

Kompleks Analiz

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

Giriş	11
1 Kompleks Sayıların Cebirsel Yapısı	12
1.1 Toplamlar ve Çarpımlar	12
1.2 i Sayısı ve $x + iy$ Gösterimi	13
1.3 Temel Cebirsel Özellikler	13
1.4 Sıfır Çarpanları Yoktur	14
1.5 Bölme	14
1.6 Binom Formülü	15
1.7 Alıştırma	15
2 Vektörler, Modül ve Eşlenik	16
2.1 Vektör Yorumu	16
2.2 Modül	16
2.3 Üçgen Eşitsizliği	18
2.4 Kompleks Eşlenik	19
2.5 Çarpımın ve Bölümün Modülü	20
2.6 Alıştırma	20
3 Kutupsal ve Üstel Form	22
3.1 Kutupsal Form ve Argüman	22
3.2 Euler Formülü ve Üstel Form	27
3.3 Üstel Formda Çarpım ve Bölüm	28
3.4 Kuvvetler ve de Moivre Formülü	29
3.5 Çarpımların ve Bölümlerin Argümanları	30
3.6 Alıştırma	31
4 Kompleks Sayıların Kökleri	33
4.1 Üstel Formların Eşitliği	33
4.2 n -inci Köklerin Bulunması	33
4.3 Çözümlü Uygulamalar	34
4.4 Alıştırma	35
5 Kompleks Düzlemde Bölgeler	37
5.1 Komşuluklar	37
5.2 İç, Dış ve Sınır Noktaları	37
5.3 Açık ve Kapalı Kümeler	38
5.4 Bağlantılılık, Domen ve Bölge	39

5.5	Sınırlılık	40
5.6	Yığılma Noktaları	40
5.7	Alıştırma	41
6	Fonksiyonlar ve Tasvirler	43
6.1	Fonksiyon Kavramı	43
6.2	Tasvir Kavramı	44
6.3	$w = z^2$ Tasviri	44
6.4	Üstel Fonksiyonla Tasvirler	45
6.5	Alıştırma	46
7	Limitler ve Süreklilik	48
7.1	Limit Tanımı	48
7.2	Limit Teoremleri	49
7.3	Sonsuzdaki Nokta	50
7.4	Süreklilik	51
7.5	Alıştırma	52
8	Türev ve Türev Formülleri	54
8.1	Türevin Tanımı	54
8.2	Türevlenemeyen Fonksiyonlar	55
8.3	Türev Sürekliliği Gerektirir	55
8.4	Türev Formülleri	56
8.5	Alıştırma	56
9	Cauchy-Riemann Denklemleri	58
9.1	Denklemlerin Türetilişi	58
9.2	Yeterlilik Teoremi	59
9.3	Kutupsal Koordinatlarda Cauchy-Riemann	60
9.4	Alıştırma	61
10	Analitik Fonksiyonlar	64
10.1	Tanımlar	64
10.2	Analitik Fonksiyonların Cebiri	64
10.3	Türevi Sıfır Olan Fonksiyon Sabittir	65
10.4	Katılık Örnekleri	66
10.5	Alıştırma	67
11	Harmonik Fonksiyonlar	68
11.1	Harmoniklik	68
11.2	Analitik Fonksiyonların Bileşenleri Harmoniktir	69
11.3	Harmonik Eşlenik	69
11.4	Harmonik Eşlenik Bulma Yöntemi	70
11.5	Alıştırma	70

12	Tek Türlü Belirlenme ve Yansıma Prensibi	72
12.1	Özdeş Sıfır Olma İlkesi	72
12.2	Analitik Uzanım	73
12.3	Yansıma Prensibi	74
12.4	Alıştırma	76
13	Üstel Fonksiyon	77
13.1	Tanım	77
13.2	Toplama Özelliği	77
13.3	Modül, Argüman ve Sıfırlanmama	77
13.4	Periyodiklik	78
13.5	$e^z = w$ Denkleminin Çözümü	79
13.6	Alıştırma	80
14	Logaritmik Fonksiyon ve Dalları	82
14.1	Tanım	82
14.2	Esas Değer	82
14.3	Logaritmanın Dalları	83
14.4	Özdeşlikler: Neyin Geçerli Kaldığı	84
14.5	Alıştırma	85
15	Kompleks Üsler	86
15.1	Tanım	86
15.2	Dalların Analitikliği	86
15.3	Üs Kuralları Ne Zaman Bozulur?	87
15.4	Tabanı Sabit Üstel Fonksiyon	88
15.5	Alıştırma	88
16	Trigonometrik Fonksiyonlar	91
16.1	Tanımlar ve Temel Özellikler	91
16.2	Hiperbolik Bileşenli Açılımlar	91
16.3	Sıfırlar	92
16.4	Diğer Dört Fonksiyon	92
16.5	Alıştırma	92
17	Hiperbolik Fonksiyonlar	95
17.1	Tanımlar	95
17.2	Trigonometrik Köprü	95
17.3	Özdeşlikler	95
17.4	Periyodiklik ve Sıfırlar	96
17.5	Hiperbolik Tanjant	97
17.6	Alıştırma	97

18	Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar	99
18.1	Ters Sinüs	99
18.2	Ters Kosinüs ve Ters Tanjant	100
18.3	Türevler	100
18.4	Ters Hiperbolik Fonksiyonlar	100
18.5	Alıştırma	100
19	Reel Değişkenli Fonksiyonların Türev ve İntegralleri	103
19.1	Türev	103
19.2	Belirli İntegral	104
19.3	Temel Teorem	105
19.4	Alıştırma	105
20	Yaylar ve Çevreler	108
20.1	Yaylar	108
20.2	Yeniden Parametrizasyon	109
20.3	Düzgün Yaylar ve Uzunluk	110
20.4	Çevreler	110
20.5	Alıştırma	111
21	Çevre İntegralleri	113
21.1	Tanım	113
21.2	Yol Bağımlılığı: Üç Klasik Örnek	113
21.3	Dal Kesimli İntegrandlar	116
21.4	Alıştırma	118
22	Çevre İntegrallerinin Modülleri İçin Üst Sınırlar	120
22.1	İntegral Modülü Lemması	120
22.2	ML Eşitsizliği	120
22.3	Çözümlü Uygulamalar	121
22.4	Alıştırma	123
23	Ters Türevler	126
23.1	Ters Türev	126
23.2	Denklik Teoremi	126
23.3	Çözümlü Uygulamalar	128
23.4	Alıştırma	130
24	Cauchy-Goursat Teoremi	132
24.1	Green Teoremiyle İlk Biçim	132
24.2	Türevin Sürekliliği Neden Gereksiz?	132
24.3	Kare Örtüsü Lemması	133
24.4	Teoremin İfadesi	134
24.5	Alıştırma	136

25	Basit ve Çok Bağlantılı Domenler	139
25.1	Basit Bağlantılı Domenler	139
25.2	Ters Türevin Varlığı	140
25.3	Çok Bağlantılı Domenler	141
25.4	Yolun Deformasyonu İlkesi	142
25.5	Alıştırma	143
26	Cauchy İntegral Formülü ve Genişlemesi	145
26.1	Cauchy İntegral Formülü	145
26.2	Türevler İçin Genişleme	147
26.3	Üç Temel Sonuç	149
26.4	Alıştırma	150
27	Liouville Teoremi ve Cebirin Temel Teoremi	152
27.1	Liouville Teoremi	152
27.2	Cebirin Temel Teoremi	152
27.3	Lineer Çarpanlara Ayrılış	154
27.4	Alıştırma	155
28	Maksimum Modül İlkesi	157
28.1	Gauss Ortalama Değer Teoremi	157
28.2	Yerel Maksimum Lemması	157
28.3	Maksimum Modül İlkesi	158
28.4	Kapalı Bölgelerde Sonuç	159
28.5	Harmonik Fonksiyonlara Uygulanışı	160
28.6	Alıştırma	160
29	Dizilerin ve Serilerin Yakınsaklığı	162
29.1	Dizilerin Yakınsaklığı	162
29.2	Serilerin Yakınsaklığı	163
29.3	Kalanlarla Yakınsaklık Ölçütü	164
29.4	Alıştırma	165
30	Taylor Serileri	167
30.1	Taylor Teoremi	167
30.2	Temel Maclaurin Açılımları	169
30.3	Geometrik Açılım ve Kaydırmalar	170
30.4	Alıştırma	172
31	Laurent Serileri	174
31.1	Laurent Teoremi	174
31.2	Çözümlü Uygulamalar	176
31.3	Aynı Fonksiyon, Üç Farklı Halka	177
31.4	Alıştırma	179

32	Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	181
32.1	Yakınsaklık Çemberi	181
32.2	Düzgün Yakınsaklık	183
32.3	Toplamın Sürekliliği	184
32.4	Negatif Kuvvetli Serilere Uyarlama	185
32.5	Alıştırma	186
33	Kuvvet Serileriyle İşlemler	188
33.1	Terim Terime İntegrasyon	188
33.2	Terim Terime Türetme	189
33.3	Temsillerin Tekliği	190
33.4	Çarpım ve Bölüm	191
33.5	Alıştırma	193
34	Ayrık Tekil Noktalar ve Rezidü	195
34.1	Ayrık Tekil Noktalar	195
34.2	Rezidü	196
34.3	Çözümlü Uygulamalar	197
34.4	Alıştırma	199
35	Cauchy Rezidü Teoremi ve Sonsuzdaki Rezidü	201
35.1	Cauchy Rezidü Teoremi	201
35.2	Sonsuzdaki Rezidü	202
35.3	Alıştırma	205
36	Ayrık Tekil Noktaların Üç Tipi	208
36.1	Esas Kısım	208
36.2	Sınıflandırma	208
36.3	Kutuplarda Rezidü	210
36.4	Çözümlü Uygulamalar	211
36.5	Alıştırma	213
37	Sıfırlar ve Kutuplar	215
37.1	Analitik Fonksiyonların Sıfırları	215
37.2	Sıfırlar Ayrıktır	216
37.3	Sıfırlardan Kutuplara	217
37.4	Basit Kutuplar İçin Rezidü Formülü	218
37.5	Çözümlü Uygulamalar	218
37.6	Alıştırma	220
38	Tekil Noktaların Civarında Davranış	223
38.1	Kutupta: Modül Sonsuza Gider	223
38.2	Kaldırılabilir Tekillikte: Sınırlılık	223
38.3	Esaslı Tekillikte: Casorati-Weierstrass	224

38.4	Üç Tipin Karşılaştırması	226
38.5	Alıştırma	226
39	Has Olmayan İntegrallerin Hesaplanması	229
39.1	Has Olmayan İntegral ve Esas Değer	229
39.2	Çift Fonksiyonlarda İndirgeme	230
39.3	Yarım Çember Yöntemi	231
39.4	Tam Çözümlü Örnek	232
39.5	Alıştırma	234
40	Fourier İntegralleri ve Jordan Lemması	236
40.1	Neden Doğrudan Uygulanamaz?	236
40.2	Çözümlü Örnek: Kosinüs	236
40.3	Jordan Lemması	237
40.4	Çözümlü Örnek: Jordan Lemmasıyla	239
40.5	Alıştırma	240
41	Girintili Yollar	243
41.1	Yarım Çember Limit Teoremi	243
41.2	$\sin x / x$ İntegrali	244
41.3	Dallanma Noktası Çevresinde Girinti	246
41.4	Alıştırma	248
42	Dal Kesimi Boyunca İntegrasyon	251
42.1	Yöntemin Kurulumu	251
42.2	İki Yakanın Farkı	252
42.3	Rezidü Teoreminin Uygulanması	252
42.4	Çemberlerin Katkısı Sönüyor	253
42.5	Sonuç: $\pi / \sin a\pi$	253
42.6	Alıştırma	254
43	Sinüs ve Kosinüs İçeren Belirli İntegraller	257
43.1	Dönüşüm	257
43.2	Çözümlü Örnek	258
43.3	Kat Açılı İntegrandlar	259
43.4	Alıştırma	260
44	Argüman İlkesi ve Rouché Teoremi	264
44.1	Meromorf Fonksiyonlar ve Dolanma Sayısı	264
44.2	Argüman İlkesi	265
44.3	Rouché Teoremi	266
44.4	Çözümlü Uygulamalar	267
44.5	Alıştırma	268

45	Ters Laplace Dönüşümü	270
45.1	Bromwich İntegrali	270
45.2	Rezidü Toplamına İndirgeme	271
45.3	Rezidü Hesabında Kısayollar	272
45.4	Çözümlü Uygulamalar	272
45.5	Alıştırma	275

Giriş

Kompleks analiz, karmaşık düzlemde tanımlı fonksiyonların türev ve integralini inceleyerek reel analizde ulaşılamayan sonuçlara varır. Analitik bir fonksiyonun tek bir türevinin varlığının sonsuz kez türevlenebilirliği gerektirmesi gibi şaşırtıcı sonuçlarıyla matematiğin en zarif dallarından biridir.

Not

Aşağıdaki müfredattaki tüm başlıkların notları hazırdır ve bağlantılardan ulaşılabilir.

1. Kompleks Sayıların Cebirsel Yapısı

Kompleks analizin bütün yapısı tek bir cebirsel adım üzerine kurulur: reel sayı çiftlerine, karesi -1 olan bir eleman içerecek biçimde çarpma tanımlamak. Bu bölümde kompleks sayıları sıralı ikililer olarak kurup dört işlemin tamamını elde edeceğiz.

1.1 Toplamlar ve Çarpımlar

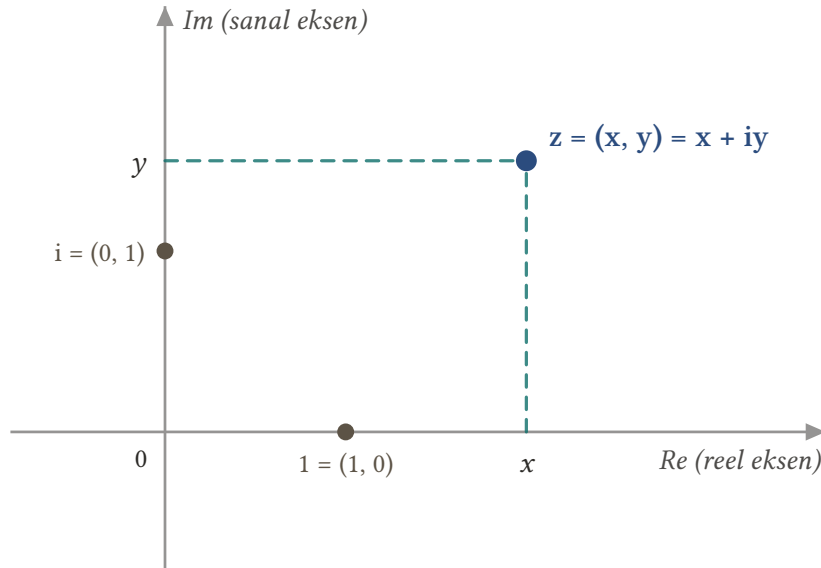
Tanım 1.1 (Kompleks Sayı). Bir **kompleks sayı**, reel sayıların sıralı bir (x, y) ikilisidir; xy -düzleminin noktaları gibi düşünülür. Kompleks sayıların kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve düzlem bu yorumla **kompleks düzlem** adını alır.

$z = (x, y)$ sayısının ilk bileşenine **reel kısım**, ikinci bileşenine **sanal kısım** denir:

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$$

İki kompleks sayı, ancak ve ancak reel kısımları ve sanal kısımları ayrı ayrı eşitse **eşittir**.

$(0, y)$ biçimindeki sayılar y ekseninde yer alır; bu yüzden y eksenine **sanal eksen** denir ve $(0, y)$ sayıları **saf sanal** olarak adlandırılır.



Şekil 1.1: Kompleks düzlem: yatay eksen reel kısmı, dikey eksen sanal kısmı taşır. $z = (x, y)$ sıralı ikilisi düzlemin bir noktasıdır; $1 = (1, 0)$ reel ekseninde, $i = (0, 1)$ sanal ekseninde birim uzaklıktaki noktalardır.

Tanım 1.2 (Toplam ve Çarpım). $z_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = (x_2, y_2)$ için toplam ve çarpım şöyle tanımlanır:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$(x, 0)$ biçimindeki sayılar bu işlemler altında tıpkı reel sayılar gibi davranır:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

Bu nedenle $(x, 0)$ sayısını x reel sayısı ile özdeşleştirir ve $x = (x, 0)$ yazarız; kompleks sayı sistemi, reel sayı sisteminin doğal bir genişlemesidir.

1.2 i Sayısı ve $x + iy$ Gösterimi

$i = (0, 1)$ olarak tanımlansın. Herhangi bir $z = (x, y)$ sayısı

$$z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

biçiminde ayrışır; çünkü $(0, 1)(y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 1 \cdot y + 0 \cdot 0) = (0, y)$. Özdeşleştirmeye bu,

$$z = x + iy$$

demektir. Çarpım tanımı i 'nin karesini hemen verir:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

İşlemler için tek kural

$z = x + iy$ gösterimi kullanıldığında ikili tanımlarını ezberlemeye gerek kalmaz: kompleks sayılar, i^2 görüldüğü her yerde -1 yazılması kuralıyla, reel sayılardaki gibi çarpılıp toplanır. Örneğin

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

sonucu, tanımdaki çarpımla birebir aynıdır.

1.3 Temel Cebirsel Özellikler

Kompleks sayılarda toplama ve çarpma, reel sayılardaki alışıldık yasaların tümünü sağlar. Değişme ve birleşme yasaları

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

ve dağılma yasası

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$$

tanımlardan, reel sayıların karşılık gelen yasaları kullanılarak doğrulanır.

Toplamanın birim elemanı $0 = (0, 0)$, çarpmanın birim elemanı $1 = (1, 0)$ sayıdır:

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z$$

Her $z = (x, y)$ sayısının bir **toplama tersi** vardır ve tektir:

$$-z = (-x, -y), \quad z + (-z) = 0$$

Çıkarma işlemi bu ters yardımıyla tanımlanır: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Teorem 1.1 (Çarpma Tersi). Sıfırdan farklı her $z = (x, y)$ kompleks sayısının, $zz^{-1} = 1$ koşulunu sağlayan tek bir çarpma tersi vardır:

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

İspat.

$z^{-1} = (u, v)$ arıyoruz; $(x, y)(u, v) = (1, 0)$ koşulu, çarpım tanımına göre

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = 0$$

lineer sistemine denktir. Sistemin katsayı determinanı $x^2 + y^2$ 'dir ve $z \neq 0$ olduğundan sıfırdan farklıdır; dolayısıyla tek çözüm vardır:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

■

$z = 0$ sayısının çarpma tersi yoktur: $0 \cdot w = 0 \neq 1$ her w için geçerlidir.

1.4 Sıfır Çarpanları Yoktur

Teorem 1.2 (Çarpımın Sıfır Olması). $z_1 z_2 = 0$ ise $z_1 = 0$ veya $z_2 = 0$ olmalıdır (ikisi birden de sıfır olabilir).

İspat.

$z_1 z_2 = 0$ olsun ve $z_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman z_1^{-1} vardır ve

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (z_1^{-1} z_1) z_2 = z_1^{-1} (z_1 z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 = 0$$

■

Bu özellik, reel sayılardan tanıdığımız “çarpım sıfırsa çarpanlardan biri sıfırdır” kuralının kompleks sayılarda da aynen geçerli olduğunu söyler; denklem çözerken çarpanlara ayırmayı güvenle kullanabiliriz.

1.5 Bölme

Bölme, çarpma tersiyle tanımlanır ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

Bileşenler cinsinden açık formül

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

biçimindedir; ama bu formül ezberlenmez. Pratikte pay ve payda, paydanın sanal kısmının işareti değiştirilmiş kopyasıyla — yani $x_2 - iy_2$ ile — çarpılır; payda böylece reel sayı $x_2^2 + y_2^2$ olur. Bu işlem, [bir sonraki bölümde](#) tanıtılacak eşlenik kavramının ilk görünüşüdür.

Örnek 1.1 (Bölme İşlemi). $\frac{4+i}{2-3i}$ bölümünü $x + iy$ biçiminde yazınız.

Çözüm.

Pay ve paydayı $2 + 3i$ ile çarpalım:

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{8+12i+2i+3i^2}{4+9} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$$

■

Bölmeyle ilgili beklenen özdeşliklerin tümü tanımdan çıkar; sık kullanılanlar şunlardır ($z_1, z_2 \neq 0$):

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}, \quad \frac{z_3 + z_4}{z_1} = \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_4}{z_1}, \quad \left(\frac{z_3}{z_1} \right) \left(\frac{z_4}{z_2} \right) = \frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}$$

1.6 Binom Formülü

Reel cebirdeki binom açılımı, kanıtı yalnızca değişme–birleşme–dağılıma yasalarına dayandığından kompleks sayılarda da geçerlidir: $n = 1, 2, \dots$ için

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

1.7 Alıştırma

Alıştırma 1.1 (Cebirsel İşlemler). Aşağıdaki sayıları $x + iy$ biçiminde yazınız.

- a) $(2 - 3i)(-2 + i)$
- b) $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i}$
- c) $(1 - i)^4$

Çözüm.

a) Çarpımı dağıtıp $i^2 = -1$ yazalım:

$$(2 - 3i)(-2 + i) = -4 + 2i + 6i - 3i^2 = -4 + 8i + 3 = -1 + 8i$$

b) Her iki bölümü de paydanın eşleniğiyle genişletelim. İlk terim:

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i + 6i - 8}{9 + 16} = \frac{-5 + 10i}{25} = \frac{-1 + 2i}{5}$$

İkinci terimde payda saf sanaldır; $1/i = -i$ olduğundan

$$\frac{2 - i}{5i} = \frac{(2 - i)(-i)}{5} = \frac{-2i + i^2}{5} = \frac{-1 - 2i}{5}$$

Toplarsak sanal kısımlar birbirini götürür:

$$\frac{-1 + 2i}{5} + \frac{-1 - 2i}{5} = \frac{-2}{5}$$

c) Önce kareyi alıp sonucu tekrar karelemek en kısa yoldur:

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i, \quad (1 - i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

■

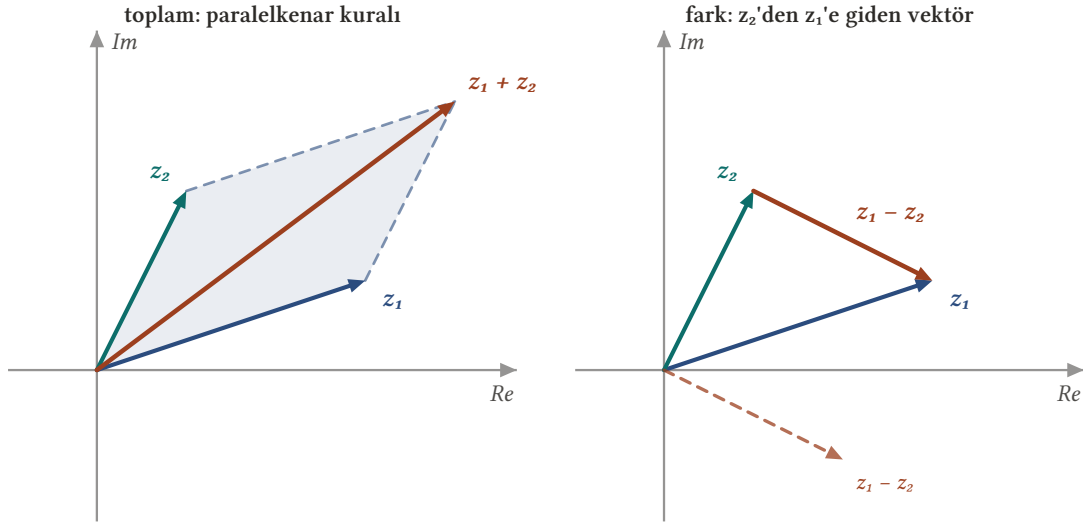
Cebirsel işlemler tamamlandı; sırada kompleks sayıların geometrisi var: [vektör yorumu](#), [modül ve eşlenik](#).

2. Vektörler, Modül ve Eşlenik

Bir kompleks sayı yalnızca bir nokta değil, aynı zamanda başlangıç noktasından o noktaya çizilen bir **vektördür**. Bu ikinci bakış, toplama işlemine paralelkenar kuralını, modüle uzaklık anlamını ve üçgen eşitsizliğini kazandırır.

2.1 Vektör Yorumu

$z = x + iy$ sayısı, bileşenleri x ve y olan konum vektörü gibi düşünülebilir. $z_1 + z_2$ toplamının bileşenleri, vektör toplamının bileşenleriyle aynıdır; dolayısıyla kompleks toplama, **paralelkenar kuralıyla** yapılan vektör toplamasıdır. Çarpım $z_1 z_2$ ise ne noktaların ne de vektörlerin bilinen bir çarpımına karşılık gelir; onun geometrik anlamı **üstel formda** ortaya çıkacaktır.

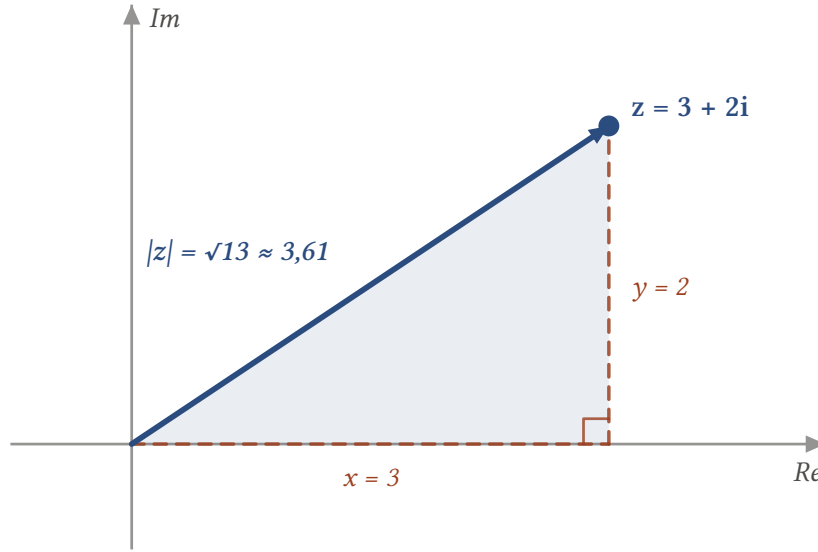


Şekil 2.1: Solda $z_1 + z_2$ toplamı paralelkenarın köşegenidir. Sağda $z_1 - z_2$ farkı, z_2 ucundan z_1 ucuna giden vektördür; başlangıca taşınmış kopyası kesikli çizilmiştir. Bu yüzden $|z_1 - z_2|$ iki nokta arasındaki uzaklıktır.

2.2 Modül

Tanım 2.1 (Modül). $z = x + iy$ sayısının **modülü** (mutlak değeri), z vektörünün boyudur:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Şekil 2.2: Modül, z vektörünün boyudur: bileşenleri x ve y olan dik üçgenin hipotenüsü. Pisagor teoremi tanımdaki formülü verir: $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, örnekte $|3 + 2i| = \sqrt{(9 + 4)} = \sqrt{13}$.

Tanımdan iki kullanışlı gözlem hemen çıkar:

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \quad \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

Modül, reel sayılardaki mutlak değer genişlemesidir ve sıralamayı **değil**, yalnızca büyüklüğü ölçer: $z_1 < z_2$ yazmak kompleks sayılar için anlamsızdır; $|z_1| < |z_2|$ ise anlamlıdır ve z_1 'in başlangıç noktasına daha yakın olduğunu söyler.

Örnek 2.1 (Hangisi Daha Yakın?). $-3 + 2i$ ve $1 + 4i$ noktalarından hangisi başlangıç noktasına daha yakındır?

Çözüm.

$$|-3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}, \quad |1 + 4i| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$\sqrt{13} < \sqrt{17}$ olduğundan $-3 + 2i$ daha yakındır.

■

$z_1 - z_2$ farkı, z_2 'den z_1 'e giden vektördür; dolayısıyla

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

sayısı iki nokta arasındaki **uzaklıktır**. Bu yorumla,

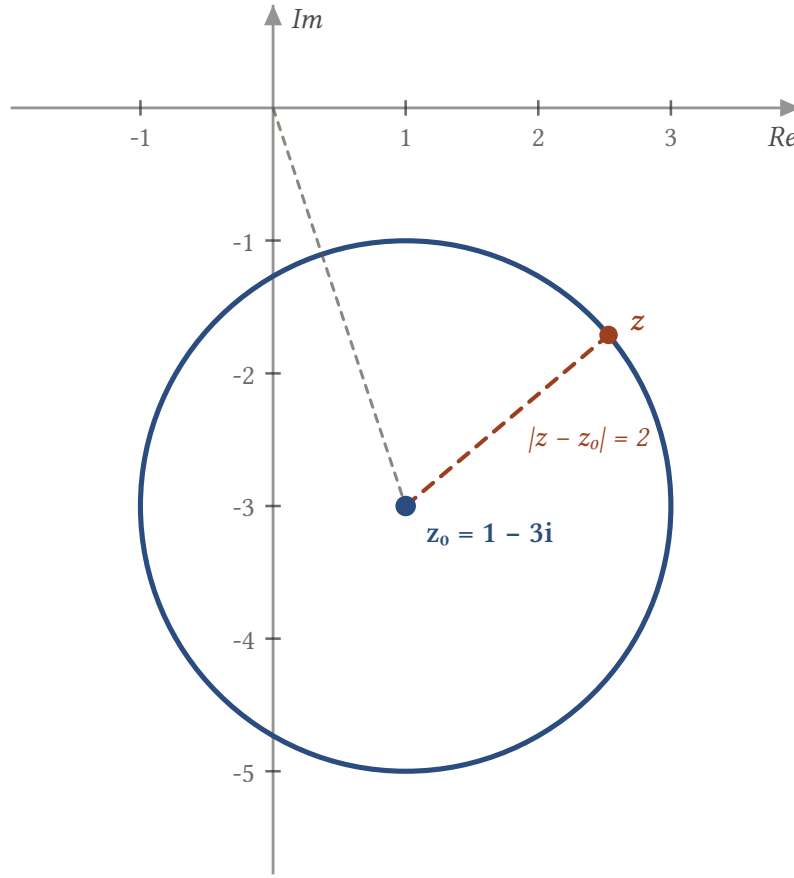
$$|z - z_0| = R$$

denklemini, merkezi z_0 ve yarıçapı R olan çemberi temsil eder.

Örnek 2.2 (Çember Denklemi). $|z - 1 + 3i| = 2$ denklemi hangi kümeyi temsil eder?

Çözüm.

Denklemini $|z - (1 - 3i)| = 2$ olarak okuyalım: merkezi $z_0 = 1 - 3i$, yani $(1, -3)$ noktası olan, 2 yarıçaplı çemberdir.



Şekil 2.3: $|z - z_0| = R$ denklemi, z_0 'a uzaklığı tam R olan noktaların kümesidir: merkezi z_0 , yarıçapı R olan çember. Örnekteki $|z - 1 + 3i| = 2$ için merkez $1 - 3i$ 'dir; işaretlere dikkat.

■

2.3 Üçgen Eşitsizliği

Teorem 2.1 (Üçgen Eşitsizliği). Her z_1, z_2 için

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Ayrıca ters yönlü kestirim geçerlidir:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Birinci eşitsizlik geometrik olarak açıktır: bir üçgenin bir kenarı, diğer iki kenarın toplamından uzun olamaz. İkincisi birincisinden çıkar: $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$ yazıp düzenlemek, ardından z_1 ile z_2 'nin rollerini değiştirmek yeterlidir. z_2 yerine $-z_2$ konursa aynı çift, farklar için de kestirim verir:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Toplaman üçgen eşitsizliği, tümevarımla sonlu toplamlara genişler:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

Örnek 2.3 (Çember Üzerinde Kestirim). z , birim çember $|z| = 1$ üzerinde dolaşsın. $|z - 2|$ ifadesi için alt ve üst sınır bulunuz.

Çözüm.

Üçgen eşitsizliğinin iki yönü doğrudan uygulanır:

$$|z - 2| \leq |z| + 2 = 3, \quad |z - 2| \geq ||z| - 2| = 1$$

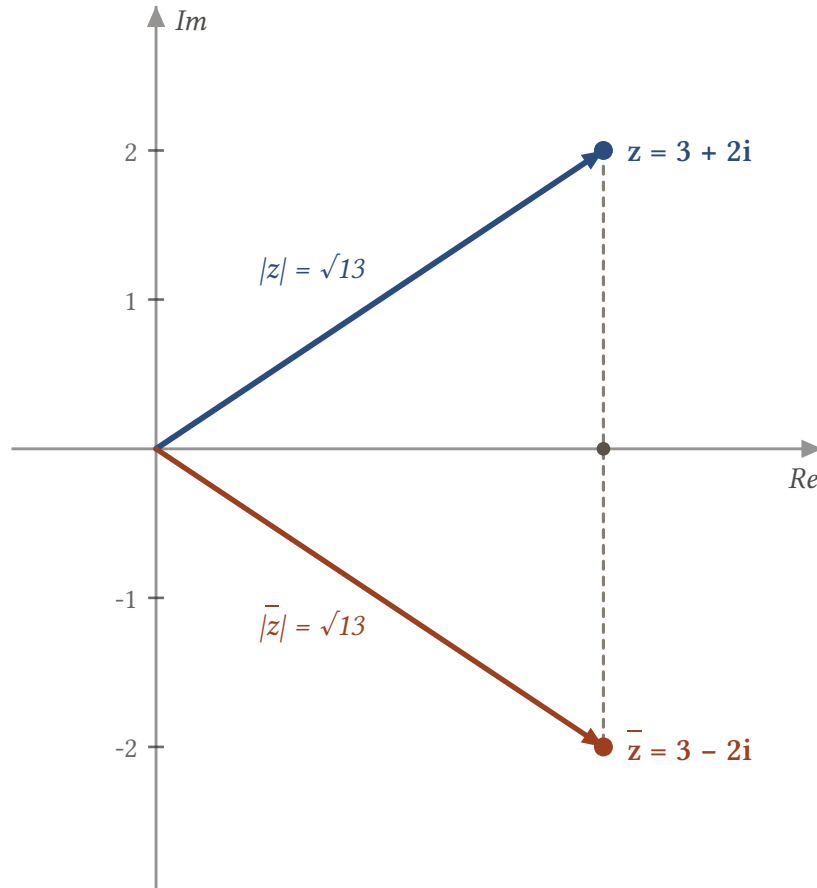
Geometrik doğrulama: birim çemberin 2 noktasına en yakın noktası $z = 1$ (uzaklık 1), en uzak noktası $z = -1$ 'dir (uzaklık 3).

■

2.4 Kompleks Eşlenik

Tanım 2.2 (Eşlenik). $z = x + iy$ sayısının **kompleks eşleniği**, z 'nin reel eksene göre yansımasıdır:

$$\bar{z} = x - iy$$



Şekil 2.4: Eşlenik $\bar{z}$, z 'nin reel eksene göre yansımasıdır: reel kısım aynı kalır, sanal kısmın işareti değişir. Yansıma boyu değiştirmedikinden $|\bar{z}| = |z|$ olur.

Temel özellikler tanımdan hemen doğrulanır:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Reel ve sanal kısımlar eşlenik cinsinden yazılabilir:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

En önemli özdeşlik, modülle eşleniği birbirine bağlar:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

💡 Bölmenin gerçek mekanizması

$z\bar{z} = |z|^2$ özdeşliği, **önceki bölümdeki** bölme tekniğinin açıklamasıdır: pay ve paydayı $\bar{z}_2$ ile çarpmak, paydayı $|z_2|^2$ reel sayısına dönüştürür:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Örnek 2.4 (Eşlenikle Bölme). $\frac{-1 + 3i}{2 - i}$ bölümünü hesaplayınız.

Çözüm.

$$\frac{-1 + 3i}{2 - i} = \frac{(-1 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2 - i + 6i + 3i^2}{5} = \frac{-5 + 5i}{5} = -1 + i$$

■

2.5 Çarpımın ve Bölümün Modülü

$z\bar{z} = |z|^2$ özdeşliği, modülün çarpımla uyumunu zahmetsizce verir:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Kareköklerin alınmasıyla ($|z| \geq 0$ olduğundan):

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

Örnek 2.5 (Polinom Modülü İçin Üst Sınır). $|z| < 2$ bölgesindeki her z için $|z^3 + 3z^2 - 2z + 1| < 25$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Üçgen eşitsizliği ve $|z^n| = |z|^n$ özelliğiyle:

$$|z^3 + 3z^2 - 2z + 1| \leq |z|^3 + 3|z|^2 + 2|z| + 1 < 8 + 12 + 4 + 1 = 25$$

■

Bu tür kestirimler ileride sık karşımıza çıkacak: **çevre integrallerinin modüllerini sınırlarken** aynı teknik kullanılır.

2.6 Alıştırma

Alıştırma 2.1 (Modül ve Eşlenik).

a) $(2 + i)^2$ sayısını hesaplayınız.

b) $z, |z| = 2$ çemberi üzerindeyken $\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Eşlenik alma çarpımla değişebilir; önce kareyi açmak da aynı sonucu verir:

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i \Rightarrow \overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$$

Kontrol olarak $\overline{(2 + i)^2} = (\overline{2 + i})^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.

b) Paydayı çarpanlarına ayıralım:

$$z^4 - 4z^2 + 3 = (z^2 - 1)(z^2 - 3)$$

Her iki çarpanı ters üçgen eşitsizliğiyle alttan sınırlayalım. $|z| = 2$, yani $|z^2| = 4$ olduğundan

$$|z^2 - 1| \geq |z^2| - 1 = 3, \quad |z^2 - 3| \geq |z^2| - 3 = 1$$

Modül çarpımsal olduğundan

$$|z^4 - 4z^2 + 3| = |z^2 - 1| |z^2 - 3| \geq 3 \cdot 1 = 3$$

Payda sıfırdan farklı ve modülü en az 3 olduğuna göre

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| = \frac{1}{|z^4 - 4z^2 + 3|} \leq \frac{1}{3}$$

■

Sırada, çarpmanın geometrisini görünür kılan gösterim var: [kutupsal](#) ve [üstel form](#).

3. Kutupsal ve Üstel Form

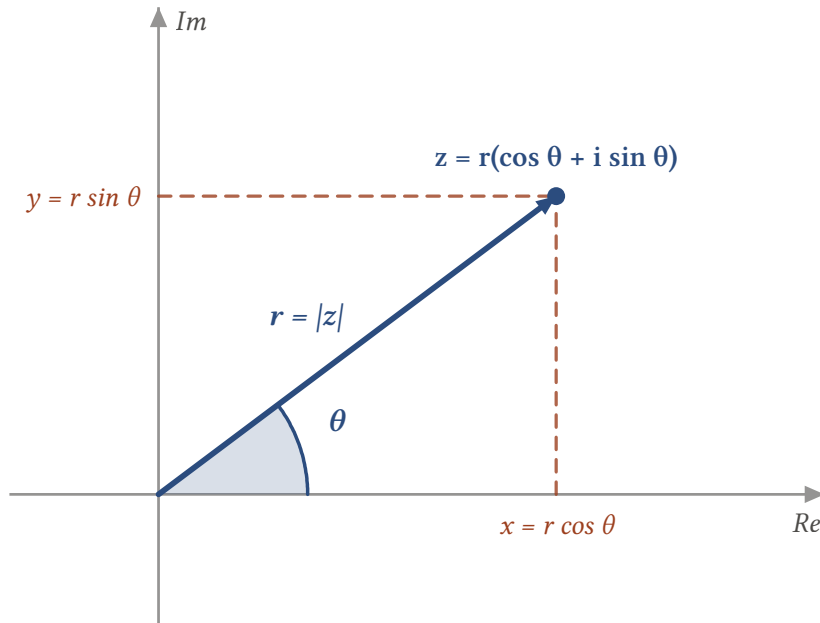
Kartezyen gösterim toplama için biçilmiş kaftandır; çarpmanın geometrisi ise kutupsal koordinatlarda görünür hâle gelir: modüller çarpılır, açılar toplanır. Bu bölümün amacı bu ilkeyi kesin biçime kavuşturmaktır. Yolun başında, “bir noktanın açısı” deyiminin sanıldığından daha ince bir kavram olduğunu göreceğiz.

3.1 Kutupsal Form ve Argüman

Sıfırdan farklı $z = x + iy$ sayısının noktası, kutupsal koordinatlarla $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ olarak yazılabilir. O zaman

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

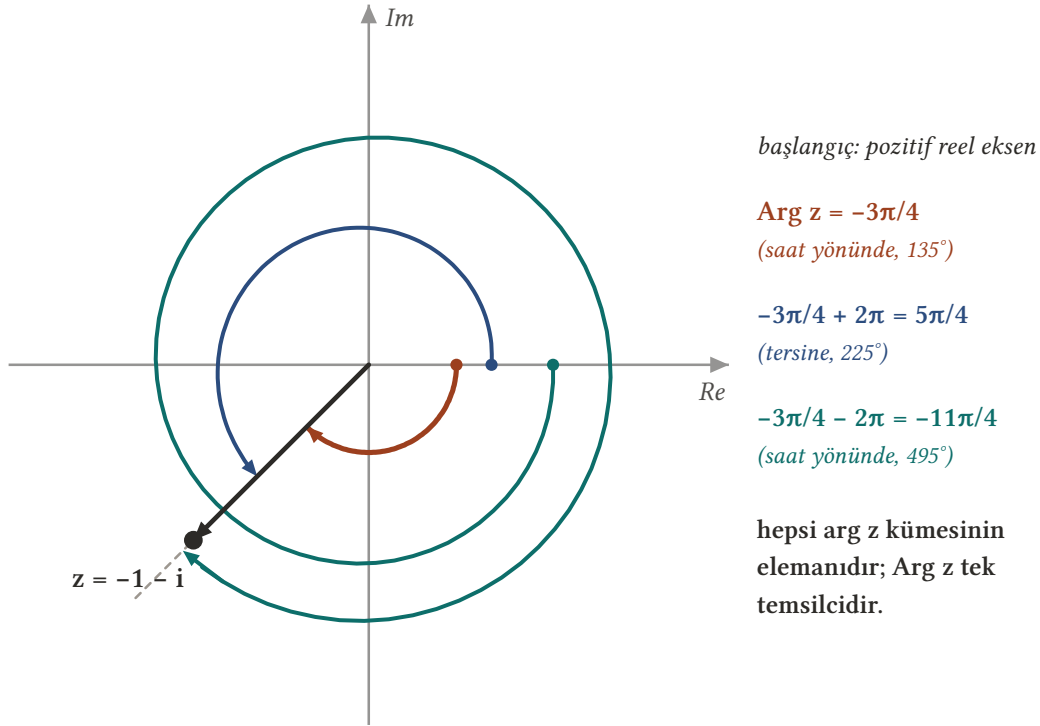
Burada $r = |z|$ modüldür; θ ise pozitif reel eksenenden z vektörüne, saat yönünün tersi pozitif sayılarla ölçülen yönlü açıdır. Bu kitapta tüm açılar **radyan** cinsindendir.



Şekil 3.1: Kutupsal gösterimin iki verisi: r , vektörün boyu (modül); θ , pozitif reel eksenenden vektöre saat yönünün tersine ölçülen açı (argüman). Bileşenler $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ile geri gelir.

3.1.1 Bir Noktanın Kaç Açısı Vardır?

r tek biçimde belirlidir; θ ise değildir. $z = -1 - i$ noktasına pozitif reel eksenenden başlayıp saat yönünde $3\pi/4$ dönerek varılır; saat yönünün tersine $5\pi/4$ dönerek de, saat yönünde bir tam tur fazlasıyla $3\pi/4 + 2\pi = 11\pi/4$ dönerek de varılır. Sebep basittir: $\cos$ ve $\sin$ fonksiyonlarının periyodu 2π olduğundan, $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ eşitlikleri bir θ için sağlanıyorsa $\theta + 2\pi$, $\theta - 2\pi$ ve genel olarak $\theta + 2n\pi$ için de sağlanır. “Noktanın açısı” tek bir sayı değil, 2π aralıklarla dizilmiş sonsuz bir sayı ailesidir.



Şekil 3.2: Aynı z noktasına pozitif reel eksenle başlayarak sonsuz çoklukta açıyla varılır: saat yönünde $-3\pi/4$, saat yönünün tersine tam bir tur fazlasıyla $5\pi/4$, ya da saat yönünde bir tur fazlasıyla $-11\pi/4$. Küçük harfli $\arg z$ bu açıların **tümünün kümesidir**; büyük harfli $\text{Arg } z$ içlerinden $(-\pi, \pi]$ aralığına düşen tek değeri seçer.

Bu belirsizlik bir kusur değil, kompleks analizin karakteridir: logaritmanın çok değerliliği, dal kesimleri, köklerin çokluğu — hepsi buradan doğar. Belirsizlikle başa çıkmanın yolu, iki ayrı nesneye iki ayrı ad vermektir: açıların **kümesi** ve o kümeden anlaşmayla seçilen **tek temsilci**.

Tanım 3.1 (Argüman ve Esas Argüman). $z = x + iy \neq 0$ ve $r = |z|$ olsun.

(i) **Argüman.** $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ eşitliklerini *birlikte* sağlayan her reel θ sayısına z 'nin bir **argümanı** denir.

(ii) **Argüman kümesi.** z 'nin tüm argümanlarının kümesi, küçük harfle, $\arg z$ ile gösterilir. θ_0 bir argümanırsa

$$\arg z = \{\theta_0 + 2n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

(iii) **Esas argüman.** $\arg z$ kümesinin $-\pi < \theta \leq \pi$ aralığına düşen **tek** elemanına z 'nin **esas argümanı** denir ve büyük harfle, $\text{Arg } z$ ile gösterilir. Bu kitap boyunca Θ harfi esas argüman için ayrılmıştır: $\Theta = \text{Arg } z$. Böylece

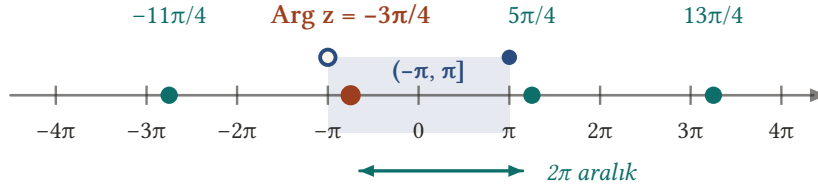
$$\arg z = \{\text{Arg } z + 2n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad -\pi < \text{Arg } z \leq \pi$$

$z = 0$ için $r = 0$ olduğundan **her** θ (i)'yi sağlar; tek bir açı seçmenin anlamı yoktur. Bu yüzden $\arg 0$ ve $\text{Arg } 0$ tanımsız bırakılır.

Tanımdaki iki iddia kısa birer gerekçe hak eder.

- (ii)'de “başka argüman yoktur”: θ ve θ_0 ikisi de argümanırsa $\cos \theta = \cos \theta_0 = x/r$ ve $\sin \theta = \sin \theta_0 = y/r$; dolayısıyla $\cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 = (x^2 + y^2)/r^2 = 1$, yani $\theta - \theta_0$, 2π 'nin bir tam katıdır.
- (iii)'te “tek eleman”: $\arg z$, ardışık elemanları tam 2π aralıklı bir kümedir; uzunluğu 2π olan yarı açık $(-\pi, \pi]$ aralığı böyle bir kümeden tam bir eleman yakalar. Aralık iki ucundan kapalı olsaydı negatif reel

eksen üzerindeki sayılar için $-\pi$ ve π ikisi birden girerdi; iki ucundan açık olsaydı bu sayılar temsilsiz kalırdı. Yarı açıklık tesadüf değildir.



Şekil 3.3: $\arg(-1 - i)$ kümesi sayı doğrusunda: 2π aralıklı sonsuz nokta. Uzunluğu 2π olan $(-\pi, \pi]$ penceresi bu noktalardan tam birini yakalar; yakalanan nokta $\text{Arg } z$ 'dir. Pencerenin sol ucu açık ($-\pi$ dışarıda), sağ ucu kapalıdır (π içeride).

⚠ Küçük harf küme, büyük harf sayı

- $\arg z$ sonsuz elemanlı bir **kümedir**; $\text{Arg } z$ tek bir **reel sayıdır** ve $\text{Arg } z \in \arg z$.
- Doğru yazım $\theta \in \arg z$ biçimindedir: örneğin $5\pi/4 \in \arg(-1 - i)$. Birçok kitaptaki “ $\arg z = 5\pi/4$ ” ifadesi, “ $5\pi/4$, z 'nin bir argümanıdır” cümlesinin kısaltmasıdır; “ $\arg z = \text{Arg } z + 2n\pi$ ” yazımı da kümenin tamamının kısaltmasıdır.
- $5\pi/4$ ile $-3\pi/4$ arasında “doğru-yanlış” ilişkisi yoktur; ikisi de $-1 - i$ 'nin argümanıdır. Yalnızca ikincisi *esas* argümandır.
- $(-\pi, \pi]$ bir **uzlaşımdır**: bazı kaynaklar ve hesap makineleri $[0, 2\pi)$ kullanır. Bu kitap baştan sona $(-\pi, \pi]$ kullanır; **logaritmanın esas dalı** bu seçime dayanacaktır.
- Esas argüman yalnızca **yöne** bağlıdır: $t > 0$ reel sayısı için $\text{Arg}(tz) = \text{Arg } z$.

3.1.2 Esas Argümanın Hesaplanması

Elimizde x ve y varken $\text{Arg } z$ nasıl bulunur? İlk akla gelen, $\tan \theta = y/x$ eşitliğini çözmektir; ama bu tek başına yetmez. Eksiksiz kural şudur.

Teorem 3.1 (Esas Argümanın Hesaplanması). $\arctan$, değerleri $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında olan reel $\arctan$ fonksiyonu olmak üzere $z = x + iy \neq 0$ için

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

İspat.

$\Theta = \text{Arg } z$ olsun; tanım gereği $\cos \Theta = x/r$ ve $\sin \Theta = y/r$.

$x > 0$ ise $\cos \Theta > 0$, dolayısıyla $\Theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Bu aralıkta $\tan$ birebirdir ve $\tan \Theta = y/x$ olduğundan $\Theta = \arctan(y/x)$.

$x < 0$ ve $y \geq 0$ ise $\cos \Theta < 0$ ve $\sin \Theta \geq 0$; yani $\Theta \in [\pi/2, \pi]$. O hâlde $\Theta - \pi \in [-\pi/2, 0]$ ve $\tan(\Theta - \pi) = \tan \Theta = y/x$; dolayısıyla $\Theta - \pi = \arctan(y/x)$. ($y = 0$ için sonuç $\arctan 0 + \pi = \pi$: negatif reel eksen π 'ye düşer, $-\pi$ 'ye değil.)

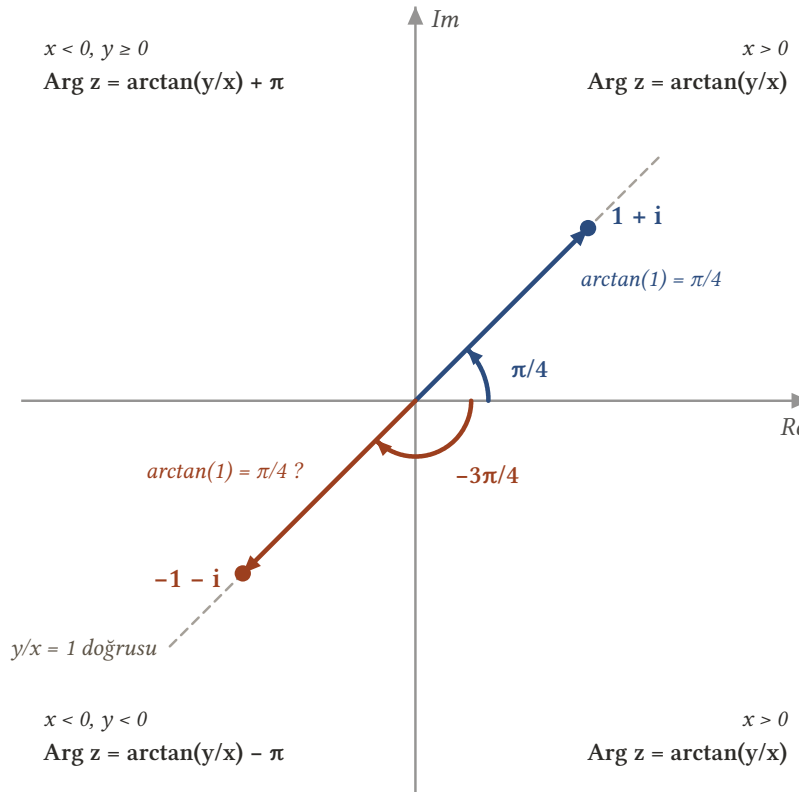
$x < 0$ ve $y < 0$ ise $\Theta \in (-\pi, -\pi/2)$; aynı akıl yürütme $\Theta + \pi \in (0, \pi/2)$ için yapılır.

$x = 0$ ise $\cos \Theta = 0$; $(-\pi, \pi]$ aralığında kosinüsün sıfırları yalnızca $\pm\pi/2$ 'dir ve $\sin \Theta = y/r$ 'nin işareti hangisi olduğunu söyler.

■

Neden $\arctan(y/x)$ tek başına yetmez? Üç nedenle:

1. **Bilgi kaybı.** $\tan$ 'ın periyodu π 'dir, 2π değil. z ile $-z$ aynı y/x oranını verir $-1 + i$ ve $-1 - i$ için $y/x = 1$ - oysa esas argümanları $\pi/4$ ve $-3\pi/4$ 'tür. Oran alınırken x ve y 'nin işaretleri, yani hangi çeyrekte olduğumuz bilgisi silinir.
2. **Değer aralığı.** $\arctan$ yalnızca $(-\pi/2, \pi/2)$ değerlerini üretir; bu tam olarak sağ yarı düzlemin ($x > 0$) esas argümanlarıdır. Sol yarı düzlemde sonuç tam π kadar şaşar; düzeltmenin işareti ($+\pi$ mi, $-\pi$ mi) sonucun $(-\pi, \pi]$ aralığına düşme zorunluluğuyla belirlenir.
3. **$x = 0$ durumu.** y/x tanımsızdır, ama $\text{Arg}(iy) = \pm\pi/2$ gayet tanımlıdır.



Şekil 3.4: $1 + i$ ve $-1 - i$ için y/x oranı aynıdır (1); $\arctan(y/x)$ ikisine de $\pi/4$ der, çünkü hangi çeyrekte olduğunu bilmez. $\text{atan2}(y, x)$ işaretleri ayrı ayrı okur ve köşelerdeki düzeltmeyi kendisi yapar; sonucu her zaman $(-\pi, \pi]$ aralığındadır, yani tam olarak $\text{Arg } z$ 'dir.

Bölge	İşaretler	Arg z	Değer aralığı
I. çeyrek	$x > 0, y > 0$	$\arctan(y/x)$	$(0, \pi/2)$
II. çeyrek	$x < 0, y > 0$	$\arctan(y/x) + \pi$	$(\pi/2, \pi)$
III. çeyrek	$x < 0, y < 0$	$\arctan(y/x) - \pi$	$(-\pi, -\pi/2)$
IV. çeyrek	$x > 0, y < 0$	$\arctan(y/x)$	$(-\pi/2, 0)$
pozitif reel eksen	$x > 0, y = 0$	0	
pozitif sanal eksen	$x = 0, y > 0$	$\pi/2$	
negatif reel eksen	$x < 0, y = 0$	π	
negatif sanal eksen	$x = 0, y < 0$	$-\pi/2$	

i Bilgisayarda esas argüman: atan2

Teoremdaki parçalı ifade, programlama dillerindeki **atan2** fonksiyonunun ta kendisidir:

$$\text{Arg}(x + iy) = \text{atan2}(y, x)$$

atan2 iki girdiyi ayrı ayrı alır — girdi sırası (y, x) 'tir, önce sanal kısım — ve tam da bu sayede işaret bilgisini korur: çeyrek düzeltmesini kendisi yapar ve her zaman $(-\pi, \pi]$ aralığında, radyan cinsinden bir değer döndürür. Yani **atan2**, **arctan**'ın çeyrekleri bilen sürümüdür.

- Python: `math.atan2(y, x)` ya da doğrudan `cmath.phase(z)`; NumPy: `np.angle(z)`.
- C, C++, Java, JavaScript, MATLAB: `atan2(y, x)`. Excel'de sıra terstir: `ATAN2(x; y)`.
- `atan2(0, 0)` makinede 0 döndürür; bu bir programlama uzlaşımıdır, matematikte $\text{Arg } 0$ tanımsızdır.

Örneğin `math.atan2(-1, -1)` çağırısı $-2,356... = -3\pi/4$ verir — $\text{Arg}(-1 - i)$ 'nin ta kendisi.

Örnek 3.1 (Esas Argümanın Bulunması). $z = -1 - i$ için $\text{Arg } z$ değerini ve $\arg z$ kümesini bulunuz.

Çözüm.

$r = \sqrt{2}$; $x = -1 < 0$ ve $y = -1 < 0$ olduğundan teoremin üçüncü durumu geçerlidir:

$$\text{Arg}(-1 - i) = \arctan \frac{-1}{-1} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

Sağlama: $\sqrt{2} \cos(-3\pi/4) = -1$ ve $\sqrt{2} \sin(-3\pi/4) = -1$; iki eşitlik de tutuyor. Argüman kümesi

$$\arg(-1 - i) = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} = \left\{ \dots, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \dots \right\}$$

Şekilden “bariz” görünen $5\pi/4$ (225°) de bir argümandır ($n = 1$); yanlış değildir, yalnızca esas olmayan bir temsilcidir. Sık yapılan hata, $\arctan(y/x) = \pi/4$ değerini doğrudan almaktır: $\pi/4$, $1 + i$ 'nin esas argümanıdır, $-1 - i$ 'nin değil — iki nokta aynı doğru üzerindedir ama başlangıçtan çıkan zıt ışınlarıdır.

■

Örnek 3.2 (Aynı Oran, Dört Farklı Açı). $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$ noktalarının ve -2 , $-3i$, 5 sayılarının esas argümanlarını bulunuz.

Çözüm.

Dört köşe noktasında $|y/x| = 1$ 'dir, ama çeyrekler farklıdır:

$$\text{Arg}(1 + i) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{Arg}(-1 + i) = \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

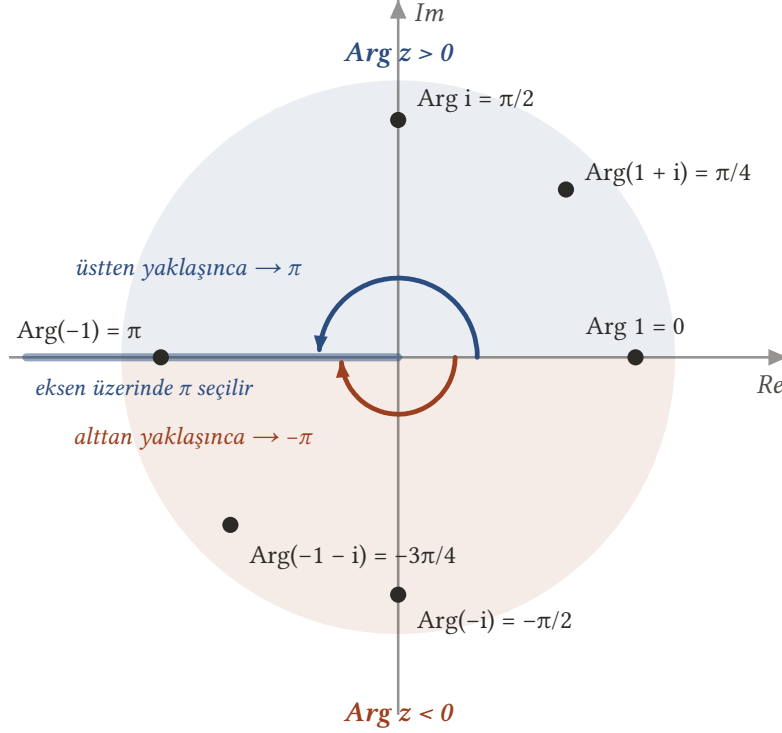
$$\text{Arg}(-1 - i) = \arctan 1 - \pi = -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{Arg}(1 - i) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Eksen üzerindeki için tabloya bakmak yeterlidir: $\text{Arg}(-2) = \pi$ ($-\pi$ değil!), $\text{Arg}(-3i) = -\pi/2$, $\text{Arg } 5 = 0$.

■

🔗 Esas argüman süreksizdir

$\varepsilon \rightarrow 0^+$ için $\text{Arg}(-1 + i\varepsilon) \rightarrow \pi$, ama $\text{Arg}(-1 - i\varepsilon) \rightarrow -\pi$: negatif reel eksenin geçerken esas argüman 2π kadar **sıçrar**. Arg, negatif reel eksen ve başlangıç noktası çıkarılmış düzlemde süreklidir; negatif reel eksenin her noktasında süreksizdir. Bu “kesik”, ileride **logaritmanın esas dalının** dal kesimi olarak yeniden karşımıza çıkacaktır.



Şekil 3.5: Esas argümanın kuralı: üst yarı düzlemde 0 ile π arası, alt yarı düzlemde 0 ile $-\pi$ arası ölç. Negatif reel ekseninde iki ölçüm karşılaşır ve π seçilir ($-\pi$ hiç kullanılmaz); eksen yukarıdan aşağıya geçerken $\text{Arg } z$ aniden 2π düşer. Bu eksen, Arg 'ın süreksiz olduğu tek yerdir.

3.2 Euler Formülü ve Üstel Form

Tanım 3.2 (Euler Formülü). Her reel θ için $e^{i\theta}$ sembolü

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

olarak tanımlanır. Bu tanımla kutupsal form, kompakt **üstel forma** dönüşür:

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad \theta \in \arg z$$

Buradaki $\theta \in \arg z$ yazımına dikkat: üstel formda θ olarak z 'nin herhangi bir argümanı kullanılabilir; esas argümanı seçmek zorunlu değildir.

Örnek 3.3 (Üstel Forma Geçiş). $-1 - i$ sayısını üstel formda yazınız.

Çözüm.

$r = \sqrt{2}$ ve $\text{Arg } z = -3\pi/4$ olduğundan

$$-1 - i = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4}$$

Argümanın tüm değerleri istenirse:

$$-1 - i = \sqrt{2} \exp\left[i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)\right] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

■

Bazı özel değerler ezber hâline gelecek kadar sık kullanılır:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{i2n\pi} = 1$$

$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ olduğundan $e^{i\theta}$, birim çember üzerinde açısı θ olan noktadır. Bu gözlem çemberlere doğal parametrisasyon sağlar:

$$z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{ve} \quad z = z_0 + Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

eğrileri sırasıyla başlangıç merkezli ve z_0 merkezli R yarıçaplı çemberlerdir.

3.3 Üstel Formda Çarpım ve Bölüm

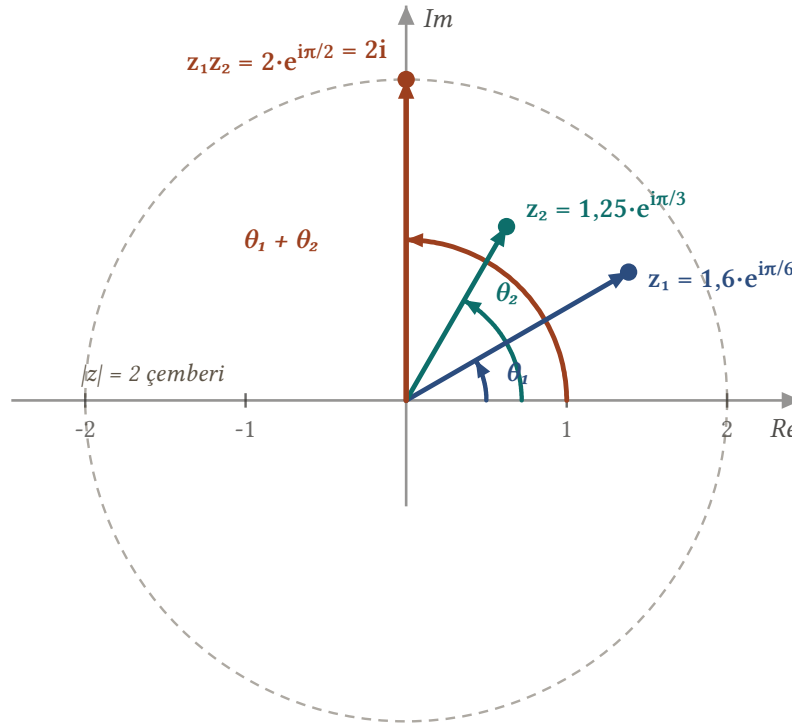
Trigonometrik toplam formülleri, üstel gösterimde tek satıra iner:

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Buradan $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ve $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ için:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

Çarpmanın geometrik anlamı artık açıktır: z_1 ile çarpmak, düzlemi $|z_1|$ oranında ölçekleyip $\arg z_1$ kadar döndürür.



Şekil 3.6: Çarpımda modüller çarpılır, açılar toplanır: $1,6 \cdot 1,25 = 2$ ve $\pi/6 + \pi/3 = \pi/2$. z_1 ile çarpmak, düzlemi $|z_1|$ oranında ölçekleyip arg z_1 kadar döndürmektir.

3.4 Kuvvetler ve de Moivre Formülü

Teorem 3.2 (Üstel Formda Kuvvetler). $z = re^{i\theta} \neq 0$ ve n herhangi bir tam sayı olmak üzere

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

İspat.

$n \geq 1$ için tümevarım: $n = 1$ açıktır; $z^n = z^{n-1}z = (r^{n-1}e^{i(n-1)\theta})(re^{i\theta}) = r^n e^{in\theta}$. $n = 0$ için iki taraf da 1'dir. $n = -m < 0$ için $z^n = (z^{-1})^m$ yazılır ve $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$ için pozitif kuvvet sonucu uygulanır.

■

Örnek 3.4 (Yüksek Kuvvet Hesabı). $(\sqrt{3} + i)^7$ sayısını $x + iy$ biçiminde yazınız.

Çözüm.

$|\sqrt{3} + i| = 2$ ve $\text{Arg}(\sqrt{3} + i) = \pi/6$; dolayısıyla

$$(\sqrt{3} + i)^7 = 2^7 e^{i7\pi/6} = (2^6 e^{i\pi})(2e^{i\pi/6}) = -64(\sqrt{3} + i)$$

■

$r = 1$ alınırsa kuvvet formülü **de Moivre formülünü** verir:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Örnek 3.5 (de Moivre ile Kat Açılış Formülleri). $n = 2$ için de Moivre formülünden kat açılış özdeşliklerini türetiniz.

Çözüm.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

Reel ve sanal kısımların eşitlenmesiyle:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

■

3.5 Çarpımların ve Bölümlerin Argümanları

Çarpım kuralı $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, argüman kümeleri için bir özdeşliğe dönüşür:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

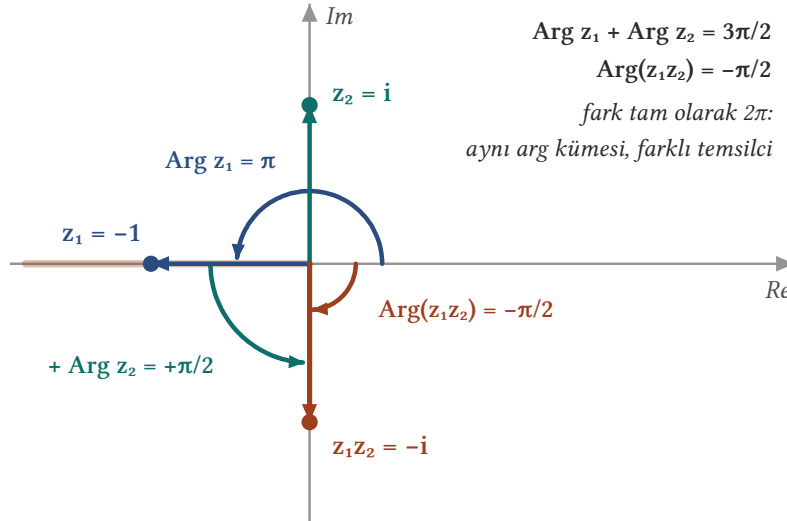
Bu eşitlikler küme eşitliği olarak okunmalıdır: soldaki kümenin her elemanı, sağdaki toplamın uygun temsilcileriyle elde edilir ve tersi de geçerlidir.

⚠ Esas argüman toplamsal değildir

Tanımdaki küme-sayı ayrımının ilk somut sonucu budur: aynı özdeşlik Arg için genelde **yanlıştır**. Örneğin $z_1 = -1$, $z_2 = i$ alınırsa

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

İki değer eşit değildir; ama 2π farkla aynı argüman kümesindedirler: $-\pi/2 + 2\pi = 3\pi/2$. Çok değerli arg ile yazılan özdeşlik bozulmaz. Genel kural: $\text{Arg}(z_1 z_2)$, $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$ toplamının $(-\pi, \pi]$ aralığına indirgenmiş hâlidir; gerekirse 2π eklenir ya da çıkarılır.



Şekil 3.7: -1 'in açısı π , üstüne i 'nin $\pi/2$ 'si eklenince toplam $3\pi/2$ olur ve ok alt yarı düzleme, $-i$ noktasına varır. Ama $-i$ 'nin esas argümanı $3\pi/2$ değil, $-\pi/2$ 'dir: toplam $(-\pi, \pi]$ aralığından taşmış ve 2π geri sarılmıştır. Küme olarak $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ eşitliği yine de bozulmaz.

Örnek 3.6 (Bölümün Esas Argümanı). $z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$ için Arg z değerini bulunuz.

Çözüm.

Argüman özdeşliğiyle bir argüman değeri bulalım ($\ni$ işareti “sağdaki sayı soldaki kümenin elemanıdır” demektir):

$$\arg z \ni \text{Arg}(-2) - \text{Arg}(1 + \sqrt{3}i) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$2\pi/3$ değeri $(-\pi, \pi]$ aralığındadır; dolayısıyla doğrudan esas argümandır:

$$\text{Arg } z = \frac{2\pi}{3}$$

Kontrol: $z = \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ikinci çeyrektedir ve modülü 1’dir; açısı gerçekten $2\pi/3$ ’tür. ■

3.6 Alıştırma

Alıştırma 3.1 (Üstel Form Uygulamaları).

- $(1 + \sqrt{3}i)^{-10}$ sayısını $x + iy$ biçiminde yazınız.
- $|z_1| = |z_2|$ olsa bile $\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$ olabileceğine bir örnek veriniz.
- $-3 + 4i$ ve $3 - 4i$ sayılarının esas argümanlarını üç ondalık basamakla bulunuz.

Çözüm.

a) Önce tabanı üstel forma çevirelim: $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$ ve nokta birinci çeyrekte, $\tan \theta = \sqrt{3}$ olduğundan $\text{Arg}(1 + \sqrt{3}i) = \pi/3$:

$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$$

Kuvvet kuralı negatif tam sayılar için de geçerliydi:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-10} e^{-i10\pi/3}$$

Açıyı esas aralığa indirgeyelim; 2π ’nin katlarını eklemek argümanı değiştirmez:

$$-\frac{10\pi}{3} + 4\pi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow (1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-10} e^{i2\pi/3}$$

Son olarak $e^{i2\pi/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ yazılırsa

$$(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-10} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = 2^{-11} (-1 + \sqrt{3}i)$$

b) $z_1 = z_2 = -1$ alalım; modüller eşittir: $|z_1| = |z_2| = 1$. Bir yanda

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(1) = 0$$

öte yanda

$$\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \pi + \pi = 2\pi$$

İki değer eşit değildir. Eşitliğin bozulması bir çelişki doğurmaz: 0 ile 2π , 2π farkla aynı argüman kümesindedir; çok değerli arg ile yazılan özdeşlik ayaktadır. Bozulan yalnızca esas argümanın $(-\pi, \pi]$ aralığına zorlanmasıdır.

c) $\arctan(4/3) \approx 0,927$ değerini aklımızda tutalım. $-3 + 4i$ ikinci çeyrektedir ($x < 0, y > 0$), dolayısıyla

$$\text{Arg}(-3 + 4i) = \arctan \frac{4}{-3} + \pi = -0,927 + 3,142 = 2,214$$

$3 - 4i$ ise dördüncü çeyrektedir ($x > 0$), düzeltme gerekmez:

$$\text{Arg}(3 - 4i) = \arctan \frac{-4}{3} = -0,927$$

İki sayı birbirinin negatfidir ($3 - 4i = -(-3 + 4i)$); esas argümanları arasındaki fark π 'dir, beklendiği gibi. Bir bilgisayarda `math.atan2(4, -3)` ve `math.atan2(-4, 3)` aynı sonuçları verir.

■

Üstel formun ilk büyük ödülü bir sonraki bölümde: her kompleks sayının tam n tane n -inci kökü vardır ve hepsi bir **düzgün çokgenin köşelerinde** oturur.

4. Kompleks Sayıların Kökleri

Reel sayılarda $x^2 = -1$ çözümsüzdü; kompleks sayılarda ise durum tam tersine döner: sıfırdan farklı **her** sayının tam n tane n -inci kökü vardır. Üstel form bu kökleri hem bulur hem de geometrilerini gösterir: hepsi bir çember üzerinde, düzgün bir çokgenin köşelerindedir.

4.1 Üstel Formların Eşitliği

Kök almanın anahtarı, iki üstel formun ne zaman aynı sayıyı temsil ettiğini bilmektir:

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ ve } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Modüller eşit olmalı; argümanlar ise ancak 2π 'nin bir tam katı kadar farklı olabilir.

4.2 n -inci Köklerin Bulunması

$z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ verilsin ve $z^n = z_0$ denklemini çözelim. $z = r e^{i\theta}$ yazılırsa denklem

$$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$$

olur. Eşitlik ölçütüne göre $r^n = r_0$ ve $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$; yani

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Burada $\sqrt[n]{r_0}$, pozitif reel sayının bilinen tek pozitif köküdür. k 'nin ardışık n değeri farklı noktalar üretir; k 'ye n eklemek argümanı 2π artırdığından aynı noktaya döner.

Teorem 4.1 (n -inci Kökler). $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ sayısının tam n tane n -inci kökü vardır:

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Kökler, $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ çemberi üzerinde eşit aralıklarla dizilir ve $n \geq 3$ için düzgün bir n -genin köşelerini oluşturur.

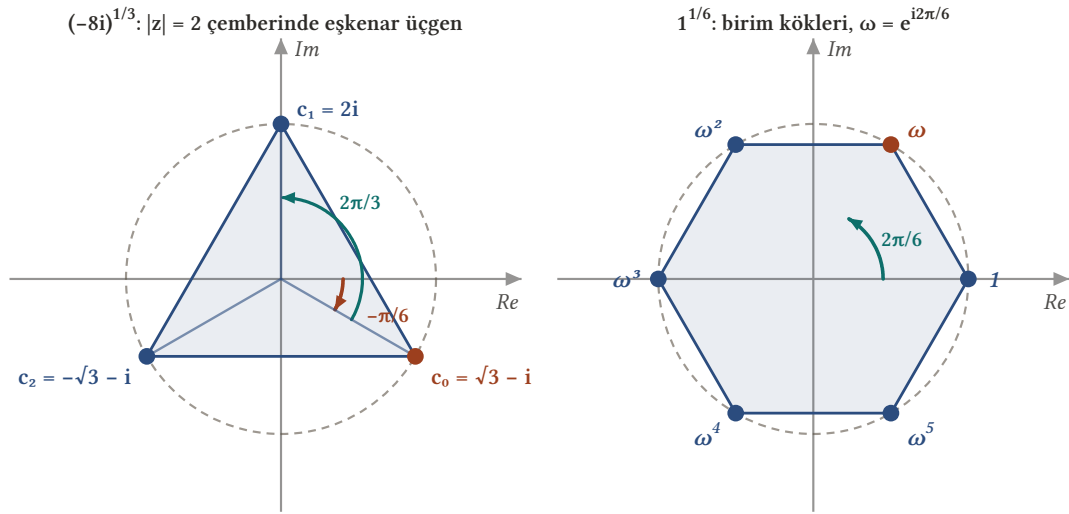
Köklerin kümesi $z_0^{1/n}$ ile gösterilir. $\theta_0 = \text{Arg } z_0$ seçilerek elde edilen c_0 köküne **esas kök** denir.

💡 Tek kökten diğerlerine

$\omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$ yazılırsa tüm kökler tek kökten üretilir:

$$c_k = c_0 \omega_n^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Geometrik okuma: ω_n ile çarpmak $2\pi/n$ kadar döndürmektir; kökler, c_0 'ın ardışık döndürmeleridir.



Şekil 4.1: Solda $-8i$ 'nin üç küp kökü: esas kök c_0 açısı $\text{Arg}(-8i)/3 = -\pi/6$ olan noktadır, diğerleri $2\pi/3$ 'lük adımlarla dönerek elde edilir. Sağda 1'in altıncı kökleri: her kök bir öncekinin ω ile çarpımıdır, yani $2\pi/6$ kadar döndürülmüştür.

4.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 4.1 (Küp Kökler). $(-8i)^{1/3}$ köklerinin tümünü bulunuz.

Çözüm.

$-8i = 8 \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan kökler

$$c_k = 2 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2)$$

Tek tek yazalım:

$$c_0 = 2e^{-i\pi/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$c_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i$$

$$c_2 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i$$

Üç kök, $|z| = 2$ çemberi üzerinde eşkenar üçgenin köşeleridir. Sağlama: $(2i)^3 = 8i^3 = -8i$.

■

Örnek 4.2 (Birim Kökleri). 1 sayısının n -inci köklerini bulunuz.

Çözüm.

$1 = 1 \cdot e^{i0}$ olduğundan

$$1^{1/n} = \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) = 1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$$

Kökler birim çember üzerindedir ve 1 noktası her zaman köşelerden biridir. $n = 2$ için ± 1 ; $n = 3$ için eşkenar üçgen $1, (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$; $n = 4$ için kare $\pm 1, \pm i$ elde edilir.

■

Örnek 4.3 (Karekökler ve Yarım Aç). $(\sqrt{3} + i)^{1/2}$ köklerini $x + iy$ biçiminde yazınız.

Çözüm.

$\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$ olduğundan iki karekök

$$c_k = \sqrt{2} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)\right] \quad (k = 0, 1)$$

biçimindedir; yani $c_1 = -c_0$. Esas kökü açmak için yarım açı formüllerini kullanalım:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Böylece

$$c_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)$$

ve kökler $\pm c_0$ olur.

■

4.4 Alıştırma

Alıştırma 4.1 (Kök Hesapları).

- a) $(-16)^{1/4}$ köklerinin tümünü bulunuz ve $\pm\sqrt{2}(1 \pm i)$ biçiminde yazılabildiklerini gösteriniz.
b) $(-1)^{1/3}$ köklerini bulunuz ve $z^3 + 1$ polinomunun $(z + 1)(z^2 - z + 1)$ çarpanlarına ayrılışıyla karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Önce -16 sayısını üstel forma yazalım: modülü 16, esas argümanı π 'dir, yani $-16 = 16e^{i\pi}$. Dördüncü kökler formülünde $r_0 = 16$, $\theta_0 = \pi$, $n = 4$ alınır:

$$c_k = \sqrt[4]{16} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right] = 2 \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Dört değeri tek tek yazalım; $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan

$$c_0 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1 + i), \quad c_1 = 2e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$c_2 = 2e^{i5\pi/4} = -\sqrt{2}(1 + i), \quad c_3 = 2e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}(1 - i)$$

Dört kök, işaretlerin dört seçimiyle tam olarak $\pm\sqrt{2}(1 \pm i)$ kümesini oluşturur. Beklendiği gibi hepsi 2 yarıçaplı çember üzerinde ve bir karenin köşelerinde oturur.

b) $-1 = e^{i\pi}$ olduğundan küp kökler

$$c_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2)$$

yani

$$c_0 = e^{i\pi/3} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad c_1 = e^{i\pi} = -1, \quad c_2 = e^{i5\pi/3} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Karşılaştırma için çarpanlara ayrılışa bakalım. $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ ifadesinin sıfırları, $z = -1$ ile ikinci dereceden denklemin kökleridir:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Bunlar tam olarak c_1 , c_0 ve c_2 'dir: kök alma işleminin verdiği üç sayı ile polinomun sıfırları aynı kümedir.

■

Kompleks sayıların cebiri ve geometrisi elimizde; analiz yapabilmek için son bir hazırlık kaldı: düzlemin [komşuluk](#), [iç nokta](#), [domen](#) gibi topolojik kavramları.

5. Kompleks Düzlemde Bölgeler

Limit, süreklilik ve analitiklik gibi kavramların tümü “bir noktanın yakını” fikrine dayanır. Bu bölümde, ileride sürekli kullanacağımız topolojik sözlüğü kuruyoruz: komşuluk, açık ve kapalı küme, domen, bölge ve yığılma noktası.

5.1 Komşuluklar

Tanım 5.1 (Komşuluk). z_0 noktasının bir ε -komşuluğu, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan tüm z noktalarının kümesidir: z_0 merkezli, ε yarıçaplı çemberin **içi**. Merkezin çıkarılmasıyla elde edilen

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

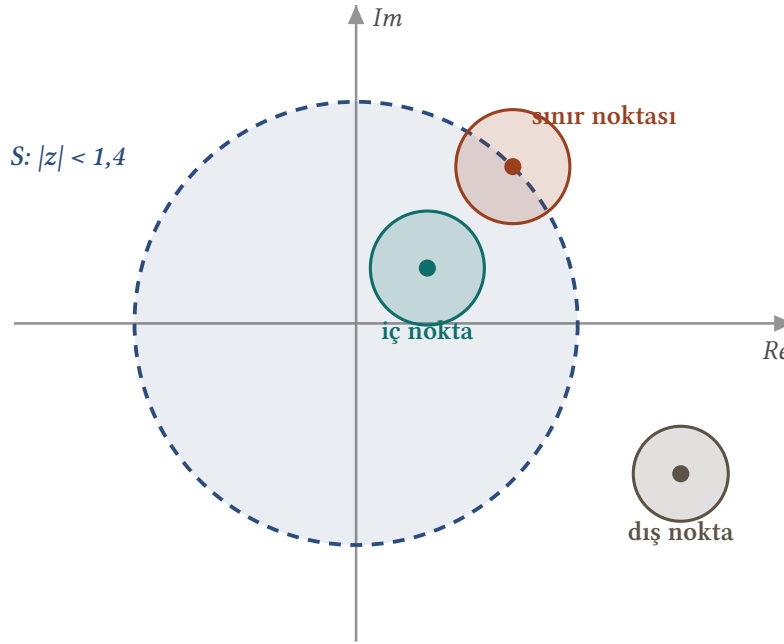
kümesine **delinmiş komşuluk** denir.

5.2 İç, Dış ve Sınır Noktaları

S , kompleks düzlemin bir alt kümesi olsun. Bir z_0 noktası için üç olasılık vardır:

- z_0 'ın tamamen S içinde kalan bir komşuluğu varsa z_0 , S 'nin bir **iç noktasıdır**.
- z_0 'ın S ile hiç ortak noktası olmayan bir komşuluğu varsa z_0 , S 'nin bir **dış noktasıdır**.
- Bu ikisi de değilse — yani her komşuluğu hem S 'den hem S dışından nokta içeriyorsa — z_0 bir **sınır noktasıdır**.

Sınır noktalarının tümüne S 'nin **sınırı** denir.



Şekil 5.1: Açık disk S için üç tür nokta. İç noktanın tamamen S 'de kalan bir komşuluğu vardır; dış noktanın S 'ye hiç değmeyen bir komşuluğu vardır; sınır noktasının ise **her** komşuluğu iki taraftan da nokta içerir. Çemberin kendisi S 'ye ait olmadığından (kesikli) küme açıktır.

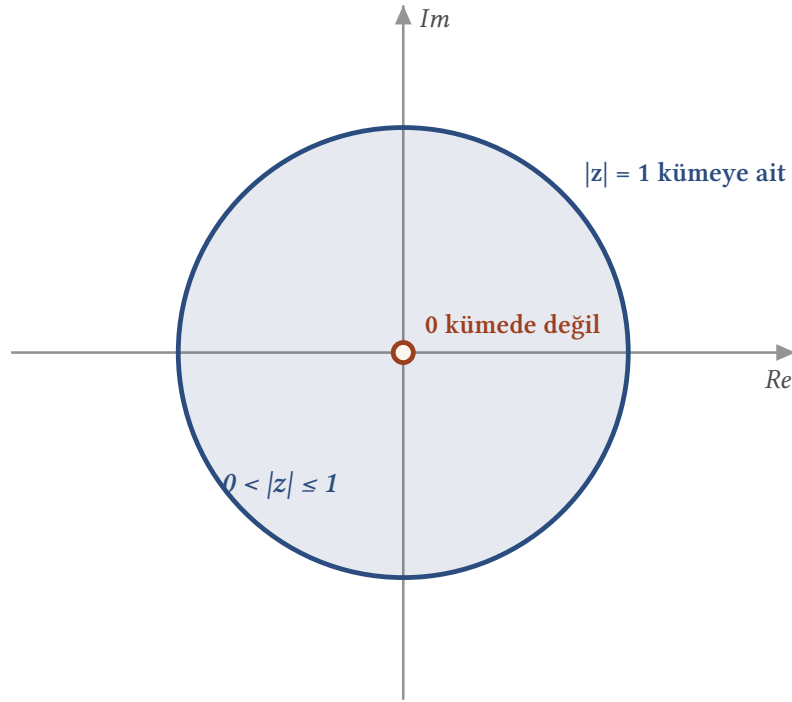
Örnek 5.1 (Birim Diskin Sınırı). $|z| < 1$ ve $|z| \leq 1$ kümelerinin her ikisinin de sınırı $|z| = 1$ çemberidir: çember üzerindeki bir noktanın her komşuluğu, hem diskten hem disk dışından nokta içerir. Fark şudur: birinci küme sınırının hiçbir noktasını içermez, ikincisi tamamını içerir.

5.3 Açık ve Kapalı Kümeler

Tanım 5.2 (Açık ve Kapalı Küme). Sınırının hiçbir noktasını içermeyen kümeye **açık**, sınırının tüm noktalarını içeren kümeye **kapalı** denir. Bir küme açıktır ancak ve ancak her noktası bir iç noktaysa. S 'nin **kapamışı** $\bar{S}$, S ile sınırının birleşimidir ve her zaman kapalıdır.

İki uç örneğe dikkat edilmelidir:

- $0 < |z| \leq 1$ kümesi **ne açık ne kapalıdır**: sınır noktası 0 'ı içermez (kapalı değil), ama sınır noktalarından oluşan $|z| = 1$ çemberini içerir (açık değil).
- Tüm düzlem $\mathbb{C}$, sınır noktası olmadığından **hem açık hem kapalıdır**.



Şekil 5.2: $0 < |z| \leq 1$ kümesi. Çember kümeye aittir ama üzerindeki hiçbir nokta iç nokta değildir, dolayısıyla küme açık değildir. Başlangıç noktası bir sınır noktasıdır ama kümede değildir, dolayısıyla küme kapalı da değildir.

5.4 Bağlantılılık, Domen ve Bölge

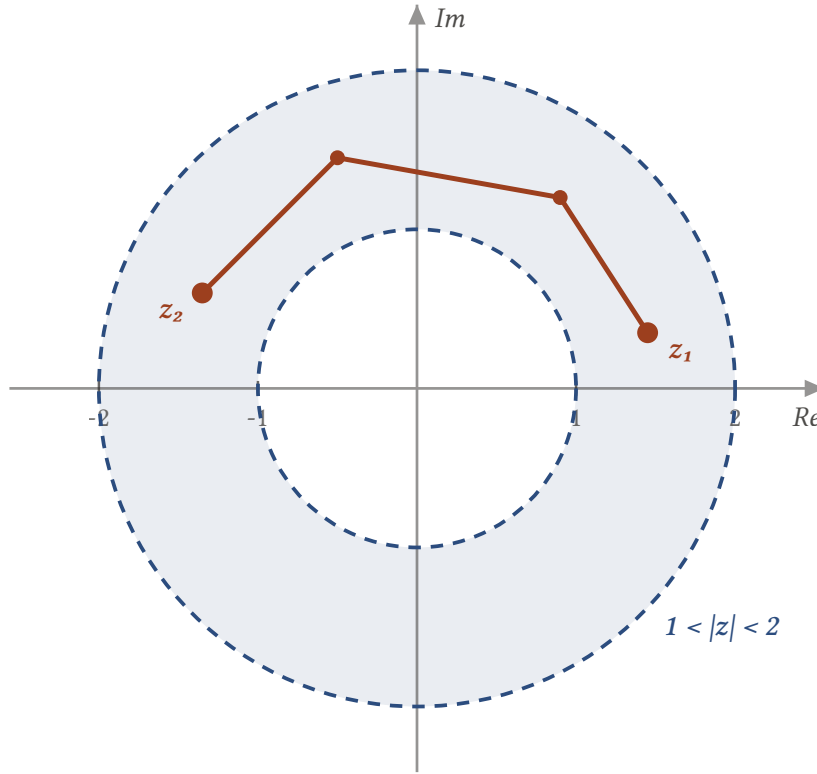
Tanım 5.3 (Domen ve Bölge). Açık bir S kümesi, herhangi iki noktası tamamen S içinde kalan sonlu sayıda doğru parçasından oluşan bir **çokgensel yolla** birleştirilebiliyorsa **bağlantılıdır**.

Açık, bağlantılı ve boş olmayan bir kümeye **domen** denir. Bir domene sınır noktalarının bir kısmı, tamamı eklenirse (ya da hiçbiri eklenmezse) elde edilen kümeye **bölge** denir.

Her komşuluk bir domendir. Halka biçimindeki

$$1 < |z| < 2$$

kümesi de bir domendir: açıktır ve içindeki herhangi iki nokta, halkadan çıkmadan çokgensel bir yolla birleştirilebilir.



Şekil 5.3: Halka $1 < |z| < 2$ bir domendir: sınır çemberlerini içermediğinden açıktır ve herhangi iki noktası, halkadan hiç çıkmayan sonlu sayıda doğru parçasıyla (çokgensel yol) birleştirilebilir. Doğrudan bir doğru parçası içteki deliğe girebilirdi; kırık çizgi bunu aşar.

i Neden bağlantılılık isteriz?

Domen tanımındaki bağlantılılık koşulu keyfi değildir. Analizin birçok teoremi — örneğin türevi her yerde sıfır olan fonksiyonun sabit olması — ancak bağlantılı kümelerde geçerlidir: iki ayrık parçadan oluşan bir açık kümede fonksiyon her parçada farklı bir sabit değer alabilir.

5.5 Sınırlılık

Bir S kümesi, her noktası bir $|z| \leq R$ diski içinde kalacak biçimde bir R bulunabiliyorsa **sınırlıdır**; aksi hâlde **sınırsızdır**. Örneğin $|z| \leq 1$ sınırlı, sağ yarı düzlem $\operatorname{Re} z \geq 0$ sınırsızdır.

5.6 Yığılma Noktaları

Tanım 5.4 (Yığılma Noktası). Bir z_0 noktasının **her** delinmiş komşuluğu S 'den en az bir nokta içeriyorsa, z_0 'a S 'nin bir **yığılma noktası** denir.

Yığılma noktası kümenin elemanı olmak zorunda değildir; kümeye “sonsuz kez yaklaşılacak” noktadır.

Teorem 5.1 (Kapalılık ve Yığılma Noktaları). Bir küme *kapalıdır ancak ve ancak tüm yığılma noktalarını içeriyorsa*.

İspat.

z_0 , S 'nin S 'de olmayan bir yığılma noktası olsun. Her komşuluğu S 'den nokta içerir; $z_0 \notin S$ olduğundan aynı komşuluk S dışından da nokta (z_0 'ın kendisi) içerir. O hâlde z_0 bir sınır noktasıdır ve S onu içermediğinden S kapalı değildir. Tersine, S kapalı değilse sınırının bir z_0 noktasını içermez; z_0 'ın her komşuluğu S 'den nokta içerir ve $z_0 \notin S$ olduğundan bu noktalar z_0 'dan farklıdır — yani z_0 , S 'de olmayan bir yığılma noktasıdır.

■

Örnek 5.2 (Bir Dizinin Yığılma Noktası). $S = \left\{ \frac{i}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ kümesinin tek yığılma noktası $z_0 = 0$ 'dır.

Çözüm.

$i/n \rightarrow 0$ olduğundan 0'ın her delinmiş komşuluğu kümeden nokta içerir; 0 bir yığılma noktasıdır. Kümenin herhangi bir i/n noktası ise **yalıtılmıştır**: komşu elemanlara uzaklığı pozitif olduğundan, yeterince küçük delinmiş komşuluğu kümeden hiç nokta içermez. Düzlemin başka hiçbir noktası da kümeye yığılmaz: sanal eksen dışındaki bir nokta eksene pozitif uzaklıktadır, eksen üzerindeki 0 dışındaki noktalar ise i/n terimlerinden pozitif uzaklıkta kalır. $0 \notin S$ olduğundan, teoreme göre S kapalı değildir.

■

5.7 Alıştırma

Alıştırma 5.1 (Küme Sınıflandırması). Aşağıdaki kümelerin açık mı, kapalı mı, domen mi olduğunu; sınırlarını ve sınırlılıklarını belirleyiniz.

- a) $|z - 2 + i| \leq 1$
- b) $|2z + 3| > 4$
- c) $\text{Im } z > 1$
- d) $0 \leq \arg z \leq \pi/4$ ($z \neq 0$)

Çözüm.

a) $|z - (2 - i)| \leq 1$ koşulu, $2 - i$ merkezli 1 yarıçaplı **kapalı** disk. Sınır, $|z - 2 + i| = 1$ çemberidir ve bu çember kümenin içindedir; küme tüm sınır noktalarını barındırdığından kapalıdır. Çemberin üzerindeki noktaların hiçbiri iç nokta olmadığı için küme açık değildir, dolayısıyla domen de değildir. Tümüyle $|z| \leq 1 + |2 - i| = 1 + \sqrt{5}$ diskinin içinde kaldığından sınırlıdır.

b) Eşitsizliği merkez-yarıçap biçimine getirelim:

$$|2z + 3| > 4 \Leftrightarrow 2 \left| z + \frac{3}{2} \right| > 4 \Leftrightarrow \left| z + \frac{3}{2} \right| > 2$$

Bu, $-3/2$ merkezli 2 yarıçaplı çemberin **dışındır**: her noktası iç noktadır, yani küme açıktır; herhangi iki noktası çemberin dışında kalan kırık çizgilerle birleştirilebildiğinden bağlantılıdır — açık ve bağlantılı olduğu için domendir. Sınırı $|z + \frac{3}{2}| = 2$ çemberidir ve bu çember kümeye ait değildir. Modülü istediği kadar büyük noktalar içerdiğinden sınırsızdır.

c) $\text{Im } z > 1$ kümesi, $y = 1$ doğrusunun üstünde kalan açık yarı düzlemdir. Her noktası iç noktadır (açık), yarı düzlem bağlantılıdır (domen), sınırı $\text{Im } z = 1$ doğrusudur ve bu doğru kümeye dahil değildir. Yatayda ve yukarıda sınır tanımadığından sınırsızdır.

d) $0 \leq \arg z \leq \pi/4$ kümesi, başlangıç noktasından çıkan iki ışının arasında kalan kapalı açılı bölgedir; ancak $z \neq 0$ dışlanmıştır. İç noktalar $0 < \arg z < \pi/4$ olanlardır; ışınların üzerindeki noktalar kümeye ait olduğu hâlde iç nokta değildir, dolayısıyla küme **açık değildir**. Öte yandan $z = 0$ noktası bir sınır noktasıdır (her komşuluğu hem kümeden hem tümleyeninden nokta içerir) ve kümeye ait değildir; bu yüzden küme **kapalı da değildir**. Sınırı, $\arg z = 0$ ve $\arg z = \pi/4$ ışınları ile başlangıç noktasından oluşur. Işınlar sonsuza uzandığından küme sınırsızdır.

■

Sahne hazır: bir sonraki kısımda bu düzlem üzerinde **fonksiyonları** tanımlayıp kompleks analizin asıl nesnesine, analitik fonksiyonlara doğru yola çıkıyoruz.

6. Fonksiyonlar ve Tasvirler

Kompleks değişkenli bir fonksiyonun grafiği çizilemez: tanım kümesi de değer kümesi de ikiye boyutludur, grafik dört boyutta yaşar. Bu yüzden kompleks analizde fonksiyonlar bir **tasvir** (gönderim) olarak incelenir: z -düzlemindeki eğri ve bölgelerin w -düzleminde nereye taşındığına bakılır.

6.1 Fonksiyon Kavramı

Tanım 6.1 (Kompleks Değişkenli Fonksiyon). S , kompleks sayıların bir kümesi olsun. S üzerinde tanımlı bir f **fonksiyonu**, S 'nin her z elemanına tek bir $w = f(z)$ kompleks sayısı karşılık getiren kuraldır. S 'ye f 'nin **tanım kümesi**, w 'ye f 'nin z 'deki **değeri** denir.

Tanım kümesi açıkça söylenmediğinde, kuralın anlamlı olduğu en geniş küme alınır: $w = 1/z$ için bu, delinmiş düzlem $z \neq 0$ kümesidir.

$z = x + iy$ yazılırsa f 'nin değerleri reel ve sanal bileşenlere ayrılır:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Burada u ve v , iki reel değişkenli reel değerli fonksiyonlardır. Kutupsal koordinatlar kullanılırsa $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$ yazılır.

Örnek 6.1 (Bileşenlerin Bulunması). $f(z) = z^2$ fonksiyonunun kartezyen ve kutupsal bileşenlerini bulunuz.

Çözüm.

Kartezyen biçimde:

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy \Rightarrow u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

Kutupsal biçimde $z = r e^{i\theta}$ için:

$$f(z) = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta \Rightarrow u = r^2 \cos 2\theta, \quad v = r^2 \sin 2\theta$$

■

$v \equiv 0$ ise f **reel değerlidir**; örneğin $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ böyledir.

n negatif olmayan bir tam sayı ve $a_0, \dots, a_n$ kompleks sabitler ($a_n \neq 0$) olmak üzere

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

fonksiyonu n -inci dereceden bir **polinomdur**; tanım kümesi tüm düzlemdir. Polinomların bölümü $P(z)/Q(z)$ ise **rasyonel fonksiyondur** ve $Q(z) \neq 0$ noktalarında tanımlıdır.

i Çok değerli fonksiyonlar

Kompleks analizde bir z 'ye birden çok değer eşleyen kurallar da doğal olarak ortaya çıkar; $z^{1/2}$ bunun ilk örneğidir. Böyle durumlarda değerlerden birini sistemli biçimde seçerek tek değerli bir fonksiyon – bir **dal** – elde edilir. Örneğin

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\Theta/2} \quad (r > 0, \Theta = \text{Arg } z)$$

kuralı, $z^{1/2}$ 'nin esas değerini seçen tek değerli bir fonksiyondur. Dallar konusu **logaritma fonksiyonunda** derinlemesine işlenecek.

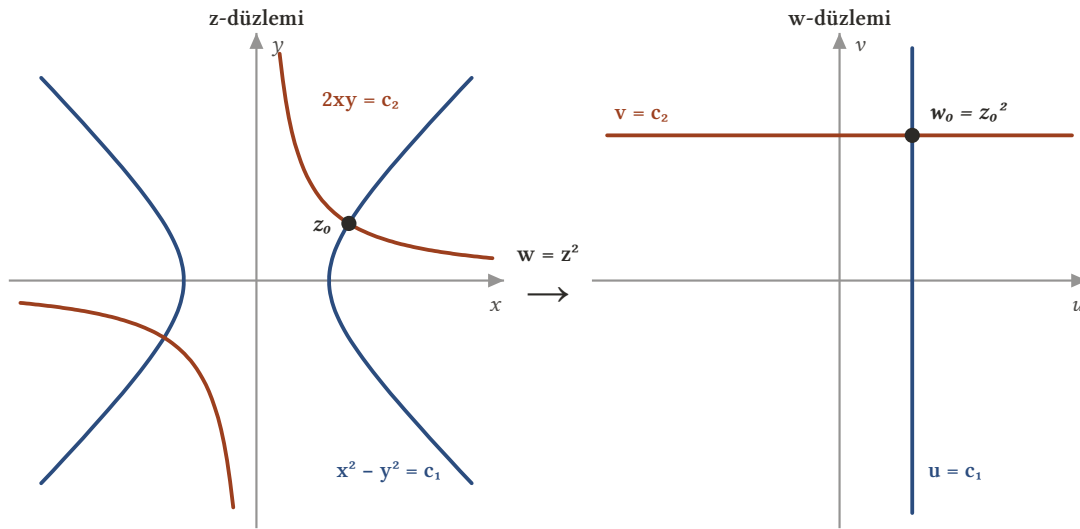
6.2 Tasvir Kavramı

$w = f(z)$ yazılıp z - ve w -düzlemleri ayrı ayrı düşünüldüğünde f 'ye **tasvir** (gönderim) denir. Bir S kümesindeki noktaların görüntülerinin kümesine S 'nin **görüntüsü** denir. En basit tasvirler geometrik olarak tanındıktır:

- $w = z + 1$: her noktayı 1 birim sağa **öteler**.
- $w = iz$: $|iz| = |z|$ ve $\arg(iz) = \arg z + \pi/2$ olduğundan, başlangıç etrafında $\pi/2$ **döndürür**.
- $w = \bar{z}$: reel eksene göre **yansıtır**.

6.3 $w = z^2$ Tasviri

$u = x^2 - y^2, v = 2xy$ bileşenleri, $w = z^2$ tasvirinin bütün geometrisini taşır.



Şekil 6.1: $w = z^2$ altında $x^2 - y^2 = c_1$ hiperbolünün **iki kolu da** $u = c_1$ dikey doğrusunun tamamına, $2xy = c_2$ hiperbolünün iki kolu da $v = c_2$ yatay doğrusuna gider (çizimde $c_1 = 1, c_2 = 2$). Hiperbollerin kesiştiği z_0 noktası, doğruların kesiştiği $w_0 = z_0^2$ noktasına taşınır.

Örnek 6.2 (Hiperbollerin Görüntüsü). $x^2 - y^2 = c_1$ ($c_1 > 0$) hiperbolünün $w = z^2$ altında görüntüsü, $u = c_1$ dikey doğrusudur; $2xy = c_2$ ($c_2 > 0$) hiperbolünün görüntüsü $v = c_2$ yatay doğrusudur.

Çözüm.

Birinci hiperbol üzerinde $u = x^2 - y^2 = c_1$ sabittir; nokta hiperbolün sağ kolunda y değeri $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a taranarak dolaşıldığında $v = 2xy = 2y\sqrt{y^2 + c_1}$ de $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a tüm değerleri alır. Yani sağ kolun görüntüsü $u = c_1$ doğrusunun **tamamıdır**; sol kol da aynı doğruya gider. İkinci hiperbolün $x > 0$ kolunda $v = 2xy = c_2$ sabittir ve x parametresiyle

$$u = x^2 - y^2 = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2} \quad (0 < x < \infty)$$

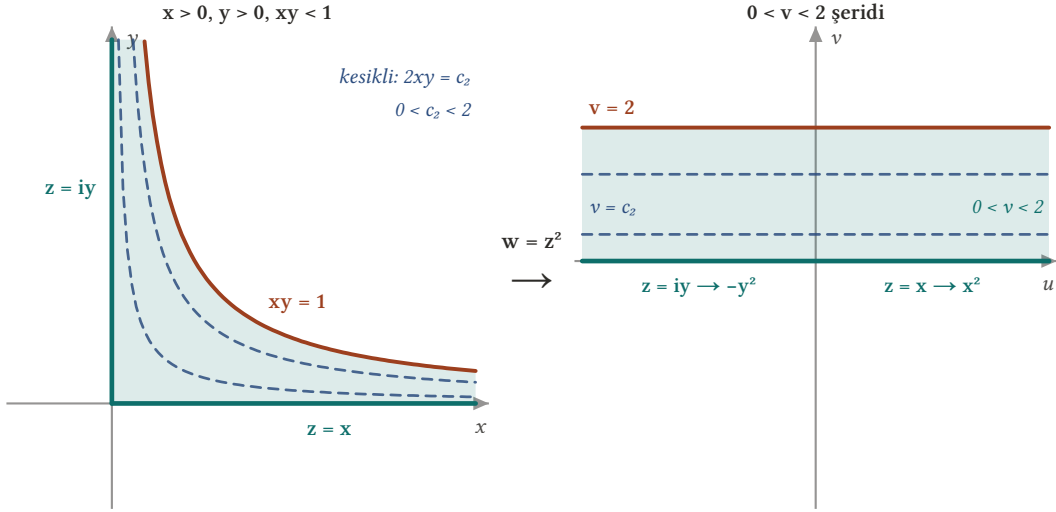
ifadesi $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a monoton artar; görüntü $v = c_2$ doğrusunun tamamıdır. $x < 0$ kolu da aynı doğruya taşınır. ■

Örnek 6.3 (Bir Bölgenin Şerite Tasviri). $x > 0, y > 0, xy < 1$ koşullarıyla tanımlı bölgenin $w = z^2$ altındaki görüntüsünün $0 < v < 2$ şeridi olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bölgedeki noktalar, $0 < c_2 < 2$ olmak üzere $2xy = c_2$ hiperbol kollarının birinci çeyrekte kalan parçaları üzerinde yer alır. Önceki örneğe göre her böyle kol, $v = c_2$ doğrusunun tamamına tasvir edilir; $c_2, (0, 2)$ aralığını tararken görüntüler $0 < v < 2$ şeridini doldurur.

Sınırların davranışı da öğreticidir: pozitif y eksenini ($z = iy$) $w = -y^2 \leq 0$ 'a, pozitif x eksenini ($z = x$) $w = x^2 \geq 0$ 'a gider; ikisi birlikte $v = 0$ doğrusunu (u eksenini) örter. $xy = 1$ hiperbolü ise $v = 2$ doğrusuna gider. Kapalı bölge $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$ 'in görüntüsü kapalı şerit $0 \leq v \leq 2$ olur.



Şekil 6.2: Bölge, $0 < c_2 < 2$ olan $2xy = c_2$ hiperbol yaylarıyla (kesikli) taranır; her yay $v = c_2$ doğrusunun tamamına gittiğinden görüntü $0 < v < 2$ şerididir. Sınırdaki pozitif y eksenini u ekseninin negatif yarısını, pozitif x eksenini pozitif yarısını örter; $xy = 1$ hiperbolü $v = 2$ doğrusuna gider.

Kutupsal koordinatlarda $w = z^2$ tasviri daha da saydamdır: $z = re^{i\theta}$ için $w = r^2 e^{i2\theta}$; modül karelenir, açı **ikiye katlanır**. Birinci çeyrek $0 \leq \theta \leq \pi/2$, üst yarı düzlem $0 \leq 2\theta \leq \pi$ tasvir edilir; üst yarı düzlem ise tüm düzlemi örter.

6.4 Üstel Fonksiyonla Tasvirler

$e^z = e^x e^{iy}$ fonksiyonunda (ayrıntılar için) modül e^x , argüman y 'dir. Bu ayrışma, Kartezyen ızgarayı kutupsal ızgaraya dönüştürür:

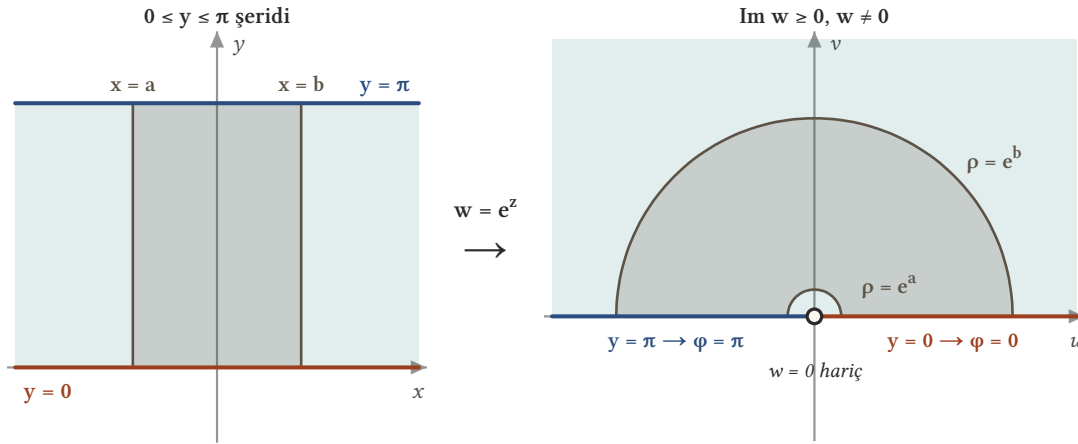
- **Dikey doğru** $x = c_1$, $\rho = e^{c_1}$ yarıçaplı **çembere** tasvir edilir; doğru boyunca y bir 2π aralığını aştıkça çember tekrar tekrar dolanılır.
- **Yatay doğru** $y = c_2$, açısı c_2 olan ve başlangıç noktasından çıkan (ama onu içermeyen) **ışına** tasvir edilir.

Örnek 6.4 (Dikdörtgenin Görüntüsü). $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ dikdörtgeninin $w = e^z$ altındaki görüntüsü

$$e^a \leq \rho \leq e^b, \quad c \leq \varphi \leq d$$

halka parçasıdır. Tasvir, $d - c < 2\pi$ olduğu sürece birebirdir; örneğin tabanı $y = 0$, tavanı $y = \pi$ doğruları üzerinde olan her dikdörtgen ($c = 0, d = \pi$), üst yarı düzlemde bir yarım halkaya birebir tasvir edilir.

Sınır durumu özellikle önemlidir: $0 \leq y \leq \pi$ **yatay şeridinin tamamı**, üst yarı düzlem $\text{Im } w \geq 0$ 'ın $w = 0$ çıkarılmış hâline tasvir edilir; alt kenar $y = 0$ pozitif reel eksene, üst kenar $y = \pi$ negatif reel eksene gider.



Şekil 6.3: e^z altında yatay doğrular ışına, dikey doğrular çembere gider: $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq \pi$ dikdörtgeni $e^a \leq \rho \leq e^b$ yarım halkasına bükülür. Şeridin alt kenarı $y = 0$ pozitif reel eksene, üst kenarı $y = \pi$ negatif reel eksene gider; şeridin tamamı $w = 0$ çıkarılmış üst yarı düzlemi örter.

6.5 Alıştırma

Alıştırma 6.1 (Tasvir Alıştırmaları).

- $f(z) = z^3 + z + 1$ fonksiyonunun u ve v bileşenlerini bulunuz.
- $w = z^2$ altında $y = 1$ yatay doğrusunun görüntüsünün $v^2 = 4(u + 1)$ parabolü olduğunu gösteriniz.
- $w = e^z$ altında $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ yatay şeridinin görüntüsünü belirleyiniz.

Çözüm.

a) $z = x + iy$ yazıp küpü açalım:

$$z^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

Buna $z + 1 = (x + 1) + iy$ eklenir ve reel/sanal kısımlar ayrılır:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x + 1, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 + y$$

b) $y = 1$ doğrusunun noktaları $z = x + i$ biçimindedir (x reel). Görüntüyü hesaplayalım:

$$w = (x + i)^2 = x^2 - 1 + 2ix$$

Buradan bileşenler okunur:

$$u = x^2 - 1, \quad v = 2x$$

İkinci eşitlik $x = v/2$ verir; bunu birinciye koyarsak

$$u = \frac{v^2}{4} - 1 \Leftrightarrow v^2 = 4(u + 1)$$

x tüm reel sayıları taradığında $v = 2x$ de tüm reel değerleri alır; dolayısıyla görüntü, tepesi $(-1, 0)$ noktasında olan bu parabolün **tamamıdır**.

c) $w = e^z = e^x e^{iy}$ olduğundan

$$|w| = e^x, \quad \arg w = y$$

Şeritte x tüm reel değerleri alır, yani $|w| = e^x$ sayısı $(0, \infty)$ aralığını tarar — $|w|$ asla 0 olamaz. Argüman ise $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ aralığında kalır. Modülü pozitif, argümanı bu aralıktaki noktaların kümesi tam olarak

$$\operatorname{Re} w \geq 0, \quad w \neq 0$$

yani **başlangıç noktası çıkarılmış kapalı sağ yarı düzlemdir**. Uç değerler de görüntüye dahildir: $y = \pi/2$ doğrusu pozitif sanal eksen, $y = -\pi/2$ doğrusu negatif sanal eksen verir.

■

Tasvirler bize fonksiyonların kabaca davranışını gösterdi; incelikli davranış — yaklaşma, süreklilik, türev — **limit kavramıyla** başlar.

7. Limitler ve Süreklilik

Kompleks limit tanımı, reel analizdeki tanımın sözcüğü sözcüğüne taşınmıştır; tek fark, mutlak değer yerini modülün almasıdır. Ama bu küçük değişimin büyük bir sonucu vardır: z , limit noktasına **her yönden** yaklaşabilir ve limit hepsinde aynı olmak zorundadır.

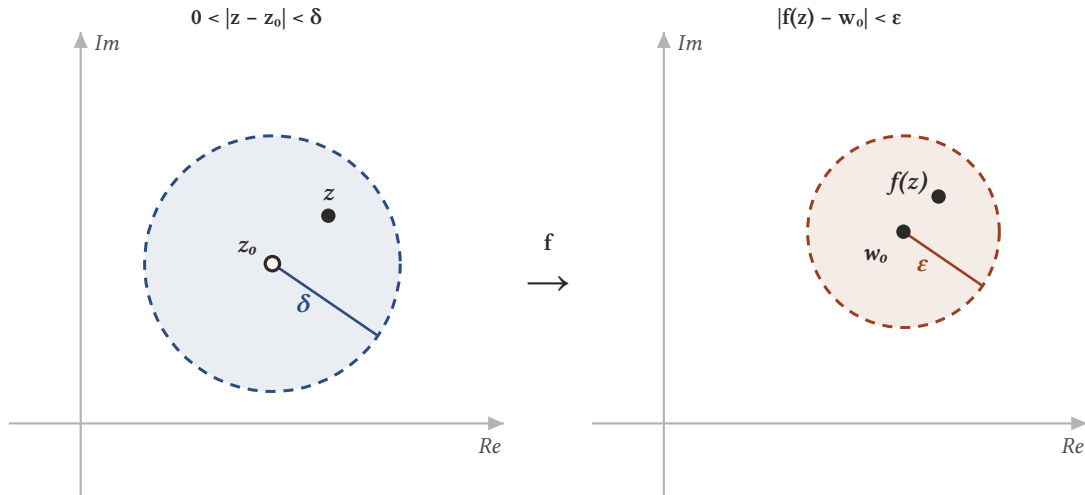
7.1 Limit Tanımı

Tanım 7.1 (Limit). f, z_0 'ın bir delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

demek şudur: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$$



Şekil 7.1: Limit tanımı iki düzlemde okunur: z_0 merkezli delinmiş δ -diskinin (merkez hariç) her noktası, f altında w_0 merkezli ε -diskinin içine düşmelidir. δ , z_0 'a hangi yönden yaklaşıldığına bakmaz; koşul diskin tamamı için geçerlidir.

Limit varsa **tektir**: w_0 ve w_1 ikisi de limitse, $|w_1 - w_0| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < 2\varepsilon$ her ε için sağlanır; dolayısıyla $w_1 = w_0$.

Tanım, f 'nin tanım kümesinin sınırındaki noktalara da uyarlanır: z 'nin yalnızca tanım kümesinde kalan değerleri hesaba katılır.

Örnek 7.1 (Tanımla Limit Doğrulama). $f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}$, $|z| < 1$ açık diskinde tanımlı olsun. $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

z diskte olmak üzere

$$\left| \frac{i\bar{z}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{|\bar{z} - 1|}{2} = \frac{|z - 1|}{2}$$

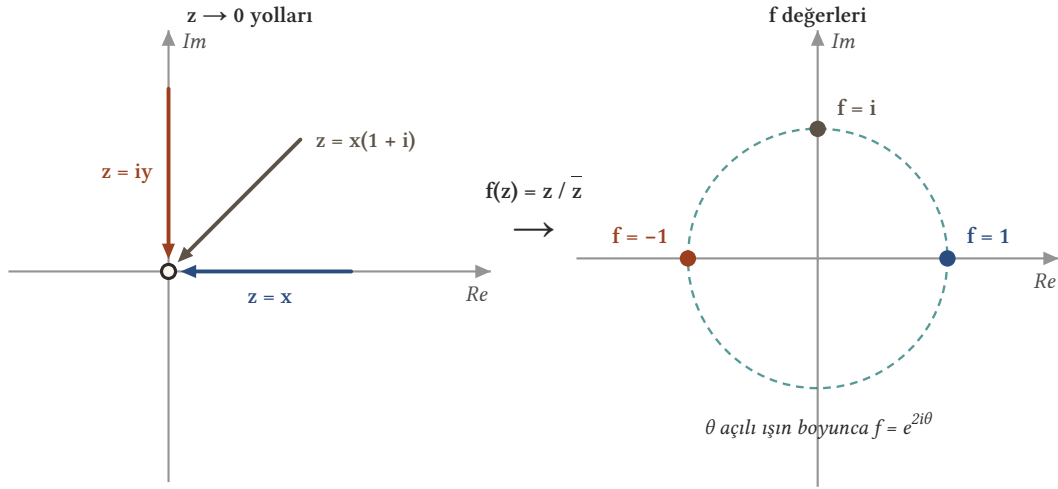
Verilen ε için $\delta = 2\varepsilon$ seçilirse, $0 < |z - 1| < \delta$ iken $|f(z) - i/2| < \varepsilon$ olur.

■

Örnek 7.2 (Yönlere Göre Değişen Limit). $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ fonksiyonunun $z \rightarrow 0$ için limiti yoktur.

Çözüm.

Reel eksen boyunca $z = x$ için $f = x/x = 1$; sanal eksen boyunca $z = iy$ için $f = iy/(-iy) = -1$. İki yönden iki farklı değere yaklaşılır; limit tek olmak zorunda olduğundan var olamaz.



Şekil 7.2: $f(z) = z/\bar{z}$ her ışın üzerinde sabittir ama ışıandan ışına değişir: reel ekseninde 1, sanal ekseninde -1, köşegende i ; genel olarak θ açılı ışıında $e^{2i\theta}$. Değerler birim çember üzerinde dağıldığından $z \rightarrow 0$ için tek bir limit yoktur.

■

⚠ İki yönde aynı olması yetmez

Reel analizde sağdan ve soldan limitlerin eşitliği yeterlidir; kompleks düzlemde ise sonsuz çoklukta yaklaşma yönü ve eğrisi vardır. İki (hatta her doğrusal) yönde aynı değeri bulmak limiti garanti etmez — tanımın gücü tam da bu evrensellikte yatar.

7.2 Limit Teoremleri

Teorem 7.1 (Bileşen Limitleri). $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ve $w_0 = u_0 + iv_0$ olsun. O zaman

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u = u_0 \text{ ve } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v = v_0$$

İspat.

($\Leftarrow$) $|f - w_0| = |(u - u_0) + i(v - v_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$ olduğundan, bileşen limitleri varsa her biri $\varepsilon/2$ 'den küçük yapılır ve $f \rightarrow w_0$ çıkar.

$(\Rightarrow) |u - u_0| \leq |f - w_0|$ ve $|v - v_0| \leq |f - w_0|$ eşitsizlikleri, $f \rightarrow w_0$ iken bileşenlerin de yakınsadığını verir.

■

Teorem 7.2 (Limitlerin Cebiri). $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ve $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = W_0$ ise

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + W_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = w_0 W_0$$

ve $W_0 \neq 0$ olduğunda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{W_0}$$

İspat.

Üç kural da Teorem 7.1 üzerinden reel analizdeki karşılıklarına indirgenir: kompleks bir limitin varlığı, reel ve sanal kısımların limitlerinin varlığıyla eşdeğerdir. Toplam, çarpım ve bölüm açıldığında ortaya çıkan bileşenler, u, v, U, V reel fonksiyonlarının sonlu toplam ve çarpımlarıdır; her birine reel analizdeki limit kuralları uygulanır ve sonuçlar yeniden birleştirilir. Bölüm kuralında $W_0 \neq 0$ koşulu, paydanın z_0 yakınında sıfırdan uzak kalmasını sağlar.

■

Doğrudan sonuçlar: $\lim c = c$, $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n$ ve her P polinomu için

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0)$$

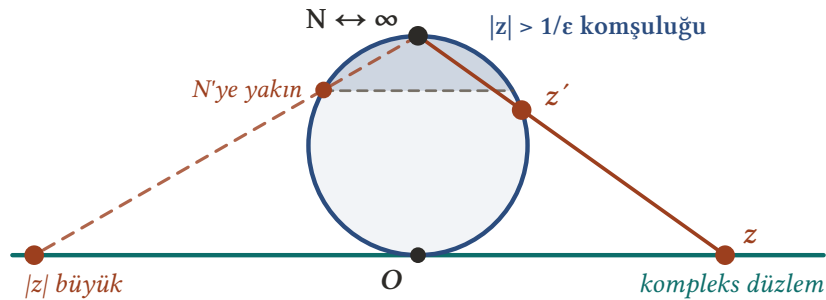
7.3 Sonsuzdaki Nokta

Kompleks düzleme tek bir **sonsuzdaki nokta** ∞ eklenirse **genişletilmiş kompleks düzlem** elde edilir. Geometrik model **Riemann küresidir**: düzleme başlangıç noktasında teğet bir küre alınır; kuzey kutbu N ile düzlemdeki z noktasını birleştiren doğru küreyi N dışında tam bir noktada keser. Bu eşleme (stereografik izdüşüm) düzlemin noktalarını kürenin N dışındaki noktalarıyla birebir eşler; N 'nin kendisi ∞ 'a karşılık gelir. Küçük $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$

kümesi, ∞ 'un bir **komşuluğu** olarak tanımlanır.

Riemann küresi (yandan görünüş)



Şekil 7.3: Düzlemdeki z noktası, kuzey kutbu N ile birleştirilerek küredeki z' noktasına eşlenir. Modülü büyüyen noktaların görüntüleri N 'ye yığılır; bu yüzden $|z| > 1/\varepsilon$ kümesi, kürede $N = \infty$ etrafındaki küçük bir takkeye karşılık gelir ve ∞ 'un bir komşuluğu sayılır.

Teorem 7.3 (Sonsuz İçeren Limitler). Sonsuz içeren limitler, sıradan limitlere şu sözlükle çevrilir:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f} \right) = w_0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

İspat.

Her denklik, komşuluk tanımlarının doğrudan yazılmasıyla çıkar. Birincisini görelim: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ demek, her $\varepsilon > 0$ için $0 < |z - z_0| < \delta$ olduğunda

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

olması demektir. Bu eşitsizlik ise

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon$$

koşuluyla birebir aynıdır; yani $1/f$ fonksiyonunun z_0 'daki limiti sıfırdır. Diğer iki denklik, ∞ komşuluğunun $|z| > 1/\varepsilon$ tanımıyla aynı biçimde yazılır.

■

Örnek 7.3 (Üç Tipik Hesap). Aşağıdaki limitleri doğrulayınız.

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow -1} \frac{iz + 3}{z + 1} = \infty \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z + i}{z + 1} = 2 \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 - 1}{z^2 + 1} = \infty$$

Çözüm.

a) Ters çevirip sıfıra gittiğini görelim:

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z + 1}{iz + 3} = \frac{0}{-i + 3} = 0$$

b) $z \rightarrow 1/z$ değişimiyle:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2/z + i}{1/z + 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 + iz}{1 + z} = 2$$

c) Hem ters çevirip hem değişken değiştirerek:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1/z)^2 + 1}{2(1/z)^3 - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + z^3}{2 - z^3} = 0$$

■

7.4 Süreklilik

Tanım 7.2 (Süreklilik). f , z_0 'da **süreklidir** demek şu üç koşulun sağlanmasıdır: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ vardır, $f(z_0)$ tanımlıdır ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Bir bölgenin her noktasında sürekli olan fonksiyona o bölgede sürekli denir.

Limit teoremlerinden, sürekli fonksiyonların toplamı ve çarpımı süreklidir; bölümü, payda sıfır olmayan noktalarda süreklidir. Polinomlar tüm düzlemde süreklidir. Ayrıca:

- **Bileşke süreklidir:** f, z_0 'da; $g, f(z_0)$ 'da sürekliyse $g[f(z)]$ bileşkesi z_0 'da süreklidir.
- $f(z) = u + iv$ süreklidir $\Leftrightarrow u$ ve v süreklidir.

Teorem 7.4 (Sıfırdan Uzak Kalma). f, z_0 'da sürekli ve $f(z_0) \neq 0$ ise, z_0 'ın bir komşuluğunda $f(z) \neq 0$ kalır.

İspat.

Süreklilik tanımında $\varepsilon = |f(z_0)|/2$ alınsın; karşılık gelen δ -komşuluğunda $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$ olur. Bu komşulukta bir noktada $f(z) = 0$ olsaydı $|f(z_0)| < |f(z_0)|/2$ çelişkisi doğardı. ■

Teorem 7.5 (Kapalı Sınırlı Bölgede Maksimum). f , kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde sürekliyse, R 'nin her z noktası için

$$|f(z)| \leq M$$

olacak ve eşitliğin en az bir noktada sağlanacağı bir M sayısı vardır: $|f|$, R üzerinde maksimumuna ulaşır.

Bu, reel analizde iki değişkenli sürekli $\sqrt{u^2 + v^2}$ fonksiyonunun kapalı sınırlı kümede uç değer almasının doğrudan sonucudur; ileride [integral kestirimlerinde](#) sıkça kullanılacaktır.

7.5 Alıştırma

Alıştırma 7.1 (Limit ve Süreklilik).

- $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}$ limitini hesaplayınız.
- $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1}$ fonksiyonunun hangi noktalarda sürekli olamayacağını belirleyiniz; kaldırılabilir olanları ayırt ediniz.

Çözüm.

a) Pay ve payda $z \rightarrow i$ iken birlikte sıfıra gider; çarpanlara ayırıp sadeleştirelim. $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ olduğundan, $z \neq i$ için

$$\frac{z^2 + 1}{z - i} = \frac{(z - i)(z + i)}{z - i} = z + i$$

Limit, fonksiyonun $z = i$ 'deki değerine değil, delinmiş komşuluktaki davranışına baktığından sadeleşme serbesttir. Sağdaki polinom sürekli olduğu için

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = i + i = 2i$$

b) Bölüm, paydanın sıfır olmadığı her noktada süreklidir. Paydayı çarpanlarına ayıralım:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1, z = -1, z = i, z = -i$$

Fonksiyon bu dört noktada tanımsızdır, dolayısıyla yalnızca burada sürekli olamaz. İki durumu ayıralım.

$z = \pm i$ noktalarında pay da sıfırdır ve ortak çarpan sadeleşir: $z \neq \pm i$ için

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)} = \frac{1}{z^2 - 1}$$

Sağdaki ifade $z = \pm i$ 'de süreklidir ve orada $z^2 = -1$ olduğundan

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \frac{1}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$$

Limit var olduğuna göre bu iki süreksizlik **kaldırılabilirdir**: $f(\pm i) = -1/2$ tanımlanırsa fonksiyon orada sürekli olur.

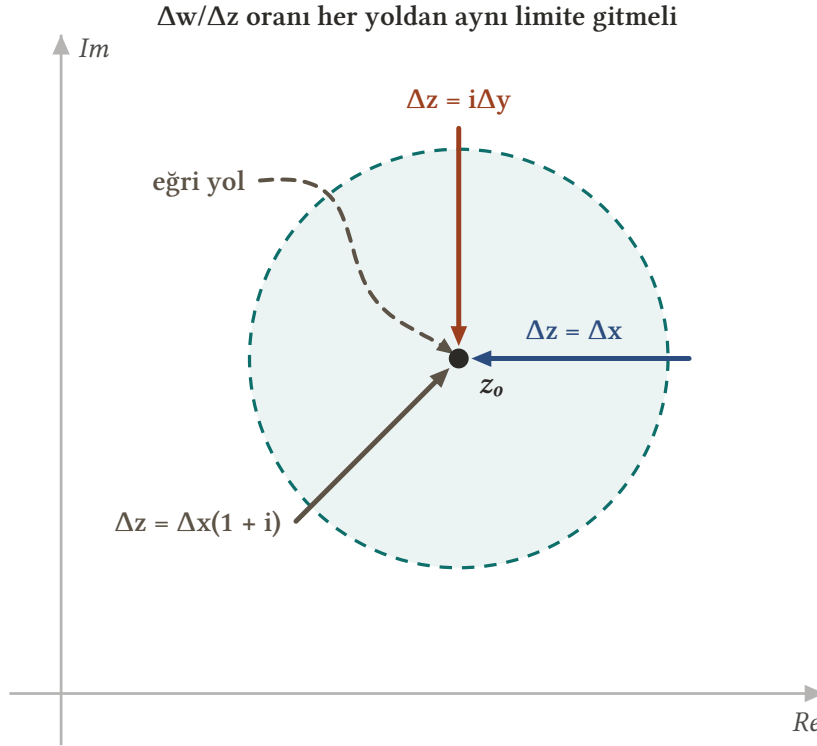
$z = \pm 1$ noktalarında ise pay $z^2 + 1 = 2 \neq 0$ iken payda sıfıra gider; $|f(z)| \rightarrow \infty$ olur ve sonlu bir limit yoktur. Bu iki süreksizlik kaldırılamaz.

■

Süreklilikten bir adım ötesi, kompleks analizi bambaşka bir dünyaya taşıyan kavramdır: [türev](#).

8. Türev ve Türev Formülleri

Kompleks türev, biçimsel olarak reel türevle aynı oran limitidir. Ama Δz artık sıfıra **düzlemin her yönünden** yaklaşabilir ve limitin hepsinde aynı çıkması gerekir. Bu ek koşul o kadar kısıtlayıcıdır ki, reel bakışla gayet “düzgün” görünen fonksiyonlar bile kompleks anlamda türevsiz kalabilir.



Şekil 8.1: Kompleks türevde Δz , z_0 'a yalnız sağdan-soldan değil, düzlemin her yönünden ve her eğri boyunca yaklaşır; $\Delta w/\Delta z$ oranının hepsinde aynı limite gitmesi gerekir. $\bar{z}$ (her yerde) ve $|z|^2$ ($z \neq 0$ iken) için yatay ile dikey yaklaşımın farklı çıkması, türevin yokluğunu göstermeye yeter.

8.1 Türevin Tanımı

Tanım 8.1 (Türev). f , z_0 'ın bir komşuluğunda tanımlı olsun. f 'nin z_0 'daki **türevi**

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limitidir (varsa). $\Delta z = z - z_0$ ve $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ yazılırsa aynı tanım

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

biçimini alır; $\frac{dw}{dz}$ gösterimi de kullanılır.

Örnek 8.1 (Tanımdan Türev). $f(z) = z^2$ için $f'(z) = 2z$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \frac{2z \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z + \Delta z \rightarrow 2z \quad (\Delta z \rightarrow 0)$$

Limit Δz 'nin yönünden bağımsız çıktı; türev her noktada vardır.

■

8.2 Türevlenemeyen Fonksiyonlar

Örnek 8.2 (Eşlenik Hiçbir Noktada Türevlenemez). $f(z) = \bar{z}$ fonksiyonunun hiçbir noktada türevi yoktur.

Çözüm.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{z + \Delta z - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\bar{\Delta z}}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta x$ (yatay yaklaşım) için oran 1; $\Delta z = i\Delta y$ (dikey yaklaşım) için $i\Delta y/(i\Delta y) = -1$. İki yön farklı değer verdiği için limit hiçbir z 'de yoktur.

■

Örnek 8.3 (Modül Karesi Yalnızca Başlangıçta Türevlenir). $f(z) = |z|^2$ fonksiyonunun yalnızca $z = 0$ 'da türevi vardır ve $f'(0) = 0$ 'dır.

Çözüm.

$|w|^2 = w\bar{w}$ özdeşliğiyle

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\overline{z + \Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$z = 0$ ise oran $\overline{\Delta z}$ 'dir ve 0'a gider: $f'(0) = 0$. $z \neq 0$ ise yatay yaklaşım $\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \rightarrow \bar{z} + z$, dikey yaklaşım $\rightarrow \bar{z} - z$ verir; $z \neq 0$ iken bu ikisi farklıdır ($2z \neq 0$), türev yoktur.

■

i Reel gözle düzgün, kompleks gözle katı

$|z|^2 = x^2 + y^2$ fonksiyonunun bileşenleri $u = x^2 + y^2, v = 0$ her mertebeden kısmi türeve sahiptir; buna rağmen kompleks türev tek bir nokta dışında yoktur. Kompleks türevlenebilirlik, bileşenlerin düzgünlüğünden çok daha fazlasını ister: bileşenleri birbirine bağlayan **Cauchy-Riemann denklemlerini**.

8.3 Türev Sürekliliği Gerektirir

Teorem 8.1 (Türevlenebilirlik Sürekliliği Gerektirir). $f'(z_0)$ varsa f, z_0 'da süreklidir.

İspat.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

■

Tersi doğru değildir: $\bar{z}$ ve $|z|^2$ her yerde süreklidir ama neredeyse hiçbir yerde türevlenemez.

8.4 Türev Formülleri

Limit teoremleri, reel analizden tanıdık tüm türev kurallarını aynı kanıtlarla kompleks düzleme taşır. c sabit, f ve g türevlenebilir olmak üzere:

$$\frac{d}{dz}c = 0, \quad \frac{d}{dz}z = 1, \quad \frac{d}{dz} [cf(z)] = cf'(z)$$

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}; n < 0 \text{ için } z \neq 0)$$

$$\frac{d}{dz} [f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$$

$$\frac{d}{dz} [f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \quad (g(z) \neq 0)$$

Çarpım kuralının kanıtı örnek olsun: $\Delta z \rightarrow 0$ iken

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z)g(z + \Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z} &= f(z + \Delta z) \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} \\ &\quad + g(z) \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \end{aligned}$$

yazılır; türevlenebilen f sürekli olduğundan birinci terim $f(z)g'(z)$ 'ye, ikincisi $g(z)f'(z)$ 'ye gider.

Teorem 8.2 (Zincir Kuralı). f 'nin z_0 'da, g 'nin $f(z_0)$ 'da türevi varsa $F(z) = g[f(z)]$ bileşkesinin z_0 'da türevi vardır ve

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)] f'(z_0)$$

$w = f(z)$ ve $W = g(w)$ yazılışıyla bu, alışıldık biçimini alır:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}$$

Örnek 8.4 (Zincir Kuralı Uygulaması). $\frac{d}{dz} (2z^2 + i)^5$ türevini hesaplayınız.

Çözüm.

$w = 2z^2 + i$, $W = w^5$ alalım:

$$\frac{d}{dz} (2z^2 + i)^5 = 5w^4 \cdot 4z = 20z (2z^2 + i)^4$$

■

8.5 Alıştırma

Alıştırma 8.1 (Türev Hesapları).

- $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$ ($z \neq -\frac{1}{2}$) için $f'(z)$ türevini hesaplayınız.
- $f(z) = \operatorname{Im} z$ fonksiyonunun hiçbir noktada türevlenemediğini, tanım üzerinden yatay ve dikey yaklaşımları karşılaştırarak gösteriniz.
- $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ polinomunun türevinin yine bir polinom olduğunu yazınız.

Çözüm.

a) Bölüm kuralını uygulayalım; pay $z - 1$, payda $2z + 1$ 'dir:

$$f'(z) = \frac{(z-1)'(2z+1) - (z-1)(2z+1)'}{(2z+1)^2} = \frac{(2z+1) - 2(z-1)}{(2z+1)^2}$$

Payı sadeleştirirsek $2z + 1 - 2z + 2 = 3$ kalır:

$$f'(z) = \frac{3}{(2z+1)^2} \quad \left(z \neq -\frac{1}{2}\right)$$

b) $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ olmak üzere fark bölümünü yazalım. $f(z) = \text{Im } z = y$ olduğundan

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Yatay yaklaşım ($\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$): bölüm her adımda

$$\frac{0}{\Delta x} = 0$$

Dikey yaklaşım ($\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$): bölüm her adımda

$$\frac{\Delta y}{i\Delta y} = \frac{1}{i} = -i$$

Bir limitin var olması için, $\Delta z \rightarrow 0$ giden **her** yol boyunca aynı değere ulaşılması gerekir. Burada iki yol 0 ve $-i$ gibi farklı değerler verdiğinden limit yoktur. Seçilen z noktası keyfi olduğu için $\text{Im } z$ hiçbir noktada türevlenebilir değildir.

c) Türev, sonlu toplamlar üzerinde terim terime uygulanır ve $\frac{d}{dz} z^k = kz^{k-1}$ 'dir:

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_nz^{n-1}$$

Sonuç yine bir polinomdur: $a_n \neq 0$ ve $n \geq 1$ ise derecesi $n - 1$ 'dir. Polinomlar tüm düzlemde türevlenebilir olduğundan bu işlem istendiği kadar tekrarlanabilir ve n 'inci türevden sonra sabit $n! a_n$ elde edilir.

■

Yatay ve dikey yaklaşımların uyuşması tesadüfe bırakılamaz; bu uyumun kesin koşulları, kompleks analizin imzası sayılan denklemlerdir: [Cauchy-Riemann denklemleri](#).

9. Cauchy-Riemann Denklemleri

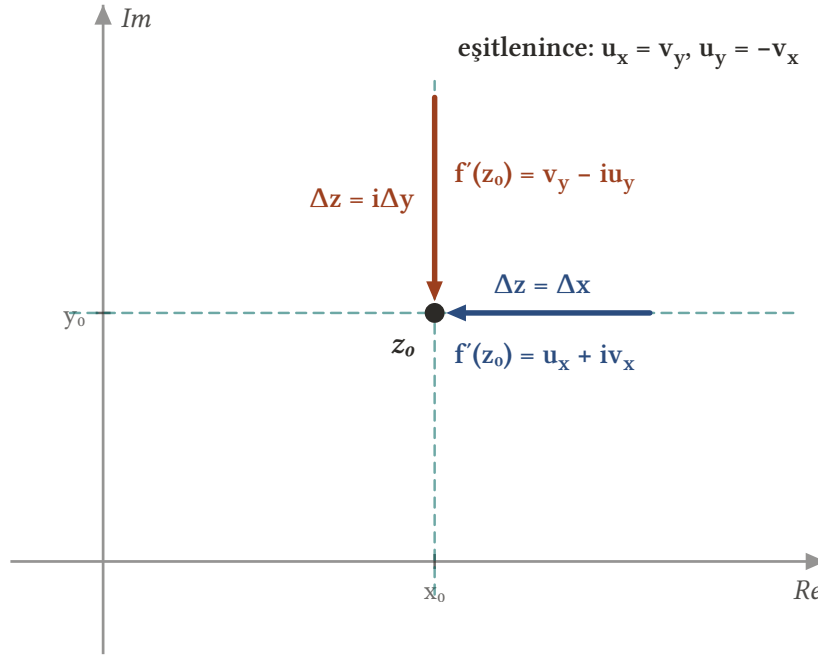
Kompleks türevin var olması, bileşen fonksiyonları u ile v 'yi birbirine kenetleyen iki kısmi diferansiyel denklemi zorunlu kılar. Bu bölümde önce bu denklemleri türetecek, sonra hangi ek koşulla türevin varlığını **garanti ettiklerini** göreceğiz.

9.1 Denklemlerin Türetilişi

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında türevi var olsun:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Limit her yönden aynı olduğuna göre, iki özel yönü karşılaştırabiliriz.



Şekil 9.1: Türev her yönden aynı olduğuna göre iki özel yön karşılaştırılabilir: yatay yaklaşım $f'(z_0) = u_x + i v_x$, dikey yaklaşım $f'(z_0) = v_y - i u_y$ verir. İki ifadenin reel ve sanal kısımlarının eşitliği Cauchy-Riemann denklemleridir.

Yatay yaklaşım ($\Delta z = \Delta x$): oran

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

biçimini alır ve limitte

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

Dikey yaklaşım ($\Delta z = i \Delta y$): $1/i = -i$ olduğundan

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

ve limitte

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$$

İki ifadenin reel ve sanal kısımları eşitlenirse aranan denklemler çıkar.

Teorem 9.1 (Cauchy-Riemann Denklemlerinin Gerekliliği). $f = u + iv$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında türevi varsa, u ve v 'nin birinci mertebeden kısmi türevleri o noktada vardır ve **Cauchy-Riemann denklemlerini** sağlar:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Ayrıca türev şu iki eşdeğer biçimde yazılabilir:

$$f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Örnek 9.1 (Denklemlerin Doğrulanması). $f(z) = z^2$ için $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ 'dir:

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x$$

Denklemler her noktada sağlanır ve $f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z -$ [tanımdan bulduğumuz](#) sonuçla aynıdır.

Örnek 9.2 (Denklemlerle Eleme). $f(z) = |z|^2$ için $u = x^2 + y^2$, $v = 0$ 'dir. Cauchy-Riemann denklemleri

$$2x = 0, \quad 2y = 0$$

yalnızca başlangıç noktasında sağlanır; dolayısıyla $z \neq 0$ hiçbir noktada türev **olamaz**. (Başlangıçta türevin gerçekten var olduğunu tanımdan biliyoruz: $f'(0) = 0$.)

⚠ Gereklidir, tek başına yeterli değildir

Cauchy-Riemann denklemlerinin bir noktada sağlanması, türevin o noktada var olduğunu **garanti etmez**; kısmi türevlerin o noktada sürekliliği gibi bir ek koşul gerekir. Denklemlerin asıl gücü eleyicidir: sağlanmadıkları noktada türev kesinlikle yoktur.

9.2 Yeterlilik Teoremi

Teorem 9.2 (Türevlenebilirlik İçin Yeterli Koşullar). $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$ 'in bir ε -komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

- u ve v 'nin birinci mertebeden kısmi türevleri bu komşulukta her yerde varsa,
 - bu kısmi türevler (x_0, y_0) 'da sürekliyse ve orada Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa,
- o zaman $f'(z_0)$ vardır ve $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$ 'dir.

İspat.

Kısmi türevlerin sürekliliği, artmaların lineerleştirilebilmesini sağlar: $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$ iken $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4 \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

(kısmi türevler (x_0, y_0) 'da hesaplanıyor). $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ ifadesinde Cauchy-Riemann denklemleriyle $u_y = -v_x$, $v_y = u_x$ yazılırsa

$$\Delta w = (u_x + iv_x)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y$$

Böylece

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x + iv_x + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$|\Delta x/\Delta z| \leq 1$ ve $|\Delta y/\Delta z| \leq 1$ olduğundan son iki terim sıfıra gider; limit $u_x + iv_x$ olarak vardır. ■

Örnek 9.3 (Üstel Fonksiyonun Türevi). $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$ fonksiyonu her noktada türevlenebilir ve $f'(z) = f(z)$ 'dir.

Çözüm.

$u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ için

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

Kısmi türevler her yerde sürekli ve denklemler her yerde sağlanır; teoreme göre

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

■

9.3 Kutupsal Koordinatlarda Cauchy-Riemann

$z_0 \neq 0$ civarında $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ dönüşümü yapılırsa, zincir kuralıyla

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_\theta = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta$$

(ve v için benzerleri) yazılır. Kartezyen denklemler yerine konduğunda kutupsal biçim elde edilir:

Teorem 9.3 (Kutupsal Cauchy-Riemann Denklemleri). $f = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ($r_0 > 0$) noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Kısmi türevler bu komşulukta var, (r_0, θ_0) 'da sürekli ve

$$ru_r = v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r$$

denklemlerini sağlıyorsa $f'(z_0)$ vardır ve

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r)$$

Örnek 9.4 ($1/z$ Türevi). $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) için kutupsal denklemleri doğrulayıp türevi bulunuz.

Çözüm.

$$f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r}; \text{ yani } u = \frac{\cos \theta}{r}, v = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

$$ru_r = -\frac{\cos \theta}{r} = v_\theta, \quad u_\theta = -\frac{\sin \theta}{r} = -rv_r$$

Denklemler $r > 0$ 'da sağlanır; türev

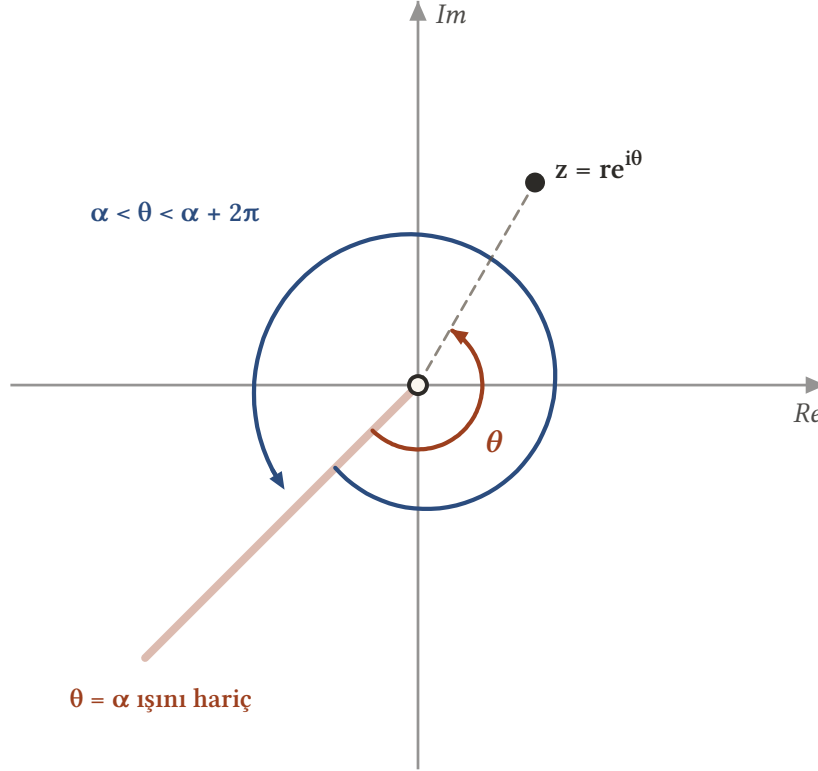
$$f'(z) = e^{-i\theta} \left(-\frac{\cos \theta}{r^2} + i \frac{\sin \theta}{r^2} \right) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2} (\cos \theta - i \sin \theta) = -\frac{e^{-i2\theta}}{r^2} = -\frac{1}{z^2}$$

■

Örnek 9.5 (Küp Kök Dalının Türevi).

$$f(z) = \sqrt[3]{r} e^{i\theta/3} \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

dalının her noktada türevlenebilir olduğunu gösterip türevini bulunuz.



Şekil 9.2: Küp kök dalı $r > 0$ ve $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ koşullarıyla tanımlıdır: her z 'nin açısı $\theta = \alpha$ ışınından başlayarak saat yönünün tersine tam bir tur içinde ölçülür. Bu ışın ve başlangıç noktası dışarıda bırakılır; kalan açık kümede dal tek değerli ve türevlenebilirdir.

Çözüm.

$$u = \sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta}{3}, v = \sqrt[3]{r} \sin \frac{\theta}{3} \text{ için}$$

$$ru_r = \frac{\sqrt[3]{r}}{3} \cos \frac{\theta}{3} = v_\theta, \quad u_\theta = -\frac{\sqrt[3]{r}}{3} \sin \frac{\theta}{3} = -rv_r$$

Türev formülüyle

$$f'(z) = e^{-i\theta} \frac{1}{3r^{2/3}} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) = \frac{e^{-i\theta} e^{i\theta/3}}{3r^{2/3}} = \frac{1}{3r^{2/3} e^{i2\theta/3}} = \frac{1}{3[f(z)]^2}$$

Reel analizdeki $\frac{d}{dx} x^{1/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$ formülünün birebir karşılığıdır.

■

9.4 Alıştırma

Alıştırma 9.1 (Cauchy-Riemann Uygulamaları).

- a) $f(z) = e^{-x} (\cos y - i \sin y)$ fonksiyonunun tüm düzlemde türevlenebilir olduğunu ve $f'(z) = -f(z)$ sağlandığını gösteriniz.
- b) $f(z) = x^2 + iy^2$ fonksiyonunun Cauchy-Riemann denklemlerini hangi noktalarda sağladığını bulunuz; bu noktalarda türevin var olduğunu ve $f'(z) = 2x$ değerini aldığını gösteriniz.
- c) $f(z) = z$ $\text{Im } z$ fonksiyonunun yalnızca $z = 0$ noktasında türevlenebildiğini gösteriniz.

Çözüm.

a) Bileşenler $u = e^{-x} \cos y$ ve $v = -e^{-x} \sin y$ 'dir. Kısmi türevleri yazalım:

$$u_x = -e^{-x} \cos y, \quad u_y = -e^{-x} \sin y$$

$$v_x = e^{-x} \sin y, \quad v_y = -e^{-x} \cos y$$

Cauchy-Riemann denklemleri her (x, y) için sağlanır:

$$u_x = v_y (= -e^{-x} \cos y), \quad u_y = -v_x (= -e^{-x} \sin y)$$

Dört kısmi türev de tüm düzlemde süreklidir; yeterlilik teoremi gereği f her noktada türevlenebilirdir. Türev formülü

$$f'(z) = u_x + iv_x = -e^{-x} \cos y + i e^{-x} \sin y = -e^{-x} (\cos y - i \sin y) = -f(z)$$

verir. (Bu fonksiyon aslında $f(z) = e^{-x} e^{-iy} = e^{-z}$ 'dir; bulunan bağıntı $\frac{d}{dz} e^{-z} = -e^{-z}$ eşitliğinden başkası değildir.)

b) Burada $u = x^2$, $v = y^2$ 'dir:

$$u_x = 2x, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 2y$$

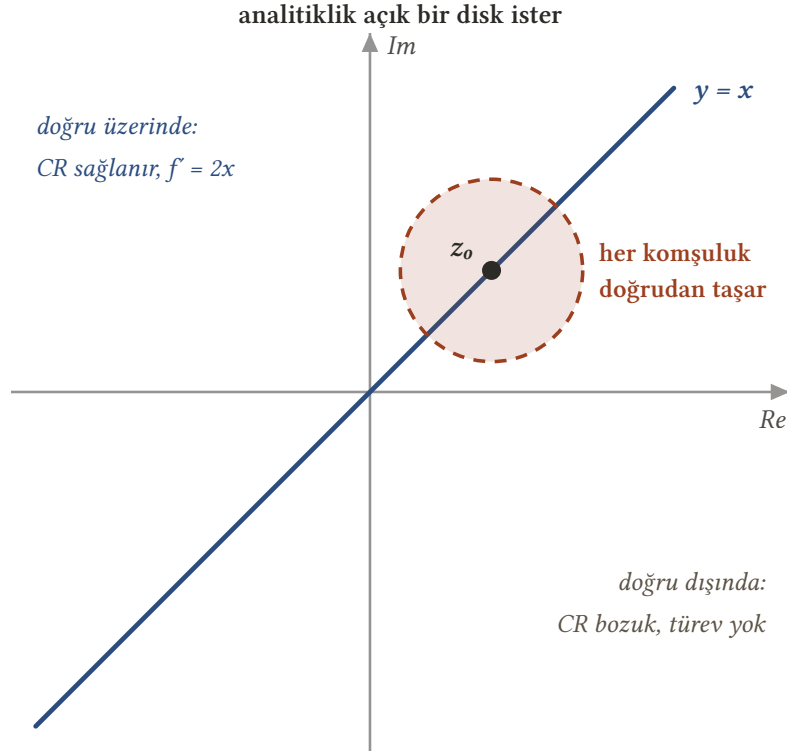
İkinci denklem $u_y = -v_x$ her yerde sağlanır ($0 = 0$). Birinci denklem ise

$$u_x = v_y \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow y = x$$

yani Cauchy-Riemann denklemleri yalnızca $y = x$ doğrusu üzerinde geçerlidir. Kısmi türevler tüm düzlemde sürekli olduğundan yeterlilik teoremi bu doğrunun her noktasında uygulanır ve türev vardır:

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i \cdot 0 = 2x \quad (y = x)$$

Doğrunun dışındaki noktalarda Cauchy-Riemann denklemleri bozulduğu için türev yoktur. Dikkat: türev bir doğru üzerinde var olsa da hiçbir noktada **analitik** değildir; analitiklik bir açık komşuluk ister, doğrunun ise iç noktası yoktur.



Şekil 9.3: $f(z) = x^2 + iy^2$ için Cauchy-Riemann denklemleri yalnız $y = x$ doğrusunda sağlanır; türev bu doğrunun her noktasında vardır. Ama analitiklik z_0 'ın bir **komşuluğunun her noktasında** türev ister ve her disk doğrudan taşar: f hiçbir noktada analitik değildir.

c) $f(z) = z \operatorname{Im} z = (x + iy)y = xy + iy^2$ olduğundan $u = xy, v = y^2$ 'dir:

$$u_x = y, \quad u_y = x, \quad v_x = 0, \quad v_y = 2y$$

Cauchy-Riemann denklemleri:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow y = 2y \Leftrightarrow y = 0, \quad u_y = -v_x \Leftrightarrow x = 0$$

İki koşul yalnızca $z = 0$ noktasında birlikte sağlanır; başka hiçbir noktada türev olamaz. Başlangıçta ise kısmi türevler sürekli olduğundan yeterlilik teoremi türevin varlığını verir:

$$f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$$

■

Türevin bir noktada değil, bir **açık kümenin her noktasında** var olması, kompleks analizin merkez kavramını doğurur: [analitiklik](#).

10. Analitik Fonksiyonlar

Bir noktada türevin varlığı zayıf bir bilgidir: $|z|^2$ yalnızca başlangıçta türevlenebilir ama bu ona hiçbir ayrıcalık kazandırmaz. Kompleks analizin gerçek kahramanı, türevi bir **açık kümenin her noktasında** var olan fonksiyonlardır.

10.1 Tanımlar

Tanım 10.1 (Analitiklik). f fonksiyonu, z_0 'ın bir komşuluğunun her noktasında türevi varsa z_0 'da **analitiktir**. Açık bir kümenin her noktasında analitikse o kümede analitik denir. Tüm düzlemde analitik fonksiyona **tam fonksiyon** denir.

Tanım 10.2 (Tekil Nokta). f , z_0 'da analitik olmasın ama z_0 'ın her komşuluğu f 'nin analitik olduğu bir nokta içersin; böyle bir z_0 'a f 'nin bir **tekil noktası** denir.

Üç temel örnek kavramları ayırıştırır:

- $f(z) = 1/z$, delinmiş düzlemde analitiktir; $z = 0$ onun tekil noktasıdır.
- $f(z) = |z|^2$ **hiçbir yerde analitik değildir**: türevi yalnızca $z = 0$ 'da vardır, hiçbir açık kümede yoktur. Tekil noktası da yoktur – çünkü analitik olduğu nokta yoktur.
- Polinomlar tam fonksiyonlardır.

Analitikliğin gerek koşulları önceki bölümlerden miras kalır: analitik fonksiyon süreklidir ve bileşenleri Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

10.2 Analitik Fonksiyonların Cebiri

Türev kuralları doğrudan şu sonuçları verir: iki fonksiyon bir D domeninde analitikse

- toplamları ve çarpımları D 'de analitiktir;
- bölümleri, paydanın sıfırlanmadığı noktalarda analitiktir;
- analitik fonksiyonların bileşkesi analitiktir (zincir kuralı).

Özel olarak bir rasyonel fonksiyon P/Q , Q 'nun sıfırları dışında her yerde analitiktir.

Örnek 10.1 (Bir Rasyonel Fonksiyonun Tekil Noktaları).

$$f(z) = \frac{z^3 + 4}{(z^2 - 3)(z^2 + 1)}$$

fonksiyonu, paydanın sıfırları olan $z = \pm\sqrt{3}$ ve $z = \pm i$ dışında tüm düzlemde analitiktir; bu dört nokta f 'nin tekil noktalarıdır.

Örnek 10.2 (Bir Tam Fonksiyon). $f(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ fonksiyonunun tam olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$u = \cosh x \cos y$, $v = \sinh x \sin y$ için

$$u_x = \sinh x \cos y = v_y, \quad u_y = -\cosh x \sin y = -v_x$$

Kısmi türevler her yerde sürekli ve Cauchy-Riemann denklemleri her yerde sağlanır; **yeterlilik teoremi** her noktada uygulanır. (Bu fonksiyon, ileride tanışacağımız $\cosh z$ 'dir.)

■

10.3 Türevi Sıfır Olan Fonksiyon Sabittir

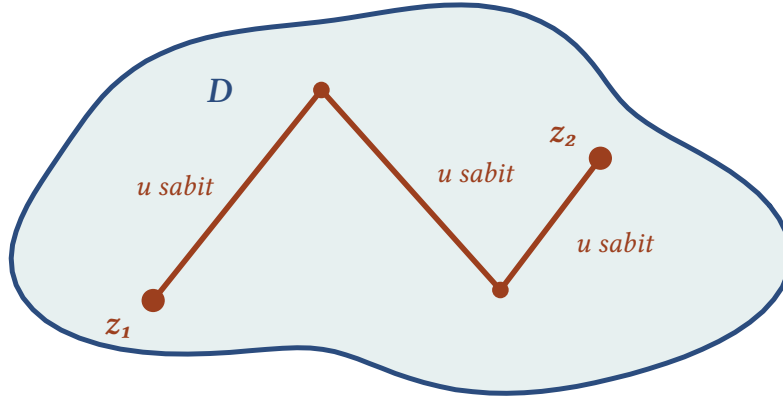
Teorem 10.1 (Sabitlik Teoremi). Bir D domeninde $f'(z) = 0$ ise f , D 'de sabittir.

İspat.

$f = u + iv$ yazalım. $f' = u_x + iv_x = 0$ olduğundan $u_x = v_x = 0$; Cauchy-Riemann denklemleriyle $u_y = v_y = 0$ da çıkar. Yani $\nabla u = (u_x, u_y)$ gradyanı D 'de özdeş sıfırdır.

D içindeki herhangi bir L doğru parçası üzerinde, parça boyunca yönlü türev $\frac{du}{ds} = \nabla u \cdot \mathbf{U} = 0$ olduğundan u , L boyunca sabittir. D bir domen olduğundan herhangi iki noktası, tamamen D 'de kalan sonlu sayıda doğru parçasıyla birleştirilebilir; parça parça sabitlik zincir boyunca taşınır ve u , D 'nin tamamında tek bir a değerini alır. Aynı akıl yürütme v için bir b sabiti verir; $f(z) = a + bi$ olur.

her doğru parçasında $du/ds = \nabla u \cdot \mathbf{U} = 0$

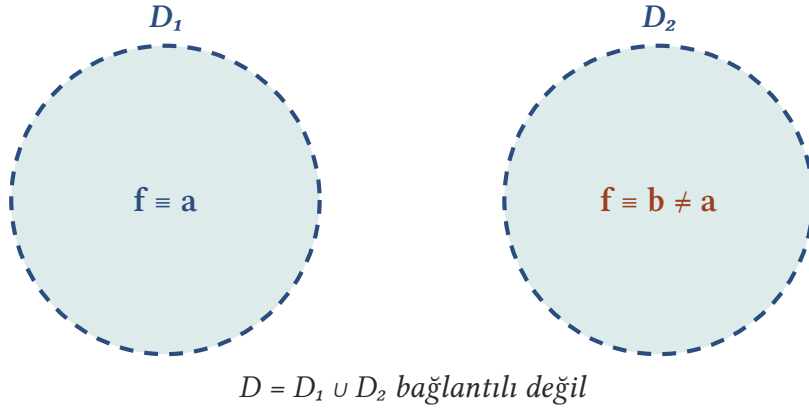


Şekil 10.1: $\nabla u = 0$ olduğundan u , D içindeki her doğru parçası boyunca sabittir. D bir domen olduğu için z_1 ile z_2 , tamamen D 'de kalan sonlu sayıda parçayla birleşir; sabitlik parçadan parçaya taşınır ve $u(z_1) = u(z_2)$ çıkar.

■

Teoremde D 'nin **bağlantılı** olması vazgeçilmezdir: iki ayrık açık diskten oluşan kümede, her diskte farklı sabit değer alan fonksiyonun türevi de sıfırdır ama fonksiyon sabit değildir.

$f' = 0$ her yerde, ama f sabit değil



Şekil 10.2: İki ayrık açık diskte ayrı ayrı sabit olan fonksiyonun türevi her noktada sıfırdır, ama $a \neq b$ ise fonksiyon sabit değildir. Sabitlik teoremindeki **domen** (bağlantılı açık küme) koşulu tam da bunu engeller: iki diski birleştiren, kümede kalan bir yol yoktur.

10.4 Katılık Örnekleri

Analitiklik o kadar kısıtlayıcıdır ki, üzerine küçük bir ek koşul koymak fonksiyonu tümüyle dondurabilir.

Örnek 10.3 (Eşleniği de Analitikse). f ve $\overline{f(z)}$ bir D domeninde birlikte analitikse f , D' 'de sabittir.

Çözüm.

$f = u + iv$ ve $\bar{f} = u - iv$ yazalım. f analitik olduğundan

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$\bar{f}$ analitik olduğundan (bileşenleri u ve $-v$):

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x$$

Taraf tarafa toplanırsa $u_x = 0$ ve $u_y = 0$; geri konursa $v_x = v_y = 0$. O hâlde $f' = u_x + iv_x = 0$ ve **Teorem 10.1** gereği f sabittir. ■

Örnek 10.4 (Modülü Sabitse). $|f(z)|$ bir D domeninde sabitse f de sabittir.

Çözüm.

$|f(z)| = c$ olsun. $c = 0$ ise $f \equiv 0$ 'dır. $c \neq 0$ ise f , D' 'de hiç sıfırlanmaz ve

$$f(z) \overline{f(z)} = c^2 \implies \overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}$$

Sağ taraf, sıfırlanmayan analitik fonksiyonun bölümü olarak D' 'de analiktir; yani $\bar{f}$ de analiktir. Önceki örneğe göre f sabittir. ■

i Neden 'katılık'?

Reel türevlenebilir fonksiyonlar esnektir: bir parçasını değiştirip kalanını koruyabilirsiniz. Analitik fonksiyonlar ise kristal gibidir — modülünü sabitlemek, eşleniğini analitik yapmak veya (ileride görüleceği gibi) küçük bir yayda değerlerini bilmek, fonksiyonun tamamını belirler. Bu katılık kompleks analizin en güçlü teoremlerinin kaynağıdır.

10.5 Alıştırma

Alıştırma 10.1 (Analitiklik Soruları).

- a) $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$ fonksiyonunun tekil noktalarını bulunuz.
- b) $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$ fonksiyonunun tekil noktalarını bulunuz.
- c) Bir D domeninde f analitik ve reel değerliyse sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) İki polinomun bölümü, payda sıfırdan farklı olduğu her noktada analiktir. Paydayı sıfırlayan noktaları bulalım:

$$z(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{veya} \quad z^2 = -1 \Leftrightarrow z = 0, z = i, z = -i$$

Bu üç noktada pay sıfır değildir ($z = 0$ için 1, $z = \pm i$ için $1 \pm 2i$), dolayısıyla sadeleşme yoktur. f , bu noktaların her birinin delinmiş komşuluğunda analitik ama kendisinde analitik olmadığından tekil noktalar

$$z = 0, \quad z = i, \quad z = -i$$

noktalarıdır.

b) Paydanın ikinci çarpanının sıfırlarını bulalım:

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Payda ayrıca $z = -2$ için sıfırdır. Payın bu noktalardaki değerleri sıfırdan farklıdır: $z = -2$ için $z^2 + 1 = 5$; $z = -1 \pm i$ için $z^2 = \mp 2i$ olduğundan $z^2 + 1 = 1 \mp 2i \neq 0$. Tekil noktalar

$$z = -2, \quad z = -1 + i, \quad z = -1 - i$$

c) $f = u + iv$ yazalım. f reel değerli olduğundan D 'nin her noktasında $v(x, y) = 0$ 'dır, dolayısıyla v 'nin tüm kısmi türevleri sıfırdır. f analitik olduğu için Cauchy-Riemann denklemleri geçerlidir:

$$u_x = v_y = 0, \quad u_y = -v_x = 0$$

Türev formülü artık

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0$$

verir; yani f' , D boyunca özdeş olarak sıfırdır. Türevi bir domende sıfır olan fonksiyon sabit olduğundan f sabittir.

■

Analitik fonksiyonların bileşenleri sıradan fonksiyonlar değildir: ikisi de Laplace denklemini sağlar. Bu bağlantı bizi [harmonik fonksiyonlara](#) götürüyor.

11. Harmonik Fonksiyonlar

Analitik fonksiyonlar, uygulamalı matematiğin en önemli denklemlerinden biriyle doğuştan akrabadır: bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları **Laplace denklemini** sağlar. Bu köprü, ısı iletimi, elektrostatik ve akışkanlar mekaniği problemlerinin kompleks analizle çözülmesinin temelidir.

11.1 Harmoniklik

Tanım 11.1 (Harmonik Fonksiyon). İki reel değişkenli, reel değerli bir $H(x, y)$ fonksiyonu; bir domende birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahipse ve **Laplace denklemini**

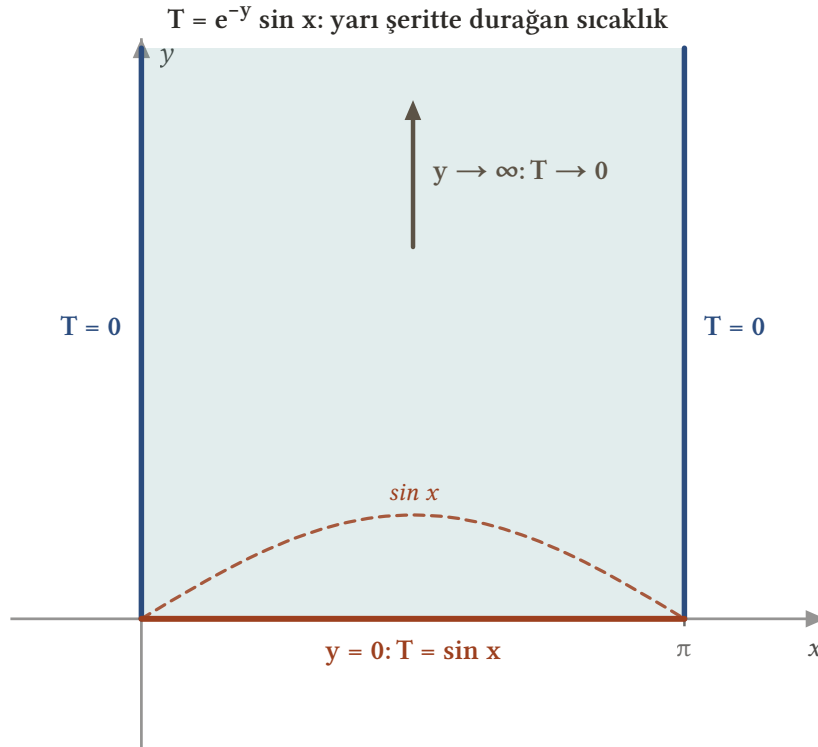
$$H_{xx} + H_{yy} = 0$$

sağlıyorsa o domende **harmoniktir**.

Örnek 11.1 (Bir Harmonik Fonksiyon). $T(x, y) = e^{-y} \sin x$ fonksiyonu tüm düzlemde harmoniktir:

$$T_{xx} = -e^{-y} \sin x, \quad T_{yy} = e^{-y} \sin x, \quad T_{xx} + T_{yy} = 0$$

Bu fonksiyon, $0 < x < \pi$, $y > 0$ yarı şeridinde durağan sıcaklık dağılımı olarak yorumlanabilir: dikey kenarlarda $T = 0$, taban $y = 0$ üzerinde $T = \sin x$ değerlerini alır ve $y \rightarrow \infty$ iken sifıra söner.



Şekil 11.1: Harmonik $T = e^{-y} \sin x$, yarı şeritte durağan sıcaklık dağılımıdır: dikey kenarlarda $T = 0$, taban üzerinde $T = \sin x$ (kesikli profil) ve $y \rightarrow \infty$ iken $T \rightarrow 0$. Bu sınır değerlerini sağlayan bir Laplace çözümüdür.

11.2 Analitik Fonksiyonların Bileşenleri Harmoniktir

Teorem 11.1 (Bileşenlerin Harmonikliği). $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bir D domeninde analitikse, u ve v , D 'de harmoniktir.

İspat.

İleride kanıtlanacak temel bir gerçeği ödünç alıyoruz: analitik bir fonksiyonun her mertebeden türevi vardır; özellikle u ve v 'nin ikinci mertebe kısmi türevleri var ve süreklidir.

D 'de Cauchy-Riemann denklemleri geçerlidir:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Birinciye x 'e, ikinciyi y 'ye göre türetelim:

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

Sürekli karışık türevler sıra değiştirdiğinden ($v_{yx} = v_{xy}$) taraf tarafa toplanınca $u_{xx} + u_{yy} = 0$ çıkar. Benzer biçimde birinci denklem y 'ye, ikincisi x 'e göre türetilirse $v_{xx} + v_{yy} = 0$ elde edilir.

■

Örnek 11.2 (Analitiklikten Harmoniklik Üretmek). $f(z) = e^{-y} \sin x - i e^{-y} \cos x$ fonksiyonu tamdır: bileşenleri için Cauchy-Riemann denklemleri her yerde sağlanır ve kısmi türevler süreklidir (doğrulaması bir satırdır; bu fonksiyon $-ie^{iz}$ 'dir). Teoreme göre **Örnek 11.1**'teki $T = e^{-y} \sin x$ fonksiyonunun harmonikliği, hesapsız da görülebilirdi: T , bir tam fonksiyonun reel kısmıdır.

Örnek 11.3 (Delinmiş Düzlemde Harmoniklik).

$$\frac{i}{z^2} = \frac{i\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{2xy + i(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

fonksiyonu $z \neq 0$ 'da analitik olduğundan,

$$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{ve} \quad \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

fonksiyonları başlangıç noktası çıkarılmış düzlemde harmoniktir — doğrudan doğrulaması epey zahmetli olacak bir gerçek.

11.3 Harmonik Eşlenik

Tanım 11.2 (Harmonik Eşlenik). u ve v , bir D domeninde harmonik olsun. Birinci mertebe kısmi türevleri D 'de Cauchy-Riemann denklemlerini

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

sağlıyorsa, v 'ye u 'nun bir **harmonik eşleniği** denir.

Teorem 11.2 (Analitiklik = Harmonik Eşleniklik). $f = u + iv$ fonksiyonu bir D domeninde analitiktir ancak ve ancak v , u 'nun harmonik eşleniği ise.

Bir yön **Teorem 11.1** ile Cauchy-Riemann gerekliliğinden; diğer yön, harmonikliğin içerdiği süreklilikle yeterlilik teoreminden çıkar.

⚠ Sıra önemlidir

İlişki simetrik değildir: v 'nin u 'nun eşleniği olması, u 'nun v 'nin eşleniği olması demek değildir. Örneğin $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ çifti için $u + iv = z^2$ analitiktir; ama ters sıralı $v + iu = 2xy + i(x^2 - y^2)$ fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir (Cauchy-Riemann denklemleri yalnız başlangıç noktasında sağlanır). Doğru simetri şudur: v 'nin bir harmonik eşleniği $-u$ 'dur; çünkü $v - iu = -i(u + iv)$ çarpımı analitiktir.

11.4 Harmonik Eşlenik Bulma Yöntemi

Verilen harmonik u 'dan eşleniği, Cauchy-Riemann denklemlerinin adım adım integrallemesiyle bulunur. Yöntem bir örnek üzerinde en iyi görülür.

Örnek 11.4 (Harmonik Eşleniğin İnşası). $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ fonksiyonunun harmonikliğini doğrulayıp bir harmonik eşleniğini ve karşılık gelen analitik fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.

Harmoniklik: $u_{xx} = -6y$, $u_{yy} = 6y$; toplam sıfırdır.

Birinci denklem: $v_y = u_x = -6xy$ olmalı. y 'ye göre integralleyelim; "sabit" x 'e bağlı olabilir:

$$v(x, y) = -3xy^2 + \varphi(x)$$

İkinci denklem: $v_x = -u_y$ olmalı:

$$-3y^2 + \varphi'(x) = -(3y^2 - 3x^2) \Rightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3 + C$$

y 'li terimlerin tamamen sadeleşmesi, u 'nun harmonikliğinin güvencesidir. Böylece

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$$

ve karşılık gelen analitik fonksiyon

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2 + C) = i(z^3 + C)$$

Son eşitlik $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ açılımıyla doğrulanır.

■

Harmonik eşlenik, sabit ekleme dışında tektir: iki eşlenik v_1, v_2 için $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$, reel kısmı özdeş sıfır olan analitik bir fonksiyondur. Cauchy-Riemann denklemleri bu durumda $(v_1 - v_2)_x = (v_1 - v_2)_y = 0$ verir; türevi sıfır olan bu fonksiyon [sabitlik teoremi](#) gereği sabittir.

11.5 Alıştırma

Alıştırma 11.1 (Harmonik Eşlenik Alıştırmaları). Aşağıdaki fonksiyonların tüm düzlemde harmonik olduklarını gösterip birer harmonik eşleniklerini bulunuz.

a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$

b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

c) $u(x, y) = \sinh x \sin y$

Çözüm.

a) $u = 2x - 2xy$ için kısmi türevler:

$$u_x = 2 - 2y, \quad u_{xx} = 0, \quad u_y = -2x, \quad u_{yy} = 0$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğundan u tüm düzlemde harmoniktir. Eşleniği Cauchy-Riemann denklemlerinden kuralım. Önce $v_y = u_x$:

$$v_y = 2 - 2y \implies v = 2y - y^2 + \varphi(x)$$

Şimdi $v_x = -u_y$ koşulunu uygulayalım:

$$v_x = \varphi'(x) = 2x \implies \varphi(x) = x^2 + C$$

Böylece

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + C$$

b) $u = 2x - x^3 + 3xy^2$ için

$$u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2, \quad u_{xx} = -6x, \quad u_y = 6xy, \quad u_{yy} = 6x$$

Toplam sıfırdır, u harmoniktir. Eşlenik için

$$v_y = u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 \implies v = 2y - 3x^2y + y^3 + \varphi(x)$$

$$v_x = -6xy + \varphi'(x) \stackrel{!}{=} -u_y = -6xy \implies \varphi'(x) = 0$$

Sonuç:

$$v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$$

c) $u = \sinh x \sin y$ için

$$u_x = \cosh x \sin y, \quad u_{xx} = \sinh x \sin y, \quad u_y = \sinh x \cos y, \quad u_{yy} = -\sinh x \sin y$$

İki ikinci türev birbirini götürür; u harmoniktir. Eşlenik:

$$v_y = u_x = \cosh x \sin y \implies v = -\cosh x \cos y + \varphi(x)$$

$$v_x = -\sinh x \cos y + \varphi'(x) \stackrel{!}{=} -u_y = -\sinh x \cos y \implies \varphi'(x) = 0$$

Sonuç:

$$v(x, y) = -\cosh x \cos y + C$$

(Elde edilen $f = u + iv$ fonksiyonları sırasıyla $2z + iz^2 + iC$, $2z - z^3 + iC$ ve $-i \cosh z + iC$ biçiminde yazılabilir; C reel sabittir.)

■

Analitik fonksiyonların katılığı yalnızca bileşenlerinde değil, değerlerinin dağılımında da kendini gösterir: bir analitik fonksiyon, küçük bir bölgedeki değerleriyle [tümüyle belirlenir](#).

12. Tek Türlü Belirlenme ve Yansıma Prensibi

Analitik fonksiyonların katılığı bu bölümde en çarpıcı biçimine ulaşır: bir domenin küçük bir köşesinde — hatta tek bir doğru parçası üzerinde — fonksiyonun değerlerini bilmek, onu domenin **tamamında** belirler. Bu ilke hem “analitik uzanım” kavramını hem de simetri özelliklerini yöneten yansıma prensibini doğurur.

12.1 Özdeş Sıfır Olma İlkesi

Teorem 12.1 (Özdeş Sıfır Olma). f , bir D domeninde analitik olsun. f , D 'nin bir alt domeninde veya D içinde kalan bir doğru parçası üzerinde özdeş olarak sıfırsa, D 'nin **tamamında** $f(z) = 0$ 'dır.

İspat.

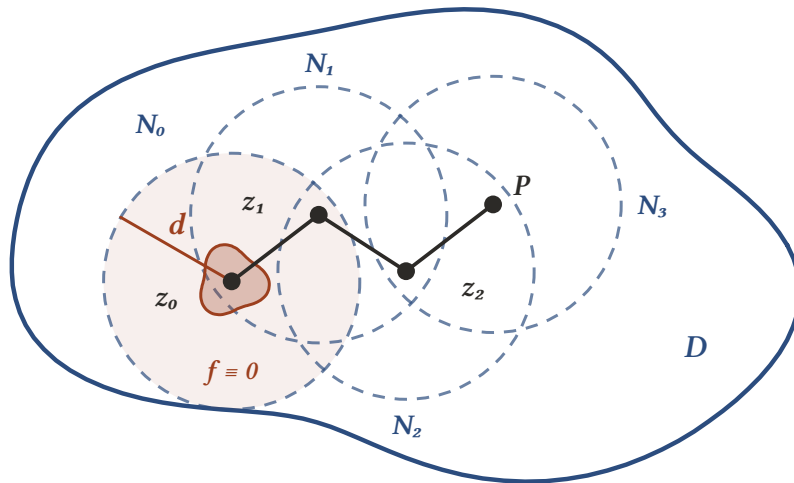
Kanıtın anahtarı, seriler kuramından ödünç alınacak yerel bir gerçektir: analitik bir fonksiyon, sıfırlandığı bir alt domeni (veya doğru parçasını) içeren her açık diskte özdeş sıfırdır. Bunu kabul ederek küresel sonucu kuralım.

z_0 , f 'nin sıfırlandığı alt bölgede bir nokta; P , D 'nin herhangi bir noktası olsun. D bağlantılı olduğundan z_0 'ı P 'ye bağlayan ve tamamen D 'de kalan bir L çokgensel yolu vardır. d , L ile D 'nin sınırı arasındaki en küçük uzaklık olsun (D tüm düzlemse d herhangi bir pozitif sayı alınabilir). L üzerinde ardışık uzaklıkları d 'den küçük sonlu sayıda

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = P$$

noktası seçelim ve her z_k merkezli d yarıçaplı N_k diskini düşünelim; her disk D içindedir ve $z_{k+1} \in N_k$ 'dir.

$z_{k+1} \in N_k$: sıfır diskten diske geçer



Şekil 12.1: f , z_0 etrafındaki küçük alt domende sıfırdır. Çokgensel yol üzerinde ardışık uzaklıkları d 'den küçük noktalar seçilir; her N_k disk D 'nin içinde kalır ve bir sonraki merkezi içerir (d : yolun D 'nin sınırına uzaklığı). Yerel gerçekte N_0 'da $f = 0$ verir, kesişim üzerinden N_1 'e, oradan N_2 'ye geçer ve P 'ye ulaşır.

Yerel gerçekte N_0 'da $f \equiv 0$ verir. N_1 'in merkezi z_1 , N_0 'ın içindedir; f , $N_0 \cap N_1$ kesişiminde (bir alt domende) sıfır olduğundan yerel gerçekte N_1 'de de $f \equiv 0$ verir. Zincir boyunca ilerleyerek N_n 'de, özellikle P 'de $f(P) = 0$ bulunur.

■

Teorem 12.2 (Tek Türlü Belirlenme). f ve g , bir D domeninde analitik olsun. D 'nin bir alt domeninde veya D 'de kalan bir doğru parçası üzerinde $f(z) = g(z)$ ise, D 'nin tamamında $f(z) = g(z)$ 'dir.

İspat.

$h = f - g$ fonksiyonu D 'de analiktir ve ilgili alt kümede özdeş sıfırdır; [Teorem 12.1](#) gereği D 'nin tamamında sıfırdır.

■

12.2 Analitik Uzanım

Tek türlü belirlenmenin en verimli kullanımı, fonksiyonların tanım bölgesini genişletmektir. D_1 ve D_2 kesişimi boş olmayan iki domen olsun; f_1 , D_1 'de analitik olsun. D_2 'de analitik bir f_2 fonksiyonu kesişimde f_1 ile çakışıyorsa, f_2 'ye f_1 'in D_2 'ye **analitik uzanımı** denir.

Uzanım — var olduğunda — **tektir**: kesişimde f_1 ile çakışan iki uzanım, D_2 'de birbirine eşit olmak zorundadır ([Teorem 12.2](#)). O zaman

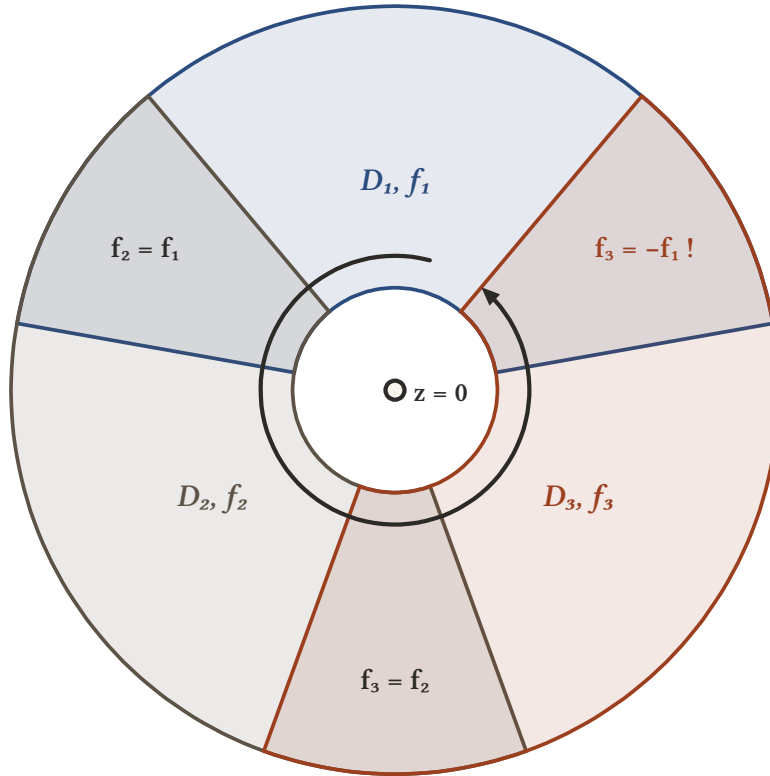
$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

fonksiyonu $D_1 \cup D_2$ birleşiminde analiktir ve iki parçanın ortak genişlemesidir.

⚠ Zincirleme uzanımda dönüş garantisi yoktur

Üç domen zincirinde f_2, f_1 'in D_2 'ye; f_3, f_2 'nin D_3 'e uzanımı olsun. D_3, D_1 ile de kesişiyorsa f_3 'ün bu kesişimde f_1 ile çakışması **gerekmez**. Çok değerli köklerin ve logaritmanın dalları bu olgunun kaynağıdır: başlangıç noktası etrafında bir tam tur uzanan $z^{1/2}$ dalı, başlangıç değerinin **negatifiyle** geri döner.

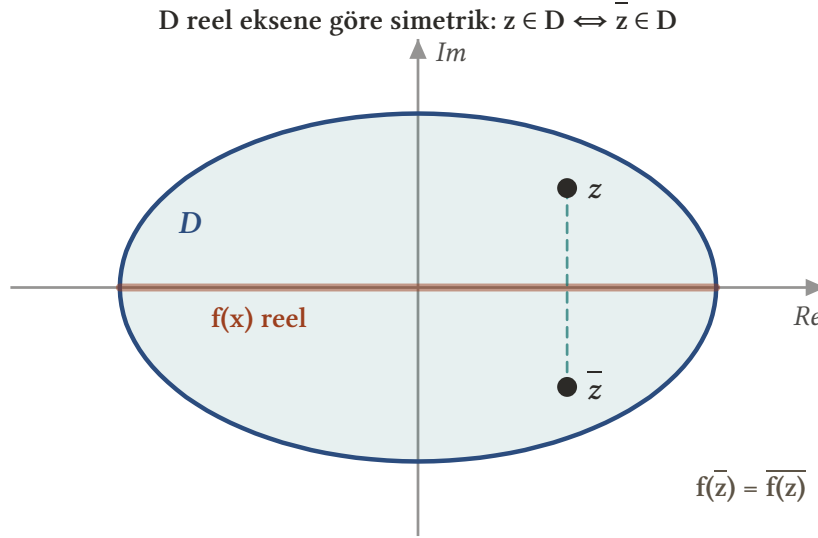
$z^{1/2}$ dalı başlangıç etrafında bir tur uzatılınca



Şekil 12.2: f_1, D_1 'de $z^{1/2}$ 'nin bir dalı olsun. D_2 'ye, oradan D_3 'e uzatılıp başlangıç noktasının etrafında tam tur dönülünce $D_3 \cap D_1$ kesişiminde $f_3 = -f_1$ bulunur: her adımda komşu uzanımlar çakışır ama zincirin sonu başıyla çakışmak zorunda değildir.

12.3 Yansıma Prensibi

Bazı tam fonksiyonlar $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ simetrisine sahiptir — yani eşlenik almak, değişkenin eşleniğini almakla yer değiştirebilir. Örneğin $z + 1$ ve z^2 böyledir; ama $z + i$ ve iz^2 böyle değildir. Ayrımı belirleyen şey, fonksiyonun reel eksenindeki davranışdır.



Şekil 12.3: Yansıma prensibinin sahnesi: D reel eksene göre simetrik bir domendir ve eksenin bir parçasını içerir. f bu parçada reel değer alıyorsa, z 'nin yansıması $\bar{z}$ 'de fonksiyonun değeri $f(z)$ 'nin yansımasıdır: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

Teorem 12.3 (Yansıma Prensibi). D , reel eksene göre simetrik ve reel eksenin bir parçasını içeren bir domen; f , D 'de analitik olsun. O zaman

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z) \quad (\text{tüm } z \in D)$$

özdeşliği geçerlidir **ancak ve ancak** f , eksen parçası üzerinde reel değerler alıyorsa.

İspat.

(Yeterlilik) $f(x)$ eksen parçasında reel olsun. $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ tanımlayalım ve F 'nin D 'de analitik olduğunu görelim. $f = u + iv$ yazılırsa

$$F(z) = \overline{u(x, -y) + iv(x, -y)} = u(x, -y) - i v(x, -y)$$

$U(x, y) = u(x, -y)$ ve $V(x, y) = -v(x, -y)$ bileşenleri, $t = -y$ yazılışıyla f 'nin Cauchy-Riemann denklemlerinden kendi denklemlerini devralır. Zincir kuralıyla

$$U_x(x, y) = u_x(x, t), \quad U_y(x, y) = -u_t(x, t), \quad V_x(x, y) = -v_x(x, t), \quad V_y(x, y) = v_t(x, t)$$

f 'nin denklemleri $u_x = v_t$ ve $u_t = -v_x$ olduğundan $U_x = V_y$ ve $U_y = -V_x$ çıkar; kısmi türevler sürekli olduğundan F , D 'de analitiktir (D 'nin simetrisi burada kullanılır: $z \in D$ iken $(x, -y) \in D$ olmalıdır). Eksen parçasında $z = x$ için $F(x) = \overline{f(x)} = f(x)$; çünkü $f(x)$ reeldir. F ile f , D 'de kalan bir doğru parçasında çakıştığından Teorem 12.2 gereği D 'nin tamamında eşittirler; istenen özdeşlik budur.

(Gereklilik) Özdeşlik geçerliyse, eksen parçası üzerinde $z = x$ için $f(x) = F(x)$; yani $f(x)$ kendi eşleniğine eşittir ve reeldir.

■

Örnek 12.1 (Simetrinin Denetlenmesi). Yansıma prensibi başlangıçtaki gözlemleri açıklar:

- $f(z) = z + 1$ ve $f(z) = z^2$, reel eksen de reel değer alır; dolayısıyla $\overline{z+1} = \bar{z} + 1$ ve $\overline{z^2} = \bar{z}^2$ özdeşlikleri geçerlidir.
- $f(z) = z + i$ için $f(x) = x + i$ reel değildir; simetrinin bozulduğunu tek nokta gösterir: $z = 0$ 'da $f(0) = i$, oysa $f(0) = i$.
- $f(z) = iz^2$ için $f(x) = ix^2$ reel değildir; $z = 1$ 'de $\overline{f(1)} = \bar{i} = -i \neq i = f(1)$.

12.4 Alıştırma

Alıştırma 12.1 (Belirlenme ve Yansıma).

- Tam bir f fonksiyonu reel eksenin bir parçası üzerinde $\sin x$ değerlerini alıyorsa, tüm düzlemde f 'nin tek türlü belirlendiğini açıklayınız.
- $f(z) = \sinh z$ 'nin, reel ekseninde reel değer aldığını kullanarak $\overline{\sinh z} = \sinh \bar{z}$ özdeşliğini gerektiriniz.
- $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ özdeşliğini sağlayan bir tam fonksiyonun Maclaurin katsayılarının reel olması gerektiğini, türevlerin reel eksenindeki değerlerini düşünerek tartışınız.

Çözüm.

a) $g(z) = \sin z$ fonksiyonu tamdır ve reel ekseninde $\sin x$ değerlerini alır. Varsayıma göre f de tamdır ve reel eksenin bir parçası üzerinde aynı değerleri alır; yani $f - g$ farkı, o parçanın her noktasında sıfırdır. f ve g , tüm düzlem domeninde analitiktir ve bu domende kalan bir doğru parçası üzerinde çakışır. Teorem 12.2 gereği domenin **tamamında** çakışır, dolayısıyla

$$f(z) = \sin z \quad (\text{her } z \text{ için})$$

Böylece f , verilen parça üzerindeki değerleriyle tek türlü belirlenmiştir: aynı koşulu sağlayan başka bir tam fonksiyon yoktur.

b) $\sinh z$ tüm düzlemde analitiktir ve düzlem reel eksene göre simetriktir. Reel ekseninde $\sinh x$ değerleri reeldir. Yansıma ilkesinin koşulları sağlandığından

$$\overline{\sinh \bar{z}} = \sinh z$$

Her iki tarafın eşleniği alınır (eşleniğin eşleniği kendisidir)

$$\sinh \bar{z} = \overline{\sinh z}$$

elde edilir. Doğrudan hesap da aynı sonucu verir: $\sinh(x - iy) = \sinh x \cos y - i \cosh x \sin y$ ifadesi, $\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$ sayısının eşleniğidir.

c) Önce f 'nin reel ekseninde reel değerli olduğunu görelim: $z = x$ reel alındığında $\bar{z} = x$ olduğundan özdeşlik $\overline{f(x)} = f(x)$ hâline gelir, yani $f(x)$ kendi eşleniğine eşittir ve reeldir.

Şimdi türevlere geçelim. f tam olduğundan $f'(x)$ türevi vardır ve limit, $\Delta z \rightarrow 0$ giden her yol boyunca aynıdır; özellikle **reel** h değerleriyle hesaplanabilir:

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sağdaki her fark bölümü reel sayıların bölümüdür, dolayısıyla reeldir; reel sayılardan oluşan bir dizinin limiti de reeldir. Demek ki f' de reel ekseninde reel değerlidir. f' yine tam olduğundan aynı akıl yürütme tekrarlanır ve tümevarımla her n için $f^{(n)}$ reel ekseninde reel değer alır. Özel olarak

$$f^{(n)}(0) \in \mathbb{R} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Maclaurin katsayıları $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ olduğundan hepsi reeldir.

■

Analitik fonksiyonlar kuramının iskeleti tamam. Sıradaki kısımda bu iskelete somut gövdeler giydireyoruz: **üstel fonksiyon**, logaritma, kuvvetler ve trigonometrik aile.

13. Üstel Fonksiyon

Elemanter fonksiyonlar ailesinin atası üstel fonksiyondur: logaritma onun tersi, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar onun lineer kombinasyonlarıdır. Reel e^x 'in düzleme genişlemesi tek doğal biçimde yapılır – ve bu genişleme, reel ekseninde görünmeyen bir özellik kazandırır: **periyodiklik**.

13.1 Tanım

Tanım 13.1 (Üstel Fonksiyon). $z = x + iy$ için üstel fonksiyon, Euler formülü yardımıyla tanımlanır:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$\exp z$ gösterimi de kullanılır.

Tanım, $y = 0$ için reel üstel fonksiyona iner. **Daha önce gösterdik:** $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ bileşenleri her yerde Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar ve

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

olur; e^z bir **tam fonksiyondur**.

i Kök gösterimiyle küçük bir uzlaşma

Kökler bölümünde $z^{1/n}$ yazımı, z 'nin n -inci kökleri kümesini anlatıyordu; bu uzlaşma $e^{1/n}$ 'e uygulanmaz. Kompleks analizde e^z **daima** tanımdaki tek değerdir; $z = 1/n$ konduğunda pozitif $\sqrt[n]{e}$ sayısı anlaşılır, kök kümesi kastedilmez.

13.2 Toplama Özelliği

Teorem 13.1 (Üstel Fonksiyonun Toplama Özelliği). Her z_1, z_2 için

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

İspat.

$z_k = x_k + iy_k$ yazalım. Reel üstel fonksiyonun çarpım kuralı ve **üstel formda çarpma** ile

$$e^{z_1} e^{z_2} = (e^{x_1} e^{iy_1}) (e^{x_2} e^{iy_2}) = e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}$$

■

Toplama özelliğinden bölme kuralı ve ters çıkar:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

13.3 Modül, Argüman ve Sıfırlanmama

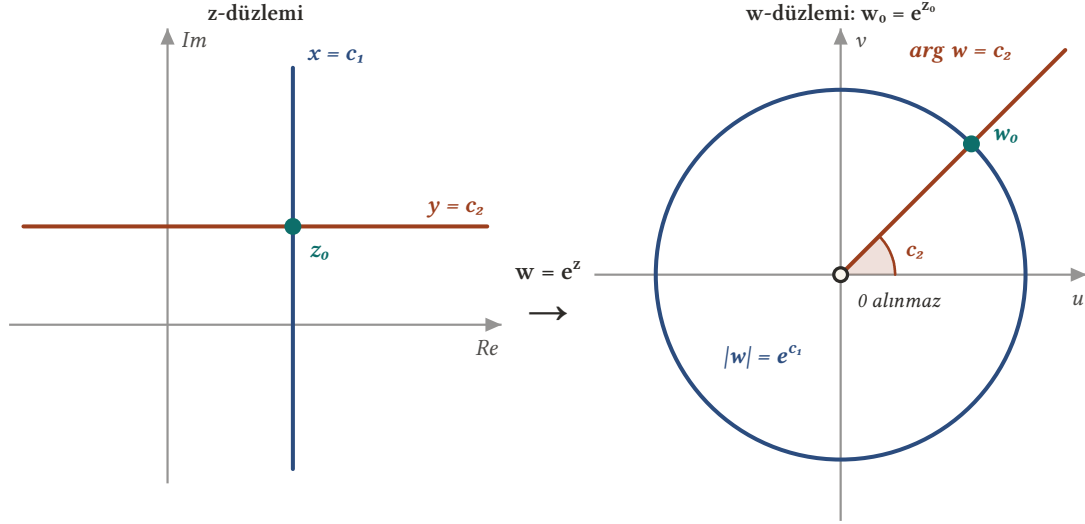
Tanımın kendisi e^z 'nin kutupsal ayrışmasıdır: modül ve argüman doğrudan okunur:

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$e^x > 0$ olduğundan önemli bir sonuç elde ederiz:

$$e^z \neq 0 \quad (\text{her } z \text{ için})$$

Üstel fonksiyon 0 değerini asla almaz; birazdan göreceğimiz gibi başka **her** kompleks değeri alır.



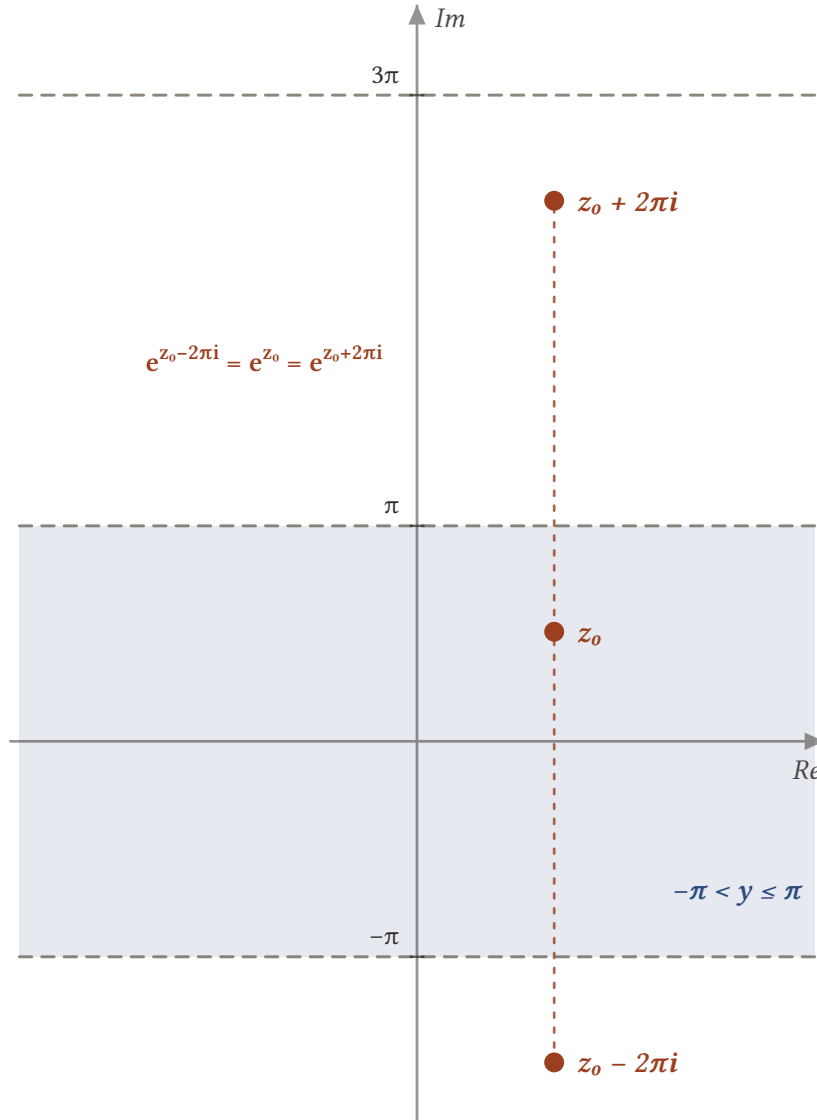
Şekil 13.1: $|e^z| = e^x$ ve $arg e^z = y$: reel kısım yarıçapı, sanal kısım açığı belirler. Dikey doğru $x = c_1$ çember $|w| = e^{c_1}$ üzerine, yatay doğru $y = c_2$ $arg w = c_2$ ışını üzerine gider; kesişimleri $z_0 \mapsto w_0$ olur. Her pozitif yarıçap bir e^x değeriyle elde edilir; yalnız 0 hiçbir çember üzerinde değildir.

13.4 Periyodiklik

$e^{i2\pi} = 1$ olduğundan

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{i2\pi} = e^z$$

Üstel fonksiyon, **saf sanal periyot** $2\pi i$ ile periyodiktir. Reel üstel fonksiyonun birebirliği düzlemde kaybolur: düzlem, her biri aynı değerleri üreten 2π yüksekliğinde yatay şeritlere dilimlenir.



Şekil 13.2: $e^{z+2\pi i} = e^z$: z_0 noktasını dikey yönde 2π kaydırmak değeri değiştirmez. Düzlem, 2π yüksekliğinde yatay şeritlere bölünür; her şerit aynı değer kümesini üretir. Taralı şerit $-\pi < y \leq \pi$, logaritmanın esas değerinin ($\text{Log } z$) yaşadığı bölgedir.

⚠ Reel sezgiyle çelişen değerler

e^x daima pozitifken e^z negatif (hatta istenen her sıfırdan farklı değerde) olabilir:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{\ln 2 + i\pi} = -2$$

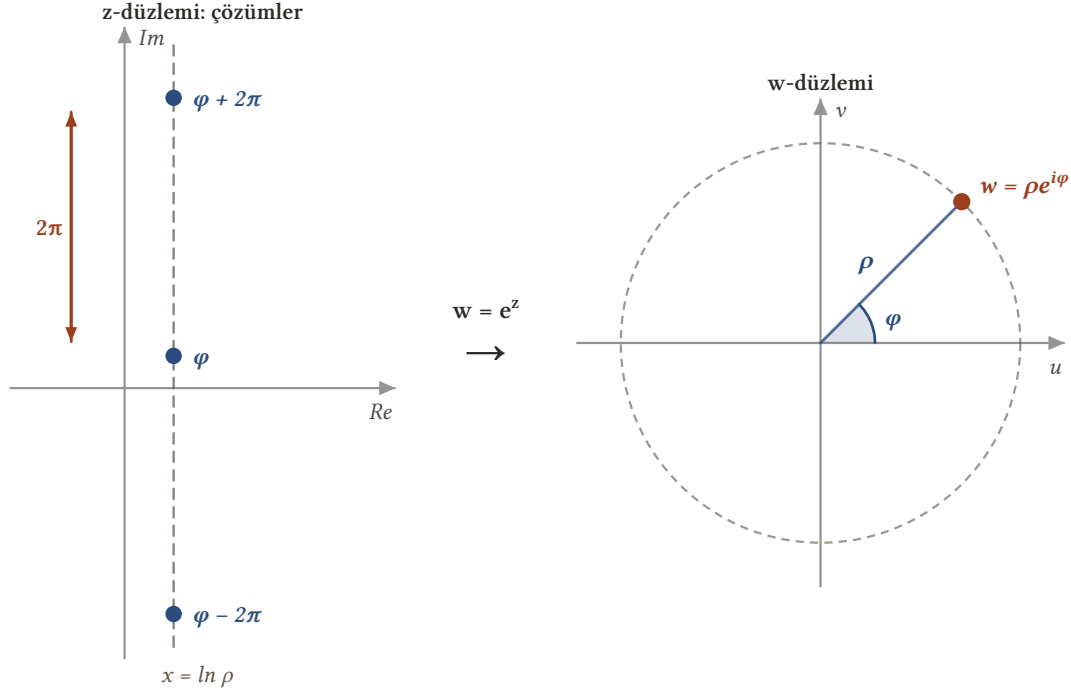
“Üstel fonksiyon pozitifdir” alışkanlığı yalnızca reel ekseninde geçerlidir.

13.5 $e^z = w$ Denkleminin Çözümü

Üstel fonksiyonun hangi değerleri aldığını görmek için $w \neq 0$ verilip $e^z = w$ çözülür. $w = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho > 0$, $\varphi = \text{Arg } w$) yazılırsa, $e^x e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$ eşitliğinden

$$x = \ln \rho, \quad y = \varphi + 2n\pi$$

Yani sonsuz çoklukta çözüm vardır — dikey bir doğru üzerinde 2π aralıklarla dizilirler. Bu hesap, bir sonraki bölümdeki [logaritmanın](#) doğum belgesidir.



Şekil 13.3: $e^z = w$ denkleminin çözümü: modül eşitliği $x = \ln \rho$ dikey doğrusunu, argüman eşitliği $y = \varphi + 2n\pi$ basamaklarını verir. Tek bir w değeri, aynı dikey doğru üzerinde 2π aralıklarla dizilmiş sonsuz bir çözüm merdiveninden gelir; bu merdiven bir sonraki bölümde $\log w$ olacaktır.

Örnek 13.1 (Üstel Denklemin Çözümü). $e^z = 1 + i$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm.

$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ olduğundan

$$x = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2, \quad y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(2n + \frac{1}{4} \right) \pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Sağlama ($n = 0$): $e^{\frac{1}{2} \ln 2} e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$.

■

13.6 Alıştırma

Alıştırma 13.1 (Üstel Fonksiyon Alıştırmaları).

- $|e^{2z}|$ modülünü x cinsinden ifade ediniz ve $|e^{-2z}| < 1$ eşitsizliğinin hangi yarı düzlemde geçerli olduğunu belirleyiniz.
- $e^z = -2$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.
- $e^{\bar{z}}$ fonksiyonunun hiçbir yerde analitik olmadığını Cauchy-Riemann denklemleriyle gösteriniz.

Çözüm.

a) $2z = 2x + i2y$ olduğundan

$$|e^{2z}| = |e^{2x} e^{i2y}| = e^{2x} |e^{i2y}| = e^{2x}$$

çünkü $|e^{i\theta}| = 1$ 'dir. Aynı hesap $-2z$ için $|e^{-2z}| = e^{-2x}$ verir. Reel üstel fonksiyon artan olduğundan

$$e^{-2x} < 1 = e^0 \Leftrightarrow -2x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Eşitsizlik tam olarak $\operatorname{Re} z > 0$ sağ yarı düzleminde geçerlidir.

b) İki kompleks sayının eşitliğini modül ve argüman olarak ayrı ayrı okuyalım. $e^z = e^x e^{iy}$ ve $-2 = 2e^{i\pi}$ olduğundan

$$e^x = 2 \quad \text{ve} \quad e^{iy} = e^{i\pi}$$

Birincisi $x = \ln 2$ verir. İkincisi, argümanların 2π 'nin katı kadar farklı olabileceğini söyler:

$$y = \pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Çözümler:

$$z = \ln 2 + (2n + 1)\pi i$$

Beklendiği gibi sonsuz çoktur ve ardışık kökler $2\pi i$ aralıklıdır.

c) $e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x \cos y - i e^x \sin y$ olduğundan

$$u = e^x \cos y, \quad v = -e^x \sin y$$

Kısmi türevler:

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = -e^x \sin y, \quad v_y = -e^x \cos y$$

Birinci Cauchy-Riemann denklemi:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow e^x \cos y = -e^x \cos y \Leftrightarrow 2e^x \cos y = 0 \Leftrightarrow \cos y = 0$$

İkinci denklem:

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow -e^x \sin y = e^x \sin y \Leftrightarrow \sin y = 0$$

e^x hiçbir zaman sıfır olmadığından iki koşul da y üzerinedir; ama $\cos y = 0$ ile $\sin y = 0$ aynı anda sağlanamaz ($\sin^2 y + \cos^2 y = 1$). Demek ki Cauchy-Riemann denklemleri **hiçbir** noktada sağlanmaz; türev hiçbir yerde var olmaz, dolayısıyla $e^{\bar{z}}$ hiçbir noktada analitik değildir.

■

Üstel fonksiyon her sıfırdan farklı değeri sonsuz kez alıyor; öyleyse tersi tek değerli olamaz. Bu çok değerliliği yönetme sanatı, kompleks analizin en incelikli konularından biridir: [logaritmik fonksiyon](#).

14. Logaritmik Fonksiyon ve Dalları

$e^z = w$ denkleminin sonsuz çoklukta çözümü olduğunu gördük; öyleyse “logaritma” tek bir sayı olamaz. Kompleks logaritma **çok değerli** doğar: her sıfırdan farklı sayıya, sanal kısımları 2π aralıklarla dizilmiş sonsuz bir değer merdiveni eşler. Bu bölümün konusu, bu merdivenle çalışmanın kurallarıdır.

14.1 Tanım

Tanım 14.1 (Logaritmik Fonksiyon). $z = re^{i\Theta} \neq 0$ ($\Theta = \text{Arg } z$) için **logaritmik fonksiyon**, çok değerli olarak

$$\log z = \ln r + i (\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

tanımlanır; kısaca $\log z = \ln |z| + i \arg z$. Buradaki $\ln$, pozitif reel sayıların bilinen logaritmasıdır.

Tanım tam olarak $e^w = z$ denkleminin çözüm kümesidir; dolayısıyla

$$e^{\log z} = z \quad (z \neq 0)$$

her değer seçiminde geçerlidir. Sıra değiştirilirse simetri **bozulur**:

$$\log(e^z) = z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

çünkü e^z 'nin logaritma merdivenindeki tüm basamakları geri gelir.

Örnek 14.1 (Bir Logaritma Kümesi). $\log(-1 - \sqrt{3}i)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$r = |-1 - \sqrt{3}i| = 2$ ve $\text{Arg}(-1 - \sqrt{3}i) = -\frac{2\pi}{3}$; dolayısıyla

$$\log(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) = \ln 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

■

14.2 Esas Değer

Tanım 14.2 (Esas Değer). $n = 0$ basamağına, yani esas argümanla hesaplanan değere logaritmanın **esas değeri** denir:

$$\text{Log } z = \ln r + i\Theta \quad (r = |z|, \Theta = \text{Arg } z)$$

Böylece $\log z = \text{Log } z + 2n\pi i$ olur. z pozitif reel sayıysa $\text{Log } z = \ln z$ 'dir.

Örnek 14.2 (İki Temel Hesap).

$$\log 1 = 2n\pi i, \quad \text{Log } 1 = 0$$

$$\log(-1) = (2n + 1)\pi i, \quad \text{Log } (-1) = \pi i$$

Negatif reel sayıların bile kompleks logaritması vardır; tanımsız kalan tek nokta $z = 0$ 'dır.

14.3 Logaritmanın Dalları

Çok değerlilikten tek değerli, analitik bir fonksiyon damıtmak için argüman bir aralığa hapsedilir. α herhangi bir reel sayı olsun ve

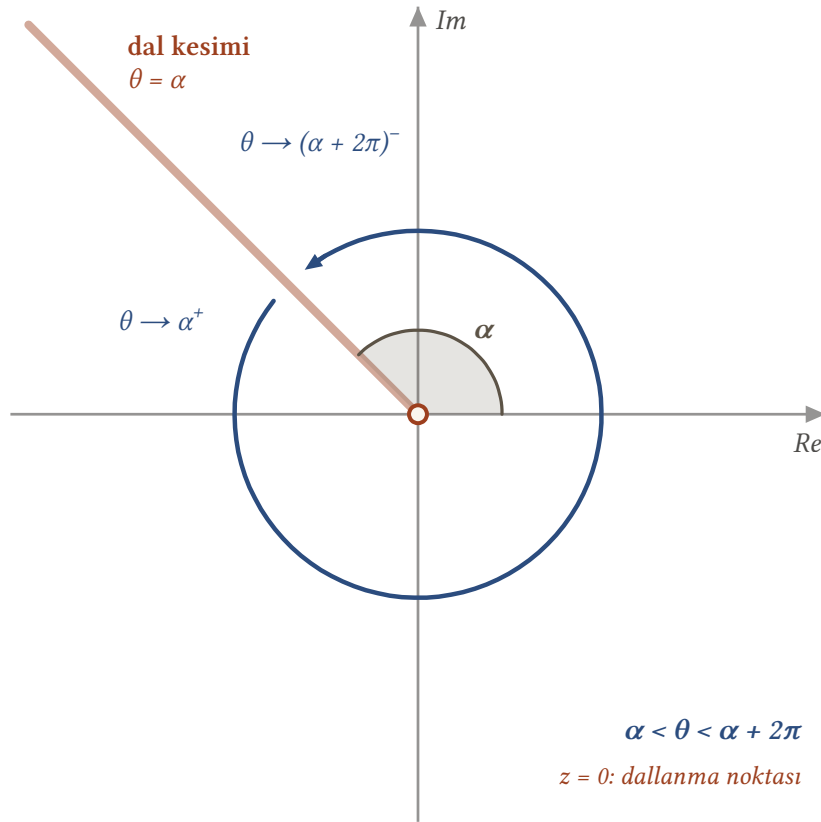
$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

tanımlansın. Bu fonksiyon belirtilen domende tek değerli ve süreklidir; bileşenleri $u = \ln r, v = \theta$ kutupsal Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar:

$$ru_r = 1 = v_\theta, \quad u_\theta = 0 = -rv_r$$

ve türev

$$\frac{d}{dz} \log z = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi)$$

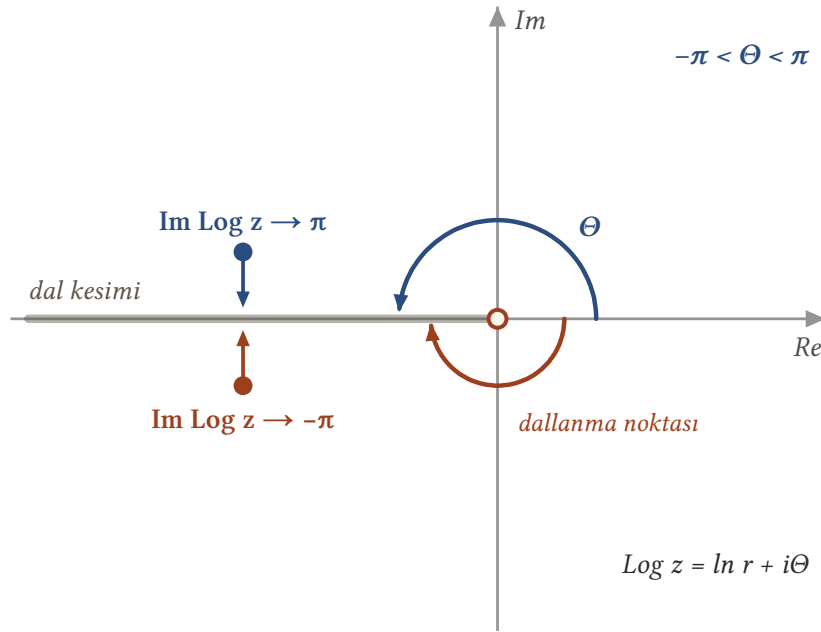


Şekil 14.1: Bir dal seçmek, düzlemde bir ışın çıkarmaktır: $\theta = \alpha$ ışını atılınca açı kalan bölgede α ile $\alpha + 2\pi$ arasında tek değerli ve sürekli seçilebilir. Kesimin iki yakasında açı α 'ya ve $\alpha + 2\pi$ 'ye yaklaşır: 2π 'lik fark, ışının neden atılmak zorunda olduğunu gösterir. Tüm ışınların ortak ucu, dallanma noktası $z = 0$ 'dir.

Tanım 14.3 (Dal, Dal Kesimi, Dallanma Noktası). Çok değerli bir f 'nin bir **dalı**, bir domende tek değerli ve analitik olan, her noktada f 'nin değerlerinden birini alan fonksiyondur. Dal tanımlarken domenden çıkarılan çizgiye **dal kesimi**, tüm dal kesimlerinin ortak ucuna **dallanma noktası** denir.

$$\text{Log } z = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi)$$

fonksiyonuna **esas dal** denir; dal kesimi negatif reel eksen (başlangıç dahil), dallanma noktası $z = 0$ 'dir.



Şekil 14.2: Esas dal $\text{Log } z$ negatif reel eksenini atar. Eksene üstten yaklaşan noktalarda $\text{Im Log } z$ π 'ye, alttan yaklaşanlarda $-\pi$ 'ye gider; kesim üzerinde değer $2\pi i$ kadar sıçrar, süreklilik ve analitiklik orada kurtarılamaz. Dallanma noktası $z = 0$, kesimin ucudur.

⚠ Kesim üzerinde süreklilik kırılır

Esas dal, negatif reel eksene üstten yaklaşırken sanal kısmı π 'ye, alttan yaklaşırken $-\pi$ 'ye yakın değerler üretir; kesim üzerinde süreklilik (dolayısıyla analitiklik) kurtarılamaz. Hangi ışının kesileceği seçimlidir: α değiştirilerek sonsuz çoklukta dal elde edilir ve uygulamada kesim, problemin geometrisine göre konumlandırılır.

14.4 Özdeşlikler: Neyin Geçerli Kaldığı

Reel logaritmanın alışıldık kuralları, ancak **çok değerli okumayla** kayıpsız taşınır.

Teorem 14.1 (Çarpım ve Bölüm Özdeşlikleri). $z_1, z_2 \neq 0$ için, küme eşitliği anlamında:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \quad \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$$

İspat.

$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$ reel özdeşliği ile *argüman kümelerinin toplanabilirliği* $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ birleştirilir; bölüm için aynı akıl yürütme fark ile yapılır.

■

Örnek 14.3 (Esas Değerde Bozulma). $z_1 = z_2 = -1$ alalım. $z_1 z_2 = 1$ için

$$\text{Log}(z_1 z_2) = 0, \quad \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

Esas değerler toplamsal değildir; ama çok değerli özdeşlik sağlamdır: 0 ve $2\pi i$, $\log 1 = 2n\pi i$ kümesinin iki basamağıdır.

Benzer bir uyarı kuvvetler için de gerekir: $\text{Log}(i^3) = \text{Log}(-i) = -\frac{\pi i}{2}$, oysa $3 \text{Log } i = \frac{3\pi i}{2}$.

Kuvvetlerle ilişki, çok değerli anlamda düzenlidir: her n tam sayısı için

$$z^n = e^{n \log z}, \quad z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)$$

Birincisi, $\log z$ 'nin hangi değeri seçilirse seçilsin aynı z^n sayısını verir; ikincisinin sağ tarafı, n ardışık basamağın n farklı sonucuyla tam olarak **kök kümesini** üretir.

14.5 Alıştırma

Alıştırma 14.1 (Logaritma Hesapları).

- a) $\text{Log}(1 - i)$ değerini hesaplayınız.
 b) $\log i$ kümesini yazınız; $\text{Log } i$ hangisidir?
 c) $\log z = \ln r + i\theta$ ($r > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}$) dalı için $\log(-1 - i)$ değerini bulunuz.

Çözüm.

a) Esas logaritma $\text{Log } z = \ln|z| + i \text{Arg } z$ 'dir. $1 - i$ sayısı dördüncü çeyrektedir:

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \quad \text{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$$

Buradan

$$\text{Log}(1 - i) = \ln \sqrt{2} - \frac{\pi i}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi i}{4}$$

b) i sayısının modülü 1, esas argümanı $\pi/2$ 'dir. Çok değerli logaritma tüm argümanları kullanır:

$$\log i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Esas değer, $n = 0$ terimidir (argüman $(-\pi, \pi]$ aralığına düşer):

$$\text{Log } i = \frac{\pi i}{2}$$

c) Bu dalda modül aynı kalır; değişen, argümanın hangi aralıktan seçileceğidir. $-1 - i$ sayısı için

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta \in \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right\}$$

Verilen aralık $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}$ 'tür. Argüman değerlerini tarayalım: $-3\pi/4$ küçük kalır, $-3\pi/4 + 2\pi = 5\pi/4$ aralığın içindedir, bir sonraki $13\pi/4$ ise büyüktür. Tek uygun seçim $\theta = 5\pi/4$ 'tür:

$$\log(-1 - i) = \ln \sqrt{2} + \frac{5\pi i}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5\pi i}{4}$$

Aynı sayının esas logaritmasının $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3\pi i}{4}$ olduğuna dikkat ediniz: iki değer $2\pi i$ farklıdır, çünkü farklı dallar kullanılmıştır.

■

Logaritma elimizdeyken, z^c biçimindeki keyfi kuvvetleri tanımlamanın önünde engel kalmadı: **kompleks üsler**.

15. Kompleks Üsler

z^2 , $z^{1/2}$ ve z^{-1} gibi kuvvetleri ayrı ayrı tanıdık; logaritma sayesinde hepsini tek çatı altında toplayıp **keyfi kompleks üsleri** tanımlayabiliriz. Bedeli, çok değerlilikle gelen sürprizlerdir: i^{-2i} gibi bir ifade, tamamı reel olan sonsuz bir değer kümesidir.

15.1 Tanım

Tanım 15.1 (Kompleks Kuvvet). $z \neq 0$ ve c herhangi bir kompleks sabit olmak üzere

$$z^c = e^{c \log z}$$

tanımlanır; $\log z$ çok değerli olduğundan z^c de genelde çok değerlidir.

Tanım eski dostlarla tutarlıdır: $c = n$ tam sayıysa $e^{n \log z}$ tek değere çöker (z^n), $c = 1/n$ iken tam olarak n köklü **kök kümesi** çıkar.

Örnek 15.1 (Tamamı Reel Bir Kuvvet Kümesi). i^{-2i} değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ olduğundan

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log i) = \exp\left[-2i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = \exp[(4n+1)\pi] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Değerlerin **tamamı pozitif reel sayılardır**: $e^\pi, e^{5\pi}, e^{-3\pi}, \dots$

■

$1/e^z = e^{-z}$ özelliğinden, tanımın doğal bir sonucu olarak

$$\frac{1}{z^c} = \frac{1}{e^{c \log z}} = e^{-c \log z} = z^{-c}$$

15.2 Dalların Analitikliği

Logaritmanın bir dalı seçildiğinde

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

$z^c = e^{c \log z}$ fonksiyonu aynı domende tek değerli ve analitik olur (analitik fonksiyonların bileşkesi). Türevi zincir kuralıyla:

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz} e^{c \log z} = \frac{c}{z} e^{c \log z} = c \frac{e^{c \log z}}{e^{\log z}} = c e^{(c-1) \log z}$$

yani aynı dal içinde beklenen kural geçerlidir:

$$\frac{d}{dz} z^c = c z^{c-1} \quad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi)$$

Tanım 15.2 (Esas Değer ve Esas Dal). $\log$ yerine Log konarak elde edilen değere kuvvetin **esas değeri** denir:

$$\text{P.V. } z^c = e^{c \text{Log } z}$$

Aynı formül, $|z| > 0$, $-\pi < \text{Arg } z < \pi$ domeninde z^c 'nin **esas dalını** tanımlar.

Örnek 15.2 (Bir Esas Değer).

$$\text{P.V.}(-i)^i = \exp [i \text{Log } (-i)] = \exp \left[i \left(\ln 1 - i \frac{\pi}{2} \right) \right] = e^{\pi/2}$$

Örnek 15.3 (Esas Dalın Açık Yazımı). $z^{2/3}$ 'ün esas dalını kutupsal biçimde yazınız.

Çözüm.

$$\text{P.V.} z^{2/3} = \exp \left(\frac{2}{3} \text{Log } z \right) = \exp \left(\frac{2}{3} \ln r + \frac{2}{3} i \Theta \right) = \sqrt[3]{r^2} \exp \left(i \frac{2\Theta}{3} \right)$$

Bileşenleri $u = \sqrt[3]{r^2} \cos \frac{2\Theta}{3}$, $v = \sqrt[3]{r^2} \sin \frac{2\Theta}{3}$, kutupsal Cauchy-Riemann denklemlerini $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$ domeninde sağlar; dal orada analitiktir.

■

15.3 Üs Kuralları Ne Zaman Bozulur?

Reel üslerin alışkanlıkları, esas değerlerle çalışırken bazen korunur bazen çarpanla bozulur; her iki durumu tek örnekte görelim.

Örnek 15.4 (Korunan ve Bozulan Çarpım Kuralı). $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 - i$ olsun; tüm kuvvetler esas değerleriyle alınsın.

Korunma. $z_1 z_2 = 2$ için

$$(z_1 z_2)^i = 2^i = e^{i \text{Log } 2} = e^{i \ln 2}$$

Öte yandan

$$z_1^i = e^{i \text{Log } (1+i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i\pi/4)} = e^{-\pi/4} e^{i(\ln 2)/2}, \quad z_2^i = e^{i(\ln \sqrt{2} - i\pi/4)} = e^{\pi/4} e^{i(\ln 2)/2}$$

Çarpımları $e^{i \ln 2}$ dir; bu örnekte $(z_1 z_2)^i = z_1^i z_2^i$ sağlanır.

Bozulma. $z_2 z_3 = (1 - i)(-1 - i) = -2$ için

$$(z_2 z_3)^i = (-2)^i = e^{i(\ln 2 + i\pi)} = e^{-\pi} e^{i \ln 2}$$

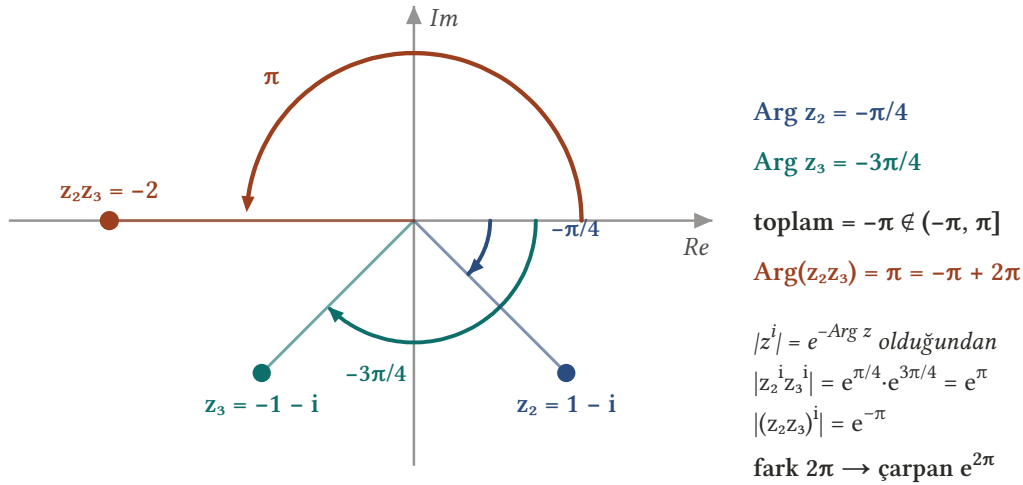
Ama

$$z_3^i = e^{i \text{Log } (-1-i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} - i3\pi/4)} = e^{3\pi/4} e^{i(\ln 2)/2}$$

olduğundan

$$z_2^i z_3^i = e^{\pi/4} e^{3\pi/4} e^{i \ln 2} = e^{\pi} e^{i \ln 2} = (z_2 z_3)^i e^{2\pi}$$

Esas değerler arasında $e^{2\pi}$ çarpanı kadar fark doğar. Neden: $\text{Arg } z_2 + \text{Arg } z_3 = -\pi$, esas aralığın dışına taşar ve 2π düzeltilmesi üstel tanım içinde çarpana dönüşür.



Şekil 15.1: z_2 ve z_3 'ün esas argümanları toplanınca $-\pi$ çıkar; bu değer $(-\pi, \pi]$ aralığının tam dışındadır ve çarpımın esas argümanı π olur. i kuvveti alınırken açılar $i \cdot i = -1$ ile reel üsse dönüştüğünden 2π 'lik düzeltme $e^{2\pi}$ çarpanı olarak ortaya çıkar.

■

15.4 Tabanı Sabit Üstel Fonksiyon

Roller değiştirilirse, $c \neq 0$ sabit taban için

$$c^z = e^{z \log c}$$

tanımlanır. Burada $\log c$ 'nin **bir değeri seçilip sabitlendiğinde** c^z , z 'nin tam fonksiyonudur ve türevi zincir kuralıyla

$$\frac{d}{dz} c^z = e^{z \log c} \log c = c^z \log c$$

$c = e$ alındığında bile aynı durum geçerlidir: $\log e = 1 + 2n\pi i$ kümesinden esas değer 1 seçildiği için e^z tek değerli okunur.

15.5 Alıştırma

Alıştırma 15.1 (Kuvvet Hesapları).

- P.V. i^i değerini hesaplayınız.
- $(-1)^{1/\pi}$ kümesinin tüm değerlerini yazınız ve birim çember üzerinde yer aldıklarını gösteriniz.
- $\frac{d}{dz} [(1+i)^z]$ türevini, logaritmanın esas değeri seçilerek hesaplayınız.

Çözüm.

a) Esas değer, tanımda esas logaritmanın kullanılması demektir:

$$\text{P.V. } i^i = \exp(i \text{ Log } i)$$

$\text{Log } i = \frac{\pi i}{2}$ olduğundan üs

$$i \cdot \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi i^2}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

değerini alır ve

$$\text{P.V. } i^i = e^{-\pi/2} \approx 0,2079$$

Sanal sayının sanal kuvveti, şaşırtıcı biçimde pozitif bir reel sayıdır.

b) Tanım gereği

$$(-1)^{1/\pi} = \exp\left(\frac{1}{\pi} \log(-1)\right)$$

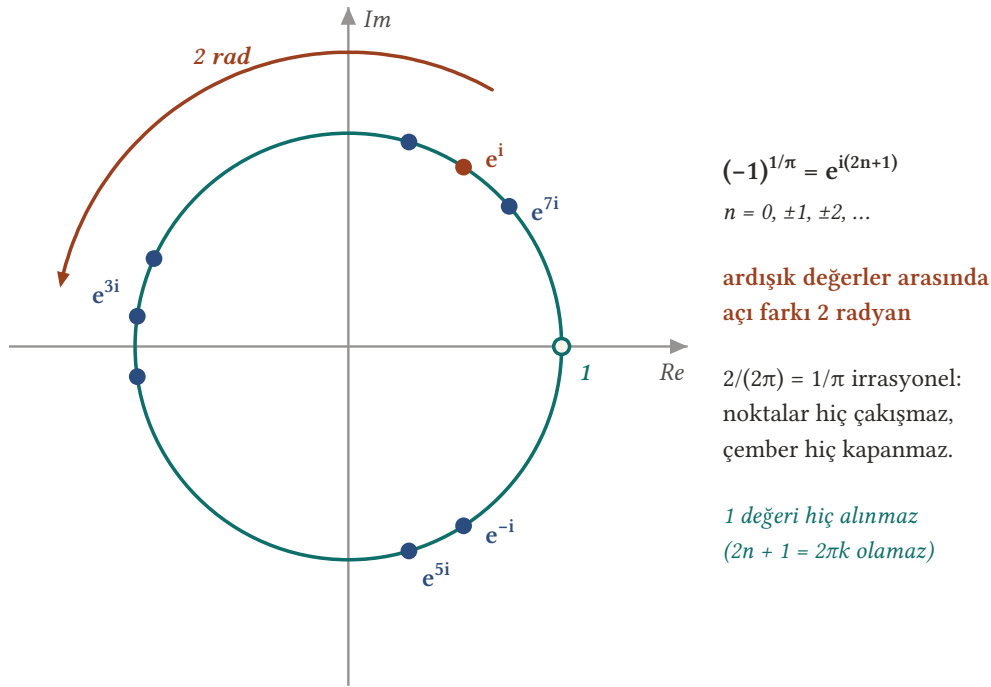
-1 sayısının modülü 1, argümanları $\pi + 2n\pi$ olduğundan $\log(-1) = i(2n+1)\pi$ 'dir. Üssü hesaplayalım:

$$\frac{1}{\pi} \log(-1) = \frac{i(2n+1)\pi}{\pi} = i(2n+1)$$

Böylece

$$(-1)^{1/\pi} = e^{i(2n+1)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Her değerın modülü $|e^{i(2n+1)}| = 1$ olduğundan tüm değerler birim çember üzerindedir. Ardışık değerler arasındaki açı farkı 2 radyandır; 2, 2π ile ölçülemez (oranı irrasyoneldir), dolayısıyla değerler asla tekrar etmez: sonsuz çoktur ve çember üzerinde hiçbir zaman kapanmaz.



Şekil 15.2: $(-1)^{1/\pi}$ kümesinin değerleri $e^{i(2n+1)}$: hepsi birim çember üzerindedir ve her adımda açı 2 radyan artar. 2, 2π ile ölçülemediğinden noktalar bir düzgün çokgen gibi kapanmaz; sonsuz çoktur ve hiçbir bir öncekiyle çakışmaz.

c) Esas dal seçildiğinde $(1+i)^z = \exp(z \operatorname{Log}(1+i))$ 'dir ve $\operatorname{Log}(1+i)$ bir sabittir:

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

Zincir kuralıyla, üstel fonksiyonun türevi kendisi çarpı iç türevdir:

$$\frac{d}{dz} \left[e^{z \operatorname{Log} (1+i)} \right] = \operatorname{Log} (1+i) e^{z \operatorname{Log} (1+i)} = (1+i)^z \left(\frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4} \right)$$

Kural, reel analizdeki $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ formülünün birebir karşılığıdır; tek fark, $\ln a$ yerine seçilen logaritma dalının gelmesidir.

■

Sırada, üstel fonksiyonun bir başka mirası var: sinüs ve kosinüsün düzleme taşınması — [trigonometrik fonksiyonlar](#).

16. Trigonometrik Fonksiyonlar

Euler formülü $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ile eşleniği birlikte çözümlerse, sinüs ve kosinüs üstel fonksiyon cinsinden ifade edilir:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Sağ taraflar her kompleks sayı için anlamlıdır — tanımı düzleme genişletmenin en doğal yolu budur.

16.1 Tanımlar ve Temel Özellikler

Tanım 16.1 (Sinüs ve Kosinüs).

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e^{iz} ve e^{-iz} tam fonksiyonlar olduğundan $\sin z$ ve $\cos z$ **tamdır**. Türevleri, $\frac{d}{dz}e^{iz} = ie^{iz}$ ve $\frac{d}{dz}e^{-iz} = -ie^{-iz}$ ile:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

Tanımdan doğrudan okunan diğer özellikler:

- $\sin(-z) = -\sin z$ (tek), $\cos(-z) = \cos z$ (çift);
- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ — Euler formülü artık **her kompleks** z için geçerlidir.

Alışıldık özdeşliklerin tümü, üstel tanımlar üzerinden cebirle doğrulanır:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$$

Periyodiklik de aynen taşınır:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z$$

16.2 Hiperbolik Bileşenli Açılımlar

y reel olmak üzere tanımlar, reel hiperbolik fonksiyonları üretir:

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y, \quad \cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y$$

Toplama formüllerinde $z_1 = x$, $z_2 = iy$ konursa **reel ve sanal kısımlar** ortaya çıkar:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Bu açılımlardan modüller hesaplanır ($\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ kullanılarak):

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

⚠ Kompleks sinüs sınırsızdır

Reel ekseninde $|\sin x| \leq 1$ alışkanlığı düzlemde çöker: $y \rightarrow \pm\infty$ iken $\sinh^2 y \rightarrow \infty$ olduğundan $|\sin z|$ ve $|\cos z|$ dikey yönde **sınırsız büyür**. Örneğin $\cos(iy) = \cosh y$ değeri y büyüdükçe patlar. “Sinüsü 2’ye eşitleyen açı yoktur” cümlesi de yalnızca reel ekseninde doğrudur: $\sin z = 2$ denkleminin kompleks çözümleri vardır.

16.3 Sıfırlar

Teorem 16.1 (Sinüs ve Kosinüsün Sıfırları). *Kompleks düzlemde*

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

*Yani tüm sıfırlar **reeldir** ve reel analizden bilinenlerden ibarettir.*

İspat.

$\sin z = 0$ ise $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y = 0$; iki kare birden sıfır olmalıdır:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, \quad \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Dolayısıyla $z = n\pi$. Tersine bu noktalarda sinüs zaten sıfırdır. Kosinüs için $\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ kaydırma özdeşliği sonucu sinüse aktarır.

■

16.4 Diğer Dört Fonksiyon

Tanım 16.2 (Tanjant, Kotanjant, Sekant, Kosekant).

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$\tan z$ ve $\sec z$, paydalarının sıfırları olan $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ noktaları dışında; $\cot z$ ve $\csc z$, $z = n\pi$ dışında analitiktir – bu noktalar ilgili fonksiyonların **tekil noktalarıdır**. Bölüm kuralıyla türevler:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tan z &= \sec^2 z, & \frac{d}{dz} \cot z &= -\csc^2 z \\ \frac{d}{dz} \sec z &= \sec z \tan z, & \frac{d}{dz} \csc z &= -\csc z \cot z \end{aligned}$$

Periyodiklik, sinüs ve kosinüsün π kaydırma özelliklerinden gelir; özellikle

$$\tan(z + \pi) = \tan z$$

16.5 Alıştırma

Alıştırma 16.1 (Trigonometrik Hesaplar).

- $\cos(1 + i)$ değerini $a + bi$ biçiminde, reel hiperbolik ve trigonometrik değerler cinsinden yazınız.
- $\sin z = 2$ denkleminin çözümlerinin $z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3})$ biçiminde olduğunu, reel-sanal kısım açılımıyla gösteriniz.

c) $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$ eşitsizliklerini modül açılımından türetiniz.

Çözüm.

a) Açılım formülünde $x = y = 1$ alalım:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\cos(1 + i) = \cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1 \approx 0,8337 - 0,9889 i$$

b) $z = x + iy$ yazıp reel ve sanal kısımları ayıralım:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 2$$

Sağ taraf reel olduğundan iki denklem doğar:

$$\sin x \cosh y = 2, \quad \cos x \sinh y = 0$$

İkinci denklemi iki durumda inceleyelim. **$\sinh y = 0$ ise $y = 0$** olur ve birinci denklem $\sin x = 2$ 'ye iner; reel sinüs 1'i aşamayacağından bu durum imkânsızdır. Geriye **$\cos x = 0$** , yani

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

kalır. Bu noktalarda $\sin x = \pm 1$ 'dir. $\cosh y > 0$ olduğundan çarpımın $+2$ olabilmesi için $\sin x = 1$, yani

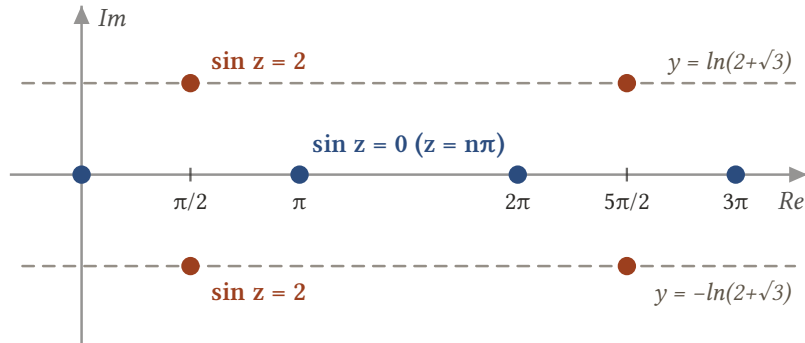
$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

seçilmelidir. Birinci denklem artık $\cosh y = 2$ 'dir. Bunu y için çözelim: $e^y + e^{-y} = 4$, yani $t = e^y$ için $t^2 - 4t + 1 = 0$ ve $t = 2 \pm \sqrt{3}$. İki kök birbirinin tersi olduğundan $((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1)$

$$y = \pm \ln(2 + \sqrt{3})$$

Çözümler:

$$z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



Şekil 16.1: $\sin z$ 'nin sıfırları yalnız reel eksendedir: $z = n\pi$. Reel ekseninde $|\sin x| \leq 1$ olduğundan $\sin z = 2$ denkleminin çözümleri eksenin dışına çıkar: reel sinüsün tepe yaptığı $x = \pi/2 + 2n\pi$ dikeyleri üzerinde, eksenin $\pm \ln(2 + \sqrt{3}) \approx \pm 1,317$ uzağında simetrik çiftler.

c) Modülün karesini açılımdan hesaplayalım:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$

$\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ özdeşliğini yerine koyup düzenleyelim:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x (1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

yani

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

Şimdi $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ sınırlarını kullanalım:

$$\sinh^2 y \leq |\sin z|^2 \leq 1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$$

Karekök alındığında ($\cosh y > 0$ olduğu için sağ tarafta mutlak değere gerek yoktur)

$$|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$$

Bu eşitsizlik, reel sinüsün aksine kompleks sinüsün **sınırsız** olduğunu da gösterir: $|y| \rightarrow \infty$ iken alt sınır $|\sinh y|$ sonsuza gider.

■

Sinüsün içindeki sinh, kosinüsün içindeki cosh tesadüf değil: bir sonraki bölümde bu ikizleri kendi başlarına inceliyoruz — [hiperbolik fonksiyonlar](#).

17. Hiperbolik Fonksiyonlar

Reel analizde hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar ayrı ailelerdir: biri üstelden, öbürü çemberden gelir. Kompleks düzlemde bu ayrım ortadan kalkar — $z \mapsto iz$ döndürmesi iki aileyi birbirine dönüştürür ve her hiperbolik özdeşlik, bir trigonometrik özdeşliğin kılık değiştirmiş olur.

17.1 Tanımlar

Tanım 17.1 (Hiperbolik Sinüs ve Kosinüs).

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$e^{\pm z}$ tam olduğundan ikisi de **tam fonksiyondur**; türevleri

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

17.2 Trigonometrik Köprü

Sinüs ve kosinüsün üstel tanımlarıyla karşılaştırma, iki aileyi bağlayan dönüşüm bağıntılarını verir:

$$-i \sinh(iz) = \sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z$$

$$-i \sin(iz) = \sinh z, \quad \cos(iz) = \cosh z$$

Örneğin birincisi şöyle doğrulanır:

$$-i \sinh(iz) = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

Bu köprü sayesinde trigonometrik kimliklerin her biri hiperbolik bir kimliğe çevrilebilir.

17.3 Özdeşlikler

Sık kullanılanların dökümü:

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

Reel-sanal ayrışım ve modüller ($z = x + iy$):

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \quad \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \quad |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

Örnek 17.1 (Köprüden Modül Özdeşliği). $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$ özdeşliğini dönüşüm bağıntılarıyla türetiniz.

Çözüm.

$\sinh z = -i \sin(iz)$ olduğundan $|\sinh z| = |\sin(iz)|$; $iz = -y + ix$ için **sinüsün modül formülü**

$$|\sin(-y + ix)|^2 = \sin^2(-y) + \sinh^2 x = \sin^2 y + \sinh^2 x$$

istenen sonucu verir – yeni hesap yapmadan.

■

17.4 Periyodiklik ve Sıfırlar

e^z 'nin $2\pi i$ periyodu tanımlar üzerinden taşınır:

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z, \quad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$$

Teorem 17.1 (Hiperbolik Fonksiyonların Sıfırları).

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi i, \quad \cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

İspat.

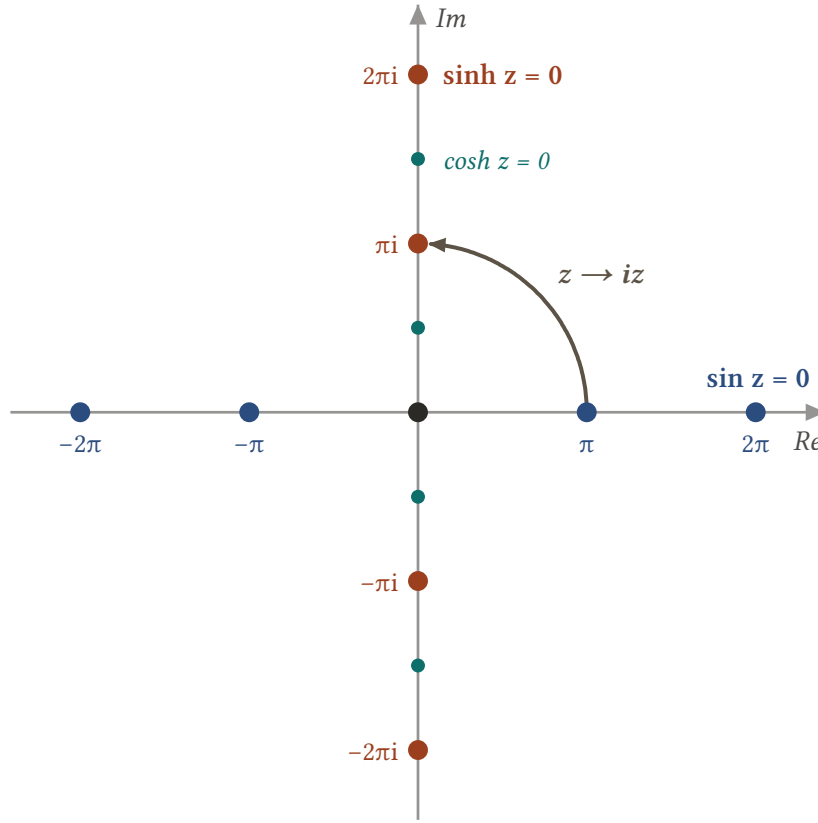
$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y = 0$ ancak $\sinh x = 0$ ve $\sin y = 0$ ile mümkündür: $x = 0$, $y = n\pi$; yani $z = n\pi i$. Kosinüs için köprü bağıntısı şu zinciri verir:

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \cos(iz) = 0 \Leftrightarrow iz = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow z = -i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Buradaki eksi işareti, n 'nin $-n - 1$ ile yeniden adlandırılmasıyla emilir ve ifade teoremdeki biçimi alır.

■

Trigonometrik ailedekinin ayna görüntüsü: sinüsün sıfırları tamamen reelken hiperbolik sinüsünkiler **tamamen saf sanaldır**.



Şekil 17.1: $\sin z$ 'nin sıfırları reel ekseninde $n\pi$ noktaları, $\sinh z$ 'nin sıfırları sanal ekseninde $n\pi i$ noktalarıdır. İkisi 90° 'lik $z \mapsto iz$ döndürmesiyle birbirine gider: $\sin z = -i \sinh(iz)$ köprüsünün geometrik anlamı budur. Küçük noktalar $\cosh z$ 'nin sıfırları, $(\pi/2 + n\pi)i$.

17.5 Hiperbolik Tanjant

Tanım 17.2 (Hiperbolik Tanjant).

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$\cosh z \neq 0$ olan her domende, yani $z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i$ noktaları dışında analitiktir. $\coth z = 1/\tanh z$, $\operatorname{sech} z = 1/\cosh z$ ve $\operatorname{csch} z = 1/\sinh z$ olarak tanımlanır.

Türev formülleri, reel karşılıklarıyla aynıdır:

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z, \quad \frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$$

17.6 Alıştırma

Alıştırma 17.1 (Hiperbolik Alıştırmalar).

a) $\cosh(1 + i\pi)$ değerini hesaplayınız.

- b) $\cosh z = \frac{1}{2}$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.
- c) $\tanh z$ 'nin periyodunun πi olduğunu, $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$ ve $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$ bağıntılarından türetiniz.

Çözüm.

a) Açılım formülünde $x = 1, y = \pi$ alalım:

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$\cos \pi = -1$ ve $\sin \pi = 0$ olduğundan sanal kısım kaybolur:

$$\cosh(1 + i\pi) = \cosh 1 \cdot (-1) + i \sinh 1 \cdot 0 = -\cosh 1$$

b) Aynı açılımı $\cosh z = \frac{1}{2}$ denklemine uygulayalım. Sağ taraf reel olduğundan

$$\cosh x \cos y = \frac{1}{2}, \quad \sinh x \sin y = 0$$

İkinci denklem iki durum verir. **$\sin y = 0$ ise $y = n\pi$** ve $\cos y = \pm 1$ olur; birinci denklem $\cosh x = \pm \frac{1}{2}$ 'ye iner. Ama her reel x için $\cosh x \geq 1$ 'dir, bu imkânsızdır. Geriye **$\sinh x = 0$** , yani $x = 0$ kalır. Birinci denklem artık

$$\cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

Çözümler saf sanaldır:

$$z = \left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(Aynı sonuç $\cosh z = \cos(iz)$ bağıntısıyla da bulunur: $\cos(iz) = \frac{1}{2}$ denkleminde $iz = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ çıkar ve i 'ye bölünürse yukarıdaki küme elde edilir.)

c) Verilen iki bağıntıyı oranlayalım. Payda sıfırdan farklı olduğu her z için

$$\tanh(z + \pi i) = \frac{\sinh(z + \pi i)}{\cosh(z + \pi i)} = \frac{-\sinh z}{-\cosh z} = \tanh z$$

İki eksi işareti birbirini götürdüğünden πi bir periyottur. Bu periyodun **en küçüğü** olduğunu da görelim: p herhangi bir periyot olsun. $z = 0$ alındığında $\tanh 0 = 0$ olduğundan

$$\tanh p = 0 \Rightarrow \sinh p = 0 \Rightarrow p = n\pi i$$

çünkü hiperbolik sinüsün sıfırları tam olarak $n\pi i$ noktalarıdır. Demek ki periyotlar yalnızca πi 'nin katlarıdır ve sıfırdan farklı en küçüğü πi 'dir. Payı ve paydası $2\pi i$ periyotlu olan $\tanh$, bölüm alındığında periyodunun yarıya inmesini işte bu işaret değişimine borçludur.

■

Elemanter ailenin son üyeleri, tersine çevirme işleminden doğar: **ters trigonometrik ve ters hiperbolik fonksiyonlar**.

18. Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar

Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar üstel fonksiyondan kurulmuştur; tersleri de doğal olarak logaritmayla ifade edilir. Türetme tek bir fikre dayanır: ters fonksiyon denklemi, e^{iw} için **ikinci dereceden bir denkleme** dönüştürülür.

18.1 Ters Sinüs

$w = \sin^{-1} z$ yazmak, $z = \sin w$ demektir. Üstel tanımla

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

Her tarafı $2ie^{iw}$ ile çarpıp düzenlersek e^{iw} bilinmeyenli ikinci dereceden denklem çıkar:

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$$

İkinci dereceden formülle (kompleks karekökün iki değerli olduğunu hatırlayarak):

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$

Burada $\pm$ yazmaya gerek yoktur: $(1 - z^2)^{1/2}$ zaten iki değerlidir ve iki işareti birden kapsar. Logaritma alınıp w çekilirse:

Teorem 18.1 (Ters Sinüs Formülü).

$$\sin^{-1} z = -i \log [iz + (1 - z^2)^{1/2}]$$

Karekökün iki değeri ve logaritmanın sonsuz basamağıyla $\sin^{-1} z$, çok değerli bir fonksiyondur.

Örnek 18.1 (Bir Ters Sinüs Kümesi). $\sin^{-1}(-i)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$z = -i$ için $iz = 1$ ve $1 - z^2 = 2$; formül

$$\sin^{-1}(-i) = -i \log (1 \pm \sqrt{2})$$

verir. İki durumu ayrı ayrı açalım:

$$\log (1 + \sqrt{2}) = \ln (1 + \sqrt{2}) + 2n\pi i$$

$$\log (1 - \sqrt{2}) = \ln (\sqrt{2} - 1) + (2n + 1)\pi i$$

(ikincisinde sayı negatiftir; modülü $\sqrt{2} - 1$, argümanı π 'dir). Şimdi kritik gözlem:

$$\ln (\sqrt{2} - 1) = \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = -\ln (1 + \sqrt{2})$$

Böylece iki küme tek kalıpta birleşir:

$$\log (1 \pm \sqrt{2}) = (-1)^n \ln (1 + \sqrt{2}) + n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(n çiftken birinci, tekken ikinci kümenin elemanları gelir). Sonuç:

$$\sin^{-1}(-i) = n\pi + i(-1)^{n+1} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

■

18.2 Ters Kosinüs ve Ters Tanjant

Aynı teknik diğer iki fonksiyona uygulanır:

$$\cos^{-1} z = -i \log \left[1 + i(1 - z^2)^{1/2} \right]$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}$$

Üçü de çok değerlidir. Karekök ve logaritma için **belirli dallar** seçildiğinde her biri tek değerli ve analitik olur; çünkü analitik fonksiyonların bileşkeleridir.

18.3 Türevler

Dallar seçildikten sonra türevler zincir kuralıyla hesaplanır:

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \quad \frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}$$

İlk ikisi, karekök için seçilen dala bağlıdır: kökün öbür dalı seçilirse işaret değişir. Ters tanjantın türevi ise karekök içermediğinden **dal seçiminden bağımsızdır**:

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}$$

i arcsin gösterimi

Bu fonksiyonlar için arcsin z , arccos z , arctan z gösterimleri de yaygındır; içerik aynıdır. Reel analizdeki “esas değer aralığı” alışkanlığının kompleks karşılığı, karekök ve logaritma dallarının açıkça söylenmesidir.

18.4 Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

$z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$ denkleminde e^w için ikinci dereceden denklem kurulursa aynı yöntem şunları verir:

$$\sinh^{-1} z = \log \left[z + (z^2 + 1)^{1/2} \right]$$

$$\cosh^{-1} z = \log \left[z + (z^2 - 1)^{1/2} \right]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}$$

Reel analizden tanıdık formüllerle biçimsel özdeşlik tam; tek fark, buradaki log’un kompleks (ve çok değerli) olmasıdır.

18.5 Alıştırma

Alıştırma 18.1 (Ters Fonksiyon Hesapları).

a) $\tan^{-1}(2i)$ kümesini formülden hesaplayınız.

- b) $\cos^{-1} 2$ değerlerinin $2n\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3})$ olduğunu gösteriniz; reel eksenin $[-1, 1]$ dışındaki noktalarında ters kosinüsün neden reel değer alamadığını yorumlayınız.
- c) $\sinh^{-1} i$ kümesini hesaplayınız ve **hiperbolik sinüsün sıfırlarıyla** karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Formülde $z = 2i$ yazalım. Önce logaritmanın argümanını sadeleştirelim:

$$\frac{i+z}{i-z} = \frac{i+2i}{i-2i} = \frac{3i}{-i} = -3$$

Böylece

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2} \log(-3)$$

-3 sayısının modülü 3, argümanları $\pi + 2n\pi$ olduğundan $\log(-3) = \ln 3 + i(2n+1)\pi$ 'dir:

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2} \left[\ln 3 + i(2n+1)\pi \right] = -\frac{(2n+1)\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln 3$$

n tüm tam sayıları taradığında $-\frac{(2n+1)\pi}{2}$ ifadesi $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ değerlerinin aynısını üretir; küme

$$\tan^{-1}(2i) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i}{2} \ln 3 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

b) Formülde $z = 2$ alalım. Karekök çift değerlidir:

$$(1 - z^2)^{1/2} = (-3)^{1/2} = \pm i\sqrt{3}$$

Logaritmanın argümanı iki değer alır:

$$z + i(1 - z^2)^{1/2} = 2 + i(\pm i\sqrt{3}) = 2 \mp \sqrt{3}$$

Her ikisi de **pozitif reel** sayıdır ($2 - \sqrt{3} \approx 0,268$), dolayısıyla logaritmaları

$$\log(2 \mp \sqrt{3}) = \ln(2 \mp \sqrt{3}) + 2n\pi i$$

Formülü tamamlayalım:

$$\cos^{-1} 2 = -i \left[\ln(2 \mp \sqrt{3}) + 2n\pi i \right] = 2n\pi - i \ln(2 \mp \sqrt{3})$$

$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ olduğundan $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$ 'tür; iki işaret tek ifadede toplanır:

$$\cos^{-1} 2 = 2n\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3})$$

Neden hiçbir değer reel değil? Reel bir w için $\cos w$ değerleri $[-1, 1]$ aralığından çıkamaz. Dolayısıyla $\cos w = 2$ denkleminin reel çözümü olamaz; çözümün sanal kısmı zorunlu olarak sıfırdan farklıdır. Kompleks düzlemde ise $\cos$ sınırsızdır ve denklem — üstelik sonsuz çok — çözüme sahiptir.

c) Formülde $z = i$ yazalım; karekökün içi sıfır olur:

$$(z^2 + 1)^{1/2} = (i^2 + 1)^{1/2} = 0$$

Geriye yalnızca logaritma kalır:

$$\sinh^{-1} i = \log(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$$

Karşılaştırma: hiperbolik sinüsün sıfırları $n\pi i$ noktalarıdır. Bulunan çözümler ise sanal ekseninde bu sıfırların **tam ortasında**, her birinden $\pi/2$ uzaklıkta oturur. Bunun nedeni $\sinh(iy) = i \sin y$ bağıntısıdır: sanal eksen üzerinde $\sinh$, reel sinüsün i katı gibi davranır; sıfırlar $\sin y = 0$ noktalarına, $\sinh w = i$ çözümleri ise $\sin y = 1$ noktalarına — yani sinüsün tepe noktalarına — karşılık gelir. Doğrulama:

$$\sinh\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = i \sin\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = i$$

■

Elemanter fonksiyonlar kütüphanesi tamamlandı. Dördüncü kısımda kompleks analizin motoruna geçiyoruz: [integral kuramı](#).

19. Reel Değişkenli Fonksiyonların Türev ve İntegralleri

Çevre integrallerine giden yol, mütevazı bir ara duraktan geçer: **reel** bir t değişkenine bağlı, **kompleks değerli** $w(t)$ fonksiyonları. Bunların analizi neredeyse tamamen kalkülüsten kopyalanır — ama “nere-deyse” kelimesi önemlidir: ortalama değer teoremi gibi bazı taşlar yolda düşer.

19.1 Türev

Tanım 19.1 ($w(t)$ Fonksiyonunun Türevi). u ve v , t 'nin reel değerli fonksiyonları olmak üzere $w(t) = u(t) + iv(t)$ verilsin. $u'(t)$ ve $v'(t)$ var olduğunda w 'nin türevi

$$w'(t) = u'(t) + i v'(t)$$

Kalkülüsteki toplam, çarpım ve sabit kuralları bileşen bileşen doğrulanır. Örneğin $z_0 = x_0 + iy_0$ kompleks sabiti için

$$\frac{d}{dt} [z_0 w(t)] = z_0 w'(t)$$

kuralı, $z_0 w = (x_0 u - y_0 v) + i(y_0 u + x_0 v)$ açılımının türetilmesiyle görülür. Sık kullanılacak bir diğer kural:

Teorem 19.1 (Üstelin Türevi). Her $z_0 = x_0 + iy_0$ kompleks sabiti için

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}$$

İspat.

$e^{z_0 t} = e^{x_0 t} \cos y_0 t + i e^{x_0 t} \sin y_0 t$ yazıp bileşenleri türetelim:

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = e^{x_0 t} (x_0 \cos y_0 t - y_0 \sin y_0 t) + i e^{x_0 t} (x_0 \sin y_0 t + y_0 \cos y_0 t)$$

Sağ taraf, $(x_0 + iy_0) e^{x_0 t} (\cos y_0 t + i \sin y_0 t)$ çarpımının açılımıdır; yani $z_0 e^{z_0 t}$.

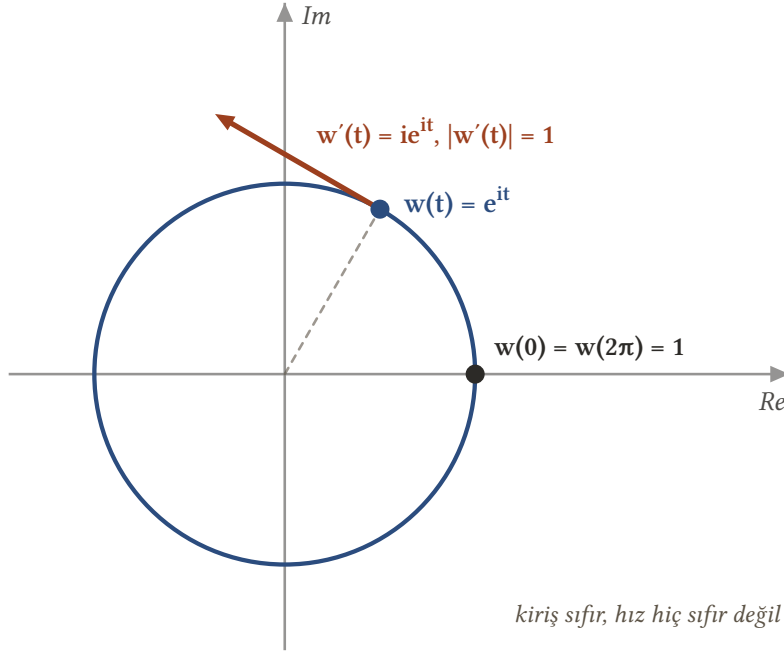
■

⚠ Ortalama değer teoremi taşınmaz

w , $[a, b]$ üzerinde sürekli ve içeride türevlenebilir olsa bile

$$w'(c) = \frac{w(b) - w(a)}{b - a}$$

koşulunu sağlayan bir c bulunmak zorunda değildir. Karşı örnek: $[0, 2\pi]$ üzerinde $w(t) = e^{it}$. Uçlarda $w(2\pi) - w(0) = 0$ 'dır; ama $|w'(t)| = |ie^{it}| = 1$ olduğundan türev hiçbir noktada sıfırlanamaz.



Şekil 19.1: $w(t) = e^{it}$, $[0, 2\pi]$ boyunca birim çemberi dolaşıp başladığı noktaya döner: kiriş $w(2\pi) - w(0) = 0$ 'dır. Hız vektörü $w'(t) = ie^{it}$ ise her an çembere teğettir ve boyu hep 1'dir; sıfırlanan bir $w'(c)$ yoktur. Ortalama değer teoremi kompleks değerli fonksiyonlara taşınmaz.

19.2 Belirli İntegral

Tanım 19.2 ($w(t)$ Fonksiyonunun Belirli İntegrali). $w(t) = u(t) + iv(t)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki belirli integrali, sağdaki iki reel integralin varlığı koşuluyla

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

Böylece integral, reel ve sanal kısım alma işlemleriyle sıra değiştirir:

$$\operatorname{Re} \int_a^b w dt = \int_a^b \operatorname{Re} [w] dt, \quad \operatorname{Im} \int_a^b w dt = \int_a^b \operatorname{Im} [w] dt$$

İntegralin varlığı için u ve v 'nin **parçalı sürekliliği** yeterlidir: sonlu sayıda nokta dışında süreklilik ve o noktalarda tek yanlı limitlerin varlığı. Sınırsız aralıklar üzerindeki genelleştirilmiş integraller de bileşenler üzerinden tanımlanır. Sabitle çarpma, toplam ve aralık ekleme kuralları kalkülüsten aynen geçer.

Örnek 19.1 (Tanımla Hesap).

$$\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 (1-t^2) dt + i \int_0^1 2t dt = \frac{2}{3} + i$$

19.3 Temel Teorem

Teorem 19.2 (Kalkülüsün Temel Teoremi). $w(t) = u(t) + iv(t)$ ve $W(t) = U(t) + iV(t)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli olsun. $W'(t) = w(t)$ ise

$$\int_a^b w(t) dt = W(t) \Big|_a^b = W(b) - W(a)$$

İspat.

$W' = w$ bileşenlere ayırılır: $U' = u$, $V' = v$. Reel temel teorem iki kez uygulanır:

$$\int_a^b w dt = U(t) \Big|_a^b + i V(t) \Big|_a^b = [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)] = W(b) - W(a)$$

■

Örnek 19.2 (Üstelle İntegral).

$$\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{it}}{i} \right) = e^{it}$ olduğundan $W(t) = \frac{e^{it}}{i}$ bir ters türevdir:

$$\int_0^{\pi/4} e^{it} dt = \frac{e^{it}}{i} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{e^{i\pi/4} - 1}{i} = -i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

■

Örnek 19.3 (İntegral İçin Ortalama Değer de Çöker). w , $[a, b]$ üzerinde sürekli olsa bile

$$\int_a^b w(t) dt = w(c)(b-a)$$

koşulunu sağlayan bir c bulunmayabilir.

Çözüm.

Yine $w(t) = e^{it}$, $[0, 2\pi]$ örneği iş görür:

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \frac{e^{it}}{i} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Ama her c için $|w(c)(2\pi - 0)| = 2\pi \neq 0$; eşitlik hiçbir c ile kurulamaz.

■

19.4 Alıştırma

Alıştırma 19.1 (Hesap Alıştırmaları).

- a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$ integralini hesaplayınız.
- b) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$ integralini hesaplayınız.
- c) $m \neq n$ tam sayıları için $\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0$ olduğunu gösteriniz (Fourier serilerinin diklik bağıntısı).

Çözüm.

a) Önce integrandın karesini açalım:

$$\left(\frac{1}{t} - i\right)^2 = \frac{1}{t^2} - \frac{2i}{t} + i^2 = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) - \frac{2i}{t}$$

Reel ve sanal kısımlar ayrı ayrı integrallenir:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt = \left[-\frac{1}{t} - t\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - 2\right) - (-1 - 1) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{2}{t} dt = 2 \ln 2 = \ln 4$$

Sanal kısım eksi işaretliydi; sonuç:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt = -\frac{1}{2} - i \ln 4$$

b) e^{i2t} fonksiyonunun ters türevi $\frac{e^{i2t}}{2i}$ 'dir:

$$\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt = \left[\frac{e^{i2t}}{2i}\right]_0^{\pi/6} = \frac{e^{i\pi/3} - 1}{2i}$$

$e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan pay $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'dir. $\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ ile çarpalım:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

yani

$$\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

c) Üsler toplanır; $k = m - n$ yazalım. Varsayım gereği k sıfırdan farklı bir tam sayıdır:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi k} - 1}{ik}$$

k tam sayı olduğundan $e^{i2\pi k} = 1$ 'dir ve pay sıfırlanır:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 \quad (m \neq n)$$

$m = n$ durumunda ise integrand 1'e eşit olur ve integral 2π değerini verir – Fourier serilerinde katsayı formüllerini doğuran ayırım tam olarak budur.

■

$w(t)$ integralleri araç kutumuza girdi; şimdi bu aracı düzlemdeki eğriler üzerinde çalıştıracak zemini kuralım: [yaylar ve çevreler](#).

20. Yaylar ve Çevreler

Kompleks integraller reel eksen aralıkları üzerinde değil, düzlemdeki **eğriler** üzerinde alınır. Bu bölümde integral almaya elverişli eğri sınıflarını tanımlıyoruz: yaydan başlayıp adım adım **çevre** kavramına ulaşacağız.

20.1 Yaylar

Tanım 20.1 (Yay). $x(t)$ ve $y(t)$, $a \leq t \leq b$ aralığında **sürekli** reel fonksiyonlar olmak üzere

$$z = z(t) = x(t) + i y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

denklemleriyle temsil edilen nokta kümesine bir **yay** (C) denir. Tanım, $[a, b]$ aralığından düzleme sürekli bir gönderim kurar; görüntü noktaları, artan t 'ye göre doğal bir **yönle** sıralanır.

Tanım 20.2 (Basit Yay ve Basit Kapalı Eğri). $t_1 \neq t_2$ iken $z(t_1) \neq z(t_2)$ oluyorsa — yani eğri kendisiyle kesişmiyorsa — C 'ye **basit yay** (Jordan yayı) denir. Yalnızca uçlarda çakışma varsa ($z(b) = z(a)$) C , bir **basit kapalı eğridir** (Jordan eğrisi). Basit kapalı eğri, saat yönünün tersine yönlendirilmişse **pozitif yönlüdür**.

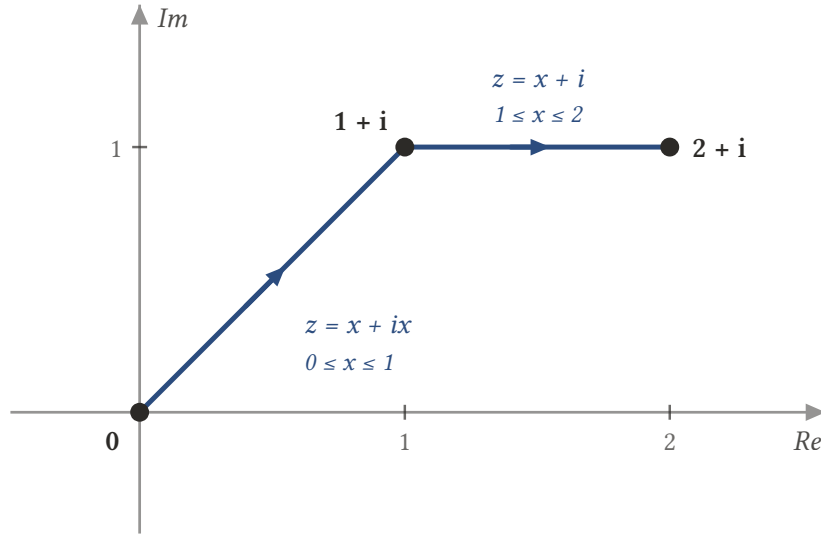
Aynı nokta kümesi, farklı parametrisasyonlarla **farklı yaylar** tanımlayabilir; yay kavramı kümeyle birlikte dolaşım biçimini de içerir. Dört örnek farkları gösterir:

Örnek 20.1 (Aynı Küme, Farklı Yaylar).

a) **Kırık çizgi:**

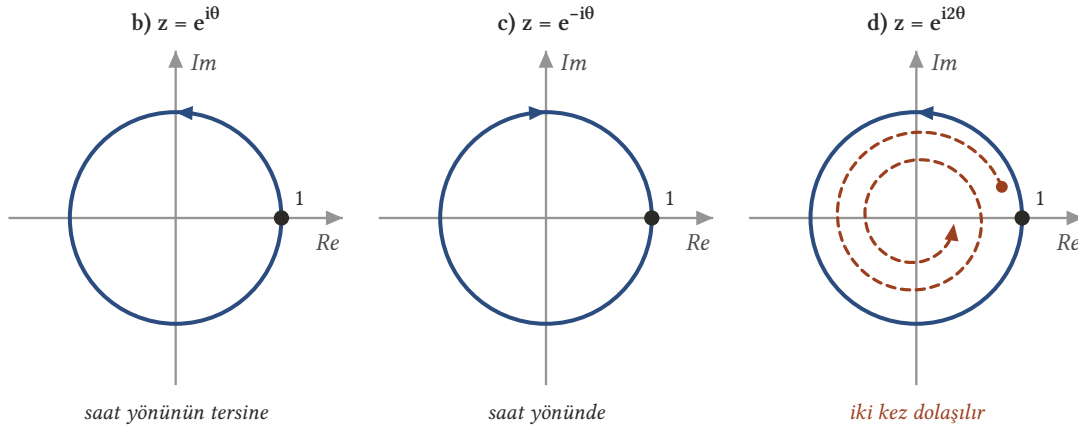
$$z = \begin{cases} x + ix, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + i, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

0'dan $1 + i$ 'ye, oradan $2 + i$ 'ye giden iki doğru parçasından oluşan basit bir yaydır.



Şekil 20.1: Kırık çizgi tek bir yaydır: 0'dan $1 + i$ 'ye $z = x + ix$, oradan $2 + i$ 'ye $z = x + i$ parçası; parametre x baştan sona artar. $1 + i$ köşesinde yön aniden değişir. Farklı x değerleri farklı noktalar verdiği için yay basittir.

- b) **Birim çember:** $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), saat yönünün tersine dolaşılan pozitif yönlü bir basit kapalı eğridir. z_0 merkezli R yarıçaplı çember de $z = z_0 + Re^{i\theta}$ ile aynı biçimde temsil edilir.
- c) $z = e^{-i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$): nokta kümesi aynı birim çemberdir; ama dolaşım **saat yönündedir** – b'dekiyle aynı yay değildir.
- d) $z = e^{i2\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$): yine birim çember, ama iki kez dolaşılır; b ve c'den farklı bir yaydır ve basit kapalı eğri değildir.



Şekil 20.2: Üçünün nokta kümesi aynı birim çemberdir; yay olarak üçü de farklıdır. (b) pozitif yönlü basit kapalı eğridir; (c) aynı çemberi saat yönünde dolaşır; (d) ise θ bir kez 0'dan 2π 'ye giderken çemberi iki kez dolaşır – uçlar dışında da çakışan noktalar olduğundan basit kapalı eğri değildir.

20.2 Yeniden Parametrizasyon

Parametre aralığı, eğriyi değiştirmeden başka bir aralıkla takas edilebilir. φ , $[\alpha, \beta]$ 'yi $[a, b]$ 'ye gönderen, $\varphi(\alpha) = a$ ve $\varphi(\beta) = b$ koşullarını sağlayan, sürekli türevli ve her noktada $\varphi'(\tau) > 0$ olan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$Z(\tau) = z[\varphi(\tau)] \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta)$$

aynı yayı, aynı yöne temsil eder; $\varphi' > 0$ koşulu yön korumanın güvencesidir.

20.3 Düzgün Yaylar ve Uzunluk

Tanım 20.3 (Türevlenebilir ve Düzgün Yay). $x'(t)$ ve $y'(t)$, $[a, b]$ 'nin tamamında var ve sürekliyse C 'ye **türevlenebilir yay** denir; türevi $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ 'dir. Ek olarak açık aralıkta $z'(t) \neq 0$ ise C **düzgün yaydır**: her noktada iyi tanımlı, sürekli dönen bir birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$$

vardır.

Türevlenebilir bir yayın **uzunluğu**, kalkülüsten bilinen formülün kompleks yazımıdır:

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt, \quad |z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

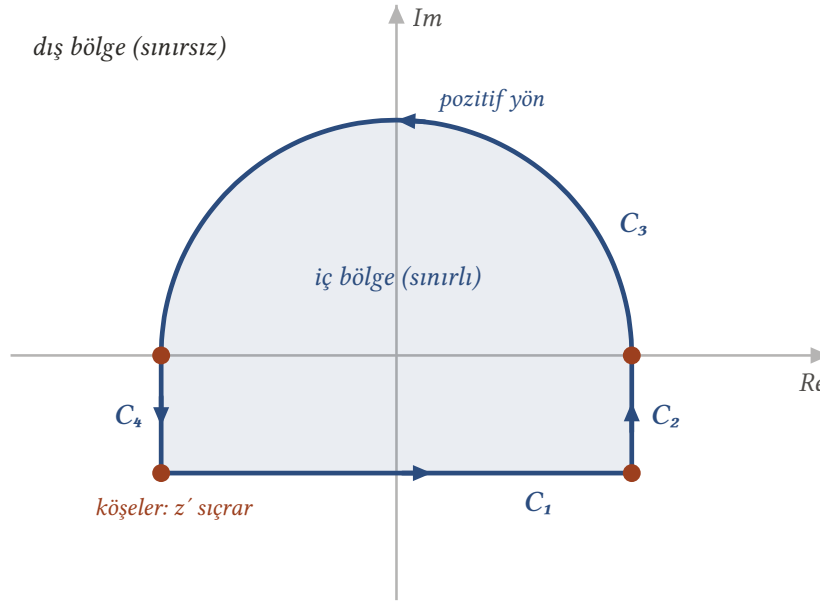
Uzunluk, temsil seçiminden bağımsızdır: $t = \varphi(\tau)$ değişimiyle, zincir kuralı $Z'(\tau) = z'[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)$ ve $\varphi' > 0$ sayesinde

$$\int_\alpha^\beta |Z'(\tau)| d\tau = \int_\alpha^\beta |z'[\varphi(\tau)]| \varphi'(\tau) d\tau = \int_a^b |z'(t)| dt$$

20.4 Çevreler

Tanım 20.4 (Çevre). **Çevre** (parçalı düzgün yay), uç uca eklenmiş sonlu sayıda düzgün yaydan oluşan yaydır: $z(t)$ sürekli, $z'(t)$ ise parçalı sürekli. Yalnızca başlangıç ve bitiş değerleri çakışıyorsa **basit kapalı çevre** denir.

Kırık çizgiler, çemberler, üçgen ve dikdörtgen sınırları — belirli bir yöne dolaşıldıklarında — hep basit kapalı çevrelerdir. Bir çevrenin uzunluğu, onu oluşturan düzgün yayların uzunluklarının toplamıdır.



Şekil 20.3: Dört düzgün yayın uç uca eklenmesiyle oluşan basit kapalı çevre $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$; uzunluğu parçaların uzunluklarının toplamıdır. Köşelerde $z(t)$ sürekli ama $z'(t)$ sıçrar (parçalı sürekli). Jordan eğri teoremi: C , düzlemi sınırlı bir iç bölge ile sınırsız bir dış bölgeye ayırır.

i Jordan eğri teoremi

Basit kapalı bir eğri, düzlemi ikisi de sınırı C olan iki domene ayırır: biri sınırlı (**iç bölge**), diğeri sınırsız (**dış bölge**). Geometrik olarak apaçık görünen bu ifadenin kanıtı şaşırtıcı derecede zordur; kuram boyunca kanıtsız kabul edeceğiz.

20.5 Alıştırma

Alıştırma 20.1 (Parametrizasyon Alıştırmaları).

- $-1 - i$ noktasından $1 + i$ noktasına giden doğru parçasını $z(t)$ biçiminde parametreleyiniz.
- $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) birim çemberinin uzunluğunu $L = \int |z'| d\theta$ formülüyle doğrulayınız.
- $y = x^3$ ($-1 \leq x \leq 1$) eğrisinin, x 'i parametre alan temsilinin düzgün bir yay tanımladığını gösteriniz.

Çözüm.

a) İki nokta arasındaki doğru parçası, uç noktaların bir ağırlıklı ortalamasıyla yazılır. $-1 - i = -(1 + i)$ ve $1 + i$ noktaları başlangıca göre simetrik olduğundan en sade temsil

$$z(t) = (1 + i)t \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

Gerçekten $z(-1) = -1 - i$ ve $z(1) = 1 + i$ 'dir; ara değerler de $y = x$ doğrusu üzerindedir. Genel yazım da kullanılabilir:

$$z(t) = (-1 - i) + t[(1 + i) - (-1 - i)] = (-1 - i) + t(2 + 2i) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

b) Türevi alalım:

$$z'(\theta) = ie^{i\theta} \implies |z'(\theta)| = |i| |e^{i\theta}| = 1$$

Uzunluk formülü artık sabit bir integrand içerir:

$$L = \int_0^{2\pi} |z'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Bu, birim çemberin bilinen çevresidir.

c) Eğrinin x parametrelili temsili

$$z(x) = x + ix^3 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Türev

$$z'(x) = 1 + 3x^2i$$

olup her iki bileşeni de x 'in sürekli fonksiyonudur. Ayrıca reel kısmı sabit 1 olduğundan $z'(x)$ hiçbir x için sıfır olamaz. Son olarak $x \mapsto z(x)$ birebirdir: farklı x değerleri farklı reel kısımlar verir. Sürekli türevli ve türevi hiç sıfırlanmayan bu temsil, tanım gereği **düzgün bir yay** belirtir; birebir olduğundan bu yay ayrıca **basittir**.

■

Zemin hazır: eğrilerimiz üzerinde artık **çevre integrallerini** tanımlayabiliriz.

21. Çevre İntegralleri

Kompleks analizin merkez işlemi budur: bir f fonksiyonunun, düzlemde bir C çevresi boyunca integrali. Değeri genelde yalnız uç noktalara değil **izlenen yola** bağlıdır — ve tam da bu bağımlılığın ne zaman ortadan kalktığı sorusu, Cauchy kuramının kapısını açar.

21.1 Tanım

Tanım 21.1 (Çevre İntegrali). $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), $z_1 = z(a)$ 'dan $z_2 = z(b)$ 'ye uzanan bir çevre; f , C üzerinde parçalı sürekli olsun (yani $f[z(t)]$ parçalı sürekli). f 'nin C **boyunca çevre integrali**:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

C bir çevre olduğundan $z'(t)$ parçalı sürekli; integrandın parçalı sürekliliği sağ taraftaki $w(t)$ **integralinin** varlığını garanti eder. Değer, yön koruyan yeniden parametrizasyon altında değişmez — **yay uzunluğundaki** hesapla aynı değişken değişimi bunu gösterir.

Tanımdan hemen çıkan özellikler (z_0 sabit):

$$\int_C z_0 f(z) dz = z_0 \int_C f(z) dz, \quad \int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f dz + \int_C g dz$$

Ters yön. $-C$, aynı noktaları ters sırayla dolaşan çevre olsun ($z = z(-t)$, $-b \leq t \leq -a$). Zincir kuralı ve değişken değişimiyle

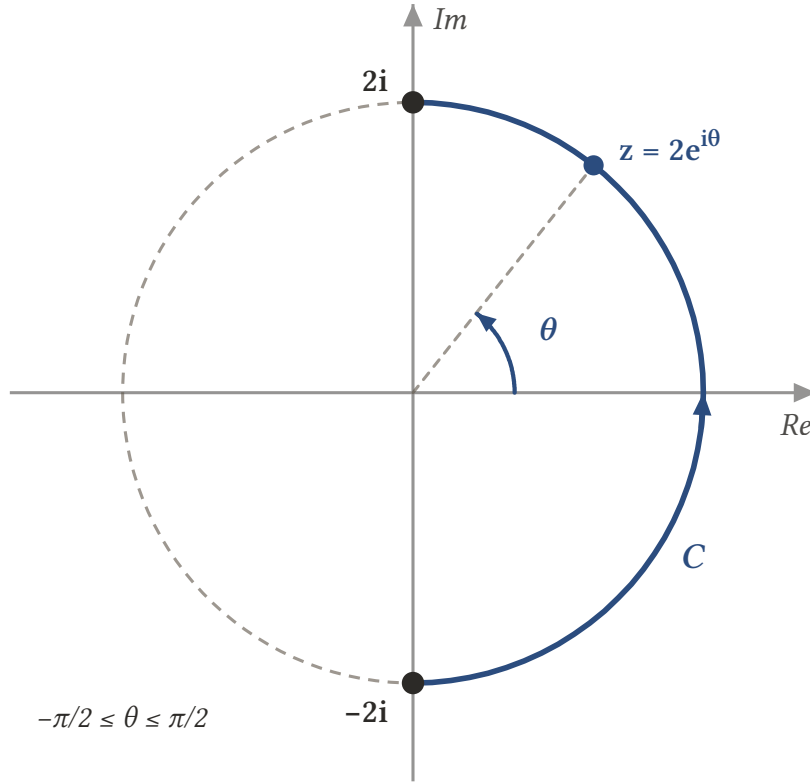
$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

Parçalara ayırma. C , C_1 'in bitişi C_2 'nin başlangıcı olacak biçimde iki çevrenin eklenmesiye ($C = C_1 + C_2$):

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

21.2 Yol Bağımlılığı: Üç Klasik Örnek

Örnek 21.1 (Eşleniğin Yarım Çember Üzerinde İntegrali). C , $|z| = 2$ çemberinin $z = -2i$ 'den $z = 2i$ 'ye sağ yarısı olsun: $z = 2e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. $\int_C \bar{z} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 21.1: $|z| = 2$ çemberinin sağ yarısı: θ , $-\pi/2$ 'den $\pi/2$ 'ye artarken $z = 2e^{i\theta}$ noktası $-2i$ 'den başlar, $2i$ 'den geçer ve $2i$ 'de biter; dolaşım saat yönünün tersinedir.

Çözüm.

$\frac{d}{d\theta} (2e^{i\theta}) = 2ie^{i\theta}$ olduğundan

$$\int_C \bar{z} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-i\theta} 2ie^{i\theta} d\theta = 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 4\pi i$$

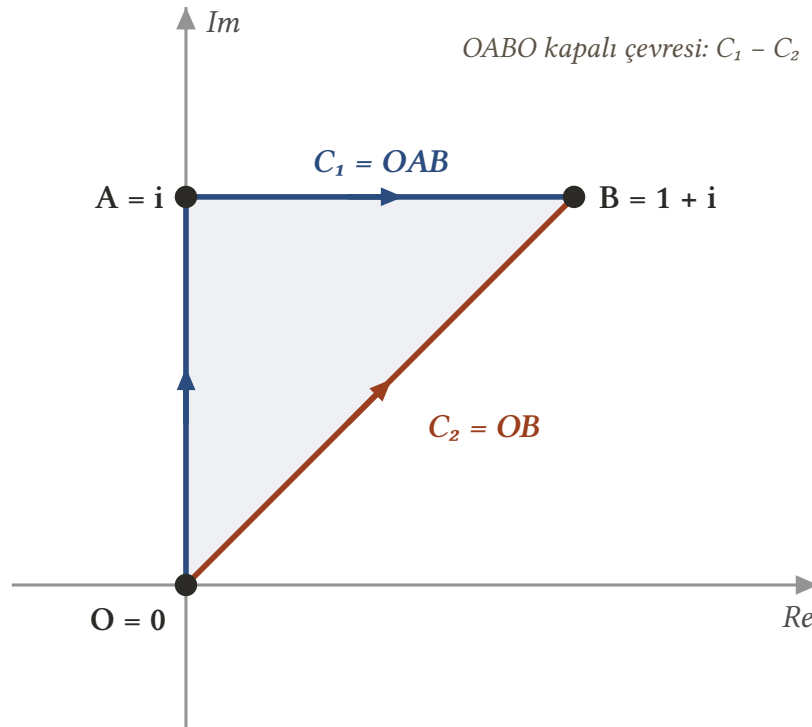
İkinci okuma: C üzerinde $z\bar{z} = |z|^2 = 4$, yani $\bar{z} = 4/z$ 'dir. Sonuç şu biçimde de yazılabilir:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \frac{1}{4} \int_C \bar{z} dz = \pi i$$

Bu küçük gözlem ileride **ters türevler bölümünde** yeniden karşımıza çıkacak.

■

Örnek 21.2 (Aynı Uçlar, Farklı Değerler). $f(z) = y - x - i3x^2$ ($z = x + iy$) olsun. $O = 0$, $A = i$, $B = 1 + i$ noktaları için iki yol düşünelim: $C_1 = OAB$ kırık çizgisi ve $C_2 = OB$ doğru parçası. İki integrali karşılaştırınız.



Şekil 21.2: $O = 0$ 'dan $B = 1 + i$ 'ye iki yol: $C_1 = OAB$ kırık çizgisi ve $C_2 = OB$ köşegeni. $f(z) = y - x - i3x^2$ için iki integral farklı çıkar; fark, $OABO$ üçgenini dolaşan kapalı $C_1 - C_2$ çevresi üzerindeki integraldır ve sıfır değildir.

Çözüm.

C_1 yolu. OA parçasında $z = iy$ ($0 \leq y \leq 1$): burada $x = 0$, $f = y$ ve $dz = i dy$;

$$\int_{OA} f dz = \int_0^1 y i dy = \frac{i}{2}$$

AB parçasında $z = x + i$ ($0 \leq x \leq 1$): burada $y = 1$, $f = 1 - x - i3x^2$ ve $dz = dx$;

$$\int_{AB} f dz = \int_0^1 (1 - x) dx - 3i \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} - i$$

Toplam:

$$I_1 = \int_{C_1} f dz = \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{1 - i}{2}$$

C_2 yolu. OB üzerinde $z = x + ix$ ($0 \leq x \leq 1$): burada $y = x$, $f = -i3x^2$ ve $dz = (1 + i) dx$;

$$I_2 = \int_{C_2} f dz = \int_0^1 (-i3x^2)(1 + i) dx = 3(1 - i) \int_0^1 x^2 dx = 1 - i$$

$I_1 \neq I_2$: uçları aynı iki yol farklı değerler üretti. Kapalı $OABO$ çevresi ($C_1 - C_2$) üzerindeki integral de sıfırdan farklıdır:

$$I_1 - I_2 = \frac{1 - i}{2} - (1 - i) = \frac{-1 + i}{2}$$

■

Örnek 21.3 (Her Yolda Aynı Değer). C , z_1 'den z_2 'ye herhangi bir çevre olsun. $\int_C z dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce C düzgün bir yay olsun: $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Gözlem:

$$\frac{d}{dt} \frac{[z(t)]^2}{2} = z(t) z'(t)$$

Dolayısıyla **temel teoremler**

$$\int_C z dz = \int_a^b z(t) z'(t) dt = \frac{[z(t)]^2}{2} \Big|_a^b = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

C , düzgün yayların eklenmesiyle oluşan genel bir çevreyse, her C_k parçası z_k 'den z_{k+1} 'e uzansın (z_1 başlangıç, z_{n+1} bitiş). Parça değerleri teleskopik toplanır:

$$\int_C z dz = \sum_{k=1}^n \frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{2} = \frac{z_{n+1}^2 - z_1^2}{2}$$

Değer yalnızca uçlara bağlıdır; özellikle **her kapalı çevre üzerinde** $\int_C z dz = 0$.

■

i İki örneğin dersi

$\bar{z}$ ve $y - x - i3x^2$ analitik değildir ve integralleri yola bağlı çıktı; z ise tamdır ve integrali yoldan bağımsız çıktı. Bu bir rastlantı değildir — bağlantının kesin ifadesi **ters türevler teoreminde** ve Cauchy-Goursat kuramında verilecek.

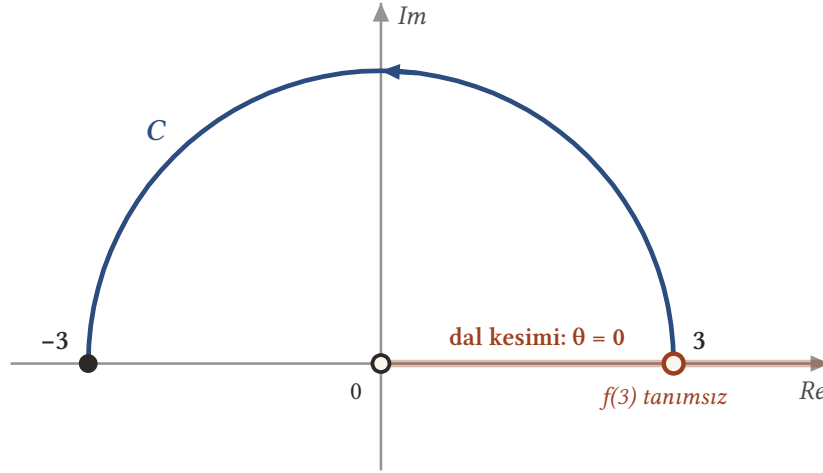
21.3 Dal Kesimli İntegrandlar

İntegrand, çok değerli bir fonksiyonun dalı olduğunda yol, dal kesimine dokunabilir; integral yine de var olabilir.

Örnek 21.4 (Kesime Dokunan Yarım Çember). C : $z = 3e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $z = 3$ 'ten $z = -3$ 'e üst yarım çember;

$$f(z) = z^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi)$$

dalı verilsin. $I = \int_C z^{1/2} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 21.3: $0 < \arg z < 2\pi$ dalının kesimi pozitif reel eksendir ve yolun başlangıç noktası $z = 3$ tam bu ışın üzerindedir: f orada tanımsızdır (boş nokta). Yine de $\theta \rightarrow 0^+$ iken integrandın sağ limiti vardır; parçalı sürekli integrand integrali kurtarır.

Çözüm.

Dal, $\theta = 0$ ışınında tanımsızdır; dolayısıyla f , C 'nin başlangıç noktası $z = 3$ 'te tanımlı bile değildir. Ama integral yine de vardır, çünkü integrand parçalı sürekli: $0 < \theta \leq \pi$ için

$$f[z(\theta)] z'(\theta) = \sqrt{3} e^{i\theta/2} \cdot 3ie^{i\theta} = 3\sqrt{3} i e^{i3\theta/2}$$

ve bu ifadenin $\theta \rightarrow 0^+$ sağ limiti $3\sqrt{3} i$ olarak vardır; $\theta = 0$ 'da bu değerle tanımlanırsa $[0, \pi]$ üzerinde sürekli olur. Hesap:

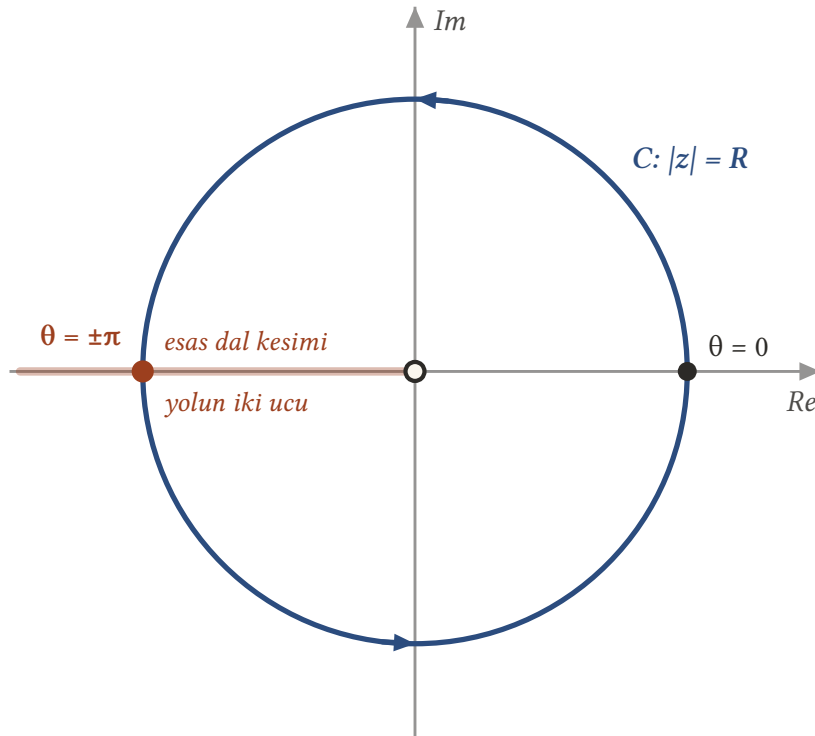
$$I = 3\sqrt{3} i \int_0^\pi e^{i3\theta/2} d\theta = 3\sqrt{3} i \left[\frac{2}{3i} e^{i3\theta/2} \right]_0^\pi = 2\sqrt{3} (e^{i3\pi/2} - 1) = -2\sqrt{3} (1 + i)$$

■

Örnek 21.5 (Kuvvet Fonksiyonunun Çember İntegrali). C , pozitif yönlü $z = Re^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) çemberi ve a sıfırdan farklı bir reel sayı olsun. Esas dal

$$z^{a-1} = \exp[(a-1) \operatorname{Log} z] \quad (|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

için $I = \int_C z^{a-1} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 21.4: Esas dalın kesimi negatif reel eksendir; C çemberi kesime yalnız $z = -R$ noktasında değer ve tam da orası yolun başlangıcı ($\theta = -\pi$) ile bitişidir ($\theta = \pi$). İntegrand yalnız bu tek noktada tanımsızdır ve orada iki tek yanlı limiti vardır; parçalı süreklilik integral için yeterlidir.

Çözüm.

$\theta \in (-\pi, \pi)$ için

$$f[z(\theta)] z'(\theta) = e^{(a-1)(\ln R + i\theta)} i R e^{i\theta} = i R^a e^{ia\theta}$$

(R^a , pozitif değeriyle alınır). Uç noktada $\theta = \pm\pi$ tek yanlı limitler var olduğundan integrand parçalı süreklidir ve

$$I = i R^a \int_{-\pi}^{\pi} e^{ia\theta} d\theta = i R^a \left[\frac{e^{ia\theta}}{ia} \right]_{-\pi}^{\pi} = i R^a \frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{ia} = i \frac{2R^a}{a} \sin a\pi$$

İki özel durum dikkat çekicidir:

- $a = n$ sıfırdan farklı bir tam sayıysa $\sin n\pi = 0$, dolayısıyla $\int_C z^{n-1} dz = 0$. (Bu durumda integrand tek değerlidir ve dala gerek yoktur.)
- Formülün kapsamadığı $a = 0$ durumunda ($1/a$ tanımsız) integrand $1/z$ olur ve doğrudan hesapla

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i R e^{i\theta}}{R e^{i\theta}} d\theta = i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi i$$

Sıfırdan farklı çıkan bu tek istisna, rezidü kuramının çekirdeğidir.

■

21.4 Alıştırma

Alıştırma 21.1 (Çevre İntegrali Hesapları).

- a) C , $z = 1 + i$ 'den $z = 3 + i$ 'ye yatay doğru parçası olmak üzere $\int_C \bar{z} dz$ integralini hesaplayınız.
- b) C , pozitif yönlü $|z| = 1$ çemberi olmak üzere $\int_C \bar{z} dz = 2\pi i$ olduğunu gösteriniz.
- c) C , $|z| = 2$ çemberinin üst yarısı ($z = 2$ 'den $z = -2$ 'ye) olmak üzere $\int_C \frac{dz}{z}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

a) Yatay parçayı parametreleyelim: $z(t) = t + i$, $1 \leq t \leq 3$. O zaman $\bar{z} = t - i$ ve $dz = dt$ 'dir:

$$\int_C \bar{z} dz = \int_1^3 (t - i) dt = \left[\frac{t^2}{2} - it \right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - 3i \right) - \left(\frac{1}{2} - i \right) = 4 - 2i$$

b) Çemberi $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) ile parametreleyelim. Bu durumda

$$\bar{z} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

İntegrandda üsler birbirini götürür:

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Sonucun sıfır olmaması şaşırtıcı değildir: $\bar{z}$ analitik olmadığından, ikinci kısımda kanıtlanacak Cauchy-Goursat teoremi burada uygulanamaz. (Birim çember üzerinde $\bar{z} = 1/z$ olduğuna dikkat ediniz; hesap aslında $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ integralini vermiştir.)

c) Üst yarı çemberi $z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) ile parametreleyelim; $\theta = 0$ noktası $z = 2$, $\theta = \pi$ noktası $z = -2$ 'dir, yani yön istenen yöndür. Türev $dz = 2ie^{i\theta} d\theta$ olduğundan

$$\frac{dz}{z} = \frac{2ie^{i\theta} d\theta}{2e^{i\theta}} = i d\theta$$

Yarıçap sadeleşir ve geriye sabit bir integrand kalır:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^\pi i d\theta = \pi i$$

■

Bir integrali tam hesaplayamadığımızda bile modülünü sınırlamak çoğu zaman yeterlidir; bunun sistematik aracı [ML eşitsizliği](#)dir.

22. Çevre İntegrallerinin Modülleri İçin Üst Sınırlar

Kompleks analizde birçok teorem, bir integralin değerini hesaplamadan **modülünü sınırlayarak** kanıtlanır: sınır sıfıra çekilebiliyorsa integral yok olur, sabit kalıyorsa varlık garantiye alınır. Bu bölümün iki aracı — integral modülü lemması ve ML eşitsizliği — kuramın en çok kullanılan teknik gereçleridir.

22.1 İntegral Modülü Lemması

Teorem 22.1 (İntegralin Modülü). $w(t)$, $[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli kompleks değerli bir fonksiyonsa

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt$$

İspat.

Sol taraf sıfırsa eşitsizlik apaçıktır; sıfır değilse integralin değerini kutupsal biçimde yazalım:

$$\int_a^b w(t) dt = r_0 e^{i\theta_0}, \quad r_0 = \left| \int_a^b w dt \right| > 0$$

r_0 'ı çekelim:

$$r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t) dt$$

Sol taraf reel olduğundan sağ tarafın da reel olması, yani sanal kısmının sıfır olması gerekir:

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta_0} w(t)] dt$$

Reel kısım modülü aşamaz:

$$\operatorname{Re} [e^{-i\theta_0} w(t)] \leq | e^{-i\theta_0} w(t) | = | w(t) |$$

Reel integrallerin monotonluğuyla $r_0 \leq \int_a^b |w(t)| dt$; r_0 tam olarak sol taraf olduğundan kanıt biter. ■

22.2 ML Eşitsizliği

Teorem 22.2 (ML Eşitsizliği). C , L uzunluğunda bir çevre; f , C üzerinde parçalı sürekli olsun. C 'nin her z noktasında

$$|f(z)| \leq M$$

olacak biçimde negatif olmayan bir M sabiti varsa

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

İspat.

$z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), C 'nin bir parametrik temsili olsun. Lemma ve modülün çarpımsallığıyla

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]| |z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML$$

Son integral, *yay uzunluğunun* ta kendisidir.

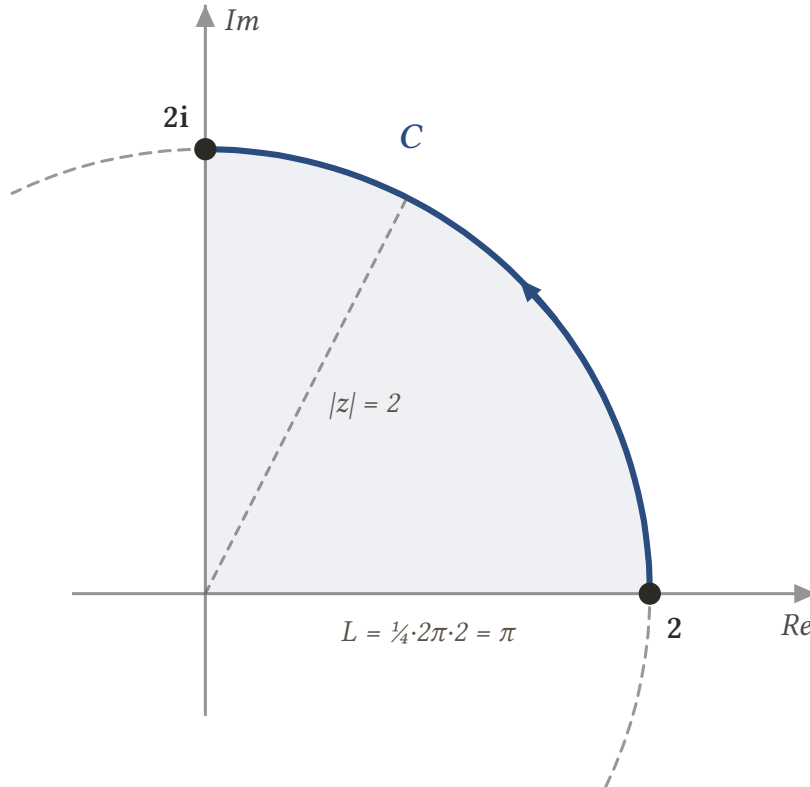
■

Böyle bir M **her zaman vardır**: $|f[z(t)]|$, kapalı $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli reel bir fonksiyondur ve orada sınırlıdır; f , C üzerinde sürekli olduğunda M olarak maksimum değer alınabilir.

22.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 22.1 (Hesapsız Kestirim). C , $|z| = 2$ çemberinin $z = 2$ 'den $z = 2i$ 'ye birinci çeyrekte kalan yayı olsun. Şunu gösteriniz:

$$\left| \int_C \frac{z+4}{z^3-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{7}$$



Şekil 22.1: C , $|z| = 2$ çemberinin birinci çeyrekte kalan yayıdır: $z = 2$ 'den $z = 2i$ 'ye saat yönünün tersine. Uzunluğu tam çemberin dörtte biri, $L = \pi$; ML eşitsizliğindeki L budur.

Çözüm.

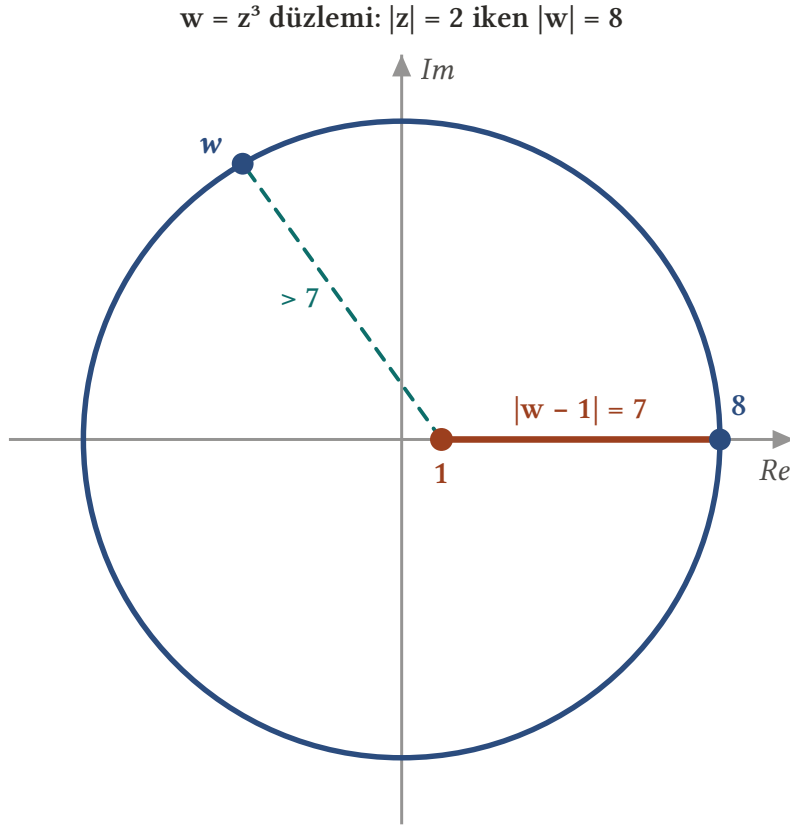
C üzerinde $|z| = 2$ 'dir. Pay için üçgen eşitsizliği:

$$|z+4| \leq |z| + 4 = 6$$

Payda için ters yönlü üçgen eşitsizliği:

$$|z^3 - 1| \geq ||z|^3 - 1| = 7$$

Dolayısıyla C üzerinde integrandın modülü $M = \frac{6}{7}$ ile sınırlıdır. Çeyrek çemberin uzunluğu $L = \frac{1}{4}(2\pi \cdot 2) = \pi$; ML eşitsizliği istenen sınırı verir. ■



Şekil 22.2: $|z| = 2$ iken $w = z^3$ değeri $|w| = 8$ çemberi üzerindedir. 1 noktası bu çemberin içinde kaldığından çember üzerindeki her w için $|w - 1| \geq 8 - 1 = 7$; en kısa uzaklık $w = 8$ 'de alınır. Ters yönlü üçgen eşitsizliği $|z^3 - 1| \geq ||z|^3 - 1|$ 'in geometrik anlamı budur.

Örnek 22.2 (Sonsuzda Sönen İntegral). $C_R: z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $R > 1$; karekökün

$$z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

dalı alınsın. Şunu kanıtlayınız:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz = 0$$

Çözüm.

C_R üzerinde $|z| = R$ için

$$|z^{1/2}| = |\sqrt{R} e^{i\theta/2}| = \sqrt{R}, \quad |z^2 + 1| \geq ||z|^2 - 1| = R^2 - 1$$

Dolayısıyla integrand $M_R = \frac{\sqrt{R}}{R^2 - 1}$ ile sınırlıdır; yarım çemberin uzunluğu $L = \pi R$. ML eşitsizliğiyle

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz \right| \leq M_R L = \frac{\pi R \sqrt{R}}{R^2 - 1} = \frac{\pi / \sqrt{R}}{1 - 1/R^2}$$

Son ifadede $R \rightarrow \infty$ iken pay sıfıra, payda 1'e gider; sınır sıfıra çöker ve integral de sıfıra gitmek zorunda kalır.

🔍 Kestirim reçetesi

ML uygulamalarının değişmez şablonu: paydaki her terime üçgen eşitsizliği ($|toplama| \leq$ modüller toplamı), paydadaki farka ters yönlü üçgen eşitsizliği ($|fark| \geq$ modüller farkı) uygulanır; yol uzunluğu geometriden okunur. Rezidü kuramındaki has olmayan integral hesaplarının tamamı bu şablonla kapanır.

22.4 Alıştırma

Alıştırma 22.1 (Kestirim Alıştırmaları).

a) C , $z = i$ 'den $z = 1$ 'e doğru parçası olmak üzere $\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4\sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz. *İpucu:* Parça üzerindeki bir noktanın başlangıca en kısa uzaklığı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 'dir.

b) C_R , $|z| = R$ ($R > 2$) pozitif yönlü çemberi olmak üzere

$$\left| \int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \frac{2\pi R (2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

kestirimini kurunuz ve $R \rightarrow \infty$ iken integralin sıfıra gittiği sonucunu çıkarınız.

Çözüm.

a) ML eşitsizliği için iki büyüklük gerekir: yolun uzunluğu ve integrandın yol üzerindeki bir üst sınırı. Uzunluk doğrudan okunur; i ile 1 arasındaki doğru parçası için

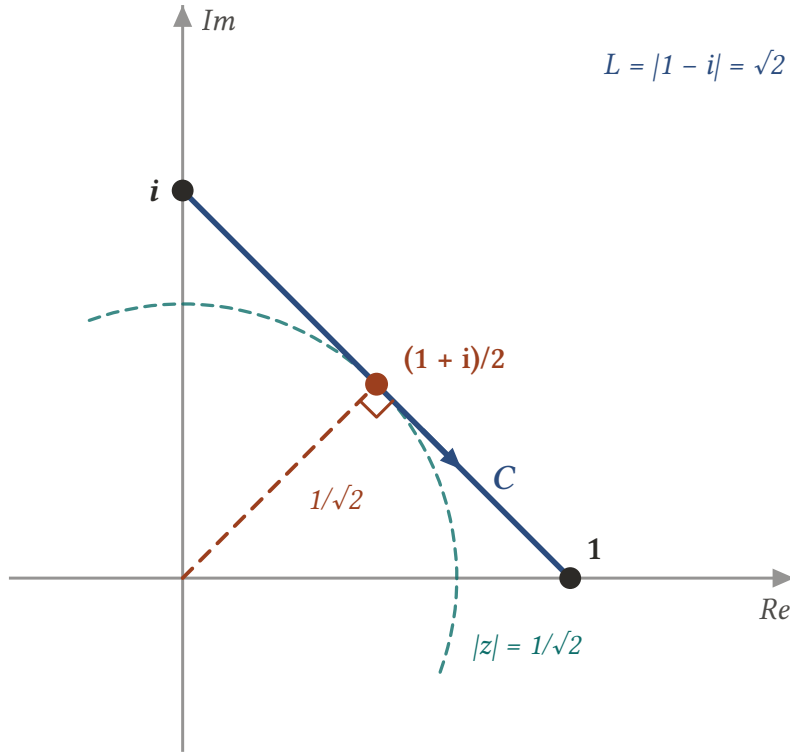
$$L = |1 - i| = \sqrt{2}$$

Üst sınır için integrandın modülünü yazalım:

$$\left| \frac{1}{z^4} \right| = \frac{1}{|z|^4}$$

Bu ifadenin **en büyük** olduğu yer, $|z|$ 'nin en küçük olduğu noktadır. İpucundaki gibi, parça üzerindeki noktaların başlangıca uzaklığı en az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 'dir (parçanın orta noktası $\frac{1+i}{2}$, uzaklığı $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Dolayısıyla parça üzerinde

$$|z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{|z|^4} \leq (\sqrt{2})^4 = 4 = M$$



Şekil 22.3: i 'den 1 'e giden doğru parçasının başlangıca en yakın noktası, başlangıçtan indirilen dikmenin ayağı olan orta nokta $(1 + i)/2$ 'dir; uzaklığı $1/\sqrt{2}$. Parça, $|z| = 1/\sqrt{2}$ çemberine orada teğettir; dolayısıyla parça üzerinde $|z| \geq 1/\sqrt{2}$ ve $1/|z|^4 \leq 4 = M$ olur. Uzunluk $L = \sqrt{2}$.

ML eşitsizliği sonucu verir:

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \leq ML = 4\sqrt{2}$$

b) Paydayı çarpanlarına ayırılım:

$$z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$$

$|z| = R$ üzerinde payı üstten, paydayı alttan sınırlayacağız. Üçgen eşitsizliği payı verir:

$$|2z^2 - 1| \leq 2|z|^2 + 1 = 2R^2 + 1$$

Ters üçgen eşitsizliği paydanın iki çarpanını alttan sınırlar; $R > 2$ olduğundan her iki alt sınır da pozitiftir:

$$|z^2 + 1| \geq R^2 - 1, \quad |z^2 + 4| \geq R^2 - 4$$

Bölümün modülü için

$$\left| \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} \right| \leq \frac{2R^2 + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} = M$$

Çemberin uzunluğu $L = 2\pi R$ olduğundan ML eşitsizliği istenen kestirimi verir:

$$\left| \int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \frac{2\pi R (2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

$R \rightarrow \infty$ davranışını görmek için sağ tarafta payın R^3 , paydanın R^4 mertebesinde olduğuna bakmak yeterlidir: oran R^{-1} gibi davranır. Kesin ifadeyle, pay ve paydayı R^4 'e bölersek

$$\frac{2\pi R (2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} = \frac{2\pi(2 + \frac{1}{R^2})}{R(1 - \frac{1}{R^2})(1 - \frac{4}{R^2})} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Sıkıştırma ilkesiyle integralin kendisi de sıfıra gider. Bu tür kestirimler, [has olmayan integrallerin](#) rezidülerle hesaplanmasında büyük yarım çemberlerin katkısını yok etmek için kullanılacaktır.

■

Kestirim araçları hazır. Kapanış bölümünde, integralin yoldan bağımsızlığını tam olarak karakterize eden teoremi kanıtlıyoruz: [ters türevler](#).

23. Ters Türevler

$\int_C z dz$ her yolda aynı çıkmış, $\int_C \bar{z} dz$ ise yola göre değişmişti. Aradaki fark tek bir kavramda düğümlenir: integrandın bir **ters türevinin** var olup olmaması. Bu bölümün teoremi, yoldan bağımsızlığı üç eşdeğer yüzüyle karakterize eder – ve kalkülüsün temel teoremini çevre integrallerine taşır.

23.1 Ters Türev

Tanım 23.1 (Ters Türev). f , bir D domeninde sürekli olsun. D 'nin her noktasında $F'(z) = f(z)$ koşulunu sağlayan bir F fonksiyonuna f 'nin D 'deki bir **ters türevi** denir.

Ters türev, türevi olan bir fonksiyon olduğundan zorunlu olarak **analitiktir**. Ayrıca toplamsal sabit dışında **tektir**: iki ters türevin farkının türevi D 'de sıfırdır ve **sabitlik teoremi** gereği fark sabittir.

23.2 Denklik Teoremi

Teorem 23.1 (Üçlü Denklik). f , bir D domeninde sürekli olsun. Aşağıdaki ifadelerden biri doğruysa üçü birden doğrudur:

- a) f 'nin D 'de bir F ters türevi vardır;
- b) sabit z_1 noktasından sabit z_2 noktasına giden, tamamen D 'de kalan **tüm çevreler** boyunca f 'nin integraleri aynı değere sahiptir ve bu ortak değer

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$

- c) tamamen D 'de kalan **her kapalı çevre** üzerinde f 'nin integrali sıfırdır.

İspat.

Üç ifadenin denkliği için (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) zincirini kurmak yeterlidir.

(a) $\Rightarrow$ (b). $F' = f$ olsun. $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), z_1 'den z_2 'ye D 'de kalan düzgün bir yay ise zincir kuralıyla

$$\frac{d}{dt} F[z(t)] = F'[z(t)] z'(t) = f[z(t)] z'(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

Temel teorem uygulanır:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt = F[z(t)] \Big|_a^b = F(z_2) - F(z_1)$$

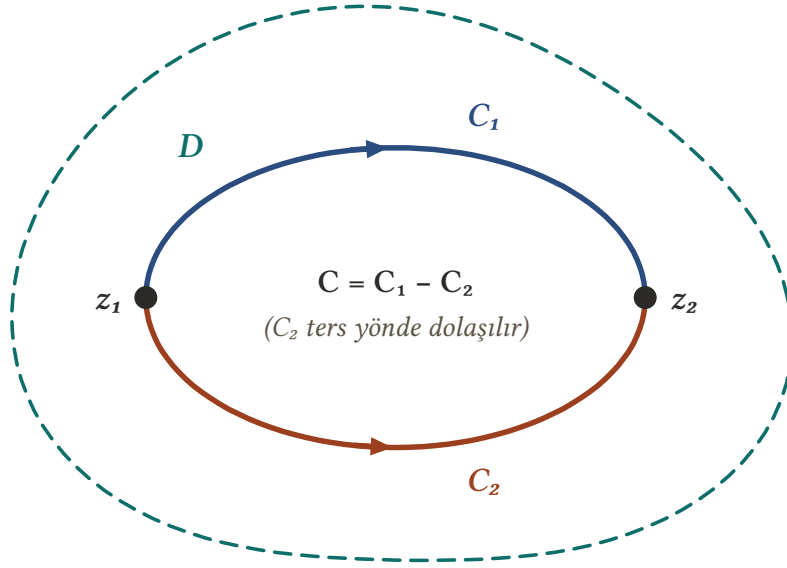
C , düzgün yayların eklenmesiyle oluşan genel bir çevreyse, her C_k parçası z_k 'den z_{k+1} 'e uzansın; parça değerleri teleskopik toplanır:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n [F(z_{k+1}) - F(z_k)] = F(z_{n+1}) - F(z_1)$$

Değer yalnız uçlara bağlıdır; (b) kanıtlandı.

(b) $\Rightarrow$ (c). C , D 'de kapalı bir çevre olsun; üzerinde iki nokta z_1, z_2 seçip C 'yi, ikisi de z_1 'den z_2 'ye giden C_1 ve C_2 yollarına ayıralım: $C = C_1 - C_2$. Yoldan bağımsızlıkla

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz \Rightarrow \int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{-C_2} f dz = \int_{C_1} f dz - \int_{C_2} f dz = 0$$



Şekil 23.1: Kapalı C çevresi üzerinde iki nokta seçilince C, ikisi de z_1 'den z_2 'ye giden iki yola ayrılır: C_1 (üst) ve C_2 (alt). C'yi dolaşmak C_1 'i ileri, C_2 'yi geri ($-C_2$) izlemektir; yoldan bağımsızlıkla iki integral eşit olduğundan C üzerindeki integral sıfırdır.

(c) $\Rightarrow$ (a). Kapalı çevre integralleri sıfır olsun. Önce (c)'nin (b)'yi verdiği dikkat edelim: z_1 'den z_2 'ye iki yol C_1, C_2 için $C_1 - C_2$ kapalıdır, integrali sıfırdır, dolayısıyla iki yol aynı değeri verir. Şimdi $z_0 \in D$ sabitleyip

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds \quad (z \in D)$$

tanımlayalım; yoldan bağımsızlık sayesinde bu tanım tek değerlidir. $F' = f$ olduğunu gösterelim. $z \in D$ verilsin; $z + \Delta z$, z 'nin tamamen D'de kalan bir komşuluğunda olsun ($\Delta z \neq 0$). Yolları z 'den $z + \Delta z$ 'ye bir doğru parçasıyla tamamlayarak

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds$$

yazabiliriz (integral doğru parçası üzerinden alınabilir). $\int_z^{z+\Delta z} ds = \Delta z$ olduğundan

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds \Rightarrow \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds$$

f, z 'de sürekli: her $\varepsilon > 0$ için $|s - z| < \delta$ iken $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. $|\Delta z| < \delta$ seçilirse doğru parçası üzerindeki her s için bu kestirim geçerlidir ve [ML eşitsizliği](#)yle

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon$$

Demek ki

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

yani $F'(z) = f(z)$; (a) kanıtlandı ve zincir kapandı.

■

Teorem, üç ifadeden herhangi birinin belirli bir f için doğru olduğunu **iddia etmez**; yalnızca ya üçünün birden doğru ya üçünün birden yanlış olduğunu söyler. İspat, teorem kutusunun içinde katlanmış olarak duruyor; önce teoremin nasıl kullanıldığını görelim.

23.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 23.1 (Doğrudan Temel Teorem). Sürekli $f(z) = z^2$ fonksiyonu tüm düzlemde $F(z) = \frac{z^3}{3}$ ters türevine sahiptir; $z = 0$ 'dan $z = 1 + i$ 'ye **her** çevre için

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i)$$

Örnek 23.2 (Delinmiş Düzlemde $1/z^2$). $f(z) = \frac{1}{z^2}$, delinmiş düzlem $|z| > 0$ 'da süreklidir ve orada $F(z) = -\frac{1}{z}$ ters türevine sahiptir. Dolayısıyla başlangıç noktasını çevreleyen pozitif yönlü $z = 2e^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) çemberi için – hesaba gerek kalmadan –

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

Kapalı çevre başlangıçtan geçmediği sürece bu sonuç tüm kapalı çevrelerde geçerlidir.

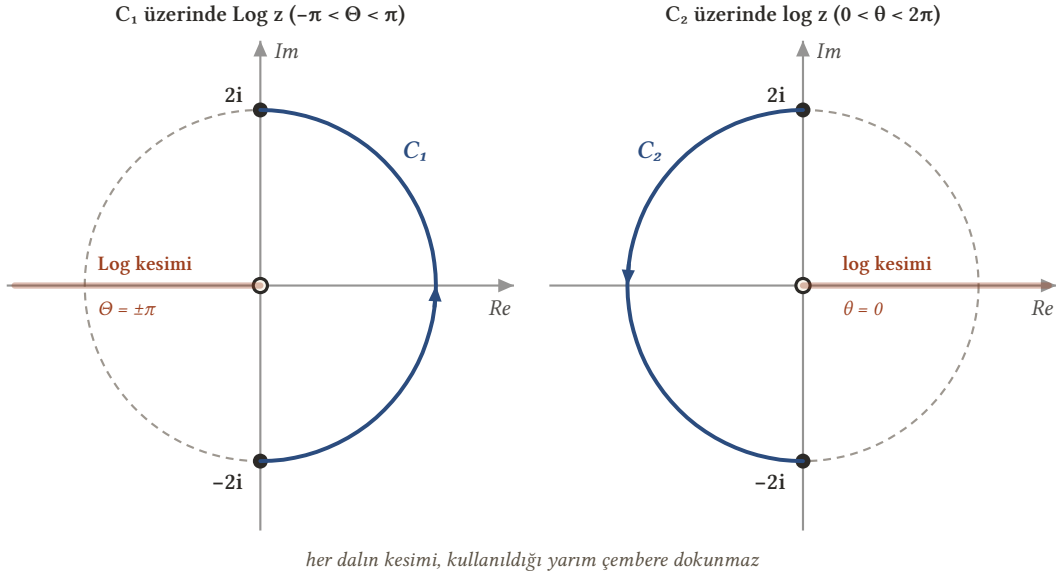
⚠ 1/z aynı oyuna gelmez

$\frac{1}{z}$ 'nin ters türevi olmaya tek aday $\log z$ 'nin dallarıdır; ama **hiçbir dal**, delinmiş düzlemin tamamında tanımlı ve analitik değildir – her dal kendi kesimi üzerinde çöker. Nitekim $|z| = 2$ çemberi üzerinde $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$ **bulunmuştur**; teorem gereği delinmiş düzlemde ters türev **var olamaz**. Yine de dallar, çemberin parçaları üzerinde kullanılabilir – sıradaki örnek tekniği gösterir.

Örnek 23.3 (İki Dalla Tam Çember). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olsun. $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ değerini, logaritmanın iki dalmı kullanarak yeniden elde edelim.

Çözüm.

Çemberi iki yarıya bölelim: C_1 , $-2i$ 'den $2i$ 'ye **sağ yarı**; C_2 , $2i$ 'den $-2i$ 'ye **sol yarı**.



Şekil 23.2: Her yarım çember için kesimi öbür tarafta kalan bir dal seçilir: sağ yarı C_1 üzerinde esas dal $\text{Log } z$ (kesimi negatif reel eksen), sol yarı C_2 üzerinde $0 < \theta < 2\pi$ dalı (kesimi pozitif reel eksen). İki parçanın toplamı $2\pi i$ 'yi verir. Tek bir dal çemberin tamamını kapsayamaz, çünkü her dalın kesimi çemberi keser.

Sağ yarıda esas dal iş görür: $\text{Log } z$ ($r > 0, -\pi < \theta < \pi$), sağ yarı düzlemi içeren domende $1/z$ 'nin ters türevidir:

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \text{Log } z \Big|_{-2i}^{2i} = \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right) - \left(\ln 2 - i\frac{\pi}{2} \right) = \pi i$$

Sol yarıda esas dalın kesimi yolu keser; $\log z = \ln r + i\theta$ ($0 < \theta < 2\pi$) dalına geçilir:

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{2i}^{-2i} = \left(\ln 2 + i\frac{3\pi}{2} \right) - \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right) = \pi i$$

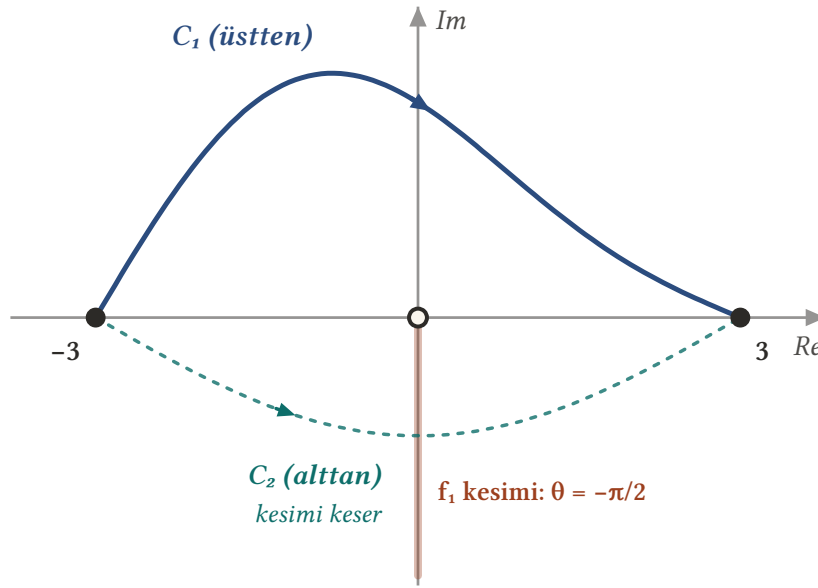
Toplam: $\int_C \frac{dz}{z} = \pi i + \pi i = 2\pi i.$

■

Örnek 23.4 (Karekök Dalıyla İntegral). C_1 , $z = -3$ 'ten $z = 3$ 'e reel eksenin **üstünden** geçen herhangi bir çevre olsun. Çok değerli $z^{1/2}$ 'nin

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

dalını alarak $\int_{C_1} z^{1/2} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 23.3: $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ dalının kesimi negatif sanal eksenidir: reel eksenin üstünden geçen her C_1 yolu kesime hiç dokunmaz, dolayısıyla f_1 bu yol üzerinde süreklidir ve ters türevi F_1 kullanılabilir. Altından geçen bir C_2 ise kesimi keser; onun için $\pi/2 < \theta < 5\pi/2$ dalı gerekir.

Çözüm.

Bu dal, üst yarı düzlemi ve reel eksenini (0 hariç) kapsayan domende tanımlı ve C_1 üzerinde süreklidir. Domende bir ters türevi vardır:

$$F_1(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r\sqrt{r} e^{i3\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

Uç değerlerle ($z = 3: r = 3, \theta = 0$; $z = -3: r = 3, \theta = \pi$):

$$\int_{C_1} z^{1/2} dz = F_1(3) - F_1(-3) = 2\sqrt{3} (e^{i0} - e^{i3\pi/2}) = 2\sqrt{3} (1 + i)$$

Aynı uçlar arasında reel eksenin **altından** geçen bir C_2 çevresi için $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}\right)$ dalıyla aynı yöntem uygulanabilir.

■

23.4 Alıştırma

Alıştırma 23.1 (Ters Türev Uygulamaları). Aşağıdaki integralleri uygun ters türevlerle hesaplayınız.

- $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$
- $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$
- $\int_1^3 (z-2)^3 dz$

Çözüm.

a) $e^{\pi z}$ fonksiyonu tüm düzlemde analitiktir ve ters türevi $\frac{e^{\pi z}}{\pi}$ 'dir; integral yoldan bağımsızdır:

$$\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz = \frac{e^{\pi z}}{\pi} \Big|_i^{i/2} = \frac{e^{i\pi/2} - e^{i\pi}}{\pi}$$

$e^{i\pi/2} = i$ ve $e^{i\pi} = -1$ değerleriyle

$$\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz = \frac{i - (-1)}{\pi} = \frac{1 + i}{\pi}$$

b) $\cos \frac{z}{2}$ fonksiyonunun ters türevi $2 \sin \frac{z}{2}$ 'dir:

$$\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz = 2 \sin \frac{z}{2} \Big|_0^{\pi+2i} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + i \right) - 2 \sin 0$$

Toplam formülünü uygulayalım:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + i \right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos i + \cos \frac{\pi}{2} \sin i = \cos i = \cosh 1$$

Böylece

$$\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz = 2 \cosh 1 = e + \frac{1}{e}$$

c) $(z-2)^3$ fonksiyonunun ters türevi $\frac{(z-2)^4}{4}$, tür:

$$\int_1^3 (z-2)^3 dz = \frac{(z-2)^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

Sonucun sıfır çıkması, integrandın $z = 2$ noktasına göre tek simetrlili olmasının doğal karşılığıdır.

■

Birinci kısmın sonuna geldik. Doğal soru şudur: f **analitikse** kapalı çevre integralleri ne zaman kendiliğinden sıfırlanır? Yanıt — Cauchy-Goursat teoremi — ders notlarının ikinci kısmının açılış konusudur.

24. Cauchy-Goursat Teoremi

Ters türevler bölümünde şunu görmüştük: sürekli bir f fonksiyonunun bir D domeninde ters türevi varsa, D 'de kalan her kapalı çevre üzerindeki integrali sıfırdır. Ama ters türevin varlığını önceden bilmek çoğu zaman mümkün değildir. Bu bölümün teoremi, çok daha kolay denetlenen bir koşul — **analitiklikle** — aynı sonucu verir ve kompleks analizin bütün integral kuramını taşıyan sütun hâline gelir.

24.1 Green Teoremiyle İlk Biçim

$C, z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) pozitif yönlü basit kapalı bir çevre; f, C üzerinde ve içinde analitik olsun. **Çevre integralinin tanımıyla**

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

$f = u + iv$ ve $z(t) = x(t) + iy(t)$ yazılıp çarpım açılırsa integral, iki reel eğrisel integrale ayrışır:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \quad (1)$$

Bu ayrışım biçimsel olarak $f dz = (u + iv)(dx + i dy)$ çarpımından da okunabilir. Şimdi f' türevinin, C 'nin kapattığı kapalı R bölgesinde **sürekli** olduğunu geçici olarak varsayalım; o zaman u ve v 'nin birinci mertebe kısmi türevleri de R 'de sürekli ve Green teoremi uygulanabilir:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y) dA$$

İki eğrisel integrale de uygulanırsa

$$\int_C f(z) dz = \iint_R (-v_x - u_y) dA + i \iint_R (u_x - v_y) dA \quad (2)$$

Fakat f analitik olduğundan **Cauchy-Riemann denklemleri** $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ geçerlidir; iki katlı integrallerin integrandları R 'de özdeş olarak sıfırdır. Sonuç:

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (3)$$

i Yön önemsizdir

İntegralin sıfır olduğu bir kez saptandığında C 'nin yönü fark etmez; negatif yönde alındığında

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz = 0$$

olur. Teoremdeki “pozitif yönlü” koşulu, yalnızca ispat kolaylığı içindir.

24.2 Türevin Sürekliliği Neden Gereksiz?

Yukarıdaki ispatın zayıf noktası, f' türevinin sürekliliğinin **varsayılmış** olmasıdır. Bu koşulun gereksiz olduğunu ilk kanıtlayan Goursat'dır ve katkısı kozmetik değildir: koşul kaldırıldığı için, analitik bir fonk-

siyonun türevi f' 'nin de analitik olduğunu — dolayısıyla f 'nin sonsuz kez türevlenebildiğini — döngüye düşmeden kanıtlayabiliriz. Bu sonuca **Cauchy integral formülünün genişletilmiş biçiminde** ulaşacağız.

i Kısa bir tarih: Cauchy'den Goursat'ya

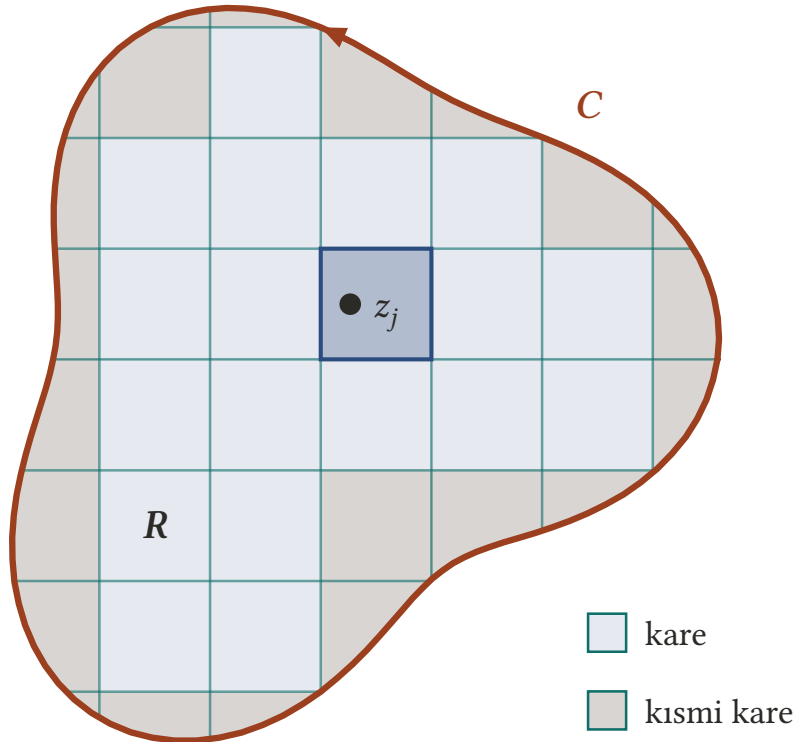
Yukarıdaki sonuç, adını Augustin-Louis Cauchy'den (1789–1857) alır. Cauchy, sanal sınırlar arasındaki belirli integralleri konu alan 1825 tarihli ünlü çalışmasında (*Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*) bu teoremi kurmuş, ancak ispatında f' türevinin sürekliliğini varsaymıştı.

Yaklaşık altmış yıl sonra Édouard Goursat (1858–1936), 1884'te *Acta Mathematica*'da yayımlanan kısa bir notta bu fazladan varsayımın gereksiz olduğunu gösterdi ve fikri 1900'de Amerikan Matematik Derneği'nin *Transactions* dergisinde daha olgun bir biçimde yeniden sundu. Kısa süre sonra Alfred Pringsheim aynı bölme fikrini karelerin yerine üçgenlerle işledi; birçok modern kitapta karşılaşılan üçgen argümanı buradan gelir. Teorem, iki matematikçinin katkısını birlikte anmak için **Cauchy-Goursat teoremi** diye anılır.

İspat iki adımlıdır: önce bölgeyi, üzerinde fark bölümünün türevden çok az saptığı küçük karelerle örten bir lemma kurulur; sonra integral bu karelerin sınırları üzerinde dağıtılır. Lemma teoremden önce geldiği için onunla başlıyoruz.

24.3 Kare Örtüsü Lemması

C pozitif yönlü basit kapalı bir çevre, R ise C ile içindeki noktalardan oluşan kapalı bölge olsun. R 'yi, eksenlere paralel eşit aralıklı doğrularla çizilen bir ızgarayla örtelim. Izgaranın oluşturduğu kapalı kare bölgelerden R 'nin dışına taşan parçalar atılırsa, R sonlu sayıda **kare** ve **kısmi kare** ile örtülür.



Şekil 24.1: R bölgesi (C ile içi) eksenlere paralel bir ızgarayla örtülür: tamamen C 'nin içinde kalan hücreler **kare**, C 'nin kestiği hücrelerin R 'de kalan parçaları **kısmi kare**dir. Her alt bölgede lemmanın sabit z_j noktası seçilir; kısmi karenin sınırı, kare kenarlarının parçalarının yanı sıra C 'nin yaylarını da içerir.

Teorem 24.1 (Örtü Lemması). f , R üzerinde analitik olsun. Her $\varepsilon > 0$ için R bölgesi, $j = 1, 2, \dots, n$ ile indislenmiş sonlu sayıda kare ve kısmi kareyle örtülebilir; öyle ki her birinde sabit bir z_j noktası vardır ve

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \quad (4)$$

eşitsizliği, o kare ya da kısmi karedeki z_j 'den farklı **tüm** z noktalarınca sağlanır.

İspat.

Aksini varsayalım: örtüdeki bir alt bölgede, koşulu sağlayan bir z_j noktası bulunamasın. Bu alt bölge bir kareyse, karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştirerek dört küçük kareye bölelim; kısmi kareyse tam karesi bölünüp R dışında kalan parçalar yeniden atılsın. Elde edilen küçük alt bölgelerin en az birinde koşul yine sağlanamıyorsa bölmeye devam ederiz.

Bölme işlemi sonsuza dek sürerse, iç içe yuvalanmış sonsuz bir

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots \quad (5)$$

kare dizisi doğar; her σ_k , σ_{k-1} 'in içindedir ve hiçbir istenen z_j noktasını barındırmaz. Bu karelerin hepsinde ortak bir z_0 noktası vardır ve her biri z_0 'dan başka R noktaları içerir. Karelerin köşegen uzunlukları sıfıra gittiğinden, z_0 'ın her δ -komşuluğu yeterince ileri indisli kareleri kapsar; dolayısıyla z_0 , R 'nin bir **yığılma noktasıdır** ve R kapalı olduğundan $z_0 \in R$ 'dir.

Ama f , R üzerinde analitiktir; özellikle z_0 'da türevlenebilirdir. Türev tanımına göre, verilen ε için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad (0 < |z - z_0| < \delta)$$

K yeterince büyük seçildiğinde σ_K karesinin köşegeni δ 'dan küçüktür; yani σ_K tamamen bu komşulukta kalır. O hâlde z_0, σ_K için aranan z_j noktası olarak iş görür ve σ_K 'yı bölmeye hiç gerek yoktu — bu, dizinin kuruluşuyla çelişir.

■

24.4 Teoremin İfadesi

Teorem 24.2 (Cauchy-Goursat Teoremi). Bir f fonksiyonu basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerindeki tüm noktalarda analitikse

$$\int_C f(z) dz = 0$$

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin ve R , **örtü lemmasındaki** gibi örtülsün. j -inci alt bölgede, z_j lemmadaki sabit nokta olmak üzere

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j), & z \neq z_j \\ 0, & z = z_j \end{cases} \quad (6)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Lemma gereği alt bölgenin her noktasında

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon \quad (7)$$

olur; ayrıca $\lim_{z \rightarrow z_j} \delta_j(z) = f'(z_j) - f'(z_j) = 0$ olduğundan δ_j o alt bölgede süreklidir.

(6) tanımı f için şu ayrışımı verir:

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j) z + (z - z_j) \delta_j(z)$$

C_j , j -inci alt bölgenin pozitif yönlü sınırı olsun. Yukarıdaki ifade C_j üzerinde integrallenirse

$$\int_{C_j} f(z) dz = [f(z_j) - z_j f'(z_j)] \int_{C_j} dz + f'(z_j) \int_{C_j} z dz + \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz$$

1 ve z fonksiyonlarının tüm düzlemde ters türevleri olduğundan ilk iki integral sıfırdır:

$$\int_{C_j} dz = 0, \quad \int_{C_j} z dz = 0$$

Geriye tek terim kalır:

$$\int_{C_j} f(z) dz = \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Şimdi bu n eşitliği toplayalım. Komşu iki alt bölgenin ortak sınır parçası boyunca integraller **zıt yönlerde** alındığından birbirini yok eder; ayakta kalan yalnızca C 'nin parçası olan yaylardır:

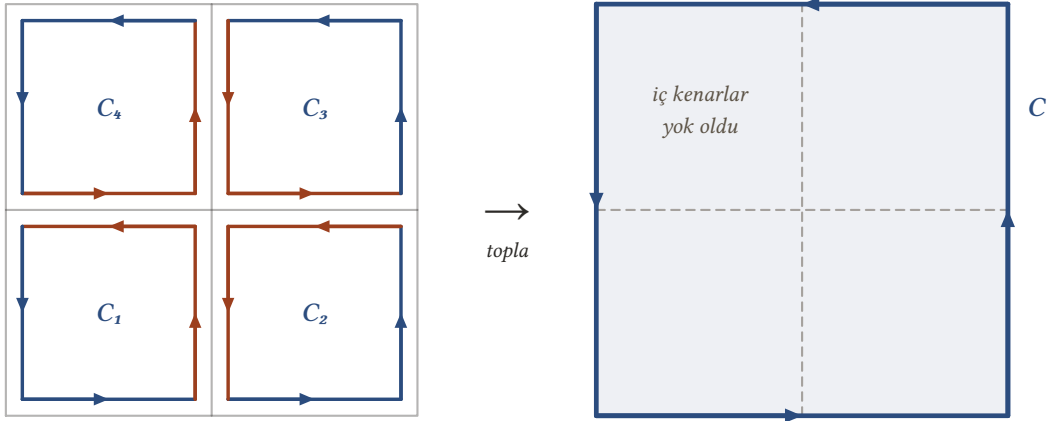
$$\sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z) dz = \int_C f(z) dz$$

Böylece

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| \quad (9)$$

dört kare, her biri pozitif yönlü

toplam: yalnızca dış sınır C kalır



Şekil 24.2: Dört komşu karenin her biri pozitif yönde dolaşılınca ortak kenarlar iki kez ve **zıt yönlerde** katedilir (kırmızı çiftler); bu parçaların integralleri birbirini götürür. Toplamda yalnızca dış sınır üzerindeki integral kalır. Örtü lemmasındaki karelerde de aynı şey olur: iç kenarlar yok olur, geriye C 'nin yayları kalır.

(9)'un sağ tarafındaki her terime **ML eşitsizliğini** uygulayacağız. j -inci alt bölgenin bir kenar uzunluğu s_j olsun. Hem z hem z_j aynı karede kaldığından $|z - z_j| \leq \sqrt{2} s_j$ 'dir ve (7) ile

$$|(z - z_j) \delta_j(z)| < \sqrt{2} s_j \varepsilon$$

Alt bölge tam kareyse sınır uzunluğu $4s_j$ 'dir; alanı $A_j = s_j^2$ yazılırsa

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2} s_j \varepsilon \cdot 4s_j = 4\sqrt{2} A_j \varepsilon \quad (10)$$

Alt bölge kısmi kareyse sınır uzunluğu $4s_j + L_j$ 'yi aşmaz; burada L_j , C 'nin o kısmi kareye düşen parçasının uzunluğudur. A_j yine tam karenin alanı olmak üzere

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2} s_j \varepsilon (4s_j + L_j) < 4\sqrt{2} A_j \varepsilon + \sqrt{2} S L_j \varepsilon \quad (11)$$

Burada S , örtüdeki tüm kareleri ve C 'nin içini kapsayan büyük bir karenin kenar uzunluğudur; tüm A_j 'lerin toplamı S^2 'yi aşmaz. L ile C 'nin uzunluğunu gösterirsek (9)–(11) birlikte

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < (4\sqrt{2} S^2 + \sqrt{2} S L) \varepsilon$$

verir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan sağ taraf istendiği kadar küçük yapılabilir; ε 'dan bağımsız olan sol taraf ise sıfıra eşit olmak zorundadır.

💡 İspatın fikri tek cümlede

Analitik bir fonksiyon, çok küçük ölçekte **birinci dereceden bir polinom gibi** davranır; polinomların ise ters türevi vardır ve kapalı çevre integralleri sıfırdır. Lemma bu “çok küçük ölçeği” düzgün biçimde kurar, kalan hata terimi de ε ile ezilir.

Örnek 24.1 (Doğrudan Uygulama). C , pozitif ya da negatif yönlü herhangi bir basit kapalı çevre olsun. Bileşke fonksiyon $f(z) = e^{z^3}$ tüm düzlemde analitik olduğundan

$$\int_C e^{z^3} dz = 0$$

C hangi eğri olursa olsun, integrali hesaplamaya kalkışmak gereksizdir.

24.5 Alıştırma

Alıştırma 24.1 (Cauchy-Goursat Uygulamaları). C , pozitif yönlü $|z| = 1$ çemberi olsun. Aşağıdaki integrallerin neden sıfır olduğunu gerekçelendiriniz.

- $\int_C \frac{z^2}{z-3} dz$
- $\int_C z e^{-z} dz$
- $\int_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 2}$
- $\int_C \text{Log}(z+2) dz$

Çözüm.

Her şıkta yapılacak iş aynıdır: integrandın **hiçbir tekil noktasının** kapalı $|z| \leq 1$ diskinde bulunmadığını göstermek. Bu sağlandığında integrand C üzerinde ve içinde analitik olur ve Cauchy-Goursat teoremi integralin sıfır olduğunu söyler.

a) İntegrand bir polinom bölümdür; tek tekil noktası paydayı sıfırlayan $z = 3$ 'tür. $|3| = 3 > 1$ olduğundan bu nokta çemberin dışındadır. Diskte pay ve payda analitik, payda sıfırdan farklı olduğundan bölüm de analiktir:

$$\int_C \frac{z^2}{z-3} dz = 0$$

b) z ve e^{-z} fonksiyonlarının ikisi de tamdır; tam fonksiyonların çarpımı da tamdır. ze^{-z} hiçbir tekil noktaya sahip olmadığından teorem doğrudan uygulanır:

$$\int_C z e^{-z} dz = 0$$

c) Paydanın köklerini bulalım:

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Bu iki noktanın modülü

$$|-1 \pm i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1,41 > 1$$

olduğundan ikisi de çemberin dışındadır. İntegrand diskte analitiktir:

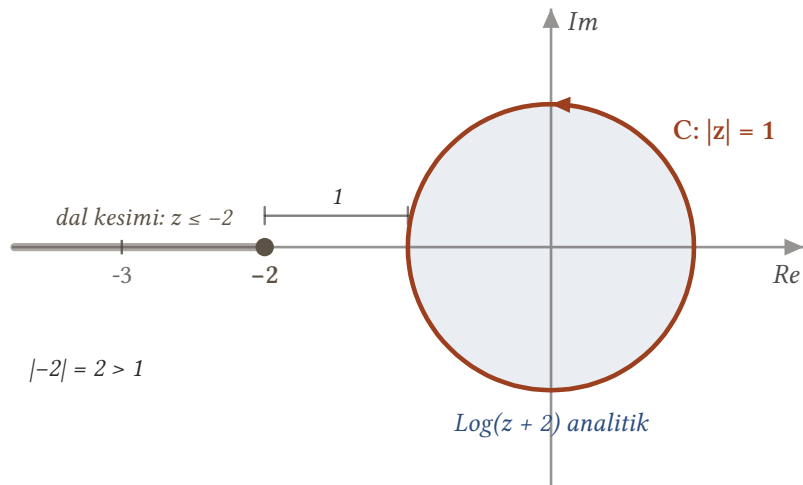
$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} = 0$$

d) Esas logaritma $\text{Log } w$, $w = 0$ noktasında ve negatif reel ekseninde ($w \leq 0$) analitik değildir; dal kesimi w -düzleminde başlangıçtan sola uzanan ışıdır. Burada $w = z + 2$ olduğundan kesim, z -düzleminde

$$z + 2 \leq 0 \Leftrightarrow z \leq -2$$

koşulunu sağlayan noktalardan, yani reel eksenin -2 noktasından sola uzanan ışınından oluşur. Bu ışının başlangıca en yakın noktası $z = -2$ 'dir ve $|-2| = 2 > 1$ 'dir; kesim, kapalı birim diskle kesişmez. Dolayısıyla $\text{Log}(z + 2)$ diskte analitiktir:

$$\int_C \text{Log}(z + 2) dz = 0$$



Şekil 24.3: $\text{Log}(z + 2)$ 'nin dal kesimi, w -düzlemindeki negatif reel eksenin z -düzlemine taşınmış hâlidir: $z = -2$ 'den sola uzanan ışın. Işının başlangıca en yakın noktası -2 olup birim çemberin 1 birim dışındadır; kesim kapalı diske değmez, $\text{Log}(z + 2)$ diskte analitiktir ve integral sıfırdır.



Teorem basit kapalı çevreler için kuruldu. Sıradaki adım kısıtı gevşetmektir: hangi domenlerde **her** kapalı çevre için geçerlidir, delikli domenlerde ne olur? Yanıt **basit ve çok bağlantılı domenlerde**.

25. Basit ve Çok Bağlantılı Domenler

Cauchy-Goursat teoremi tek bir basit kapalı çevre için kuruldu. Uygulamada ise iki genişlemeye ihtiyaç duyarız: eğri kendini kesiyorsa ne olur, ve domende **delikler** varsa integral nasıl davranır? Bu bölüm iki soruyu da yanıtlıyor; ikincisinin yanıtı, rezidü kuramının bütün hesap tekniğini önceden haber verir.

25.1 Basit Bağlantılı Domenler

Tanım 25.1 (Basit Bağlantılı Domen). Bir D domeni, içindeki her basit kapalı çevre yalnızca D 'nin noktalarını çevreliyorsa **basit bağlantılıdır**. Sezgisel olarak: D 'nin “deliği” yoktur.

Bir disk, bir yarı düzlem ve tüm düzlem basit bağlantılıdır. Buna karşılık aynı merkezli iki çember arasında kalan **halka domen** basit bağlantılı değildir: halkanın içindeki bir çember, halkaya ait olmayan noktaları (merkezdeki deliği) çevreler.

Teorem 25.1 (Basit Bağlantılı Domende Cauchy-Goursat). f fonksiyonu basit bağlantılı bir D domeninde analitikse, D 'deki **her kapalı** C çevresi için

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (1)$$

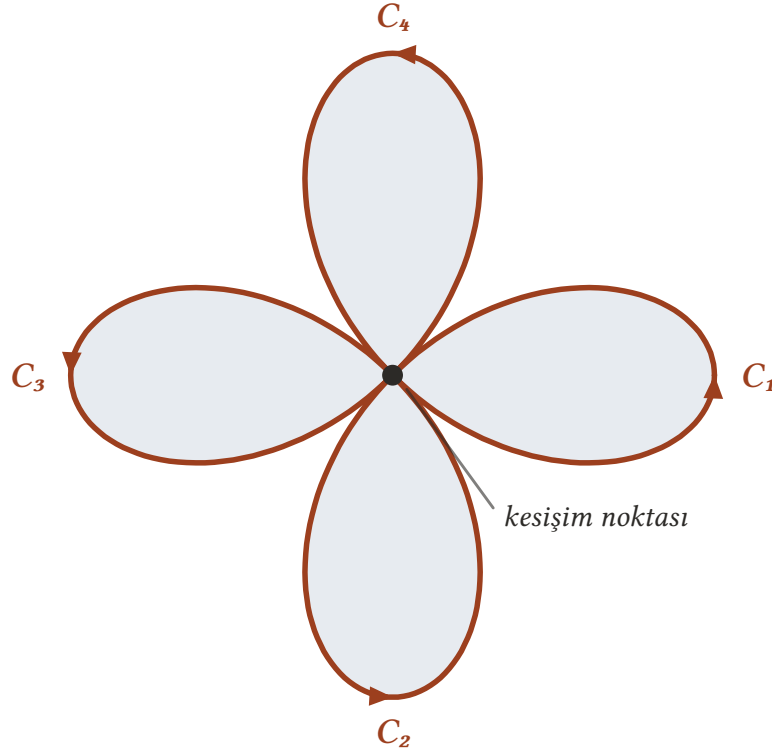
Burada C 'nin basit olması gerekmez; kendini kesebilir.

İspat.

C basit kapalıysa sonuç doğrudan Cauchy-Goursat teoremidir: C , D 'nin içinde kaldığından f , C 'nin üstünde ve içinde analitiktir.

C kapalı olup kendini **sonlu** sayıda noktada kesiyorsa, C sonlu sayıda basit kapalı çevreden oluşur. Örneğin dört ilmekli bir eğri için C_1, C_2, C_3, C_4 basit kapalı çevreleri C 'yi oluşturur; her birine Cauchy-Goursat uygulanırsa

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C_k} f(z) dz = 0$$



Şekil 25.1: Dört yapraklı gül eğrisi kendini yalnızca başlangıç noktasında keser. Tek bir kapalı C çevresi olarak dolaşıldığında sırayla C_1, C_2, C_3, C_4 basit kapalı ilmeklerinden geçer; her ilmek pozitif yönlüdür ve kendi içini çevreler. Cauchy-Goursat teoremi her birine ayrı ayrı uygulanır, integraller toplanır.

Kapalı çevrenin kendini sonsuz çoklukta noktada kestiği durumda incelikler doğar; teorem yine geçerlidir, ancak kanıtı farklı bir yaklaşım ister.

■

Örnek 25.1 (Diskte Kapalı Çevre). C , açık disk $|z| < 2$ içindeki herhangi bir kapalı çevre olsun (kendini kesebilir). O zaman

$$\int_C \frac{z e^z}{(z^2 + 9)^5} dz = 0$$

Çünkü disk basit bağlantılı bir domendir ve integrandın tekil noktaları $z = \pm 3i$ diskin dışındadır.

25.2 Ters Türevin Varlığı

Teorem 25.2 (Basit Bağlantılı Domende Ters Türev). Basit bağlantılı bir D domeninde analitik olan bir f fonksiyonunun D 'de her yerde bir ters türevi vardır.

İspat.

f , D 'de analitik olduğundan süreklidir; Teorem 25.1 gereği D 'deki her kapalı çevre üzerinde integrali sıfırdır. Ters türev teoreminin (c) $\Rightarrow$ (a) yönü, D 'de bir ters türevin var olduğunu verir.

■

Sonlu düzlem basit bağlantılı olduğundan bu, hemen şunu söyler: **her tam fonksiyonun tüm düzlemde bir ters türevi vardır.**

25.3 Çok Bağlantılı Domenler

Tanım 25.2 (Çok Bağlantılı Domen). Basit bağlantılı olmayan domene **çok bağlantılı** denir.

Aşağıdaki teorem, Cauchy-Goursat teoreminin delikli domenlere uyarlamasıdır. Fikri şudur: dış çevre boyunca dolaşırken, iç deliklerin etrafında **ters yönde** dolaşırsanız toplam sıfırlanır.

Teorem 25.3 (Çok Bağlantılı Domende Cauchy-Goursat). Aşağıdaki koşullar sağlansın:

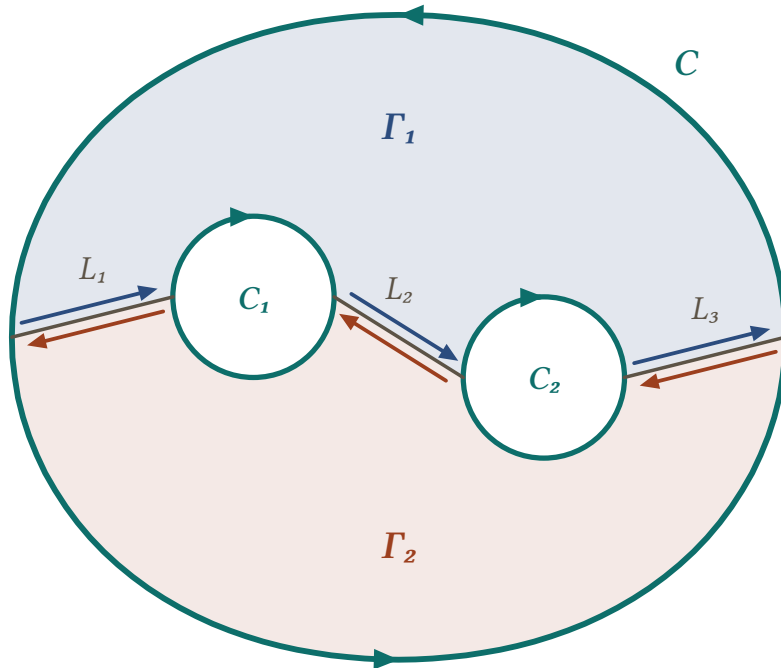
- a) C pozitif yönlü basit kapalı bir çevredir;
- b) C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) çevreleri C 'nin içinde kalan, tümü **negatif yönlü**, ayırık ve içleri ortak noktaya sahip olmayan basit kapalı çevrelerdir.

f fonksiyonu bu çevrelerin tümü üzerinde ve C 'nin içinde her C_k 'nin dışında kalan noktalardan oluşan kapalı bölgede analitikse

$$\int_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0 \quad (2)$$

İspat.

Dış çevre C 'yi iç çevre C_1 'e bağlayan, uç uca eklenmiş doğru parçalarından oluşan bir L_1 çokgensel yolu çizelim; C_1 'i C_2 'ye bağlayan L_2 , ve bu şekilde devam ederek C_n 'i C 'ye bağlayan L_{n+1} yolları alınsın. Bu kesikler, bölgeyi iki basit kapalı çevrenin $-\Gamma_1$ ve Γ_2 — çevrelediği iki parçaya ayırır. Her Γ , çokgensel yolların ve C ile C_k 'lerin parçalarının birleşimidir ve öyle yönlendirilebilir ki, üzerinde yürürken çevrelenen bölge daima solda kalsın.



Şekil 25.2: Dış çevre C ile iç çevreler C_1, C_2 arasındaki bölge (f 'nin analitik olduğu yer) L_1, L_2, L_3 kesikleri ile iki parçaya bölünür; her parça, bölge solda kalacak biçimde yönlendirilmiş basit kapalı bir Γ çevresiyle çevrilir. Her L_k iki kez ve zıt yönlerde katedildiğinden Γ_1 ile Γ_2 'nin integralleri toplanınca kesikler yok olur; geriye pozitif yönlü C ile negatif yönlü C_1, C_2 kalır.

f , her iki çevrenin üzerinde ve içinde analitik olduğundan Cauchy-Goursat teoremi uygulanır:

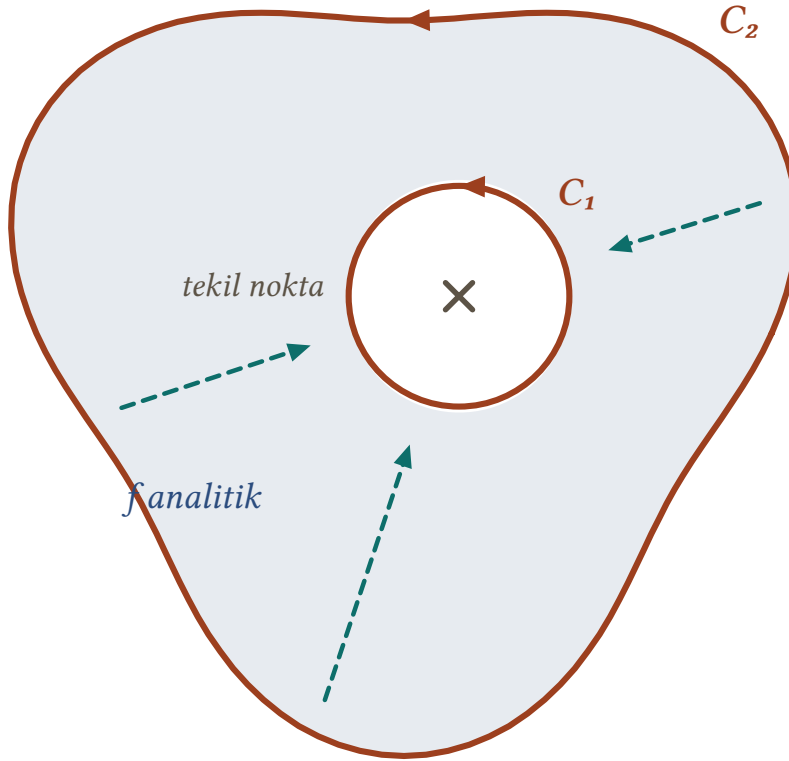
$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

İki integral toplandığında, her L_k yolu **iki kez ve zıt yönlerde** katedildiğinden bu parçaların katkıları birbirini yok eder; geriye yalnızca C ve C_k 'lar boyunca alınan integraller kalır. Bu da tam olarak (2) eşitliğidir. ■

25.4 Yolun Deformasyonu İlkesi

Teorem 25.4 (Yolun Deformasyonu). C_1 ve C_2 pozitif yönlü basit kapalı çevreler ve C_1, C_2 'nin içinde olsun. f fonksiyonu bu iki çevre ve aralarındaki tüm noktalardan oluşan kapalı bölgede analitikse

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz \quad (3)$$



Şekil 25.3: C_2 çevresi, f 'nin analitik olduğu gölgeli bölgeden geçerek C_1 'e büzülür; tekil noktanın üstünden geçmediği sürece integral hiç değişmez. İki çevre de pozitif yönlüdür: çok bağlantılı domen teoremindeki negatif yönlü iç çevre, $-C_1$ olarak sağ tarafa taşındığında (3) eşitliği çıkar.

İspat.

Teorem 25.3 tek bir iç çevreyle uygulanır; iç çevre negatif yönlü alınmalıdır:

$$\int_{C_2} f(z) dz + \int_{-C_1} f(z) dz = 0$$

$$\int_{-C_1} f dz = - \int_{C_1} f dz \text{ olduğundan istenen eşitlik çıkar.}$$

Adının anlamı

Bu sonuca **yolun deformasyonu ilkesi** denir: C_1 çevresi, f 'nin analitik olduğu noktalardan geçerek sürekli biçimde C_2 'ye deforme edilirse, f 'nin çevre üzerindeki integrali **hiç değişmez**. İntegralin değeri eğrinin ayrıntılı biçimine değil, hangi tekil noktaları çevrelediğine bağlıdır — rezidü kuramının bütün hesap mantığı bu gözlemin üzerine kurulur.

Örnek 25.2 (Orijini Çevreleyen Her Çevre). C , orijini çevreleyen herhangi bir pozitif yönlü basit kapalı çevre olsun. O zaman

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Çözüm.

Orijin merkezli ve tamamen C 'nin içinde kalacak kadar küçük yarıçaplı, pozitif yönlü bir C_0 çemberi alalım. $f(z) = 1/z$ fonksiyonu $z = 0$ dışında her yerde analitik olduğundan, iki çevre arasındaki kapalı bölgede analiktir ve **Teorem 25.4** uygulanır:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Son değer, **çember üzerinde doğrudan hesaplama** bulunmuştu. Dikkat edilecek nokta: C ne kadar çarpık olursa olsun, orijini bir kez çevrelediği sürece sonuç değişmez.

■

25.5 Alıştırma

Alıştırma 25.1 (Bağıntılılık Alıştırmaları).

- C , $|z| = 3$ pozitif yönlü çemberi olmak üzere $\int_C \frac{dz}{z-2}$ integralini, $z = 2$ merkezli küçük bir çembere deforme ederek hesaplayınız.
- C , $|z| = 2$ pozitif yönlü çemberi olsun. $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ integralinin, $z = 1$ ve $z = -1$ çevresindeki iki küçük çember üzerindeki integrallerin toplamına eşit olduğunu gerekçelendiriniz.
- $|z| > 0$ delinmiş düzleminin neden basit bağlantılı olmadığını, $1/z$ fonksiyonunun orada ters türevi bulunmadığı gerçeğiyle ilişkilendirerek açıklayınız.

Çözüm.

a) İntegrandın tek tekil noktası $z = 2$ 'dir ve C 'nin içindedir. C_0 , $z = 2$ merkezli, tamamen C 'nin içinde kalan pozitif yönlü küçük bir çember olsun (ör. yarıçapı $\rho < 1$). İki çevre arasındaki halkada integrand analitik olduğundan deformasyon ilkesi

$$\int_C \frac{dz}{z-2} = \int_{C_0} \frac{dz}{z-2}$$

verir. Sağdaki integral doğrudan hesaplanır: $z = 2 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) alındığında $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ve $z - 2 = \rho e^{i\theta}$ olduğundan yarıçap sadeleşir:

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z-2} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Yarıçapın hiç görünmemesi, deformasyon ilkesinin somut kanıtıdır:

$$\int_C \frac{dz}{z-2} = 2\pi i$$

b) İntegrandın tekil noktaları $z = 1$ ve $z = -1$ 'dir; ikisi de $|z| = 2$ çemberinin içindedir. C_1 ve C_2 , sırasıyla bu noktaların çevresinde birbirini ve C' 'yi kesmeyen, pozitif yönlü küçük çemberler olsun. C' 'nin içinde ama C_1 ile C_2 'nin dışında kalan bölge, iki delikli çok bağlantılı bir domendir ve integrand orada analitiktir. Çok bağlantılı domenler teoremi tam olarak bu durumu kapsar. Teoremden iç çevreler negatif yönlüdür; $\int_{-C_k} f dz = - \int_{C_k} f dz$ olduğundan (2) eşitliğindeki bu terimler sağa geçirilince

$$\int_C \frac{dz}{z^2-1} = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2-1}$$

Değerleri de bulalım. Basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

C_1 üzerinde ikinci terim analitiktir (tekil noktası -1 dışarıda kalır), dolayısıyla integrali sıfırdır; birinci terim (a) şıkkındaki hesabı verir:

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} (2\pi i) = \pi i$$

Benzer biçimde C_2 üzerinde yalnızca ikinci terim katkı yapar:

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2} (2\pi i) = -\pi i$$

Toplam sıfırdır: $\int_C \frac{dz}{z^2-1} = 0$. Sonucun sıfır çıkması, integralin kendiliğinden yok olduğu anlamına gelmez; iki deliğin katkıları birbirini götürmüştür.

c) Basit bağlantılı bir domende, domende kalan her basit kapalı çevrenin **içi de** domene aittir. Delinmiş düzlemde $|z| = 1$ çemberini alalım: çember domendedir, ama içindeki $z = 0$ noktası değildir. Demek ki delinmiş düzlem basit bağlantılı değildir.

Bu geometrik gözlemin analitik karşılığı $1/z$ fonksiyonudur. Basit bağlantılı bir domende analitik olan her fonksiyonun kapalı çevre integralleri sıfırdır ve **üçlü denklik teoremi** gereği fonksiyonun orada bir ters türevi bulunur. Oysa $1/z$ delinmiş düzlemde analitik olduğu hâlde

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

olduğundan bir ters türevi olamaz. Delinmiş düzlem basit bağlantılı olsaydı bu imkânsızdı. Logaritmanın tek bir dalla tüm delinmiş düzlemde tanımlanamamasının — her dal için bir kesim atmak zorunda kalmamızın — kaynağı da aynı topolojik engeldir.

■

Elimizde artık güçlü bir araç var: analitiklik, kapalı çevre integrallerini sıfırlıyor. Bir sonraki bölümde bu aracı ters çevirip şaşırtıcı bir sonuç elde edeceğiz — bir fonksiyonun **iç noktalardaki değerleri**, yalnızca sınırdaki değerleriyle belirlenir: [Cauchy integral formülü](#).

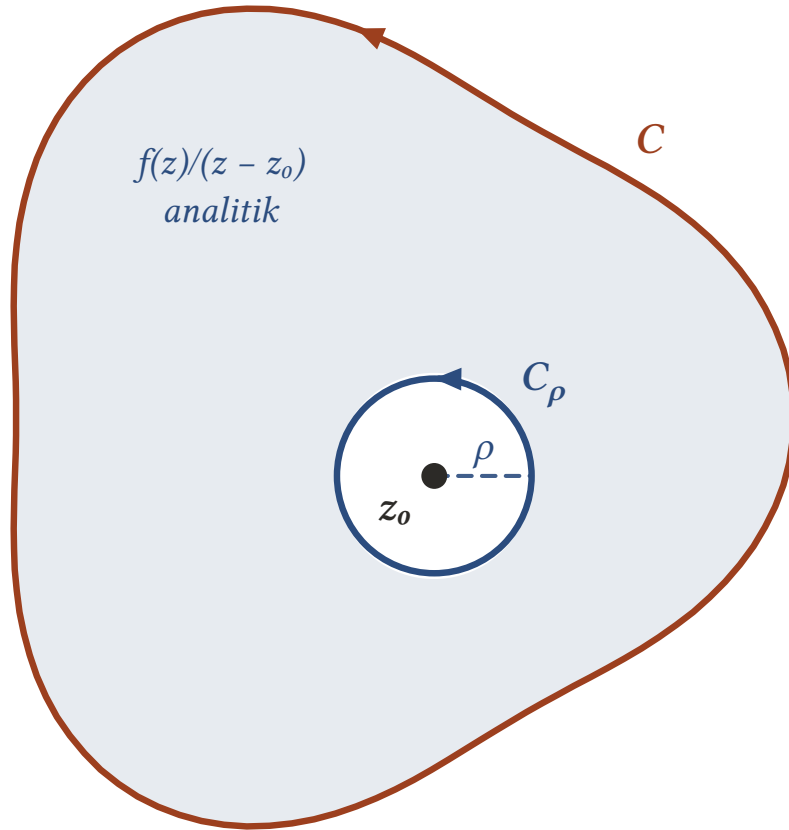
26. Cauchy İntegral Formülü ve Genişlemesi

Cauchy-Goursat teoremi bir yasak koyuyordu: analitik bir fonksiyonun kapalı çevre integrali sıfırdır. Bu bölümde aynı teoremden bir **inşa** çıkaracağız: bir fonksiyonun çevre içindeki her değeri, yalnızca çevre üzerindeki değerlerinden hesaplanabilir. Sonuçları çarpıcıdır — bir kez türevlenebilen fonksiyonun sonsuz kez türevlenebildiği buradan çıkar.

26.1 Cauchy İntegral Formülü

Teorem 26.1 (Cauchy İntegral Formülü). *f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde her yerde analitik olsun. z_0 , C 'nin içinde herhangi bir nokta ise*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (1)$$



Şekil 26.1: İspatın sahnesi: z_0 iç noktası, çevresindeki küçük C_ρ çemberi ve aradaki halka. Halka üzerinde $f(z)/(z - z_0)$ analitik olduğundan C üzerindeki integral C_ρ üzerindeki eşittir. Yarıçap, sürekliliğin verdiği δ 'dan küçük seçilir ($\rho < \delta$); böylece çember üzerinde $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ kalır.

İspat.

C_ρ, z_0 merkezli ρ yarıçaplı, tamamen C 'nin içinde kalacak kadar küçük pozitif yönlü çember olsun. $f(z)/(z - z_0)$ bölümü, C_ρ ile C arasındaki kapalı bölgede analitiktir; *yolun deformasyonu ilkesi* gereği

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

Sağ tarafa $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$ ayrışımını uygulayalım:

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (2)$$

Çember üzerindeki temel integral $\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ olduğundan

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (3)$$

Şimdi sağ tarafın istendiği kadar küçük yapılabildiğini gösterelim. f, z_0 'da analitik, dolayısıyla sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. C_ρ 'nin yarıçapı $\rho < \delta$ seçilsin. $z \in C_\rho$ iken $|z - z_0| = \rho$ olduğundan integrandın modülü ε/ρ ile sınırlıdır ve çemberin uzunluğu $2\pi\rho$ 'dur; *ML eşitsizliğiyle*

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$$

(3) ile birleştirilirse

$$\left| \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\varepsilon$$

Sol taraf ε 'dan bağımsız, negatif olmayan bir sabittir ve keyfi olarak küçük bir sayıdan küçük kalmaktadır; o hâlde sıfırdır. ■

Formül, hesap için şu biçimde kullanılır:

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) \quad (4)$$

Örnek 26.1 (Formülle İntegral Hesabı). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)}$$

integralini hesaplayınız.

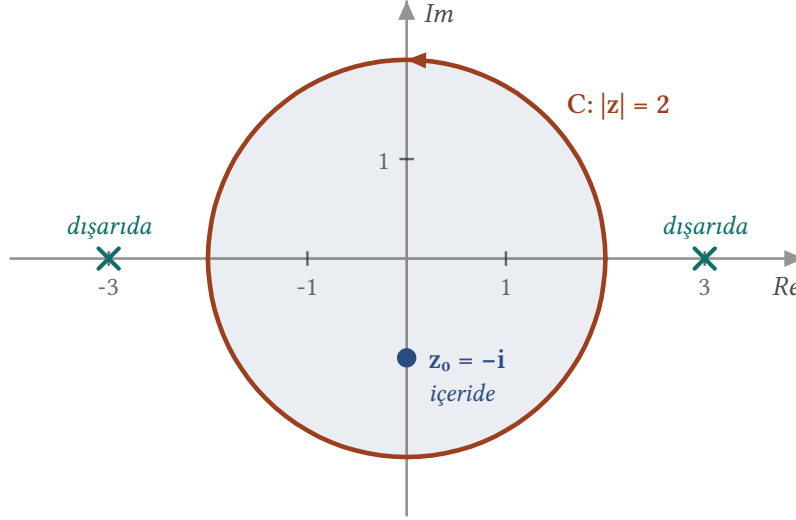
Çözüm.

İntegrandı, tekil noktası çember içinde olan çarpanı ayıracak biçimde okuyalım:

$$f(z) = \frac{z}{9 - z^2}, \quad z_0 = -i$$

$f, |z| = 2$ çemberinin içinde ve üzerinde analitiktir (tekil noktaları $z = \pm 3$ dışarıdadır) ve $z_0 = -i$ çemberin içindedir. (4) ile

$$\int_C \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)} = \int_C \frac{f(z) dz}{z - (-i)} = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \left(\frac{-i}{10} \right) = \frac{\pi}{5}$$



Şekil 26.2: İntegrandın üç tekil noktası vardır: $9 - z^2 = 0$ kökleri $z = \pm 3$ çemberin dışında, $z = -i$ ise içindedir. Bu yüzden $z/(9 - z^2)$ çarpanı, C üzerinde ve içinde analitik olan f rolünü üstlenir; $(z + i)$ paydası ise formülün $z - z_0$ çarpanıdır.

■

26.2 Türevler İçin Genişleme

Formül (1), integral işareti altında z 'ye göre türetilirse — bu adımın geçerliliği ayrıca kanıtlanmalıdır — türevler için de integral temsilleri doğar.

Teorem 26.2 (Genişletilmiş Cauchy İntegral Formülü). f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde analitik, z ise C 'nin içinde bir nokta olsun. O zaman f 'nin her mertebeden türevi z 'de vardır ve

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Burada $f^{(0)} = f$ ve $0! = 1$ kabulüyle $n = 0$ durumu Cauchy integral formülünün kendisidir.

İspat.

$n = 1$ durumunu ayrıntılı kuralım; genel durum tümevarımla aynı teknikle yürür.

d, z 'den C üzerindeki noktalara olan en küçük uzaklık ve $0 < |\Delta z| < d$ olsun. Cauchy integral formülü z ve $z + \Delta z$ noktalarında yazılıp fark alınırsa

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)}$$

Aday ifadeyi çıkaralım:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Delta z f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \quad (6)$$

Sağ tarafı sınırlayalım. $M, |f(s)|$ 'nin C üzerindeki maksimum değeri ve L, C 'nin uzunluğu olsun. $|s - z| \geq d$ ve $|\Delta z| < d$ olduğundan

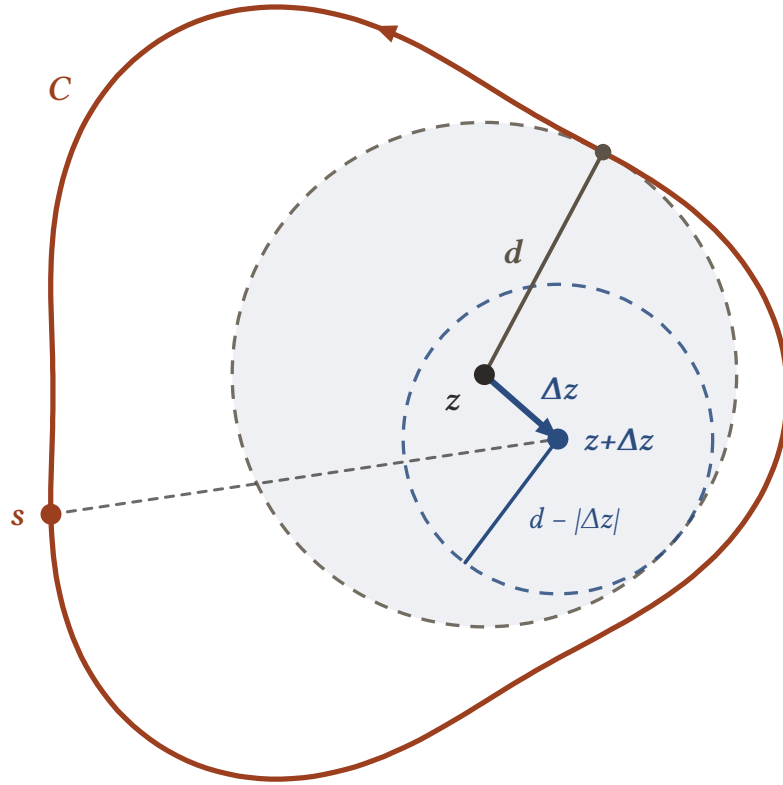
$$|s - z - \Delta z| = |(s - z) - \Delta z| \geq ||s - z| - |\Delta z|| \geq d - |\Delta z| > 0$$

ve ML eşitsizliğiyle

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Delta z f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|\Delta z| M}{(d - |\Delta z|)^2} L$$

$\Delta z \rightarrow 0$ iken bu sınır sıfıra gider; (6)'nın sol tarafı da sıfıra gitmek zorundadır. Demek ki türev vardır ve

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2}$$



Şekil 26.3: d , z 'nin C 'ye en kısa uzaklığıdır: z merkezli d yarıçaplı (kesikli çizgili) disk C 'ye değeri ama onu aşmaz. $|\Delta z| < d$ alındığında $z + \Delta z$ bu diskin içinde kalır ve etrafındaki $d - |\Delta z|$ yarıçaplı çember de diskin içinde kaldığından C 'yi aşmaz; dolayısıyla C üzerindeki her s için $|s - z - \Delta z| \geq d - |\Delta z| > 0$ olur ve payda hiçbir zaman sıfırlanmaz.

Aynı teknik f'' için

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^3}$$

verir; tümevarımla genel formül (5) elde edilir.

■

Hesap için kullanışlı biçim, z_0 çevre içinde bir nokta olmak üzere

$$\int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Örnek 26.2 (Yüksek Mertebeden Kutuplu İntegral). C , pozitif yönlü birim çember $|z| = 1$ olmak üzere

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$f(z) = e^{2z}$ tamdır; $z_0 = 0$ ve $n = 3$ alınır. $f'''(z) = 8e^{2z}$ olduğundan $f'''(0) = 8$ ve

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{2\pi i \cdot 8}{6} = \frac{8\pi i}{3}$$

■

Örnek 26.3 (Temel İntegraller). z_0 , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin herhangi bir iç noktası olsun. $f(z) = 1$ alınırsa (7) ifadesi

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

verir; çünkü sabit fonksiyonun birinci ve daha yüksek mertebeden türevleri sıfırdır. Bu iki eşitlik, rezidü hesaplarının tamamında temel taş olarak kullanılacaktır.

26.3 Üç Temel Sonuç

Teorem 26.3 (Türevler de Analitiktir). Bir f fonksiyonu verilen bir noktada analitikse, f 'nin tüm mertebeden türevleri de o noktada analitiktir.

İspat.

f, z_0 'da analitik olsun; o zaman f 'nin analitik olduğu bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğu vardır. z_0 merkezli, $\varepsilon/2$ yarıçaplı pozitif yönlü C_0 çemberi alınırsa f, C_0 'ın içinde ve üzerinde analitiktir. **Teorem 26.2** gereği C_0 'ın **her** iç noktasında f'' vardır; yani f', z_0 komşuluğunda türevlenebilirdir ve dolayısıyla z_0 'da analitiktir. Aynı akıl yürütme f' 'ye uygulanarak f'' 'nin analitikliği, ardından bütün mertebeler elde edilir.

■

Bunun bileşenler cinsinden karşılığı, **harmonik fonksiyonlar bölümünde** ödünç aldığımız gerçeği borçtan çıkarır:

Teorem 26.4 (Bileşenlerin Düzgünlüğü). $f = u + iv$ bir noktada analitikse, u ve v bileşenleri o noktada **her mertebeden sürekli** kısmi türevlere sahiptir.

Gerçekten $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ analitik, dolayısıyla sürekli olduğundan birinci mertebeye kısmi türevler sürekli; $f'' = u_{xx} + iv_{xx} = v_{yx} - iu_{yx}$ üzerinden aynı akıl yürütme tüm mertebelere taşınır.

Teorem 26.5 (Morera Teoremi). f , bir D domeninde sürekli olsun. D 'deki **her** kapalı C çevresi için

$$\int_C f(z) dz = 0$$

ise f, D 'de analitiktir.

İspat.

Hipotez, *ters türev teoreminin* (c) koşuludur; dolayısıyla D' 'de $F' = f$ olacak biçimde analitik bir F vardır. f , analitik F 'nin türevi olduğundan *Teorem 26.3* gereği D' 'de analiktir.

■

Morera teoremi, Cauchy-Goursat teoreminin **tersidir**: basit bağlantılı domenlerde “analitiklik” ile “her kapalı çevre integralinin sıfır olması” birbirine denk iki koşuldur.

Teorem 26.6 (Cauchy Eşitsizliği). f, z_0 merkezli R yarıçaplı pozitif yönlü C_R çemberinin içinde ve üzerinde analitik olsun. $M_R, |f(z)|$ 'nin C_R üzerindeki maksimum değeriye

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

İspat.

(5) formülü C_R üzerinde yazılıp *ML eşitsizliği* uygulanır. C_R üzerinde $|z - z_0| = R$ ve çemberin uzunluğu $2\pi R$ olduğundan

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M_R}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! M_R}{R^n}$$

■

Bu eşitsizlik, bir fonksiyonun türevlerinin büyüklüğünü yalnızca **fonksiyonun kendi büyüklüğüyle** sınırlar; reel analizde benzeri yoktur ve bir sonraki bölümün kilit aracıdır.

26.4 Alıştırma

Alıştırma 26.1 (İntegral Formülü Alıştırmaları). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olsun. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$
- b) $\int_C \frac{z dz}{2z + 1}$
- c) $\int_C \frac{\cos z}{(z - \pi/2)^2} dz$
- d) $\int_C \frac{e^{-z} dz}{(z + 1)^2}$

Çözüm.

a) İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ ile $z^2 + 8 = 0$ denkleminin kökleri $z = \pm 2\sqrt{2}i$ 'dir. İkincilerin modülü $2\sqrt{2} \approx 2,83 > 2$ olduğundan çemberin dışındadır; içeride yalnızca $z = 0$ kalır. İntegrali formülün biçimine sokalım:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz = \int_C \frac{f(z)}{z - 0} dz, \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 8}$$

Seçilen f, C üzerinde ve içinde analiktir. Cauchy integral formülü:

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \frac{\cos 0}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

b) Paydayı önce baş katsayısından arındıralım:

$$\frac{z}{2z + 1} = \frac{z}{2(z + \frac{1}{2})} \Rightarrow \int_C \frac{z dz}{2z + 1} = \frac{1}{2} \int_C \frac{z}{z - (-\frac{1}{2})} dz$$

Tekil nokta $z = -1/2, |z| = 2$ çemberinin içindedir ve $f(z) = z$ her yerde analiktir:

$$\frac{1}{2} \int_C \frac{z dz}{z + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \pi i \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi i}{2}$$

c) Payda kareli olduğundan formülün genişletilmiş biçimi ($n = 1$) kullanılır:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0)$$

Burada $f(z) = \cos z$ ve $z_0 = \pi/2$ 'dir; $|\pi/2| \approx 1,57 < 2$ olduğundan tekil nokta $|z| = 2$ çemberinin içindedir. $f'(z) = -\sin z$ olduğundan

$$\int_C \frac{\cos z}{(z - \pi/2)^2} dz = 2\pi i \left(-\sin \frac{\pi}{2} \right) = -2\pi i$$

d) Yine $n = 1$ durumu; bu kez $f(z) = e^{-z}$ ve $z_0 = -1$ 'dir ($|-1| < 2$, içerde). $f'(z) = -e^{-z}$ olduğundan

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z + 1)^2} dz = 2\pi i f'(-1) = 2\pi i (-e^1) = -2\pi i e$$

■

Cauchy eşitsizliğinin tek bir satırlık sonucu, kompleks analizin en ünlü teoremlerinden birini doğruyor: sınırlı bir tam fonksiyon sabit olmak zorundadır — [Liouville teoremi ve cebirin temel teoremi](#).

27. Liouville Teoremi ve Cebirin Temel Teoremi

Cauchy eşitsizliği, bir fonksiyonun türevini kendi büyüklüğüyle sınırlıyordu. Yarıçapı büyüterek bu eşitsizliği zorladığımızda, kompleks analizin en keskin sonuçlarından biri ortaya çıkar: **tüm düzlemde sınırlı kalan bir tam fonksiyon, sabit olmaktan başka şansı yoktur**. Bunun ardından cebirin temel teoremi neredeyse bedavaya gelir.

27.1 Liouville Teoremi

Teorem 27.1 (Liouville Teoremi). Bir f fonksiyonu tam ve kompleks düzlemde sınırlıysa, $f(z)$ düzlem boyunca sabittir.

İspat.

z_0 herhangi bir nokta ve $R > 0$ keyfi olsun. f tam olduğundan, z_0 merkezli R yarıçaplı çemberin içinde ve üzerinde analitiktir; Cauchy eşitsizliği $n = 1$ için

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_R}{R} \quad (1)$$

verir. Burada M_R , $|f(z)|$ 'nin $|z - z_0| = R$ çemberi üzerindeki maksimum değeridir.

Sınırlılık hipotezi, her z için $|f(z)| \leq M$ olacak biçimde negatif olmayan bir M sabitinin varlığını söyler. $M_R \leq M$ olduğundan

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \quad (2)$$

Bu eşitsizlikteki M , R 'den bağımsızdır ve R keyfi olarak büyük seçilebilir. Sağ taraf $R \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiğine göre eşitsizlik ancak

$$f'(z_0) = 0$$

ise ayakta kalır. z_0 keyfi olduğundan $f'(z) \equiv 0$ 'dır; **sabitlik teoremi** gereği f sabittir.

⚠ Reel analizde karşılığı yoktur

$\sin x$ ve $\frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonları tüm reel ekseninde sonsuz kez türevlenebilir ve sınırlıdır, ama sabit değildir. Kompleks düzlemde ise $\sin z$ **sınırsızdır** ve $\frac{1}{1+z^2}$ tam değildir ($z = \pm i$ tekil noktalarıdır) – Liouville teoremiyle çelişecek bir örnek üretmek mümkün değildir.

27.2 Cebirin Temel Teoremi

Teorem 27.2 (Cebirin Temel Teoremi). $n \geq 1$ dereceli her

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad (a_n \neq 0)$$

polinomunun en az bir sıfırı vardır; yani $P(z_0) = 0$ olacak biçimde en az bir z_0 noktası mevcuttur.

İspat.

Tersini varsayalım: $P(z)$, hiçbir z değeri için sıfır olmasın. O zaman

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

fonksiyonu tüm düzlemde tanımlı ve analitik, yani tamdır. Sınırlı olduğunu göstereceğiz; Liouville teoremi çelişkiyi getirecektir.

$z \neq 0$ için

$$w = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \quad (3)$$

yazalım; bu tanımla

$$P(z) = (a_n + w) z^n \quad (4)$$

olur. (3)'teki bölümlerin her birinin modülü, $|z| > R$ olduğunda $\frac{|a_n|}{2n}$ sayısından küçük kalacak biçimde yeterince büyük pozitif bir R bulunabilir. Üçgen eşitsizliğinin n terime genellemesiyle $|z| > R$ iken

$$|w| < n \cdot \frac{|a_n|}{2n} = \frac{|a_n|}{2}$$

Ters yönlü üçgen eşitsizliği ise $|z| > R$ iken

$$|a_n + w| \geq ||a_n| - |w|| > \frac{|a_n|}{2}$$

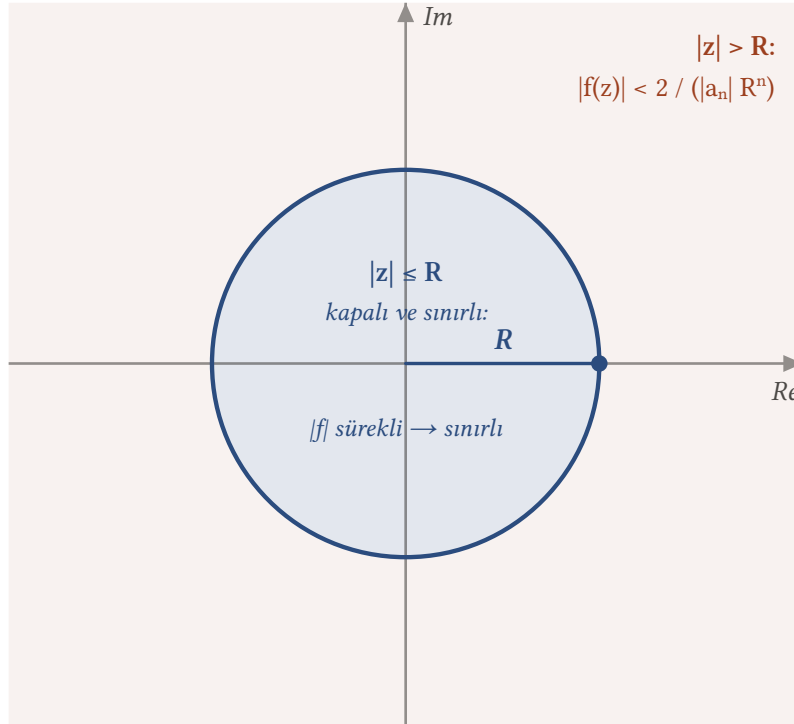
verir. (4) ile birlikte

$$|z| > R \implies |P(z)| = |a_n + w| |z|^n > \frac{|a_n|}{2} R^n \quad (5)$$

Dolayısıyla $|z| > R$ bölgesinde

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \frac{2}{|a_n| R^n}$$

yani f , $|z| \leq R$ diskinin dışında sınırlıdır. Öte yandan f bu kapalı diskte süreklidir; *kapalı sınırlı bölgede sürekli fonksiyonun modülü sınırlıdır*. İki bilgi birleştiğinde f , **tüm düzlemde** sınırlıdır.



Şekil 27.1: Cebirin temel teoreminin ispatında $f = 1/P$ iki parçada sınırlanır: $|z| > R$ bölgesinde (5) eşitsizliği $|f(z)| < 2/(|a_n|R^n)$ verir; kapalı ve sınırlı $|z| \leq R$ diskinde ise sürekli f 'nin modülü kendiliğinden sınırlıdır. İki sınırın büyüğü tüm düzlemde geçerlidir ve Liouville teoremi devreye girer.

Liouville teoremine göre $f(z)$, dolayısıyla $P(z)$ sabittir. Ama $a_n \neq 0$ ve $n \geq 1$ olduğundan P sabit değildir — çelişki.

■

27.3 Lineer Çarpanlara Ayrılış

Teorem 27.3 (Polinomların Çarpanlara Ayrılışı). $n \geq 1$ dereceli her $P(z)$ polinomu, c ve z_k kompleks sabitler olmak üzere

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \quad (6)$$

biçiminde lineer çarpanların çarpımı olarak yazılabilir. Buradaki z_k sabitlerinin bazıları tekrar edebilir; ancak $P(z)$, n taneden fazla **farklı** sifıra sahip olamaz.

İspat.

İspat adım adımdır: **Teorem 27.2** bir z_1 sıfırının varlığını garanti eder; polinom bölmesiyle

$$P(z) = (z - z_1) Q_1(z)$$

yazılır ve Q_1 , $n - 1$ derecelidir. Aynı argüman Q_1 'e uygulanarak z_2 elde edilir:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) Q_2(z)$$

Bu şekilde devam edilir; her adımda derece bir azaldığından n adım sonra sabit bir c çarpanı kalır ve (6) ifadesine ulaşılır. Çarpanların hepsi $(z - z_k)$ biçiminde olduğundan P 'nin sıfırları yalnızca $z_1, \dots, z_n$ sayılarıdır; farklı olanlarının sayısı n 'i aşamaz.

■

❓ İki farklı yol

Buradaki akıl yürütme iki adımlıdır: **Liouville teoremi en az bir** sıfır verir, ardışık polinom bölmeleri ise kalan sıfırları tek tek çıkarır. **Rouché teoremi**, bölme yapmadan — kökleri dolanma sayısı ile **sayarak** — aynı sonuca tek hamlede varan bambaşka bir kanıt sunar.

27.4 Alıştırma

Alıştırma 27.1 (Liouville Alıştırmaları).

- a) f tam ve her z için $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ ise f 'nin sabit olduğunu gösteriniz. *İpucu:* $g(z) = e^{f(z)}$ fonksiyonunu inceleyiniz; $|g| = e^{\operatorname{Re} f}$ sınırlıdır.
- b) f tam ve her z için $|f(z)| \geq 1$ ise f 'nin sabit olduğunu gösteriniz.
- c) $P(z) = z^3 - 1$ polinomunu (6) biçiminde lineer çarpanlara ayırınız.

Çözüm.

a) İpucundaki $g(z) = e^{f(z)}$ fonksiyonu, tam fonksiyonların bileşkesi olarak tamdır. Modülünü hesaplayalım:

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$$

Varsayım gereği $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ ve reel üstel fonksiyon artan olduğundan

$$|g(z)| \leq e^M \quad (\text{her } z \text{ için})$$

g tam ve sınırlıdır; Liouville teoremi g 'nin sabit olduğunu söyler. Şimdi f 'ye dönelim: $g' = f' e^f$ türevi her yerde sıfırdır ve $e^{f(z)}$ hiçbir zaman sıfır olmadığından $f'(z) \equiv 0$ olmak zorundadır. Türevi tüm düzlemde sıfır olan fonksiyon sabittir.

b) $|f(z)| \geq 1$ koşulu, özellikle f 'nin hiçbir yerde sıfır olmadığını söyler. O hâlde

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

fonksiyonu tüm düzlemde tanımlı ve analitiktir, yani tamdır. Modülü ise

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq 1$$

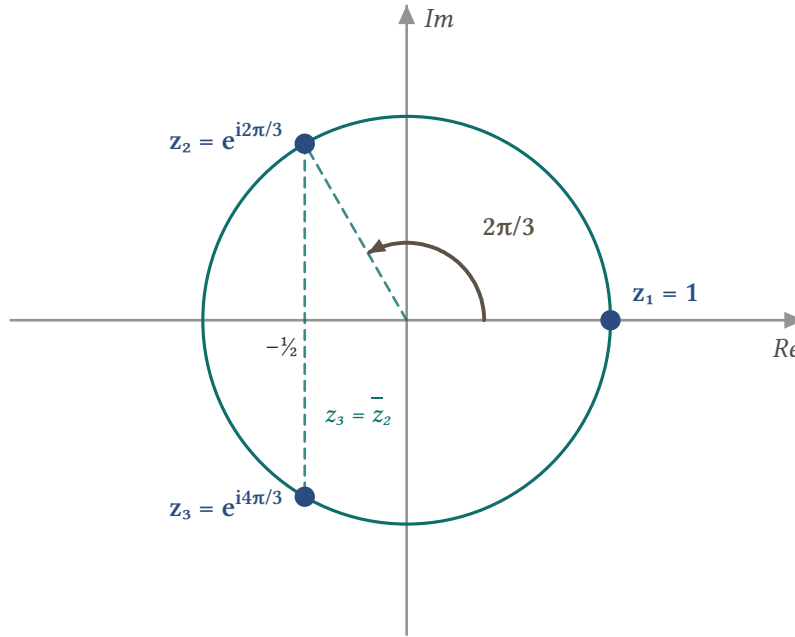
Liouville teoremi g 'nin sabit olduğunu verir; g sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $f = 1/g$ de sabittir.

c) $z^3 = 1$ denkleminin kökleri, birin küp kökleridir:

$$z_k = \exp\left(\frac{2k\pi i}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2)$$

yani

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad z_3 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$



Şekil 27.2: $z^3 = 1$ denkleminin kökleri birim çember üzerinde $2\pi/3$ 'lük eşit aralıklarla dizilir. z_2 ve z_3 reel eksene göre birbirinin yansımasıdır: ikisinin de reel kısmı $-1/2$, sanal kısımları $\pm\sqrt{3}/2$. Reel katsayılı $z^3 - 1$ 'in reel olmayan köklerinin eşlenik çift oluşturması bu simetridir.

Baş katsayı 1 olduğundan (6) biçiminde $c = 1$ 'dir:

$$P(z) = (z - 1) \left(z - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \left(z - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)$$

Son iki çarpanı çarparsak reel katsayılı ayrılaşa döneriz: $\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = z^2 + z + 1$, yani $P(z) = (z - 1)(z^2 + z + 1)$. Eşlenik köklerin çift olarak gelmesi tesadüf değildir: reel katsayılı bir polinomun reel olmayan kökleri her zaman eşlenik çiftler hâlinde bulunur.

■

Liouville teoremi modülün **sonsuzdaki** davranışını kullanıyordu. Sıradaki teorem ise modülün **içerideki** davranışını yasaklar: analitik bir fonksiyonun modülü, bir domenin iç noktasında maksimuma ulaşamaz – **maksimum modül ilkesi**.

28. Maksimum Modül İlkesi

Analitik bir fonksiyonun modülü bir tepe noktası yapabilir mi? Bu bölümün yanıtı kesindir: **hayır** – bir domenin iç noktasında modül maksimuma ulaşırsa fonksiyon sabittir. Sonuç, uygulamada son derece pratiktir: kapalı bir bölgede en büyük değeri aramak için yalnızca **sınıra** bakmak yeterlidir.

28.1 Gauss Ortalama Değer Teoremi

Teorem 28.1 (Gauss Ortalama Değer Teoremi). f, z_0 merkezli ρ yarıçaplı çemberin içinde ve üzerinde analitik olsun. O zaman f 'nin merkezdeki değeri, çember üzerindeki değerlerinin aritmetik ortalamasıdır:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (1)$$

İspat.

Cauchy integral formülünü $C_\rho: |z - z_0| = \rho$ çemberi üzerinde yazalım:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

$z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) parametrizasyonu ile $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ve $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ olduğundan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

■

28.2 Yerel Maksimum Lemması

Teorem 28.2 (Modül Lemması). $f, |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda analitik olsun. Bu komşuluğun her z noktasında

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|$$

ise $f(z)$, komşuluk boyunca sabit $f(z_0)$ değerine sahiptir.

İspat.

z_1 , komşulukta z_0 'dan farklı bir nokta ve $\rho = |z_1 - z_0|$ olsun. C_ρ, z_0 merkezli, z_1 'den geçen pozitif yönlü çember olmak üzere Teorem 28.1 uygulanır:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \quad (2)$$

Öte yandan hipotez gereği

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \leq |f(z_0)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (3)$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)| \quad (4)$$

(2) ve (4) birlikte, aradaki ifadelerin eşit olmasını zorlar:

$$\int_0^{2\pi} \left[|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \right] d\theta = 0$$

İntegrand θ 'ya göre süreklidir ve (3) gereği negatif değildir; integrali sıfır olan böyle bir fonksiyon özdeş olarak sıfırdır:

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| = |f(z_0)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (5)$$

Özel olarak $|f(z_1)| = |f(z_0)|$, z_1 , delinmiş komşulukta keyfi olduğundan $|f(z)| = |f(z_0)|$ eşitliği tüm komşulukta geçerlidir; yani $|f|$ bir domende sabittir. **Modülü sabit olan analitik fonksiyonun kendisi de sabittir**; dolayısıyla komşuluktaki her z için $f(z) = f(z_0)$ 'dır. ■

28.3 Maksimum Modül İlkesi

Teorem 28.3 (Maksimum Modül İlkesi). Bir f fonksiyonu bir D domeninde analitik ve sabit değilse, $|f(z)|$ modülü D 'de maksimum değere sahip değildir. Yani D 'deki tüm z noktaları için $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ olacak biçimde bir $z_0 \in D$ noktası yoktur.

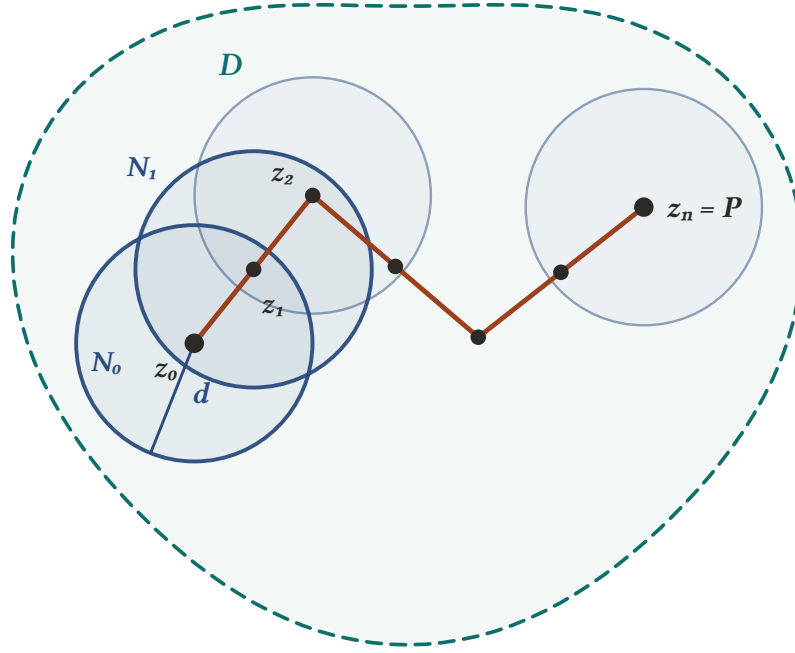
İspat.

Böyle bir z_0 noktasının var olduğunu varsayıp f 'nin D boyunca sabit olmak zorunda kalacağını göstereceğiz.

P , D 'nin herhangi bir başka noktası olsun. D bir domen olduğundan z_0 'ı P 'ye bağlayan ve tamamen D 'de kalan bir L çokgensel yolu vardır. d , L üzerindeki noktalardan D 'nin sınırına olan en kısa uzaklığı gösterebilir (D tüm düzlemse d herhangi bir pozitif değer olabilir). L üzerinde

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = P, \quad |z_k - z_{k-1}| < d$$

koşulunu sağlayan sonlu bir nokta dizisi seçelim ve her z_k merkezli, d yarıçaplı N_k komşuluğunu alalım. Her komşuluk D 'nin içindedir ve her N_k 'nin merkezi N_{k-1} 'in içinde kalır.



Şekil 28.1: z_0 'ı P 'ye bağlayan çokgensel L yolu üzerinde, ardışık uzaklıkları d 'den küçük noktalar seçilir ve her birinin etrafına d yarıçaplı bir N_k komşuluğu konur (d , L 'nin D 'nin sınırına en kısa uzaklığı). Her komşuluk D 'nin içindedir ve her z_k bir önceki N_{k-1} 'in içinde kalır; sabitlik lemması komşuluktan komşuluğa aktararak $f(P) = f(z_0)$ bulunur. Çizimde yalnızca ilk komşuluklar ve sonuncusu gösterilmiştir.

$|f(z)|$, z_0 'da maksimum değere sahip olduğundan bu değer N_0 üzerinde de maksimumdur; Teorem 28.2 gereği $f(z)$, N_0 boyunca sabit $f(z_0)$ değerini alır. Özellikle $f(z_1) = f(z_0)$ 'dır. O hâlde N_1 'in her z noktasında $|f(z)| \leq |f(z_1)|$ olur ve lemma yeniden uygulanabilir:

$$f(z) = f(z_1) = f(z_0) \quad (z \in N_1)$$

$z_2 \in N_1$ olduğundan $f(z_2) = f(z_0)$ 'dır ve zincir aynı biçimde ilerler. Sonunda N_n komşuluğuna varılır ve $f(z_n) = f(z_0)$, yani $f(P) = f(z_0)$ elde edilir. P , D 'de keyfi olduğundan f , D boyunca sabittir — hipotezle çelişir.

■

28.4 Kapalı Bölgelerde Sonuç

Kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin içinde analitik ve R üzerinde sürekli olan bir f fonksiyonunun modülü, kapalı sınırlı bölgede maksimumuna ulaşır. Maksimum modül ilkesi bu maksimumun **nerede** olduğunu söyler:

Teorem 28.4 (Maksimum Sınırdadır). f , kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde sürekli, R 'nin içinde analitik ve sabit olmasın. O zaman $|f(z)|$ 'nin R üzerindeki maksimum değeri — ki daima ulaşılır — **asla iç bölgede değil**, R 'nin sınırı üzerinde bir yerdedir.

Örnek 28.1 (Dikdörtgen Üzerinde Sinüsün Modülü). R , $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$ dikdörtgen bölgesi olsun. $f(z) = \sin z$ tam fonksiyonunun modülünün R üzerindeki maksimumunu bulunuz.

Çözüm.

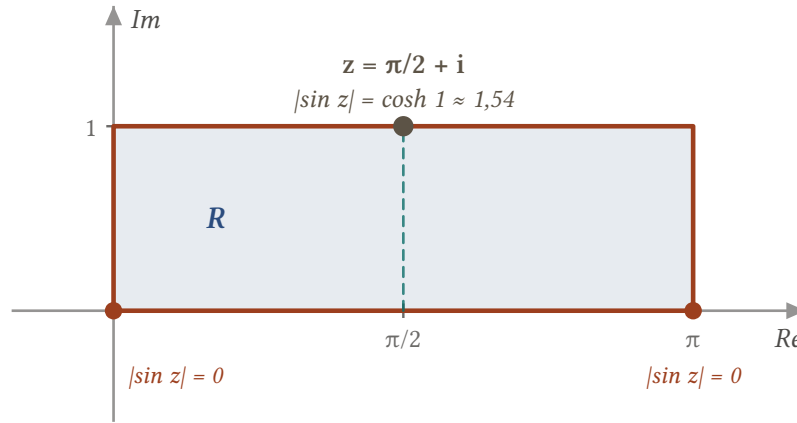
Teoreme göre maksimum sınırdadır; hangi sınır noktasında olduğunu doğrudan hesapla görelim. Sinüsün modül formülüyle

$$|f(z)| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

$\sin^2 x$ terimi $0 \leq x \leq \pi$ aralığında $x = \pi/2$ iken en büyüktür; artan bir fonksiyon olan $\sinh^2 y$ ise $0 \leq y \leq 1$ aralığında $y = 1$ iken en büyüktür. Dolayısıyla maksimum

$$z = \frac{\pi}{2} + i, \quad |f(z)| = \sqrt{1 + \sinh^2 1} = \cosh 1$$

sınır noktasında gerçekleşir; bu nokta gerçekten dikdörtgenin sınırındadır, iç noktası değildir.



Şekil 28.2: $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ toplamında $\sin^2 x$ terimi $x = \pi/2$ 'de, artan $\sinh^2 y$ terimi ise üst kenar $y = 1$ 'de en büyüktür. Maksimum bu yüzden üst kenarın ortasındaki $\pi/2 + i$ noktasındadır; iç noktada değil, teoremin dediği gibi sınırdadır. Alt kenarın köşelerinde ise modül sıfırlanır.

■

28.5 Harmonik Fonksiyonlara Uygulanışı

Teorem 28.5 (Harmonik Bileşen İçin Maksimum). $f = u + iv$, kapalı sınırlı bir R bölgesinde sürekli, içinde analitik ve sabit olmasın. O zaman $u(x, y)$ harmonik bileşenin R üzerindeki maksimum değeri de sınır üzerinde alınır, iç bölgede değil.

İspat.

Bileşke fonksiyon $g(z) = e^{f(z)}$, R 'de sürekli, içinde analitiktir ve sabit değildir. Modülü

$$|g(z)| = e^{u(x,y)}$$

olduğundan Teorem 28.4 gereği $|g|$ 'nin maksimumu sınırdadır. Üstel fonksiyon artan olduğundan e^u 'nun maksimuma ulaştığı nokta, u 'nun da maksimuma ulaştığı noktadır.

■

Bu sonuç, ısı iletimi ve potansiyel kuramının temel fiziksel sezgisini matematikleştirir: durağan bir sıcaklık dağılımında en sıcak nokta, cismin içinde değil, daima **yüzeyinde** bulunur.

28.6 Alıştırma

Alıştırma 28.1 (Maksimum Modül Alıştırmaları).

- a) R , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ karesi olsun. $f(z) = z^2$ için $|f(z)|$ 'nin R üzerindeki maksimumunun hangi noktada alındığını belirleyiniz.

- b) $R, |z| \leq 1$ kapalı diski olsun. $f(z) = e^z$ için $|f(z)|$ 'nin maksimum değerinin e olduğunu ve $z = 1$ noktasında alındığını gösteriniz.
- c) Maksimum modül ilkesinin **minimum** için doğrudan geçerli olmadığını, $f(z) = z$ fonksiyonunu $|z| \leq 1$ diskinde inceleyerek açıklayınız; sıfırlanmayan fonksiyonlar için $1/f$ üzerinden minimum ilkesinin nasıl kurulacağını tartışınız.

Çözüm.

a) $f(z) = z^2$ tam bir fonksiyondur ve R kapalı ve sınırlıdır; maksimum modül ilkesi gereği $|f|$ maksimumunu **sınırdaki** alır. Modülü sadeleştirelim:

$$|f(z)| = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Yani $|f|$ maksimumunu, kare üzerinde başlangıca en uzak noktada alır. $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq y \leq 1$ için $x^2 + y^2$ ifadesi her iki değişkende de artan olduğundan en büyük değer $x = y = 1$ köşesindedir:

$$\max_{z \in R} |f(z)| = |1 + i|^2 = 2 \quad (z = 1 + i)$$

b) Modül yalnızca reel kısma bağlıdır:

$$|f(z)| = |e^z| = e^x$$

Reel üstel fonksiyon artan olduğundan maksimum, x 'in en büyük olduğu noktadadır. $|z| \leq 1$ diskinde $x \leq |z| \leq 1$ olup eşitlik yalnızca $z = 1$ için sağlanır:

$$\max_{|z| \leq 1} |e^z| = e^1 = e \quad (z = 1)$$

Maksimumun sınır noktasında çıkması, teoremin öngördüğü davranıştır.

c) $f(z) = z$ fonksiyonunu $|z| \leq 1$ diskinde ele alalım. $|f(z)| = |z|$ ifadesi minimumunu $z = 0$ noktasında alır ve değeri 0'dır. Bu nokta diskin **iç** noktasıdır; demek ki “modül minimumunu da sınırdaki alır” biçiminde bir ilke doğru değildir.

Aksayan tek şey f 'nin sıfırlanmasıdır. f , bir domende analitik, kapanışında sürekli ve **hiçbir yerde sıfır değilse** $g = 1/f$ de aynı bölgede analitik ve süreklidir. Maksimum modül ilkesi g 'ye uygulanırsa $|g| = 1/|f|$ maksimumunu sınırdaki alır; bir kesrin paydası küçüldükçe kendisi büyüdüğünden bu, tam olarak

$$\min_{z \in \overline{D}} |f(z)| \text{ sınırdaki alınır}$$

demektir. Böylece minimum ilkesi, “sıfırlanmama” koşulu eklendiğinde geri kazanılır. $f(z) = z$ örneğinde bu koşul sağlanmadığı için sonuç da geçerli değildir.

■

Cauchy kuramı tamamlandı. Bir sonraki kısımda analitik fonksiyonların en verimli temsiline geçiyoruz: sonsuz toplamalar. **Diziler ve seriler** bölümüyle başlıyoruz.

29. Dizilerin ve Serilerin Yakınsaklığı

Analitik fonksiyonların en verimli temsili sonsuz toplamlardır: Taylor ve Laurent serileri, hem hesap yapmayı hem de tekil noktaların yapısını okumayı sağlar. Bu bölümde temeli kuruyoruz – kompleks dizi ve serilerin yakınsaklığı, reel karşılıklarına indirgeme yoluyla.

29.1 Dizilerin Yakınsaklığı

Tanım 29.1 (Dizinin Limiti). Kompleks sayıların sonsuz bir

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (1)$$

dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$n > n_0 \implies |z_n - z| < \varepsilon \quad (2)$$

sağlayan bir n_0 doğal sayısı varsa z **limitine sahiptir**. Geometrik okuma: n 'nin yeterince büyük değerlerinde z_n noktaları, z 'nin verilen her ε -komşuluğunda kalır.

Limit varsa tektir; bu durumda dizinin z 'ye **yakınsadığını** söyler ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad (3)$$

yazarız. Limiti olmayan diziye **ıraksak** denir.

Teorem 29.1 (Bileşenlerle Yakınsaklık). $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $z = x + iy$ olsun. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

İspat.

($\Leftarrow$) Bileşen limitleri var olsun. Verilen ε için $n > n_1$ iken $|x_n - x| < \varepsilon/2$ ve $n > n_2$ iken $|y_n - y| < \varepsilon/2$ sağlayan n_1, n_2 vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa, üçgen eşitsizliğiyle

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

($\Rightarrow$) $|x_n - x| \leq |z_n - z|$ ve $|y_n - y| \leq |z_n - z|$ eşitsizlikleri, $z_n \rightarrow z$ iken bileşenlerin de yakınsadığını verir.

■

Teorem, hesabı ikiye böler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Örnek 29.1 (Basit Bir Limit). $z_n = \frac{1}{n^3} + i$ dizisi i 'ye yakınsar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} + i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} + i \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0 + i = i$$

Aynı sonuç tanımdan da görülür: $n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ iken $|z_n - i| = \frac{1}{n^3} < \varepsilon$ 'dur.

⚠ Kutupsal koordinatlarda dikkat

Bileşen teoremi kartezyen bileşenler içindir; modül ve argümana **doğrudan** aktarılamaz. Örneğin

$$z_n = -2 + i \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

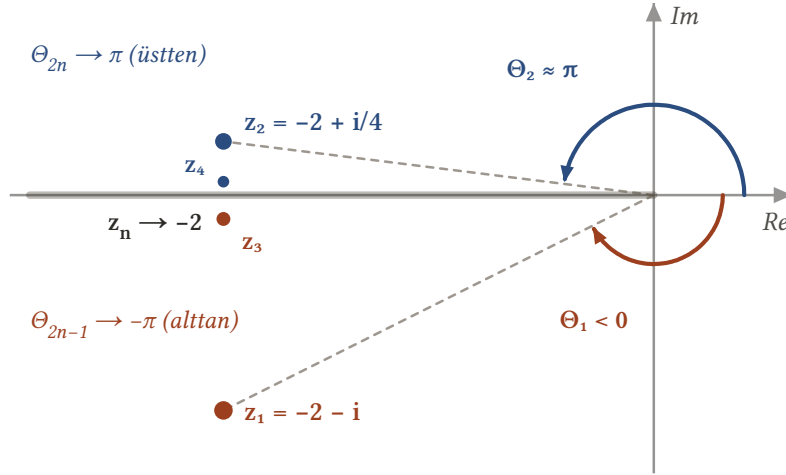
dizisi için teorem $\lim z_n = -2$ verir. Modüller de sorunsuzdur:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n^4}} = 2$$

Ama esas argümanlar $\Theta_n = \text{Arg } z_n$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_{2n} = \pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_{2n-1} = -\pi$$

olur: çift ve tek indisli terimler farklı değerlere yaklaşır, dolayısıyla Θ_n 'nin limiti **yoktur**. Neden: noktalar negatif reel eksene bir üstten bir alttan yaklaşırken esas argüman $(-\pi, \pi]$ aralığının iki ucu arasında sıçrar.



Şekil 29.1: $z_n = -2 + i(-1)^n/n^2$ dizisi -2 'ye yakınsar; ama terimler negatif reel eksenin bir üstüne bir altına düşer. Üstteki (çift indisli) terimlerin esas argümanı π 'ye, alttakilerin $-\pi$ 'ye yaklaşır: nokta ve modül yakınsarken Arg z_n 'nin limiti yoktur, çünkü esas argüman bu ekseninde 2π sıçrar.

29.2 Serilerin Yakınsaklığı

Tanım 29.2 (Serinin Toplamı). Kompleks sayıların sonsuz bir

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (4)$$

serisi, **kısmi toplamlar dizisi**

$$S_N = \sum_{n=1}^N z_n \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

S sayısına yakınsıyorsa, seri S toplamına **yakınsar** ve $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ yazılır. Yakınsamayan seriye **ıraksak** denir.

Bir dizinin en çok bir limiti olduğundan, bir serinin de en çok bir toplamı vardır.

Teorem 29.2 (Serilerde Bileşen Ayrışımı). $z_n = x_n + iy_n$ ve $S = X + iY$ olsun. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

İspat.

Kısmi toplamlar $S_N = X_N + iY_N$ biçiminde yazılır; burada X_N ve Y_N , reel serilerin kısmi toplamlarıdır. $\sum z_n = S$ eşitliği doğrudur ancak ve ancak $S_N \rightarrow S$ ise; [Teorem 29.1](#) gereği bu da $X_N \rightarrow X$ ve $Y_N \rightarrow Y$ olmasına denktir.

■

Teorem sayesinde kalkülüsten bilinen seri özellikleri kompleks düzleme taşınır. İki tanesi bu kitap boyunca kullanılacaktır.

Teorem 29.3 (Terimler Sıfıra Gider). Kompleks sayıların bir serisi yakınsaksa, $n \rightarrow \infty$ iken n -inci terim sıfıra gider:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

İspat.

Seri yakınsaksa [Teorem 29.2](#) gereği $\sum x_n$ ve $\sum y_n$ reel serileri yakınsaktır; reel analizden bunların terimleri sıfıra gider. [Teorem 29.1](#) ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + i \cdot 0 = 0$$

■

Buradan doğal bir sonuç çıkar: yakınsak bir serinin terimleri **sınırlıdır** — her n için $|z_n| \leq M$ olacak bir M pozitif sabiti vardır.

Tanım 29.3 (Mutlak Yakınsaklık). (4) serisine, reel terimli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

serisi yakınsaksa **mutlak yakınsak** denir.

Teorem 29.4 (Mutlak Yakınsaklık Yakınsaklığı Gerektirir). Bir kompleks serinin mutlak yakınsaklığı, o serinin yakınsaklığını gerektirir.

İspat.

$\sum |z_n|$ yakınsak olsun. Her n için

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

olduğundan karşılaştırma testiyle $\sum |x_n|$ ve $\sum |y_n|$ yakınsaktır. Reel serilerde mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden $\sum x_n$ ve $\sum y_n$ yakınsar; [Teorem 29.2](#) ile $\sum z_n$ yakınsaktır.

■

29.3 Kalanlarla Yakınsaklık Ölçütü

Toplamı S olduğu iddia edilen bir serinin N terimden sonraki **kalanı**

$$\rho_N = S - S_N \tag{6}$$

olarak tanımlanır. $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$ olduğundan şu ölçüt doğar:

💡 Kalan sıfıra gitmeli

Bir seri S sayısına yakınsar **ancak ve ancak** kalanlar dizisi sıfıra yakınsıyorsa. Kuvvet serileriyle çalışırken toplam formüllerini kanıtlamanın en pratik yolu budur.

z_0 ve a_n kompleks sabitler olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

biçimindeki serilere **kuvvet serisi** denir. Değişken içeren böyle serilerde toplam, kısmi toplam ve kalan sırasıyla $S(z)$, $S_N(z)$ ve $\rho_N(z)$ ile gösterilir.

Örnek 29.2 (Geometrik Seri). $|z| < 1$ iken

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (7)$$

olduğunu kalanlar yardımıyla gösteriniz.

Çözüm.

$z \neq 1$ için sonlu toplam özdeşliği

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

kısmi toplamaları verir:

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

$S(z) = \frac{1}{1-z}$ alındığında kalan

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) = \frac{z^N}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

olur ve

$$|\rho_N(z)| = \frac{|z|^N}{|1-z|}$$

$|z| < 1$ iken $|z|^N \rightarrow 0$ olduğundan kalanlar sıfıra gider ve toplam formülü (7) sağlanır. $|z| \geq 1$ durumunda ise $|z|^N$ sıfıra gitmez; seri iraksaktır.

■

29.4 Alıştırma

Alıştırma 29.1 (Dizi ve Seri Alıştırmaları).

- $z_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2i$ dizisinin limitini bulunuz.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ serisinin yakınsak olup olmadığını, geometrik seri ölçütüyle inceleyiniz.

Çözüm.

a) Bir kompleks dizinin yakınsaması, reel ve sanal kısımlarının ayrı ayrı yakınsamasıyla eşdeğerdir. Burada

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = 2$$

Reel kısım işaret değiştirse de modülü $1/n \rightarrow 0$ olduğundan $x_n \rightarrow 0$ 'dır; sanal kısım zaten sabittir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 + 2i = 2i$$

b) Mutlak yakınsaklık, terimlerin modüllerinden oluşan reel serinin yakınsamasıdır:

$$\left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \frac{|i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

çünkü $|i| = 1$ 'dir. Sağdaki $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi, $p = 2 > 1$ olan bir p -serisidir ve yakınsaktır. Demek ki verilen seri mutlak yakınsaktır – ve mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden serinin kendisi de yakınsar.

c) Seriyi geometrik biçime sokalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q = \frac{1+i}{2}$$

Ortak çarpanın modülü

$$|q| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 < 1$$

oldüğundan seri yakınsaktır. Geometrik serinin toplam formülüyle

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{2}{2-1-i} = \frac{2}{1-i}$$

Paydayı eşleniğiyle genişletelim:

$$\frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

■

Seriler dili kuruldu; şimdi asıl teoreme geçiyoruz: analitik her fonksiyon, analitik olduğu her diskte bir kuvvet serisine açılır – [Taylor serileri](#).

30. Taylor Serileri

Analitik bir fonksiyon, analitik olduğu her diskin merkezinde **kuvvet serisine** açılır. Bu bölümün teoremi kompleks analizin en kullanışlı sonuçlarından: bir kez türevlenebilme, sonsuz bir polinom gibi davranmayı beraberinde getirir.

30.1 Taylor Teoremi

Teorem 30.1 (Taylor Teoremi). f fonksiyonu, z_0 merkezli R_0 yarıçaplı $|z - z_0| < R_0$ diski üzerinde analitik olsun. O zaman $f(z)$, bu diskin her noktasında kuvvet serisi temsiline sahiptir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R_0) \quad (1)$$

Katsayılar

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

biçimindedir. Açık yazımıyla:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \quad (3)$$

İspat.

Önce merkezin başlangıç noktasında olduğu $z_0 = 0$ durumunu kuralım; genel durum sonunda kaydırma ile çıkacak.

$|z| = r$ olsun ve C_0 , pozitif yönlü $|s| = r_0$ çemberini göstereceğiz; burada $r < r_0 < R_0$ 'dir. f, C_0 'in içinde ve üzerinde analitik ve z, C_0 'in içinde olduğundan **Cauchy integral formülü** uygulanır:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s) ds}{s - z} \quad (4)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \rho_N(z) \quad (7)$$

elde edilir; kalan

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s) ds}{(s-z)s^N} \quad (8)$$

Geriye $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0$ göstermek kalır. $s \in C_0$ için

$$|s - z| \geq ||s| - |z|| = r_0 - r$$

olduğuna dikkat edelim. $M, |f(s)|$ 'nin C_0 üzerindeki maksimum değeri olmak üzere **ML eşitsizliği** ile

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M}{(r_0 - r)r_0^N} \cdot 2\pi r_0 = \frac{Mr_0}{r_0 - r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^N$$

$r/r_0 < 1$ olduğundan sağ taraf $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider; $z_0 = 0$ durumu kanıtlanmıştır.

Merkezi kaydırma. $f, |z - z_0| < R_0$ diskinde analitik olsun. $g(z) = f(z + z_0)$ bileşkesi $|z| < R_0$ diskinde analiktir; az önceki sonuç g 'ye uygulanır:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \Rightarrow f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0)$$

Bu denklemde ve geçerlilik koşulunda z yerine $z - z_0$ yazılırsa teoremdaki (1) açılımı çıkar.

■

$z_0 = 0$ özel durumunda seriye **Maclaurin serisi** denir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0) \quad (9)$$

💡 Yakınsaklık için test gerekmez

Bir z_0 noktasında analitik olan her fonksiyon, o nokta civarında Taylor serisine sahiptir: analitiklik bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda geçerlidir ve bu ε , teoremdaki R_0 olarak iş görür. f tam ise R_0 istendiği kadar büyük seçilebilir; seri **tüm düzlemde** $f(z)$ 'ye yakınsar.

Daha keskin ifadeyle: seri, z_0 'dan f 'nin analitik olmadığı **en yakın** noktaya olan uzaklık yarıçaplı çemberin içinde $f(z)$ 'ye yakınsar.

30.2 Temel Maclaurin Açılımları

Örnek 30.1 (Üstel Fonksiyon). $f(z) = e^z$ tam olduğundan her z için geçerli bir Maclaurin serisine sahiptir. $f^{(n)}(z) = e^z$ ve $f^{(n)}(0) = 1$ olduğundan

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty) \quad (10)$$

$z = x + i0$ alındığında reel analizden bilinen $e^x = \sum x^n/n!$ açılımına inilir.

Örnek 30.2 (Açılımdan Açılım Türetmek). $z^2 e^{3z}$ tam fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

Çözüm.

Türev hesaplamak yerine (10) açılımında z yerine $3z$ yazıp z^2 ile çarpmak yeterlidir:

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} \quad (|z| < \infty)$$

İndis kaydırılarak ($n \rightarrow n-2$) standart biçime getirilir:

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n \quad (|z| < \infty)$$

■

Örnek 30.3 (Sinüs ve Kosinüs). $\sin z$ ve $\cos z$ fonksiyonlarının Maclaurin serilerini bulunuz.

Çözüm.

Üstel tanımdan ve (10) açılımından:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right] = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{i^n z^n}{n!}$$

n çiftken $1 - (-1)^n = 0$ 'dır; yalnızca tek indisler hayatta kalır. $n = 2n+1$ yazılırsa, $1 - (-1)^{2n+1} = 2$ ve $i^{2n+1} = (i^2)^n i = (-1)^n i$ olduğundan

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty) \quad (11)$$

Serilerin terim terime türetilmesi (kuvvet serileriyle işlemler bölümünde kanıtlanacak) kullanılırsa

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty) \quad (12)$$

■

Örnek 30.4 (Hiperbolik Fonksiyonlar). $\sinh z = -i \sin(iz)$ bağıntısı kullanılarak, (11) açılımında z yerine iz yazılıp $-i$ ile çarpılırsa

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty) \quad (13)$$

Benzer biçimde $\cosh z = \cos(iz)$ ile (12) açılımından

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty) \quad (14)$$

Merkez değiştirmek de kolaydır: (14) açılımında z yerine $z + 2\pi i$ yazılıp $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$ periyodikliği kullanılırsa, $z_0 = -2\pi i$ civarındaki Taylor serisi elde edilir:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2\pi i)^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty)$$

30.3 Geometrik Açılım ve Kaydırmalar

Örnek 30.5 ($1/(1-z)$ Açılımı). $f(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonu $z = 1$ 'de analitik değildir; en yakın tekil nokta orada olduğundan Maclaurin serisi $|z| < 1$ diskinde geçerlidir. Türevler

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

olduğundan katsayılar $a_n = 1$ çıkar:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1) \quad (15)$$

Bu, **geometrik serinin toplam formülünün** Taylor teoremiyle ikinci bir kanıtıdır.

Bu tek açılımdan, değişken değiştirerek başka temsiller üretilir:

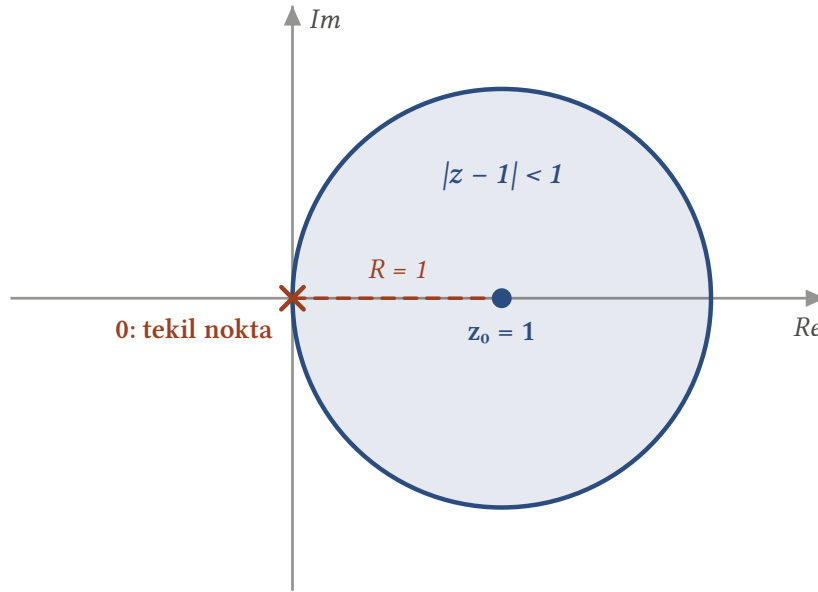
- $z \mapsto -z$ (ve $| -z | < 1 \Leftrightarrow | z | < 1$):

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$$

- $z \mapsto 1-z$ (geçerlilik koşulu $|1-z| < 1$, yani $|z-1| < 1$):

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (|z-1| < 1)$$

Bu ikincisi, $1/z$ fonksiyonunun $z_0 = 1$ civarındaki Taylor serisidir $-z = 0$ tekil noktasına olan uzaklık, yarıçapı belirler.



Şekil 30.2: $1/z$ fonksiyonunun tek tekil noktası 0'dır. $z_0 = 1$ merkezli Taylor açılımı, merkezden büyüyük tekil noktaya değen en büyük diskte, yani $|z - 1| < 1$ 'de geçerlidir: yakınsaklık yarıçapı, merkezden en yakın tekil noktaya olan uzaklıktır.

Örnek 30.6 (Negatif Kuvvetlerin İlk Görünüşü).

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5}$$

funksiyonunu z 'nin kuvvetlerini içeren bir seriye açınız.

Çözüm.

f , $z = 0$ 'da analitik olmadığından Maclaurin serisi yoktur. Yine de cebirsel bir düzenleme sonuç verir:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{2(1+z^2) - 1}{1+z^2} = \frac{1}{z^3} \left(2 - \frac{1}{1+z^2} \right)$$

(15) açılımında z yerine $-z^2$ konursa

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots \quad (|z| < 1)$$

Yerine yazalım: $0 < |z| < 1$ için

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \left(2 - 1 + z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots$$

$1/z^3$ ve $1/z$ terimleri, z 'nin **negatif kuvvetleridir**. Böyle açılımların kuramı bir sonraki bölümün konusudur.

■

30.4 Alıştırma

Alıştırma 30.1 (Taylor Serisi Alıştırmaları).

- $f(z) = \frac{z}{z^4 + 9}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz ve geçerlilik yarıçapını belirleyiniz.
- $\frac{1}{1-z}$ fonksiyonunun $z_0 = i$ civarındaki Taylor serisini bulunuz; geçerlilik koşulunu yazınız.
- $\cos z$ fonksiyonunun $z_0 = \pi/2$ civarındaki Taylor serisini, $\cos z = -\sin(z - \pi/2)$ özdeşliğini kullanarak elde ediniz.

Çözüm.

a) Türev almak yerine geometrik seriyi kullanalım. Paydayı 9 parantezine alalım:

$$\frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z^4}{9}} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z^4}{9}\right)}$$

$\frac{1}{1-w} = \sum w^n$ açılımını $w = -\frac{z^4}{9}$ ile uygulayalım:

$$\frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}} z^{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$$

Geçerlilik koşulu $|w| < 1$, yani $|z|^4 < 9$ 'dur:

$$|z| < \sqrt[4]{9}$$

Bu yarıçap, beklendiği gibi başlangıcın tekil noktalara olan uzaklığıdır: $z^4 = -9$ köklerinin modülü $9^{1/4} = \sqrt[4]{9}$ 'tür.

b) Merkezi $z_0 = i$ yapmak için paydayı $z - i$ cinsinden yazalım:

$$1 - z = (1 - i) - (z - i) = (1 - i) \left[1 - \frac{z - i}{1 - i} \right]$$

Geometrik seriyi $w = \frac{z - i}{1 - i}$ ile uygulayalım:

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - i}{1 - i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(1 - i)^{n+1}}$$

Geçerlilik koşulu $|w| < 1$ 'dir:

$$|z - i| < |1 - i| = \sqrt{2}$$

Yine tekil noktaya ($z = 1$) olan uzaklığı bulduk.

c) $w = z - \frac{\pi}{2}$ yazalım. Verilen özdeşlik $\cos z = -\sin w$ olduğunu söyler. Sinüsün Maclaurin serisi tüm düzlemde geçerlidir:

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}$$

Başına eksi koyup w 'yi geri yazalım:

$$\cos z = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$$

$\cos z$ tam olduğundan seri her z için geçerlidir. İlk terimler açık yazıldığında

$$\cos z = -\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \dots$$

elde edilir; $z = \pi/2$ 'de fonksiyonun sıfırlanması ve türevinin -1 olması bu açılımdan doğrudan okunur.

■

Taylor serisi, fonksiyonun **analitik olduğu** diski gerektiriyordu. Peki tekil nokta merkezdeyse? Yanıt, negatif kuvvetlere kapı açan bir genellemedir: [Laurent serileri](#).

31. Laurent Serileri

Taylor teoremi, fonksiyonun merkezde analitik olmasını istiyordu. Peki merkez bir tekil noktaysa? Laurent'in yanıtı, seriyi **negatif kuvvetlerle** genişletmektir. Bu genişleme sadece bir hesap kolaylığı değildir: negatif kuvvetlerin katsayıları, tekil noktaların sınıflandırılmasını ve rezidü kuramının tamamını taşıyacaktır.

31.1 Laurent Teoremi

Teorem 31.1 (Laurent Teoremi). f fonksiyonu, z_0 merkezli $R_1 < |z - z_0| < R_2$ halka domeni üzerinde analitik olsun ve C , z_0 'ı çevreleyen, bu domende kalan pozitif yönlü herhangi bir basit kapalı çevreyi göstere. O zaman domenin her noktasında $f(z)$ şu seri temsiline sahiptir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2) \quad (1)$$

Katsayılar

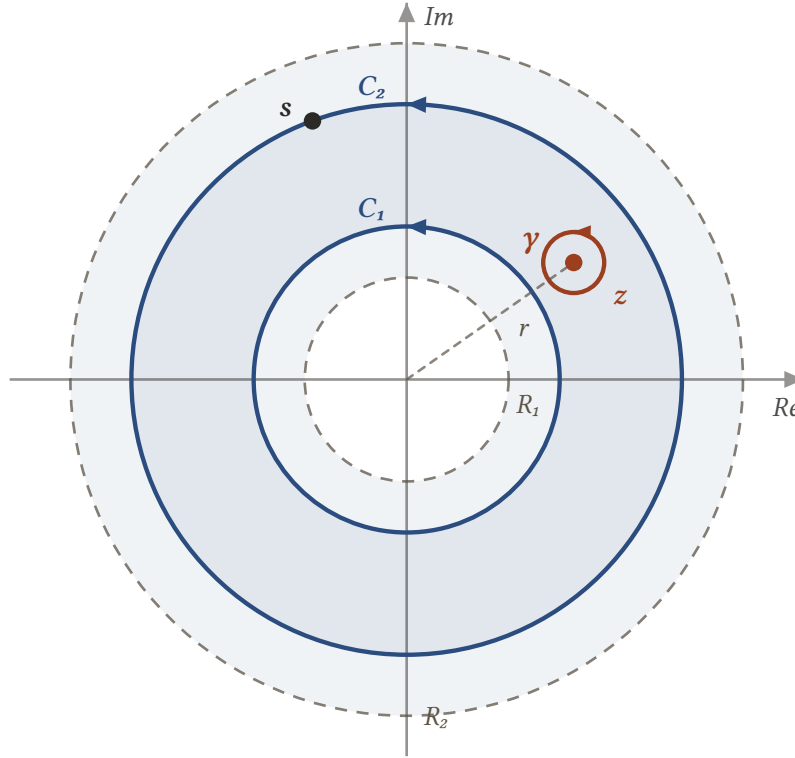
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

İspat.

$z_0 = 0$ durumunu kuralım; genel durum, Taylor teoremindeki gibi kaydırma ile çıkar.

$r_1 \leq |z| \leq r_2$ kapalı halka bölgesini, z noktasını ve C çevresini içerecek biçimde $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ seçelim. C_1 ve C_2 sırasıyla $|z| = r_1$ ve $|z| = r_2$ pozitif yönlü çemberleri olsun. Ayrıca z merkezli, halka bölgesinin içinde kalan küçük pozitif yönlü bir γ çemberi alalım.



Şekil 31.1: Laurent teoremi ispatının sahnesi: f , kesikli çemberler arasındaki $R_1 < |z| < R_2$ halkasında analitiktir. İçine, z noktasını barındıran kapalı $r_1 \leq |z| \leq r_2$ halkası ve sınır çemberleri C_1, C_2 yerleştirilir; z 'nin çevresine de küçük bir γ çemberi. C_2 üzerindeki s için $|z/s| < 1$, C_1 üzerindeki için $|s/z| < 1$ olduğundan iki farklı geometrik seri açılımı kullanılır.

$f(s)/(s - z)$ fonksiyonu, C_2 ile C_1 ve γ arasında kalan çok bağlantılı bölgede analitiktir; **çok bağlantılı domenler için Cauchy-Goursat teoremi** gereği

$$\int_{C_2} \frac{f(s) ds}{s - z} - \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{s - z} - \int_{\gamma} \frac{f(s) ds}{s - z} = 0$$

Üçüncü integralin değeri Cauchy integral formülüne göre $2\pi i f(z)$ 'dir. Böylece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s) ds}{s - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{z - s} \quad (5)$$

Birinci integral. Taylor teoreminin ispatındaki açılım aynen kullanılır:

$$\frac{1}{s - z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(s - z)s^N}$$

İkinci integral. Aynı özdeşlikte s ile z 'nin rolleri değiştirilir:

$$\frac{1}{z - s} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{s^{-n+1}} \cdot \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^N} \cdot \frac{s^N}{z - s}$$

İki açılım $f(s)/(2\pi i)$ ile çarpılıp sırasıyla C_2 ve C_1 üzerinde integrallenir ve (5)'te yerine konursa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \rho_N(z) + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{z^n} + \sigma_N(z) \quad (6)$$

elde edilir; burada a_n ve b_n teoremdaki katsayılar (C yerine sırasıyla C_2 ve C_1 ile), kalanlar ise

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s) ds}{(s-z)s^N}, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{s^N f(s) ds}{z-s}$$

Kalanların sönmesi. $|z| = r$ yazalım ($r_1 < r < r_2$) ve $M, |f(s)|$ 'nin C_1 ile C_2 üzerindeki maksimum değeri olsun. $s \in C_2$ için $|s-z| \geq r_2 - r$, $s \in C_1$ için $|z-s| \geq r - r_1$ olduğundan ML eşitsizliği

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{Mr_2}{r_2 - r} \left(\frac{r}{r_2}\right)^N, \quad |\sigma_N(z)| \leq \frac{Mr_1}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^N$$

verir. $r/r_2 < 1$ ve $r_1/r < 1$ olduğundan iki kalan da $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider ve (6), teoremdaki (1) açılımına dönüşür.

Çevrelerin değiştirilmesi. C_1 ve C_2 yerine, halkada kalan ve z_0 'ı çevreleyen herhangi bir C çevresi kullanılabilir; bu *yolun deformasyonu ilkesinin* doğrudan sonucudur. Böylece katsayılar (2) ve (3) biçimini alır.

■

İkinci toplamda n yerine $-n$ yazılırsa iki seri tek bir toplamda birleşir:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (4)$$

Bu iki biçimin her birine f 'nin **Laurent serisi** denir.

i Taylor serisi özel bir durumdur

(3) integralindeki integrand $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ biçiminde yazılabilir. $f, |z - z_0| < R_2$ diskinin **tamamında** analitikse bu integrand da analitiktir ve Cauchy-Goursat teoremi gereği tüm b_n katsayıları sıfırdır. Ayrıca a_n katsayıları **genişletilmiş Cauchy integral formülüyle** $f^{(n)}(z_0)/n!$ değerine indirgenir; seri, Taylor serisine dönüşür.

Halkanın uçları da esnektir: f , yalnız z_0 'da analitik değilse R_1 istendiği kadar küçük seçilebilir ve temsil **delinmiş diskte** $0 < |z - z_0| < R_2$ geçerli olur. $f, |z - z_0| = R_1$ çemberinin dışında her yerde analitikse geçerlilik koşulu $R_1 < |z - z_0| < \infty$ biçimini alır.

31.2 Çözümlü Uygulamalar

Laurent katsayıları, integral gösterimlerine başvurmak yerine, çoğunlukla bilinen açılımlarda değişken değiştirilerek bulunur.

Örnek 31.1 ($e^{1/z}$ Açılımı). $e^{1/z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \infty$ halkasındaki Laurent serisini bulunuz.

Çözüm.

Maclaurin açılımında z yerine $1/z$ yazmak yeterlidir:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{1! z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

z 'nin pozitif kuvvetleri hiç görünmez: $a_0 = 1$ dışında tüm a_n katsayıları ($n \geq 1$) sıfırdır. $1/z$ 'nin katsayısı ise $b_1 = 1$ 'dir ve Laurent teoremine göre bu katsayı

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{1/z} dz$$

sayısıdır (C , orijini çevreleyen pozitif yönlü herhangi bir basit kapalı çevre). Buradan hesaplanması güç görünen bir integral bedavaya gelir:

$$\int_C e^{1/z} dz = 2\pi i$$

Bu teknik — bir integrali seri katsayısından okumak — **rezidü kuramının** çekirdeğidir.

■

Örnek 31.2 (Zaten Laurent Biçiminde). $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$ fonksiyonu, $z_0 = i$ için hâlihazırda bir Laurent serisidir:

$$\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n \quad (0 < |z-i| < \infty)$$

Burada $c_{-2} = 1$ ve diğer bütün katsayılar sıfırdır. Katsayı formülü (4) tersinden okunursa, C merkezi i olan pozitif yönlü herhangi bir çember olmak üzere

$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 2\pi i, & n = -2 \\ 0, & n \neq -2 \end{cases}$$

sonucu doğrulanır — **temel integrallerle** uyumludur.

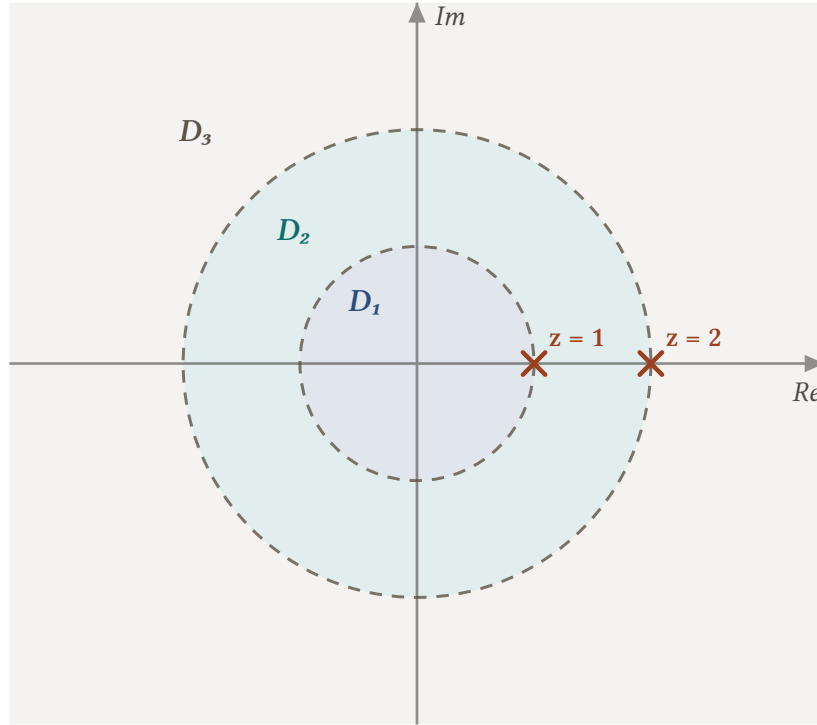
31.3 Aynı Fonksiyon, Üç Farklı Halka

Bir fonksiyonun Laurent serisi **halkaya bağlıdır**: aynı fonksiyon, farklı halkalarda tamamen farklı açılımlara sahiptir. Klasik örnek şudur:

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \quad (7)$$

Tekil noktalar $z = 1$ ve $z = 2$; dolayısıyla f , orijin merkezli üç ayrı domende analitiktir:

$$D_1 : |z| < 1, \quad D_2 : 1 < |z| < 2, \quad D_3 : 2 < |z| < \infty$$



Şekil 31.2: $f(z) = -1/[(z-1)(z-2)]$ fonksiyonunun tekil noktaları 1 ve 2'dir. Bu noktalardan geçen orijin merkezli çemberler düzlemi üç domene böler: D_1 diski, D_2 halkası ve D_3 dış bölgesi. f her birinde analitiktir ve her birinde farklı bir Laurent serisine sahiptir; halka seçilmeden " f 'nin Laurent serisi" belirsizdir.

Üç açılımın hepsi, tek bir **geometrik seriden** türetilir:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1) \quad (8)$$

Örnek 31.3 (D_1 Bölgesi: Maclaurin Serisi). $z \in D_1$ iken $|z| < 1$ ve $|z/2| < 1$ 'dir; (7) ifadesini bu iki koşula uygun biçimde yazalım:

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z/2)}$$

(8) açılımıyla

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) z^n \quad (|z| < 1)$$

D_1 bir disk olduğundan bu temsil, negatif kuvvet içermeyen bir Maclaurin serisidir.

Örnek 31.4 (D_2 Bölgesi: İki Yönlü Seri). $z \in D_2$ iken $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ ve $\left| \frac{z}{2} \right| < 1$ 'dir. Her terimi kendi koşuluna uygun düzenleyelim:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(1/z)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z/2)}$$

(8) açılımıyla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Birinci toplamda indis kaydırılıp ($n \rightarrow n-1$) terimler standart sıraya konursa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < 2)$$

Bu, Laurent teoremindeki (1) biçimidir: hem pozitif hem negatif kuvvetler vardır.

Örnek 31.5 (D₃ Bölgesi: Yalnızca Negatif Kuvvetler). $z \in D_3$ iken $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ ve dolayısıyla $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ 'dir:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (1/z)} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (2/z)}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{z^{n+1}}$$

İndis kaydırılırsa standart biçim çıkar:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{n-1}}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty)$$

Bu halkada tüm a_n katsayıları sıfırdır.

⚠ Önce halkayı belirleyin

“ f 'nin Laurent serisi” ifadesi tek başına eksiktir: hangi halkada sorusu yanıtlanmadan açılım belirsizdir. Yukarıdaki üç seri de aynı fonksiyona aittir ve üçü de doğrudur; her biri yalnızca kendi halkasında geçerlidir. Belirli bir halkada ise açılım **tektir** — bu tekliği **kuvvet serileriyle işlemler** bölümünde kanıtlayacağız.

31.4 Alıştırma

Alıştırma 31.1 (Laurent Serisi Alıştırmaları).

- $\frac{z+1}{z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \infty$ halkasındaki Laurent serisini yazınız.
- $z^3 \sin \frac{1}{z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \infty$ halkasındaki açılımını bulunuz ve açılımda yalnızca **çift** kuvvetlerin görüldüğünü, dolayısıyla $1/z$ teriminin katsayısının sıfır olduğunu gösteriniz.
- $\frac{1}{z(z-2)}$ fonksiyonunun $0 < |z| < 2$ ve $2 < |z| < \infty$ halkalarındaki Laurent serilerini bulunuz.

Çözüm.

a) Bölmeyi yapmak yeterlidir:

$$\frac{z+1}{z} = \frac{z}{z} + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$$

Sağ taraf zaten bir Laurent serisidir: pozitif kuvvetli kısım 1 sabitinden, negatif kuvvetli kısım tek bir $1/z$ teriminden oluşur. Açılım $0 < |z| < \infty$ halkasının tamamında geçerlidir ve teklilik teoremi gereği başka bir Laurent açılımı yoktur. Rezidü — yani $1/z$ 'nin katsayısı — 1'dir.

b) Sinüsün Maclaurin serisi her argüman için geçerlidir; $1/z$ yazalım ($z \neq 0$):

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$$

z^3 ile çarpmak üsleri üçer artırır:

$$z^3 \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{3-(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2-2n}$$

İlk terimler:

$$z^3 \sin \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5040} \cdot \frac{1}{z^4} + \dots$$

Genel terimin üssü $2 - 2n = 2(1 - n)$ olduğundan **her zaman çifttir**; tek kuvvet hiç görünmez. Özel olarak z^{-1} terimi açılımda yer almaz, katsayısı sıfırdır:

$$2 - 2n = -1 \Rightarrow n = \frac{3}{2} \notin \{0, 1, 2, \dots\}$$

Rezidünün sıfır olması, $\int_C z^3 \sin \frac{1}{z} dz = 0$ demektir (C , başlangıcı çevreleyen herhangi bir pozitif yönlü basit kapalı çevre).

c) Fonksiyonu iki çarpana ayıralım:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-2}$$

$0 < |z| < 2$ halkasında $|z/2| < 1$ olduğundan ikinci çarpanı z 'nin kuvvetlerine açarız:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$1/z$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{z(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{4} - \frac{z}{8} - \dots$$

$2 < |z| < \infty$ halkasında ise $|2/z| < 1$ 'dir; bu kez z 'nin negatif kuvvetlerine açarız:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$1/z$ ile çarpıp indisi $m = n + 2$ ile kaydıralım:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+2}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{m-2}}{z^m} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \dots$$

Aynı fonksiyonun iki halkada iki farklı açılımı olması çelişki değildir: Laurent serisi, merkezle birlikte **halkaya** da bağlıdır. Dış halkada hiç pozitif kuvvet bulunmaması, fonksiyonun sonsuzda sıfıra gitmesinin karşılığıdır.

■

Seriler kurulduğuna göre onlarla **güvenle hesap yapmayı** öğrenmeliyiz: yakınsaklık nerede düzgündür, terim terime türetme ve integrasyon ne zaman geçerlidir? **Kuvvet serilerinin yakınsaklığı** bölümü bu soruları yanıtlıyor.

32. Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı

Bir kuvvet serisi bir noktada yakınsıyorsa, o noktaya kadar olan **bütün** diskte yakınsar – ve yakınsaklık, merkeze yeterince yakın kapalı disklerde **düzgündür**. Bu iki gerçek, serilerle güvenle hesap yapmanın (terim terime integrasyon, türetme, süreklilik) temelini oluşturur.

32.1 Yakınsaklık Çemberi

Teorem 32.1 (Diskte Mutlak Yakınsaklık). *Kuvvet serisi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

bir $z = z_1$ noktasında ($z_1 \neq z_0$) yakınsıyorsa, $R_1 = |z_1 - z_0|$ olmak üzere açık $|z - z_0| < R_1$ diskinin her noktasında **mutlak yakınsaktır**.

İspat.

Seri z_1 'de yakınsak olduğundan *terimleri sınırlıdır*: bir $M > 0$ sabiti için

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$|z - z_0| < R_1$ olsun ve

$$\rho = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1$$

yazalım. O zaman

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (z_1 - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n \leq M \rho^n$$

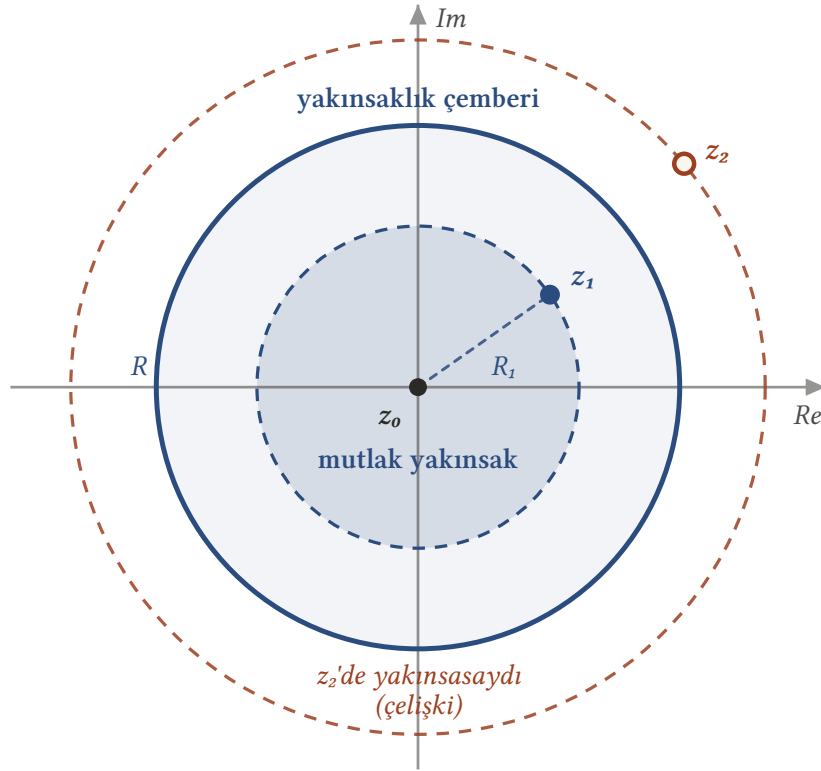
$\sum M \rho^n$ geometrik serisi $\rho < 1$ olduğundan yakınsaktır; karşılaştırma testiyle $\sum |a_n (z - z_0)^n|$ serisi de yakınsar.

■

Teorem, yakınsaklığın **dairesel** bir yapıya sahip olduğunu söyler: serinin merkez dışında yakınsadığı her nokta, o noktaya kadar olan diskin tamamını yakınsaklık bölgesi yapar.

Tanım 32.1 (Yakınsaklık Çemberi). (1) serisinin içindeki her noktada yakınsadığı, z_0 merkezli **en büyük** çembere serinin **yakınsaklık çemberi** denir; yarıçapına yakınsaklık yarıçapı denir.

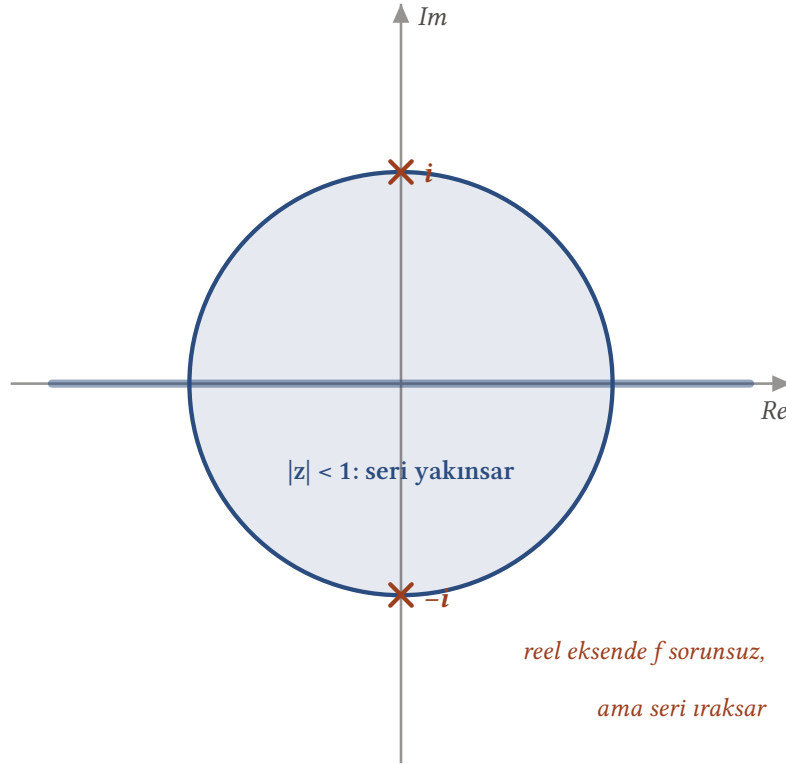
Seri, yakınsaklık çemberinin dışındaki hiçbir z_2 noktasında yakınsayamaz: yakınsasaydı, **Teorem 32.1** gereği z_0 merkezli ve z_2 'den geçen çemberin içinde her yerde yakınsardı; o zaman ilk çember “en büyük” olmazdı.



Şekil 32.1: Seri z_1 'de yakınsıyorsa, z_0 merkezli ve z_1 'den geçen çemberin içinde (koyu disk) mutlak yakınsar: yakınsaklık içeri doğru yayılır. Böyle disklerin en büyüğünün sınırı yakınsaklık çemberidir. Dışarıdaki bir z_2 'de yakınsasaydı, aynı teorem z_2 'den geçen kesikli çemberin içini de yakınsaklık bölgesi yapar ve ilk çember "en büyük" olmazdı.

i Taylor serisinin yarıçapı nereden gelir?

Taylor teoremi, f 'nin analitik olduğu her diskte açılımın geçerli olduğunu söylüyordu. Bu iki gözlem birleştiğinde pratik kural doğar: bir Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı, merkezden **fonksiyonun en yakın tekil noktasına** olan uzaklıktır. Örneğin $\frac{1}{1+z^2}$ fonksiyonunun Maclaurin serisi, tekil noktalar $\pm i$ olduğundan $|z| < 1$ diskinde yakınsar — reel ekseninde hiçbir sorun görünmemesine rağmen.



Şekil 32.2: $1/(1+z^2)$ reel eksenin her noktasında düzgün ve sonsuz kez türevlenebilirdir; yine de Maclaurin serisi yalnız $|z| < 1$ 'de yakınsar. Engel reel ekseninde değil, sanal eksendedir: tekil noktalar $\pm i$ merkeze 1 uzaklıktadır ve yakınsaklık çemberi onlara değince büyümesi durur.

32.2 Düzgün Yakınsaklık

Yakınsaklık çemberinin içinde bir z sabitlendiğinde, kalan $\rho_N(z) = S(z) - S_N(z)$ ifadesi $N \rightarrow \infty$ iken sifıra gider; yani her $\varepsilon > 0$ için

$$N > N_\varepsilon \implies |\rho_N(z)| < \varepsilon \quad (2)$$

sağlayan bir N_ε vardır. Bu sayı genelde hem ε 'a hem de z 'ye bağlıdır.

Tanım 32.2 (Düzgün Yakınsaklık). N_ε sayısı yalnızca ε 'a bağlı olacak — belirtilen bölgedeki z seçiminden **bağımsız** kalacak — biçimde bulunabiliyorsa, yakınsaklığa o bölgede **düzgün** denir.

Teorem 32.2 (Kapalı Alt Diskte Düzgünlük). $z_1, (1)$ serisinin $|z - z_0| = R$ yakınsaklık çemberinin içinde bir nokta ise, seri $R_1 = |z_1 - z_0|$ olmak üzere kapalı $|z - z_0| \leq R_1$ diskinde **düzgün yakınsaktır**.

İspat.

z_1 , yakınsaklık çemberinin içinde olduğundan, çemberin içinde z_0 'a z_1 'den daha uzak ve serinin yakınsadığı bir nokta vardır; [Teorem 32.1](#) gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z_1 - z_0)^n| \quad (3)$$

serisi yakınsaktır. Kalanları

$$\rho_N(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m a_n(z - z_0)^n, \quad \sigma_N = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m |a_n(z_1 - z_0)^n|$$

olarak yazalım. $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$ iken

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n(z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z - z_0|^n \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z_1 - z_0|^n$$

olduğundan, $m \rightarrow \infty$ limitiyle

$$|z - z_0| \leq R_1 \implies |\rho_N(z)| \leq \sigma_N \quad (4)$$

σ_N , yakınsak (3) serisinin kalanı olduğundan $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider: her $\varepsilon > 0$ için

$$N > N_\varepsilon \implies \sigma_N < \varepsilon \quad (5)$$

(4) ve (5) birlikte, $|z - z_0| \leq R_1$ diskindeki **tüm** z noktaları için (2) koşulunu verir ve N_ε , z 'den bağımsızdır.

■

32.3 Toplamın Sürekliliği

Teorem 32.3 (Kuvvet Serisinin Toplamı Süreklidir). Bir kuvvet serisi, $|z - z_0| = R$ yakınsaklık çemberinin içindeki her noktada **süreklili** bir $S(z)$ fonksiyonu temsil eder.

İspat.

z_1 , çemberin içinde bir nokta olsun; S 'nin z_1 'de sürekli olduğunu göstereceğiz, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$|z - z_1| < \delta \implies |S(z) - S(z_1)| < \varepsilon \quad (6)$$

sağlayan bir $\delta > 0$ bulacağız.

$S_N(z)$, ilk N terimin toplamı ve $\rho_N(z) = S(z) - S_N(z)$ olsun. $S = S_N + \rho_N$ ayrışımıyla

$$|S(z) - S(z_1)| \leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |\rho_N(z)| + |\rho_N(z_1)| \quad (7)$$

z_1 'i içeren, yarıçapı yakınsaklık yarıçapından küçük bir kapalı $|z - z_0| \leq R_0$ diski seçelim. [Teorem 32.2](#) gereği bu diskte düzgün yakınsaklık vardır:

$$N > N_\varepsilon \implies |\rho_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8)$$

ve N_ε , disk içindeki z 'den bağımsızdır.

S_N kısmi toplamı bir polinomdur, dolayısıyla her N için z_1 'de süreklidir. $N = N_\varepsilon + 1$ seçilirse öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$|z - z_1| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (9)$$

(δ , $|z - z_1| < \delta$ komşuluğu R_0 diskinden taşmayacak kadar küçük alınır.) (7) eşitsizliğinde $N = N_\varepsilon + 1$ konup (8) ile (9) kullanılırsa

$$|z - z_1| < \delta \implies |S(z) - S(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$



32.4 Negatif Kuvvetli Serilere Uyarlama

Laurent serisinin ikinci yarısı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (10)$$

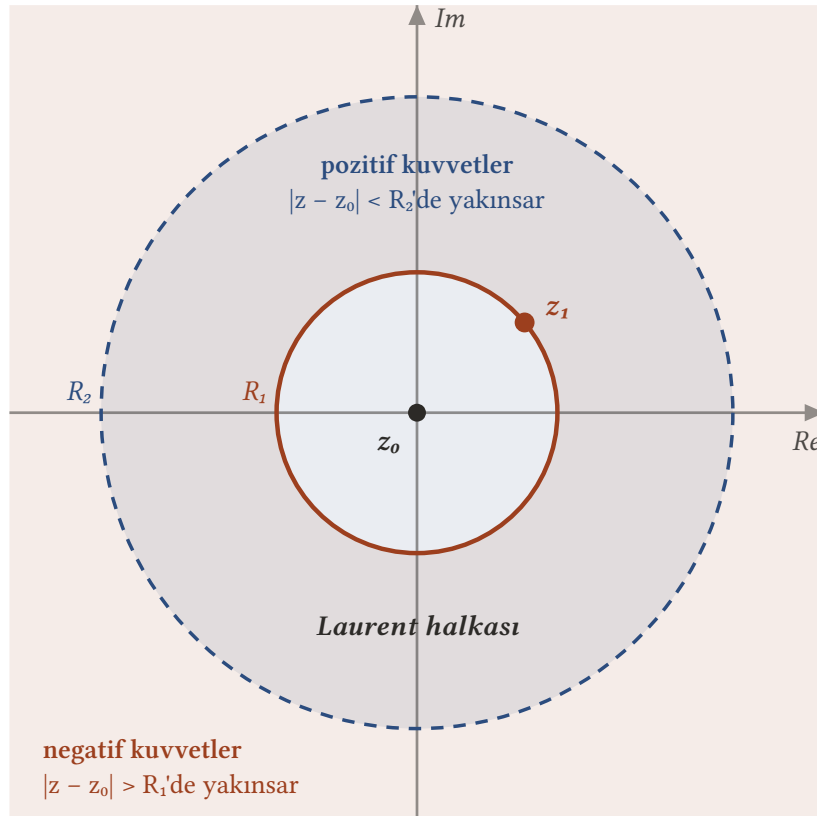
biçimindedir ve $w = \frac{1}{z - z_0}$ değişimiyle sıradan bir kuvvet serisine dönüşür:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

Bu seri bir $z_1 \neq z_0$ noktasında yakınsıyorsa, dönüşmüş seri

$$|w| < \frac{1}{|z_1 - z_0|} \quad (11)$$

diskinde mutlak yakınsar ve sürekli bir fonksiyon temsil eder. (11) koşulu $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ ile aynı olduğundan: (10) serisi, $|z - z_0| = R_1$ çemberinin dışındaki domende mutlak yakınsar ($R_1 = |z_1 - z_0|$) ve orada sürekli bir fonksiyon tanımlar.



Şekil 32.3: Negatif kuvvetli seri, $w = 1/(z - z_0)$ değişimiyle sıradan bir kuvvet serisine döner; $|w|$ küçük demek $|z - z_0|$ büyük demektir. Bu yüzden bir z_1 noktasında yakınsıyorsa, z_1 'den geçen çemberin **dışında** (taralı dış bölge) mutlak yakınsar. Pozitif kuvvetli kısım ise bir diskte yakınsar; iki bölgenin kesişimi Laurent halkasıdır.

🔗 Laurent serisinin iki yarısı

Bir Laurent temsili $R_1 < |z - z_0| < R_2$ halkasında geçerliyse, pozitif kuvvetli kısım “içeriden” R_2 yarıçaplı diski, negatif kuvvetli kısım “dışarıdan” R_1 yarıçaplı çemberin dışını yakınsaklık bölgesi olarak görür. İkisi de geçerlilik bölgesinin içinde kalan her **kapalı halkada düzgün yakınsaktır** – terim terime hesap yapma iznini veren tam olarak budur.

32.5 Alıştırma

Alıştırma 32.1 (Yakınsaklık Alıştırmaları).

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.
- b) $\frac{1}{z^2 + 4}$ fonksiyonunun $z_0 = 1$ civarındaki Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapını, tekil noktalara olan uzaklığı düşünerek belirleyiniz.
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^n}$ serisinin hangi bölgede yakınsadığını, $w = 1/(z-1)$ değişimiyle bulunuz.

Çözüm.

a) Seri, ortak çarpanı $z/2$ olan geometrik seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Geometrik seri, ortak çarpanın modülü 1’den küçükken yakınsar:

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$$

$|z| > 2$ için terimler sifira gitmediğinden seri ıraksar. Yakınsaklık yarıçapı $R = 2$ ’dir ve seri o diskte $\frac{1}{1 - z/2} = \frac{2}{2 - z}$ fonksiyonunu temsil eder; bu fonksiyonun tek tekil noktası olan $z = 2$ ’nin merkeze uzaklığı da 2’dir.

b) Taylor serisinin yarıçapı, merkezden fonksiyonun en yakın tekil noktasına olan uzaklıktır. Tekil noktalar paydayı sıfırlayan noktalardır:

$$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i$$

Merkez $z_0 = 1$ ’e uzaklıkları:

$$|1 - 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \quad |1 + 2i| = \sqrt{5}$$

İki tekil nokta merkeze eşit uzaklıktadır; yakınsaklık yarıçapı

$$R = \sqrt{5}$$

Seri $|z - 1| < \sqrt{5}$ diskinde fonksiyona yakınsar, bu diskin sınırında ise iki tekil nokta oturur.

c) $w = \frac{1}{z-1}$ değişimiyle seri sıradan bir kuvvet serisine döner:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (3w)^n$$

Sağdaki geometrik seri $|3w| < 1$, yani $|w| < \frac{1}{3}$ iken yakınsar. Geri dönüşüm yapalım:

$$\left|\frac{1}{z-1}\right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z-1| > 3$$

Seri, $z = 1$ merkezli 3 yarıçaplı çemberin **dışındaki** domende yakınsar. Toplamı da bulunabilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3w)^n = \frac{3w}{1-3w} = \frac{3}{(z-1)-3} = \frac{3}{z-4}$$

Bu, negatif kuvvetli serilerin tipik davranışdır: yakınsaklık bölgesi bir disk değil, bir çemberin dışıdır.

■

Düzgün yakınsaklık elimizde; artık serilerle **işlem yapmaya** hakkımız var: terim terime integrasyon, türetme, çarpma ve bölme — [kuvvet serileriyle işlemler](#).

33. Kuvvet Serileri İşlemler

Serilerle çalışırken en çok ihtiyaç duyulan haklar şunlardır: terim terime integralleyebilmek, türetebilmek, çarpıp bölebilmek. **Düzgün yakınsaklık** bu hakların hepsini verir – ve bir bonus daha: bir fonksiyonun belirli bir bölgedeki seri temsili **tektir**.

33.1 Terim Terime İntegrasyon

Teorem 33.1 (Terim Terime İntegrasyon). C , kuvvet serisi

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

serisinin yakınsaklık çemberinin içinde herhangi bir çevre ve g , C üzerinde sürekli herhangi bir fonksiyon olsun. Serinin her terimi $g(z)$ ile çarpılarak oluşan seri, C üzerinde terim terime integrallenebilir:

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz \quad (2)$$

İspat.

g ve S , C üzerinde süreklidir. ρ_N , serinin N terimden sonraki kalanı olmak üzere

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)(z - z_0)^n + g(z)\rho_N(z)$$

yazılabilir; sonlu toplamın terimleri C üzerinde sürekli olduğundan integralleri vardır ve

$$\int_C g(z)S(z) dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz + \int_C g(z)\rho_N(z) dz \quad (3)$$

M , $|g(z)|$ 'nin C üzerindeki maksimumu ve L , C 'nin uzunluğu olsun. **Düzgün yakınsaklık** gereği her $\varepsilon > 0$ için, C üzerindeki tüm z noktalarında

$$N > N_\varepsilon \implies |\rho_N(z)| < \varepsilon$$

sağlayan ve z 'den bağımsız bir N_ε vardır. **ML eşitsizliğiyle**

$$N > N_\varepsilon \implies \left| \int_C g(z)\rho_N(z) dz \right| < M\varepsilon L$$

yani son integral $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider. (3) ifadesinde limit alınır (2) elde edilir.

■

Teorem 33.2 (Toplam Analitiktir). Bir kuvvet serisinin toplamı $S(z)$, yakınsaklık çemberinin içindeki her noktada **analitiktir**.

İspat.

$g(z) = 1$ alınsın ve C , yakınsaklık çemberinin içinde kalan herhangi bir kapalı çevre olsun. $(z - z_0)^n$ fonksiyonları tam olduğundan

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ve [Teorem 33.1](#) gereği her böyle çevre için $\int_C S(z) dz = 0$ 'dır. S ayrıca [süreklidir](#); [Morera teoremi](#) gereği S , bu domende analitiktir. ■

Örnek 33.1 (Analitikliğin Serilerle Saptanması).

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun tam olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Üstel fonksiyonun Maclaurin açılımı her z için

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

verir. İki taraf z 'ye bölünürse, $z \neq 0$ için

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots \quad (4)$$

Sağdaki seri $z = 0$ 'da da yakınsar ve değeri $1 = f(0)$ 'dır; yani (4) temsili **her** z için geçerlidir. [Teorem 33.2](#) gereği f tamdır.

Bonus olarak, sürekliliğinden bir limit okunur:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = f(0) = 1$$

■

33.2 Terim Terime Türetme

Teorem 33.3 (Terim Terime Türetme). Kuvvet serisi (1), yakınsaklık çemberinin içindeki her noktada terim terime türetilir:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (5)$$

İspat.

z , yakınsaklık çemberinin içinde bir nokta; C , bu çemberin içinde kalan ve z 'yi çevreleyen pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olsun. C üzerindeki her s noktasında

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(s - z)^2}$$

tanımlayalım; g , C üzerinde süreklidir. [Teorem 33.1](#) uygulanırsa

$$\int_C g(s) S(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s) (s - z_0)^n ds \quad (6)$$

S , C 'nin içinde ve üzerinde analitik olduğundan [genişletilmiş Cauchy integral formülü](#) sol tarafı verir:

$$\int_C g(s) S(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s) ds}{(s - z)^2} = S'(z)$$

Aynı formül sağdaki her integrale de uygulanır:

$$\int_C g(s)(s - z_0)^n ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(s - z_0)^n}{(s - z)^2} ds = \frac{d}{dz}(z - z_0)^n$$

(6) böylece

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}(z - z_0)^n$$

biçimine iner; bu da (5) ile aynıdır.

■

Örnek 33.2 (Türetmeyle Yeni Açılım). Taylor bölümünde

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1)$$

açılımını bulmuştuk. İki tarafı türetelim:

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z - 1)^{n-1} \quad (|z - 1| < 1)$$

İşaret düzenlenip indis kaydırılırsa

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)(z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1)$$

Yeni bir Taylor hesabı yapmadan ikinci bir açılım elde edildi.

33.3 Temsillerin Tekliği

Teorem 33.4 (Taylor Temsilinin Tekliği). Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisi, $|z - z_0| = R$ çemberinin içindeki tüm noktalarda $f(z)$ 'ye yakınsıyorsa, bu seri **zorunlu olarak** f 'nin z_0 civarındaki Taylor serisidir.

İspat.

Hipotez, $|z - z_0| < R$ diskinde

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

demektir (toplam indisini k ile gösterdik). n sabit bir tam sayı olmak üzere

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$$

alalım ve C , z_0 merkezli, yarıçapı R 'den küçük bir çember olsun. [Teorem 33.1](#) ile

$$\int_C g(z)f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C g(z)(z - z_0)^k dz \quad (7)$$

Sol taraf, genişletilmiş Cauchy integral formülüyle

$$\int_C g(z)f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Sağ taraftaki integraller ise [temel integrallerle](#) hesaplanır:

$$\int_C g(z)(z - z_0)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n-k+1}} = \begin{cases} 0, k \neq n \\ 1, k = n \end{cases}$$

Böylece (7)'nin sağ tarafı tek bir terime, a_n 'e iner ve

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

çıkar — tam olarak Taylor katsayısı.

■

Teorem 33.5 (Laurent Temsilinin Tekliği). Bir $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ serisi, z_0 merkezli bir halka domendeki tüm noktalarda $f(z)$ 'ye yakınsıyorsa, bu seri f 'nin o domendeki Laurent serisidir.

İspat.

Kanıt, Teorem 33.4 ile aynı yolu izler; tek fark, terim terime integrasyon teoreminin negatif kuvvetleri de içeren serilere uygulanmasıdır (bu, $w = 1/(z - z_0)$ dönüşümüyle gerekçelendirilir). Seri, halkada kalan bir C çevresi üzerinde $(z - z_0)^{-n-1}$ ile çarpılıp terim terime integrallenir; temel integraller yalnızca tek bir terimi ayakta bıraktığından

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

yani Laurent teoremindeki katsayı formülü elde edilir.

■

💡 Teklik neden bu kadar işe yarar?

Teklik teoremleri, bir açılımı **nasıl** bulduğumuzun önemsiz olduğunu söyler: geometrik seriden türetin, terim terime türetin, iki seriyi çarpın — bulduğunuz sonuç Taylor/Laurent serisinin ta kendisidir. Bu yüzden pratikte katsayı integrallerini hesaplamak yerine bilinen açılımlar cebirsel olarak işlenir; **rezidü hesapları** tamamen bu kolaylık üzerine kuruludur.

33.4 Çarpım ve Bölüm

f ve g , $|z - z_0| < R$ diskinde yakınsayan iki kuvvet serisinin toplamaları olsun. Her ikisi de analitik olduğundan çarpımları da analitiktir ve aynı diskte geçerli bir Taylor açılımına sahiptir:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R)$$

Katsayılar, çarpımın türevleri için Leibniz kuralından okunur:

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Bu formül, iki seriyi **biçimsel olarak terim terime çarpıp** benzer kuvvetleri toplamakla aynı sonucu verir; elde edilen seriye iki serinin **Cauchy çarpımı** denir.

Örnek 33.3 (Serilerin Çarpımı). $\frac{e^z}{1+z}$ fonksiyonunun Maclaurin serisinin ilk terimlerini bulunuz.

Çözüm.

Tekil nokta $z = -1$ olduğundan açılım $|z| < 1$ diskinde geçerlidir. İki bilinen seriyi çarpalım:

$$\frac{e^z}{1+z} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots\right)(1 - z + z^2 - z^3 + \dots)$$

Benzer kuvvetler alt alta toplanırsa:

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \dots \quad (|z| < 1)$$

(z 'nin birinci kuvveti sadeleşir: $1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$.)

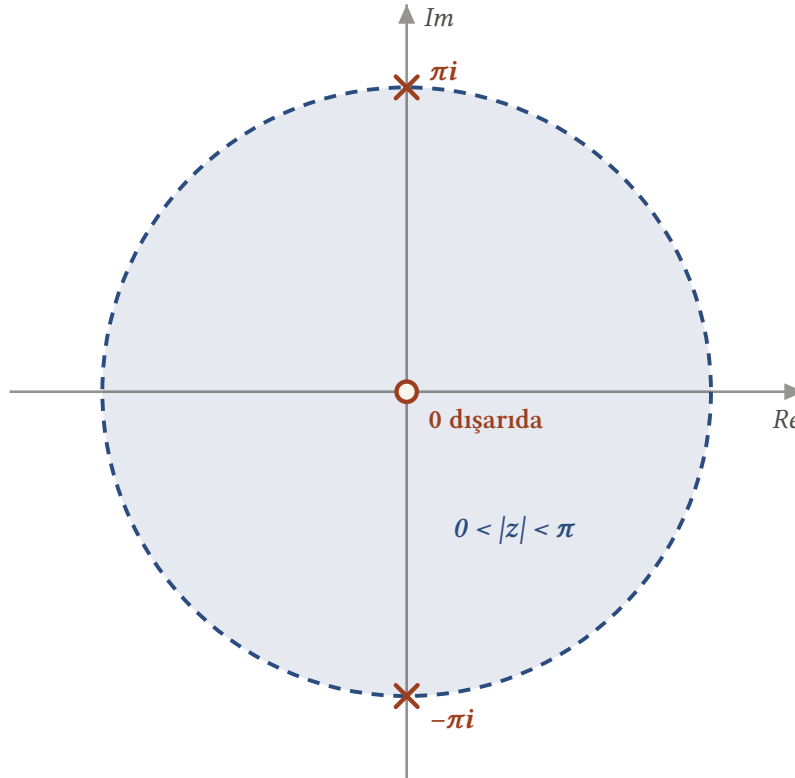
■

Bölme de aynı mantıkla yürür: $g(z) \neq 0$ olduğu bir diskte f/g analitiktir, dolayısıyla Taylor serisine sahiptir ve katsayıları **seri bölmesiyle** bulunur.

Örnek 33.4 (Seri Bölmesiyle Laurent Açılımı). $\frac{1}{z^2 \sinh z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \pi$ delinmiş diskindeki Laurent serisinin ilk üç sıfırdan farklı terimini bulunuz.

Çözüm.

$\sinh z$ 'nin sıfırları $z = n\pi i$ olduğundan (**hiperbolik fonksiyonlar**), orijine en yakın sıfırlar $\pm\pi i$ 'dir; delinmiş diskin yarıçapı π olur.



Şekil 33.1: $1/(z^2 \sinh z)$ fonksiyonu 0'da analitik değildir; $\sinh z$ 'nin diğer sıfırları $n\pi i$ ($n \neq 0$) noktalarıdır ve orijine en yakınları $\pm\pi i$ 'dir. Bu yüzden Laurent açılımı, merkezi dışarıda bırakan $0 < |z| < \pi$ delinmiş diskinde geçerlidir.

Maclaurin açılımıyla $\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$ olduğundan

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} \right)$$

Parantez içindeki bölümü seri bölmesiyle açalım: 1'i, paydadaki seriye bölmek

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} &= 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \dots \end{aligned}$$

verir ($|z| < \pi$). Katsayı kontrolü: $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360} = \frac{7}{360}$.
 $1/z^3$ ile çarpılırsa aranan Laurent serisi çıkar:

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \dots \quad (0 < |z| < \pi)$$

■

33.5 Alıştırma

Alıştırma 33.1 (Seri İşlemleri Alıştırmaları).

- $\frac{z}{(z^2 + 1)^2}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini, $\frac{1}{1 + z^2}$ açılımını türeterek bulunuz.
- $\frac{\sinh z}{z}$ fonksiyonunun $z = 0$ 'da 1 değeriyle tanımlandığında tam olduğunu gösteriniz.
- $\frac{1}{z \sin z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \pi$ halkasındaki Laurent serisinin ilk iki sıfırdan farklı terimini bulunuz.

Çözüm.

a) Geometrik seriden başlayalım; $w = -z^2$ ile

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$$

Yakınsaklık çemberinin içinde terim terime türetme serbesttir. Sol tarafın türevi

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 + z^2} \right) = \frac{-2z}{(1 + z^2)^2}$$

Sağ tarafın türevi ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n z^{2n-1}$$

İki ifadeyi eşitleyip -2 ile bölelim:

$$\frac{z}{(1 + z^2)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{2n-1}$$

İndisi $m = n - 1$ ile kaydırsak açılım daha okunaklı olur:

$$\frac{z}{(1 + z^2)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} (m+1) z^{2m+1} = z - 2z^3 + 3z^5 - \dots \quad (|z| < 1)$$

Türetme yakınsaklık yarıçapını değiştirmedikinden geçerlilik bölgesi yine $|z| < 1$ 'dir.

b) Hiperbolik sinüsün Maclaurin serisi tüm düzlemde geçerlidir:

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots$$

Her terimde en az bir z çarpanı bulunduğundan $z \neq 0$ için z 'ye bölebiliriz:

$$\frac{\sinh z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots$$

Sağdaki kuvvet serisi $\sinh z$ 'nin serisiyle aynı yakınsaklık bölgesine sahiptir, yani **tüm düzlemde** yakınsar; bir kuvvet serisinin toplamı yakınsaklık çemberinin içinde analitik olduğundan bu seri bir tam fonksiyon tanımlar. Serinin $z = 0$ 'daki değeri 1'dir; verilen tanım tam olarak bu değeri seçtiğinden

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sinh z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu seriyle her yerde çakışır ve tamdır. Başlangıçtaki tekillik yalnızca görünüşteydi – kaldırılabilir bir tekillikti.

c) Payda çarpımını serilerle yazalım. Sinüsün açılımından

$$z \sin z = z \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \right) = z^2 \left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots \right)$$

Tersini almak için $\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots$ açılımını, küçük $|z|$ için

$$w = \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots$$

ile kullanalım:

$$\frac{1}{1-w} = 1 + \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} \right) + \left(\frac{z^2}{6} \right)^2 + \dots = 1 + \frac{z^2}{6} + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120} \right) z^4 + \dots$$

Dördüncü mertebeye katsayısı $\frac{10-3}{360} = \frac{7}{360}$ 'tir. $1/z^2$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{z \sin z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{360} z^2 + \dots \quad (0 < |z| < \pi)$$

İlk iki sıfırdan farklı terim $\frac{1}{z^2}$ ve $\frac{1}{6}$ 'dır. Geçerlilik bölgesinin dış yarıçapı π 'dir: $\sin z$ 'nin başlangıca en yakın sıfırları $z = \pm\pi$ noktalarıdır. Ayrıca açılımda $1/z$ terimi bulunmadığına dikkat ediniz; başlangıçtaki rezidü sıfırdır.

■

Seriler kısmı tamamlandı. Şimdi Laurent açılımının en güçlü uygulamasına geçiyoruz: negatif kuvvetlerin ilk katsayısı, tek başına bir integral hesaplama makinesidir – [ayrık tekil noktalar ve rezidü](#).

34. Ayrık Tekil Noktalar ve Rezidü

Cauchy-Goursat teoremi, analitik fonksiyonların kapalı çevre integralini sıfırlıyordu. Peki çevrenin içinde tekil noktalar varsa integral ne olur? Yanıt şaşırtıcı ölçüde basittir: her tekil nokta, integrale **tek bir sayıyla** katkı yapar – o noktadaki **rezidü**. Bu bölüm o sayıyı tanımlıyor.

34.1 Ayrık Tekil Noktalar

Tanım 34.1 (Ayrık Tekil Nokta). z_0 , f 'nin bir **tekil noktası** olsun. f 'nin her yerinde analitik olduğu delinmiş bir

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

komşuluğu varsa, z_0 'a **ayrık** tekil nokta denir.

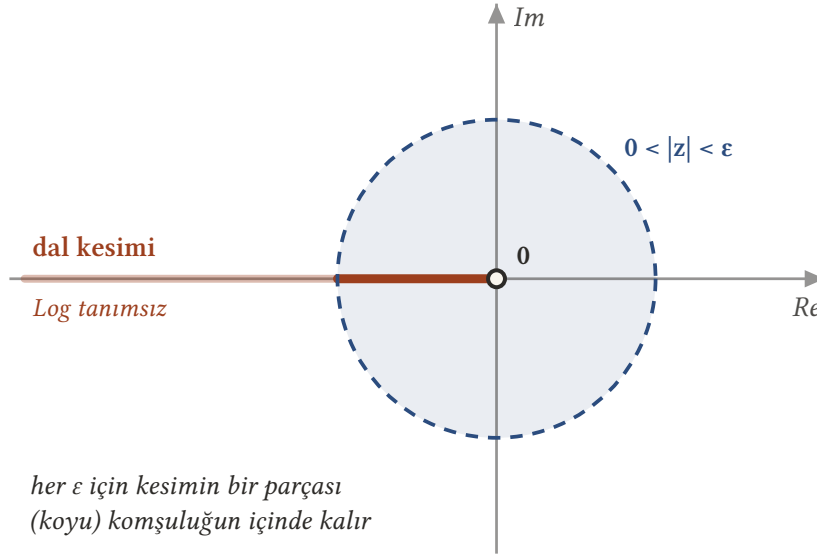
Örnek 34.1 (Ayrık Tekil Noktalar).

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

fonksiyonunun üç ayrık tekil noktası vardır: $z = 0$ ve $z = \pm i$. Her birinin, diğerlerini dışarıda bırakan yeterince küçük delinmiş bir komşuluğu bulunabilir.

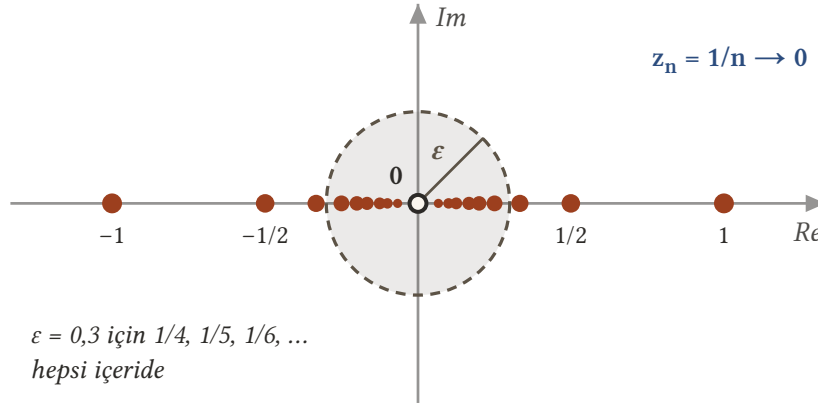
Örnek 34.2 (Ayrık Olmayan Tekillikler). İki karşı örnek, kavramın sınırını gösterir.

Logaritmanın esas dalı. $\text{Log } z = \ln r + i\Theta$ ($r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$) dalı için orijin bir tekil noktadır, ancak **ayrık değildir**: orijinin her delinmiş ε -komşuluğu, negatif reel eksen üzerinde fonksiyonun tanımlı bile olmadığı noktalar içerir. Aynı gözlem $\log z$ 'nin diğer dalları için de geçerlidir; **dal kesimi** boyunca tekillik bir çizgi hâlinindedir.



Şekil 34.1: $\text{Log } z$ için tekillik yalnız orijinde değil, negatif reel eksenin tamamındadır (dal kesimi). Orijinin her delinmiş ε -komşuluğu bu kesimden bir parça içerdiğinden, fonksiyonun her yerinde analitik olduğu bir delinmiş disk bulunamaz: 0 tekil ama **ayrık değildir**.

Sıfırların yığıldığı nokta. $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ fonksiyonunun tekil noktaları $z = 0$ ve $z = \frac{1}{n}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) noktalarıdır. $z = 0$ dışındakilerin hepsi ayrıktır; $z = 0$ ise **ayrık değildir**, çünkü herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m > 1/\varepsilon$ koşulunu sağlayan bir m doğal sayısı seçilerek $0 < 1/m < \varepsilon$ elde edilir – yani orijinin her delinmiş komşuluğu başka tekil noktalar barındırır.



Şekil 34.2: $1/\sin(\pi/z)$ fonksiyonunun tekil noktaları 0 ve $1/n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) sayılarıdır; $1/n$ noktaları orijine yığılır. Her bir $1/n$ ayrıktır; ama 0 değildir: ε ne kadar küçük seçilirse seçilsin, $0 < |z| < \varepsilon$ delinmiş diski $1/m < \varepsilon$ koşulunu sağlayan sonsuz çoklukta tekil nokta içerir.

Bu ünite, bir C basit kapalı çevresinin içinde **sonlu sayıda** tekil nokta bulunan fonksiyonlarla çalışacağız. Böyle noktaların tamamı zorunlu olarak ayrıktır ve her birinin, tamamen C 'nin içinde kalan yeterince küçük delinmiş komşulukları vardır.

i Sonsuzdaki nokta da ayrık olabilir

f , bir $R_1 > 0$ sayısı için $R_1 < |z| < \infty$ domeninde analitikse, $z_0 = \infty$ noktasına f 'nin bir **ayrık tekil noktası** denir. Bu kavramı **bir sonraki bölümde**, integralleri tek bir rezidüyle hesaplamak için kullanacağız.

34.2 Rezidü

z_0 , f 'nin ayrık bir tekil noktası olsun; o zaman f 'nin bir $0 < |z - z_0| < R_2$ delinmiş diskinde analitik olduğu bir R_2 vardır ve **Laurent teoremi** uygulanır:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (1)$$

Katsayıların integral gösteriminde $n = 1$ alınırsa

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (2)$$

elde edilir; burada C , delinmiş diskte kalan ve z_0 'ı çevreleyen pozitif yönlü herhangi bir basit kapalı çevredir.

Tanım 34.2 (Rezidü). (1) açılımında $\frac{1}{z - z_0}$ teriminin katsayısı olan b_1 sayısına, f 'nin z_0 ayrık tekil noktasındaki **rezidüsü** denir:

$$b_1 = \text{Rez}_{z=z_0} f(z)$$

(2) eşitliği tersine okunursa, integral hesabı için son derece güçlü bir araç doğar:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Re}_{z=z_0} f(z) \quad (3)$$

💡 İntegral almak yerine katsayı okumak

(3) formülünün pratik anlamı şudur: bir çevre integralini hesaplamak yerine, integrandın Laurent açılımında **tek bir katsayıyı** bulmak yeterlidir. Açılımı bulmanın yolu ise **tekliğin** sağladığı serbestliktir — bilinen açılımlarda değişken değiştirmek çoğu zaman en kısa yoldur.

34.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 34.3 (Rezidüyle İntegral). C , pozitif yönlü birim çember $|z| = 1$ olmak üzere

$$\int_C z^2 \operatorname{sn}\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

İntegrand, $z = 0$ dışında sonlu düzlemin her yerinde analitiktir; $0 < |z| < \infty$ halkasında geçerli bir Laurent serisi vardır. **Sinüsün Maclaurin serisinde** z yerine $1/z$ yazıp z^2 ile çarpalım:

$$z^2 \operatorname{sn}\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^3} - \dots$$

$1/z$ 'nin katsayısı aranan rezidüdür: $b_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. (3) formülüyle

$$\int_C z^2 \operatorname{sn}\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}$$

■

Örnek 34.4 (Sıfır Rezidü, Sıfır İntegral). Aynı C çemberi için

$$\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Üstel fonksiyonun açılımında z yerine $1/z^2$ yazalım:

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^6} + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

Yalnızca **çift** negatif kuvvetler görünür; $1/z$ 'nin katsayısı sıfırdır, yani $z = 0$ 'daki rezidü $b_1 = 0$ 'dır. (3) formülü integralin sıfır olduğunu verir.

Bu örnek önemli bir ayrımı vurgular: bir fonksiyonun C 'nin içinde ve üzerinde analitik olması, integralin sıfır olması için **yeterlidir** ama **gerekli değildir**. Burada integrand $z = 0$ 'da analitik olmadığı hâlde integral sıfır çıkmıştır.

■

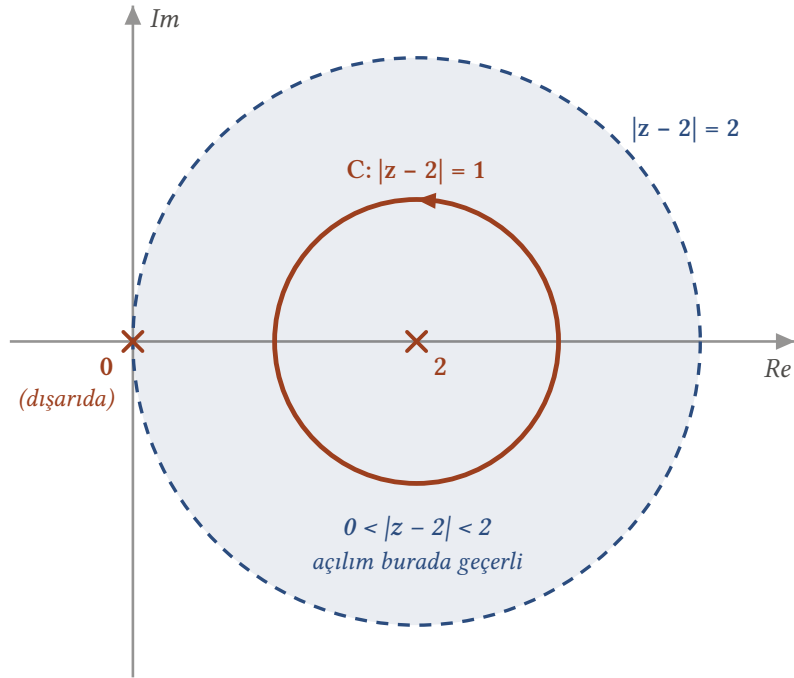
Örnek 34.5 (Kaydırılmış Merkez). C , pozitif yönlü $|z - 2| = 1$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ ve $z = 2$ 'dir; yalnızca $z = 2$ çemberin içindedir. O hâlde $z = 2$ merkezli, $0 < |z - 2| < 2$ delinmiş diskinde geçerli Laurent açılımı gerekir.



Şekil 34.3: Çevre C yalnız $z = 2$ tekil noktasını sarar; açılım bu yüzden 2 merkezlidir. Kesikli çember diğer tekil nokta 0 'dan geçer: $0 < |z - 2| < 2$ halkası, Laurent serisinin geçerli olduğu en büyük delinmiş disktr ve C onun içinde kalır.

Paydayı $z = (z - 2) + 2$ ile yeniden yazalım:

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{(z-2)^4} \cdot \frac{1}{2 + (z-2)} = \frac{1}{2(z-2)^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-2}{2}}$$

Geometrik açılım $\left| \frac{z-2}{2} \right| < 1$, yani $0 < |z - 2| < 2$ koşuluyla uygulanır:

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-4} \quad (0 < |z - 2| < 2)$$

$\frac{1}{z-2}$ terimi $n - 4 = -1$, yani $n = 3$ için doğar; katsayısı

$$\text{Rez}_{z=2} \frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{(-1)^3}{2^4} = -\frac{1}{16}$$

Sonuç:

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i \left(-\frac{1}{16} \right) = -\frac{\pi i}{8}$$



34.4 Alıştırma

Alıştırma 34.1 (Rezidü Alıştırmaları). C , pozitif yönlü $|z| = 3$ çemberi olmak üzere aşağıdaki integralleri rezidü yardımıyla hesaplayınız.

- $\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz$
- $\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$
- $\int_C z e^{1/z} dz$
- $\int_C \frac{z+1}{z^2-2z} dz$ (iki tekil nokta için ayrı ayrı rezidü bulunuz)

Çözüm.

Her şıkta yöntem aynıdır: integrandın çember içindeki tekil noktası etrafında Laurent açılımı yazılır, $1/(z-z_0)$ teriminin katsayısı okunur ve $2\pi i$ ile çarpılır.

a) Tek tekil nokta $z = 0$ 'dır ve içeridedir. e^{-z} açılımını z^2 'ye bölelim:

$$\frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \dots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \dots$$

Rezidü, $1/z$ 'nin katsayısıdır: $b_1 = -1$. Böylece

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz = 2\pi i (-1) = -2\pi i$$

b) Tekil nokta $z = 1$ 'dir ($|1| < 3$). $w = z - 1$ yazalım; $e^{-z} = e^{-(w+1)} = e^{-1}e^{-w}$ olduğundan

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{w^2} \left(1 - w + \frac{w^2}{2!} - \dots \right) = e^{-1} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w} + \frac{1}{2} - \dots \right)$$

Rezidü $b_1 = -e^{-1}$ 'dir:

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{e} \right) = -\frac{2\pi i}{e}$$

c) $z = 0$ esaslı bir tekil noktadır; açılımı doğrudan yazalım:

$$z e^{1/z} = z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \dots$$

Rezidü $b_1 = \frac{1}{2}$ 'dir:

$$\int_C z e^{1/z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

d) Paydayı çarpanlarına ayıralım: $z^2 - 2z = z(z-2)$. İki tekil nokta da ($z = 0$ ve $z = 2$) çemberin içindedir.

$z = 0$ civarında $\frac{z+1}{z-2}$ çarpanı analitiktir; basit kutupta rezidü, bu çarpanın noktadaki değeridir (bu kural **tekil nokta türleri** bölümünde gerekçelendirilecek; şimdilik aşağıdaki basit kesir ayrışımından da okunabilir):

$$\text{Rez}_{z=0} = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

$z = 2$ civarında ise $\frac{z+1}{z}$ çarpanı analitiktir:

$$\text{Rez}_{z=2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

İntegrali hesaplamak için bulunan rezidüler basit kesir ayrışımının katsayılarıdır:

$$\frac{z+1}{z(z-2)} = \frac{-1/2}{z} + \frac{3/2}{z-2}$$

Her iki terimin integrali de deformasyon ilkesiyle $2\pi i$ verdiğiinden

$$\int_C \frac{z+1}{z^2-2z} dz = -\frac{1}{2}(2\pi i) + \frac{3}{2}(2\pi i) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 2\pi i$$

Rezidülerin **toplanması** tesadüf değildir; bir sonraki bölümün teoremi bunu genel kural hâline getirecek.

■

Son alıştırma, bir sonraki adımı işaret ediyor: çevrenin içinde birden çok tekil nokta varsa ne olur? Yanıt sadedir ve bu kuramın taç teoremidir — [Cauchy rezidü teoremi](#).

35. Cauchy Rezidü Teoremi ve Sonsuzdaki Rezidü

Bir çevrenin içinde birden çok tekil nokta varsa, integral bunların katkılarının **toplamıdır**. Cauchy rezidü teoremi bu gözlemi kesinleştirir ve kompleks analizin hesap gücünü zirveye taşır: karmaşık integraller, birkaç seri katsayısının toplamına indirgenir.

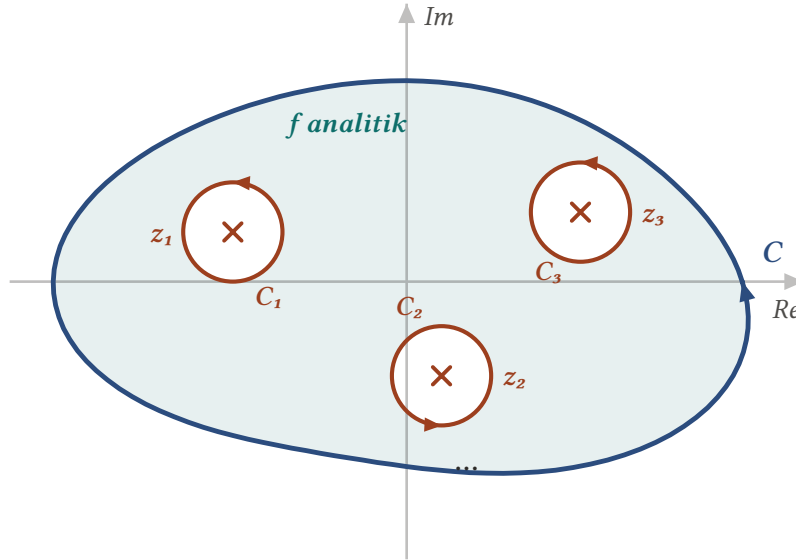
35.1 Cauchy Rezidü Teoremi

Teorem 35.1 (Cauchy Rezidü Teoremi). C , pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olsun. Bir f fonksiyonu, C 'nin içindeki sonlu sayıda z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) tekil noktası hariç, C 'nin içinde ve üzerinde analitikse

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rez}_{z=z_k} f(z) \quad (1)$$

İspat.

Her z_k noktasını merkez alan, birbirlerini kesmeyecek ve tamamen C 'nin içinde kalacak kadar küçük, pozitif yönlü C_k çemberleri çizelim.



Şekil 35.1: İspatın resmi: her tekil noktayı saran küçük pozitif yönlü C_k çemberleri C ile birlikte çok bağlantılı bir bölgeyi sınırlar; gölgeli bölgede f analitiktir. Cauchy-Goursat teoremi $\int_C - \sum \int_{C_k} = 0$ verir; her küçük çember de $2\pi i \cdot \text{Rez}$ katkısı yapar.

Bu çemberler, C ile birlikte çok bağlantılı bir kapalı bölgenin sınırını oluşturur: C 'nin içinde ve her C_k 'nin dışında kalan bölge. f , bu bölgenin tamamında analitiktir. Çok bağlantılı domenler için Cauchy-Goursat teoremi uygulanır:

$$\int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0$$

Her C_k tek bir tekil nokta çevrelediğinden *rezidü tanımı* geçerlidir:

$$\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Rez}_{z=z_k} f(z) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

İki ifade birleştirildiğinde (1) elde edilir.

■

Örnek 35.1 (İki Tekil Noktalı İntegral). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

İntegrandın iki ayrık tekil noktası $z = 0$ ve $z = 1$ 'dir; ikisi de C 'nin içindedir. İki rezidüyü Laurent açılımlarından okuyalım.

$z = 0$ 'daki rezidü. $0 < |z| < 1$ delinmiş diskinde, $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ açılımıyla

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z} \cdot \frac{-1}{1-z} = \left(5 - \frac{2}{z}\right) (-1 - z - z^2 - \dots)$$

Sağ taraftaki çarpımda $1/z$ 'nin katsayısı, $-\frac{2}{z}$ ile -1 'in çarpımından gelir: $B_1 = 2$.

$z = 1$ 'deki rezidü. $0 < |z-1| < 1$ delinmiş diskinde, pay ve payda $z-1$ cinsinden yazılır:

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5(z-1)+3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right) [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots] \end{aligned}$$

$\frac{1}{z-1}$ 'in katsayısı $B_2 = 3$ 'tür. Teorem gereği

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i (B_1 + B_2) = 2\pi i (2 + 3) = 10\pi i$$

Kısa yol. İntegrand basit kesirlere ayrılırsa hesap tek satıra iner:

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1}$$

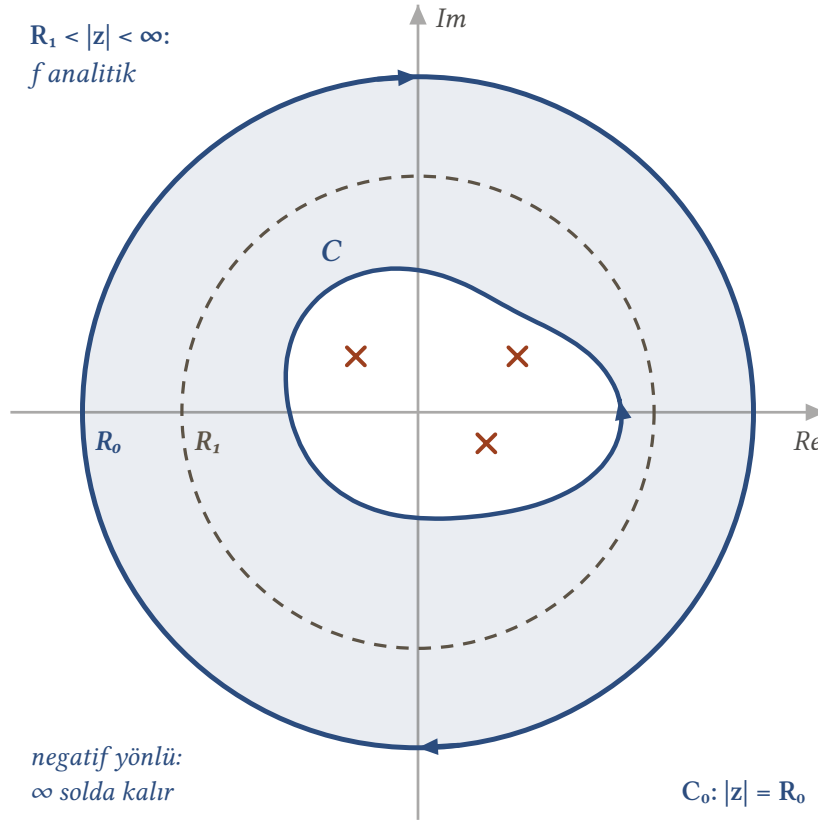
$\frac{2}{z}$ ifadesi $0 < |z| < 1$ için zaten bir Laurent serisidir ve rezidüsü 2'dir; $\frac{3}{z-1}$ ifadesi de $z = 1$ civarında rezidüsü 3 olan bir Laurent serisidir. Sonuç aynıdır.

■

35.2 Sonsuzdaki Rezidü

Tekil nokta sayısı arttıkça teorem hantallaşır. Bazen tek bir rezidü hesabıyla kurtulmak mümkündür — yeter ki “sonsuzdaki” davranışa bakmayı bilelim.

f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içindeki sonlu sayıda tekil nokta hariç sonlu düzlemde analitik olsun. R_1 , C çevresi $|z| = R_1$ çemberinin içinde kalacak kadar büyük bir pozitif sayı olsun; o zaman f , $R_1 < |z| < \infty$ domeninde analitiktir ve $z_0 = \infty$, f 'nin ayrık bir tekil noktasıdır.



Şekil 35.2: C çevresi $|z| = R_1$ çemberinin içinde kalır; $|z| > R_1$ bölgesinde f analitiktir ve ∞ ayrık bir tekil noktadır. C_0 saat yönünde dolaşılır ki sonsuzdaki nokta solda kalsın; gölgeli bölgede (C ile C_0 arasında) f analitik olduğundan $\int_C = -\int_{C_0}$.

Tanım 35.1 (Sonsuzdaki Rezidü). $C_0, R_0 > R_1$ olmak üzere **negatif yönlü** $|z| = R_0$ çemberi olsun. f 'nin sonsuzdaki rezidüsü

$$\int_{C_0} f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=\infty} f(z) \quad (2)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Yönün negatif seçilmesi, tıpkı sonlu düzlemdeki tanımda olduğu gibi, dolaşılırken tekil noktanın – burada sonsuzdaki noktanın – **solda** kalmasını sağlar.

f , C ile C_0 arasındaki kapalı bölgede analitik olduğundan **yolun deformasyonu ilkesi** şunu verir:

$$\int_C f(z) dz = \int_{-C_0} f(z) dz = - \int_{C_0} f(z) dz$$

Yani (2) tanımıyla

$$\int_C f(z) dz = -2\pi i \text{Rez}_{z=\infty} f(z) \quad (3)$$

Bu rezidüyü hesaplamak için f 'nin $R_1 < |z| < \infty$ halkasındaki Laurent serisini yazalım:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} \quad (4)$$

(4) açılımında z yerine $1/z$ yazılıp sonuç $1/z^2$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n} \quad \left(0 < |z| < \frac{1}{R_1} \right)$$

elde edilir. Bu son serideki $1/z$ katsayısı c_{-1} 'dir; yani

$$c_{-1} = \text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) \right]$$

Öte yandan (4)'te $n = -1$ konursa $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0} f(z) dz$, yani (2) tanımıyla karşılaştırıldığında

$$\text{Rez}_{z=\infty} f(z) = -\text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) \right] \quad (5)$$

Teorem 35.2 (Tek Rezidüyle İntegral). Bir f fonksiyonu, pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içindeki sonlu sayıda tekil nokta hariç sonlu düzlemde her yerde analitikse

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) \right] \quad (6)$$

İspat.

(3) ve (5) eşitlikleri yan yana konur; iki eksi işareti birbirini götürür.

■

💡 Ne zaman tercih edilir?

Teorem, integrandın çevre içinde **çok sayıda** tekil noktası olduğunda büyük kolaylık sağlar: hepsini tek tek bulmak yerine tek bir rezidü hesaplanır. Bu, aslında bir muhasebe eşitliğidir — sonlu düzlemdeki tüm rezidülerin toplamı ile sonsuzdaki rezidünün toplamı sıfırdır.

Örnek 35.2 (Aynı İntegral, Tek Rezidü). Örnek 35.1 integralini sonsuzdaki rezidüyle yeniden hesaplayınız.

Çözüm.

$$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)} \text{ için}$$

$$\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\frac{5}{z} - 2}{\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)} = \frac{5-2z}{z(1-z)}$$

$0 < |z| < 1$ için geometrik açılımla

$$\frac{5-2z}{z(1-z)} = \left(\frac{5}{z} - 2 \right) (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{5}{z} + 3 + 3z + \dots$$

$1/z$ 'nin katsayısı 5'tir. (6) formülüyle

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i (5) = 10\pi i$$

İki rezidü yerine bir tanesi hesaplandı ve sonuç Örnek 35.1 ile aynı çıktı.

■

Örnek 35.3 (Çok Tekil Noktalı İntegral). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{4z - 5}{z(z - 1)} dz$$

integralini iki yöntemle de hesaplayınız.

Çözüm.

Rezidü teoremiyle. Basit kesirlere ayırılım:

$$\frac{4z - 5}{z(z - 1)} = \frac{5}{z} - \frac{1}{z - 1}$$

Rezidüler 5 ve -1 ; toplam 4 ve integral $8\pi i$ 'dir.

Sonsuzdaki rezidüyle.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\frac{4}{z} - 5}{\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)} = \frac{4 - 5z}{z(1 - z)} \\ &= \left(\frac{4}{z} - 5 \right) (1 + z + \dots) = \frac{4}{z} - 1 + \dots \end{aligned}$$

$1/z$ 'nin katsayısı 4'tür ve (6) formülü yine $8\pi i$ verir.

■

35.3 Alıştırma

Alıştırma 35.1 (Rezidü Teoremi Alıştırmaları). C , pozitif yönlü $|z| = 3$ çemberi olmak üzere aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a) $\int_C \frac{3z + 2}{z(z - 2)} dz$
- b) $\int_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1 + z^3} dz$ (sonsuzdaki rezidüyü kullanınız)
- c) $\int_C \frac{dz}{z^3(z + 4)}$

Çözüm.

a) İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ ve $z = 2$ 'dir; ikisi de $|z| = 3$ çemberinin içindedir. Her ikisi de basit kutup olduğundan rezidüler, kalan çarpanın o noktadaki değeridir:

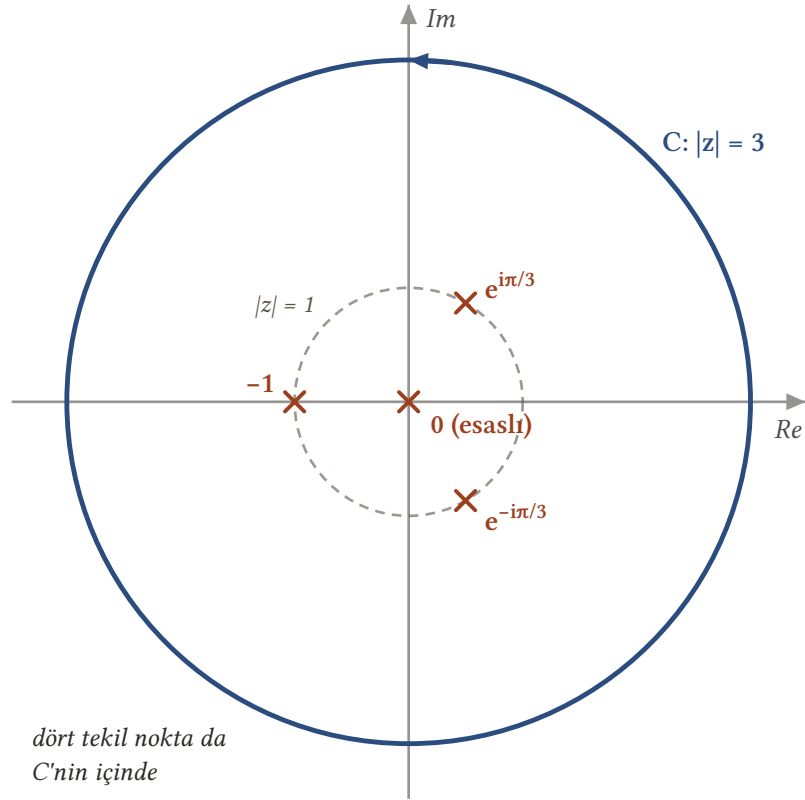
$$\text{Rez}_{z=0} \frac{3z + 2}{z(z - 2)} = \frac{3 \cdot 0 + 2}{0 - 2} = -1$$

$$\text{Rez}_{z=2} \frac{3z + 2}{z(z - 2)} = \frac{3 \cdot 2 + 2}{2} = 4$$

Rezidü teoremi rezidülerin toplamını ister:

$$\int_C \frac{3z + 2}{z(z - 2)} dz = 2\pi i (-1 + 4) = 6\pi i$$

b) İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ (esası, $e^{1/z}$ yüzünden) ve $1 + z^3 = 0$ denkleminin kökleridir; bu köklerin modülü 1 olduğundan hepsi çemberin içindedir.



Şekil 35.3: $z^3 e^{1/z} / (1 + z^3)$ integrandının dört tekil noktası: $1 + z^3 = 0$ denkleminin birim çember üzerindeki üç kökü ve orijindeki esaslı tekillik. Hepsı $|z| = 3$ çemberinin içinde olduğundan dört rezidü yerine tek bir rezidü — sonsuzdaki rezidü — yeter.

Dört noktada da rezidü hesaplamak yerine **sonsuzdaki rezidü** formülünü kullanalım: $f, |z| \geq 3$ bölgesinde analitik olduğundan

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{f} \right) \right]$$

Önce $f(1/z)$ ifadesini sadeleştirelim:

$$\left(\frac{1}{f} \right) = \frac{\frac{1}{z^3} e^z}{1 + \frac{1}{z^3}} = \frac{e^z}{z^3 + 1}$$

Buna $1/z^2$ çarpanını ekleyelim:

$$\frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{e^z}{z^2 (1 + z^3)}$$

Başlangıç civarındaki açılımı yazalım; $\frac{1}{1 + z^3} = 1 - z^3 + \dots$ olduğundan

$$\frac{e^z}{1 + z^3} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \right) (1 - z^3 + \dots) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$$

z^2 'ye bölersek

$$\frac{e^z}{z^2 (1 + z^3)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \dots$$

Rezidü 1'dir. Sonuç:

$$\int_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

c) Tekil noktalar $z = 0$ (üçüncü mertebeden kutup) ve $z = -4$ 'tür; ikincisi çemberin dışındadır, dolayısıyla yalnızca başlangıç katkısı yapar. $\frac{1}{z+4}$ çarpanını başlangıç civarında açalım:

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{16} - \dots \right)$$

z^3 'e bölelim:

$$\frac{1}{z^3(z+4)} = \frac{1}{4z^3} - \frac{1}{16z^2} + \frac{1}{64z} - \dots$$

Rezidü, $1/z$ 'nin katsayısı olan $\frac{1}{64}$ 'tür:

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{64} = \frac{\pi i}{32}$$

■

Rezidüyü bulmak için her seferinde Laurent açılımı yazmak zahmetlidir. Tekil noktaları **sınıflandırarak** çok daha hızlı formüller elde edebiliriz: [tekil nokta türleri](#).

36. Ayırık Tekil Noktaların Üç Tipi

Bir ayırık tekil noktanın karakterini, Laurent açılımının **negatif kuvvetli kısmı** belirler ve sınıflandırmanın tamamı tek bir soruya dayanır: *bu kısımda sıfırdan farklı kaç terim var?* Yalnızca üç olasılık vardır – hiç, sonlu sayıda (en az bir), sonsuz sayıda – ve her biri bir tekillik tipini tanımlar. Sınıflandırma yalnızca bir isimlendirme değildir: kutuplar için rezidüyü seri yazmadan veren pratik formüller elde edeceğiz.

36.1 Esas Kısım

z_0 , f 'nin ayırık bir tekil noktası olsun; $0 < |z - z_0| < R_2$ delinmiş diskinde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (1)$$

Tanım 36.1 (Esas Kısım). (1) açılımının negatif kuvvetleri içeren

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (2)$$

kısmına, f 'nin z_0 'daki **esas kısım** denir.

36.2 Sınıflandırma

36.2.1 Esas Kısım Boşsa: Kaldırılabilir Tekil Nokta

Tanım 36.2 (Kaldırılabilir Tekil Nokta). Esas kısımda hiç terim yoksa – yani **her** b_n katsayısı sıfırsa – z_0 'a **kaldırılabilir tekil nokta** denir. Bu durumda delinmiş diskteki açılım bir kuvvet serisinden ibarettir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (3)$$
$$(0 < |z - z_0| < R_2)$$

Adın gerekçesi: f 'ye z_0 'da $f(z_0) = a_0$ değeri atanırsa (3) açılımı $|z - z_0| < R_2$ diskinin **tamamında** geçerli olur; kuvvet serisinin toplamı yakınsaklık çemberi içinde **analitik olduğundan** f , z_0 'da analitik hâle gelir. Tekillik böylece “kaldırılmış” olur. Esas kısımda b_1 terimi de bulunmadığından, kaldırılabilir bir noktadaki rezidü daima sıfırdır.

Örnek 36.1 (Kaldırılabilir Tekillik). $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ için orijin kaldırılabilir bir tekil noktadır:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots$$
$$(0 < |z| < \infty)$$

Negatif kuvvetli hiçbir terim yoktur. $f(0) = \frac{1}{2}$ değeri atandığında f tam olur.

36.2.2 Esas Kısım Sonluysa: Kutup

Tanım 36.3 (Kutup). Esas kısım boş değil ama **sonluysa** – yani

$$b_m \neq 0 \quad \text{ve} \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$$

olacak biçimde bir $m \geq 1$ tam sayısı varsa $-z_0$ 'a **m -inci mertebeden kutup** denir. Açılım bu durumda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (4)$$

$$(0 < |z - z_0| < R_2)$$

biçimindedir. $m = 1$ durumunda **basit kutup** adı kullanılır.

Örnek 36.2 (Basit Kutup).

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}$$

$$(0 < |z - 2| < \infty)$$

Esas kısım tek terimlidir: $z_0 = 2$ bir basit kutuptur ve rezidü $b_1 = 3$ 'tür.

Örnek 36.3 (İkinci Mertebeden Kutup).

$$\frac{1}{z^2(1+z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z^2} (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + \dots$$

$(0 < |z| < 1)$ açılımında esas kısım iki terimlidir: orijin ikinci mertebeden bir kutuptur ve

$$\text{Rez}_{z=0} \frac{1}{z^2(1+z)} = -1$$

Örnek 36.4 (Üçüncü Mertebeden Kutup).

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \dots$$

$(0 < |z| < \infty)$ açılımında en yüksek negatif kuvvet 3'tür: orijin üçüncü mertebeden kutuptur ve rezidü $B = \frac{1}{6}$ 'dır.

36.2.3 Esas Kısım Sonsuzsa: Esaslı Tekil Nokta

Tanım 36.4 (Esaslı Tekil Nokta). Esas kısımda **sonsuz sayıda** sıfırdan farklı katsayı varsa, z_0 'a **esaslı tekil nokta** denir.

Örnek 36.5 (Esaslı Tekillik).

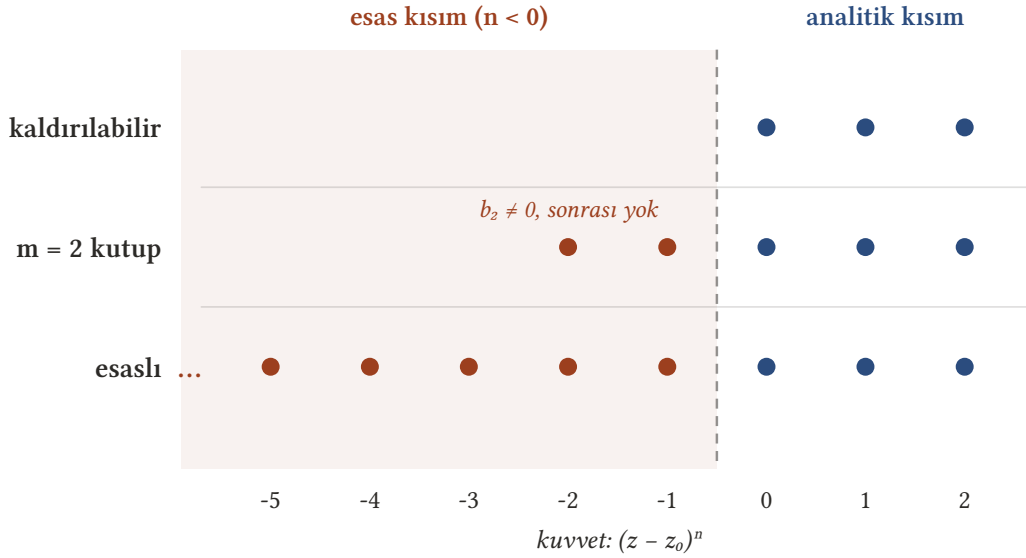
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

Esas kısımda sonsuz terim vardır: orijin esaslı bir tekil noktadır ve rezidü $b_1 = 1$ 'dir.

i Picard teoremi

Esaslı tekil noktalar, fonksiyonun davranışının en vahşi hâle geldiği yerlerdir. Picard teoremi bunu çarpıcı biçimde ifade eder: bir fonksiyon, esaslı tekil noktasının **her** komşuluğunda, olası bir istisna dışında **her sonlu değeri sonsuz kez** alır. **Bir sonraki bölümde** bu üç tipin limit davranışlarını karşılaştıracacağız.

36.2.4 Bir Bakışta



Şekil 36.1: Üç tekillik tipi, tek bakışta: her satır bir Laurent açılımıdır, dolu noktalar sıfırdan farklı katsayıları gösterir. Fark yalnızca **esas kısımdaki** (negatif kuvvetli) terim sayınsındadır: hiç yoksa kaldırılabilir, sonluysa kutup, sonsuzsa esaslı tekil nokta.

Esas kısımdaki terim sayısı	Tekilliğin tipi	Ayrt edici özellik
hiç	kaldırılabilir	$f(z_0) = a_0$ atanınca f analitik olur; rezidü 0
sonlu — sonuncusu $b_m \neq 0$	m -inci mertebeden kutup	$z \rightarrow z_0$ iken $ f(z) \rightarrow \infty$
sonsuz	esaslı	limit yoktur; davranış vahşidir (Picard)

Üçüncü sütundaki davranışlardan kutuptaki $|f(z)| \rightarrow \infty$ ile esaslı tekillikteki Casorati-Weierstrass teoremi **bir sonraki bölümde** kanıtlanacak, Picard teoremi ise kanıtsız aktarılacaktır. Sınıflandırmanın kendisi yalnızca katsayı saymaya dayanır.

36.3 Kutuplarda Rezidü

Kutup mertebesini ve rezidüyü bulmanın temel yolu uygun Laurent serisini yazmaktır; ama çoğu zaman şu teorem çok daha hızlıdır.

Teorem 36.1 (Kutup Karakterizasyonu ve Rezidü Formülü). Bir f fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 , m -inci mertebeden bir kutuptur ancak ve ancak $f(z)$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} \quad (5)$$

biçiminde yazılabiliyorsa; burada φ, z_0 'da analitik ve $\varphi(z_0) \neq 0$ 'dır. Ayrıca

$$m = 1 \implies \text{Rez}_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0) \quad (6)$$

$$m \geq 2 \implies \text{Rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad (7)$$

İspat.

($\Leftarrow$) $f, (5)$ biçiminde olsun. φ, z_0 'da analitik olduğundan bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda Taylor serisine sahiptir:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(z_0) + \frac{\varphi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1} \\ &+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \end{aligned}$$

(5) 'te yerine konursa, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ için

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\varphi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\varphi'(z_0)/1!}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{z - z_0} \\ &+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Bu bir Laurent serisidir; $\varphi(z_0) \neq 0$ olduğundan esas kısım tam olarak m terimlidir, yani z_0 gerçekten m -inci mertebeden bir kutuptur. $1/(z - z_0)$ teriminin katsayısı da rezidüyü verir ve (6)–(7) formülleri okunur.

($\Rightarrow$) z_0, m -inci mertebeden bir kutup olsun; (4) açılımı geçerlidir ($b_m \neq 0$).

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z), & z \neq z_0 \\ b_m, & z = z_0 \end{cases}$$

tanımlayalım. (4) ile çarpım açıldığında

$$\varphi(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n}$$

elde edilir; sağ taraf $|z - z_0| < R_2$ diskinde yakınsayan bir kuvvet serisidir, dolayısıyla φ orada – özellikle z_0 'da – analitiktir ve $\varphi(z_0) = b_m \neq 0$ 'dır. Bu da (5) gösterimidir. ■

36.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 36.6 (Basit Kutupta Rezidü). $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$ fonksiyonunun tekil noktalarını ve rezidülerini bulunuz.

Çözüm.

$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ olduğundan tekil noktalar $z = \pm 3i$ 'dir. $z = 3i$ için

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - 3i}, \quad \varphi(z) = \frac{z+1}{z+3i}$$

$\varphi, z = 3i$ 'de analitik ve $\varphi(3i) \neq 0$ olduğundan bu bir basit kutuptur; (6) ile

$$B_1 = \varphi(3i) = \frac{3i+1}{6i} = \frac{3i+1}{6i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{3-i}{6}$$

Benzer hesapla $z = -3i$ noktası da basit kutuptur ve rezidüsü $B_2 = \frac{3+i}{6}$ 'dır.

■

Örnek 36.7 (Üçüncü Mertebeden Kutupta Rezidü). $f(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z - i)^3}$ fonksiyonunun $z = i$ 'deki kutup mertebesini ve rezidüsünü bulunuz.

Çözüm.

$\varphi(z) = z^3 + 2z$ tamdır ve $\varphi(i) = i^3 + 2i = -i + 2i = i \neq 0$ 'dır; demek ki $z = i$, üçüncü mertebeden bir kutuptur. (7) formülüyle ($m = 3$):

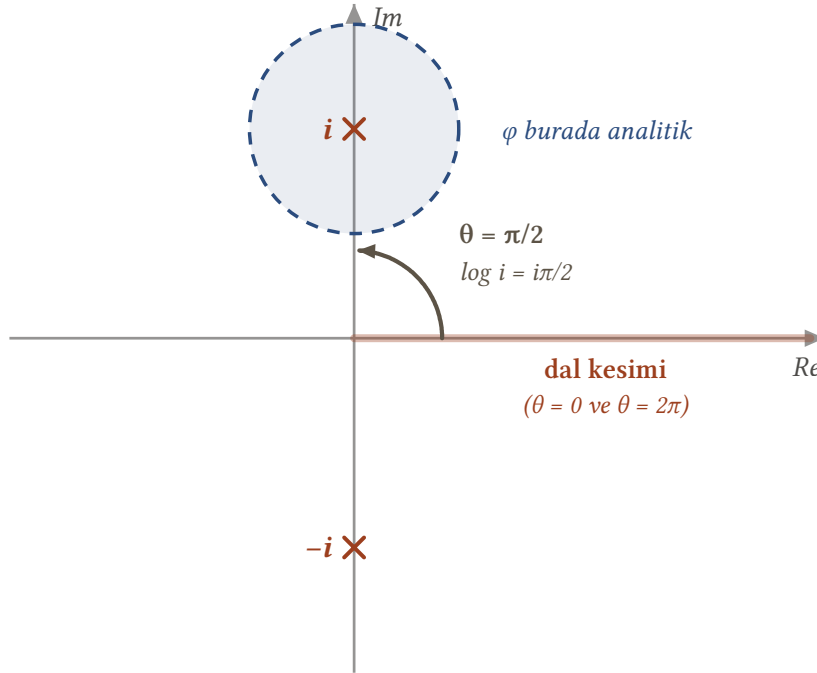
$$\varphi''(z) = 6z \Rightarrow B = \frac{\varphi''(i)}{2!} = \frac{6i}{2} = 3i$$

■

Örnek 36.8 (Çok Değerli Fonksiyonun Dalıyla).

$$f(z) = \frac{(\log z)^3}{z^2 + 1}, \quad \log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

dalı için $z = i$ tekilliğindeki rezidüyü bulunuz.



Şekil 36.2: Seçilen dalın kesimi pozitif reel eksendedir; $z = i$ ondan uzak olduğu için $\varphi(z) = (\log z)^3 / (z + i)$ orada analiktir ve kutup basittir. Bu dalda i 'nin açısı kesimden saat yönünün tersine ölçülen $\pi/2$ 'dir, yani $\log i = i\pi/2$.

Çözüm.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - i}, \quad \varphi(z) = \frac{(\log z)^3}{z + i}$$

φ , seçilen dalın tanımlı olduğu bölgede $z = i$ 'de analiktir ve

$$\varphi(i) = \frac{(\log i)^3}{2i} = \frac{(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})^3}{2i} = \frac{(i\frac{\pi}{2})^3}{2i} = \frac{-i\frac{\pi^3}{8}}{2i} = -\frac{\pi^3}{16} \neq 0$$

Basit kutuptur; rezidü $B = -\frac{\pi^3}{16}$,dır.

■

⚠ Formülü yanlış yerde kullanmayın

$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$ için “ $\varphi(z) = \sinh z$, $m = 4$ ” yazıp (7) formülünü uygulamak **yanlıştır**: formülün geçerliliği $\varphi(z_0) \neq 0$ koşuluna bağlıdır, oysa $\sinh 0 = 0$ ’dır. Doğru yol, **Örnek 36.4** hesabındaki gibi birkaç Laurent terimi yazmaktır; orada kutbun aslında **üçüncü** mertebeden olduğu ve rezidünün $1/6$ çıktığı görülmüştü.

Örnek 36.9 (Seriyle Teoremin Birleştirilmesi). $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ fonksiyonunun $z = 0$ ’daki kutup mertebesini ve rezidüsünü bulunuz.

Çözüm.

$z(e^z - 1)$ tamdır ve sıfırları $z = 2n\pi i$ noktalarıdır; orijin f ’nin ayrık tekil noktasıdır. Maclaurin serisiyle

$$z(e^z - 1) = z\left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) = z^2\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)$$

Böylece

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots}$$

φ , orijinin bir komşuluğunda analitiktir (payda orada sıfırlanmaz) ve $\varphi(0) = 1 \neq 0$ ’dır: $z = 0$ **ikinci mertebeden** bir kutuptur. (7) formülüyle $B = \varphi'(0)$:

$$\varphi'(z) = \frac{-\left(\frac{1}{2!} + \frac{2z}{3!} + \dots\right)}{\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = -\frac{1}{2}$$

Yani $\text{Rez}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}$.

■

36.5 Alıştırma

Alıştırma 36.1 (Sınıflandırma Alıştırmaları). Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktalardaki tekillik tipini belirleyiniz ve rezidüyü hesaplayınız.

- $\frac{z^2}{1+z}, z = -1$
- $\frac{1 - \cosh z}{z^3}, z = 0$
- $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}, z = 1$
- $z \exp\left(\frac{1}{z}\right), z = 0$

Çözüm.

a) Fonksiyonu $\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ biçiminde yazalım:

$$\frac{z^2}{1+z} = \frac{z^2}{z - (-1)}, \quad \varphi(z) = z^2$$

$\varphi, z = -1$ 'de analitik ve $\varphi(-1) = 1 \neq 0$ olduğundan tekil nokta **basit kutuptur** (birinci mertebeden). Basit kutupta rezidü $\varphi(z_0)$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=-1} \frac{z^2}{1+z} = \varphi(-1) = 1$$

b) Payın Maclaurin açılımıyla başlayalım:

$$1 - \cosh z = 1 - \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) = -\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} - \dots$$

z^3 'e bölelim:

$$\frac{1 - \cosh z}{z^3} = -\frac{1}{2z} - \frac{z}{24} - \dots$$

Negatif kuvvetli kısımda yalnızca $1/z$ terimi vardır; payda z^3 olmasına rağmen tekillik **birinci mertebeden kutuptur** (payın çift katlı sıfırı payda mertebesini iki düşürür). Rezidü:

$$\text{Rez}_{z=0} \frac{1 - \cosh z}{z^3} = -\frac{1}{2}$$

c) Fonksiyon $\frac{\varphi(z)}{(z-1)^2}$ biçimindedir; $\varphi(z) = e^{2z}$ analitik ve $\varphi(1) = e^2 \neq 0$ olduğundan $z = 1$ **ikinci mertebeden kutuptur**. $m = 2$ için rezidü formülü $\varphi'(z_0)$ 'dir:

$$\varphi'(z) = 2e^{2z} \Rightarrow \text{Rez}_{z=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \varphi'(1) = 2e^2$$

d) Açılımı yazalım:

$$z \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \dots$$

Negatif kuvvetli kısım **sonsuz çok** terim içerdiğinden $z = 0$ bir **esaslı tekil noktadır**. Rezidü yine $1/z$ 'nin katsayısıdır:

$$\text{Rez}_{z=0} z e^{1/z} = \frac{1}{2}$$

■

Kutupları saptamanın bir yolu daha vardır ve genellikle en kullanışlısıdır: paydanın **sıfırlarına** bakmak. Sıfırlarla kutuplar arasındaki bu kesin ilişki **sıfırlar ve kutuplar** bölümünün konusudur.

37. Sıfırlar ve Kutuplar

Bir bölümün kutupları, paydanın sıfırlarından doğar. Bu bölümde önce sıfırların yapısını inceleyecek, sonra “ m -inci mertebeden sıfır $\Rightarrow m$ -inci mertebeden kutup” köprüsünü kuracağız. Sonunda basit kutuplar için, hesabı tek bir türev almaya indiren zarif bir formül elde edeceğiz.

37.1 Analitik Fonksiyonların Sıfırları

Tanım 37.1 (m -inci Mertebeden Sıfır). f, z_0 ’da analitik olsun. Bir m doğal sayısı için $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ ve $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ ise, f ’nin z_0 ’da **m -inci mertebeden bir sıfırı** vardır denir.

Teorem 37.1 (Sıfırların Karakterizasyonu). f, z_0 ’da analitik olsun. f ’nin z_0 ’da m -inci mertebeden bir sıfırı vardır **ancak ve ancak** z_0 ’da analitik ve sıfırdan farklı bir g fonksiyonu için

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (1)$$

yazılabiliyorsa.

İspat.

($\Leftarrow$) (1) sağlansın. g, z_0 ’da analitik olduğundan bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda Taylor serisine sahiptir; (1)’de yerine konursa

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^{m+2} + \dots$$

Bu, f için bir Taylor açılımıdır; **tekliğinden** katsayılar okunur:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) = m! g(z_0) \neq 0$$

($\Rightarrow$) f ’nin z_0 ’da m -inci mertebeden sıfırı olsun. Taylor açılımının ilk m katsayısı sıfırdır:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \dots \right]$$

Köşeli parantez içindeki kuvvet serisi $|z - z_0| < \varepsilon$ ’da yakınsadığından toplamı orada analiktir; bu toplamı $g(z)$ olarak adlandıırırsak (1) elde edilir ve

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

■

Örnek 37.1 (Polinomun Sıfırı). $f(z) = z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$ polinomunun $z_0 = 2$ ’de birinci mertebeden bir sıfırı vardır: (1) gösteriminde $g(z) = z^2 + 2z + 4$ tamdır ve $g(2) = 12 \neq 0$ ’dır. Aynı sonuç türevlerden de okunur: $f(2) = 0$ ve $f'(2) = 12 \neq 0$.

Örnek 37.2 (İkinci Mertebeden Sıfır). $f(z) = z(e^z - 1)$ tam fonksiyonunun $z_0 = 0$ ’da ikinci mertebeden bir sıfırı vardır:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \neq 0$$

(1) gösteriminde $f(z) = (z - 0)^2 g(z)$ olur; burada

$$g(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

tam fonksiyonudur ([kuvvet serileriyle işlemler](#) bölümünde tamlığı gösterilmişti).

37.2 Sıfırlar Ayrıktır

Teorem 37.2 (Sıfırların Ayrıklığı). f, z_0 'da analitik ve $f(z_0) = 0$ olsun. f, z_0 'ın hiçbir komşuluğunda özdeş olarak sıfır değilse, z_0 'ın delinmiş bir $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda $f(z) \neq 0$ 'dır.

İspat.

f 'nin z_0 'daki türevlerinin tümü sıfır olsaydı, Taylor katsayılarının tümü sıfır olurdu ve f, z_0 'ın bir komşuluğunda özdeş sıfır olurdu — hipoteze aykırı. Demek ki sonlu bir m mertebesi vardır ve [Teorem 37.1](#) gereği

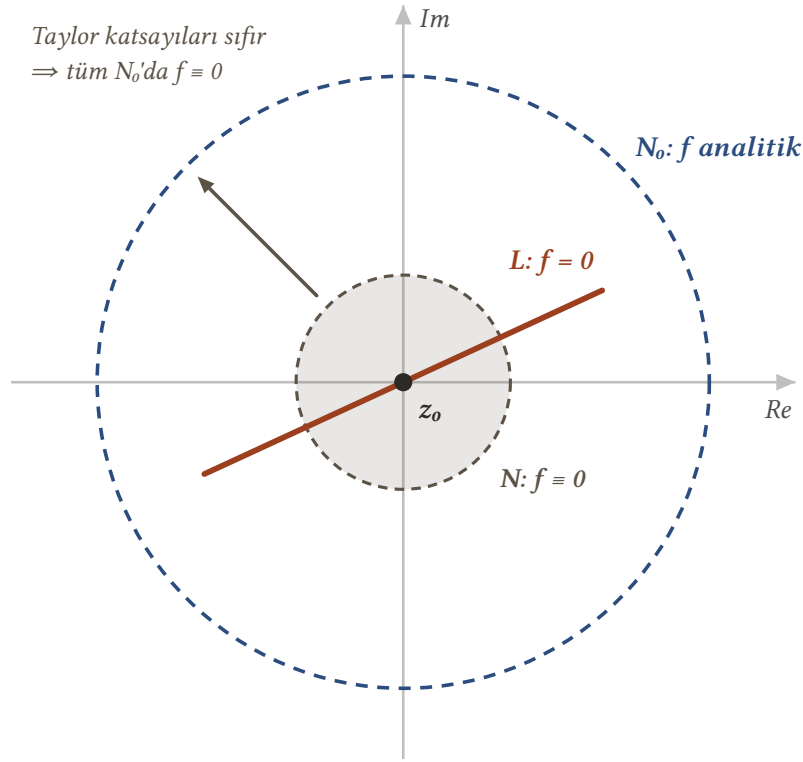
$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

g, z_0 'da analitik olduğundan süreklidir; [sıfırdan uzak kalma özelliğiyle](#) $g(z) \neq 0$ olan bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğu vardır. Bu komşulukta $(z - z_0)^m$ çarpanı da yalnız z_0 'da sıfırlanır; sonuç olarak delinmiş komşulukta $f(z) \neq 0$ 'dır.

■

Bu teorem, [tek türlü belirlenme](#) bölümünde ödünç aldığımız “yerel gerçeği” gerekçelendirir ve şu güçlü sonucu verir:

Teorem 37.3 (Bir Doğru Parçasında Sıfırlanmak). f, z_0 'ın bir N_0 komşuluğunda analitik olsun. z_0 'ı içeren bir D domeninin ya da bir L doğru parçasının her noktasında $f(z) = 0$ ise, f tüm N_0 boyunca özdeş olarak sıfırdır.



Şekil 37.1: İki adımlı yayılma: f, z_0 'dan geçen L parçasında sıfırsa sıfırların ayrıklığı gereği küçük N diskinin tamamında sıfırdır; o zaman z_0 'daki bütün türevler, dolayısıyla tüm Taylor katsayıları sıfırdır ve seri f 'yi büyük N_0 diskinin tamamında temsil ettiğinden orada da $f \equiv 0$ olur.

İspat.

Aksi hâlde Teorem 37.2 gereği z_0 'ın, her yerinde $f(z) \neq 0$ olan delinmiş bir komşuluğu bulunurdu; bu ise D (ya da L) üzerinde f 'nin sıfırlanmasıyla çelişir. Demek ki f, z_0 'ın bir N komşuluğunda özdeş sıfırdır. O zaman Taylor katsayılarının tümü

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$$

olur ve seri N_0 'ın tamamında f 'yi temsil ettiğinden $f \equiv 0$ 'dır.

■

37.3 Sıfırlardan Kutuplara

Teorem 37.4 (Sıfırlar Kutup Üretir). p ve q fonksiyonları z_0 'da analitik olsun. $p(z_0) \neq 0$ ve q 'nın z_0 'da m -inci mertebeden bir sıfırı varsa, $\frac{p(z)}{q(z)}$ bölümünün z_0 'da m -inci mertebeden bir kutbu vardır.

İspat.

q 'nın z_0 'da sıfırı olduğundan Teorem 37.2 gereği z_0 'ın delinmiş bir komşuluğunda $q(z) \neq 0$ 'dır; yani z_0 , bölümün **ayrık** tekil noktasıdır. Teorem 37.1 ise

$$q(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

verir. Böylece

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \varphi(z) = \frac{p(z)}{g(z)} \quad (2)$$

φ , z_0 'da analitik ve $\varphi(z_0) \neq 0$ olduğundan *kutup karakterizasyonu* gereği z_0 , m -inci mertebeden bir kutuptur.

■

Örnek 37.3 (İkinci Mertebeden Kutup). $p(z) = 1$ ve $q(z) = z(e^z - 1)$ alalım. Örnek 37.2'de q 'nın orijinde ikinci mertebeden sıfırı olduğu görülmüştü; Teorem 37.4 gereği

$$\frac{1}{z(e^z - 1)}$$

fonksiyonunun orijinde ikinci mertebeden bir kutbu vardır. Önceki bölümde aynı sonuca seri hesabıyla ulaşmıştık.

37.4 Basit Kutuplar İçin Rezidü Formülü

Teorem 37.5 (p/q' Formülü). p ve q , z_0 'da analitik olsun. Eğer

$$p(z_0) \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) \neq 0$$

ise z_0 , $\frac{p(z)}{q(z)}$ bölümünün bir **basit kutbudur** ve

$$\text{Rez}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \quad (3)$$

İspat.

Koşullar, q 'nın z_0 'da $m = 1$ mertebeden sıfırı olduğunu söyler; Teorem 37.4 gereği z_0 bir basit kutuptur. Teorem 37.1 ile

$$q(z) = (z - z_0) g(z), \quad g(z_0) \neq 0 \quad (4)$$

(2) gösterimi $m = 1$ için $\varphi(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$ verir ve *basit kutup rezidü formülü* uygulanır:

$$\text{Rez}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \varphi(z_0) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}$$

Son olarak (4) türetilip $z = z_0$ konursa $q'(z_0) = g(z_0)$ çıkar; yerine yazıldığında (3) elde edilir.

■

💡 Neden bu kadar pratik?

(3) formülü, paydayı çarpanlara ayırmayı ya da Laurent serisi yazmayı gereksiz kılar: **payda bir kez türetilir**, hepsi bu. Özellikle $\sin z$, $\cos z$, $e^z - 1$ gibi transandant paydalarda – çarpanlara ayırmanın mümkün olmadığı durumlarda – tek pratik yol budur.

37.5 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 37.4 (Kotanjantın Tüm Rezidüleri). $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ fonksiyonunun tekil noktalarını ve rezidülerini bulunuz.

Çözüm.

Tekil noktalar, paydanın **sıfırlarıdır**: $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). $p(z) = \cos z$ ve $q(z) = \sin z$ için

$$p(n\pi) = (-1)^n \neq 0, \quad q(n\pi) = 0, \quad q'(n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$$

Her biri basit kutuptur ve (3) formülüyle

$$B_n = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1$$

Sonsuz çoklukta tekil noktanın rezidüsü tek hamlede bulundu.

■

Örnek 37.5 ($\tanh z / z^2$ Rezidüsü). $f(z) = \frac{\tanh z}{z^2} = \frac{\sinh z}{z^2 \cosh z}$ fonksiyonunun $z = \frac{\pi i}{2}$ noktasındaki rezidüsünü bulunuz.

Çözüm.

$z = \pi i/2$ noktası $\cosh z$ 'nin **bir sıfırıdır**. $p(z) = \sinh z$ ve $q(z) = z^2 \cosh z$ alalım:

$$\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \sinh \frac{\pi i}{2} = i \sin \frac{\pi}{2} = i \neq 0$$

$$\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 0, \quad q'(z) = 2z \cosh z + z^2 \sinh z$$

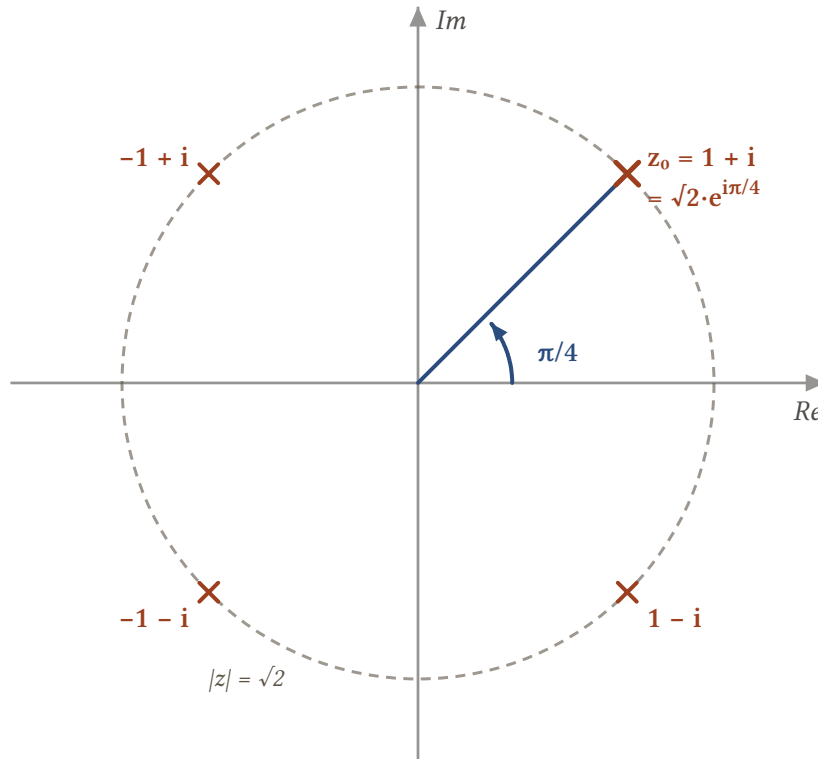
$$\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \left(\frac{\pi i}{2}\right)^2 \sinh \frac{\pi i}{2} = -\frac{\pi^2}{4} i \neq 0$$

(İlk terim $\cosh(\pi i/2) = 0$ olduğu için düştü.) Basit kutuptur ve

$$B = \frac{p(\pi i/2)}{q'(\pi i/2)} = \frac{i}{-\frac{\pi^2}{4} i} = -\frac{4}{\pi^2}$$

■

Örnek 37.6 (Dördüncü Dereceden Paydada). $f(z) = \frac{z}{z^4 + 4}$ fonksiyonunun $z_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = 1 + i$ noktasındaki rezidüsünü bulunuz.



Şekil 37.2: $z^4 + 4 = 0$ denkleminin dört kökü $|z| = \sqrt{2}$ çemberi üzerinde 90° aralıklarla dizilir; hepsi $z/(z^4 + 4)$ için basit kutuptur. $z_0 = 1 + i$ bunlardan açısı $\pi/4$ olanıdır; diğerleri i ile çarpılarak (90° döndürülerek) elde edilir.

Çözüm.

z_0 , $z^4 + 4$ polinomunun bir sıfırıdır. $p(z) = z$ ve $q(z) = z^4 + 4$ için

$$p(z_0) = z_0 \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) = 4z_0^3 \neq 0$$

Basit kutuptur ve

$$B_0 = \frac{z_0}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0^2} = \frac{1}{4(1+i)^2} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}$$

Kutup karakterizasyon teoremiyle de bulunabilirdi, ama φ fonksiyonunu kurmak için paydayı dört lineer çarpana ayırmak gerekirdi — bu yol çok daha kısadır.

■

⚠ Yüksek mertebeler için formül yok

(3) formülü **yalnızca basit kutuplar** içindir. Daha yüksek mertebeler için benzer formüller yazılabilir, ancak uzundurlar ve pratikte kullanışlı değildirler; o durumlarda **kutup karakterizasyon teoremi** veya doğrudan Laurent açılımı tercih edilir.

37.6 Alıştırma

Alıştırma 37.1 (Sıfır ve Kutup Alıştırmaları).

- a) $\frac{z}{\sin z}$ fonksiyonunun $z = 0$ 'daki tekilliğinin kaldırılabilir olduğunu gösteriniz.
- b) $\frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$ fonksiyonunun $z = \pi i$ 'deki rezidüsünü (3) formülüyle hesaplayınız.
- c) $\frac{1}{\cos z}$ fonksiyonunun tekil noktalarını ve her birindeki rezidüyü bulunuz.
- d) $\frac{z^{1/4}}{z+1}$ ($r > 0, 0 < \theta < 2\pi$) dalı için $z = -1$ 'deki rezidüyü hesaplayınız.

Çözüm.

a) Payda $\sin z$ 'nin $z = 0$ 'daki sıfırı **basittir**: $\sin 0 = 0$ ama $\cos 0 = 1 \neq 0$ 'dır. Pay olan z fonksiyonunun da $z = 0$ 'da basit sıfırı vardır. Aynı mertebeden iki sıfır bölümde birbirini götürür; bunu açılımla görelim:

$$\frac{z}{\sin z} = \frac{z}{z - \frac{z^3}{6} + \dots} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + \dots}$$

Sağ taraf $z = 0$ 'da tanımlı ve analitiktir; limit sonludur:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$$

Sonlu limit, tekilliğin **kaldırılabilir** olduğunu söyler: $f(0) = 1$ tanımlanırsa fonksiyon $|z| < \pi$ diskinde analitik olur.

b) Paydayı $q(z) = z^2 + \pi^2$ yazalım. $q(\pi i) = -\pi^2 + \pi^2 = 0$ ve $q'(\pi i) = 2\pi i \neq 0$ olduğundan $z = \pi i$, paydanın basit sıfırır; pay $p(z) = e^z$ orada sıfırdan farklıdır. Basit kutuplar için p/q' formülü uygulanır:

$$\text{Rez}_{z=\pi i} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} = \frac{p(\pi i)}{q'(\pi i)} = \frac{e^{\pi i}}{2\pi i} = \frac{-1}{2\pi i}$$

Sonucu sadeleştirelim; $\frac{1}{i} = -i$ olduğundan

$$\frac{-1}{2\pi i} = \frac{-1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i} = \frac{-1}{2\pi}(-i) = \frac{i}{2\pi}$$

c) Tekil noktalar paydanın sıfırlarıdır. Kompleks kosinüsün sıfırları reel eksendekilerle aynıdır:

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Bu noktalarda $q'(z) = -\sin z$ değeri sıfırdan farklıdır ($\sin$ ile $\cos$ ortak sıfıra sahip olamaz), dolayısıyla hepsi **basit kutuptur**. $p \equiv 1$ ile

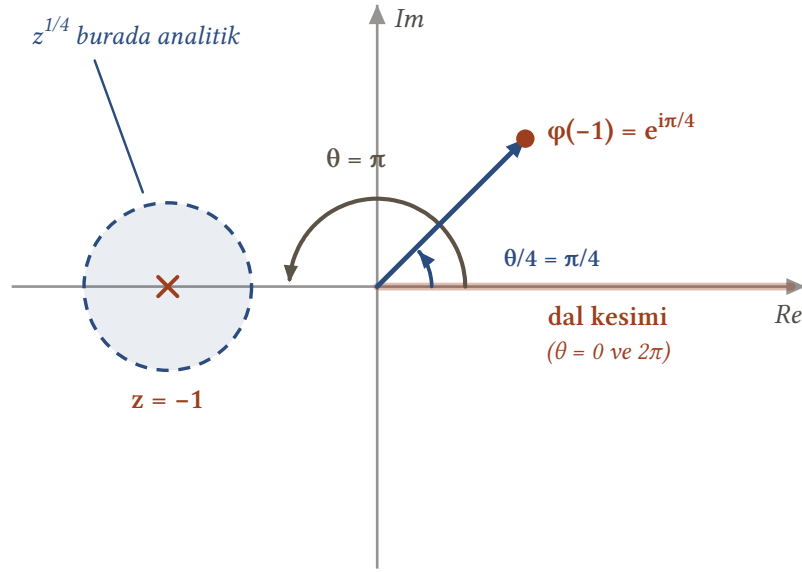
$$\text{Rez}_{z=\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{-\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)}$$

Payda değerini hesaplayalım: $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Böylece

$$\text{Rez} = \frac{1}{-(-1)^n} = (-1)^{n+1}$$

Rezidüler ardışık kutuplarda işaret değiştirir: $z = \pi/2$ 'de -1 , $z = 3\pi/2$ 'de $+1$, $z = 5\pi/2$ 'de -1 , ...

d) Verilen dalda $z^{1/4} = \sqrt[4]{r} e^{i\theta/4}$ ($0 < \theta < 2\pi$) fonksiyonu, $z = -1$ noktasının bir komşuluğunda analitiktir (kesim pozitif reel eksendedir, -1 oradan uzaktır). Fonksiyon $\frac{\varphi(z)}{z+1}$ biçimindedir ve $\varphi(z) = z^{1/4}$ olduğundan $z = -1$ basit kutuptur; rezidü $\varphi(-1)$ 'dir.



Şekil 37.3: Kesim pozitif reel ekseninde olduğundan $z = -1$ 'in açısı bu dalda $\theta = \pi$ 'dir (kesimden saat yönünün tersine yarım tur); $-\pi$ seçilemez. Dal $z = -1$ civarında analiktir, rezidü $\varphi(-1) = e^{i\pi/4} = (1 + i)/\sqrt{2}$ değeridir (şekilde aynı düzlemde gösterilmiştir).

$z = -1$ için seçilen dalda $r = 1$ ve $\theta = \pi$ 'dir:

$$\varphi(-1) = \sqrt[4]{1} e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$

Dalın seçimi sonucu değiştirir: θ aralığı $2\pi < \theta < 4\pi$ olan dalda $\theta = 3\pi$ alınır ve rezidü $e^{i3\pi/4}$ olurdu.

■

Üç tekillik tipini tanıdık ve rezidüleri hesaplamayı öğrendik. Sınıflandırmayı tamamlamak için son bir soru kalıyor: fonksiyon, her tip tekil noktaya **yaklaşırken** nasıl davranır? [Tekil noktalarda davranış](#).

38. Tekil Noktaların Civarında Davranış

Üç tekillik tipini Laurent açılımına bakarak ayırt etmiştik. Aynı ayırım, fonksiyonun tekil noktaya **yaklaşırken** nasıl davrandığına bakılarak da yapılabilir — ve bu ikinci bakış, tiplerin karakterini çok daha canlı gösterir: kutupta modül düzenli biçimde patlar, kaldırılabilir tekillikte hiçbir şey olmaz, esaslı tekillikte ise fonksiyon adeta çıldırır.

38.1 Kutupta: Modül Sonsuza Gider

Teorem 38.1 (Kutupta Limit). z_0 , bir f fonksiyonunun kutbuysa

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (1)$$

İspat.

z_0 , m -inci mertebeden bir kutup olsun. *Kutup karakterizasyonu* gereği

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$$

yazılabilir; burada φ , z_0 'da analitik ve $\varphi(z_0) \neq 0$ 'dır. O hâlde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^m}{\varphi(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m}{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)} = \frac{0}{\varphi(z_0)} = 0$$

Sonsuz içeren limitler teoremi gereği bu, tam olarak (1) demektir. ■

Kutup, tekilliğin en “uysal” biçimidir: fonksiyon her yönden sonsuza gider ve gidiş hızı, kutup mertebesiyle belirlenir.

38.2 Kaldırılabilir Tekillikte: Sınırlılık

Teorem 38.2 (Kaldırılabilir Tekillikte Sınırlılık). z_0 , bir f fonksiyonunun kaldırılabilir tekil noktasıysa, f bu noktanın delinmiş bir $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda analitik ve **sınırlıdır**.

İspat.

f 'ye z_0 'da uygun değer atandığında ($f(z_0) = a_0$) fonksiyon bir $|z - z_0| < R_2$ diskinde *analitik olur*. O hâlde $\varepsilon < R_2$ olmak üzere kapalı $|z - z_0| \leq \varepsilon$ diskinde *sürekli*dir; *kapalı sınırlı bölgede sürekli fonksiyonun modülü sınırlı olduğundan* f bu diskte, dolayısıyla delinmiş komşulukta sınırlıdır. ■

Bunun tersi de doğrudur ve bir Riemann teoremidir:

Teorem 38.3 (Riemann Lemması). f , bir z_0 noktasının delinmiş $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda analitik ve **sınırlı** olsun. f , z_0 'da analitik değilse, orada **kaldırılabilir** bir tekilliğe sahiptir.

İspat.

f , z_0 'da analitik olmadığından z_0 ayrık bir tekil noktadır ve delinmiş komşulukta bir Laurent temsili vardır:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (2)$$

C , $\rho < \varepsilon$ olmak üzere pozitif yönlü $|z - z_0| = \rho$ çemberi olsun. *Laurent katsayı formülü*

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

verir. Sınırlılık hipotezi, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ iken $|f(z)| \leq M$ olacak bir $M > 0$ sabitinin varlığını söyler. *ML eşitsizliğiyle*

$$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{-n+1}} \cdot 2\pi\rho = M\rho^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

b_n katsayıları sabittir; ρ ise istendiği kadar küçük seçilebilir. Sağ taraf sıfıra gittiğinden bütün b_n katsayıları sıfır olmak zorundadır: (2) açılımının esas kısmı yoktur, yani z_0 kaldırılabilir bir tekilliktir.

■

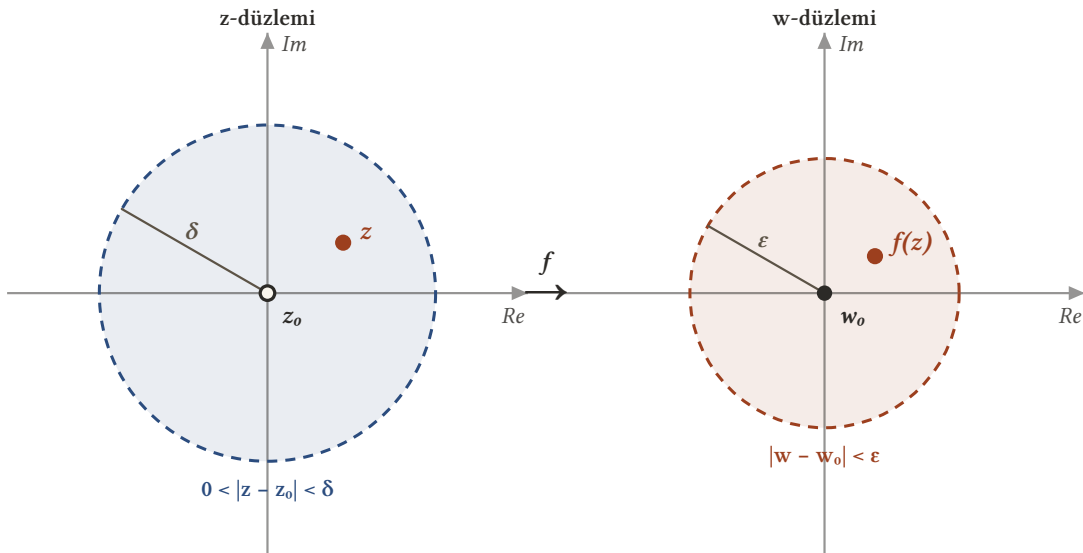
38.3 Esaslı Tekillikte: Casorati-Weierstrass

Esaslı tekil noktalarda ne limit sonsuza gider ne de fonksiyon sınırlı kalır. Gerçekte olan çok daha çarpıcıdır:

Teorem 38.4 (Casorati-Weierstrass Teoremi). z_0 , bir f fonksiyonunun esaslı tekil noktası ve w_0 herhangi bir kompleks sayı olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad (4)$$

eşitsizliği, z_0 'ın her delinmiş $0 < |z - z_0| < \delta$ komşuluğundaki bir z noktasında sağlanır.



Şekil 38.1: Casorati-Weierstrass: w_0 ve ε ne olursa olsun, z_0 'ın **her** delinmiş δ -komşuluğunda görüntüsü w_0 'ın ε -diskine düşen bir z vardır. δ küçüldükçe sol disk daralır ama sağdaki hedefe düşen bir nokta hep bulunur; esaslı tekillik civarında değerler düzlemin her yerinde yoğunur.

İspat.

Olmayana ergi kuralım. z_0 ayırık tekil nokta olduğundan f 'nin analitik olduğu delinmiş bir $0 < |z - z_0| < \delta$ komşuluğu vardır; (4) koşulunun bu komşuluktaki **hiçbir** noktada sağlanmadığını varsayalım. O hâlde

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| \geq \varepsilon$$

Bu durumda

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad (0 < |z - z_0| < \delta) \quad (5)$$

fonksiyonu kendi tanım domeninde analitiktir ve $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ ile sınırlıdır. **Teorem 38.3** gereği z_0 , g 'nin kaldırılabilir tekilliklidir; g 'yi z_0 'da analitik olacak biçimde tanımlayalım.

Durum 1: $g(z_0) \neq 0$. (5)'ten f 'yi çekelim:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0 \quad (0 < |z - z_0| < \delta) \quad (6)$$

Sağ taraf z_0 'da analitiktir; $f(z_0) = \frac{1}{g(z_0)} + w_0$ tanımlandığında f de z_0 'da analitik olur. Bu, z_0 'ın esaslı değil **kaldırılabilir** tekillik olması demektir — çelişki.

Durum 2: $g(z_0) = 0$. g , $|z - z_0| < \delta$ komşuluğunda özdeş sıfır olamaz (aksi hâlde (5) anlamsızlaşır); **sıfırların ayrıklığı** gereği g 'nin z_0 'da sonlu bir m mertebeli sıfırı vardır. O zaman (6) ifadesi ve **sıfır-kutup teoremi**, f 'nin z_0 'da m -inci mertebeden bir **kutbu** olduğunu söyler — yine çelişki.

Her iki durumda da z_0 'ın esaslı tekil nokta olmasıyla çelişki doğar; varsayım yanlıştır.

■

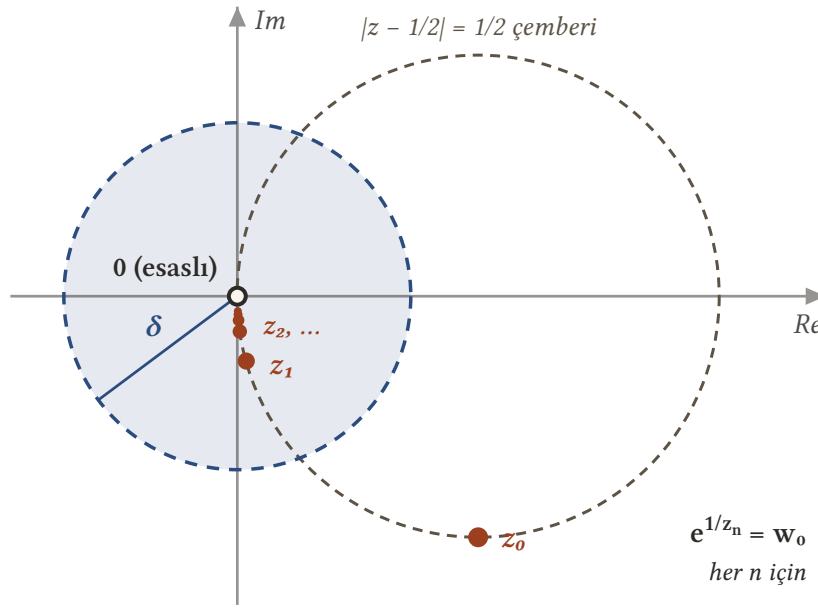
i Teoremin söylediği

Casorati-Weierstrass teoremi şunu ifade eder: bir fonksiyon, esaslı tekil noktasının **her** delinmiş komşuluğunda, önceden verilen herhangi bir sayıya istendiği kadar yakın değerler alır. Daha da güçlü olan **Picard teoremi**, fonksiyonun bu komşuluklarda — olası bir istisna dışında — her sonlu değeri gerçekten **sonsuz kez** aldığını söyler.

Örnek 38.1 ($e^{1/z}$ 'nin Orijin Civarındaki Vahşiliği). $f(z) = e^{1/z}$ için orijin **esaslı bir tekil noktadır**. Teoremin öngördüğü davranışı somut olarak görelim: verilen sıfırdan farklı bir $w_0 = \rho e^{i\alpha}$ sayısı için

$$z_n = \frac{1}{\ln \rho + i(\alpha + 2n\pi)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

alalım. $e^{1/z_n} = e^{\ln \rho + i(\alpha + 2n\pi)} = \rho e^{i\alpha} = w_0$ olur ve $n \rightarrow \infty$ iken $z_n \rightarrow 0$ 'dır. Yani $e^{1/z}$, orijinin her delinmiş komşuluğunda sıfırdan farklı **her** değeri sonsuz kez alır; alınamayan tek değer 0'dır — Picard teoremindeki “olası istisna” tam olarak budur.



Şekil 38.2: $w_0 = e^{1/z}$ için $z_n = 1/(1 + i(1 + 2n\pi))$ noktaları $|z - 1/2| = 1/2$ çemberi üzerinde orijine doğru koşar; her birinde $e^{1/z}$ tam olarak w_0 değerini alır. δ -diski ne kadar küçük olursa olsun sonsuz çoğu içeride kalır: değer her delinmiş komşulukta sonsuz kez alınır.

38.4 Üç Tipin Karşılaştırması

Tekillik tipi	Esas kısım	$z \rightarrow z_0$ davranışı
Kaldırılabilir	terim yok	limit vardır ve sonludur; fonksiyon sınırlıdır
m -inci mertebeden kutup	m terim	$ f(z) \rightarrow \infty$
Esaslı	sonsuz terim	limit yoktur; her değere istendiği kadar yaklaşılır

💡 Pratik ayırt etme

Bir tekil noktanın tipini saptamak için Laurent serisi yazmak şart değildir: $f(z)$ 'nin $z \rightarrow z_0$ limitine bakmak çoğu zaman yeterlidir. Limit sonluysa kaldırılabilir, sonsuzsa kutup, yoksa esaslıdır.

38.5 Alıştırma

Alıştırma 38.1 (Davranış Alıştırmaları). Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktadaki tekillik tipini, limit davranışına bakarak belirleyiniz.

- $\frac{\sin z}{z}, z = 0$
- $\frac{1}{(z-1)^3}, z = 1$
- $\cos \frac{1}{z}, z = 0$
- $\frac{e^z}{z^2}, z = 0$

Çözüm.

Ölçüt üç durumu birbirinden ayırır: $z \rightarrow z_0$ iken **sonlu** bir limit varsa tekillik kaldırılabilir, $|f| \rightarrow \infty$ ise kutup, ikisi de olmuyorsa esastır.

a) Sinüsün açılımını z 'ye bölelim:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{6} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{6} + \dots$$

Limit sonludur:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Tekillik **kaldırılabilir**; $f(0) = 1$ tanımlandığında fonksiyon tam olur.

b) $z \rightarrow 1$ iken payda sıfıra gider, pay sabit 1'dir:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left| \frac{1}{(z-1)^3} \right| = \infty$$

Tekillik bir **kutuptur**. Mertebesi, negatif kuvvetlerin en büyüğü olan 3'tür: fonksiyon zaten $\frac{\varphi(z)}{(z-1)^3}$

biçimindedir ve $\varphi \equiv 1 \neq 0$ 'dır. Yani **üçüncü mertebeden kutup**.

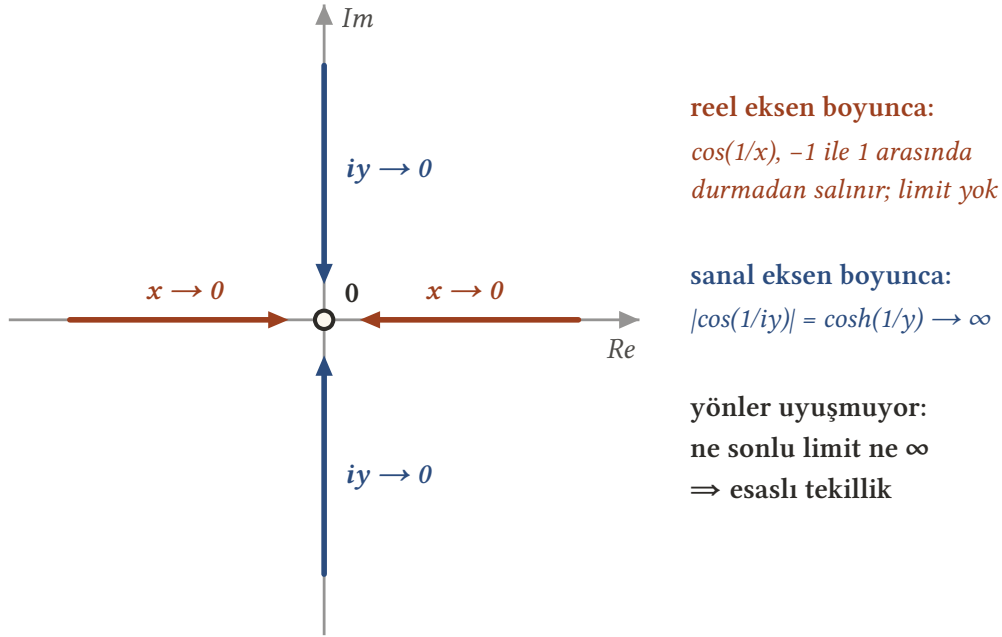
c) İki farklı yaklaşımı karşılaştıralım. Reel eksen boyunca $z = x \rightarrow 0$ alınırsa

$$\cos \frac{1}{x}$$

değeri -1 ile 1 arasında hiç durulmadan salınır; limit yoktur. Sanal eksen boyunca $z = iy \rightarrow 0$ alınırsa, $\cos(-i/y) = \cosh(1/y)$ olduğundan

$$\left| \cos \frac{1}{iy} \right| = \cosh \frac{1}{y} \rightarrow \infty$$

Ne sonlu bir limit ne de ∞ elde edildiğinden tekillik **esastır**. (Casorati-Weierstrass teoremi bu davranışı keskinleştirir: her delinmiş komşulukta değerler tüm düzlemde yoğundur.)



Şekil 38.3: $\cos(1/z)$ için orijine iki farklı yönden yaklaşma: reel eksen boyunca değerler -1 ile 1 arasında salınır, sanal eksen boyunca modül sonsuza gider. Tek bir limit (sonlu ya da ∞) olmadığından tekillik ne kaldırılabilir ne kutuptur: esashdır.

d) $z \rightarrow 0$ iken pay $e^z \rightarrow 1$, payda $z^2 \rightarrow 0$ 'dır:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{e^z}{z^2} \right| = \infty$$

Tekillik bir kutuptur. Fonksiyon $\frac{\varphi(z)}{z^2}$ biçiminde ve $\varphi(0) = e^0 = 1 \neq 0$ olduğundan mertebesi 2'dir: **ikinci mertebeden kutup**. Laurent açılımı da aynı şeyi söyler:

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \dots$$

■

Rezidü kuramının tüm mekanizması hazır. Son kısımda bu makineyi çalıştırıyoruz: reel analizde hesaplanamayan integraller, kompleks düzlemde birkaç rezidüyle çözülecek — [has olmayan integraller](#).

39. Has Olmayan İntegrallerin Hesaplanması

Rezidü kuramının en görünür ödülü şudur: reel analizde ters türev bulunamadığı için hesaplanamayan integraller, kompleks düzlemde birkaç rezidü toplanarak çözülür. Bu bölümde yöntemin iskeletini kuruyoruz — yarım çember çevresi, ML kestirimi ve rezidü teoremi.

39.1 Has Olmayan İntegral ve Esas Değer

Kalkülüsten hatırlayalım: sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun yarı-sonsuz aralıktaki has olmayan integrali

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx \quad (1)$$

limitiyle tanımlanır. Tüm eksen üzerinde ise **iki bağımsız** limit istenir:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx \quad (2)$$

Tanım 39.1 (Cauchy Esas Değeri). (2) integralinin **Cauchy esas değeri**, tek bir limitle tanımlanır:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (3)$$

(2) integrali yakınsaksa esas değeri de vardır ve ikisi eşittir; çünkü

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^0 f dx + \int_0^R f dx \right]$$

ayrışımındaki iki limit, (2)'dekilerle aynıdır.

⚠ Esas değerin varlığı yakınsaklık demek değildir

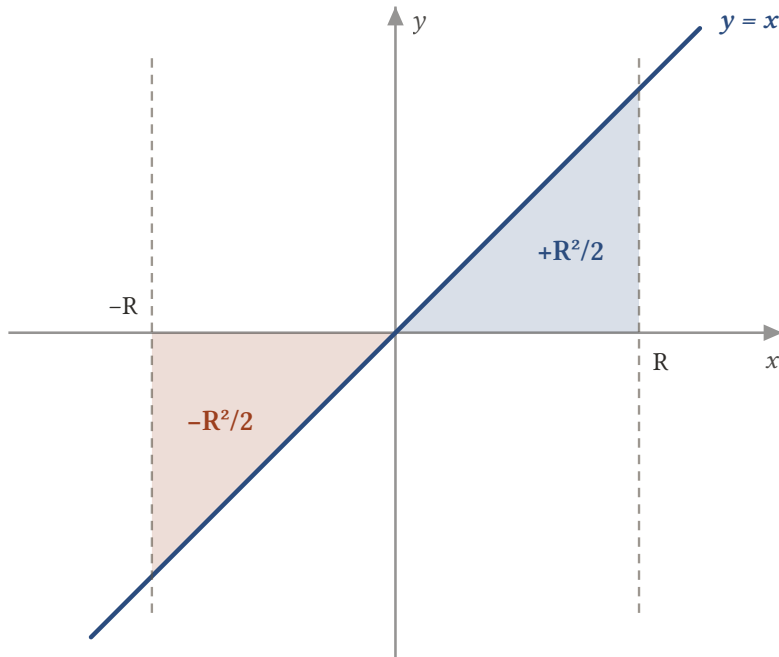
Tersi doğru değildir. $f(x) = x$ için

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0$$

esas değeri vardır; oysa (2) tanımındaki

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \left(-\frac{R_1^2}{2} \right) + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_2^2}{2}$$

limitlerinin ikisi de yoktur — integral ıraksaktır. Simetrik kesme, birbirini götürün iki sonsuzu gizler.



Şekil 39.1: $f(x) = x$ için simetrik kesme $[-R, R]$ iki eşit ve zıt işaretli alan verir: toplam her R için sıfırdır, dolayısıyla esas değer 0'dır. Oysa (2) tanımı iki ucu bağımsız kesmeye izin verir; tek taraflı limitlerin ikisi de yoktur (örneğin $R_1 = 2R_2$ alınır fark sınırsız büyür), dolayısıyla integral ıraksar.

39.2 Çift Fonksiyonlarda İndirgeme

Bu ayırım, integrand **çift** olduğunda ortadan kalkar.

Teorem 39.1 (Çift Fonksiyonlar İçin). $f(x)$, $(-\infty, \infty)$ üzerinde sürekli ve çift olsun ($f(-x) = f(x)$). (3) esas değeri varsa (2) integrali yakınsar ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \right] \quad (5)$$

İspat.

Grafiğin y eksenine göre simetrisi

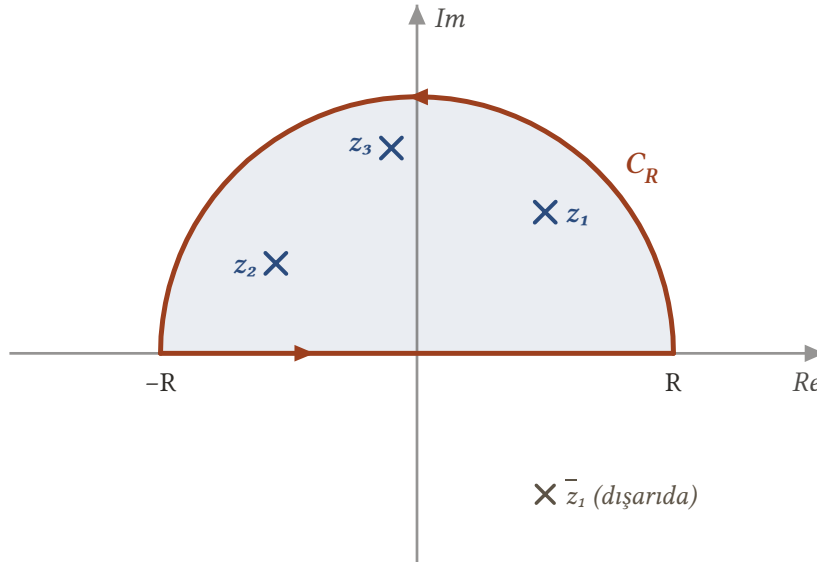
$$\int_{-R_1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R_1}^{R_1} f(x) dx, \quad \int_0^{R_2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R_2}^{R_2} f(x) dx$$

verir. Sağ taraftaki limitler esas değer varlığından ötürü mevcuttur; dolayısıyla soldaki iki limit de vardır ve (2) yakınsar. Toplandığında (4), ve $\int_0^R f dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f dx$ ilişkisinden (5) çıkar.

■

39.3 Yarım Çember Yöntemi

Şimdi rasyonel $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ fonksiyonlarının has olmayan integrallerini hesaplayan yöntemi kuralım. Varsayımlar: p ve q ortak çarpanı olmayan reel katsayılı polinomlar, q 'nın **reel sıfırı yok** ve reel eksenin üstünde en az bir sıfırı var.



Şekil 39.2: Yarım çember yöntemi: yol, $[-R, R]$ doğru parçası ile üst yarım çember C_R 'den oluşur ve pozitif yönde dolaşılır. Yalnızca üst yarı düzlemdeki sıfırlar z_1, z_2, z_3 yolun içindedir; q reel katsayılı olduğundan her kutbun eşleniği de kutuptur, ama alt yarı düzlemde kalır ve rezidü toplamına girmez.

Yöntem şöyle işler:

1. $q(z)$ 'nin reel eksenin üstünde kalan farklı sıfırları $z_1, z_2, \dots, z_n$ olarak belirlenir (sonlu sayıdadır).
2. $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ bölümü, reel eksenin $-R \leq x \leq R$ parçası ile $|z| = R$ çemberinin üst yarısı C_R 'den oluşan **yarım dairesel** bölgenin pozitif yönlü sınırı üzerinde integrallenir. R yeterince büyük seçilir ki tüm z_k noktaları bu yolun içinde kalsın.
3. **Cauchy rezidü teoremi** uygulanır:

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rez}_{z=z_k} f(z)$$

yani

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_{z_k} f(z) - \int_{C_R} f(z) dz \quad (6)$$

4. Son integralin sifıra gittiği gösterilir. Eğer

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

ise

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_{z_k} f(z) \quad (7)$$

$f(x)$ çift ise [Teorem 39.1](#) devreye girer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_{z_k} f(z), \quad \int_0^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_{z_k} f(z) \quad (8)$$

💡 Yay integrali neden söner?

C_R üzerindeki integrali sifıra götüren mekanizma her seferinde aynıdır: [ML eşitsizliği](#). Yayın uzunluğu πR ile büyürken, integrandın modülü paydanın derecesi sayesinde daha hızlı küçülür. Pratik kural: **paydanın derecesi, payın derecesinden en az iki fazlaysa** yay integrali söner.

39.4 Tam Çözümlü Örnek

Örnek 39.1 (Klasik Rasyonel İntegral).

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

integralini hesaplayınız.

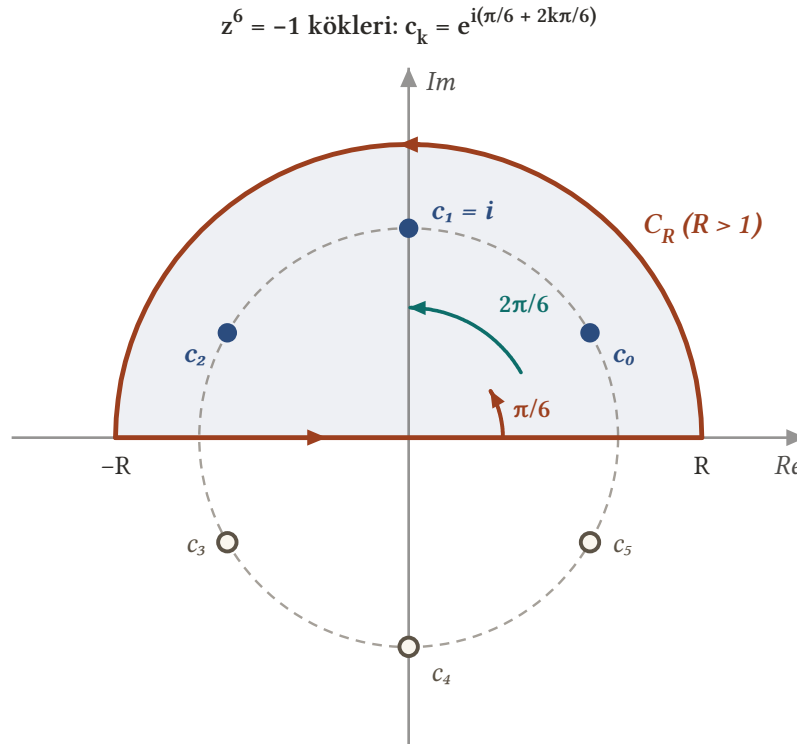
Çözüm.

Tekil noktalar. $f(z) = \frac{z^2}{z^6 + 1}$ fonksiyonunun tekil noktaları, $z^6 = -1$ denkleminin kökleridir. [Kök formülüyle](#)

$$c_k = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6} \right) \right] \quad (k = 0, 1, \dots, 5)$$

Hiçbiri reel ekseninde değildir. İlk üçü üst yarı düzlemdedir:

$$c_0 = e^{i\pi/6}, \quad c_1 = i, \quad c_2 = e^{i5\pi/6}$$



Şekil 39.3: $z^6 = -1$ 'in altı kökü birim çember üzerinde $\pi/3$ aralıklarla dizilir; c_0, c_1, c_2 üst yarı düzlemde, c_3, c_4, c_5 alt yarı düzlemde. $R > 1$ alınır alınmaz yarım çember yolu tam olarak üstteki üç kutbu içine alır; hiçbir kök reel ekseninde olmadığından yol tekil noktaya değmez.

Rezidüler. p/q formülünü kullanalım; $p(z) = z^2$, $q(z) = z^6 + 1$, $q'(z) = 6z^5$:

$$B_k = \text{Rez}_{z=c_k} \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{c_k^2}{6c_k^5} = \frac{1}{6c_k^3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

c_k^3 değerlerini hesaplayalım: $c_0^3 = e^{i\pi/2} = i$, $c_1^3 = i^3 = -i$, $c_2^3 = e^{i5\pi/2} = i$. Böylece

$$B_0 = \frac{1}{6i}, \quad B_1 = -\frac{1}{6i}, \quad B_2 = \frac{1}{6i}$$

$$2\pi i (B_0 + B_1 + B_2) = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i} \right) = \frac{\pi}{3}$$

(6) eşitliği, $R > 1$ olan tüm değerler için

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z) dz \quad (9)$$

verir.

Yay integralinin sönmesi. C_R üzerinde $|z| = R$ olduğundan

$$|z^2| = R^2, \quad |z^6 + 1| \geq ||z|^6 - 1| = R^6 - 1$$

Yani $|f(z)| \leq M_R$, $M_R = \frac{R^2}{R^6 - 1}$. Yayın uzunluğu πR olduğundan ML eşitsizliğiyle

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq M_R \pi R = \frac{\pi R^3}{R^6 - 1} = \frac{\frac{\pi}{R^3}}{1 - \frac{1}{R^6}}$$

Pay ve payda R^6 'ya bölündüğünde ifadenin $R \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiği açıktır:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

Sonuç. (9)'da limit alınırsa

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}$$

İntegrand çift olduğundan (5) ile

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{6}$$

■

39.5 Alıştırma

Alıştırma 39.1 (Has Olmayan İntegral Alıştırmaları). Aşağıdaki integralleri yarım çember yöntemiyle hesaplayınız.

- a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$
- b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$
- d) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$

Çözüm.

Dördünde de integrand çift bir rasyonel fonksiyondur, paydanın reel kökü yoktur ve payda derecesi payı en az iki aşar. Böylece büyük yarım çemberin katkısı sıfıra gider ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Rez}_{\text{üst yarı düzlem}} f(z)$$

kuralı geçerlidir; $[0, \infty)$ üzerindeki integraller ise bunun yarısıdır.

a) $\frac{1}{z^2 + 1}$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki tek tekil noktası $z = i$ 'dir ve basit kutuptur:

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

Tüm eksen üzerindeki integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

İntegrand çift olduğundan

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

b) Bu kez $z = i$ **ikinci mertebeden** kutuptur:

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{\varphi(z)}{(z - i)^2}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{(z + i)^2}$$

Rezidü $\varphi'(i)$ 'dir:

$$\varphi'(z) = \frac{-2}{(z + i)^3} \Rightarrow \varphi'(i) = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

c) Üst yarı düzlemde iki basit kutup vardır: $z = i$ ve $z = 2i$.

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{z^2}{(z + i)(z^2 + 4)} \Big|_{z=i} = \frac{-1}{2i \cdot 3} = \frac{i}{6}$$

$$\text{Rez}_{z=2i} = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 2i)} \Big|_{z=2i} = \frac{-4}{(-3)(4i)} = -\frac{i}{3}$$

(Son sadeleştirmelerde $\frac{1}{i} = -i$ kullanıldı.) Toplam $\frac{i}{6} - \frac{i}{3} = -\frac{i}{6}$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = 2\pi i \left(-\frac{i}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

d) $z^4 + 1 = 0$ köklerinin hepsi basit kutuptur ve üst yarı düzlemde iki tanesi bulunur:

$$z_0 = e^{i\pi/4}, \quad z_1 = e^{i3\pi/4}$$

Basit kutupta rezidü $\frac{1}{4z^3}$ 'tür; $z^4 = -1$ olduğundan bu ifade sadeleşir:

$$\text{Rez}_{z=z_k} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

Rezidülerin toplamı

$$-\frac{1}{4} (e^{i\pi/4} + e^{i3\pi/4}) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{i\sqrt{2}}{4}$$

Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

■

Peki integrandda $\sin ax$ ya da $\cos ax$ varsa? Doğrudan aynı yolu izlemek işe yaramaz — çünkü $\sin z$ ve $\cos z$ üst yarı düzlemde sınırsızdır. Çözüm zariftir: [Fourier integralleri ve Jordan lemması](#).

40. Fourier İntegralleri ve Jordan Lemması

Rezidü kuramı, Fourier analizinde doğan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \, dx \quad (1)$$

tipindeki integralleri de hesaplar ($a > 0$ sabit). Ama **önceki bölümün** yöntemi doğrudan uygulanamaz; küçük ama kritik bir değişiklik gerekir.

40.1 Neden Doğrudan Uygulanamaz?

Trigonometrik fonksiyonların modülleri

$$|\sin az|^2 = \sin^2 ax + \sinh^2 ay, \quad |\cos az|^2 = \cos^2 ax + \sinh^2 ay$$

biçimindedir. $\sinh ay = \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2}$ olduğundan, y sonsuza giderken bu modüller e^{ay} gibi **büyür**: yarım çember yayı üzerinde integrandı sınırlamak imkânsız hâle gelir.

Çözüm, trigonometrik fonksiyonu üstelle değiştirmektir. $a > 0$ ve $y \geq 0$ için

$$|e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = |e^{-ay}e^{iax}| = e^{-ay} \leq 1 \quad (2)$$

yani e^{iaz} , **üst yarı düzlemde sınırlıdır**. Reel ve sanal kısımları ayırma işi de tek satırda halledilir:

$$\int_{-R}^R f(x) \cos ax \, dx + i \int_{-R}^R f(x) \sin ax \, dx = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} \, dx \quad (3)$$

💡 Yöntemin özeti

Integrandda $\sin ax$ ya da $\cos ax$ görürseniz, kompleks düzleme e^{iaz} ile geçin; sonuçta reel kısmı alırsanız kosinüslü, sanal kısmı alırsanız sinüslü integrali elde edersiniz.

40.2 Çözümlü Örnek: Kosinüs

Örnek 40.1 ($\cos 3x$ İntegrali).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} \, dx = \frac{2\pi}{e^3}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İntegrand çift olduğundan **esas değer**in varlığını göstermek yeterlidir.

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

alalım; $f(z)e^{i3z}$ çarpımı, $z = i$ dışında reel eksenin üstünde ve üzerinde analitiktir. Yarım dairesel bölgenin sınırı üzerinde rezidü teoremi uygulanırsa

$$\int_{-R}^R \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2} \, dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z) e^{i3z} \, dz \quad (4)$$

Rezidü. $f(z)e^{i3z} = \frac{\varphi(z)}{(z-i)^2}$ yazalım; burada $\varphi(z) = \frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}$. $z = i$ ikinci mertebeden bir kutuptur ve **rezidü formülüyle**

$$B_1 = \varphi'(i)$$

$$\varphi'(z) = \frac{i3e^{i3z}(z+i)^2 - e^{i3z} \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{e^{i3z} [i3(z+i) - 2]}{(z+i)^3}$$

$z = i$ konursa $e^{i3i} = e^{-3}$ ve $(2i)^3 = -8i$ olduğundan

$$B_1 = \frac{e^{-3} [i3(2i) - 2]}{-8i} = \frac{e^{-3}(-8)}{-8i} = \frac{e^{-3}}{i} = \frac{1}{i e^3}$$

Böylece $2\pi i B_1 = \frac{2\pi}{e^3}$, tür. (4) eşitliğinin iki tarafının reel kısımları alınır

$$\int_{-R}^R \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3} - \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \quad (5)$$

Yay integrali. C_R üzerinde $|z| = R$ için

$$|f(z)| \leq M_R = \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ve (2) gereği $|e^{i3z}| = e^{-3y} \leq 1$ 'dir. ML eşitsizliğiyle

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \right| \leq M_R \pi R = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

$R \rightarrow \infty$ iken sağ taraf sıfıra gider (payda R^4 mertebesinde, pay R mertebesinde). (5)'te limit alınır istenen sonuç çıkar.

■

40.3 Jordan Lemması

Bazı integrallerde $M_R \pi R$ çarpımı sıfıra gitmez – payda derecesi yeterince yüksek değildir. Bu durumlarda e^{iaz} çarpanının sağladığı ek sönmeyi kullanan aşağıdaki lemma devreye girer.

Teorem 40.1 (Jordan Eşitsizliği). Her $R > 0$ için

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R} \quad (6)$$

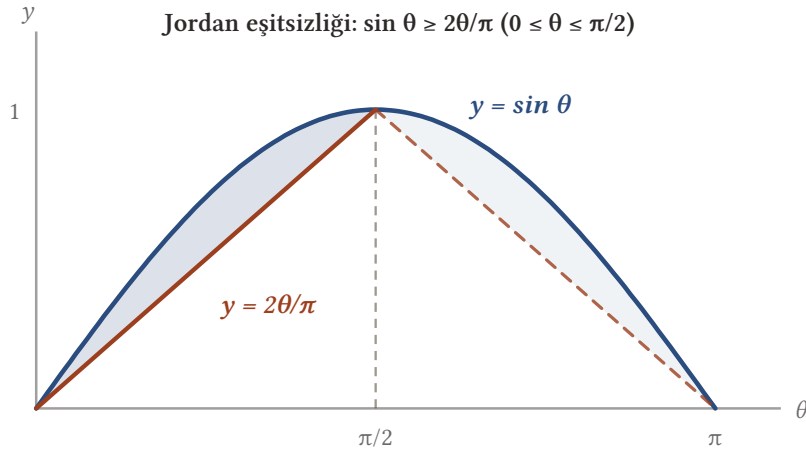
İspat.

$y = \sin \theta$ ile $y = \frac{2\theta}{\pi}$ doğrusunun grafikleri karşılaştırıldığında, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ aralığında

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$$

olduğu görülür (sinüs bu aralıkta içbükeydir, kirişinin üstünde kalır). $R > 0$ için $e^{-R \sin \theta} \leq e^{-2R\theta/\pi}$ olur ve

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{2R}$$



Şekil 40.1: $[0, \pi/2]$ aralığında sinüs içbükeydir: grafiği, $(0, 0)$ ile $(\pi/2, 1)$ noktalarını birleştiren kirişin üstünde kalır, yani $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$. Grafik $\theta = \pi/2$ doğrusuna göre simetrik olduğundan aynı kestirim $[\pi/2, \pi]$ aralığında da (kesikli kiriş) geçerlidir; iki yarı toplanınca $\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \pi/R$ çıkar.

$y = \sin \theta$ grafiği $\theta = \pi/2$ doğrusuna göre simetrik olduğundan $[\pi/2, \pi]$ aralığındaki integral de aynı sınırı sağlar; ikisi toplanınca (6) elde edilir.

■

Teorem 40.2 (Jordan Lemması). Aşağıdaki koşullar sağlansın:

- a) $f, y \geq 0$ üst yarı düzleminde, bir $|z| = R_0$ çemberinin dışındaki tüm noktalarda analitiktir;
- b) $C_R, z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) yarım çemberidir ve $R > R_0$ 'dır;
- c) C_R üzerindeki tüm noktalarda $|f(z)| \leq M_R$ olacak biçimde bir M_R pozitif sabiti vardır ve $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ 'dır.

O zaman her pozitif a sabiti için

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (7)$$

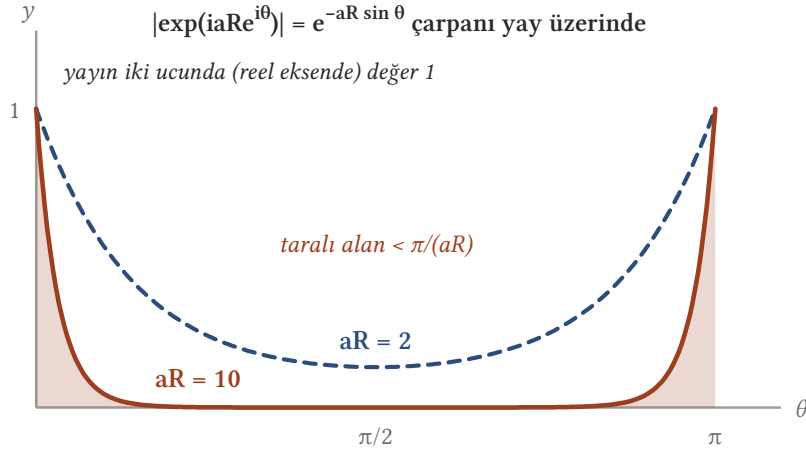
İspat.

Yayı parametreleyelim:

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) \exp(iaRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

$z = Re^{i\theta}$ için $y = R \sin \theta$ olduğundan (2) ile

$$|\exp(iaRe^{i\theta})| = e^{-aR \sin \theta}$$



Şekil 40.2: C_R üzerinde e^{iaz} çarpanının modülü $e^{-aR \sin \theta}$ 'dir; yayın uçlarında 1'e eşittir ama aR büyüdükçe yayın iç kısmında hızla sıfıra çöker. Bu yüzden eğrinin altındaki alan $\pi/(aR)$ ile sınırlıdır ve yay integrallerinde ML kestirimindeki R çarpanı yok olur — Jordan lemmasının kazancı budur.

Modül alınıp $|f(Re^{i\theta})| \leq M_R$ kullanılırsa

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq M_R R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta$$

Son integrale Jordan eşitsizliği (6) uygulanır (R yerine aR ile):

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| < M_R R \cdot \frac{\pi}{aR} = \frac{M_R \pi}{a}$$

$M_R \rightarrow 0$ olduğundan sağ taraf sıfıra gider.

■

i Kazanılan nedir?

Ham ML kestirimi $M_R \pi R$ verir; Jordan lemması ise $\frac{M_R \pi}{a}$ verir — arada R çarpanı kadar fark vardır. Bu sayede, payda derecesi payınkinden yalnızca bir fazla olan integrandlar bile (ör. $\frac{z}{z^2 + 2z + 2}$) sorunsuz işlenir.

40.4 Çözümlü Örnek: Jordan Lemmasıyla

Örnek 40.2 ($x \sin x$ integrali).

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$$

esas değerini bulunuz.

Çözüm.

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2} = \frac{z}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)}, \quad z_1 = -1 + i$$

yazalım. Üst yarı düzlemde kalan tek tekil nokta z_1 'dir ve $f(z)e^{iz}$ için basit kutuptur; [rezidü formülü](#)yle

$$B_1 = \frac{z_1 e^{iz_1}}{z_1 - \bar{z}_1}$$

$R > \sqrt{2}$ iken yarım dairesel bölgenin sınırında rezidü teoremi:

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz$$

Sanal kısımlar alınırsa

$$\int_{-R}^R \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \text{Im} (2\pi i B_1) - \text{Im} \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz \quad (8)$$

Yay integrali – ML yetmez. C_R üzerinde

$$| f(z) | \leq M_R = \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2}$$

olur ve $| e^{iz} | = e^{-y} \leq 1$ 'dir. Ham ML kestirimi

$$M_R \pi R = \frac{\pi R^2}{(R - \sqrt{2})^2} = \frac{\pi}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R} \right)^2}$$

verir; bu ifade $R \rightarrow \infty$ iken π 'ye gider, sıfıra değil.

Jordan lemması devreye giriyor. Buna karşılık

$$M_R = \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2} = \frac{\frac{1}{R}}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R} \right)^2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

olduğundan [Teorem 40.2](#) koşulları sağlanır ve

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = 0$$

Sonuç. $z_1 = -1 + i$ için $z_1 - \bar{z}_1 = 2i$ ve $e^{iz_1} = e^{i(-1+i)} = e^{-1} e^{-i}$ olduğundan

$$2\pi i B_1 = 2\pi i \frac{(-1+i)e^{-1} (\cos 1 - i \sin 1)}{2i} = \frac{\pi}{e} (-1+i) (\cos 1 - i \sin 1)$$

Sanal kısım alınırsa:

$$\text{Im} (2\pi i B_1) = \frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1)$$

(8)'de $R \rightarrow \infty$ limitiyle

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1)$$

■

40.5 Alıştırma

Alıştırma 40.1 (Fourier İntegrali Alıştırmaları). Aşağıdaki integralleri e^{iaz} yöntemiyle hesaplayınız.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$

- b) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx \ (a > 0, b > 0)$
 c) P.V. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2 + 3} dx$

Çözüm.

Üç şıkta da yöntem aynıdır: $\cos ax$ ya da $\sin ax$ yerine e^{iaz} ile çalışılır, üst yarı düzlemdeki rezidüler toplanır ve sonunda reel ya da sanal kısım alınır. $a > 0$ olduğu sürece $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$ olduğundan büyük yarım çemberin katkısı sıfıra gider.

a) $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki tek tekil noktası $z = i$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Buradan

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

Sol tarafın reel kısmı aradığımız integraldir; sonuç zaten reel çıktı:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$$

b) Aynı hesabı $\frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$ ile yapalım; üst yarı düzlemdeki kutup $z = ib$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=ib} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{e^{iaz}}{2z} \Big|_{z=ib} = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ab}}{2ib} = \frac{\pi}{b} e^{-ab}$$

Reel kısmı alıp integrandın çift olmasını kullanalım:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{b} e^{-ab} = \frac{\pi}{2b} e^{-ab}$$

c) Bu kez sin görüldüğü için **sanal** kısım alınacaktır. $\frac{z e^{i2z}}{z^2 + 3}$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki kutbu $z = i\sqrt{3}$ 'tür:

$$\text{Rez}_{z=i\sqrt{3}} \frac{z e^{i2z}}{z^2 + 3} = \frac{z e^{i2z}}{2z} \Big|_{z=i\sqrt{3}} = \frac{e^{i2(i\sqrt{3})}}{2} = \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{2}$$

Paydanın derecesi payınkinden yalnızca bir fazla olduğundan ham ML kestirimi yetmez, yarım çemberin sönmesi için Jordan lemması gerekir; e^{i2z} çarpanı sayesinde lemma uygulanabilir ve katkı sıfıra gider:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{i2x}}{x^2 + 3} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{2} = i\pi e^{-2\sqrt{3}}$$

Sanal kısmı alalım:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2 + 3} dx = \pi e^{-2\sqrt{3}}$$

■

Şimdiye kadar tekil noktalar hep reel eksenin **dışındaydı**. Peki integrandın tekil noktası tam da integrasyon yolunun üzerindeyse? Yolu oradan küçük bir yayla dolaşmak gerekir: [girintili yollar](#).

41. Girintili Yollar

Şimdiye kadar integrandın tekil noktaları reel eksenin dışındaydı. Peki tekil nokta tam da integrasyon yolunun üzerindeyse? Çözüm, yolu o noktanın çevresinden küçük bir yayla dolaşmaktır – **girintili yol**. Bu bölümde tekniğin kuramsal temelini kurup iki klasik integrali hesaplıyoruz.

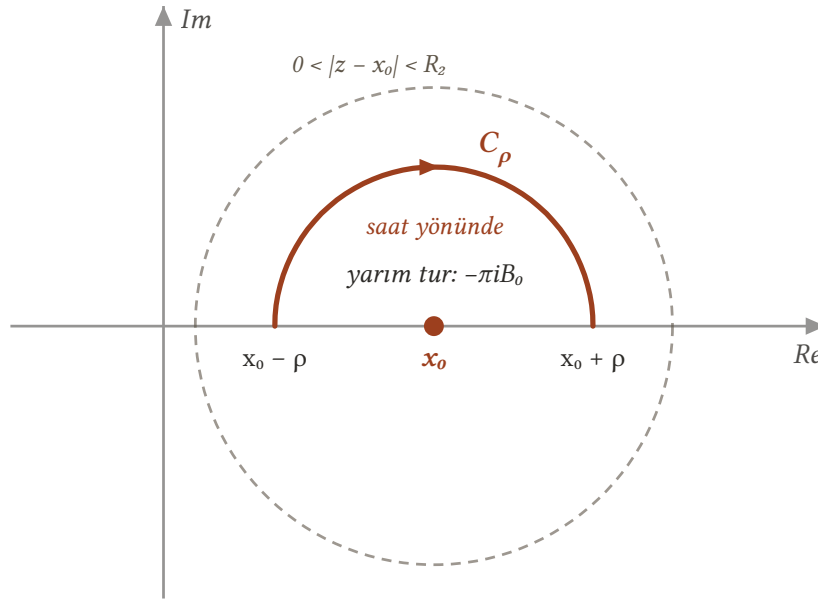
41.1 Yarım Çember Limit Teoremi

Teorem 41.1 (Küçük Yay Üzerinde Limit). Aşağıdaki koşullar sağlansın:

- a) f fonksiyonunun reel eksen üzerindeki bir $z = x_0$ noktasında **basit kutbu** vardır; delinmiş diskte $0 < |z - x_0| < R_2$ geçerli bir Laurent temsili ve B_0 rezidüsü mevcuttur;
- b) C_ρ , $|z - x_0| = \rho$ çemberinin üst yarısıdır ($\rho < R_2$) ve **saat yönünde** dolaşılmaktadır.

O zaman

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B_0 \pi i \quad (1)$$



Şekil 41.1: Reel eksen üzerindeki basit kutup x_0 , yarıçapı ρ olan üst yarım çember C_ρ ile **saat yönünde** dolaşılır (kesikli çember; Laurent temsili geçerli olduğu delinmiş disk). Tam tur $2\pi B_0$ verirken yarı tur bunun yarısını verir; yön saat yönünde olduğundan işaret eksidir: $\rho \rightarrow 0$ iken integral $-\pi B_0$ 'a gider.

İspat.

Laurent temsili yazalım:

$$f(z) = g(z) + \frac{B_0}{z - x_0} \quad (0 < |z - x_0| < R_2), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$$

Burada $g, |z - x_0| < R_2$ diskinde yakınsayan bir kuvvet serisinin toplamı olduğundan orada *analitik ve sürekli*dir. Böylece

$$\int_{C_\rho} f(z) dz = \int_{C_\rho} g(z) dz + B_0 \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} \quad (2)$$

Birinci integral. $\rho < \rho_0 < R_2$ olacak biçimde bir ρ_0 seçilirse, g kapalı $|z - x_0| \leq \rho_0$ diskinde *sınırlı*dir: bir M sabiti için $|g(z)| \leq M$. C_ρ yayının uzunluğu $\pi\rho$ olduğundan *ML eşitsizliği*yle

$$\left| \int_{C_\rho} g(z) dz \right| \leq M\pi\rho \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} g(z) dz = 0 \quad (3)$$

İkinci integral. $-C_\rho$ yayı (saat yönünün tersi) $z = x_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) parametrisasyonuna sahiptir:

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = - \int_{-C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = - \int_0^\pi \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi \quad (4)$$

ρ 'dan bağımsız çıktı. (2)'de $\rho \rightarrow 0$ limiti alınıp (3) ve (4) kullanılırsa (1) elde edilir.

💡 Yarım tur, yarım rezidü

Teoremin anlamı sezgiseldir: tam bir tur $2\pi i B_0$ verirken, **yarım tur** onun yarısını verir; saat yönünde dolaşıldığı için de işaret ters döner: $-\pi i B_0$. Reel eksen üzerindeki basit kutuplar, integrale “yarım rezidü” katkısı yapar.

41.2 $\sin x / x$ İntegrali

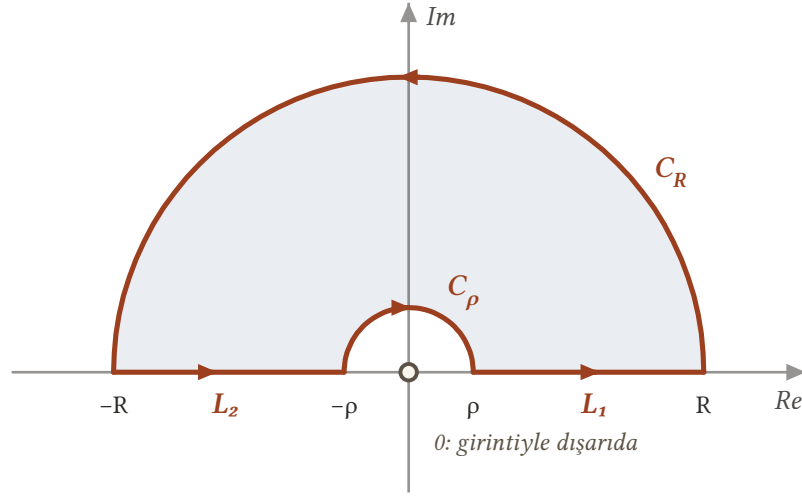
Örnek 41.1 (Dirichlet İntegrali).

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\frac{e^{iz}}{z}$ fonksiyonunu, aşağıdaki **girintili yol** üzerinde integralleyeceğiz: $\rho < R$ olmak üzere reel eksenin $L_1: \rho \leq x \leq R$ ve $L_2: -R \leq x \leq -\rho$ parçaları, dış yarım çember C_R ve orijinin çevresini dolaşan küçük yarım çember C_ρ .



Şekil 41.2: Girintili yol dört parçadan oluşur ve pozitif yönde dolaşılır: L_1 (ρ 'dan R 'ye), büyük yarım çember C_R (saat yönünün tersine), L_2 ($-R$ 'den $-\rho$ 'ya) ve orijini üstten dolaşan küçük yarım çember C_ρ ($-\rho$ 'dan ρ 'ya, yani **saat yönünde**). Orijin yolun dışında kaldığından taralı bölgede integrand analitiktir ve Cauchy-Goursat teoremi uygulanır.

Bu kapalı yolun **içinde ve üzerinde** integrand analitiktir (orijin girintiyle dışarıda bırakıldı); Cauchy-Goursat teoremi

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

verir; yani

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (5)$$

Sol taraf. L_1 ve L_2 parçaları sırasıyla $z = r$ ve $z = -r$ ($\rho \leq r \leq R$) ile parametrelendir. $z = -r$ parametrizasyonu L_2 'yi ters yönde ($-\rho$ 'dan $-R$ 'ye) katettiğinden $\int_{L_2} = - \int_{-L_2}$ yazılır:

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{-L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\rho}^R \frac{e^{ir}}{r} dr - \int_{\rho}^R \frac{e^{-ir}}{r} dr = 2i \int_{\rho}^R \frac{\sin r}{r} dr$$

Böylece (5) şu hâle gelir:

$$2i \int_{\rho}^R \frac{\sin r}{r} dr = - \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (6)$$

Küçük yay. Laurent açılımı

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots \right] = \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!}z + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

orijinin basit kutup ve rezidünün $B_0 = 1$ olduğunu gösterir. **Teorem 41.1** gereği

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i$$

Büyük yay. C_R üzerinde $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{R} = M_R \rightarrow 0$ olduğundan **Jordan lemması** uygulanır:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Sonuç. (6) eşitliğinde önce $\rho \rightarrow 0$, sonra $R \rightarrow \infty$ limitleri alınırsa

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin r}{r} dr = \pi i \implies \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

■

41.3 Dallanma Noktası Çevresinde Girinti

Girintinin nedeni her zaman bir kutup olmak zorunda değildir; **dallanma noktası** da yolu kesebilir. Teknik aynıdır.

Örnek 41.2 (Logaritmali İntegral).

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{32} (\ln 2 - 1)$$

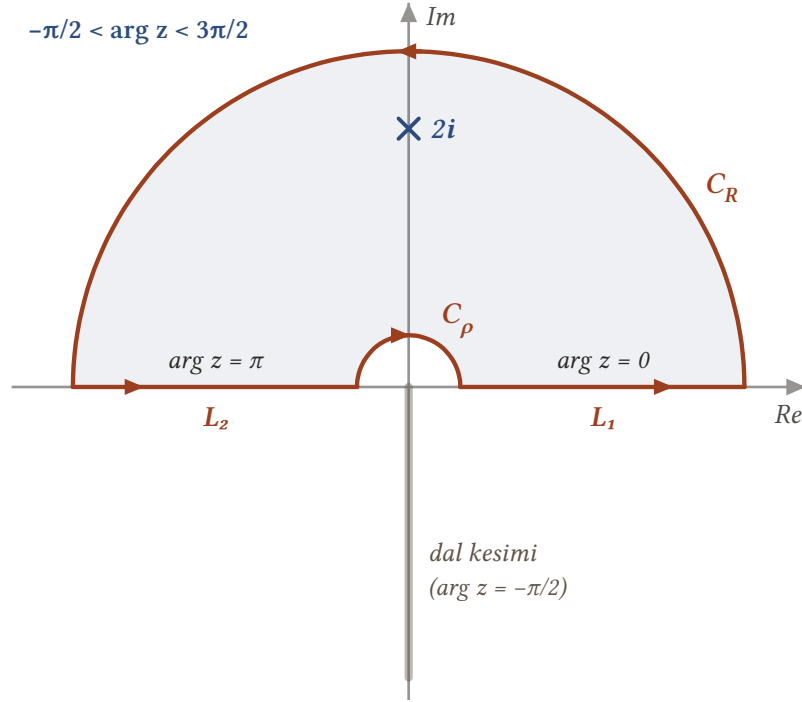
olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Çok değerli $\frac{\log z}{(z^2 + 4)^2}$ fonksiyonunun

$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} \quad \left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right)$$

dalını alalım. **Dal kesimi** orijin ve negatif sanal eksenidir; dolayısıyla f , üst yarı düzlemde $z = 2i$ dışında analitiktir. Önceki örnekteki girintili yolu, $\rho < 2 < R$ koşuluyla kullanınız; böylece $z = 2i$ tekilliği kapalı yolun içindedir.



Şekil 41.3: $\log z$ için $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ dalı seçilince dal kesimi negatif sanal eksene, yani yolun *uzağına* düşer; kesim yola yalnızca orijinde yaklaşır, orijin ise girintiyle dışarıda bırakılmıştır. Bu dalda L_1 üzerinde $\arg z = 0$, L_2 üzerinde $\arg z = \pi$ olur — negatif eksenindeki $\ln r + i\pi$ terimi buradan gelir. $\rho < 2 < R$ koşuluyla tek kutup $2i$ yolun içindedir.

Cauchy rezidü teoremi:

$$\int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=2i} f(z) - \int_{C_\rho} f dz - \int_{C_R} f dz \quad (7)$$

Doğru parçaları. $z = re^{i0} = r$ ve $z = re^{i\pi} = -r$ ($\rho \leq r \leq R$) parametrisasyonlarıyla (log dalında $\arg z = 0$ ve $\arg z = \pi$):

$$\int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz = \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr + \int_{\rho}^R \frac{\ln r + i\pi}{(r^2 + 4)^2} dr$$

Rezidü. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - 2i)^2}$, $\varphi(z) = \frac{\log z}{(z + 2i)^2}$ ile $z = 2i$ ikinci mertebeden kutuptur ve rezidü $\varphi'(2i)$ 'dir:

$$\varphi'(z) = \frac{\frac{1}{z}(z + 2i)^2 - 2(z + 2i) \log z}{(z + 2i)^4} = \frac{\frac{z+2i}{z} - 2 \log z}{(z + 2i)^3}$$

$z = 2i$ için $\log(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$ ve $(4i)^3 = -64i$ olduğundan

$$\varphi'(2i) = \frac{2 - 2 \ln 2 - i\pi}{-64i} = \frac{\pi}{64} + i \frac{1 - \ln 2}{32}$$

Böylece $2\pi i \varphi'(2i) = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) + i \frac{\pi^2}{32}$ olur ve (7) eşitliği

$$2 \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr + i\pi \int_{\rho}^R \frac{dr}{(r^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) + i \frac{\pi^2}{32} - \int_{C_{\rho}} f dz - \int_{C_R} f dz \quad (8)$$

hâline gelir. **Reel kısımlar** eşitlenirse

$$2 \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) - \operatorname{Re} \int_{C_{\rho}} f dz - \operatorname{Re} \int_{C_R} f dz \quad (9)$$

Yay integralleri. $z = \rho e^{i\theta}$ üzerinde ($\rho < 1$)

$$|\log z| = |\ln \rho + i\theta| \leq |\ln \rho| + \pi = -\ln \rho + \pi, \quad |z^2 + 4| \geq 4 - \rho^2$$

olduğundan

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_{\rho}} f dz \right| \leq \frac{-\ln \rho + \pi}{(4 - \rho^2)^2} \pi \rho = \pi \frac{\pi \rho - \rho \ln \rho}{(4 - \rho^2)^2}$$

L'Hôpital kuralıyla $\rho \rightarrow 0$ iken $\rho \ln \rho \rightarrow 0$; sınır sıfıra gider. Benzer biçimde C_R üzerinde

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f dz \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{(R^2 - 4)^2} \pi R = \pi \frac{\frac{\pi}{R} + \frac{\ln R}{R}}{(R - \frac{4}{R})^2}$$

ve $R \rightarrow \infty$ iken $\frac{\ln R}{R} \rightarrow 0$ olduğundan bu da sıfıra gider.

Sonuç. (9)'da $\rho \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow \infty$ alınırsa

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{32} (\ln 2 - 1)$$

İkinci kazanç. (8) eşitliğinde reel yerine **sanal** kısımlar eşitlenirse, aynı hesaptan bedava bir formül daha çıkar:

$$\pi \int_{\rho}^R \frac{dr}{(r^2 + 4)^2} = \frac{\pi^2}{32} - \operatorname{Im} \int_{C_{\rho}} f dz - \operatorname{Im} \int_{C_R} f dz$$

Limitler alındığında

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{32}$$

■

41.4 Alıştırma

Alıştırma 41.1 (Girintili Yol Alıştırmaları).

- P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$ esas değerini, $z = \pm 1$ noktalarını girintiyle dolaşarak hesaplayınız.
- $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0$ olduğunu, önceki örnekteki yolla gösteriniz.
- $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ eşitliğini, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ özdeşliğiyle **Örnek 41.1** sonucuna indirgeyiniz.

Çözüm.

a) İntegrandın tekil noktaları $z = 1$ ve $z = -1$ 'dir; ikisi de integrasyon yolunun **üzerindedir**, bu yüzden esas değer aranıyor. Yolu iki küçük yarım çemberle yukarıdan dolaşalım ve büyük bir C_R yarım çemberiyle kapatalım.

Kapalı yolun içinde hiçbir tekil nokta kalmadığından Cauchy-Goursat teoremi toplamın sıfır olduğunu söyler:

$$\int_{\text{doğru parçaları}} + \int_{C_{\rho_1}} + \int_{C_{\rho_2}} + \int_{C_R} = 0$$

Büyük yarım çemberin katkısı sıfıra gider: integrand $1/R^2$ mertebesinde, uzunluk πR mertebesinde. Küçük yarım çemberler için girinti lemması, basit kutuplarda

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B\pi i$$

verir (B , o noktadaki rezidü). Rezidüleri hesaplayalım:

$$B_1 = \text{Rez}_{z=1} \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}, \quad B_{-1} = \frac{1}{z-1} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2}$$

$\rho \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow \infty$ limitinde

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} - \pi i B_{-1} - \pi i B_1 = 0$$

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = \pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

Sonuç, basit kesirlerden de görülebilir: $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ ifadesi $x \mapsto -x$ altında işaret değiştirir; esas değer, tek fonksiyonun simetrik limitidir ve sıfırdır.

b) **Logaritmali integral örneğindeki** yolu ve aynı log dalını aynen kullanalım; bu kez

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 + 1}, \quad \log z = \ln r + i\theta \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

Yol, reel eksenin iki parçası ($-R$ 'den $-\rho$ 'ya ve ρ 'dan R 'ye), orijini dolaşan C_ρ ve büyük C_R yarım çemberlerinden oluşur. İçeride kalan tek tekil nokta $z = i$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{\log z}{z^2 + 1} = \frac{\log z}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{\ln 1 + i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4}$$

Negatif eksen parçasında $z = re^{i\pi}$, yani $\log z = \ln r + i\pi$ ve $dz = -dr$ 'dir; bu parça yön düzeltmesiyle

$\int_{\rho}^R \frac{\ln r + i\pi}{r^2 + 1} dr$ katkısını verir. İki doğru parçası toplanınca

$$2 \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{r^2 + 1} dr + i\pi \int_{\rho}^R \frac{dr}{r^2 + 1} = 2\pi i \cdot \frac{\pi}{4} - \int_{C_\rho} f dz - \int_{C_R} f dz$$

Yay katkıları sıfıra gider: C_ρ üzerinde $|f| \lesssim |\ln \rho| + \pi$ ve uzunluk $\pi\rho$ olduğundan $\rho \ln \rho \rightarrow 0$; C_R üzerinde $|f| \lesssim (\ln R + \pi)/R^2$ ve uzunluk πR olduğundan $(\ln R)/R \rightarrow 0$.

Limitte sağ taraf $\frac{i\pi^2}{2}$ 'dir. Sol taraftaki ikinci integral $\int_0^\infty \frac{dr}{r^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$ olduğundan sanal kısımlar

$$i\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{i\pi^2}{2}$$

eşitliğiyle birbirini tam olarak karşılar. Geriye reel kısım kalır:

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln r}{r^2 + 1} dr = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0$$

Sonuç sezgiseldir: $x \mapsto 1/x$ değişimi integrali kendisinin eksilisine çevirir; $(0, 1)$ aralığındaki negatif katkı, $(1, \infty)$ aralığındaki pozitif katkıyı tam olarak siler.

c) Özdeşliği yerine koyalım:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} dx$$

Kısmi integrasyon uygulayalım: $u = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ve $dv = \frac{dx}{x^2}$ alırsak $du = \sin 2x dx$ ve $v = -\frac{1}{x}$, tir:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} dx = \left[-\frac{1 - \cos 2x}{2x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} dx$$

Sınır terimi iki uçta da kaybolur: $x \rightarrow \infty$ iken pay sınırlı, payda sonsuza gider; $x \rightarrow 0$ iken $1 - \cos 2x \approx 2x^2$ olduğundan ifade $\approx x \rightarrow 0$ 'dır.

Kalan integralde $u = 2x$ değişimi yapalım:

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

Bu, [Örnek 41.1](#) örneğinde hesaplanan Dirichlet integralidir ve değeri $\frac{\pi}{2}$ 'dir. Sonuç:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

■

Dal kesimi bu bölümde yolun dışında kaldı; yola yalnızca, girintiyle dışarıda bıraktığımız orijinde yaklaştı. Bir sonraki bölümde kesim boyunca uzanan yollarla çalışacağız: [dal kesimi boyunca integrasyon](#).

42. Dal Kesimi Boyunca İntegrasyon

Bazı integrallerde yol, integrandın **dal kesimi boyunca** uzanır. İlk bakışta bu bir engeldir; oysa asıl fırsat buradadır: kesimin iki yakasında fonksiyon farklı değerler aldığından, aynı reel integral iki farklı katsayıyla çıkar ve denklem çözülerek integral elde edilir.

42.1 Yöntemin Kurulumu

$0 < a < 1$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx \quad (1)$$

integralini hesaplayacağız. Burada x^{-a} , esas değeri gösterir: $x^{-a} = \exp(-a \ln x)$. Bu integral, gama fonksiyonu kuramında merkezî bir rol oynar.

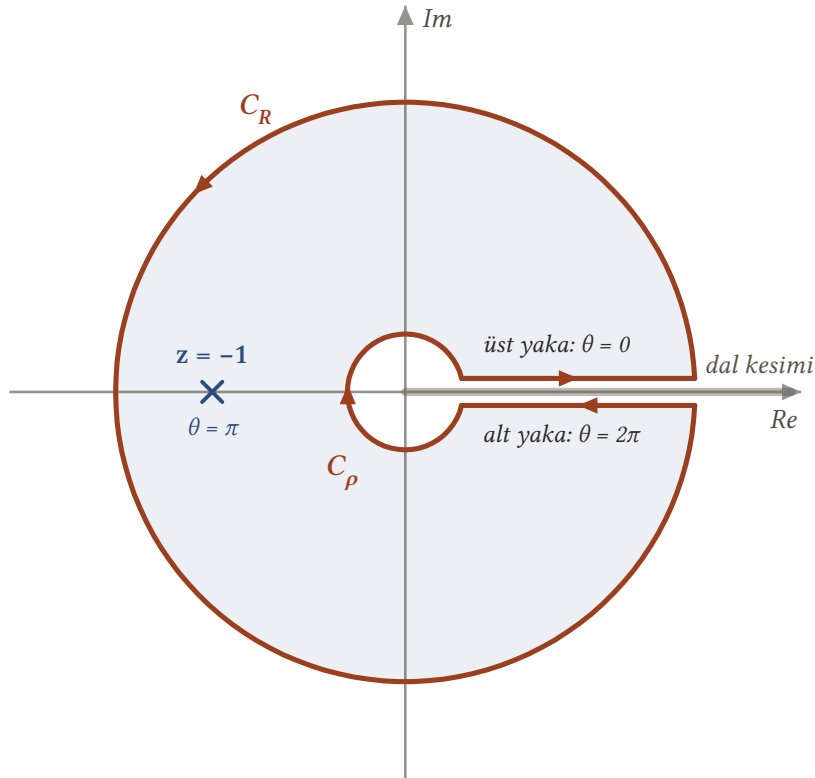
i İki yönden birden has olmayan

(1) integrali yalnızca üst sınırı yüzünden değil, integrandın $x = 0$ 'da sonsuz süreksizliğe sahip olması nedeniyle de has olmayandır. $0 < a < 1$ iken integrand, $x \rightarrow 0$ civarında x^{-a} gibi, $x \rightarrow \infty$ iken x^{-a-1} gibi davranır; her iki uçta da yakınsaklık sağlanır. Yakınsaklığı ayrıca kanıtlamaya gerek yoktur — hesabın kendisi bunu üretecektir.

Çok değerli $\frac{z^{-a}}{z+1}$ fonksiyonunun, dal kesimi $\arg z = 0$ olan dalını alalım:

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi) \quad (2)$$

İntegrasyon yolu bir **kesik halkadır**: $\rho < 1 < R$ olmak üzere, kesimin üst yakası boyunca ρ 'dan R 'ye gidilir, dış çember C_R üzerinde tam tur atılır, kesimin alt yakası boyunca R 'den ρ 'ya dönülür ve iç çember C_ρ üzerinden başlangıca varılır. Tek tekil nokta $z = -1$ bu yolun içindedir.



Şekil 42.1: Kesik halka: dal kesimi pozitif reel eksendir. Yol, kesimin üst yakasında ρ 'dan R 'ye gider, C_R üzerinde saat yönünün tersine tam tur atar, alt yakada geri döner ve C_ρ üzerinde saat yönünde başlangıca varır. Üst yakada $\theta = 0$ ile $z^{-a} = r^{-a}$, alt yakada $\theta = 2\pi$ ile $z^{-a} = r^{-a}e^{-2a\pi i}$ 'dir; tek kutup $z = -1$ halkanın içindedir.

42.2 İki Yakanın Farkı

$z = re^{i\theta}$ için

$$f(z) = \frac{\exp(-a \log z)}{z + 1} = \frac{\exp[-a(\ln r + i\theta)]}{re^{i\theta} + 1}$$

Üst yaka ($\theta = 0$):

$$f(z) = \frac{\exp[-a \ln r]}{r + 1} = \frac{r^{-a}}{r + 1}$$

Alt yaka ($\theta = 2\pi$):

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i2\pi)]}{r + 1} = \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r + 1}$$

Aynı r değeri için iki yakadaki değerler $e^{-i2a\pi}$ çarpanı kadar farklıdır — yöntemin çalışmasını sağlayan tam olarak budur.

42.3 Rezidü Teoreminin Uygulanması

Yol boyunca [Cauchy rezidü teoremi](#) uygulanırsa (alt yaka ters yönde katedildiğinden işaret eksidir):

$$\int_{\rho}^R \frac{r^{-a}}{r + 1} dr + \int_{C_R} f(z) dz - \int_{\rho}^R \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r + 1} dr + \int_{C_\rho} f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=-1} f(z) \quad (3)$$

Rezidü. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z+1}$ yazalım; $\varphi(z) = z^{-a} = \exp[-a(\ln r + i\theta)]$ fonksiyonu $z = -1$ noktasında ($r = 1, \theta = \pi$) analitiktir ve

$$\varphi(-1) = \exp[-a(\ln 1 + i\pi)] = e^{-ia\pi} \neq 0$$

Demek ki $z = -1$ bir **basit kutuptur** ve

$$\text{Rez}_{z=-1} f(z) = e^{-ia\pi}$$

(3) eşitliği düzenlenirse:

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_{\rho}^R \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i e^{-ia\pi} - \int_{C_{\rho}} f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz \quad (4)$$

42.4 Çemberlerin Katkısı Sönüyor

(2) tanımından, C_{ρ} üzerinde $|z^{-a}| = \rho^{-a}$ ve $|z+1| \geq 1 - \rho$ olduğundan **ML eşitsizliği**yle

$$\left| \int_{C_{\rho}} f(z) dz \right| \leq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho} 2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho} \rho^{1-a}$$

$0 < a < 1$ olduğundan $1-a > 0$ 'dır ve $\rho \rightarrow 0$ iken $\rho^{1-a} \rightarrow 0$; sınır sıfıra gider. Benzer biçimde C_R üzerinde $|z^{-a}| = R^{-a}$ ve $|z+1| \geq R-1$ ile

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1} 2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1} \cdot \frac{1}{R^a}$$

$R \rightarrow \infty$ iken ilk çarpan 2π 'ye, ikincisi sıfıra gider; sınır yine sıfırdır.

42.5 Sonuç: $\pi / \sin a\pi$

(4) eşitliğinde önce $\rho \rightarrow 0$, sonra $R \rightarrow \infty$ alınırsa

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_0^{\infty} \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i e^{-ia\pi}$$

Sol taraftaki çarpanı sadeleştirmek için pay ve paydayı $e^{ia\pi}$ ile çarpalım:

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i \frac{e^{-ia\pi}}{1 - e^{-i2a\pi}} \cdot \frac{e^{ia\pi}}{e^{ia\pi}} = \pi \frac{2i}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}$$

Payda **sinüsün üstel tanımı**dır: $e^{ia\pi} - e^{-ia\pi} = 2i \sin a\pi$. Böylece

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1) \quad (5)$$

🔗 Formülün iki denetimi

$a = \frac{1}{2}$ alınırsa sağ taraf $\frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$ verir. Sol taraf ise $x = t^2$ değişimiyle

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{x+1} dx = \int_0^\infty \frac{2 dt}{t^2+1} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

– uyuyor. Ayrıca (5) formülü $a \rightarrow 0^+$ ve $a \rightarrow 1^-$ uçlarında sonsuza gider; bu da beklenendir, çünkü o uçlarda integrand sırasıyla $\frac{1}{x+1}$ ve $\frac{1}{x(x+1)}$ gibi davranıp integrali ıraksatır.

42.6 Alıştırma

Alıştırma 42.1 (Dal Kesimi Alıştırmaları).

a) (5) formülünde $a = \frac{1}{3}$ alarak $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x+1)}$ integralini hesaplayınız.

b) Aynı kesik halka yoluyla

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+b} dx = \frac{\pi b^{-a}}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1, b > 0)$$

formülünü türetiniz.

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$ integralini, $z^{1/2}$ dalı ve aynı yol ile hesaplayınız.

Çözüm.

a) (5) formülünde $a = \frac{1}{3}$ yazmak yeterlidir ($0 < a < 1$ koşulu sağlanıyor):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x+1)} = \int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x+1)} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

b) Aynı kesik halka yolunu $f(z) = \frac{z^{-a}}{z+b}$ için kuralım; dal yine $0 < \theta < 2\pi$ olsun. Kesimin üstündeki kenarda $z^{-a} = r^{-a}$, altındaki kenarda $\theta = 2\pi$ olduğundan $z^{-a} = r^{-a}e^{-i2a\pi}$ 'dir. Tek tekil nokta $z = -b$ basit kutuptur ve $\arg(-b) = \pi$ seçilir:

$$\text{Rez}_{z=-b} \frac{z^{-a}}{z+b} = (-b)^{-a} = b^{-a}e^{-ia\pi}$$

(3)–(4) adımlarının aynısı, yay katkıları sıfıra giderken

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+b} dr = 2\pi i b^{-a} e^{-ia\pi}$$

verir. Sol taraftaki çarpanı $e^{-ia\pi}$ parantezine alalım:

$$1 - e^{-i2a\pi} = e^{-ia\pi} (e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}) = e^{-ia\pi} \cdot 2i \sin a\pi$$

Yerine koyup sadeleştirelim:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+b} dx = \frac{2\pi i b^{-a} e^{-ia\pi}}{e^{-ia\pi} 2i \sin a\pi} = \frac{\pi b^{-a}}{\sin a\pi}$$

Aynı sonuç (5) formülünde $x = bt$ değişimiyle de bulunur: $dx = b dt$ ve $x + b = b(t + 1)$ olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+b} dx = b^{-a} \int_0^\infty \frac{t^{-a}}{t+1} dt = \frac{\pi b^{-a}}{\sin a\pi}$$

c) İntegrali önce (5) formülüne indirgeyelim; $u = x^2$ değişimi ile $x = u^{1/2}$ ve $dx = \frac{1}{2} u^{-1/2} du$:

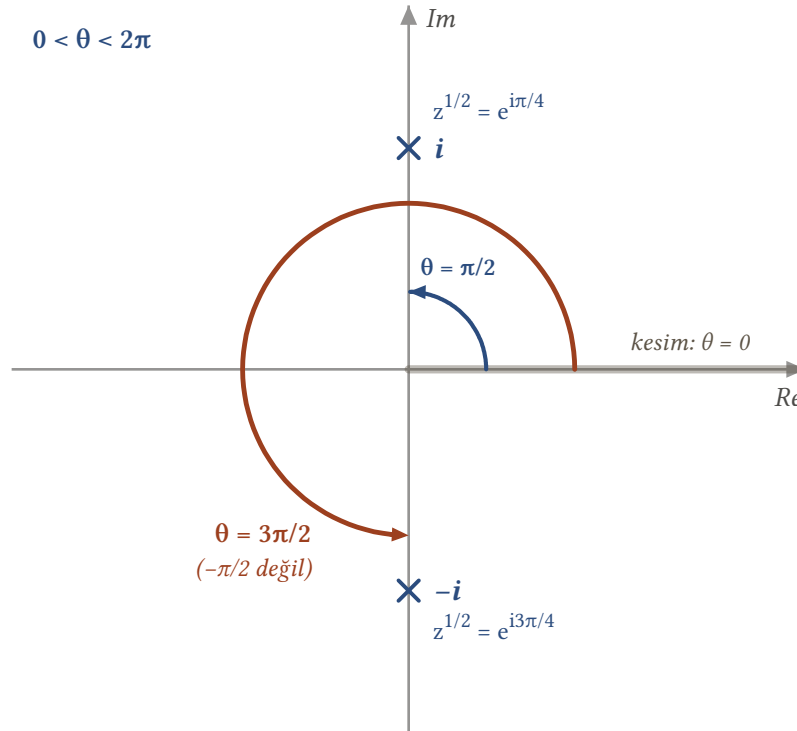
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \int_0^\infty \frac{u^{1/4}}{u+1} \cdot \frac{u^{-1/2}}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u^{-1/4}}{u+1} du$$

(5) formülü $a = \frac{1}{4}$ ile

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Doğrudan yol da aynı sonucu verir. $f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+1}$ dalını $0 < \theta < 2\pi$ ile alalım; tekil noktalar $z = \pm i$ 'dir ve kesik halkanın içindedir. Basit kutuplarda rezidü $\frac{z^{1/2}}{2z}$ olduğundan

$$\text{Rez}_{z=i} = \frac{e^{i\pi/4}}{2i}, \quad \text{Rez}_{z=-i} = \frac{e^{i3\pi/4}}{-2i}$$



Şekil 42.2: $0 < \theta < 2\pi$ dalında aç, kesimden (pozitif reel eksen) başlayarak saat yönünün tersine ölçülür: i için $\theta = \pi/2$, $-i$ için $\theta = 3\pi/2$ — esas argüman $-\pi/2$ bu dalda geçerli değildir. Bu yüzden $-i$ noktasında $z^{1/2} = e^{i3\pi/4}$ alınır; $-\pi/2$ kullanılırsa rezidünün işareti yanlış çıkar.

(İkinci noktada $\arg(-i) = 3\pi/2$ seçilir, yani $z^{1/2} = e^{i3\pi/4}$.) Toplam

$$\frac{e^{i\pi/4} - e^{i3\pi/4}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{2i}$$

Kesimin alt kenarında $z^{1/2} = -x^{1/2}$ olduğundan, yön farkıyla birlikte iki kenar **aynı** katkısı verir ve toplam integralin iki katı çıkar:

$$2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2i} = \pi\sqrt{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

■

Bu kısımdaki integraller hep sonsuz aralıklardaydı. Şimdi tamamen farklı bir aileye geçiyoruz: 0 ile 2π arasında, sinüs ve kosinüs içeren **belirli** integraller – [trigonometrik integraller](#).

43. Sinüs ve Kosinüs İçeren Belirli İntegraller

0 ile 2π arasında alınan

$$\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (1)$$

tipindeki belirli integraller, rezidü kuramının en zarif uygulamalarındandır. Fikir şudur: θ 'nın 0'dan 2π 'ye taraması, birim çember üzerinde tam bir tur demektir — yani integral aslında gizli bir **çevre integralidir**.

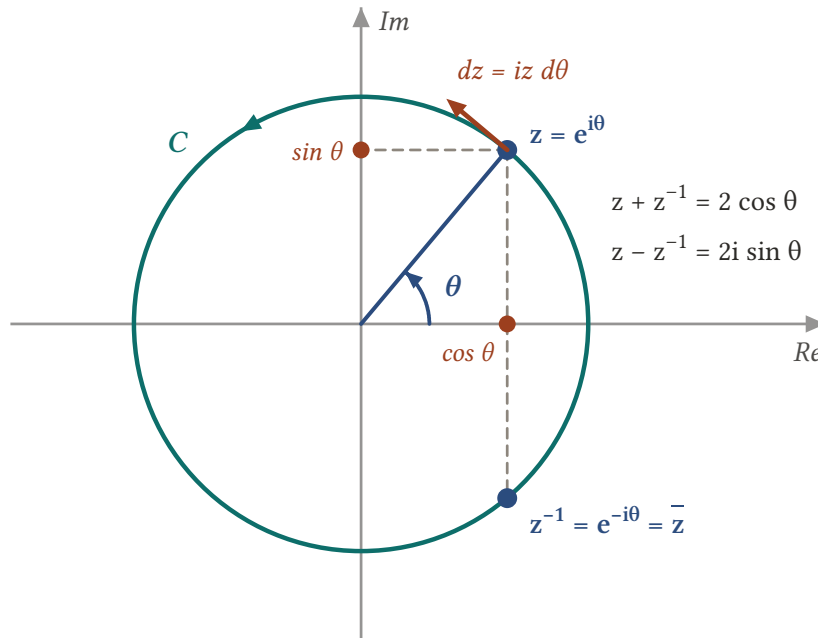
43.1 Dönüşüm

Birim çemberi

$$z = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (2)$$

ile parametreleyelim. **Türev formülüyle** $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ olur. Sinüs ve kosinüsün üstel tanımları birim çember üzerinde $e^{-i\theta} = z^{-1}$ ile şu hâle gelir:

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (3)$$



Şekil 43.1: Birim çember üzerinde $|z| = 1$ olduğundan $z^{-1} = \bar{z}$: z ile z^{-1} reel eksene göre simetrik. Toplamları reel ve tam $2 \cos \theta$, farkları sanal ve $2i \sin \theta$ 'dir; (3) değişimleri bu geometrinin cebirsel yazımıdır. θ artarken z çember boyunca teğet yönde, iz hızıyla ilerler: $dz = iz d\theta$.

Bu değişimlerle (1) integrali, C pozitif yönlü birim çember olmak üzere

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \quad (4)$$

çevre integraline dönüşür.

💡 Ne zaman işe yarar?

(4) integralindeki integrand z 'nin **rasyonel fonksiyonuna** indirgeniyorsa, paydanın sıfırları bulunup – hiçbiri C üzerinde olmamak koşuluyla – **Cauchy rezidü teoremi** uygulanır. F rasyonel olduğunda bu daima gerçekleşir.

43.2 Çözümlü Örnek

Örnek 43.1 (Klasik Formül).

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \quad (-1 < a < 1)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Formül $a = 0$ için apaçıktır ($2\pi = 2\pi$); $a \neq 0$ alalım.

(3) değişimleriyle integral

$$\int_C \frac{1}{1 + a \frac{z - z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{2 dz}{2iz + a(z^2 - 1)} = \int_C \frac{2/a}{z^2 + \frac{2i}{a}z - 1} dz \quad (5)$$

hâline gelir.

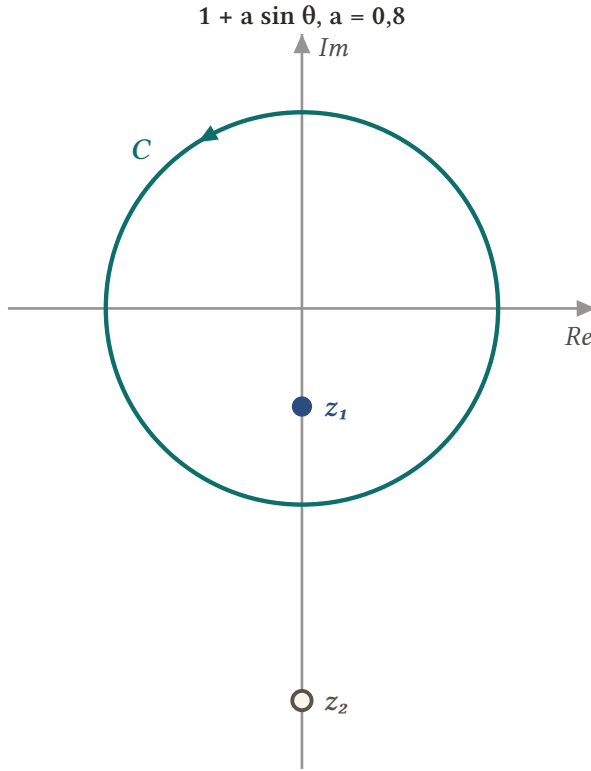
Paydanın sıfırları. İkinci derece formülüyle

$$z_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i, \quad z_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i$$

İkisi de saf sanaldır. $z_1 z_2 = -1$ olduğundan $|z_1| |z_2| = 1$ 'dir; ayrıca

$$|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > 1$$

olduğundan zorunlu olarak $|z_1| < 1$ çıkar. Yani C üzerinde tekil nokta yoktur, çemberin içindeki tek tekil nokta z_1 'dir.



paydanın sıfırları ($a = 0,8$):

$$z_1 = -i/2, |z_1| = 1/2 < 1$$

birim çemberin içinde

$$z_2 = -2i, |z_2| = 2 > 1$$

birim çemberin dışında

$$z_1 z_2 = -1 \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 1:$$

biri içerideyse öteki

zorunlu olarak dışarıdadır.

Şekil 43.2: $a = 0,8$ için paydanın sıfırları $z_1 = -i/2$ ve $z_2 = -2i$ 'dir. Çarpımları -1 olduğundan modülleri birbirinin tersidir: büyük olanı çemberin dışında kalır, küçük olanı içeride. Rezidü teoremine yalnızca içerideki z_1 girer; aynı akıl yürütme (b) alıştırmadaki $z_+ z_- = 1$ için de geçerlidir.

Rezidü. İntegrandı

$$f(z) = \frac{2/a}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{\varphi(z)}{z - z_1}, \quad \varphi(z) = \frac{2/a}{z - z_2}$$

biçiminde yazalım. φ , z_1 'de analitik ve sıfırdan farklıdır; **basit kutup formülüyle**

$$B_1 = \varphi(z_1) = \frac{2/a}{z_1 - z_2} = \frac{2/a}{\frac{2\sqrt{1-a^2}}{a}i} = \frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}$$

Sonuç. Rezidü teoremiyle

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + \frac{2i}{a}z - 1} dz = 2\pi i B_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

(5) zinciri geri okunursa istenen formül elde edilir.

Denetim. $a \rightarrow 0$ iken sonuç 2π 'ye gider; $|a| \rightarrow 1$ iken sonsuza gider — beklenendir, çünkü o durumda payda bir noktada sıfırlanıp integrali ıraksatır.

■

43.3 Kat Açılı İntegrandlar

Yöntem, sinüs ve kosinüsün argümanları θ 'nın **tam katları** olduğunda da aynen işler; tek yapılacak, (2) parametrizasyonunu kuvvetlere taşımaktır:

$$\cos 2\theta = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{(e^{i\theta})^2 + (e^{i\theta})^{-2}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}$$

Genel olarak

$$\cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin n\theta = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Örnek 43.2 (Kat Açılı Örnek).

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

Dönüşümle:

$$\int_C \frac{\frac{z^2 + z^{-2}}{2}}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{z^4 + 1}{2iz^2(5z - 2z^2 - 2)} dz$$

Paydayı çarpanlara ayıralım: $-2z^2 + 5z - 2 = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)$. Böylece integrand

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{-4iz^2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)}$$

olur. Birim çemberin içindeki tekil noktalar: $z = 0$ (ikinci mertebeden kutup) ve $z = \frac{1}{2}$ (basit kutup); $z = 2$ dışarıdadır.

$z = 1/2$ 'deki rezidü.

$$\varphi(z) = \frac{z^4 + 1}{-4iz^2(z - 2)}, \quad \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{17}{16}}{-4i \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{17}{16}}{\frac{3i}{2}} = \frac{17}{24i}$$

$z = 0$ 'daki rezidü. $f(z) = \frac{\psi(z)}{z^2}$, $\psi(z) = \frac{z^4 + 1}{-4i\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)}$ ile rezidü $\psi'(0)$ 'dır. $\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2) = z^2 - \frac{5}{2}z + 1$ yazıp çarpım kuralıyla türetelim:

$$\psi(z) = \frac{-1}{4i} \cdot \frac{z^4 + 1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} \Rightarrow \psi'(0) = \frac{-1}{4i} \cdot \frac{0 \cdot 1 - 1 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{1} = \frac{-5}{8i}$$

Toplam.

$$2\pi i \left(\frac{17}{24i} - \frac{5}{8i} \right) = 2\pi \left(\frac{17}{24} - \frac{15}{24} \right) = 2\pi \cdot \frac{2}{24} = \frac{\pi}{6}$$

Yani

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

■

43.4 Alıştırma

Alıştırma 43.1 (Trigonometrik İntegral Alıştırmaları). Aşağıdaki integralleri birim çember dönüşümüyle hesaplayınız.

- a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$
 b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} \quad (-1 < a < 1)$
 c) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad (a > 1)$ (İpucu: integrand çifttir; aralığı $[0, 2\pi]$ 'ye genişletip yarısını alınız.)
 d) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta$

Çözüm.

a) (3) dönüşümlerini uygulayalım. $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ olduğundan

$$5 + 4 \sin \theta = 5 + \frac{2}{i} (z - z^{-1}) = 5 - 2i \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{-2iz^2 + 5z + 2i}{z}$$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$ ile birlikte z sadeleşir:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} = \int_C \frac{z}{-2iz^2 + 5z + 2i} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{dz}{2z^2 + 5iz - 2}$$

Paydanın köklerini bulalım:

$$z = \frac{-5i \pm \sqrt{(5i)^2 + 16}}{4} = \frac{-5i \pm 3i}{4} \Rightarrow z = -\frac{i}{2}, \quad z = -2i$$

Yalnızca $z = -i/2$ birim çemberin içindedir ve basit kutuptur. Rezidü, paydanın türeviyle:

$$\text{Rez}_{z=-i/2} \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} = \frac{1}{4z + 5i} \Big|_{z=-i/2} = \frac{1}{-2i + 5i} = \frac{1}{3i}$$

Sonuç:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}$$

b) Bu kez $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ kullanılır:

$$1 + a \cos \theta = \frac{az^2 + 2z + a}{2z} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = \int_C \frac{2 dz}{i (az^2 + 2z + a)}$$

Kökler:

$$z_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

$-1 < a < 1$ için $z_+ z_- = 1$ olduğundan kökler birbirinin tersidir; biri çemberin içinde, diğeri dışındadır.

İçeride kalan $z_+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$ 'dir. Rezidü:

$$\frac{2}{i} \cdot \frac{1}{2az + 2} \Big|_{z=z_+} = \frac{1}{i (az_+ + 1)} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}$$

çünkü $az_+ + 1 = \sqrt{1 - a^2}$ 'dir. Sonuç:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

($a = 0$ durumunda formül 2π verir; doğrudur.)

c) İntegrand $\theta \mapsto 2\pi - \theta$ değişimi altında değişmez ($\cos$ bu simetriye sahiptir), dolayısıyla $[0, 2\pi]$ üzerindeki integral $[0, \pi]$ üzerindeki iki katıdır:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$$

Sağdaki integral, (b) şıkının $\frac{1}{a}$ katıdır: $a + \cos \theta = a \left(1 + \frac{1}{a} \cos \theta\right)$ yazılıp $a > 1$ için $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Yarısını alalım:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

d) Önce payı indirgeyelim: $\cos^2 3\theta = \frac{1 + \cos 6\theta}{2}$. Ardından $\varphi = 2\theta$ değişimi yapalım; integrandın φ cinsinden periyodu 2π olduğundan

$$\int_0^{2\pi} F(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} F(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi$$

Böylece

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi$$

Birinci integral. Birim çember dönüşümüyle

$$5 - 4 \cos \varphi = \frac{-2z^2 + 5z - 2}{z} = \frac{-(2z - 1)(z - 2)}{z}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} = \int_C \frac{z}{-(2z - 1)(z - 2)} \cdot \frac{dz}{iz} = i \int_C \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)}$$

İçeride kalan tek kutup $z = 1/2$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=1/2} = \frac{1}{2(z - 2)} \Big|_{z=1/2} = \frac{1}{2(-3/2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} = i \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

İkinci integral. $\cos 3\varphi$ yerine $e^{i3\varphi}$ ile çalışabiliriz: sanal kısım, $\varphi \mapsto 2\pi - \varphi$ simetrisi altında tek olduğundan sıfırdır. $z = e^{i\varphi}$ ile $e^{i3\varphi} = z^3$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi = i \int_C \frac{z^3 dz}{(2z - 1)(z - 2)}$$

Yine yalnızca $z = 1/2$ içeridedir:

$$\text{Rez}_{z=1/2} = \frac{z^3}{2(z - 2)} \Big|_{z=1/2} = \frac{1/8}{-3} = -\frac{1}{24}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi = i \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{24}\right) = \frac{\pi}{12}$$

Toplam.

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{24} = \frac{8\pi + \pi}{24} = \frac{3\pi}{8}$$

■

Rezidü kuramının integral hesabındaki gücünü gördük. Son iki bölümde bambaşka iki uygulamaya geçiyoruz: fonksiyonların **sıfırlarını saymak** ve Laplace dönüşümlerini tersine çevirmek. Önce **argüman ilkesi** ve **Rouché teoremi**.

44. Argüman İlkesi ve Rouché Teoremi

Rezidü kuramı yalnızca integral hesaplamaz; **sayar** da. Bu bölümde bir fonksiyonun bir çevre içindeki sıfır ve kutuplarının sayısını, çevre üzerindeki argüman değişiminden okumayı öğreneceğiz. Sonuç, polinom köklerinin nerede olduğunu belirleyen pratik bir araca dönüşecek.

44.1 Meromorf Fonksiyonlar ve Dolanma Sayısı

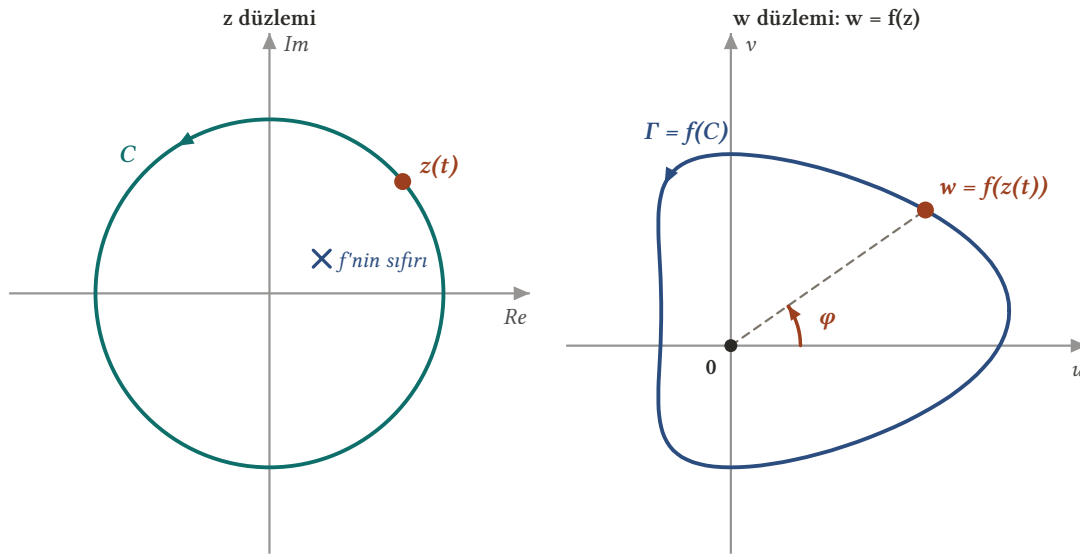
Tanım 44.1 (Meromorf Fonksiyon). Bir f fonksiyonu, bir D domeninde **kutuplar hariç** her yerde analitikse D 'de **meromorftur**.

f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içi olan domende meromorf; C üzerinde ise analitik ve sıfırdan farklı olsun. C 'nin $w = f(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü Γ , w düzleminde kapalı bir eğridir (basit olmak zorunda değildir) ve f , C üzerinde sıfırlanmadığından Γ **orijinden geçmez**.

z noktası C 'yi pozitif yönde bir kez dolaşırken w görüntüsü Γ 'yı bir kez katederse, $\arg w$ değeri sürekli biçimde değişir ve başlangıç noktasına dönlüldüğünde bir $\phi_1 - \phi_0$ farkı birikir. Bu fark

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0 \quad (1)$$

ile gösterilir ve 2π 'nin bir tam katıdır.



Şekil 44.1: $z(t)$ noktası C 'yi pozitif yönde bir kez dolaşırken görüntüsü $w = f(z(t))$, w düzleminde kapalı Γ eğrisini çizer. f , C üzerinde sıfırlanmadığından Γ orijinden geçmez ve $\varphi = \arg w$ sürekli izlenebilir; tur tamamlandığında biriken fark $\Delta_C \arg f$, 2π 'nin bir katıdır. Burada Γ orijini bir kez sarar: dolanma sayısı 1, yani C içinde bir sıfır.

Tanım 44.2 (Dolanma Sayısı).

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) \quad (2)$$

tam sayısına, Γ eğrisinin $w = 0$ orijini etrafındaki **dolanma sayısı** denir. Saat yönünün tersine dolanmalar pozitif, saat yönündekiler negatif sayılır; Γ orijini çevrelemiyorsa dolanma sayısı sıfırdır.

44.2 Argüman İlkesi

Teorem 44.1 (Argüman İlkesi). C pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olsun ve

- a) f , C 'nin içi olan domende meromorf;
- b) f , C üzerinde analitik ve sıfırdan farklı;
- c) katlılıklar dahil, C içinde f 'nin sıfırlarının sayısı Z , kutuplarının sayısı P olsun. O zaman

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = Z - P \quad (3)$$

İspat.

$\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun C üzerindeki integralini **iki farklı yolla** hesaplayacağız.

Birinci hesap: argüman değişimi. C 'nin parametrik temsili $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) olsun:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'[z(t)] z'(t)}{f[z(t)]} dt \quad (4)$$

Γ orijinden geçmediğinden, C üzerindeki her noktanın görüntüsü üstel formda yazılabilir:

$$f[z(t)] = \rho(t) e^{i\phi(t)} \quad (a \leq t \leq b)$$

Γ 'yı oluşturan düzgün yayların her biri boyunca

$$\frac{d}{dt} f[z(t)] = f'[z(t)] z'(t) = \rho'(t) e^{i\phi(t)} + i\rho(t) e^{i\phi(t)} \phi'(t)$$

olur. (4) integralinde yerine konup sadeleştirilirse

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + i \int_a^b \phi'(t) dt = [\ln \rho(t)]_a^b + i [\phi(t)]_a^b$$

C kapalı olduğundan $\rho(b) = \rho(a)$ 'dır ve ilk terim sıfırlanır; ikinci terim ise (1) tanımımız:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_C \arg f(z) \quad (5)$$

İkinci hesap: rezidü teoremi. $\frac{f'}{f}$ bölümü, C içinde yalnızca f 'nin sıfır ve kutuplarında tekildir.

f 'nin z_0 'da m_0 mertebeli bir sıfırı varsa **karakterizasyon teoremiyle** $f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z)$ yazılır (g analitik, $g(z_0) \neq 0$) ve

$$\begin{aligned} f'(z) &= m_0(z - z_0)^{m_0-1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z) \\ \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned} \quad (6)$$

$\frac{g'}{g}$, z_0 'da analitik olduğundan $\frac{f'}{f}$ orada **basit kutba** sahiptir ve rezidüsü m_0 'dır.

f 'nin z_0 'da m_p mertebeli bir kutbu varsa **kutup karakterizasyonu**yla $f(z) = (z - z_0)^{-m_p} \varphi(z)$ yazılır; (6) hesabında m_0 yerine $-m_p$ geçer ve rezidü $-m_p$ olur.

Cauchy rezidü teoremi tüm katkıları toplar:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z - P) \quad (7)$$

(5) ile (7) eşitlenip $2\pi i$ 'ye bölünürse (3) elde edilir.

■

Örnek 44.1 (Negatif Dolanma). $f(z) = \frac{1}{z^2}$ fonksiyonunun tek tekilliği orijindeki ikinci mertebeden kutuptur ve sonlu düzlemde sıfırı yoktur. C , pozitif yönlü birim çember olsun; f orada analitik ve sıfırdan farklıdır. Argüman ilkesi $Z = 0$, $P = 2$ ile

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \left(\frac{1}{z^2} \right) = -2$$

verir: görüntü eğrisi Γ , orijin etrafında **saat yönünde iki kez** döner. Gerçekten $z = e^{i\theta}$ için $w = e^{-i2\theta}$, dir ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — doğrudan da görülür.

44.3 Rouché Teoremi

Teorem 44.2 (Rouché Teoremi). C basit kapalı bir çevre olsun ve

a) f ile g fonksiyonları C 'nin içinde ve üzerinde analitik;

b) C üzerindeki her noktada $|f(z)| > |g(z)|$

olsun. O zaman $f(z)$ ile $f(z) + g(z)$, C içinde — katlılıklar dahil — **aynı sayıda** sıfıra sahiptir.

İspat.

Yön önemsizdir; C 'yi pozitif yönlü alalım. Önce ne f 'nin ne de $f + g$ 'nin C üzerinde sıfırı olduğuna dikkat edelim: $z \in C$ iken

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0, \quad |f(z) + g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 0$$

Z_f ve Z_{f+g} , C içindeki sıfır sayıları olsun. İki fonksiyon da analitik olduğundan kutupları yoktur; argüman ilkesi

$$Z_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z), \quad Z_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + g(z)]$$

verir. Çarpımı ayıralım:

$$\Delta_C \arg [f + g] = \Delta_C \arg \left\{ f \left[1 + \frac{g}{f} \right] \right\} = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg F$$

$$F(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

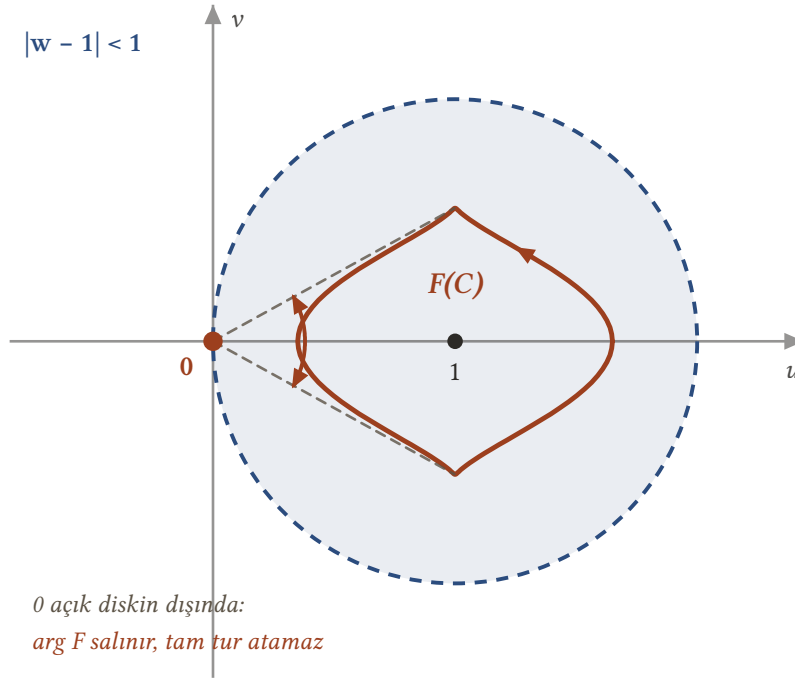
Böylece

$$Z_{f+g} = Z_f + \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg F(z) \quad (8)$$

Fakat C üzerinde

$$|F(z) - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

olduğundan, C 'nin $w = F(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü $|w - 1| < 1$ açık diskinin içinde kalır. Bu disk orijini içermediğinden görüntü eğrisi $w = 0$ etrafında dolanamaz: $\Delta_C \arg F(z) = 0$. (8) eşitliği $Z_{f+g} = Z_f$ hâline iner.



Şekil 44.2: C üzerinde $|F(z) - 1| < 1$ olduğundan görüntü eğrisi $F(C)$, merkezi 1 olan açık birim diskin içinde kalır. Orijin bu diskin dışındadır (sınır üzerinde); diskteki bir kapalı eğri orijini sarmaz — $\arg F$ ileri geri salınır ama tam tur biriktiremez. Dolayısıyla $\Delta_C \arg F = 0$ ve $f + g$ ile f aynı sayıda sıfıra sahiptir.

💡 Nasıl kullanılır?

Bir denklemin belirli bir bölgedeki kök sayısını bulmak için, ifadeyi **baskın terim** f ve **küçük terim** g olarak ikiye ayırın. Sınırdaki $|f| > |g|$ gösterebilerseniz, kök sayısı f 'nin — genellikle cz^n gibi apaçık — sıfır sayısına eşittir.

44.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 44.2 (Birim Çember İçindeki Kökler). $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ denkleminin $|z| = 1$ çemberi içinde kaç kökü olduğunu bulunuz.

Çözüm.

Baskın terimi ayıralım:

$$f(z) = -4z^3, \quad g(z) = z^7 + z - 1$$

$|z| = 1$ üzerinde

$$|f(z)| = 4|z|^3 = 4, \quad |g(z)| \leq |z|^7 + |z| + 1 = 3$$

Rouché teoreminin koşulu sağlanıyor. $f(z) = -4z^3$ fonksiyonunun birim çember içinde katlılığıyla birlikte **üç** sıfırı vardır ($z = 0$, üç katlı); dolayısıyla $f + g$ toplamının da üç sıfırı vardır. Yani verilen denklemin birim disk içinde üç kökü bulunur.

Örnek 44.3 (Cebirin Temel Teoreminin İkinci İspatı). $n \geq 1$ dereceli her

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

polinomunun, katlılıklar dahil **tam olarak n** sıfırı olduğunu Rouché teoremiyle gösteriniz.

Çözüm.

$$f(z) = a_n z^n, \quad g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$$

alalım. $|z| = R$ çemberi üzerinde ($R > 1$):

$$|f(z)| = |a_n| R^n$$

$$|g(z)| \leq |a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_{n-1}| R^{n-1} \leq (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) R^{n-1}$$

(son adımda $R > 1$ olduğundan tüm kuvvetler R^{n-1} ile üstten sınırlandı). O hâlde

$$R > \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \quad (9)$$

koşulunu sağlayan bir R seçilirse

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| R} < 1$$

yani $|f(z)| > |g(z)|$ olur. Rouché teoremi gereği $P = f + g$, $|z| = R$ çemberi içinde $f(z) = a_n z^n$ ile aynı sayıda — yani **n tane** — sıfıra sahiptir. R istenildiği kadar büyük seçilebildiğinden bunlar P 'nin tüm sıfırlarıdır. ■

i İki ispatın farkı

Liouville teoremiyle verdiğimiz ispat yalnızca **en az bir** sıfırın varlığını garanti ediyordu; kalan kökler, ardışık bölmelerle elde ediliyordu. Rouché teoremi ise kökleri **sayarak** n tanesinin varlığını tek hamlede verir — dolanma sayısının gücü budur.

44.5 Alıştırma

Alıştırma 44.1 (Rouché Alıştırmaları).

- $z^4 + 3z + 1 = 0$ denkleminin $|z| < 2$ diskinde kaç kökü olduğunu bulunuz.
- $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ denkleminin $1 \leq |z| \leq 2$ halkasında kaç kökü olduğunu belirleyiniz.
- $ze^{\lambda-z} = 1$ ($\lambda > 1$) denkleminin birim disk içinde tam bir kökü olduğunu ve bu kökün reel olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Polinomu, çember üzerinde baskın olan terim ile geri kalanına ayıralım:

$$f(z) = z^4, \quad g(z) = 3z + 1$$

$|z| = 2$ üzerinde büyüklükleri karşılaştıralım:

$$|f(z)| = |z|^4 = 16, \quad |g(z)| \leq 3|z| + 1 = 7$$

$|g| < |f|$ olduğundan Rouché teoremi, $f + g$ ile f 'nin $|z| < 2$ diskinde **aynı sayıda** sıfıra sahip olduğunu söyler. $f(z) = z^4$ 'ün orada $z = 0$ 'da dördüncü mertebeden bir sıfırı vardır, yani katlılıkla birlikte 4 sıfır. Sonuç:

$z^4 + 3z + 1 = 0$ denkleminin $|z| < 2$ diskinde 4 kökü vardır.

(Dereceden dolayı toplam kök sayısı da 4'tür; demek ki bütün kökler bu diskin içindedir.)

b) Halkadaki kök sayısını, iki çemberdeki sayıların farkı olarak buluruz.

$|z| = 1$ **üzerinde** baskın terim $-6z^2$ 'dir:

$$|-6z^2| = 6, \quad |2z^5 + z + 1| \leq 2 + 1 + 1 = 4 < 6$$

Rouché teoremi, polinomun $|z| < 1$ diskinde $-6z^2$ ile aynı sayıda – yani 2 – sıfırı olduğunu verir.

$|z| = 2$ **üzerinde** baskın terim $2z^5$ 'tir:

$$|2z^5| = 2 \cdot 32 = 64, \quad |-6z^2 + z + 1| \leq 24 + 2 + 1 = 27 < 64$$

Bu kez $|z| < 2$ diskinde 5 sıfır bulunur.

Her iki çember üzerinde de eşitsizlikler **kesindir**; dolayısıyla polinomun bu çemberler üzerinde sıfırı yoktur ve halkadaki kök sayısı farktır:

$$5 - 2 = 3$$

$1 \leq |z| \leq 2$ kapalı halkasında 3 kök vardır.

c) Denklemi $ze^{\lambda-z} - 1 = 0$ biçiminde yazalım ve birim çember üzerinde

$$f(z) = ze^{\lambda-z}, \quad g(z) = -1$$

ayrışımını inceleyelim. $|z| = 1$ üzerinde $z = x + iy$ ile $x \leq 1$ olduğundan

$$|f(z)| = |z| |e^{\lambda-z}| = e^{\lambda-x} \geq e^{\lambda-1} > 1 = |g(z)|$$

çünkü $\lambda > 1$ 'dir. Rouché teoremi gereği $f + g$ ile f 'nin $|z| < 1$ diskindeki sıfır sayıları eşittir. $f(z) = ze^{\lambda-z}$ fonksiyonunun tek sıfırı $z = 0$ 'dır ve basittir ($e^{\lambda-z}$ hiçbir zaman sıfır olmaz). Demek ki denklemin birim disk içinde **tam bir** kökü vardır.

Bu kökün reel olduğunu görelim. Reel eksen üzerinde

$$h(x) = xe^{\lambda-x} - 1$$

sürekli bir fonksiyondur; uç değerleri

$$h(0) = -1 < 0, \quad h(1) = e^{\lambda-1} - 1 > 0 \quad (\lambda > 1)$$

Ara değer teoremi, $(0, 1)$ aralığında bir x_0 kökü verir. Bu x_0 birim diskin içindedir; diskteki kök tek olduğuna göre aranan kök tam olarak x_0 'dır ve reeldir.

■

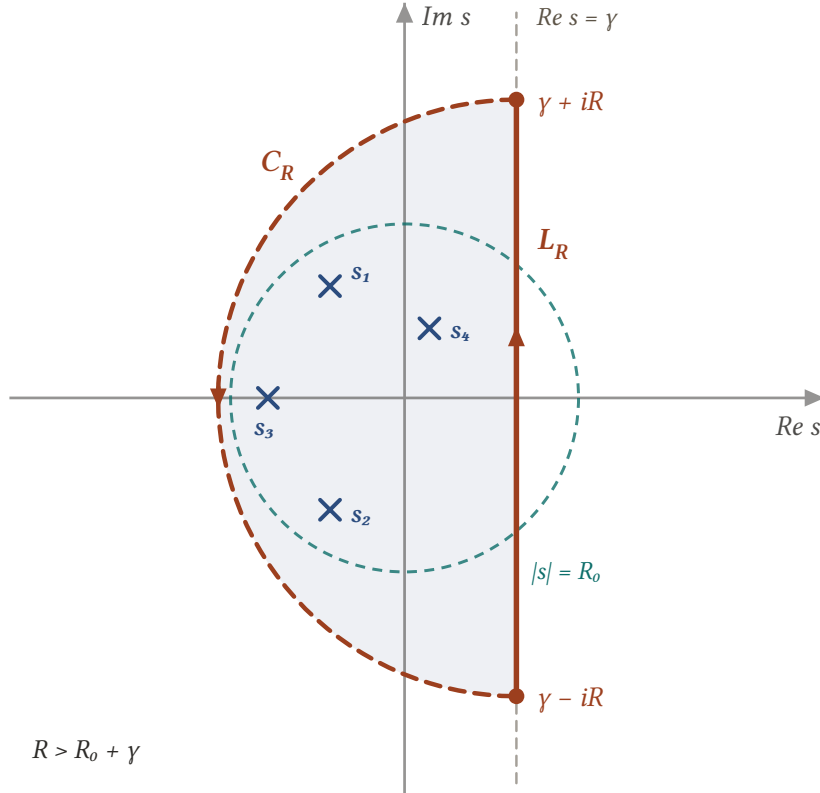
Son bölümde rezidülerin uygulamalı matematikteki en yaygın kullanımına geliyoruz: diferansiyel denklemlerin çözümlerini geri getiren **ters Laplace dönüşümü**.

45. Ters Laplace Dönüşümü

Rezidü kuramının uygulamalı matematikteki en yaygın kullanımı budur: bir diferansiyel denklemi Laplace dönüşümüyle cebirsel denkleme çevirdikten sonra, çözümü **geri getirmek**. Bu bölümde ters dönüşümün integral formülünü kurup rezidü toplamına indirgeyeceğiz.

45.1 Bromwich İntegrali

$F(s)$, kompleks s değişkeninin bir fonksiyonu olsun ve sonlu s düzleminde, sonlu sayıda ayırık tekil nokta hariç analitik olsun. L_R , $s = \gamma - iR$ noktasından $s = \gamma + iR$ noktasına uzanan dikey doğru parçası olsun; burada γ pozitif bir sabit ve R , F 'nin tüm tekil noktaları bu doğrunun **solunda** kalacak kadar büyüktür.



Şekil 45.1: Bromwich yolu L_R , $\text{Re } s = \gamma$ dikey doğrusu üzerinde $\gamma - iR$ 'den $\gamma + iR$ 'ye gider. Yol, merkezi γ olan ve **sağa** açılan C_R yarı çemberiyle ($s = \gamma + R e^{i\theta}$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$) kapatılır. Tüm tekil noktalar $|s| \leq R_0$ diskindedir; $R > R_0 + \gamma$ alınınca hepsi yarı dairesel bölgenin içinde kalır.

Tanım 45.1 (Ters Laplace Dönüşümü). Reel değişken t 'nin pozitif değerleri için

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} e^{st} F(s) ds \quad (t > 0) \quad (1)$$

Limit var olduğunda bu ifade genellikle

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (t > 0) \quad (2)$$

biçiminde yazılır ve böyle bir integrale **Bromwich integrali** denir.

Oldukça genel koşullar altında $f(t)$, $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümüdür: F ,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (3)$$

ile tanımlı Laplace dönüşümüyseniz, f tam olarak (2) ile geri elde edilir. γ 'nın seçimi — tüm tekil noktalar solda kaldığı sürece — sonucu etkilemez.

45.2 Rezidü Toplamına İndirgeme

Teorem 45.1 (Sonlu Sayıda Tekil Nokta Hali). $F(s)$ 'nin tekil noktaları s_n ($n = 1, 2, \dots, N$) olsun; C_R , $s = \gamma + Re^{i\theta}$ ($\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$) yarım çemberi olmak üzere, C_R üzerinde $|F(s)| \leq M_R$ olacak biçimde, $R \rightarrow \infty$ iken sıfıra giden bir M_R bulunsun. O zaman

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \text{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] \quad (t > 0) \quad (4)$$

İspat.

R_0 , tekil noktaların modüllerinin en büyüğü olsun ve

$$s = \gamma + Re^{i\theta} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \quad (5)$$

parametrizasyonu ile C_R yarım çemberini alalım ($R > R_0 + \gamma$). Her s_n için

$$|s_n - \gamma| \leq |s_n| + \gamma \leq R_0 + \gamma < R$$

olduğundan tüm tekil noktalar, L_R ile C_R tarafından sınırlanan yarım dairesel bölgenin içindedir. **Cauchy rezidü teoremi:**

$$\int_{L_R} e^{st} F(s) ds = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] - \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \quad (6)$$

Yay integrali. (5) parametrizasyonu ile

$$\int_{C_R} e^{st} F(s) ds = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \exp(\gamma t + Rte^{i\theta}) F(\gamma + Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

$|\exp(\gamma t + Rte^{i\theta})| = e^{\gamma t} e^{Rt \cos \theta}$ ve $|F| \leq M_R$ olduğundan

$$\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| \leq e^{\gamma t} M_R R \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta \quad (7)$$

$\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$ değişimiyle $\cos \theta = -\sin \phi$ olur ve **Jordan eşitsizliği** devreye girer:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta = \int_0^\pi e^{-Rt \sin \phi} d\phi < \frac{\pi}{Rt}$$

(7) eşitsizliği böylece

$$\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| < \frac{e^{\gamma t} M_R \pi}{t} \quad (8)$$

hâline gelir ve $M_R \rightarrow 0$ olduğundan $R \rightarrow \infty$ iken yay integrali sıfıra gider. (6)'da limit alınıp $2\pi i$ 'ye bölünürse (4) elde edilir.

■

Isı iletimi ve mekanik titreşim problemlerinde $F(s)$, bir $\text{Re } s = \gamma$ doğrusunun solunda kalan **sonsuz** çoklukta ayrık tekil noktaya sahip olabilir. Bu durumda (4) toplamı bir seriye genişler:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] \quad (t > 0) \quad (9)$$

Bu genişlemenin gerekçesi, dikey doğru parçalarının L_N ve yayların C_N ile değiştirilip $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} e^{st} F(s) ds = 0$ gösterilmesidir; kanıtı çoğu zaman zahmetlidir ve burada kabul edilecektir.

45.3 Rezidü Hesabında Kısayollar

$F(s)$ 'nin s_0 'da m -inci mertebeden bir kutbu ve esas kısmı

$$\frac{b_1}{s - s_0} + \frac{b_2}{(s - s_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(s - s_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

ise, doğrudan hesapla şu formül elde edilir:

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = e^{s_0 t} \left[b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \dots + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right] \quad (10)$$

$s_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) ve F , analitik olduğu noktalarda $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ **yansıma özelliğini** sağlıyorsa, eşlenik $\bar{s}_0$ da m -inci mertebeden bir kutuptur ve reel t için iki rezidü birlikte hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} & \text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \text{Rez}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F(s)] \\ &= 2e^{\alpha t} \text{Re} \left\{ e^{i\beta t} \left[b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \dots + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

s_0 **basit kutup** ise ($m = 1$) bunlar sadeleşir:

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = e^{s_0 t} \text{Rez}_{s=s_0} F(s) \quad (12)$$

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \text{Rez}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F(s)] = 2e^{\alpha t} \text{Re} [e^{i\beta t} \text{Rez}_{s=s_0} F(s)] \quad (13)$$

45.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 45.1 (İkinci Mertebeden Kutup Çifti).

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \quad (a > 0)$$

fonksiyonuna karşılık gelen $f(t)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Tekil noktalar $s_0 = ai$ ve $\bar{s}_0 = -ai$ 'dir.

$$F(s) = \frac{\varphi(s)}{(s - ai)^2}, \quad \varphi(s) = \frac{s}{(s + ai)^2}$$

yazıldığında φ , $s_0 = ai$ 'de analitik ve sıfırdan farklıdır: kutup **ikinci mertebededir**. F , analitik olduğu noktalarda $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ sağladığından $\bar{s}_0$ da ikinci mertebeden kutuptur ve (11) formülü kullanılabilir.

Esas kısmın katsayıları b_1, b_2 , φ 'nin s_0 civarındaki **Taylor serisinin** ilk iki teriminden okunur:

$$F(s) = \frac{1}{(s - ai)^2} \left[\varphi(ai) + \frac{\varphi'(ai)}{1!}(s - ai) + \dots \right] = \frac{\varphi(ai)}{(s - ai)^2} + \frac{\varphi'(ai)}{s - ai} + \dots$$

Hesaplayalım:

$$\varphi(ai) = \frac{ai}{(2ai)^2} = \frac{ai}{-4a^2} = -\frac{i}{4a}$$

$$\varphi'(s) = \frac{(s + ai)^2 - s \cdot 2(s + ai)}{(s + ai)^4} = \frac{ai - s}{(s + ai)^3} \Rightarrow \varphi'(ai) = 0$$

Yani $b_1 = 0$ ve $b_2 = -\frac{i}{4a}$. (11) formülü ($\alpha = 0, \beta = a$):

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F] + \text{Rez}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F] = 2 \text{Re} \left[e^{iat} \left(-\frac{i}{4a} t \right) \right] = \frac{t}{2a} \sin at$$

Sınırlılık koşulu. (4) formülünü uygulayabilmek için F 'nin C_R üzerinde uygun biçimde sınırlı olduğunu görelim. $s = \gamma + Re^{i\theta}$ için

$$|s| \leq \gamma + R, \quad |s| \geq |R - \gamma| = R - \gamma > a$$

ve dolayısıyla $|s^2 + a^2| \geq ||s|^2 - a^2| \geq (R - \gamma)^2 - a^2 > 0$. Böylece

$$|F(s)| \leq M_R, \quad M_R = \frac{\gamma + R}{[(R - \gamma)^2 - a^2]^2}$$

$R \rightarrow \infty$ iken $M_R \rightarrow 0$ 'dır; koşul sağlanır ve

$$f(t) = \frac{1}{2a} t \sin at \quad (t > 0)$$

■

Örnek 45.2 (Sonsuz Çoklukta Kutup).

$$F(s) = \frac{\tanh s}{s^2} = \frac{\sinh s}{s^2 \cosh s}$$

fonksiyonuna karşılık gelen $f(t)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Tekil noktalar $s = 0$ ile $\cosh s$ 'nin sıfırlarıdır:

$$s_0 = 0, \quad s_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} i, \quad \bar{s}_n = -\frac{(2n-1)\pi}{2} i \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$s_0 = 0$ 'daki rezidü. Maclaurin serilerinin bölümü

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\sinh s}{\cosh s} = \frac{1}{s^2} \left(s - \frac{s^3}{3} + \dots \right) = \frac{1}{s} - \frac{s}{3} + \dots \quad \left(0 < |s| < \frac{\pi}{2} \right)$$

orijinin **basit kutup** olduğunu ve rezidünün 1 olduğunu gösterir. (12) formülüyle

$$\text{Rez}_{s=0} [e^{st} F(s)] = e^0 \cdot 1 = 1$$

s_n 'deki rezidüler. $p(s) = \sinh s, q(s) = s^2 \cosh s$ ile **p/q' formülünü** uygulayalım. Önce

$$\sinh s_n = \sinh \left[i \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = i \sin \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = -i \cos n\pi = (-1)^{n+1} i \neq 0$$

$q(s_n) = 0$ ve $q'(s_n) = s_n^2 \sinh s_n \neq 0$ olduğundan basit kutuptur ve

$$\operatorname{Rez}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{1}{s_n^2} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$\overline{\sinh s} = \sinh \bar{s}$ ve $\overline{\cosh s} = \cosh \bar{s}$ özdeşlikleri $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ yansımasını garanti eder; (13) formülü ($\alpha = 0, \beta = \frac{(2n-1)\pi}{2}$) eşlenik çifti birleştirir:

$$\begin{aligned} \operatorname{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F] + \operatorname{Rez}_{s=\bar{s}_n} [e^{st} F] &= 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \exp \left[i \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right] \right\} \\ &= -\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} \end{aligned}$$

Sonuç. (9) serisinde toplanırsa

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} \quad (t > 0)$$

■

Örnek 45.3 (Isı Denkleminin Gelen Dönüşümü).

$$F(s) = \frac{\sinh(x s^{1/2})}{s \sinh(s^{1/2})} \quad (0 < x < 1)$$

fonksiyonuna karşılık gelen $f(t)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

$s^{1/2}$, iki değerli fonksiyonun herhangi bir dalıdır; pay ve paydada **aynı dal** kullanılır. Seri açılımıyla

$$F(s) = \frac{x s^{1/2} + \frac{(x s^{1/2})^3}{3!} + \dots}{s \left[s^{1/2} + \frac{(s^{1/2})^3}{3!} + \dots \right]} = \frac{x + \frac{x^3 s}{6} + \dots}{s + \frac{s^2}{6} + \dots} \quad (14)$$

Bu ifade, $s = 0$ 'ın bir tekil nokta olduğunu ve — kuvvet serilerinin bölümü olarak — **basit kutup** olup rezidüsünün x olduğunu gösterir. Dal kesimi negatif reel ekseninde bulunmayacak biçimde seçilirse (böylece $\sinh(s^{1/2})$ o eksen boyunca iyi tanımlıdır), diğer tekil noktalar $s^{1/2} = \pm n\pi i$ koşulundan doğar:

$$s_n = -n^2 \pi^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(12) formülüyle $s_0 = 0$ için

$$\operatorname{Rez}_{s=0} [e^{st} F(s)] = x$$

s_n 'deki rezidüler. $p(s) = \sinh(x s^{1/2})$ ve $q(s) = s \sinh(s^{1/2})$ alalım. $s_n^{1/2} = n\pi i$ olduğundan

$$p(s_n) = \sinh(in\pi x) = i \sin n\pi x, \quad q(s_n) = 0, \quad q'(s_n) = \frac{1}{2} s_n^{1/2} \cosh(s_n^{1/2}) \neq 0$$

$\sin n\pi x \neq 0$ olan her n için s_n basit kutuptur ve

$$\operatorname{Rez}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x$$

($n x$ tam sayı olduğunda $p(s_n) = 0$ olur ve s_n kaldırılabilir bir tekilliğe dönüşür; formül bu durumda da doğru değer, yani sıfırı verdiğinden aşağıdaki seri her x için geçerlidir.)

(12) ile

$$\text{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

Sonuç. (9) serisiyle

$$f(t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \quad (t > 0)$$

Bu fonksiyon, uçları sabit sıcaklıkta tutulan bir çubuktaki ısı dağılımının klasik çözümüdür: t büyüdükçe üstel terimler sönür ve dağılım, doğrusal denge profili x 'e yaklaşır.

■

45.5 Alıştırma

Alıştırma 45.1 (Ters Laplace Alıştırmaları). Aşağıdaki dönüşümlerin terslerini rezidü yöntemiyle bulunuz.

- a) $F(s) = \frac{1}{s-a}$ (a reel)
- b) $F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ ($a > 0$)
- c) $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$
- d) $F(s) = \frac{2s^3}{s^4-4}$

Çözüm.

Dördünde de F , paydası paydan yüksek dereceli bir rasyonel fonksiyondur; Bromwich integrali, sonlu sayıdaki kutupta $e^{st}F(s)$ 'nin rezidülerinin toplamına iner:

$$f(t) = \sum_k \text{Rez}_{s=s_k} [e^{st} F(s)]$$

a) Tek kutup $s = a$ ve basittir:

$$\text{Rez}_{s=a} \frac{e^{st}}{s-a} = e^{at}$$

Yani $f(t) = e^{at}$ – Laplace tablosunun ilk satırı.

b) Kutuplar $s = \pm ia$ 'dır ve basittir. $q(s) = s^2 + a^2$ için $q'(s) = 2s$ olduğundan p/q' formülü kullanılabilir:

$$\text{Rez}_{s=ia} \frac{s e^{st}}{s^2+a^2} = \frac{s e^{st}}{2s} \Big|_{s=ia} = \frac{e^{iat}}{2}, \quad \text{Rez}_{s=-ia} = \frac{e^{-iat}}{2}$$

Toplarsak Euler formülü devreye girer:

$$f(t) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} = \cos at$$

c) Kutuplar $s = 0$ ve $s = \pm i$ 'dir; üçü de basittir.

$$\text{Rez}_{s=0} \frac{e^{st}}{s(s^2+1)} = \frac{e^{st}}{s^2+1} \Big|_{s=0} = 1$$

$s^2 + 1 = (s-i)(s+i)$ yazarak:

$$\text{Rez}_{s=i} = \frac{e^{st}}{s(s+i)} \Big|_{s=i} = \frac{e^{it}}{i \cdot 2i} = -\frac{e^{it}}{2}$$

$$\text{Rez}_{s=-i} = \frac{e^{st}}{s(s-i)} \Big|_{s=-i} = \frac{e^{-it}}{(-i)(-2i)} = -\frac{e^{-it}}{2}$$

Toplam:

$$f(t) = 1 - \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = 1 - \cos t$$

d) Payda $s^4 = 4$ denkleminin dört kökünde sıfırlanır:

$$s = \pm\sqrt{2}, \quad s = \pm i\sqrt{2}$$

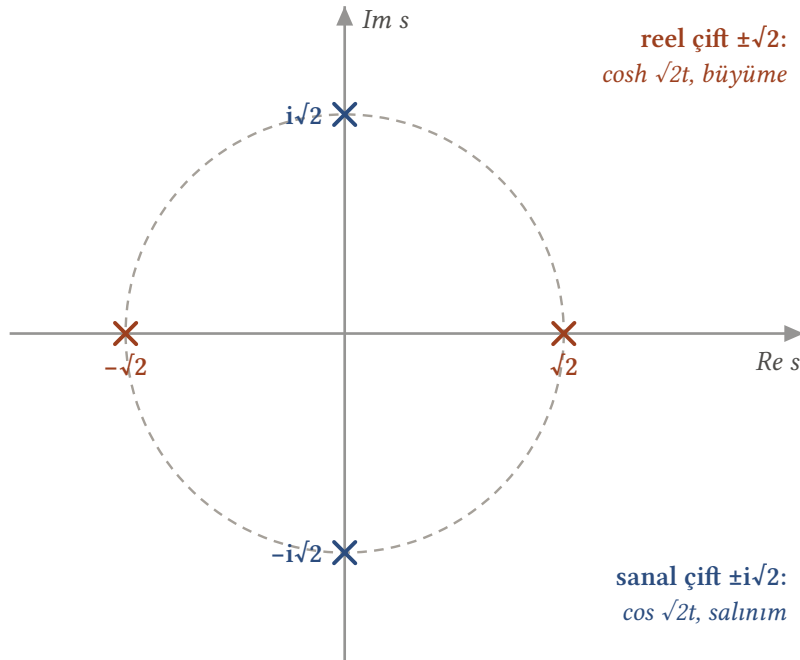
Hepsi basit kutuptur. $p(s) = 2s^3$ ve $q'(s) = 4s^3$ olduğundan rezidüler şaşırtıcı derecede sadedir:

$$\text{Rez}_{s=s_k} \frac{2s^3 e^{st}}{s^4 - 4} = \frac{2s_k^3 e^{s_k t}}{4s_k^3} = \frac{e^{s_k t}}{2}$$

Dört rezidüyü toplayalım:

$$f(t) = \frac{e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}}{2} + \frac{e^{i\sqrt{2}t} + e^{-i\sqrt{2}t}}{2} = \cosh(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{2}t)$$

Reel eksendeki kutup çifti hiperbolik, sanal eksendeki kutup çifti trigonometrik terimi doğurdu: kutupların konumu çözümün büyüme mi salınım mı yapacağını doğrudan söyler.



Şekil 45.2: $s^4 = 4$ denkleminin dört kökü $|s| = \sqrt{2}$ çemberi üzerindedir. Reel eksendeki çift $e^{\pm\sqrt{2}t}$ üstellerini, yani hiperbolik (büyüyen) terimi; sanal eksendeki çift $e^{\pm i\sqrt{2}t}$ üstellerini, yani trigonometrik (salınan) terimi doğurur. Kutbun reel kısmı büyüme hızını, sanal kısmı salınım frekansını verir.

■

Kompleks Analiz notlarının ikinci bölümü burada tamamlanıyor. Cauchy kuramından başlayıp serilerden rezidüleri uzanan bu yol, kompleks analizin ana gövdesini oluşturur; bundan sonrası — konform tasvirler, akışkan akımları, analitik uzanımın derinlikleri — aynı temeller üzerine kurulur.