygulama	58
15	İkinci Mertebeden Linear Denklemler ve Operatör Gösterimi	61
15.1	Türev Operatörleri	61
15.2	Süperpozisyon İlkesi	61
15.3	Sınıflandırma Alıştırmaları	62
16	Sabit Katsayılı Denklemler: Operatörü Çarpanlara Ayırma	63
16.1	Operatör Polinomu ve Çarpanlara Ayırma	63

16.2	Tek arpanın Genel özümü	63
16.3	özümlü Uygulamalar	64
17	Hiperbolik, Eliptik ve Parabolik Denklemler	66
17.1	Deneme Fonksiyonu	66
17.2	Üç Tip	66
17.3	Üç Prototip	67
17.4	özümlü Uygulamalar	67

Giriş

Bu bölümde, çok değişkenli fonksiyonların değişim oranlarını modelleyen kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) analitik yapılarını inceliyoruz. Temel sınıflandırma prensiplerinden başlayarak birinci mertebeden denklemlerin Lagrange ve Charpit yöntemlerine, Cauchy problemlerine ve ikinci mertebeden denklemlerin hiperbolik–eliptik–parabolik tip sınıflandırmasına uzanıyoruz.

i Not

Aşağıdaki müfredatta bağlantılı olan başlıkların notları hazırdır. Bağlantısız başlıklar sırasıyla yazılmakta olup tamamlandıkça bu sayfaya eklenecektir.

1. Kısmi Diferansiyel Denklemlere Giriş ve Sınıflandırma

Kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) tarihsel gelişimi, 18. yüzyılda fiziksel dünyadaki dinamikleri ve sürekli ortamları matematiksel olarak modelleme çabalarına dayanır. Jean le Rond d'Alembert'in titreşen bir telin hareketini açıklamak için geliştirdiği tek boyutlu dalga denklemi, Leonhard Euler'in akışkanlar mekaniğine kazandırdığı formüller ve Joseph Fourier'nin ısı yayılımı teorisi bu disiplinin temel taşlarını oluşturur.

Bu fiziksel problemler, tek bir bağımsız değişken içeren adi diferansiyel denklemlerin (ADD) aksine, doğadaki olayların hem zamana hem de uzaydaki konuma bağlı olarak çok boyutlu incelenmesi gerektiğini göstererek KDD alanının doğmasını sağlamıştır.

Bu bölümde, kısmi diferansiyel denklemlerin temel kavramsal çerçevesini kuracağız. Önce bağımlı ve bağımsız değişkenleri ayırt etmeyi öğrenecek, ardından denklemleri analitik olarak inceleyebilmek için kritik öneme sahip olan **meritebe**, **homojenlik** ve **lineerlik** kriterlerine göre sınıflandırma yapılarını ele alacağız.

1.1 Temel Notasyonlar ve Kavramsal Çerçeve

Matematiksel analize geçmeden önce, bir denklemin kısmi diferansiyel denklem olarak nitelendirilebilmesi için gereken temel şartı net biçimde ortaya koymalıyız.

Tanım 1.1 (Kısmi Diferansiyel Denklem (KDD)). Birden fazla bağımsız değişkene göre türevler içeren; bir veya daha fazla bağımlı değişkenin ve bu değişkenlerin kısmi türevlerinin arasındaki ilişkiyi gösteren denklemlere **kısmi diferansiyel denklem** denir.

Bir diferansiyel denklemle karşılaştığımızda yapmamız gereken ilk iş, hangi değişkenin fonksiyonun kendisini (bağımlı), hangilerinin ise girdileri (bağımsız) temsil ettiğini belirlemektir. Bu ayrım, türev operatörlerinin kime uygulandığını anlamamızı sağlar.

Örnek 1.1 (Bağımlı ve Bağımsız Değişken Analizi). Aşağıdaki yaygın diferansiyel modellemelerde değişkenlerin rollerini inceleyelim:

- $\frac{\partial z}{\partial s} + s^2 \frac{\partial z}{\partial t} = 0$ denklemi verilmiş olsun. Burada $z = z(s, t)$ formunda bir fonksiyon aranmaktadır.
 - z : bağımlı değişken
 - s, t : bağımsız değişkenler
- Fizikte dalga yayılımını modelleyen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ denkleminde $u = u(x, t)$ yapısı mevcuttur.
 - u : bağımlı değişken
 - x (konum) ve t (zaman): bağımsız değişkenler

1.2 Meritebe (Order)

Bir denklemin yapısını ve çözümünün zorluk derecesini belirleyen en somut özelliklerinden biri meritebesidir. Diferansiyel denklemlerin çözüm uzaylarının boyutu doğrudan bu kavrama bağlı olarak şekillenir.

Tanım 1.2 (Denklemin Meritebesi). Bir kısmi diferansiyel denklemde yer alan **en yüksek meritebeli kısmi türevin meritebesine**, o diferansiyel denklemin **meritebesi** (order) denir.

Meritebe bulunurken denklemdaki tüm türevli terimler tek tek taranır ve uygulanan en yüksek türev operatörü baz alınır. Terimlerin kendi kuvvetleri (örneğin bir türevin karesinin alınması) meritebeyi etkilemez – kuvvet, denklemin *dericesiyle* ilgilidir, meritebesiyle değil.

Örnek 1.2 (Mertebe Belirleme).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + u^2 = 0$$

Çözüm.

- **Analiz:** Denklemden yer alan en yüksek türev, x 'e göre iki ve t 'ye göre bir kez türev alınarak oluşturulmuş olan $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$ terimidir.
- **Sonuç:** Denklem 3. **mertebeden** bir KDD'dir.

1.3 Homojenlik (Homogeneity)

Denklemlerin süperpozisyon ilkesine uyup uymadığını anlamak ve genel çözüme ulaşırken izlenecek stratejiyi belirlemek için homojenlik kavramı incelenmelidir. Bu kavramı en pratik hâliyle denklemin terimlerine bakarak ayırt edebiliriz.

Tanım 1.3 (Homojenlik). Bir kısmi diferansiyel denklemde tüm terimler bağımlı değişkeni (u) veya onun en az bir kısmi türevini ($u_x, u_{xx}, u_y, \dots$) içeriyorsa, bu denklem **homojen** (homogeneous) bir denklemdir.

Eğer denklemden u veya türevlerini içermeyen; yalnızca bağımsız değişkenlerden ($x, y, t, \dots$) ya da sabit sayılardan oluşan yalın bir terim varsa, bu denklem **homojen olmayan** (nonhomogeneous) bir denklemdir.

Örnek 1.3 (Homojen ve Homojen Olmayan Denklem Farkı). Aşağıdaki iki denklemin homojenlik durumlarını inceleyelim:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5u = 0$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5u = x^2 + \sin(y)$

Çözüm.

- **1. denklem:** Tüm terimlerde ($u_{xx}, u_{yy}, -5u$) bağımlı değişken veya türevi mevcuttur; dışarıdan eklenmiş yalın bir terim yoktur. Denklem **homojendir**.
- **2. denklem:** Eşitliğin sağ tarafındaki $x^2 + \sin(y)$ ifadesinde u veya türevi yoktur. Yalnızca bağımsız değişkenlerden oluşan bu terimler homojenliği bozar. Denklem **homojen değildir**.

1.4 Lineerlik (Linearity) ve Alt Sınıfları

Lineerlik, matematiksel analizin en güçlü sınır çizgisidir. Doğrusal yapıdaki bir denklemde temel kural şudur: bağımlı değişken u ve tüm türevleri **yalnızca birinci dereceden** olmalı, asla birbirleriyle çarpılmamalı ve sinüs, karekök gibi fonksiyonların içine girmemelidir.

Bir KDD'yi lineerlik yapısına göre dört ana sınıfta inceleriz.

1.4.1 A) Lineer (Doğrusal) Denklemler

Tanım 1.4 (Lineer Denklem). Bütün terimlerdeki bağımlı değişken u ve tüm kısmi türevlerinin birinci dereceden olduğu, kendi aralarında çarpılmadığı ve katsayılarının **yalnızca bağımsız değişkenlerden** (veya sabitlerden) oluştuğu denklemlere **lineer** denir.

i Yaygın yanlış: bağımsız değişkenle çarpmak

Türevleri x veya y gibi bağımsız değişkenlerle çarpmak lineerliği **bozmaz**. Örneğin $xu_{xx} + y^2u_{yy} = 0$ denklemi tamamen lineerdir. Bir denklemin lineerlikten çıkması için u^2 , $(u_x)^2$ gibi doğrusallığı bozan bir terim barındırması şarttır.

Örnek 1.4 (Lineer Denklem Analizi).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 2 — en yüksek türev u_{xx} .
- **Homojenlik:** Homojen değil; sağ tarafta u içermeyen x^2 terimi var.
- **Lineerlik:** Lineer — u ve türevlerinin derecesi 1, birbirleriyle çarpılmamışlar, katsayıları sabit.

1.4.2 B) Yarı-Lineer (Semilinear) Denklemler

Bir denklemde doğrusal olmayan bir terim varsa, o denklemin sınıfını belirlemek için **en yüksek mertebeli türevlerin katsayılarına** bakarız.

Tanım 1.5 (Yarı-Lineer Denklem). Denklemde doğrusallığı bozan bir terim bulunmasına rağmen, **en yüksek mertebeli türevlerin** kendileri birinci dereceden ise ve başlarındaki katsayılar **yalnızca bağımsız değişkenlerden** (veya sabitlerden) oluşuyorsa, bu denkleme **yarı-lineer** (semilinear) denir.

Bu denklem türünde doğrusallığı bozan unsurlar her zaman en yüksek mertebeden daha düşük seviyedeki terimlerde bulunur.

Örnek 1.5 (Yarı-Lineer Denklem Analizi).

$$xu_{xx} + yu_{yy} - (u_x)^2 = 0$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 2
- **Homojenlik:** Homojen
- **Lineerlik:** Yarı-linear — $(u_x)^2$ terimi doğrusallığı bozar; fakat en yüksek mertebeli türevler olan u_{xx} ve u_{yy} 'nin katsayıları olan x ve y yalnızca bağımsız değişkenlerdir.

1.4.3 C) Kuazi-Lineer (Quasilinear) Denklemler

Doğrusallıktan bir adım daha uzaklaştığımızda, en yüksek mertebeli türevlerin katsayılarına bağlı değişkenin kendisi veya türevleri sızmaya başlar.

Tanım 1.6 (Kuazi-Lineer Denklem). En yüksek mertebeli türevlerin kendileri hâlâ birinci dereceden olmasına rağmen, bu yüksek mertebeli terimlerin katsayılarında bağımlı değişken u veya onun **daha düşük mertebeli türevleri** çarpım durumunda bulunuyorsa, denklem **kuazi-lineerdir**.

Örnek 1.6 (Kuazi-Lineer Denklem Analizi).

$$u \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 2
- **Homojenlik:** Homojen

- **Lineerlik:** Kuazi-lineer — en yüksek mertebeli u_{xx} teriminin baş katsayısında bağımlı değişken u çarpanı vardır.

1.4.4 D) Nonlinear (Tam Doğrusal Olmayan) Denklemler

Tanım 1.7 (Nonlinear Denklem). En yüksek mertebeden türevlerin kendi aralarında çarpıldığı, kuvvetlerinin alındığı (örneğin u_{xx}^2) veya doğrusal olmayan aşkın fonksiyonların (örneğin $\sin(u_{xx})$) içinde yer aldığı denklemlere bütünüyle **nonlinear** denir.

Örnek 1.7 (Nonlinear Denklem Analizi).

$$u_{xxx}^2 + u_{xy} = 0$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 3
- **Homojenlik:** Homojen
- **Lineerlik:** Nonlinear — en yüksek mertebeli u_{xxx} türevinin doğrudan karesi alındığı için doğrusal form tamamen kaybedilmiştir.

1.5 Denklemler Arası Kapsama İlişkisi

Bu dört sınıflandırma birbirinden tamamen bağımsız kutular değildir; aksine tıpkı bir matruşka bebeği gibi birbirini kapsayan matematiksel alt kümelerdir. Her dar tanım, bir geniş tanımın özel hâlidir:

$$\text{Lineer} \subset \text{Yarı-Lineer} \subset \text{Kuazi-Lineer} \subset \text{Nonlinear (Genel)}$$

Bunu şu mantıkla düşünebiliriz:

1. **Lineer denklemler**, yarı-lineer denklemlerin doğrusallığı bozan alt terimlerinin sıfır olduğu özel hâlidir.
2. **Yarı-lineer denklemler**, kuazi-lineer denklemlerin en yüksek mertebeli terim katsayısındaki u çarpanının yok olup yerine yalnızca bağımsız değişkenlerin geldiği özel hâlidir.
3. **Kuazi-lineer denklemler** de, genel nonlinear KDD'lerin, en azından yüksek mertebeli türevlerinin doğrusal kalmayı başardığı düzenli alt kümesidir.

1.6 Karışık Sınıflandırma Örnekleri

Örnek 1.8 (Burgers Denklemi).

$$u_t + u \cdot u_x = 0$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 1 — en yüksek türevler u_t ve u_x .
- **Homojenlik:** Homojen; her terimde u veya türevi var.
- **Lineerlik:** Kuazi-lineer — en yüksek türev olan u_x 'in başında u çarpanı var.

Örnek 1.9 (Dalga Denklemi Varyasyonu).

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sin(x)$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 2 — en yüksek türevler u_{tt} ve u_{xx} .
- **Homojenlik:** Homojen değil; sağ taraftaki $\sin(x)$ terimi u içermez.
- **Lineerlik:** Lineer — u ve tüm türevleri birinci dereceden, katsayıları sabittir.

Örnek 1.10 (Eikonal Denklem).

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 1 — en yüksek türevler u_x ve u_y .
- **Homojenlik:** Homojen değil; sağ tarafta u içermeyen sabit bir terim var.
- **Lineerlik:** Nonlineer — en yüksek türevlerin karesi alınmış, doğrusal yapı bozulmuştur.

Örnek 1.11 (Karmaşık Katsayılı Denklem).

$$yu_{xx} + x^2u_{yy} - u^2 = e^x$$

Çözüm.

- **Mertebe:** 2 — en yüksek türevler u_{xx} ve u_{yy} .
- **Homojenlik:** Homojen değil; sağ tarafta e^x terimi var.
- **Lineerlik:** Yarı-lineer — u^2 terimi doğrusallığı bozar, ancak en yüksek mertebeli türevlerin katsayıları olan y ve x^2 yalnızca bağımsız değişkenlerden oluşur.

2. Çözüm Türleri ve Analitik Örnekler

2.1 Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Çözüm Kavramı

Bir diferansiyel denklemin yapısını ve çözüm kümelerini anlamak, ileri matematiksel analizin temelidir. Kısmi diferansiyel denklemlerde (KDD) “çözüm” tanımı, denklemin sağlandığı bölge ve fonksiyonun süreklilik şartlarıyla doğrudan ilişkilidir.

Tanım 2.1 (KDD Çözümü). Bir kısmi diferansiyel denklemde bağımlı değişken u ’nun bağımsız değişkenlerinin $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgesinde sınırlandığını varsayalım. m . mertebeden bir KDD’nin D bölgesindeki çözümü; D bölgesinin tüm iç noktalarında denklemleri sağlayan ve C^m sınıfından (en az m kez sürekli türevlenebilir) olan bir fonksiyondur.

i Sabitler yerine keyfi fonksiyonlar

Adi diferansiyel denklemlerin genel çözümleri keyfi **sabitler** (c_1, c_2 vb.) içerirken; kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümleri, kısmi türev alma işleminin doğası gereği keyfi **fonksiyonlar** içerir.

2.2 Çözüm Türleri

Diferansiyel denklemleri çözerken karşımıza çıkan fonksiyonlar, içerdikleri keyfi ifadeler ve denklemleri sağlama biçimlerine göre üç ana kategoriye ayrılır. Bunu bir hiyerarşi gibi düşünebilirsiniz.

Tanım 2.2 (Genel Çözüm (General Solution)). Diferansiyel denklemin mertebesine uygun sayıda **keyfi fonksiyon** (veya nadiren keyfi sabit) içeren, denklemleri sağlayan en geniş çözüm ailesidir. Çözümlerin “ana şablonu” olarak düşünülebilir.

Tanım 2.3 (Özel Çözüm (Particular Solution)). Genel çözümün içindeki keyfi fonksiyonlara belirli bir kural seçilerek elde edilen **nokta atışı** çözümdür. Genellikle problemde verilen başlangıç veya sınır koşulları uygulandığında genel çözümden özel çözüme geçiş yapılır.

Tanım 2.4 (Tekil Çözüm (Singular Solution)). Diferansiyel denklemleri kusursuz biçimde sağlamasına rağmen **genel çözüm şablonundan hiçbir şekilde türetilmeyen** istisnai çözümlerdir. Genel çözümdeki keyfi fonksiyonlara hangi değeri verirsek verelim tekil çözüme ulaşamayız; o, kendi başına denklemleri sağlayan bağımsız bir fonksiyondur.

2.3 Analitik Örnekler

Aşağıdaki örneklerde KDD çözümlerinin doğrulanması ve genel çözümler üzerinden diferansiyel denklemlerin nasıl inşa edileceği incelenmiştir.

Örnek 2.1. Aşağıdaki denklemin çözümünü inceleyiniz.

$$u_x^4 + u_y^4 = 0$$

Çözüm.

Reel sayılar kümesinde çalıştığımız için, iki çift kuvvetin toplamının sıfır olabilmesi ancak her iki tabanın ayrı ayrı sıfır olmasıyla mümkündür. Dolayısıyla şu şartlar sağlanmalıdır:

$$u_x = 0 \quad \text{ve} \quad u_y = 0$$

İlk olarak $u_x = 0$ denklemini ele alırsak, u fonksiyonunun x 'e göre değişmediğini anlarız. Bu durumda u yalnızca y 'ye bağlı bir fonksiyon olmalıdır:

$$u = A(y)$$

Şimdi bu ifadeyi $u_y = 0$ denkleminde yerine koyalım:

$$u_y = A'(y) = 0$$

Bir fonksiyonun türevi sıfırsa o fonksiyon bir sabite eşittir; öyleyse $A(y) = c$ olmak zorundadır:

$$u(x, y) = c$$

Sonuç olarak genel çözüm $u(x, y) = c$ şeklindedir. Yani bu istisnai durumda KDD'nin genel çözümü, beklenenin aksine **keyfi fonksiyon içermez**; yalnızca keyfi bir sabit içerir.

■

Örnek 2.2. $f \in C^1$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere, $u(x, y) = \sqrt{y} f(2x + y)$ fonksiyonunun

$$yu_x - 2yu_y + u = 0$$

kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$u(x, y) = \sqrt{y} f(2x + y)$ fonksiyonunun x ve y 'ye göre kısmi türevlerini alalım. f için zincir kuralını, u_y türevi için ayrıca çarpım kuralını uygulayacağız:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{y} \cdot 2f'(2x + y)$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(2x + y) + \sqrt{y} \cdot f'(2x + y)$$

Şimdi bu türevleri $yu_x - 2yu_y + u = 0$ denkleminde yerine yazalım:

$$y (2\sqrt{y} f') - 2y \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} f + \sqrt{y} f' \right) + \sqrt{y} f = 2y\sqrt{y} f' - \frac{2y}{2\sqrt{y}} f - 2y\sqrt{y} f' + \sqrt{y} f$$

$\frac{y}{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$ sadeleştirmesini yaparak düzenlersek:

$$2y\sqrt{y} f' - \sqrt{y} f - 2y\sqrt{y} f' + \sqrt{y} f = 0$$

Zıt işaretli terimler birbirini götürür ve $0 = 0$ eşitliği sağlanır. Çözüm matematiksel olarak doğrulanmıştır.

■

Örnek 2.3. f tek değişkenli keyfi sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$u(x, y) = xf(xy) + y^2$$

ifadesi hangi kısmi diferansiyel denklemin genel çözümüdür?

Çözüm.

İfade bir adet keyfi fonksiyon (f) içerdiğinden, aradığımız kısmi diferansiyel denklemin **birinci mertebeden** olmasını bekleriz. Temel hedefimiz, türev işlemleri yardımıyla denklemin içindeki f ve f' ifadelerinden kurtulmaktır.

İlk olarak u 'nun kısmi türevlerini (çarpım ve zincir kurallarıyla) alalım:

$$u_x = 1 \cdot f(xy) + x \cdot (yf'(xy)) = f(xy) + xyf'(xy)$$

$$u_y = x \cdot (x f'(xy)) + 2y = x^2 f'(xy) + 2y$$

Bu iki denklemdeki f' terimlerini eşitleyip yok etmek için ilk denklemi x ile, ikinci denklemi y ile çarpalım:

$$xu_x = x f(xy) + x^2 y f'(xy)$$

$$yu_y = x^2 y f'(xy) + 2y^2$$

Şimdi f' terimlerini yok etmek için ilk denklemden ikinciyi çıkaralım:

$$xu_x - yu_y = x f(xy) + x^2 y f'(xy) - (x^2 y f'(xy) + 2y^2)$$

$$xu_x - yu_y = x f(xy) - 2y^2$$

Elde ettiğimiz denklemin içinde hâlâ keyfi f fonksiyonu barınmaktadır. Bundan tamamen kurtulmak için başlangıçta verilen $u = x f(xy) + y^2$ eşitliğinden $x f(xy)$ ifadesini yalnız bırakalım:

$$x f(xy) = u - y^2$$

Bunu bulduğumuz denklemde yerine yazdığımızda:

$$xu_x - yu_y = (u - y^2) - 2y^2$$

$$xu_x - yu_y = u - 3y^2$$

Böylece keyfi fonksiyondan tamamen arındırılmış, istenen kısmi diferansiyel denklemi elde etmiş oluruz.

■

Örnek 2.4. $u = u(x, y, z)$ olmak üzere,

$$u_{xy} = 0$$

kısmi diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Öncelikle $u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ olduğunu hatırlayalım. Denklemi çözmek için her iki tarafa sırasıyla kısmi integral uygulayacağız.

İlk olarak denklemin her iki tarafının x 'e göre integralini alalım. Kısmi integral aldığımız için oluşacak integrasyon "sabit" sıradan bir sayı değil; x 'ten bağımsız olan, ancak y ve z 'ye bağlı olabilen keyfi bir fonksiyon olmalıdır:

$$\int u_{xy} \partial x = \int 0 \partial x \implies u_y = f(y, z)$$

Şimdi elde ettiğimiz $u_y = f(y, z)$ denkleminin her iki tarafının y 'ye göre kısmi integralini alalım. Bu kez integrasyon "sabit", y 'den bağımsız olan ve x ile z 'ye bağlı keyfi bir $G(x, z)$ fonksiyonu olacaktır:

$$\int u_y \partial y = \int f(y, z) \partial y$$

$f(y, z)$ fonksiyonunun y 'ye göre integrali de yine y ve z 'ye bağlı başka bir keyfi fonksiyon üretecektir; buna $F(y, z)$ diyelim. Sonuç olarak genel çözüm

$$u(x, y, z) = F(y, z) + G(x, z)$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü üzere çözüm, birbirinden bağımsız iki keyfi fonksiyondan oluşmaktadır.

■

i Mertebe ve keyfi fonksiyon sayısı ilişkisi

Genel bir kural olarak; n tane bağımsız değişken içeren m . mertebeden bir KDD'nin genel çözümü, $n - 1$ değişkene bağlı m adet keyfi fonksiyonla ifade edilebilir. Ancak yukarıdaki [Örnek 2.1](#) içinde gördüğümüz üzere, denklemin yapısına bağlı olarak **bu kural her zaman geçerli olmak zorunda değildir**.

3. Yardımcı Koşullar ve İyi Konulmuş Problemler

Fiziksel sistemleri modelleyen kısmi diferansiyel denklemlerin genellikle **sonsuz sayıda çözümü** vardır. Örneğin **çözüm türleri** bölümünde gördüğümüz genel çözümler, keyfi fonksiyonlar içeriyordu; keyfi fonksiyonun her seçimi ayrı bir çözümdür.

Oysa fiziksel bir problemin tek bir cevabı olmalıdır: telin yarın saat üçteki şekli, odanın şu köşesindeki sıcaklık... Bu tek çözümü sonsuz aday arasından seçebilmek için, modellenen sistemi daha ayrıntılı tarif eden **yardımcı koşullar** koymamız gerekir. Bu koşullar iki kategoriye ayrılır.

3.1 Başlangıç Koşulları

Tanım 3.1 (Başlangıç Koşulu). Fiziksel sistemin incelenmeye başlandığı **anda**, D bölgesinin tamamında sağlanması gereken koşullara **başlangıç koşulları** (initial conditions) denir.

Tipik bir başlangıç koşulu, u 'nun ve zamana göre türevlerinin bir kombinasyonunu belirler; örneğin $u(x, 0) = g(x)$ veya $u_t(x, 0) = h(x)$ gibi.

Isı denkleminde çubuğun başlangıç sıcaklık dağılımı, dalga denkleminde telin başlangıç şekli ve başlangıç hızı bu türdendir.

3.2 Sınır Koşulları

Tanım 3.2 (Sınır Koşulu). Denklemin geçerli olduğu D bölgesinin **sınırında** (∂D üzerinde) sağlanması gereken koşullara **sınır koşulları** (boundary conditions) denir.

Sınır koşullarının üç özel biçimine ayrı adlar verilmiştir. Aşağıda g, α, β fonksiyonları ∂D sınırı üzerinde tanımlıdır ve $\frac{\partial u}{\partial n}$, sınırın dışı doğru normal yönündeki türevi gösterir.

Tanım 3.3 (Dirichlet, Neumann ve Robin Koşulları).

- **Dirichlet koşulu:** çözümün kendisi sınırda belirlenir:

$$u = g$$

- **Neumann koşulu:** çözümün normal türevi sınırda belirlenir:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g$$

- **Karma (Robin) koşulu:** ikisinin bir doğrusal kombinasyonu belirlenir:

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$$

🔍 Fiziksel yorum

Isı iletimi örneğinde üç koşulun somut karşılığı vardır:

- **Dirichlet:** sınırın sıcaklığı sabit tutuluyor (çubuğun ucu buz banyosunda).
- **Neumann:** sınırdan geçen ısı akısı belirli ($\partial u / \partial n = 0$ ise sınır yalıtılmış).
- **Robin:** sınırdaki ısı akısı, sınır sıcaklığı ile ortam sıcaklığının farkıyla orantılı (Newton soğuma yasası).

3.3 Veri ve Verinin Sürekliliği

Tanım 3.4 (Problemin Verisi). Belirlenen başlangıç ve sınır koşulu fonksiyonları ile denklemin homojen olmayan terimindeki katsayı fonksiyonlarının tümüne, KDD ile modellenen problemin **verisi** (data) denir.

Tanım 3.5 (Veriye Sürekli Bağlılık). Verideki küçük değişiklikler çözümde de buna karşılık gelen küçük değişiklikler oluşturuyorsa, çözüm **veriye sürekli olarak bağlıdır** denir.

Bu kavram, modellemenin pratikte işe yaramasının güvencesidir: başlangıç sıcaklığını ölçerken yapılan binde birlik bir hata, öngörülen çözümü tanınmaz hâle getirmemelidir.

3.4 İyi Konulmuş Problem

Tanım 3.6 (İyi Konulmuş (Well-Posed) Problem). Bir problem aşağıdaki üç koşulu birden sağlıyorsa **iyi konulmuş** (well-posed) olarak adlandırılır:

- Problemin bir çözümü **vardır** (varlık),
- çözüm **tektir** (teklik),
- çözüm **veriye sürekli olarak bağlıdır** (kararlılık).

Bu koşullardan herhangi biri sağlanmıyorsa problem **kötü konulmuş** (ill-posed) olarak adlandırılır.

i Üç koşul üç ayrı soruya karşılık gelir

- **Varlık:** koyduğumuz koşullar çok mu kısıtlayıcı? Hiçbir fonksiyon hepsini birden sağlayamıyor olabilir.
- **Teklik:** koşullar yeterince kısıtlayıcı mı? Hâlâ birden çok aday kalıyor olabilir.
- **Kararlılık:** ölçüm hatası çözümü patlatıyor mu? Özellikle ters problemlerde en sık bozulan koşul budur.

Yardımcı koşul seçmek bir denge işidir: az koşul tekliği, fazla koşul varlığı bozar.

Bundan sonraki bölümlerde önce denklemleri çözmeyi öğreneceğiz; Cauchy problemlerini incelerken (kuazi-lineer denklemlerde Cauchy problemi) bu kavramlar tekrar karşımıza çıkacak.

4. Doğrudan İntegrasyon ve ADD Yaklaşımı

Bazı kısmi diferansiyel denklemler, hiçbir özel kurama gerek kalmadan çözülebilir. Bu bölümde iki basit ama güçlü yaklaşımı ele alıyoruz: denklemi **doğrudan integre etmek** ve denklemi **adi diferansiyel denklem (ADD) gibi görmek**. İkisinde de tek yeni fikir vardır: kısmi işlemlerde integrasyon “sabitleri”, diğer değişkenlerin keyfi **fonksiyonlarıdır**.

4.1 Doğrudan İntegrasyon Yöntemi

Denklemin sol tarafı tek bir kısmi türev ifadesinden oluşuyorsa, uygun değişkenlere göre ardışık integral alınarak çözüme ulaşılır.

Örnek 4.1 (Ardışık İki İntegral). $u_{xy} = x^3 + y^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Önce her iki tarafın x 'e göre kısmi integralini alalım; integrasyon sabiti y 'nin keyfi bir fonksiyonu olur:

$$u_y = \frac{x^4}{4} + y^3 x + f(y)$$

Şimdi y 'ye göre integral alalım; bu kez sabit, x 'in keyfi bir fonksiyonudur:

$$u = \frac{x^4}{4} y + \frac{y^4}{4} x + F(y) + G(x), \quad F(y) = \int f(y) dy$$

f keyfi olduğundan F de keyfidir. Genel çözüm iki keyfi fonksiyon içerir; denklemin ikinci mertebeden olmasıyla uyumludur.

■

Örnek 4.2 (Üç Katlı İntegrasyon). $u_{xyy} = \sin(x - y)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

y 'ye göre bir kez integre edelim:

$$u_{xy} = \int \sin(x - y) dy = \cos(x - y) + f(x)$$

Bir kez daha y 'ye göre integre edelim:

$$u_x = \int [\cos(x - y) + f(x)] dy = -\sin(x - y) + f(x)y + g(x)$$

Son olarak x 'e göre integre edelim:

$$u(x, y) = \cos(x - y) + f_1(x)y + f_2(x) + g_1(y)$$

Burada $f_1 = \int f dx$ ve $f_2 = \int g dx$ olup $g_1(y)$, x -integrasyonunun keyfi fonksiyonudur. Üçüncü mertebeden denklemin genel çözümü üç keyfi fonksiyon içermektedir: f_1, f_2, g_1 .

■

! Hangi değişkene göre integre ettiğinize dikkat

$\int \cos(x - y) dy = -\sin(x - y)$ ama $\int \cos(x - y) dx = \sin(x - y)$ 'dir; zincir kuralındaki iç türev y 'ye göre -1 , x 'e göre $+1$ olduğundan işaretler zıttır. Doğrudan integrasyonda hataların çoğu bu işaretlerden çıkar; her adımda sonucu türevleyerek sağlama yapın.

4.2 Denklemi ADD Gibi Görmek

Denklem yalnızca **tek bir bağımsız değişkene göre** türevler içeriyorsa, diğer değişkenler işlem boyunca sabit gibi davranır; denklem o değişkende bir adi diferansiyel denklemdir. ADD kuramının bütün araçları (karakteristik denklem, integrasyon çarpanı, belirsiz katsayılar) aynen kullanılabilir — tek farkla: keyfi **sabitler** yerine diğer değişkenlerin keyfi **fonskiyonları** yazılır.

Örnek 4.3 (Sabit Katsayılı Görünümlü Denklem). $u_{xx} - y^2 u = xy^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Denklemde yalnızca x 'e göre türev vardır; y 'yi parametre olarak görüp x 'te ikinci mertebeden lineer bir ADD gibi çözelim.

Homojen kısım. $u_{xx} - y^2 u = 0$ için karakteristik denklem

$$\lambda^2 - y^2 = 0 \implies (\lambda - y)(\lambda + y) = 0 \implies \lambda = y, \quad \lambda = -y$$

olduğundan

$$u_h = c_1(y) e^{yx} + c_2(y) e^{-yx}$$

Katsayıların y 'nin keyfi fonskiyonları olduğuna dikkat edin.

Özel çözüm. Sağ taraf x 'te birinci dereceden olduğundan belirsiz katsayılar yöntemiyle $u_p = A_1(y)x + A_2(y)$ deneyelim. $(u_p)_{xx} = 0$ olduğundan

$$-y^2 (A_1(y)x + A_2(y)) = xy^2 \implies A_1(y) = -1, \quad A_2(y) = 0$$

bulunur; yani $u_p = -x$ 'tir.

Genel çözüm:

$$u(x, y) = c_1(y) e^{yx} + c_2(y) e^{-yx} - x$$

■

Örnek 4.4 (İntegrasyon Çarpanı ile). $z_x + z = x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Denklem x 'te birinci mertebeden lineer bir ADD biçimindedir: $y' + P(x)y = Q(x)$ kalıbında $P = 1$ 'dir. İntegrasyon çarpanı

$$\mu = e^{\int 1 dx} = e^x$$

Homojen kısım. $e^x z_x + e^x z = 0 \implies (e^x z)_x = 0 \implies e^x z = c_1(y)$, yani

$$z_h = e^{-x} c_1(y)$$

Özel çözüm. $z_p = A_1(y)x + A_0(y)$ deneyelim: $(z_p)_x = A_1$ olduğundan

$$A_1 + A_1 x + A_0 = x \implies A_1 = 1, \quad A_1 + A_0 = 0 \implies A_0 = -1$$

Buradan $z_p = x - 1$ ve genel çözüm

$$z(x, y) = e^{-x} c_1(y) + x - 1$$

■

4.3 Karma Türevli Denklemlerde Ara Değişken

Karma türev içeren bazı denklemler, önce bir kez integre edilerek veya bir türev ara değişken olarak adlandırılarak ADD biçimine indirgenebilir.

Örnek 4.5 (Önce İntegre Et, Sonra ADD Çöz). $u_{xy} + 3u_x = 6x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Her terimde x 'e göre bir türev ortak; denklemin her iki tarafını x 'e göre integre edelim (sabit yerine y 'nin keyfi fonksiyonu gelir):

$$u_y + 3u = 3x^2 + f(y)$$

Bu, y 'de birinci mertebeden lineer bir denklemdir. İntegrasyon çarpanı $\mu(y) = e^{\int 3 dy} = e^{3y}$:

$$e^{3y}u_y + 3e^{3y}u = e^{3y} (3x^2 + f(y)) \implies (e^{3y}u)_y = 3x^2e^{3y} + e^{3y}f(y)$$

y 'ye göre integre edelim; $F(y) = \int e^{3y}f(y) dy$ ve keyfi fonksiyon $G(x)$ olmak üzere

$$e^{3y}u = x^2e^{3y} + F(y) + G(x)$$

Her iki tarafı e^{3y} 'ye bölersek genel çözüm

$$u(x, y) = x^2 + e^{-3y}F(y) + e^{-3y}G(x)$$

olur. F keyfi olduğundan $e^{-3y}F(y)$ ifadesi y 'nin keyfi bir fonksiyonudur; $\varphi(y)$ diyelim:

$$u(x, y) = x^2 + \varphi(y) + e^{-3y}G(x)$$

Sağlama. $u_x = 2x + e^{-3y}G'(x)$ ve $u_{xy} = -3e^{-3y}G'(x)$ olduğundan

$$u_{xy} + 3u_x = -3e^{-3y}G'(x) + 6x + 3e^{-3y}G'(x) = 6x \checkmark$$

■

⚠ Üstel çarpan hangi değişkene bağlı?

Son örnekte $G(x)$ 'in önündeki çarpan e^{-3y} 'dir, e^{-3x} **değil**. Çarpan, integrasyon çarpanından ($\mu = e^{3y}$) geri bölerken geldiği için üssünde daima integrasyon çarpanının değişkeni bulunur. Sağlama yapıldığında fark hemen görülür: $e^{-3x}G(x)$ yazılıysaydı u_{xy} terimi tamamen sıfırlanır ve denklem sağlanmazdı.

Örnek 4.6 (Ara Değişken Tanımlama). $x u_{xy} + 2u_y = y$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Her terimde u_y ortak; $v = u_y$ diyelim. Denklem

$$x v_x + 2v = y \implies v_x + \frac{2}{x}v = \frac{y}{x}$$

hâline gelir: x 'te birinci mertebeden lineer ADD. İntegrasyon çarpanı

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln |x|} = x^2$$

$$x^2 v_x + 2xv = xy \Rightarrow (x^2 v)_x = xy \Rightarrow x^2 v = \frac{x^2 y}{2} + f(y)$$

Buradan

$$u_y = v = \frac{y}{2} + \frac{1}{x^2} f(y)$$

Son olarak y 'ye göre integre edelim; $f_1(y) = \int f(y) dy$ ve keyfi $g(x)$ ile

$$u(x, y) = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{x^2} f_1(y) + g(x)$$

Sağlama. $u_y = \frac{y}{2} + \frac{1}{x^2} f'_1$, $u_{xy} = -\frac{2}{x^3} f'_1$ olup $x u_{xy} + 2u_y = -\frac{2}{x^2} f'_1 + y + \frac{2}{x^2} f'_1 = y \checkmark$

💡 Yöntemin özeti

1. Denklemden yalnızca bir değişkene göre türev varsa: diğer değişkenleri parametre say, ADD gibi çöz, sabitleri keyfi fonksiyon yap.
2. Karma türev tek bir dış türevle sınırlıysa: önce o değişkene göre integre et.
3. Bütün terimlerde aynı iç türev ortaksa: onu v olarak adlandır, v için çözüp geri integre et.

Bu basit yöntemlerin yetmediği durumlar için sıradaki bölümlerde sistematik kuramlar kuracağız; ilk adım [birinci mertebeden denklemlerin nasıl ortaya çıktığını](#) anlamaktır.

5. Birinci Mertebeden Denklemlerin Ortaya Çıkışı

$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$ biçimindeki birinci mertebeden denklemlerin çözüm yöntemlerine geçmeden önce, bu denklemlerin **nereden geldiğini** görelim. Birinci mertebeden bir KDD, tipik olarak bir yüzey ailesinden **keyfi sabitlerin veya keyfi fonksiyonların yok edilmesiyle** ortaya çıkar. Bu bakış açısı, ileride “genel çözüm neden keyfi fonksiyon içerir” ve “tam integral neden iki sabit taşır” sorularının cevabını şimdiden verir.

5.1 Keyfi Sabitlerin Yok Edilmesi

Örnek 5.1 (Merkezleri z Eksen Üzerindeki Küreler). a ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = a^2 \quad (1)$$

ailesi, merkezleri z eksen boyunca uzanan kürelerin kümesidir. Her iki tarafın x 'e ve y 'ye göre türevini alalım ($z = z(x, y)$):

$$2x + 2(z - c)z_x = 0 \implies x + (z - c)z_x = 0 \quad (2)$$

$$2y + 2(z - c)z_y = 0 \implies y + (z - c)z_y = 0 \quad (3)$$

(2)'den $(z - c) = -x/z_x$ çekilip (3)'te kullanılırsa (ya da (2) $\cdot z_y - (3) \cdot z_x$ alınır) c yok olur:

$$y z_x - x z_y = 0 \quad (4)$$

Aile denklemleri (1), birinci mertebeden KDD olan (4)'ün bir çözümüdür; üstelik a ve c ne seçilirse seçilsin.

Bu örneği genelleştirelim. İki parametrelili bir yüzey ailesi

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \quad (5)$$

verilsin. x 'e ve y 'ye göre türev alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z_x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z_y = 0 \quad (6)$$

elde edilir. (5) ve (6)'daki üç denklemden a ve b parametreleri yok edilirse

$$f(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (7)$$

biçiminde birinci mertebeden bir KDD kalır.

i Parametre sayısı ile mertebeli ilişkisi

İki bağımsız değişken varken elimizde üç denklem (F, F_x, F_y) ve yok edilecek iki parametre vardır; hesap tam denk gelir ve **birinci** mertebeden tek bir denklem çıkar. Bu yüzden iki parametrelili her yüzey ailesi, birinci mertebeden bir KDD'nin çözüm ailesidir. Bu gözlem, **tam integral** kavramının temelidir.

Örnek 5.2 (Keyfi Sabitleri Yok Etme). Aşağıdaki ailelerden a ve b sabitlerini yok ederek birer KDD elde ediniz.

a) $z = (x + a)(y + b)$ **b)** $ax^2 + by^2 + z^2 = 1$ **c)** $2z = (ax + y)^2 + b$

Çözüm.

a) Türevleri alalım:

$$z_x = y + b, \quad z_y = x + a$$

Bunlar tam olarak çarpanların kendileridir; yerine koyarsak

$$z = (x + a)(y + b) = z_y \cdot z_x \Rightarrow \boxed{z = z_x z_y}$$

b) Türev alalım:

$$2ax + 2z z_x = 0 \Rightarrow ax^2 = -x z z_x, \quad 2by + 2z z_y = 0 \Rightarrow by^2 = -y z z_y$$

Aile denkleminde yerine koyarsak

$$-x z z_x - y z z_y + z^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x z z_x + y z z_y = z^2 - 1}$$

c) Türevleri alalım:

$$z_x = a(ax + y), \quad z_y = ax + y$$

İkinci eşitlikten $ax + y = z_y$; bunu birincide kullanırsak $z_x = a z_y$, yani $a = z_x / z_y$. Ayrıca $a = (z_y - y) / x$ olduğundan

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{z_y - y}{x} \Rightarrow \boxed{x z_x = z_y^2 - y z_y}$$

■

5.2 Keyfi Fonksiyonların Yok Edilmesi

Aile, keyfi sabit yerine **keyfi bir fonksiyon** içeriyorsa, türevler alınıp f ve f' yok edilerek yine birinci mertebeden bir denklem elde edilir. **Çözüm türleri** bölümünde $u = xf(xy) + y^2$ örneğini bu teknikle çözmüştük; şimdi dağarcığı genişletelim.

Örnek 5.3 (Keyfi Fonksiyonu Yok Etme). Aşağıdaki her ailenin sağladığı birinci mertebeden KDD'yi bulunuz (f keyfi, türevlenebilir).

a) $z = xy + f(x^2 + y^2)$ b) $z = x + y + f(xy)$ c) $z = \left(\frac{xy}{z}\right)$ d) $z = f(x - y)$

Çözüm.a) $w = x^2 + y^2$ diyelim:

$$z_x = y + 2xf'(w), \quad z_y = x + 2yf'(w)$$

 f' terimlerini yok etmek için birinciye y , ikinciye x ile çarpıp çıkaralım:

$$y z_x - x z_y = y^2 + 2xyf' - x^2 - 2xyf' \Rightarrow \boxed{y z_x - x z_y = y^2 - x^2}$$

b) $z_x = 1 + yf'(xy)$, $z_y = 1 + xf'(xy)$. Birinciye x , ikinciye y ile çarpıp çıkaralım:

$$x z_x - y z_y = x + xyf' - y - xyf' \Rightarrow \boxed{x z_x - y z_y = x - y}$$

c) $w = xy/z$ diyelim; z her iki tarafta da bulunduğundan türevler örtük alınır:

$$z_x = f'(w) \cdot \frac{yz - xy z_x}{z^2}, \quad z_y = f'(w) \cdot \frac{xz - xy z_y}{z^2}$$

Tarafta oransak f' sadeleşir:

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{yz - xy z_x}{xz - xy z_y} \Rightarrow z_x (xz - xy z_y) = z_y (yz - xy z_x)$$

$$xz z_x - xy z_x z_y = yz z_y - xy z_x z_y \Rightarrow \boxed{x z_x = y z_y} \quad (z \neq 0)$$

d) $z_x = f'(x - y)$ ve $z_y = -f'(x - y)$ olduğundan

$$\boxed{z_x + z_y = 0}$$

■

5.3 İki Fonksiyonlu Aileler: $F(u, v) = 0$

Aile, iki bilinen ifadenin keyfi bir bağıntısıyla verilmişse — yani F keyfi olmak üzere $F(u(x, y, z), v(x, y, z)) = 0$ biçimindeyse — yine tek bir birinci mertebeden denklem elde edilir: iki türev denkleminde F_u/F_v oranı yok edilir.

Örnek 5.4 (İki Bileşenli Aile). F keyfi, türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$$

ailesinin sağladığı birinci mertebeden KDD'yi bulunuz.

Çözüm.

$u = x^2 + y^2 + z^2$ ve $v = z^2 - 2xy$ diyelim. Zincir kuralıyla x 'e ve y 'ye göre türev alalım:

$$F_u (2x + 2z z_x) + F_v (2z z_x - 2y) = 0 \quad (*)$$

$$F_u (2y + 2z z_y) + F_v (2z z_y - 2x) = 0 \quad (**)$$

(*)'dan oranı çekelim:

$$\frac{F_u}{F_v} = -\frac{2z z_x - 2y}{2x + 2z z_x} = \frac{y - z z_x}{x + z z_x}$$

(**)'a yerleştirip $F_v \neq 0$ ile sadeleştirelim:

$$\frac{y - z z_x}{x + z z_x} (y + z z_y) + (z z_y - x) = 0$$

Paydayla çarpıp açalım:

$$(y - z z_x)(y + z z_y) + (z z_y - x)(x + z z_x) = 0$$

$$y^2 + yz z_y - yz z_x - z^2 z_x z_y + xz z_y + z^2 z_x z_y - x^2 - xz z_x = 0$$

$$(y^2 - x^2) + z z_y(x + y) - z z_x(x + y) = 0 \Rightarrow (x + y) \left[(y - x) + z (z_y - z_x) \right] = 0$$

$x + y \neq 0$ olduğundan aranan denklem

$$\boxed{z (z_y - z_x) = x - y}$$

■

💡 Sabit mi yok ediliyor, fonksiyon mu?

İki durumun çıktısı farklı türden çözüm kavramlarına karşılık gelir:

- **İki keyfi sabit** yok edildiğinde ortaya çıkan denklemin o iki sabitli ailesi, denklemin **tam integralidir** (complete integral).
- **Bir keyfi fonksiyon** yok edildiğinde aile, denklemin **genel çözümüne** karşılık gelir.

Yani aynı denkleme hem iki sabitli bir yüzey ailesi hem de keyfi fonksiyonlu bir aile çözüm olabilir; bu ikili yapı **lineer olmayan denklemler** bölümünün ana temasıdır.

Bir sonraki bölümde bu denklemlerin en basit sınıfını, **sabit katsayılı birinci mertebeden lineer denklemleri** çözmeye başlıyoruz.

6. Sabit Katsayılı Lineer Denklemler

Birinci mertebeden lineer denklemlerin genel biçimi

$$A(x, y) z_x + B(x, y) z_y + C(x, y) z = G(x, y)$$

şeklindedir; burada $A, B, C, G \in C^1(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ve D üzerinde $A^2 + B^2 \neq 0$ kabul edilir. Bu bölümde katsayıların **sabit** olduğu durumu ele alıyoruz:

$$A z_x + B z_y + C z = 0, \quad A, B, C \text{ sabit}, \quad A \neq 0 \quad (1)$$

Ana fikir şudur: uygun bir **tersinir koordinat dönüşümüyle** türevlerden birinin katsayısını sıfırlamak. Geriye tek türevli bir denklem kalır ve **ADD yaklaşımıyla** çözülür.

6.1 Koordinat Dönüşümü

Yeni değişkenleri eskilerin lineer kombinasyonları olarak seçelim:

$$\xi = c_{11}x + c_{12}y, \quad \varepsilon = c_{21}x + c_{22}y$$

Dönüşümün **tersinir** olması için Jacobian determinantı sıfırdan farklı olmalıdır:

$$J = \left| \frac{\partial(\xi, \varepsilon)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Zincir kuralıyla türevleri yeni değişkenlere aktaralım:

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\varepsilon \varepsilon_x = c_{11} z_\xi + c_{21} z_\varepsilon$$

$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\varepsilon \varepsilon_y = c_{12} z_\xi + c_{22} z_\varepsilon$$

Denklem (1)'de yerine koyarsak

$$(Ac_{11} + Bc_{12}) z_\xi + (Ac_{21} + Bc_{22}) z_\varepsilon + C z = 0$$

Şimdi z_ε 'un katsayısını sıfırlayacak biçimde seçim yapalım:

$$Ac_{21} + Bc_{22} = 0 \implies c_{21} = B, \quad c_{22} = -A$$

ξ için ise Jacobian'ı bozmayan en basit seçimi yapalım: $c_{11} = 1, c_{12} = 0$. Böylece

$$\xi = x, \quad \varepsilon = Bx - Ay, \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ B & -A \end{vmatrix} = -A \neq 0$$

Dönüşümden sonra denklem tek türevli hâle gelir:

$$A z_\xi + C z = 0 \implies z_\xi + \frac{C}{A} z = 0$$

Bu, ξ 'de birinci mertebeden lineer bir ADD'dir. İntegrasyon çarpanı $e^{(C/A)\xi}$ ile

$$\left(e^{\frac{C}{A}\xi} z \right)_\xi = 0 \implies e^{\frac{C}{A}\xi} z = f(\varepsilon) \implies z = e^{-\frac{C}{A}\xi} f(\varepsilon)$$

Eski değişkenlere dönersek genel çözümü elde ederiz.

Teorem 6.1 (Sabit Katsayılı Homojen Denklemin Genel Çözümü). $A \neq 0$ olmak üzere $Az_x + Bz_y + Cz = 0$ denkleminin genel çözümü, $f \in C^1$ keyfi olmak üzere

$$z(x, y) = e^{-\frac{C}{A}x} f(Bx - Ay)$$

Sağlama. $z_x = -\frac{C}{A}z + Be^{-\frac{C}{A}x}f'$ ve $z_y = -Ae^{-\frac{C}{A}x}f'$ olduğundan

$$Az_x + Bz_y = -Cz + ABe^{-\frac{C}{A}x}f' - ABe^{-\frac{C}{A}x}f' = -Cz \checkmark$$

Örnek 6.1 (Katsayı Seçimiyle Çözüm). $2z_x + 3z_y + 4z = 0$ denkleminin genel çözümünü koordinat dönüşümüyle bulunuz.

Çözüm.

$A = 2, B = 3, C = 4$. Dönüşümü kuralım:

$$\xi = x, \quad \varepsilon = 3x - 2y, \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Denklem $2z_\xi + 4z = 0$, yani $z_\xi + 2z = 0$ olur. İntegrasyon çarpanı $e^{2\xi}$:

$$(e^{2\xi}z)_\xi = 0 \implies e^{2\xi}z = f(\varepsilon) \implies z = e^{-2\xi}f(\varepsilon)$$

Eski değişkenlere dönersek

$$z(x, y) = e^{-2x}f(3x - 2y)$$

Sağlama. $z_x = -2z + 3e^{-2x}f'$, $z_y = -2e^{-2x}f'$:

$$2z_x + 3z_y + 4z = -4z + 6e^{-2x}f' - 6e^{-2x}f' + 4z = 0 \checkmark$$

■

i Aynı denklem Lagrange yöntemiyle

Bu denklem, ileride göreceğimiz **Lagrange yöntemiyle** de çözülebilir:

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{-4z}$$

İlk eşitlikten $3x - 2y = c_1$, birinci ile üçüncüden $ze^{2x} = c_2$ bulunur ve aynı genel çözüme ulaşılır. İki yöntemin aynı cevabı vermesi güzel bir sağlamadır.

6.2 Üstel Sağ Taraf: Özel Çözüm

Sağ tarafı e^{ax+by} biçiminde olan denklemlerde özel çözüm tek bir deneme ile bulunur.

Teorem 6.2 (Üstel Sağ Taraf İçin Özel Çözüm). A, B, C, a, b sabitler ve $Aa + Bb + C \neq 0$ olmak üzere

$$Az_x + Bz_y + Cz = e^{ax+by}$$

denkleminin bir özel çözümü

$$z_p = \frac{1}{Aa + Bb + C} e^{ax+by}$$

ve genel çözümü $z = z_h + z_p$ 'dir; burada z_h , **Teorem 6.1** ile verilen homojen çözümdür.

İspat.

$z_p = \alpha e^{ax+by}$ deneyelim:

$$(z_p)_x = \alpha a e^{ax+by}, \quad (z_p)_y = \alpha b e^{ax+by}$$

Denklemden yerine koyalım:

$$A\alpha a e^{ax+by} + B\alpha b e^{ax+by} + C\alpha e^{ax+by} = e^{ax+by}$$

Her iki tarafı $e^{ax+by} \neq 0$ ile bölelim:

$$\alpha (Aa + Bb + C) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{Aa + Bb + C}$$

■

⚠ Payda sıfırsa deneme çöker

$Aa + Bb + C = 0$ olduğunda e^{ax+by} zaten homojen denklemin bir çözümüdür ve bu deneme sonuç vermez; ADD'lerdeki rezonans durumunun benzeri yaşanır. Bu durumda $z_p = \alpha x e^{ax+by}$ biçiminde, x ile çarpılmış bir deneme yapılır.

Katsayılar sabit olmadığında $\varepsilon = Bx - Ay$ gibi hazır bir seçim işe yaramaz; dönüşümü **denklemin kendisinden** üretmek gerekir. Bu, bir sonraki bölümün konusudur: [değişken katsayılı lineer denklemler ve karakteristik denklem](#).

7. Değişken Katsayılı Lineer Denklemler ve Karakteristik Denklem

Şimdi katsayıların fonksiyon olduğu duruma geçiyoruz:

$$A(x, y) z_x + B(x, y) z_y + C(x, y) z = 0 \quad (1)$$

Sabit katsayılı durumda $\varepsilon = Bx - Ay$ seçimi türevlerden birini yok ediyordu. Katsayılar değişkenken böyle hazır bir formül yoktur; doğru ε 'u **denklemin kendisi** söyler.

7.1 Lineer Operatör ve İntegral Yüzeyi

Denklem (1)'i operatör diliyle yazabiliriz:

$$\mathcal{L}z = \left(A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + C(x, y) \right) z = 0$$

Tanım 7.1 (Çözüm ve İntegral Yüzeyi). $\mathcal{L}z = G$ denkleminin D bölgesindeki çözümü, her $(x, y) \in D$ noktasında ℓ_x ve ℓ_y türevleriyle denklemi sağlayan bir $z = \ell(x, y) \in C^1(D)$ fonksiyonudur.

Çözüme karşılık gelen xyz uzayındaki yüzeye **integral yüzeyi** denir.

i Genel çözümün yapısı

$\mathcal{L}$ lineer olduğundan, $\mathcal{L}z = G$ denkleminin genel çözümü

$$z = z_h + z_p$$

biçimindedir; z_h homojen denklemin ($\mathcal{L}z = 0$) genel çözümü, z_p ise herhangi bir özel çözümdür.

7.2 Genel Dönüşüm

Yeni değişkenleri artık lineer olması gerekmeyen fonksiyonlar olarak seçelim:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \varepsilon = \varepsilon(x, y), \quad J = \left| \frac{\partial(\xi, \varepsilon)}{\partial(x, y)} \right| \neq 0 \quad (2)$$

Zincir kuralıyla

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\varepsilon \varepsilon_x, \quad z_y = z_\xi \xi_y + z_\varepsilon \varepsilon_y \quad (3)$$

olup denklem (1)

$$\underbrace{[A \xi_x + B \xi_y]}_{A_1} z_\xi + [A \varepsilon_x + B \varepsilon_y] z_\varepsilon + \underbrace{C}_{C_1} z = 0 \quad (4)$$

hâlini alır. z_ε 'un katsayısını sıfırlamak istiyoruz:

$$A(x, y) \varepsilon_x + B(x, y) \varepsilon_y = 0 \quad (5)$$

7.3 Karakteristik Denklem

(5) koşulunu sağlayan ε 'u bulmak için, $\varepsilon(x, y) = c$ seviye eğrilerini düşünelim. Bu eğriler boyunca

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y y' = 0 \implies y' = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$$

(5)'ten $\varepsilon_x/\varepsilon_y = -B/A$ olduğundan şu sonuca ulaşırız.

Teorem 7.1 (Karakteristik Denklem). $A\varepsilon_x + B\varepsilon_y = 0$ koşulunu sağlayan bir ε bulmak için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$$

karakteristik adi diferansiyel denklemi çözülür. Çözüm $\varphi(x, y) = c$ biçiminde yazıldığında $\varepsilon = \varphi(x, y)$ alınır.

ξ için ise Jacobian koşulu (2)'yi bozmayan herhangi bir seçim yapılabilir; en basiti $\xi = x$ 'tir. Bu seçimlerle denklem (4)

$$A_1(\xi, \varepsilon) z_\xi + C_1(\xi, \varepsilon) z = 0 \implies z_\xi + \frac{C_1}{A_1} z = 0$$

biçimine, yani ξ 'de birinci mertebeden lineer bir ADD'ye döner. İntegrasyon çarpanı $\mu = e^{\int (C_1/A_1) d\xi}$ ile

$$(\mu z)_\xi = 0 \implies z = e^{-\int \frac{C_1(\xi, \varepsilon)}{A_1(\xi, \varepsilon)} d\xi} f(\varepsilon)$$

elde edilir; $f \in C^1$ keyfidir.

! İntegral alınırken ε sabit tutulur

$\int (C_1/A_1) d\xi$ integralinde ε bir **parametredir**: integrasyon yalnızca ξ 'ye göre yapılır ve sonuç genellikle ε 'a da bağlıdır. İşlem bitince ξ ve ε , x ve y cinsinden geri yazılır.

7.4 Çözümlü Uygulama

Örnek 7.1 (Karakteristik Denklemlerle Çözüm). $x^2 z_x - xy z_y + yz = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Burada $A = x^2$, $B = -xy$, $C = y$ 'dir.

1. Dönüşümü kur. Karakteristik denklemi yazalım:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = \frac{-xy}{x^2} = -\frac{y}{x} \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

İntegre edersek

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c| \implies xy = c$$

O hâlde $\varepsilon = xy$ ve $\xi = x$ seçilir. Jacobian koşulu sağlanır:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x \neq 0$$

2. Denklemi yeni değişkenlerle yaz. $\varepsilon = xy$ için $A\varepsilon_x + B\varepsilon_y = x^2 y - xy \cdot x = 0$ ✓. $\xi = x$ için $A\xi_x + B\xi_y = x^2$. Böylece

$$x^2 z_\xi + yz = 0$$

Yeni değişkenler cinsinden $x = \xi$ ve $y = \varepsilon/\xi$ olduğundan

$$\xi^2 z_\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} z = 0 \implies z_\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^3} z = 0$$

3. ADD'yi çöz. İntegrasyon çarpanı

$$\mu = e^{\int \frac{\varepsilon}{\xi^3} d\xi} = e^{-\frac{\varepsilon}{2\xi^2}}$$

$$\left(e^{-\frac{\varepsilon}{2\xi^2}} z \right)_\xi = 0 \implies e^{-\frac{\varepsilon}{2\xi^2}} z = f(\varepsilon) \implies z = e^{\frac{\varepsilon}{2\xi^2}} f(\varepsilon)$$

4. Geri dön. $\varepsilon = xy$, $\xi = x$ olduğundan $\frac{\varepsilon}{2\xi^2} = \frac{xy}{2x^2} = \frac{y}{2x}$:

$$z(x, y) = e^{\frac{y}{2x}} f(xy)$$

Sağlama. $z_x = e^{y/(2x)} \left(\frac{y}{2x^2} f + y f' \right)$ ve $z_y = e^{y/(2x)} \left(\frac{1}{2x} f + x f' \right)$:

$$x^2 z_x - xy z_y + yz = e^{\frac{y}{2x}} \left(\frac{y}{2} f + x^2 y f' - \frac{y}{2} f - x^2 y f' + y f \right) = 0 \checkmark$$

■

⚠ İşaret hatası en çok burada yapılır

$\mu = e^{-\varepsilon/(2\xi^2)}$ integrasyon çarpanıyla çözüm $z = \mu^{-1} f(\varepsilon)$ 'dur; yani üstelin işareti **ters döner**: $z = e^{+\varepsilon/(2\xi^2)} f(\varepsilon)$.

Çarpandaki üsteli olduğu gibi çözüme taşımak ($e^{-y/(2x)}$ yazmak) sık yapılan bir hatadır ve sağlama yapıldığında denklemin sağlanmadığı hemen görülür. Genel çözüm yazıldıktan sonraki iki dakikalık sağlama, bu tür işaret hatalarının tek güvencesidir.

Katsayılar da ya da sağ tarafta z 'nin kendisi de görünmeye başlarsa denklem lineer olmaktan çıkar. Böyle **kuazi-lineer** denklemler için çok daha zarif bir araç vardır: [Lagrange yöntemi](#).

8. Kuazi-Linear Denklemler ve Lagrange Yöntemi

Birinci mertebeden **kuazi-lineer** denklemlerin genel biçimi

$$P(x, y, z) z_x + Q(x, y, z) z_y = R(x, y, z) \quad (1)$$

şeklindedir. Burada $P, Q, R \in C^1(O)$, $O \subseteq \mathbb{R}^3$ ve O üzerinde $P^2 + Q^2 \neq 0$ kabul edilir.

i Lineer denklemler özel hâldir

$A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = G(x, y)$ lineer denkleminde $P = A$, $Q = B$ ve $R = G - Cz$ alınırsa denklem (1) biçimine girer. Dolayısıyla kuazi-lineer denklemler için kuracağımız yöntem, **önceki bölümlerin** lineer denklemlerini de kapsar.

Ayrıca birçok kaynakta $z_x = p$ ve $z_y = q$ kısaltmaları kullanılır; denklem (1) bu gösterimle $Pp + Qq = R$ olarak yazılır.

8.1 Lagrange Yöntemi

Teorem 8.1 (Lagrange Yöntemi). $u(x, y, z) = c_1$ ve $v(x, y, z) = c_2$,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (*)$$

yardımcı sisteminin fonksiyonel olarak bağımsız iki çözümü olsun. Bu durumda $Pz_x + Qz_y = R$ denkleminin genel çözümü, F keyfi (C^1) olmak üzere

$$F(u, v) = 0$$

biçimindedir.

(*) sistemi, iki bağımsız adi diferansiyel denklem içerir; her birinin çözümünden bir keyfi sabit çıkar ve $u = c_1$, $v = c_2$ biçiminde iki **ilk integral** elde edilir. Bunlar, uzayda iki parametrelili bir eğri ailesi (karakteristik eğriler) tanımlar; integral yüzeyleri bu eğrilerin birleşimidir.

! u ve v fonksiyonel olarak bağımsız olmalı

Yöntemin çalışması için u ile v 'nin bölgede **fonksiyonel bağımsız** olması gerekir: her noktada

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, z)}, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$$

Jacobian determinantlarının **aynı anda sıfır olmaması** istenir. Aksi hâlde v , u 'nın bir fonksiyonudur ve $F(u, v) = 0$ gerçek bir iki-bileşenli aile tanımlamaz.

💡 Oran özelliği: en güçlü hesap aracı

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ ise her } \lambda, \mu \text{ için}$$

$$\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = k$$

olur (paydanın sıfırlanmadığı sürece). Yardımcı sistemde oranları uygun çarpanlarla birleştirerek **tam diferansiyel** elde etmek, Lagrange yönteminin ana tekniğidir. Özellikle payda 0 yapılabiliyorsa pay da 0 olmak zorundadır; bu durumda pay doğrudan integre edilir.

8.2 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 8.1 (İlk İntegrallerin Bulunması). $xz z_x + yz z_y = -(x^2 + y^2)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$P = xz, Q = yz, R = -(x^2 + y^2)$ polinom (çarpımları) olduğundan $\mathbb{R}^3$ 'te türevlenebilirler; ayrıca

$$P^2 + Q^2 = z^2(x^2 + y^2) \neq 0$$

olan bölgede Lagrange yöntemi uygulanabilir. Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}$$

Birinci integral. İlk iki orandan z sadeleşir:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + \ln |c_1| \Rightarrow u = \frac{y}{x} = c_1$$

İkinci integral. $y = c_1 x$ yazıp birinci ve üçüncü oranı kullanalım:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-(x^2 + c_1^2 x^2)} \Rightarrow -(x + c_1^2 x) dx = z dz$$

İntegre edersek

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{2} (1 + c_1^2) &= \frac{z^2}{2} + c \Rightarrow -x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = z^2 + c \\ \Rightarrow v &= x^2 + y^2 + z^2 = c_2 \end{aligned}$$

Bağımsızlık kontrolü. $u = y/x, v = x^2 + y^2 + z^2$ için

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = -\frac{2y^2}{x^2} - 2, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = \frac{2z}{x}$$

İlk determinant daima negatiftir; üçü birden sıfırlanamaz. O hâlde genel çözüm

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$$

Açık biçim. Çözüm yüzeyi z 'yi içermek zorunda olduğundan $F_v \neq 0$ 'dır; örtük fonksiyon teoremi gereği $F(u, v) = 0$ bağıntısı $v = f(u)$ olarak çözülebilir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z^2 = f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$$

■

Örnek 8.2 (Oranları Birleştirerek). $(y-x)z_x + (y+x)z_y = \frac{x^2+y^2}{z}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$P = y - x, Q = y + x, R = (x^2 + y^2)/z$ olup $P^2 + Q^2 = 2(x^2 + y^2) \neq 0$, yani $(x, y) \neq (0, 0)$ bölgesinde yöntem uygulanabilir. Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{y+x} = \frac{z dz}{x^2 + y^2}$$

Birinci integral. İlk iki oranı $(1, 1)$ çarpanlarıyla birleştirelim:

$$\frac{dx + dy}{(y-x) + (y+x)} = \frac{dx + dy}{2y} = \frac{dy}{y+x}$$

İçler dışlar çarpımıyla $2y dy = (x+y) d(x+y)$ olur; integre edersek

$$y^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{c_1}{2} \Rightarrow 2y^2 - (x+y)^2 = c_1 \Rightarrow u = y^2 - 2xy - x^2 = c_1$$

İkinci integral. Oranları $(x, -y, z)$ çarpanlarıyla birleştirelim; burada üçüncü oran $\frac{dz}{(x^2 + y^2)/z}$ biçiminde okunur:

$$\frac{x dx - y dy + z dz}{x(y-x) - y(y+x) + z \cdot \frac{x^2+y^2}{z}} = \frac{x dx - y dy + z dz}{xy - x^2 - y^2 - xy + x^2 + y^2} = \frac{x dx - y dy + z dz}{0}$$

Payda özdeş olarak sıfır olduğundan pay da sıfır olmalıdır:

$$x dx - y dy + z dz = 0 \Rightarrow v = x^2 - y^2 + z^2 = c_2$$

Genel çözüm:

$$F(y^2 - 2xy - x^2, x^2 - y^2 + z^2) = 0$$

Çözüm z 'yi içermeli, yani $F_v \neq 0$ olmalıdır; örtük fonksiyon teoremiyle açık biçim

$$z^2 = y^2 - x^2 + f(y^2 - 2xy - x^2)$$

■

Örnek 8.3 (İki Ayrı Sadeleşme). $x^2 z_x + y^2 z_y = (x+y)z$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

Birinci integral. İlk iki oran doğrudan integre edilir:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2} \Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + c_1 \Rightarrow u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = c_1$$

İkinci integral. İlk iki oranın farkını alalım; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = k$ özelliğiyle

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z}$$

İntegre edersek

$$\ln |x - y| = \ln |z| + \ln |c_2| \Rightarrow v = \frac{z}{x - y} = c_2$$

Genel çözüm:

$$F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{z}{x - y}\right) = 0 \quad \text{ya da} \quad z = (x - y) f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

■

Örnek 8.4 (Çarpanlarla Tam Diferansiyel Açı). $(z^2 - 2yz - y^2)z_x + x(y + z)z_y = x(y - z)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{x(y + z)} = \frac{dz}{x(y - z)}$$

Birinci integral. Son iki oranda x sadeleşir:

$$\frac{dy}{y + z} = \frac{dz}{y - z} \Rightarrow (y - z)dy = (y + z)dz$$

Düzenleyelim:

$$ydy - (zdy + ydz) - zdz = 0 \Rightarrow ydy - d(yz) - zdz = 0$$

İntegre edersek

$$\frac{y^2}{2} - yz - \frac{z^2}{2} = \frac{c_1}{2} \Rightarrow u = y^2 - 2yz - z^2 = c_1$$

İkinci integral. Oranları (x, y, z) çarpanlarıyla birleştirelim:

$$x(z^2 - 2yz - y^2) + y \cdot x(y + z) + z \cdot x(y - z) = x(z^2 - 2yz - y^2 + y^2 + yz + yz - z^2) = 0$$

Payda sıfır olduğundan pay da sıfırdır:

$$x dx + y dy + z dz = 0 \Rightarrow v = x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

Genel çözüm:

$$F(y^2 - 2yz - z^2, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

■

💡 İkinci integrali bulma stratejileri

Yardımcı sistemde ilk integral genellikle bir sadeleşmeden kolayca çıkar; asıl emek ikincidedir. Sıra-sıyla şunlar denenir:

1. **Birinciye kullan:** bulunan c_1 bağıntısını ($y = c_1 x$ gibi) kalan oranlardan birine yerleştir; işlem bitince c_1 'i geri yaz.
2. **Toplam/fark al:** $\frac{dx \pm dy}{P \pm Q}$ oranı çoğu zaman tam diferansiyel verir.
3. **Çarpan ara:** $\frac{\lambda dx + \mu dy + \nu dz}{\lambda P + \mu Q + \nu R}$ biçiminde, paydayı **sıfır** yapan (λ, μ, ν) bulunursa pay, çözüm eğrileri boyunca sıfırdır. Pay aynı zamanda bir **tam diferansiyel** ise ($\lambda dx + \mu dy + \nu dz = dv$), doğrudan $v = c$ integrali elde edilir; tam değilse başka bir çarpan denenir. (x, y, z) ve $(y, x, -z)$ gibi seçimler en sık işe yarayanlardır.

Genel çözüm ailesini bulmayı öğrendik; peki **belirli bir eğriden geçen** integral yüzeyi nasıl seçilir? Bu, bir sonraki bölümün konusu olan **Cauchy problemidir**.

9. Kuazi-Linear Denklemlerde Cauchy Problemi

Lagrange yöntemi bize $Pz_x + Qz_y = R$ denkleminin **bütün** çözümlerini veren $F(u, v) = 0$ ailesini kazandırdı. Uygulamada ise genellikle tek bir çözüm istenir: **verilen bir eğriden geçen** integral yüzeyi. Bu bölümün konusu bu seçim problemidir.

9.1 Geometrik Bakış

$z = \ell(x, y)$ integral yüzeyini düşünelim. $(x_0, y_0, \ell(x_0, y_0))$ noktasındaki normal vektör

$$\vec{n} = (z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0), -1)$$

biçimindedir. Denklemi

$$Pz_x + Qz_y - R = 0 \implies \vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{V} = (P, Q, R)$$

olarak okuyabiliriz: $\vec{V}$ vektörü her noktada normale dik, yani **teğet düzlemin içindedir**. Demek ki (P, Q, R) vektör alanı, çözüm yüzeylerine her noktada teğet olan bir akış tanımlar.

Tanım 9.1 (Karakteristik (İntegral) Eğriler). $\vec{V} = (P, Q, R)$ vektör alanına teğet olan uzay eğrilerine denklemin **karakteristik eğrileri** denir. Bu eğriler

$$\frac{dx}{dt} = P, \quad \frac{dy}{dt} = Q, \quad \frac{dz}{dt} = R$$

karakteristik sisteminin çözümleridir; sistem, oran biçiminde $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ olarak da yazılır.

İntegral yüzeyleri, karakteristik eğrilerin **birleşiminden** oluşur: yüzeyin bir noktasından geçen karakteristik eğri, tamamen yüzeyin içinde kalır.

9.2 Cauchy Problemi

Tanım 9.2 (Cauchy Problemi). $\mathbb{R}^3$ 'te bir Γ eğrisi verilsin. **Cauchy problemi**, $Pz_x + Qz_y = R$ denkleminin çözümü olan ve integral yüzeyi Γ eğrisini içeren $z = \ell(x, y)$ fonksiyonunu bulma problemidir.

Çözüm stratejisi geometrik resmin doğrudan sonucudur: Γ 'nın **her noktasından bir karakteristik eğri fırlatılır**; bu eğrilerin süpürdüğü yüzey aranan integral yüzeyidir.

Γ eğrisi $(f(s), g(s), h(s))$ biçiminde parametrelensin. Karakteristik sistemi

$$x(t_0) = f(s), \quad y(t_0) = g(s), \quad z(t_0) = h(s)$$

başlangıç koşullarıyla çözersek x, y, z 'yi (s, t) parametrelerine bağlı buluruz. Son adımda s ve t , x ile y cinsinden çözülüp z 'de yerine yazılır ve $z = \ell(x, y)$ elde edilir.

💡 **Pratikte:** ilk integraller üzerinden

Karakteristik sistemi parametrik çözmek yerine çoğu zaman şu kestirme izlenir: Lagrange yöntemin-den gelen iki ilk integral $u = c_1, v = c_2$ eğri üzerinde hesaplanır; Γ parametresi s üzerinden c_1 ile c_2 arasında bir bağıntı bulunur. c_1 ve c_2 yerine u ve v yazıldığında aranan yüzeyin denklemi çıkar.

9.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 9.1 (Keyfi Başlangıç Verisiyle). $z_x + 2z_y = z^2$ denkleminin $z(x, 0) = h(x)$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Başlangıç eğrisi $\Gamma(s) = (s, 0, h(s))$ 'dir. Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{z^2}$$

İlk integraller. Birinci ve ikinci orandan

$$2x - y = c_1$$

Birinci ve üçüncü orandan

$$dx = \frac{dz}{z^2} \Rightarrow x + \frac{1}{z} = c_2$$

Eğri koşulu. Γ üzerinde $x = s, y = 0, z = h(s)$:

$$c_1 = 2s \Rightarrow s = \frac{c_1}{2} = \frac{2x - y}{2} = x - \frac{y}{2}$$

$$c_2 = s + \frac{1}{h(s)}$$

c_2 bağıntısında c_1 cinsinden yazıp u, v 'yi geri koyalım:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{z} &= \left(x - \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\left(hx - \frac{y}{2}\right)} \\ \Rightarrow \frac{1}{z} &= \frac{1}{\left(hx - \frac{y}{2}\right)} - \frac{y}{2} = \frac{2 - y\left(hx - \frac{y}{2}\right)}{2\left(hx - \frac{y}{2}\right)} \\ \Rightarrow z(x, y) &= \frac{2\left(hx - \frac{y}{2}\right)}{2 - y\left(hx - \frac{y}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sağlama. $y = 0$ için $z = \frac{2h(x)}{2} = h(x) \checkmark$

i Çözüm nerede yaşar?

Son örnekte payda $2 - y h = 0$ olduğunda çözüm patlar: karakteristikler boyunca z^2 büyümesi sonlu zamanda sonsuza gider. Cauchy probleminin çözümünü genellikle başlangıç eğrisinin bir **komşuluğunda** vardır; her yerde var olmak zorunda değildir.

Örnek 9.2 (Kuazi-Lineer Bir Problem). $z z_x + y z_y = x$ denkleminin $z(x, 1) = 2x$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Başlangıç eğrisi $\Gamma(s) = (s, 1, 2s)$ 'dir. Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x}$$

İlk integraller. Birinci ve üçüncü oranın içler dışlar çarpımından

$$x dx = z dz \Rightarrow u = z^2 - x^2 = c_1$$

Birinci ve üçüncü oranların toplamını ikinciyle eşleyelim:

$$\frac{dx + dz}{z + x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{d(x + z)}{x + z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow v = \frac{x + z}{y} = c_2$$

Eğri koşulu. $x = s, y = 1, z = 2s$ üzerinde:

$$c_1 = 4s^2 - s^2 = 3s^2, \quad c_2 = \frac{s + 2s}{1} = 3s$$

Parametreyi yok edelim: $c_2^2 = 9s^2 = 3(3s^2) = 3c_1$. u, v 'yi geri koyarsak

$$\left(\frac{x + z}{y} \right)^2 = 3 (z^2 - x^2) = 3(z - x)(z + x)$$

$x + z \neq 0$ ile sadeleştirip z 'yi çekelim:

$$\frac{x + z}{y^2} = 3(z - x) \Rightarrow x + z = 3y^2 z - 3y^2 x \Rightarrow z(3y^2 - 1) = x(1 + 3y^2)$$

$$\Rightarrow z(x, y) = \frac{x(1 + 3y^2)}{3y^2 - 1}$$

Sağlama. $y = 1$ için $z = \frac{4x}{2} = 2x \checkmark$. Ayrıca $z_x = \frac{1+3y^2}{3y^2-1}$ ve $z_y = \frac{-12xy}{(3y^2-1)^2}$ ile

$$z z_x + y z_y = \frac{x(1 + 3y^2)^2 - 12xy^2}{(3y^2 - 1)^2} = \frac{x(9y^4 - 6y^2 + 1)}{(3y^2 - 1)^2} = x \checkmark$$

■

Örnek 9.3 (İki Sabitin Çarpımıyla). $x z_x - y z_y = z$ denkleminin $z(x, x) = x^3$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Başlangıç eğrisi $\Gamma(s) = (s, s, s^3)$ 'tür. Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$$

İlk integraller. Birinci ve ikinci orandan

$$\ln |x| = -\ln |y| + \ln |c_1| \Rightarrow u = xy = c_1$$

Birinci ve üçüncü orandan

$$\ln |x| = \ln |z| + \ln |c_2| \Rightarrow v = \frac{x}{z} = c_2$$

Eğri koşulu. $x = s, y = s, z = s^3$ üzerinde:

$$c_1 = s^2, \quad c_2 = \frac{s}{s^3} = \frac{1}{s^2}$$

O hâlde $c_1 c_2 = 1$ 'dir. Geri koyarsak

$$xy \cdot \frac{x}{z} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 y}{z} = 1 \Rightarrow z(x, y) = x^2 y$$

Sağlama. $z(x, x) = x^3 \checkmark$ ve $x \cdot 2xy - y \cdot x^2 = 2x^2 y - x^2 y = x^2 y = z \checkmark$

■

Örnek 9.4 (Parametrik Eğriden Geçen İntegral Yüzeyi). $(y + xz)z_x + (x + yz)z_y = z^2 - 1$ denkleminin, $x = t$, $y = 1$, $z = t^2$ eğrisinden geçen integral yüzeyinin denklemini bulunuz.

Çözüm.

Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{y + xz} = \frac{dy}{x + yz} = \frac{dz}{z^2 - 1}$$

Birinci integral. Paylar ve paydalar toplanırsa

$$y + xz + x + yz = (x + y)(1 + z)$$

olduğundan

$$\frac{d(x + y)}{(x + y)(z + 1)} = \frac{dz}{(z - 1)(z + 1)} \Rightarrow \frac{d(x + y)}{x + y} = \frac{dz}{z - 1}$$

$$\Rightarrow \ln |x + y| = \ln |z - 1| - \ln |c_1| \Rightarrow u = \frac{z - 1}{x + y} = c_1$$

İkinci integral. Bu kez fark alalım: $y + xz - x - yz = (x - y)(z - 1)$ olduğundan

$$\frac{d(x - y)}{(x - y)(z - 1)} = \frac{dz}{(z - 1)(z + 1)} \Rightarrow \frac{d(x - y)}{x - y} = \frac{dz}{z + 1} \Rightarrow v = \frac{z + 1}{x - y} = c_2$$

Eğri koşulu. $x = t$, $y = 1$, $z = t^2$ üzerinde:

$$c_1 = \frac{t^2 - 1}{t + 1} = t - 1, \quad c_2 = \frac{t^2 + 1}{t - 1}$$

Birinciden $t = c_1 + 1$; ikinciye koyarsak

$$c_2 = \frac{(c_1 + 1)^2 + 1}{c_1} \Rightarrow c_1 c_2 = (c_1 + 1)^2 + 1$$

u, v geri yazılırsa aranan yüzey

$$\frac{(z - 1)(z + 1)}{(x + y)(x - y)} = \left(\frac{z - 1}{x + y} + 1 \right)^2 + 1$$

yani $\frac{z^2 - 1}{x^2 - y^2} = \left(\frac{z - 1 + x + y}{x + y} \right)^2 + 1$ olur.

■

Örnek 9.5 (Trigonometrik Katsayılar). $z_x \sec x + a z_y = \cot y$ denkleminin $z(0, y) = \sin y$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz ($a \neq 0$ sabit).

Çözüm.

Başlangıç eğrisi $\Gamma(t) = (0, t, \sin t)$ 'dir. Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{\sec x} = \frac{dy}{a} = \frac{dz}{\cot y}$$

Birinci integral. İlk iki orandan ($1/\sec x = \cos x$):

$$\cos x dx = \frac{dy}{a} \Rightarrow u = \sin x - \frac{y}{a} = c_1$$

İkinci integral. Son iki orandan:

$$\cot y \, dy = a \, dz \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y} \, dy = az + c \Rightarrow v = \ln |\sin y| - az = c_2$$

Eğri koşulu. $x = 0, y = t, z = \sin t$ üzerinde:

$$c_1 = -\frac{t}{a} \Rightarrow t = -a c_1, \quad c_2 = \ln |\sin t| - a \sin t$$

t 'yi yerine koyalım; $-ac_1 = -a \sin x + y$ olduğundan

$$\ln |\sin(y - a \sin x)| - a \sin(y - a \sin x) = \ln |\sin y| - az$$

Bu, çözümün kapalı biçimidir; z çekilirse

$$z(x, y) = \frac{1}{a} \left[\ln |\sin y| - \ln |\sin(y - a \sin x)| \right] + \sin(y - a \sin x)$$

Sağlama. $x = 0$ için köşeli parantez sıfırlanır ve $z = \sin y$ kalır ✓

■

Örnek 9.6 (Bir Parabolden Geçen Yüzey). $(z - x)z_x + (z + y)z_y = x + y$ denkleminin, $z = 0$ düzleminde $y = x^2$ eğrisinden geçen integral yüzeyinin denklemini bulunuz.

Çözüm.

Başlangıç eğrisi $\Gamma(t) = (t, t^2, 0)$ 'dir. Yardımcı sistem:

$$\frac{dx}{z - x} = \frac{dy}{z + y} = \frac{dz}{x + y}$$

Birinci integral. İkinci orandan birinciye çıkaralım: $(z + y) - (z - x) = x + y$ olduğundan

$$\frac{d(y - x)}{x + y} = \frac{dz}{x + y} \Rightarrow d(y - x) = dz \Rightarrow u = x - y + z = c_1$$

İkinci integral. Oranları $(y, x, -z)$ çarpanlarıyla birleştirelim; payda

$$y(z - x) + x(z + y) - z(x + y) = yz - xy + xz + xy - xz - yz = 0$$

olur. Payda sıfır olduğundan pay da sıfırdır:

$$y \, dx + x \, dy - z \, dz = 0 \Rightarrow d(xy) = z \, dz \Rightarrow v = xy - \frac{z^2}{2} = c_2$$

Eğri koşulu. $x = t, y = t^2, z = 0$ üzerinde:

$$c_1 = t - t^2, \quad c_2 = t^3 \Rightarrow t = c_2^{1/3}$$

Buradan $c_1 = c_2^{1/3} - c_2^{2/3}$ bağıntısı çıkar. u, v geri yazılırsa aranan yüzey

$$x - y + z = \left(xy - \frac{z^2}{2} \right)^{1/3} - \left(xy - \frac{z^2}{2} \right)^{2/3}$$

Sağlama. $z = 0, y = x^2$ üzerinde sol taraf $x - x^2$; sağ taraf $(x^3)^{1/3} - (x^3)^{2/3} = x - x^2$ ✓

■

i Sınavlarda eğri farklı kılıklarda verilebilir

Başlangıç verisi bazen $z(x, 0) = h(x)$ gibi bir **koşul**, bazen $x = t, y = 1, z = t^2$ gibi **parametrik bir eğri**, bazen de “ $z = 0$ düzleminde $y = x^2$ parabolünden geçen yüzey” gibi **sözel** biçimde verilir. Üçü de aynı problemdir: ilk iş, veriyi $\Gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ parametrik biçimine çevirmektir.

Denklemden z_x ve z_y artık lineer görünmüyorsa — örneğin kareleri ya da çarpımları varsa — karakteristik eğriler tek başına yetmez. **Lineer olmayan denklemlerin integral türleri** ile yeni bir kuram başlıyor.

10. Tam, Genel ve Tekil İntegraller

Birinci mertebeden en genel denklem

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1)$$

biçimindedir; $z_x = p$, $z_y = q$ kısaltmalarıyla $F(x, y, z, p, q) = 0$ yazacağız. F 'nin p ve q 'da lineer olduğu özel durumlar, **lineer** ve **kuazi-lineer** denklemler olarak incelendi. Şimdi genel – lineer olmayan – duruma geçiyoruz.

Amacımız, denklem (1)'in **iki parametrelili bir çözüm ailesini** bulmaktır:

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \quad (2)$$

Denklem kurma bölümünde bunun tersini yapmıştık: iki parametrelili aileden sabitleri yok edip denklemi üretmiştik. Şimdi denklemin çözümlerini üç ayrı **integral türü** olarak sınıflandırıyoruz.

10.1 Üç İntegral Türü

Tanım 10.1 (Tam İntegral (Complete Integral)). Denklem (1)'in (2) biçimindeki herhangi bir **iki parametrelili** çözüm ailesine denklemin **tam integrali** denir.

Tanım 10.2 (Genel İntegral). Tam integralde parametreler arasında keyfi bir $b = \phi(a)$ bağıntısı seçilirse tek parametrelili

$$f(x, y, z, a, \phi(a)) = 0 \quad (3)$$

alt ailesi elde edilir. Bu alt ailenin **zarfı** (envelope),

$$f(x, y, z, a, \phi(a)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0 \quad (4)$$

denklemlerinden a yok edilerek bulunur. ϕ 'nin bütün seçimleri için (4)'ten elde edilen zarf yüzeyleri de denklem (1)'in çözümleridir ve bunlara denklemin **genel integrali** denir.

Tanım 10.3 (Tekil İntegral (Singular Integral)). İki parametrelili (2) ailesinin **kendisinin** bir zarfı varsa, bu zarf

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \quad (5)$$

denklemlerinden a ve b yok edilerek bulunur. Bu zarf da denklem (1)'i sağlar ve **tekil integral** (tekil çözüm) olarak adlandırılır.

! Denklem ve çözüm ayrımı

Gösterimlerin rolü karıştırılmamalıdır:

- $F(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \rightarrow$ **denklem** (türevleri içerir),
- $f(x, y, z, a, b) = 0 \rightarrow$ **çözüm ailesi** (parametreleri içerir).

Tekil integral, zarf olma özelliği sayesinde ailenin her üyesine bir noktada teğettir; ama keyfi fonksiyona hangi değer verilirse verilsin genel integralden **elde edilemez**. **Çözüm türleri** bölümündeki tekil çözüm tanımının kesinleştirilmiş hâli budur.

i $\phi(a)$ seçiminin iki ucu

Genel integral tanımındaki ϕ fonksiyonu üzerinden iki özel durum okunur:

- ϕ **keyfi** bırakılırsa (4)'ten elde edilen ailenin tamamı, denklemin genel çözümüne karşılık gelir.
- ϕ için **belirli bir seçim** yapılırsa genel çözümünden seçilmiş bir özel çözüm elde edilir.

10.2 Çözümlü Uygulama: Birim Küreler Ailesi

Örnek 10.1 (Tam, Genel ve Tekil İntegral Bir Arada). $z^2 (1 + z_x^2 + z_y^2) = 1$ denklemi için:

a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1$ ailesinin bir tam integral olduğunu gösteriniz.

b) $b = \phi(a) = a$ seçimiyle genel integralin verdiği yüzeyi bulunuz.

c) Tekil integrali bulunuz.

Çözüm.

a) $f = (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 - 1 = 0$ ailesinin (z 'nin örtük fonksiyon olduğu hatırlanarak) x 'e ve y 'ye göre türevlerini alalım:

$$2(x - a) + 2z z_x = 0 \Rightarrow x - a = -z p$$

$$2(y - b) + 2z z_y = 0 \Rightarrow y - b = -z q$$

Aile denkleminde yerine koyalım:

$$z^2 p^2 + z^2 q^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z^2 (1 + p^2 + q^2) = 1 \checkmark$$

Aile, iki keyfi parametre içerdiğinden bir **tam integraldir**. Geometrik olarak bu, merkezleri $z = 0$ düzleminde olan **birim kürelerin** ailesidir.

b) $b = a$ alalım:

$$f(x, y, z, a, a) = (x - a)^2 + (y - a)^2 + z^2 - 1 = 0$$

Zarf için a 'ya göre türev alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a) - 2(y - a) = 0 \Rightarrow a = \frac{x + y}{2}$$

Aile denkleminde yerine koyalım:

$$\left(x - \frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x + y}{2}\right)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y - x}{2}\right)^2 + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x - y)^2}{2} + z^2 = 1}$$

Bu, eksen $y = x$, $z = 0$ doğrusu olan bir **silindirdir**: merkezleri bu doğru üzerinde kayan birim kürelerin zarfı.

c) Tekil integral için (5) sistemini kuralım:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a) = 0 \Rightarrow x = a, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = -2(y - b) = 0 \Rightarrow y = b$$

Aile denkleminde yerine koyalım:

$$0 + 0 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{z = \mp 1}$$

$z = 1$ ve $z = -1$ düzlemleri denklemi sağlar (bu düzlemlerde $p = q = 0$ ve $z^2 = 1$). Bütün birim kürelere üstten ve alttan teğet olan bu iki düzlem, ailenin zarfıdır; hiçbir küre seçiminden elde edilemedikleri için **tekil integraldir**.

■

10.3 Clairaut Tipine İlk Bakış

Örnek 10.2 ($z = xz_x + yz_y$ Denklemi). $z = xz_x + yz_y$ denklemi için:

- a) $z = ax + by$ ailesinin bir tam integral olduğunu gösteriniz.
- b) Denklemi Lagrange yöntemiyle çözerek genel çözümü bulunuz.
- c) Genel integral tanımıyla (b)'deki sonucun tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $z = ax + by$ için $p = a, q = b$:

$$xp + yq = ax + by = z \checkmark$$

İki keyfi sabit içerdiğinden tam integraldir: orijinden geçen düzlemler ailesi.

b) Denklem p ve q 'da lineerdir ($P = x, Q = y, R = z$); Lagrange sistemini kuralım:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

İlk iki orandan $u = x/y = c_1$, son iki orandan $v = z/y = c_2$. Genel çözüm:

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0 \quad \text{ya da} \quad z = yg\left(\frac{x}{y}\right)$$

c) Tam integralden genel integrali türetelim: $b = \phi(a)$ ile $f = z - ax - \phi(a)y = 0$ ve

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -x - \phi'(a)y = 0 \Rightarrow \phi'(a) = -\frac{x}{y}$$

ϕ' terslenebilirse $a = (\phi')^{-1}(-x/y)$ olur; $f = 0$ 'dan

$$z = ax + \phi(a)y = y \left[\underbrace{(\phi')^{-1}\left(-\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y} + \phi\left((\phi')^{-1}\left(-\frac{x}{y}\right)\right)}_{g(x/y)} \right]$$

Köşeli parantez yalnızca x/y oranına bağlıdır; yani zarf ailesi tam olarak $z = yg(x/y)$ biçimindedir. İki yol aynı genel çözümü verir.

■

🔍 Büyük resim

Lineer olmayan kuramın yol haritası şudur: önce denklemin **bir** tam integralini bulmak yeterlidir; genel integral $b = \phi(a)$ zarflarıyla, tekil integral ise çift zarf ile tam integralden **türetilir**. Tam integrali sistematik biçimde bulmanın aracı, iki bölüm sonra göreceğimiz **Charpit yöntemi**dir; yöntemin dayandığı kavram ise sıradaki bölümün konusu olan **uyumlu sistemler**dir.

11. Uyumlu Sistemler

Bu bölüm, **Charpit yönteminin** kuramsal altyapısını kurar. Soru şudur: iki tane birinci mertebeden denklem

$$f(x, y, z, z_x, z_y) = 0, \quad g(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1)$$

aynı anda ne zaman çözülebilir?

Tanım 11.1 (Uyumlu Sistem). $f = 0$ ve $g = 0$ denklemlerinin ortak çözümleri varsa, (1) sistemine **uyumlu sistem** (compatible system) denir.

$z_x = p$ ve $z_y = q$ yazacağız.

11.1 Uyumluluğun Koşulu

1. adım: sistemi p ve q için çöz. Eğer

$$J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} f_p & f_q \\ g_p & g_q \end{vmatrix} = f_p g_q - g_p f_q \neq 0$$

ise, (1)'deki iki denklem p ve q için çözülebilir:

$$p = p(x, y, z), \quad q = q(x, y, z) \quad (2)$$

2. adım: integre edilebilirlik. (2)'deki fonksiyonlar bir $z(x, y)$ çözümünün türevleri olacaksa, toplam diferansiyel

$$dz = z_x dx + z_y dy = p dx + q dy \quad (3)$$

ifadesinin **tam diferansiyel** olması gerekir. Adi diferansiyel denklemlerden bilinen tamlık koşulu $-z'$ 'ye bağlılık da hesaba katılarak $-$ şudur:

$$\frac{\partial}{\partial y} p(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} q(x, y, z(x, y)) \implies p_y + p_z q = q_x + q_z p \quad (4)$$

Burada zincir kuralı kullanıldı: y 'ye göre türevde $z_y = q$, x 'e göre türevde $z_x = p$ çarpanları gelir.

11.2 Uyumluluk Parantezi

(4) koşulunu, p ve q 'yu açıkça çözmeden, doğrudan f ve g üzerinden yazabiliriz. (2)'yi (1)'de yerine koyduğumuzda özdeşlik elde ederiz:

$$f(x, y, z, p(x, y, z), q(x, y, z)) = 0, \quad g(x, y, z, p(x, y, z), q(x, y, z)) = 0 \quad (5)$$

x 'e göre türev. Her iki özdeşliği x 'e göre türevleyelim:

$$f_x + f_p p_x + f_q q_x = 0, \quad g_x + g_p p_x + g_q q_x = 0$$

Birinciyi g_p , ikinciyi f_p ile çarpıp çıkaralım; p_x yok olur:

$$(f_x g_p - g_x f_p) + (f_q g_p - g_q f_p) q_x = 0 \implies \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} - J q_x = 0$$

$$\Rightarrow q_x = \frac{1}{J} \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)}$$

y'ye göre türev. Aynı işlem q_y yerine p_y 'yi yalnız bırakacak biçimde yapılırsa

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} + J p_y = 0 \Rightarrow p_y = -\frac{1}{J} \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)}$$

z'ye göre türev. Benzer biçimde

$$p_z = \frac{1}{J} \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, p)}, \quad q_z = \frac{1}{J} \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, q)}$$

Bulunanları (4) koşulunda yerine koyup $J \neq 0$ ile çarparsak uyumluluğun aranılan biçimine ulaşırız.

Teorem 11.1 (Uyumluluk Koşulu). $J \neq 0$ olmak üzere (1) sisteminin uyumlu olması için gerek koşul

$$[f, g] = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} + p \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} + q \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, q)} = 0$$

olmasıdır. Buradaki $[f, g]$ ifadesine **uyumluluk parantezi** denir.

i Parantezin açık yazılışı

Jacobian gösterimi açılırsa

$$[f, g] = (f_x g_p - f_p g_x) + p (f_z g_p - f_p g_z) + (f_y g_q - f_q g_y) + q (f_z g_q - f_q g_z)$$

Uygulamada dört tane 2×2 determinant hesaplanıp toplanır; determinant düzeni

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$$

biçimindedir ve satır-sütun sırasına dikkat edilmelidir: sıra değişirse işaret değişir.

11.3 Çözümlü Uygulama

Örnek 11.1 (Uyumluluğu Gösterip Ortak Çözümü Bulma). Aşağıdaki sistemin uyumlu olduğunu gösteriniz ve ortak çözümünü bulunuz:

$$x z_x = y z_y, \quad z (x z_x + y z_y) = 2xy$$

Çözüm.

p, q gösterimiyle

$$f = xp - yq = 0, \quad g = xzp + yzq - 2xy = 0$$

Jacobianları hesaplayalım.

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} = \begin{vmatrix} f_x & f_p \\ g_x & g_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & x \\ zp - 2y & zx \end{vmatrix} = zxp - x(zp - 2y) = 2xy$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, p)} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ xp + yq & zx \end{vmatrix} = -x (xp + yq) = -x^2 p - xyq$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} = \begin{vmatrix} -q & -y \\ zq - 2x & zy \end{vmatrix} = -zyq + y(zq - 2x) = -2xy$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, q)} = \begin{vmatrix} 0 & -y \\ xp + yq & zy \end{vmatrix} = y (xp + yq) = xyp + y^2q$$

Paranteze yerleştirelim.

$$\begin{aligned} [f, g] &= 2xy + p(-x^2p - xyq) - 2xy + q(xyp + y^2q) = -x^2p^2 - xypq + xypq + y^2q^2 \\ &= y^2q^2 - x^2p^2 = (yq - xp)(yq + xp) \end{aligned}$$

$f = 0$ olduğundan $xp = yq$ 'dur; dolayısıyla birinci çarpan sıfırdır ve

$$[f, g] = 0$$

Sistem **uyumludur**.

Ortak çözüm. $f = 0$ 'dan $xp = yq$; bunu $g = 0$ 'da kullanalım:

$$z(yq + yq) = 2xy \implies 2yzq = 2xy \implies q = \frac{x}{z}, \quad p = \frac{yq}{x} = \frac{y}{z}$$

Toplam diferansiyeli yazalım:

$$dz = p dx + q dy = \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy \implies z dz = y dx + x dy = d(xy)$$

İntegre edersek

$$\frac{z^2}{2} = xy + c$$

Sağlama. $z^2 = 2xy + 2c$ için $2zp = 2y$ ve $2zq = 2x$; yani $p = y/z$, $q = x/z$:

$$xp - yq = \frac{xy - yx}{z} = 0 \checkmark \quad z(xp + yq) = z \cdot \frac{2xy}{z} = 2xy \checkmark$$

■

💡 Uyumluluk neden bu kadar önemli?

Tek bir lineer olmayan $f = 0$ denklemi verildiğinde Charpit'in fikri şudur: f ile **uyumlu** ve keyfi bir a sabiti içeren ikinci bir $g = 0$ denklemi üretmek. O zaman sistem p, q için çözülür, $dz = p dx + q dy$ integre edilir ve ikinci bir sabit b ortaya çıkar: **tam integral** elde edilmiştir. g 'yi bulmanın sistematik yolu bir sonraki bölümdedir.

12. Charpit Yöntemi

Charpit yöntemi, lineer olmayan birinci mertebeden

$$f(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1)$$

denkleminin **tam integralini** bulmak için genel bir yol sunar. Fikir zariftir: denklem (1) ile **uyumlu** ve keyfi bir a sabiti içeren

$$g(x, y, z, z_x, z_y, a) = 0 \quad (2)$$

biçiminde ikinci bir denklem aranır. (1)–(2) sistemi $p = z_x$ ve $q = z_y$ için çözülür:

$$p = p(x, y, z, a), \quad q = q(x, y, z, a)$$

ve uyumluluk sayesinde

$$dz = p dx + q dy \quad (3)$$

diferansiyeli integre edilebilir; integrasyondan ikinci bir keyfi sabit b gelir. Sonuç, iki sabitli

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \quad (4)$$

ailesidir — yani denklemin **tam integrali**.

12.1 Charpit–Lagrange Sistemi

g' 'yi bulmak için **uyumluluk koşulunu** kullanırız: $[f, g] = 0$ olmalıdır. Paranteti açalım:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, p)} + p \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, p)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, q)} + q \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, q)} = 0$$

Determinantlar açılıp g' 'nin türevlerine göre düzenlenirse

$$f_p g_x + f_q g_y + (p f_p + q f_q) g_z = (f_x + p f_z) g_p + (f_y + q f_z) g_q \quad (5)$$

elde edilir. Buradaki f **bilinen** fonksiyondur; yani (5), bilinmeyen g için — beş bağımsız değişkenli (x, y, z, p, q) — **lineer** bir birinci mertebeden KDD'dir. Böyle denklemleri **Lagrange yöntemiyle** çözmeyi biliyoruz.

Teorem 12.1 (Charpit Yardımcı Sistemi). (5) denkleminin Lagrange yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{p f_p + q f_q} = \frac{-dp}{f_x + p f_z} = \frac{-dq}{f_y + q f_z} = \frac{dg}{0}$$

biçimindedir; **Charpit–Lagrange denklemleri** olarak adlandırılır. Bu sistemin, içinde p veya q bulunan **herhangi bir** ilk integrali $g = a$, denklem (2) olarak kullanılabilir.

Yöntemin adımları

1. f 'nin beş türevini hesapla: f_x, f_y, f_z, f_p, f_q .
2. Charpit sistemini yaz; **en kolay integrale edilen** oran çiftini seç (çoğu zaman dp ya da dq içeren oranlar).
3. p veya q içeren bir ilk integral $g = a$ bul.
4. $f = 0$ ve $g = a$ 'dan p ile q 'yu çöz.
5. $dz = p dx + q dy$ 'yi integre et; sabit b ile tam integral çıkar.

12.2 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 12.1 (Tam İntegralin Bulunması). $z_x^2 x + z_y^2 y = z$ denkleminin bir tam integralini bulunuz.

Çözüm.

$f = p^2 x + q^2 y - z = 0$ olarak yazalım. Türevler:

$$f_x = p^2, \quad f_y = q^2, \quad f_z = -1, \quad f_p = 2px, \quad f_q = 2qy$$

Charpit sistemi:

$$\frac{dx}{2px} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2p^2 x + 2q^2 y} = \frac{-dp}{p^2 - p} = \frac{-dq}{q^2 - q}$$

Uyumlu ikinci denklem. Birinci ve dördüncü oranı eşleyelim:

$$\frac{dx}{2px} = \frac{-dp}{p(p-1)} \Rightarrow \frac{dx}{2x} = \frac{-dp}{p-1}$$

İntegre edersek

$$\frac{1}{2} \ln |x| = -\ln |p-1| + \ln |a| \Rightarrow (p-1)\sqrt{x} = a \Rightarrow p = a x^{-1/2} + 1$$

O hâlde $g = p - a x^{-1/2} - 1 = 0$, keyfi a sabitini taşıyan uyumlu denklemdir.

q 'yu çöz. p 'yi $f = 0$ 'da yerine koyalım:

$$q^2 y = z - (a x^{-1/2} + 1)^2 x = z - (a^2 + 2a\sqrt{x} + x) \Rightarrow q = \mp \frac{[z - a^2 - 2a\sqrt{x} - x]^{1/2}}{\sqrt{y}}$$

İntegrasyon. $p = z_x$ bilgisini önce tek başına integre edelim; $h(y)$ belirlenecek bir fonksiyon olmak üzere

$$z = \int (a x^{-1/2} + 1) dx + h(y) = 2a\sqrt{x} + x + h(y)$$

Bunu $q = z_y$ ifadesiyle karşılaştıralım:

$$h'(y) = q = \frac{\overbrace{2a\sqrt{x} + x + h(y)}^z - a^2 - 2a\sqrt{x} - x}{\sqrt{y}} = \frac{[h(y) - a^2]^{1/2}}{\sqrt{y}}$$

x 'ler tamamen sadeleşti; kalan, h için ayrılabilir bir ADD'dir:

$$\frac{dh}{\sqrt{h-a^2}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} \Rightarrow 2\sqrt{h-a^2} = 2\sqrt{y} + 2b \Rightarrow h = a^2 + (\sqrt{y} + b)^2$$

Tam integral:

$$z = 2a\sqrt{x} + x + a^2 + (\sqrt{y} + b)^2 = (\sqrt{x} + a)^2 + (\sqrt{y} + b)^2$$

Sağlama. $p = \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x}}$ ve $q = \frac{\sqrt{y} + b}{\sqrt{y}}$ için

$$p^2x + q^2y = (\sqrt{x} + a)^2 + (\sqrt{y} + b)^2 = z \checkmark$$

■

i x'ler neden sadeleşmek zorundaydı?

$h'(y)$ hesabında x 'li terimlerin tamamen yok olması tesadüf değildir: $g = a$ 'nın f ile **uyumlu** seçilmesi, tam olarak $dz = p dx + q dy$ 'nin integre edilebilmesi demektir. Eğer sadeleşme gerçekleşmezse, ya bir işlem hatası vardır ya da seçilen g gerçekten uyumlu değildir — bu, hesabın kendi içindeki alarm sistemidir.

Örnek 12.2 (dp/dy Eşlemesiyle). $yz z_x^2 - z_y = 0$ denkleminin bir tam integralini bulunuz.

Çözüm.

$f = yzp^2 - q = 0$ olarak yazalım. Türevler:

$$f_x = 0, \quad f_y = zp^2, \quad f_z = yp^2, \quad f_p = 2yzp, \quad f_q = -1$$

Charpit sistemi:

$$\frac{dx}{2yzp} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{2yzp^2 - q} = \frac{-dp}{yp^3} = \frac{-dq}{zp^2 + yp^2q}$$

Uyumlu ikinci denklem. İkinci ve dördüncü oranı eşleyelim:

$$\frac{dy}{-1} = \frac{-dp}{yp^3} \Rightarrow y dy = \frac{dp}{p^3}$$

İntegre edersek

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2p^2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = a^2 - y^2 \Rightarrow p = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

q 'yu çöz. $f = 0$ 'dan

$$q = yzp^2 = \frac{yz}{a^2 - y^2}$$

İntegrasyon. q ifadesi z içerdiğinden bu kez yapıya uygun bir öneriyle ilerleyelim: y -bağımlılığını dz/z biçiminde ayırabiliyoruz. Gerçekten $z_y = \frac{yz}{a^2 - y^2}$ denklemini ayırılabiliriz:

$$\frac{dz}{z} = \frac{y dy}{a^2 - y^2} \Rightarrow \ln |z| = -\frac{1}{2} \ln |a^2 - y^2| + \ln |g(x)|$$

Yani $z = g(x) (a^2 - y^2)^{-1/2}$ biçimindedir; g henüz bilinmiyor. Şimdi $p = z_x$ koşulunu dayatalım:

$$z_x = g'(x) (a^2 - y^2)^{-1/2} \Rightarrow z_x^2 = \frac{(g'(x))^2}{a^2 - y^2} \stackrel{!}{=} p^2 = \frac{1}{a^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow (g'(x))^2 = 1 \Rightarrow g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x + b$$

Tam integral:

$$z = \frac{x + b}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

İki keyfi sabit (a ve b) içerdiğinden tam integraldir.

Sağlama. $p = (a^2 - y^2)^{-1/2}$ ve $q = (x + b) y (a^2 - y^2)^{-3/2}$ için

$$yz p^2 = y \cdot \frac{x + b}{\sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{a^2 - y^2} = \frac{y(x + b)}{(a^2 - y^2)^{3/2}} = q \checkmark$$

■

12.3 Alıştırma

Alıştırma 12.1 (Charpit Uygulaması). $(z_x^2 + z_y^2) y - z_y z = 0$ denkleminin bir tam integralini Charpit yöntemiyle bulunuz.

İpucu: Charpit sisteminde $\frac{-dp}{f_x + pf_z}$ ve $\frac{-dq}{f_y + qf_z}$ oranlarını eşleyerek başlayın; $p dp + q dq$ biçiminde tam bir diferansiyel belirir ve $p^2 + q^2 = a^2$ ilk integrali çıkar.

Charpit sistemi her denklemde bu kadar hesap istemez: f 'nin özel biçimlerinde ikinci denklem neredeyse bedavaya gelir. Bu kestirmeler, bir sonraki bölümün konusudur: [Charpit yönteminde özel durumlar](#).

13. Charpit Yönteminde Özel Durumlar

Charpit sistemi bazı denklem biçimlerinde neredeyse kendiliğinden çözülür. Bu bölümde dört klasik özel durumu ve her biri için kestirme reçeteyi veriyoruz. Boyunca $p = z_x, q = z_y$ gösterimini ve genel Charpit sistemini kullanacağız:

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{-dp}{f_x + pf_z} = \frac{-dq}{f_y + qf_z}$$

13.1 Durum 1: Yalnızca p ve $q - f(p, q) = 0$

Denklemden x, y, z hiç görünmüyorsa $f_x = f_y = f_z = 0$ olduğundan Charpit sisteminin son iki oranı

$$dp = 0, \quad dq = 0$$

verir. O hâlde $p = a$ alınabilir; $q, f(a, q) = 0$ denkleminde çözülür: $q = Q(a)$. Böylece

$$dz = a dx + Q(a) dy \implies z = ax + Q(a)y + b$$

tam integrali **düzlemler ailesi** olarak çıkar.

Örnek 13.1 (Türevlerin Çarpımı). $z_x z_y = 1$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm.

$f = pq - 1 = 0$ yalnızca p, q içerir. $p = a$ dersek $aq = 1$, yani $q = 1/a$:

$$dz = a dx + \frac{1}{a} dy \implies z = ax + \frac{y}{a} + b \quad (a \neq 0)$$

■

Örnek 13.2 (Ters Trigonometrik Sabit). $z_x = \sin(z_y)$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm.

$f = p - \sin q = 0$ yalnızca p, q içerir. $p = a$ dersek $\sin q = a$, yani $q = \arcsin a$:

$$dz = a dx + \arcsin(a) dy \implies z = ax + (\arcsin a)y + b \quad (|a| \leq 1)$$

■

13.2 Durum 2: x ve y Yok — $f(z, p, q) = 0$

$f_x = f_y = 0$ olduğundan Charpit sisteminin son iki oranı

$$\frac{-dp}{pf_z} = \frac{-dq}{qf_z} \implies \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \implies p = aq$$

verir. $g = p - aq = 0$ uyumlu denklemdir; $f(z, aq, q) = 0$ 'dan q (dolayısıyla p) z cinsinden çözülür ve $dz = p dx + q dy$ ayrılabilir hâle gelir.

Örnek 13.3 (Ayrılabilir Hâle Gelen Diferansiyel). $z_x^2 z + z_y^2 = 1$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm.

$f = p^2 z + q^2 - 1 = 0$ denkleminde x, y yoktur. $p = aq$ koyalım:

$$a^2 q^2 z + q^2 = 1 \Rightarrow q = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 z}}, \quad p = \mp \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 z}}$$

Toplam diferansiyel:

$$dz = p dx + q dy = \mp \frac{a dx + dy}{\sqrt{1 + a^2 z}} \Rightarrow \mp \sqrt{1 + a^2 z} dz = a dx + dy$$

Sol tarafı integre edelim:

$$\mp \frac{2}{3a^2} (1 + a^2 z)^{3/2} = ax + y + c$$

Karesini alıp düzenlersek tam integral

$$\boxed{4 (1 + a^2 z)^3 = 9a^4 (ax + y + c)^2}$$

■

Örnek 13.4 (Logaritmik İntegrasyon). $z_x z_y = 9z^2$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm.

$f = pq - 9z^2 = 0$ denkleminde x, y yoktur. Kök işlemlerinden kaçınmak için oranı $p = a^2 q$ biçiminde seçelim:

$$a^2 q^2 = 9z^2 \Rightarrow q = \mp \frac{3z}{a}, \quad p = \mp 3az$$

Toplam diferansiyel (+ dalı ile):

$$dz = 3az dx + \frac{3z}{a} dy \Rightarrow \frac{dz}{z} = 3a dx + \frac{3}{a} dy$$

$$\Rightarrow \ln |z| = 3ax + \frac{3}{a}y + c \Rightarrow \boxed{z = b e^{3ax + \frac{3}{a}y}} \quad (b = \pm e^c)$$

Sağlama. $p = 3az, q = \frac{3}{a}z$ için $pq = 9z^2 \checkmark$

■

13.3 Durum 3: Ayrılabilir Denklemler — $f_1(x, p) = f_2(y, q)$

Denklem

$$f(x, y, z, p, q) = f_1(x, p) - f_2(y, q) = 0$$

biçiminde yazılabiliyorsa (z görünmüyor, x 'ler p ile, y 'ler q ile gruplanabiliyor), Charpit sisteminden

$$\frac{dx}{(f_1)_p} = \frac{-dp}{(f_1)_x} \Rightarrow (f_1)_x dx + (f_1)_p dp = 0 \Rightarrow d[f_1(x, p)] = 0$$

çıkar: $f_1(x, p) = a$ sabittir; denklemden $f_2(y, q) = a$ da sabittir. Her iki bağıntıdan $p = p(x, a)$ ve $q = q(y, a)$ çözülür; $dz = p dx + q dy$ değişkenlerine ayrılmış olarak integre edilir.

Örnek 13.5 (Gruplandırarak Ayırma). $z_x^2 y (1 + x^2) = z_y x^2$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm.

Her iki tarafı $x^2 y$ 'ye bölerek değişkenleri ayıralım:

$$\frac{p^2 (1 + x^2)}{x^2} = \frac{q}{y}$$

Sol taraf yalnız (x, p) 'ye, sağ taraf yalnız (y, q) 'ya bağlıdır; ortak değerleri a olsun ($a > 0$):

$$\frac{p^2(1+x^2)}{x^2} = a \Rightarrow p = \mp \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{q}{y} = a \Rightarrow q = ay$$

Toplam diferansiyel:

$$dz = \mp \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{1+x^2}} dx + ay dy \Rightarrow z = \mp \sqrt{a} \sqrt{1+x^2} + \frac{a}{2}y^2 + c$$

İstenirse kök içeren terim yalnız bırakılıp kare alınarak

$$\left(z - \frac{a}{2}y^2 - c\right)^2 = a(1+x^2)$$

biçiminde de yazılır.

■

Örnek 13.6 (Önce Cebirsel Ayırıştırma). $z_x^2 z_y^2 + x^2 y^2 = x^2 z_y^2 (x^2 + y^2)$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm.

Denklem ilk bakışta ayrılabilir görünmez; her iki tarafı $x^2 q^2$ 'ye bölelim:

$$\frac{p^2}{x^2} + \frac{y^2}{q^2} = x^2 + y^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{p^2}{x^2} - x^2}_{f_1(x,p)} = \underbrace{y^2 - \frac{y^2}{q^2}}_{f_2(y,q)}$$

Ortak değer a olsun:

$$\frac{p^2}{x^2} - x^2 = a \Rightarrow p = \pm x \sqrt{a + x^2}, \quad y^2 - \frac{y^2}{q^2} = a \Rightarrow q = \pm \frac{y}{\sqrt{y^2 - a}}$$

Toplam diferansiyel (uygun dallarla):

$$dz = x \sqrt{a + x^2} dx + \frac{y}{\sqrt{y^2 - a}} dy$$

Birinci integralde $u = a + x^2$, ikincide $v = y^2 - a$ dönüşümüyle

$$z = \frac{1}{3} (a + x^2)^{3/2} + (y^2 - a)^{1/2} + b$$

Sağlama. $p = x \sqrt{a + x^2}$ ve $q = y (y^2 - a)^{-1/2}$ için

$$\frac{p^2}{x^2} - x^2 = a \quad \text{ve} \quad y^2 - \frac{y^2}{q^2} = y^2 - (y^2 - a) = a \checkmark$$

■

13.4 Durum 4: Clairaut Tipi – $z = px + qy + h(p, q)$

Tanım 13.1 (Clairaut Tipi Denklem). Birinci mertebeden bir denklem

$$z = x z_x + y z_y + h(z_x, z_y)$$

biçiminde yazılabiliyorsa **Clairaut tipi** denklem olarak adlandırılır.

$f = xp + yq + h(p, q) - z$ için $f_x = p$, $f_z = -1$ olduğundan $f_x + pf_z = p - p = 0$; aynı şekilde $f_y + qf_z = 0$. Charpit sistemi doğrudan

$$dp = 0, \quad dq = 0 \implies p = a, \quad q = b$$

verir ve bu değerler denklemi özdeş olarak sağlar.

Teorem 13.1 (Clairaut Denkleminin Tam İntegrali). *Clairaut tipi denklemin tam integrali, düzlemler ailesi olan*

$$z = ax + by + h(a, b)$$

biçimindedir.

Örnek 13.7 (Clairaut Biçimine Getirme). $(z_x + z_y)(z - xz_x - yz_y) = 1$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm.

İkinci çarpanı yalnız bırakalım ($p + q \neq 0$):

$$z - xp - yq = \frac{1}{p + q} \implies z = xp + yq + \frac{1}{p + q}$$

Bu, $h(p, q) = \frac{1}{p + q}$ ile Clairaut tipidir. Tam integral:

$$z = ax + by + \frac{1}{a + b} \quad (a + b \neq 0)$$

■

🔗 Dört durumun özeti

Denklemin biçimi	Uyumlu denklem	Tam integral
$f(p, q) = 0$	$p = a$	$z = ax + Q(a)y + b$
$f(z, p, q) = 0$	$p = aq$	$dz = q(a dx + dy)$ ayrılabilir
$f_1(x, p) = f_2(y, q)$	$f_1(x, p) = a$	$z = \int p dx + \int q dy + b$
$z = px + qy + h(p, q)$	$p = a, q = b$	$z = ax + by + h(a, b)$

Bir denklemle karşılaşıncı önce bu dört kalıptan birine sokulup sokulamayacağına bakılır; hiçbiri uymuyorsa genel **Charpit yöntemi** uygulanır.

📌 Kalıba sokmak cebir ister

Son örneklerin gösterdiği gibi, denklemler bu kalıplarla **verilmez**; kalıba **getirilir**. Bir çarpanı yalnız bırakmak, her iki tarafı uygun ifadeye bölmek ya da $p = a^2q$ gibi kök üretmeyen oranlar seçmek işin görünmeyen kısmıdır.

Tam integral, **genel ve tekil integrallerin** üretim merkezidir; ancak belirli bir eğriden geçen çözüm istendiğinde işler değişir. Lineer olmayan denklemlerde **Cauchy problemi**, karakteristik şeritler kavramını gerektirir.

14. Lineer Olmayan Denklemlerde Cauchy Problemi

Kuazi-lineer denklemlerde Cauchy problemi, verilen eğriden karakteristik eğriler fırlatarak çözülüyordu ve karakteristik sistem yalnızca (x, y, z) için üç ADD içeriyordu. Lineer olmayan

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad p = z_x, \quad q = z_y$$

denkleminde karakteristik eğrinin gidişatı p ve q 'ya da bağlıdır; bu yüzden sistem **beş** bilinmeyene genişler.

14.1 Karakteristik Şerit Denklemleri

Teorem 14.1 (Karakteristik Sistem). $f(x, y, z, p, q) = 0$ denkleminin karakteristik şeritleri, t parametresine göre şu beş ADD'nin çözümleridir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_p, & \frac{dy}{dt} &= f_q, & \frac{dz}{dt} &= p f_p + q f_q \\ \frac{dp}{dt} &= - (f_x + p f_z), & \frac{dq}{dt} &= - (f_y + q f_z) \end{aligned}$$

Bu, **Charpit–Lagrange sisteminin** parametrik yazılışıdır. Çözüm eğrisi boyunca yalnızca (x, y, z) noktası değil, o noktadaki **teğet düzlem** de (p, q) aracılığıyla taşınır; bu beşliye **karakteristik şerit** (characteristic strip) denir.

14.2 Başlangıç Şeridinin Kurulması

Cauchy verisi bir eğridir:

$$\Gamma : \quad x = \alpha(v), \quad y = \beta(v), \quad z = \gamma(v)$$

Sistemi çözmek için $t = t_0$ anında beş başlangıç değeri gerekir; eğri yalnızca üçünü verir:

$$x(t_0, v) = \alpha(v), \quad y(t_0, v) = \beta(v), \quad z(t_0, v) = \gamma(v)$$

Eksik olan $p_0(v)$ ve $q_0(v)$ iki koşuldan belirlenir.

Tanım 14.1 (Başlangıç Şeridi Koşulları). 1) **Denklem koşulu:** başlangıç değerleri denklemi sağlamalıdır:

$$f(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v), p_0(v), q_0(v)) = 0$$

2) **Şerit (bant) koşulu:** eğrinin teğeti, taşınan teğet düzlemin içinde olmalıdır; yani $(\alpha', \beta', \gamma')$ teğet vektörü $(p_0, q_0, -1)$ normaline dik olmalıdır:

$$\alpha'(v) p_0(v) + \beta'(v) q_0(v) - \gamma'(v) = 0$$

Bu iki koşul p_0, q_0 için (genellikle birden çok kökü olan) bir sistemdir; her kök ayrı bir başlangıç şeridi, dolayısıyla ayrı bir çözüm adayı üretir.

14.3 Çözümlü Uygulama

Örnek 14.1 (x Ekseninden Geçen Yüzey).

$$z = \frac{1}{2} (z_x^2 + z_y^2) + (z_x - x)(z_y - y)$$

denkleminin x ekseninden geçen çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$f = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) + (p - x)(q - y) - z = 0$ olarak yazalım. Türevler:

$$f_x = -(q - y), \quad f_y = -(p - x), \quad f_z = -1$$

$$f_p = p + q - y, \quad f_q = q + p - x$$

Karakteristik sistem:

$$\frac{dx}{dt} = p + q - y, \quad \frac{dy}{dt} = p + q - x, \quad \frac{dz}{dt} = p(p + q - y) + q(p + q - x)$$

$$\frac{dp}{dt} = -(f_x + pf_z) = q - y + p, \quad \frac{dq}{dt} = -(f_y + qf_z) = p - x + q$$

Başlangıç şeridi. x eksen: $\alpha(v) = v, \beta(v) = 0, \gamma(v) = 0 (t_0 = 0)$.

Şerit koşulu: $\alpha' = 1, \beta' = \gamma' = 0$ olduğundan

$$1 \cdot p_0 + 0 \cdot q_0 - 0 = 0 \implies p_0 = 0$$

Denklemler koşulu: $f(v, 0, 0, 0, q_0) = \frac{1}{2}q_0^2 + (0 - v)q_0 = q_0 \left(\frac{q_0}{2} - v \right) = 0$; buradan $q_0 = 2v$ (sıfırdan farklı kök) seçilir.

Sistemi çözelim. İlk gözlem: $\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dt}$ olduğundan $x - p$ sabittir:

$$x = p + c_1 \xrightarrow{t=0} v = 0 + c_1 \implies x = p + v$$

Aynı şekilde $\frac{dy}{dt} = \frac{dq}{dt}$ olduğundan

$$y = q + c_2 \xrightarrow{t=0} 0 = 2v + c_2 \implies y = q - 2v$$

Şimdi p denklemini kendi içine kapanır:

$$\frac{dp}{dt} = p + q - y = p + q - (q - 2v) = p + 2v$$

$$\implies p + 2v = c_3 e^t \xrightarrow{t=0} c_3 = 2v \implies p = 2v (e^t - 1)$$

Benzer biçimde q için:

$$\frac{dq}{dt} = p + q - x = q - v \implies q - v = c_4 e^t \xrightarrow{t=0} c_4 = v \implies q = v (e^t + 1)$$

Bunlardan konum bileşenleri:

$$x = p + v = v (2e^t - 1), \quad y = q - 2v = v (e^t - 1)$$

Son olarak z :

$$\frac{dz}{dt} = p (p + 2v) + q (q - v) = 2v (e^t - 1) \cdot 2ve^t + v (e^t + 1) \cdot ve^t = 5v^2 e^{2t} - 3v^2 e^t$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{2}v^2e^{2t} - 3v^2e^t + c_5 \xrightarrow{t=0} 0 = \frac{5}{2}v^2 - 3v^2 + c_5 \Rightarrow c_5 = \frac{1}{2}v^2$$

$$z = \frac{5}{2}v^2e^{2t} - 3v^2e^t + \frac{1}{2}v^2$$

Parametreleri yok edelim. $E = e^t$ diyelim; $x = v(2E - 1)$ ve $y = v(E - 1)$ 'den

$$x - 2y = v(2E - 1 - 2E + 2) = v \Rightarrow v = x - 2y, \quad E = \frac{y + v}{v} = \frac{x - y}{x - 2y}$$

z ifadesi v^2E^2 , v^2E ve v^2 terimlerinden oluştuğu için doğrudan yerine koyabiliriz: $vE = x - y$ olduğundan

$$z = \frac{5}{2}(x - y)^2 - 3(x - y)(x - 2y) + \frac{1}{2}(x - 2y)^2$$

Açalım:

$$z = \frac{5}{2}(x^2 - 2xy + y^2) - 3(x^2 - 3xy + 2y^2) + \frac{1}{2}(x^2 - 4xy + 4y^2) = 2xy - \frac{3}{2}y^2$$

$$\boxed{z(x, y) = \frac{y}{2}(4x - 3y)}$$

Sağlama. $p = 2y$, $q = 2x - 3y$ için

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y) = \frac{4y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2}{2} + (2y - x)(2x - 4y)$$

$$= 2x^2 + \frac{13}{2}y^2 - 6xy - 2x^2 + 8xy - 8y^2 = 2xy - \frac{3}{2}y^2 = z \checkmark$$

Ayrıca $y = 0$ üzerinde $z = 0$: yüzey x ekseninden geçer $\checkmark$

■

İkinci kök, ikinci çözüm

Başlangıç şeridi kurulurken $q_0(\frac{q_0}{2} - v) = 0$ denkleminin **iki** kökü vardı. Seçilmeyen $q_0 = 0$ kökü de geçerli bir başlangıç şerididir ve aynı adımlar izlenirse

$$z = \frac{y^2}{2}$$

çözümüne ulaşılır; bu fonksiyon da denklemi sağlar ve x ekseninden geçer ($p = 0$, $q = y$ için $\frac{1}{2}y^2 + (0 - x)(y - y) = \frac{1}{2}y^2 = z$).

Yani bu Cauchy probleminin **birden fazla çözümü** vardır. Lineer olmayan denklemlerde bu tipik bir durumdur: her başlangıç şeridi kökü ayrı bir integral yüzeyi üretir ve teklik ancak ek koşullarla sağlanır. **İyi konulmuş problem** kavramındaki “teklik” maddesinin burada nasıl bozulabildiğine dikkat edin.

 Hesap planı

1. f' 'yi ve beş türevini yaz; karakteristik sistemi kur.
2. Eğriyi parametrele; şerit koşulu ve $f = 0$ 'dan $p_0(v), q_0(v)$ 'yi bul.
3. Sistemde **birbirine eşit türevler** ara ($dx/dt = dp/dt$ gibi): her eşitlik bir korunan büyüklük verir ve sistemi kapatır.
4. t, v 'yi x, y cinsinden çözüp z 'de yerine koy.
5. Mutlaka sağlama yap: hem denklemleri hem başlangıç eğrisini kontrol et.

Birinci mertebeden kuram burada tamamlanıyor. Sıradaki kısımda mertebeyi yükseltiyoruz: [ikinci mertebeden lineer denklemler ve operatör gösterimi](#).

15. İkinci Mertebeden Lineer Denklemler ve Operatör Gösterimi

Bu kısımda iki bağımsız değişkenli, **ikinci mertebeden lineer** denklemleri inceliyoruz:

$$A z_{xx} + B z_{xy} + C z_{yy} + D z_x + E z_y + F z = G \quad (1)$$

Burada A, B, C, D, E, F, G katsayıları $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesinde x ve y 'nin fonksiyonlarıdır ($A, \dots, G \in C^2(\Omega)$). Fizikteki üç büyük denklem — dalga, ısı ve Laplace — bu ailedendir; kuramın hedefi bu aileyi anlamaktır.

15.1 Türev Operatörleri

Yazımı kısaltmak için türev alma işlemini bir **operatör** olarak adlandıralım:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_x D_y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$$

Bu gösterimle denklem (1) şöyle yazılır:

$$\underbrace{[A D_x^2 + B D_x D_y + C D_y^2 + D D_x + E D_y + F]}_{L(D_x, D_y)} z = G \implies L(D_x, D_y) z = G$$

Tanım 15.1 (Lineer Operatör). Bir L operatörü, her c_1, c_2 sabiti ve her u_1, u_2 fonksiyonu için

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2)$$

koşulunu sağlıyorsa **lineer operatör** olarak adlandırılır.

Türev almanın lineerliği nedeniyle $L(D_x, D_y)$ bir lineer operatördür. Tümevarımla genelleme de doğrudur: $u_1, \dots, u_n$ fonksiyonlar ve $c_1, \dots, c_n$ gerçel sabitler olmak üzere

$$L\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i L(u_i)$$

$\sum c_i u_i$ ifadesine u_i 'lerin bir **lineer kombinasyonu** denir.

15.2 Süperpozisyon İlkesi

Teorem 15.1 (Süperpozisyon İlkesi). $z_1, z_2, \dots, z_k$ fonksiyonları $Lz = 0$ homojen denkleminin çözümleri ise, bunların her lineer kombinasyonu da çözümdür.

İspat.

Lineerlikten

$$L(c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_k z_k) = c_1 \underbrace{L(z_1)}_0 + c_2 \underbrace{L(z_2)}_0 + \dots + c_k \underbrace{L(z_k)}_0 = 0$$

■

Teorem 15.2 (Genel Çözümün Yapısı). $z_p, Lz = G$ denkleminin herhangi bir özel çözümü ve $z_h, Lz = 0$ homojen denkleminin genel çözümü olsun. Bu durumda $Lz = G$ 'nin genel çözümü

$$z = z_h + z_p$$

biçimindedir.

İspat.

$L(z_h + z_p) = L(z_h) + L(z_p) = 0 + G = G$ olduğundan $z_h + z_p$ bir çözümdür. Tersine w herhangi bir çözümse $L(w - z_p) = G - G = 0$ olduğundan $w - z_p$ homojen denklemin bir çözümüdür; yani $w, z_h + z_p$ biçimindedir. ■

💡 Çalışma planı

Bu yapı, sonraki bölümlerin iş bölümünü belirler:

1. **Homojen çözüm z_h :** operatörü çarpanlara ayırarak ya da $f(mx + y)$ denemesiyle, **iki keyfi fonksiyon** içeren genel çözüm bulunur.
2. **Özel çözüm z_p :** sağ tarafa uygun bir deneme fonksiyonuyla (belirsiz katsayılar) tek bir çözüm bulunur.
3. İkisi toplanır.

ADD'lerdeki $y = y_h + y_p$ stratejisinin birebir karşılığıdır; tek fark, sabitlerin yerini fonksiyonların almasıdır.

15.3 Sınıflandırma Alıştırmaları

İkinci mertebeden denklemlerle çalışmaya başlamadan önce, **sınıflandırma** bölümünün ölçütlerini bu aileye uygulayalım.

Örnek 15.1 (Mertebe, Lineerlik, Homojenlik). Aşağıdaki denklemleri sınıflandırınız.

a) $x^2 u_{xx} - y^2 u_y + u_{yy} + e^x u_{xy} = xy^3$

b) $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + \sin u = 0$

Çözüm.

a) En yüksek türevler u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} olduğundan **ikinci mertebededir**. u ve türevleri birinci dereceden, katsayılar $(x^2, -y^2, 1, e^x)$ yalnızca bağımsız değişkenlere bağlı: **lineerdir**. Sağ taraftaki xy^3 terimi u içermez: **homojen değildir**.

b) En yüksek türevler u_{xx} ve u_{yy} olduğundan **ikinci mertebededir**. En yüksek mertebeli türevlerin karesi alınmış ve u bir trigonometrik fonksiyonun içinde: **nonlineerdir**. Bütün terimler u 'yu veya türevlerini içerir: **homojendir**. ■

⚠ Süperpozisyon yalnızca lineer denklemlerde çalışır

Yukarıdaki (b) örneği gibi nonlinear denklemlerde iki çözümün toplamı genellikle çözüm **değildir**: $\sin(u_1 + u_2) \neq \sin u_1 + \sin u_2$. Süperpozisyonun tüm gücü — çözümleri parçalara ayırıp toplamak, G' 'yi parçalayıp her parçaya ayrı özel çözüm bulmak — lineerliğe dayanır.

Bir sonraki bölümde homojen çözümü üretmenin ilk yolunu görüyoruz: **operatörü çarpanlara ayırmak**.

16. Sabit Katsayılı Denklemler: Operatörü Çarpanlara Ayırma

Katsayıları sabit olan

$$Lz = Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} + Dz_x + Ez_y + Fz = G(x, y)$$

denklemini ele alalım. **Önceki bölümden** biliyoruz: genel çözüm $z = z_h + z_p$ 'dir. Bu bölümde z_h 'yi **operatörü çarpanlara ayırarak**, z_p 'yi belirsiz katsayılarla bulacağız.

16.1 Operatör Polinomu ve Çarpanlara Ayırma

$L = AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F$ operatöründe D_x yerine x , D_y yerine y yazılırsa bir polinom elde edilir:

$$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Katsayılar sabit olduğundan operatörler **çarpma sırasından bağımsız** çalışır ($D_xD_y = D_yD_x$); dolayısıyla polinom nasıl çarpanlara ayrılıyorsa operatör de öyle ayrılır:

$$P = (a_1x + b_1y + \alpha_1)(a_2x + b_2y + \alpha_2) \implies L = L_1L_2 = L_2L_1$$

$$L_i = a_iD_x + b_iD_y + \alpha_i$$

Teorem 16.1 (Çarpanların Çözümleri Denklemi Çözer). $L = L_1L_2 = L_2L_1$ ise, $L_1z = 0$ veya $L_2z = 0$ denklemlerini sağlayan her z , $Lz = 0$ denklemini de sağlar.

İspat.

$L_2z = 0$ ise $Lz = L_1(L_2z) = L_1(0) = 0$. $L_1z = 0$ ise sıra değiştirilerek $Lz = L_2(L_1z) = 0$.

■

16.2 Tek Çarpanın Genel Çözümü

$(aD_x + bD_y + \alpha)z = 0$, yani $az_x + bz_y + \alpha z = 0$ birinci mertebeden lineer bir denklemdir; **Lagrange yöntemiyle** çözelim:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-\alpha z}$$

İlk iki orandan $bx - ay = c_1$; birinci ve üçüncü orandan ($a \neq 0$)

$$\frac{dz}{z} = -\frac{\alpha}{a}dx \implies z e^{\frac{\alpha}{a}x} = c_2$$

Genel çözüm $F(c_1 - \text{ifadesi}, c_2 - \text{ifadesi}) = 0$ 'dan, z 'li sabit çekilerek:

$$z = e^{-\frac{\alpha}{a}x} f(bx - ay)$$

Teorem 16.2 (Homojen Denklemin Genel Çözümü). $L = L_1L_2$ çarpanlarına ayrılıyorsa, çarpanlar birbirinin katı değilse ve $a_1, a_2 \neq 0$ ise, $Lz = 0$ denkleminin genel çözümü ($f_1, f_2 \in C^2$ keyfi)

$$z_h = e^{-\frac{\alpha_1}{a_1}x} f_1(b_1x - a_1y) + e^{-\frac{\alpha_2}{a_2}x} f_2(b_2x - a_2y)$$

biçimindedir. *Süperpozisyon ilkesi* gereği toplam da çözümdür ve iki keyfi fonksiyon, ikinci mertebe için beklenen genel çözümü verir.

⚠ Çakışık çarpan ayrı ele alınır

$L = L_1^2$ biçiminde **tekrarlı** çarpan varsa formüldeki iki terim aynı argümanı taşır ve tek keyfi fonksiyona indirgenir; genel çözüm için ikinci bağımsız parça x (veya y) çarpanıyla gelir. Örneğin $(D_x + D_y)^2 z = 0$ denkleminin genel çözümü

$$z_h = f_1(x - y) + x f_2(x - y)$$

biçimindedir. Bu durum, **tip sınıflandırmasındaki** parabolik hâlin operatör diliyle görünümüdür.

16.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 16.1 (Çarpanlara Ayırma + Parçalanmış Sağ Taraf). $z_{xx} - z_{yy} = 4x + 3 \cos 2y$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Homojen çözüm. $L = D_x^2 - D_y^2 = (D_x - D_y)(D_x + D_y)$ çarpanlarına ayrılır.

$(D_x + D_y)z = 0$, yani $z_x + z_y = 0$: Lagrange sisteminden $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}$ ile $x - y = c_1$, $z = c_2$; çözüm $z = f_1(x - y)$.

$(D_x - D_y)z = 0$, yani $z_x - z_y = 0$: benzer biçimde $x + y = c_3$, $z = c_4$; çözüm $z = f_2(x + y)$.

$$z_h = f_1(x - y) + f_2(x + y)$$

Özel çözüm. Sağ taraf iki parçadan oluşuyor; süperpozisyonla ayrı ayrı çözelim: $Lz_{p_1} = 4x$ ve $Lz_{p_2} = 3 \cos 2y$ ise $z_p = z_{p_1} + z_{p_2}$.

Birinci parça: yalnızca x 'e bağlı bir çözüm arayalım; $z_{p_1} = z_{p_1}(x)$ için denklem $(z_{p_1})_{xx} = 4x$ olur:

$$(z_{p_1})_x = 2x^2 \Rightarrow z_{p_1} = \frac{2x^3}{3}$$

İkinci parça: yalnızca y 'ye bağlı bir çözüm arayalım; $-(z_{p_2})_{yy} = 3 \cos 2y$:

$$(z_{p_2})_y = -\frac{3}{2} \sin 2y \Rightarrow z_{p_2} = \frac{3}{4} \cos 2y$$

İki parçada da integrasyon sabiti/fonksiyonu eklemeye gerek yoktur: tek bir özel çözüm yeterlidir, keyfilik zaten z_h 'dedir.

Genel çözüm:

$$z = f_1(x - y) + f_2(x + y) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4} \cos 2y$$

■

Örnek 16.2 (Tam Kareyle Çarpanlara Ayırma). $z_{xx} - z_{yy} + 2z_x + z = \sin(x + y)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Homojen çözüm. Operatör polinomu

$$P = x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 + y)(x + 1 - y)$$

biçiminde ayrılır; yani

$$L = (D_x + D_y + 1)(D_x - D_y + 1)$$

Birinci çarpan: $z_x + z_y + z = 0$ için Lagrange sistemi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-z} \Rightarrow x - y = c_1, \quad z e^x = c_2 \Rightarrow z = e^{-x} f_1(x - y)$$

İkinci çarpan: $z_x - z_y + z = 0$ için

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{-z} \Rightarrow x + y = c_3, \quad z e^x = c_4 \Rightarrow z = e^{-x} f_2(x + y)$$

$$z_h = e^{-x} [f_1(x - y) + f_2(x + y)]$$

Özel çözüm. $z_p = A \sin(x + y) + B \cos(x + y)$ deneyelim. $w = x + y$ kısaltmasıyla

$$(z_p)_x = (z_p)_y = A \cos w - B \sin w, \quad (z_p)_{xx} = (z_p)_{yy} = -A \sin w - B \cos w$$

O hâlde $z_{xx} - z_{yy} = 0$ olur ve denklem şuna iner:

$$2(A \cos w - B \sin w) + A \sin w + B \cos w = \sin w$$

Katsayıları eşitleyelim:

$$\sin w : -2B + A = 1, \quad \cos w : 2A + B = 0$$

İkinciden $B = -2A$; birincide $A + 4A = 1$, yani $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{2}{5}$.

Genel çözüm:

$$z = e^{-x} [f_1(x - y) + f_2(x + y)] + \frac{1}{5} \sin(x + y) - \frac{2}{5} \cos(x + y)$$

■

⚠ sin için tek terimli deneme yetmez

Son örnekte $z_p = A \sin(x + y)$ tek başına denenseydi, $2z_x$ teriminden gelen $\cos(x + y)$ karşılıksız kalırdı. Denklemden **tek mertebeli türev** varken sinüs ve kosinüs daima **birlikte** denenmelidir; ADD'lerdeki kuralın aynısıdır.

i Sağ taraf üstel ise

$G = e^{ax+by}$ biçimindeyse deneme $z_p = \kappa e^{ax+by}$ dir ve doğrudan $\kappa P(a, b) = 1$ bulunur; yani $P(a, b) \neq 0$ olduğu sürece

$$z_p = \frac{e^{ax+by}}{P(a, b)}$$

Burada P , operatör polinomudur. $P(a, b) = 0$ (rezonans) durumunda deneme x ile çarpılarak genişletilir.

Çarpanlara ayırma, P 'nin **çarpanlanabilir** olmasına bağlıdır. $z_{xx} + z_{yy}$ gibi gerçel çarpanlara ayırlamayan operatörler için başka bir yaklaşım gerekir: **deneme fonksiyonu** $f(mx + y)$ ve **tip sınıflandırması**.

17. Hiperbolik, Eliptik ve Parabolik Denklemler

Bu bölümde yalnızca **salt ikinci mertebeden türevler** içeren sabit katsayılı denklemi inceliyoruz:

$$a z_{xx} + b z_{xy} + c z_{yy} = 0 \quad (*)$$

Bu basit görünümlü denklem, ikinci mertebeden denklemlerin ünlü **tip sınıflandırmasını** (hiperbolik–eliptik–parabolik) doğurur.

17.1 Deneme Fonksiyonu

Çözümün, m belirlenecek bir sabit olmak üzere

$$z(x, y) = f(mx + y) \quad (**)$$

biçiminde olduğunu varsayalım ($f \in C^2$ keyfi). Türevleri hesaplayıp (*)'a koyalım; $w = mx + y$ ile

$$\begin{aligned} z_{xx} &= m^2 f''(w), & z_{xy} &= m f''(w), & z_{yy} &= f''(w) \\ \implies (a m^2 + b m + c) f''(w) &= 0 \end{aligned}$$

f keyfi olduğundan parantez sıfır olmalıdır:

$$a m^2 + b m + c = 0 \implies m = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Yani m , katsayılardan kurulan ikinci derece denklemin köküdür; kökler diskriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ 'nin işaretine göre üç ayrı karaktere bürünür.

17.2 Üç Tip

Tanım 17.1 (Hiperbolik, Eliptik, Parabolik). $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere denklem (*):

- $\Delta > 0$ ise **hiperbolik**: (1)'in iki farklı gerçel kökü $m_1 \neq m_2$ vardır ve genel çözüm

$$z = f(m_1 x + y) + g(m_2 x + y)$$

- $\Delta < 0$ ise **eliptik**: kökler karmaşık eşleniktir ($m_2 = \overline{m_1}$) ve genel çözüm biçimsel olarak yine

$$z = f(m_1 x + y) + g(m_2 x + y)$$

- $\Delta = 0$ ise **parabolik**: çakışık tek kök m vardır ve ikinci bağımsız çözüm bir çarpan kazanır:

$$z = f(mx + y) + y g(mx + y)$$

i Parabolik durumda ikinci çözüm nereden geliyor?

Çakışık kökte $f(mx + y)$ tek başına yalnızca **bir** keyfi fonksiyon verir; oysa ikinci mertebeden denklemin genel çözümü iki fonksiyon taşımalıdır. $z = yg(w)$, $w = mx + y$ denemesinin türevlerini hesaplayalım:

$$z_{xx} = m^2 y g'', \quad z_{xy} = m g' + m y g'', \quad z_{yy} = 2g' + y g''$$

Denklemleri toplarsak

$$a z_{xx} + b z_{xy} + c z_{yy} = \underbrace{(am^2 + bm + c)}_{=0} y g'' + (bm + 2c) g'$$

Çakışık kökte $m = -\frac{b}{2a}$ olduğundan

$$bm + 2c = -\frac{b^2}{2a} + 2c = -\frac{b^2 - 4ac}{2a} = -\frac{\Delta}{2a} = 0$$

ve deneme denklemi sağlar. ADD'lerdeki çakışık kök çözümü $x e^{\lambda x}$ 'in birebir karşılığıdır.

! Adlar nereden geliyor?

$am^2 + bm + c$ ifadesi, konik sınıflandırmasındaki ikinci derece formula aynı yapıdadır: $\Delta > 0$ hiperbolü, $\Delta < 0$ elipsi, $\Delta = 0$ parabolü verir. Adlar buradan aktarılmıştır; denklemlerin çözümlerinin davranışı da bu geometrik karaktere uyar.

17.3 Üç Prototip

Örnek 17.1 (Dalga, Isı, Laplace). Fiziğin üç temel denkleminin tipleri (y yerine t okunabilir):

- $z_{xx} - z_{yy} = 0 \rightarrow \Delta = 0 - 4(1)(-1) = 4 > 0$: **hiperbolik** – *dalga denklemi*.
- $z_{xx} - z_y = 0 \rightarrow$ salt ikinci mertebeden kısmi z_{xx} 'tir; $a = 1, b = c = 0$ ile $\Delta = 0$: **parabolik** – *ısı denklemi*.
- $z_{xx} + z_{yy} = 0 \rightarrow \Delta = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0$: **eliptik** – *Laplace denklemi*.

17.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 17.2 (Hiperbolik Denklem). $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$a = 1, b = 1, c = -2:$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-2) = 9 > 0 \Rightarrow \text{hiperbolik}$$

Kök denklemi:

$$m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m + 2) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, \quad m_2 = -2$$

Genel çözüm:

$$u(x, y) = f(x + y) + g(-2x + y)$$

Sağlama. $g(-2x + y)$ için $u_{xx} = 4g'', u_{xy} = -2g'', u_{yy} = g''$:

$$4g'' - 2g'' - 2g'' = 0 \checkmark$$

■

Örnek 17.3 (Homojen Olmayan Hiperbolik Denklem). $u_{xx} - u_{yy} = 5 \cos(2x + y) - 3 \sin(2x + y)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Homojen çözüm. $m^2 - 1 = 0$ olduğundan $m = \mp 1$:

$$u_h = f(x + y) + g(x - y)$$

Burada $-x + y$ ve $x + y$ argümanları yerine eşdeğer olan $x + y$, $x - y$ yazımı kullanılmıştır (keyfi fonksiyonun içindeki işaret keyfiliğe katılabilir).

Özel çözüm. Sağ tarafın argümanı $w = 2x + y$ olduğundan

$$u_p = A \cos w + B \sin w$$

deneyelim:

$$(u_p)_{xx} = -4A \cos w - 4B \sin w, \quad (u_p)_{yy} = -A \cos w - B \sin w$$

$$u_{xx} - u_{yy} = -3A \cos w - 3B \sin w \stackrel{!}{=} 5 \cos w - 3 \sin w$$

Katsayılarından $-3A = 5$ ve $-3B = -3$; yani $A = -\frac{5}{3}$, $B = 1$.

Genel çözüm:

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y) - \frac{5}{3} \cos(2x + y) + \sin(2x + y)$$

■

Örnek 17.4 (Eliptik Denklem: Poisson). $u_{xx} + u_{yy} = 6(x + y)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

Homojen çözüm. $m^2 + 1 = 0$ olduğundan $m = \mp i$: denklem **eliptiktir** ve

$$u_h = f(x + iy) + g(x - iy)$$

Keyfi fonksiyonlar karmaşık argüman alır; gerçel çözümler, eşlenik çiftlerin uygun kombinasyonlarıyla elde edilir (Laplace denkleminin harmonik fonksiyon kuramına açılan kapısı).

Özel çözüm. Sağ taraf $6x + 6y$ olduğundan $u_p = \kappa_1 x^3 + \kappa_2 y^3$ deneyelim:

$$(u_p)_{xx} = 6\kappa_1 x, \quad (u_p)_{yy} = 6\kappa_2 y \implies 6\kappa_1 x + 6\kappa_2 y = 6x + 6y \implies \kappa_1 = \kappa_2 = 1$$

Genel çözüm:

$$u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy) + x^3 + y^3$$

■

Örnek 17.5 (Parabolik Denklem). $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$a = 1$, $b = -2$, $c = 1$:

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \implies \text{parabolik}$$

Kök denklemi $m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0$ olup çakışık kök $m = 1$ 'dir. Genel çözüm:

$$u(x, y) = f(x + y) + y g(x + y)$$

Sağlama. $z = y g(x + y)$ için

$$z_{xx} = y g'', \quad z_{xy} = g' + y g'', \quad z_{yy} = 2g' + y g''$$

$$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = y g'' - 2g' - 2y g'' + 2g' + y g'' = 0 \checkmark$$

■

💡 Tip neyi belirler?

Sınıflandırma bir etiketleme egzersizi değildir; denklemin **fiziğini ve iyi konulmuş problem tipini** belirler:

- **Hiperbolik** denklemler bilgiyi karakteristikler boyunca **sonlu hızla** taşır (dalga yayılımı); doğal problem başlangıç değer problemidir.
- **Parabolik** denklemler düzleştirir ve **tek yönlü** zaman akışına sahiptir (ısı yayılımı).
- **Eliptik** denklemler denge durumlarını tanımlar; doğal problem **sınır değer problemidir**.

Değişken katsayılı denklemlerde Δ 'nın işareti noktadan noktaya değişebilir; denklem bölgenin bir kısmında hiperbolik, başka kısmında eliptik olabilir.