

Lineer Cebir

Lineer Cebir 1: Yapılar, Matrisler ve Vektör Uzayları

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

Giriş	7
1 Tek İşlemlili Cebirsel Yapılar	8
1.1 İkili İşlem ve Cebirsel Yapı	8
1.2 İşlemin İki Temel Özelliği	8
1.3 Birim Eleman ve Ters Eleman	8
1.4 Çözümlü Örnekler	9
1.5 Yarı Grup, Monoid ve Grup	10
1.6 Tanıdık Kümeler Hangi Sınıfa Girer?	11
1.7 Alıştırma	12
2 Halkalar ve Cisimler	14
2.1 Halka	14
2.2 Cisim	15
2.3 Sıfır Bölenler ve Tamlık Bölgesi	15
2.4 Kompleks Sayılar Bir Cisimdir	15
2.5 Sıfır Bölenli Bir Halka	17
2.6 Alıştırma	18
3 Matrisler ve İşlemleri	20
3.1 Matris Nedir?	20
3.2 Toplama ve Skalerle Çarpma	20
3.3 Matris Çarpımı	22
3.4 Birim Matris	23
3.5 Transpoze	23
3.6 Alt Matris	24
3.7 Alıştırma	24
4 Merdiven Matrisler ve Satır Eşdeğerlik	26
4.1 Merdiven Matrisler	26
4.2 Elemanter Satır İşlemleri	26
4.3 Her Matris Bir Merdivene İnegelir	27
4.4 Satır Kanonik Şekil	28
4.5 Alıştırma	29
5 Kare Matrisler ve Ters Matris	32
5.1 Kare Matrisler ve Esas Köşegen	32
5.2 Ters Matris	33

5.3	Matrisin Kuvvetleri	34
5.4	Alıştırma	34
6	Elemanter Matrisler ve Ters Hesabı	36
6.1	Elemanter Satır Matrisleri	36
6.2	Satır İşlemi Bir Çarpımdır	36
6.3	Satır Eşdeğerliğin Cebirsel Karşılığı	37
6.4	Regülerliğin Ölçütü	38
6.5	Blok Matrisler	38
6.6	Tersin Hesaplanması	39
6.7	Alıştırma	40
7	Lineer Denklemler ve Sistemleri	43
7.1	Lineer Denklem	43
7.2	Lineer Denklem Sistemleri	44
7.3	Katsayılar Matrisi ve Genişletilmiş Matris	44
7.4	Çözüm Kümesinin Yapısı	45
7.5	Alıştırma	46
8	Eşdeğer Sistemler ve Merdiven Şekli	48
8.1	Denklemlerin Lineer Birleşimleri	48
8.2	Yok Etme Adımı Çözüm Kümesini Değiştirmez	48
8.3	Merdiven Şekli	49
8.4	Çözümün Varlığı ve Tekliği	50
8.5	Homojen Sistemler	50
8.6	Alıştırma	51
9	Gauss Yok Etme Yöntemi	53
9.1	Yöntemin Adımları	53
9.2	Çözümsüz Bir Sistem	53
9.3	Tek Çözümlü Bir Sistem	54
9.4	İki Homojen Sistem	54
9.5	İki Serbest Değişkenli Sistemler	55
9.6	Alıştırma	57
10	Parametrelili Sistemlerin Tartışması	60
10.1	Kritik Değer Nereden Çıkar?	60
10.2	Tek Parametrelili Bir Sistem	60
10.3	İki Parametrelili Bir Sistem	61
10.4	Alıştırma	62
11	Vektör Uzayları	65
11.1	Tanım ve Aksiyomlar	65
11.2	Sıfır Vektörle İlgili Kurallar	65

11.3	Temel Örnekler	66
11.4	Vektör Uzayı Olmayan Yapılar	67
11.5	Alıştırma	68
12	Alt Uzaylar	69
12.1	Tanım ve Ölçüt	69
12.2	Örnekler	70
12.3	Alt Uzay Olmayan Kümeler	70
12.4	Alıştırma	72
13	Toplamlar ve Direkt Toplam	73
13.1	Alt Uzayların Toplamı	73
13.2	Direkt Toplam	73
13.3	Çözümlü Örnekler	74
13.4	Alıştırma	75
14	Lineer Kombinasyonlar ve Doğuran Kümeler	77
14.1	Lineer Kombinasyon	77
14.2	Standart Doğuran Küme	78
14.3	Bir Vektör Lineer Kombinasyon mudur?	78
14.4	Alıştırma	79
15	Satır Uzayı ve Sütun Uzayı	82
15.1	Tanım	82
15.2	Satır İşlemleri Satır Uzayını Korur	82
15.3	Çözümlü Örnekler	83
15.4	Alıştırma	84
16	Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık	86
16.1	Tanım	86
16.2	Çözümlü Örnekler	86
16.3	Bağımlılığın Anlamı	87
16.4	Merdiven Matrisin Satırları	88
16.5	Beş Uyarı	89
16.6	Alıştırma	89
17	Taban ve Boyut	91
17.1	Taban ve Boyut	91
17.2	Doğuran Kümeyi Sadeleştirmek	92
17.3	Değiştirme Teoremi	93
17.4	Boyut İyi Tanımlıdır	93
17.5	Alıştırma	94
18	Boyut Teoremleri	96
18.1	Maksimal Bağımsız Alt Küme	96

18.2	Boyutun Üç Sonucu	97
18.3	Boyut Formülü	98
18.4	Çözümlü Örnekler	99
18.5	Alıştırma	101
19	Rank ve Denklem Sistemleri	103
19.1	Rank	103
19.2	Denklem Sistemlerine Uygulama	104
19.3	Homojen Sistemin Çözüm Uzaı	104
19.4	Alıştırma	106

Giriş

Lineer cebir, vektör uzayları ile bunlar arasındaki lineer dönüşümleri inceleyen, hemen her uygulamalı matematik dalının ortak dilini oluşturan temel derstir. Bu arşiv iki dönemlik bir müfredatı kapsar: birinci dönem cebirsel yapılardan başlayıp matrisler ve denklem sistemleri üzerinden vektör uzaylarına ulaşır, ikinci dönem ise bu uzaylar arasındaki lineer dönüşümleri, onların matrislerle temsilini, determinantları ve özdeğer kuramını konu alır.

Not

Aşağıdaki müfredatta yer alan tüm başlıkların notları hazırdır; bu notlara bağlantılardan ulaşabilirsiniz.

1. Tek İşlemlili Cebirsel Yapılar

Lineer cebir vektörleri toplayıp skalerle çarparak iş görür. Ama “toplama” ve “çarpma” sözcüklerinin ne anlama geldiği, üzerinde çalışılan kümeye göre değişir. Bu yüzden derse işlemin kendisini soyut olarak tanımlayarak başlıyoruz: bir kümede tanımlı bir işlem hangi kuralları sağlarsa o kümeye ne ad verilir? Buradaki sınıflandırma – yarı grup, monoid, grup – ilerideki bütün yapıların iskeletidir.

1.1 İkili İşlem ve Cebirsel Yapı

Tanım 1.1 (İkili İşlem). $M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $M \times M$ kümesini M içine resmeden bir

$$\circ : M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto c \in M$$

fonksiyonu varsa, M 'de bir **ikili işlem** tanımlanmıştır denir. $\circ ((a, b)) = c$ yazımı yerine kısaca

$$a \circ b = c$$

gösterimi kullanılır.

Tanımın gizli ama en önemli parçası, sonucun yine M 'de olmasıdır: bir işlemin ikili işlem sayılabilmesi için kümenin o işleme göre **kapalı** olması gerekir.

Tanım 1.2 (Cebirsel Yapı). İçinde en az bir ikili işlem tanımlanmış, boş olmayan bir kümeye bir **cebirsal yapı** denir. M kümesinde $\circ$ gibi bir ikili işlem tanımlıysa bu cebirsel yapı $\langle M, \circ \rangle$ ile gösterilir.

1.2 İşlemin İki Temel Özelliği

Tanım 1.3 (Birleşme Özelliği). $M \neq \emptyset$ kümesinde tanımlı bir $\circ$ ikili işlemi

$$\forall a, b, c \in M \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

koşulunu sağlıyorsa $\circ$ işlemine M 'de **asosyatif** (birleşmeli) bir işlem denir.

Tanım 1.4 (Değişme Özelliği). $M \neq \emptyset$ kümesinde tanımlı bir $\circ$ ikili işlemi

$$\forall a, b \in M \quad a \circ b = b \circ a$$

koşulunu sağlıyorsa $\circ$ işlemine M 'de **komutatif** (değişmeli) bir işlem denir.

1.3 Birim Eleman ve Ters Eleman

Tanım 1.5 (Birim Eleman). $\langle M, \circ \rangle$ bir cebirsel yapı olsun. Eğer

$$\exists e \in M \text{ öyle ki } \forall a \in M \quad e \circ a = a \circ e = a$$

oluyorsa e 'ye $\langle M, \circ \rangle$ cebirsel yapısının bir **birim elemanı** denir.

Teorem 1.1 (Birim Elemanın Tekliği). Bir $\langle M, \circ \rangle$ cebirsel yapısının birim elemanı varsa tektir.

İspat.

e ve e' gibi iki birim elemanın bulunduğunu varsayalım. e birim eleman ve $e' \in M$ olduğundan

$$e \circ e' = e' \circ e = e'$$

e' birim eleman ve $e \in M$ olduğundan da

$$e \circ e' = e' \circ e = e$$

İki eşitliğin sol tarafları aynı olduğuna göre $e = e'$ bulunur.

■

Tanım 1.6 (Ters Eleman). $\langle M, \circ \rangle$ cebirsel yapısında bir e birim elemanı var olsun. Bir $a \in M$ için

$$a^* \circ a = a \circ a^* = e$$

olacak biçimde bir $a^* \in M$ varsa, a^* elemanına a 'nın $\langle M, \circ \rangle$ 'deki bir **tersi** denir.

Teorem 1.2 (Ters Elemanın Tekliği). $M \neq \emptyset$ kümesinde asosyatif bir $\circ$ ikili işlemi tanımlıysa, herhangi bir $a \in M$ 'nin en çok bir tersi vardır: tersi varsa tektir.

İspat.

a 'nın a^* ve a^{**} gibi iki tersinin bulunduğunu varsayalım; e birim eleman olmak üzere

$$a^* \circ a = a \circ a^* = e, \quad a^{**} \circ a = a \circ a^{**} = e$$

Birinci eşitlikteki $a \circ a^* = e$ ifadesini soldan a^{**} ile birleştirelim:

$$a^{**} \circ (a \circ a^*) = a^{**} \circ e = a^{**}$$

İkinci eşitlikteki $a^{**} \circ a = e$ ifadesini de sağdan a^* ile birleştirelim:

$$(a^{**} \circ a) \circ a^* = e \circ a^* = a^*$$

$\circ$ asosyatif olduğundan bu iki ifadenin sol tarafları eşittir; dolayısıyla $a^* = a^{**}$ 'dir.

■

İ Asosyatiflik neden şart?

Birim elemanın tekliği hiçbir ek koşul istemiyordu; ters elemanın tekliği ise asosyatifliğe dayanıyor. İspattaki tek hamle $a^{**} \circ (a \circ a^*)$ ile $(a^{**} \circ a) \circ a^*$ ifadelerini eşitlemek — parantezleri kaydırma hakkı elimizden alınırsa bir elemanın birden çok tersi olabilir.

1.4 Çözümlü Örnekler

Örnek 1.1 (Birim Elemanı Olmayan Bir Yapı). $\mathbb{Q}$ kümesinde $a \circ b = ab + 1$ biçiminde bir işlem tanımlanıyor.

- $\circ$ işlemi asosyatif midir?
- $\circ$ işlemi komutatif midir?
- $\langle \mathbb{Q}, \circ \rangle$ yapısının birim elemanı var mıdır?

Çözüm.

a) $a, b, c \in \mathbb{Q}$ olmak üzere iki tarafı ayrı ayrı açalım:

$$(a \circ b) \circ c = (ab + 1) \circ c = (ab + 1)c + 1 = abc + c + 1$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (bc + 1) = a(bc + 1) + 1 = abc + a + 1$$

$c \neq a$ olduğu her durumda $abc + c + 1 \neq abc + a + 1$ 'dir; örneğin $a = 1, b = 1, c = 2$ için sol taraf 5, sağ taraf 4 çıkar. Demek ki işlem asosyatif **değildir**.

b) $\mathbb{Q}$ 'da çarpma komutatif olduğundan her a, b için

$$a \circ b = ab + 1 = ba + 1 = b \circ a$$

olur; işlem komutatifdir.

c) Her $a \in \mathbb{Q}$ için $e \circ a = a$ olacak sabit bir e arıyoruz:

$$e \circ a = ea + 1 = a \implies e = \frac{a-1}{a} \quad (a \neq 0)$$

Bulunan değer a 'ya bağlı çıktı; oysa birim elemanın a 'dan bağımsız tek bir eleman olması gerekir. O hâlde $\langle \mathbb{Q}, \circ \rangle$ 'nin birim elemanı **yoktur**.

■

Örnek 1.2 (Birimi ve Tersleri Olan Bir Yapı). $\mathbb{Q}$ kümesinde $a \circ b = \frac{ab}{2}$ işlemi tanımlanıyor. İşlemin asosyatif ve komutatif olduğunu gösterip birim elemanı ile ters elemanları belirleyiniz.

Çözüm.

Asosyatiflik. Her $a, b, c \in \mathbb{Q}$ için

$$(a \circ b) \circ c = \frac{ab}{2} \circ c = \frac{abc}{4}, \quad a \circ (b \circ c) = a \circ \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4}$$

İki sonuç aynı olduğundan işlem asosyatiftir.

Komutatiflik. $a \circ b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b \circ a$ olduğundan işlem komutatifdir.

Birim eleman. Her a için $e \circ a = a$ isteniyor:

$$e \circ a = \frac{ea}{2} = a \implies e = 2$$

Bu değer a 'dan bağımsızdır ve $2 \in \mathbb{Q}$ 'dur; dolayısıyla birim eleman $e = 2$ 'dir.

Sıfırın tersi. $x \circ 0 = 2$ olacak bir $x \in \mathbb{Q}$ olsaydı

$$x \circ 0 = \frac{x \cdot 0}{2} = 0 = 2$$

çelişkisi doğardı. O hâlde 0'ın tersi yoktur.

Sıfırdan farklı elemanların tersi. $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ için

$$x \circ a = 2 \implies \frac{xa}{2} = 2 \implies x = \frac{4}{a} \in \mathbb{Q}$$

Demek ki her $a \neq 0$ rasyonel sayısının tersi $\frac{4}{a}$ 'dır.

■

1.5 Yarı Grup, Monoid ve Grup

Tek bir işlem taşıyan yapılar, işlemin sağladığı koşullara göre adlandırılır.

Tanım 1.7 (Tek İşlemli Yapı). İçinde bir tane ikili işlem tanımlanmış bir cebirsel yapıya **tek işlemli cebirsel yapı** denir.

Tanım 1.8 (Yarı Grup). İçinde asosyatif bir ikili işlem tanımlanmış tek işlemli cebirsel yapıya bir **yarı grup** denir. Yarı gruptaki işlem komutatif ise yapıya **komutatif (abelyen) yarı grup** adı verilir.

Bir $M \neq \emptyset$ kümesinin yarı grup olması, **yarı grup aksiyomları** denen iki koşulu sağlamasıyla aynı şeydir:

I. $\forall a, b \in M$ için $a \circ b \in M$ (kapalılık aksiyomu)

II. $\forall a, b, c \in M$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (asosiyatiflik aksiyomu)

Komutatif yarı grup için bunlara

III. $\forall a, b \in M$ için $a \circ b = b \circ a$ (komutatiflik aksiyomu)

eklenir.

Tanım 1.9 (Monoid). Birimli, yani birim elemanı olan bir yarı gruba **monoid** denir. Monoiddeki işlem komutatif ise yapıya **komutatif (abelyen) monoid** denir.

Tanım 1.10 (Grup). Bir $G \neq \emptyset$ kümesinde tanımlanmış bir $\circ$ ikili işlemi aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa $\langle G, \circ \rangle$ tek işlemli cebirsel yapısına bir **grup** denir:

I. $\forall a, b \in G$ için $a \circ b \in G$

II. $\forall a, b, c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

III. $\exists e \in G$ öyle ki $\forall a \in G$ için $e \circ a = a \circ e = a$

IV. $\forall a \in G$ için $\exists a^* \in G$ öyle ki $a^* \circ a = a \circ a^* = e$

Gruptaki işlem komutatif ise $\langle G, \circ \rangle$ 'ye **komutatif (abelyen) grup** denir.

🔗 Toplamsal ve çarpımsal gösterim

Bir $\langle G, \circ \rangle$ grubundaki işlem “+” ile gösteriliyorsa gruba **toplamsal grup**, “.” ile gösteriliyorsa **çarpımsal grup** denir. Toplamsal yazımda birim elemana yapının **sıfırı**, a 'nın tersine $-a$; çarpımsal yazımda birim elemana **birim**, tersine a^{-1} denir. Değişken yalnızca gösterimdir, tanımlar aynı kalır.

1.6 Tanıdık Kümeler Hangi Sınıfa Girer?

Aşağıdaki liste, alışılmış sayı kümelerinin bilinen işlemlere göre yerini gösterir. Burada $\mathbb{Z}_6 = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ çift tam sayıları, $\mathbb{Z}_t = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$ tek tam sayıları göstermektedir.

Yapı	Sınıfı	Nedeni
$\langle \mathbb{N}, + \rangle$	komutatif yarı grup	birim elemanı yok
$\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$	komutatif monoid	birimi 1; 2'nin tersi yok
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	komutatif grup	sıfırı 0, tersi $-a$
$\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$	komutatif monoid	birimi 1; 2'nin tersi yok
$\langle \mathbb{Q}, + \rangle, \langle \mathbb{R}, + \rangle$	komutatif grup	sıfırı 0, tersi $-a$
$\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$	komutatif grup	birimi 1, tersi $1/a$
$\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$	komutatif grup	birimi 1, tersi $1/a$
$\langle \mathbb{R}^+, + \rangle, \langle \mathbb{R}^-, + \rangle$	komutatif yarı grup	sıfırı içermiyor
$\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$	komutatif grup	birimi 1, tersi $1/a$
$\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$	komutatif grup	sıfırı 0, tersi $-a$
$\langle \mathbb{Z}_6, \cdot \rangle$	komutatif yarı grup	birimi yok
$\langle \mathbb{Z}_t, \cdot \rangle$	komutatif monoid	yalnız ± 1 tersinir

Burada $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ alınmıştır; $\{0, 1, 2, \dots\}$ alınsaydı sıfır işe karışır ve toplamsal yapı monoide yükselirdi. $\mathbb{Z}_t$ toplamaya göre kapalı bile değildir: $1 + 3 = 4 \notin \mathbb{Z}_t$.

Örnek 1.3 (Sıralı Üçlülerden Bir Grup). $G = \{ (a, b, 2) : a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$ kümesinin

$$(a, b, 2) \circ (c, d, 2) = (ac, bd, 2)$$

işlemine göre komutatif bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$(1, 1, 2) \in G$ olduğundan $G \neq \emptyset$ 'dir. Dört grup aksiyomunu sırayla denetleyelim.

I. Kapalılık. $(a, b, 2), (c, d, 2) \in G$ olsun. Tanım gereği $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir. Sıfırdan farklı iki reel sayının çarpımı sıfırdan farklı olduğundan $ac \neq 0$ ve $bd \neq 0$; yani

$$(a, b, 2) \circ (c, d, 2) = (ac, bd, 2) \in G$$

II. Asosyatiflik. $\mathbb{R}$ 'de çarpmanın asosyatifliğinden

$$\begin{aligned} [(a, b, 2) \circ (c, d, 2)] \circ (e, f, 2) &= (ac, bd, 2) \circ (e, f, 2) = ((ac)e, (bd)f, 2) \\ &= (a(ce), b(df), 2) = (a, b, 2) \circ (ce, df, 2) = (a, b, 2) \circ [(c, d, 2) \circ (e, f, 2)] \end{aligned}$$

III. Birim eleman. Her $(a, b, 2) \in G$ için $(x, y, 2) \circ (a, b, 2) = (a, b, 2)$ olacak bir $(x, y, 2)$ arıyoruz:

$$(xa, yb, 2) = (a, b, 2) \implies xa = a, \quad yb = b$$

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğundan $x = 1, y = 1$ bulunur. Demek ki birim eleman $(1, 1, 2) \in G$ 'dir.

IV. Ters eleman. $(a, b, 2) \in G$ için $(a^*, b^*, 2) \circ (a, b, 2) = (1, 1, 2)$ isteniyor:

$$(a^*a, b^*b, 2) = (1, 1, 2) \implies a^*a = 1, \quad b^*b = 1$$

$a \neq 0, b \neq 0$ olduğundan $a^* = \frac{1}{a}, b^* = \frac{1}{b}$ ve ikisi de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dadır. Yani $(a, b, 2)$ 'nin tersi $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 2\right) \in G$ 'dir.

Komutatiflik. $\mathbb{R}$ 'de çarpmanın komutatifliğinden

$$(a, b, 2) \circ (c, d, 2) = (ac, bd, 2) = (ca, db, 2) = (c, d, 2) \circ (a, b, 2)$$

Dört aksiyom ve komutatiflik sağlandığından $\langle G, \circ \rangle$ komutatif bir gruptur.

■

1.7 Alıştırma

Alıştırma 1.1 (Tek İşlemli Yapılar).

- $\mathbb{Z}$ kümesinde $a \circ b = a + b - 3$ işlemi tanımlansın. $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ 'nin komutatif bir grup olduğunu gösterip birim elemanı ile a 'nın tersini bulunuz.
- $M = \mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots \right\}$ kümesinin $\mathbb{Q}$ 'daki çarpma işlemine göre kapalı olmadığını gösteriniz.
- $\langle \mathbb{Z}_t, \cdot \rangle$ yapısında tersi olan elemanları belirleyiniz.

Çözüm.

a) Dört aksiyomu sırayla denetleyelim.

Kapalılık: $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a + b - 3 \in \mathbb{Z}$ 'dir.

Asosyatiflik: İki tarafı da açalım:

$$(a \circ b) \circ c = (a + b - 3) \circ c = (a + b - 3) + c - 3 = a + b + c - 6$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - 3) = a + (b + c - 3) - 3 = a + b + c - 6$$

İki sonuç aynıdır.

Birim eleman: Her a için $e \circ a = a$ isteniyor:

$$e + a - 3 = a \implies e = 3$$

Bu değer a 'dan bağımsızdır ve $3 \in \mathbb{Z}$ 'dir; birim eleman $e = 3$ 'tür.

Ters eleman: $a^* \circ a = 3$ olacak a^* 'yı arayalım:

$$a^* + a - 3 = 3 \implies a^* = 6 - a \in \mathbb{Z}$$

Komutatiflik: $a \circ b = a + b - 3 = b + a - 3 = b \circ a$.

Dördü de sağlandığından $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ komutatif bir gruptur; birim elemanı 3, a 'nın tersi $6 - a$ 'dır.

b) Kapalılığın bozulması için tek bir karşı örnek yeterlidir. $2 \in \mathbb{Z} \subset M$ ve $\frac{1}{3} \in M$ 'dir; fakat

$$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

sayısı ne bir tam sayıdır ne de $\frac{1}{n}$ biçimindedir. O hâlde $\frac{2}{3} \notin M$ ve M çarpmaya göre kapalı değildir.

c) $\mathbb{Z}_t$ çarpmaya göre kapalıdır (tek $\times$ tek = tek), asosyatif ve komutatifdir; birimi 1'dir. Bir $a \in \mathbb{Z}_t$ elemanının tersi $x \in \mathbb{Z}_t$ ise $ax = 1$ olmalıdır. Bu denklem tam sayılarda ancak

$$a = 1, x = 1 \quad \text{veya} \quad a = -1, x = -1$$

durumlarında çözülebilir; çünkü $|a| \geq 3$ iken $|ax| = |a| |x| \geq 3 > 1$ olur. Demek ki $\langle \mathbb{Z}_t, \cdot \rangle$ 'de yalnızca 1 ve -1 tersinirdir ve her ikisi de kendi tersidir; yapı bir grup değil, komutatif bir monoiddir.

■

Tek işlem yeterince yapı taşıyor: vektörleri toplamak için bir gruba, skalerlerle çarpmak için ikinci bir işleme ihtiyacımız var. Sıradaki adım, iki işlemin aynı küme üzerinde nasıl uyum içinde çalıştığıdır: [halkalar ve cisimler](#).

2. Halkalar ve Cisimler

Bir kümede iki işlem birlikte tanımlandığında, ikisinin birbirinden bağımsız yaşamasını istemeyiz: çarpma toplamayı dağılım kuralıyla tanıyorsa yapı zenginleşir. Bu bölümde tanımlayacağımız halka ve cisim kavramları, tüm dersin zeminidir – çünkü bir vektör uzayı, daima **bir cisim üzerinde** kurulur.

2.1 Halka

Tanım 2.1 (İki İşlemlili Yapı). İçinde iki tane ikili işlem tanımlanmış bir cebirsel yapıya **iki işlemlili cebirsel yapı** denir.

Tanım 2.2 (Halka). İki işlemlili bir H cebirsel yapısı,

- “+” ile göstereceğimiz ve **toplama** adını vereceğimiz birinci işleme göre bir **komutatif grup**,
- “ $\cdot$ ” ile göstereceğimiz ve **çarpma** adını vereceğimiz (komutatif olması gerekmeyen) ikinci işleme göre bir **yarı grup**

ise ve bundan başka çarpma işlemi toplama işlemi üzerine iki yanlı dağılımlı ise, yani

$$\forall a, b, c \in H \quad a(b + c) = ab + ac \quad \text{ve} \quad (b + c)a = ba + ca$$

ise H 'ye bir **halka** denir ve bu halka $\langle H; +, \cdot \rangle$ ile gösterilir.

Tanımı aksiyom listesi olarak açtığımızda bir $H \neq \emptyset$ kümesinin halka olması sekiz koşula iner. İlk beşi $\langle H, + \rangle$ 'nin komutatif grup, sonraki ikisi $\langle H, \cdot \rangle$ 'nin yarı grup olduğunu, sonuncusu da iki işlemin uyumunu söyler.

I. $\forall a, b \in H$ için $a + b \in H$

II. $\forall a, b, c \in H$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$

III. $\forall a, b \in H$ için $a + b = b + a$

IV. $\exists 0_H \in H$ öyle ki $\forall a \in H$ için $0_H + a = a$

V. $\forall a \in H$ için $\exists (-a) \in H$ öyle ki $(-a) + a = 0_H$

VI. $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$

VII. $\forall a, b, c \in H$ için $(ab)c = a(bc)$

VIII. $\forall a, b, c \in H$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(b + c)a = ba + ca$

Tanım 2.3 (Halkanın Sıfırı ve Birimi). $\langle H; +, \cdot \rangle$ bir halka olsun. $\langle H, + \rangle$ komutatif grubunun birim elemanına H halkasının **sıfırı** denir ve 0_H ile gösterilir. Eğer $\langle H, \cdot \rangle$ yapısının bir birim elemanı varsa buna H halkasının **birimi** denir, 1_H ile gösterilir; birimi olan halkaya **birimli halka** adı verilir.

$\langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$ birimli bir halkadır: $0_{\mathbb{Z}} = 0$ ve $1_{\mathbb{Z}} = 1$ 'dir. Bir $a \in H$ elemanının toplamaya göre tersi $-a$ ile gösterilir; $a + (-b)$ yerine $a - b$ yazılır.

Teorem 2.1 (Sıfırla Çarpım). $\langle H; +, \cdot \rangle$ bir halka ise her $a \in H$ için

$$0_H \cdot a = a \cdot 0_H = 0_H$$

İspat.

Herhangi bir $b \in H$ alalım. $b = b + 0_H$ olduğundan sağdan dağılım kuralıyla

$$(b + 0_H)a = ba + 0_H a \implies ba = ba + 0_H a$$

Her iki tarafa soldan $-(ba)$ ekleyelim:

$$-(ba) + ba = -(ba) + (ba + 0_H a) \implies 0_H = (-(ba) + ba) + 0_H a = 0_H + 0_H a$$

yani $0_H \cdot a = 0_H$ bulunur. Aynı hesabı soldan dağılım kuralıyla tekrarlayalım:

$$a(b + 0_H) = ab + a 0_H \implies ab = ab + a 0_H$$

Her iki tarafa $-(ab)$ eklenirse $a \cdot 0_H = 0_H$ elde edilir. İki sonuç birlikte, her $a \in H$ için $0_H a = a 0_H = 0_H$ olduğunu verir.

■

2.2 Cisim

Tanım 2.4 (Cisim). $\langle K; +, \cdot \rangle$ bir halka olsun. Eğer $K \setminus \{0_K\}$ alt kümesi çarpma işlemine göre bir grup oluşturuyorsa, yani $\langle K \setminus \{0_K\}, \cdot \rangle$ bir grup ise, $\langle K; +, \cdot \rangle$ halkasına bir **cisim** denir.

Bir cismin aksiyomları, halka aksiyomlarına üç koşul daha eklenerek elde edilir:

IX. $\forall a, b \in K \setminus \{0_K\}$ için $ab \in K \setminus \{0_K\}$

X. $\exists 1_K \in K \setminus \{0_K\}$ öyle ki $\forall a \in K$ için $1_K a = a 1_K = a$

XI. $\forall a \in K \setminus \{0_K\}$ için $\exists a^{-1} \in K \setminus \{0_K\}$ öyle ki $a^{-1} a = a a^{-1} = 1_K$

Tanım 2.5 (Komutatif Halka ve Komutatif Cisim). Bir halkanın (cismin) içinde tanımlı çarpma işlemi komutatif ise o halkaya **komutatif halka**, o cisme **komutatif cisim** denir.

$\langle \mathbb{Q}; +, \cdot \rangle$ ve $\langle \mathbb{R}; +, \cdot \rangle$ birer komutatif cisimdir. Bundan sonraki bölümlerde skaler olarak kullanacağımız K daima komutatif bir cisim olacaktır.

2.3 Sıfır Bölener ve Tamlık Bölgesi

Tanım 2.6 (Sıfır Bölensiz Halka). $\langle H; +, \cdot \rangle$ halkasında

$$a \in H \setminus \{0_H\}, b \in H \setminus \{0_H\} \implies ab \in H \setminus \{0_H\}$$

koşulu sağlanıyorsa, başka bir deyişle $a, b \in H$ için

$$ab = 0_H \Leftrightarrow a = 0_H \text{ veya } b = 0_H$$

oluyorsa H 'ye **sıfır bölensiz halka** denir.

Tanım 2.7 (Sıfır Bölensiz Halka). Bir $\langle H; +, \cdot \rangle$ halkasında $a \neq 0_H, b \neq 0_H$ iken $ab = 0_H$ olacak biçimde bir $a, b \in H$ çifti varsa H 'ye **sıfır bölensiz halka** denir.

Tanım 2.8 (Tamlık Bölgesi). Komutatif, birimli ve sıfır bölensiz bir halkaya bir **tamlık bölgesi** denir.

$\langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$ bir tamlık bölgesidir; ama cisim değildir, çünkü örneğin $2x = 1$ olacak hiçbir $x \in \mathbb{Z}$ yoktur.

i Cisim ile tamlık bölgesi arasındaki tek yönlü ilişki

Her komutatif cisim bir tamlık bölgesidir: $ab = 0_K$ ve $a \neq 0_K$ ise, a^{-1} ile soldan çarparak $b = 0_K$ bulunur. Ters yön doğru değildir – $\mathbb{Z}$, tamlık bölgesi olup cisim olmayan en tanınmış örnektir.

2.4 Kompleks Sayılar Bir Cisimdir

Örnek 2.1 (Kompleks Sayılar Cismi). $\mathbb{C} = \{ a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \}$ kümesinde

$$(a + bi) \oplus (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \odot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle \mathbb{C}; \oplus, \odot \rangle$ 'nin komutatif bir cisim olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$1 + 0i \in \mathbb{C}$ olduğundan $\mathbb{C} \neq \emptyset$ 'dir. İki kompleks sayının eşitliği bileşen bileşen okunur: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$.

I. Toplamaya göre kapalılık. $a + c \in \mathbb{R}$ ve $b + d \in \mathbb{R}$ olduğundan $(a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$ 'dir.

II. Toplamanın asosyatifliği. $\mathbb{R}$ 'de toplamanın asosyatifliğinden

$$\begin{aligned} [(a + bi) \oplus (c + di)] \oplus (e + fi) &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i \\ &= (a + (c + e)) + (b + (d + f))i = (a + bi) \oplus [(c + di) \oplus (e + fi)] \end{aligned}$$

III. Toplamanın komutatifliği. $\mathbb{R}$ 'de toplama komutatif olduğundan

$$\begin{aligned} (a + bi) \oplus (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i = (c + di) \oplus (a + bi) \end{aligned}$$

IV. Sıfır. Her $a + bi$ için $(x + yi) \oplus (a + bi) = a + bi$ isteniyor:

$$(x + a) + (y + b)i = a + bi \Rightarrow x + a = a, y + b = b \Rightarrow x = y = 0$$

Demek ki $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ 'dir.

V. Toplamsal ters. $(a^* + b^*i) \oplus (a + bi) = 0 + 0i$ koşulu

$$a^* + a = 0, \quad b^* + b = 0 \Rightarrow a^* = -a, \quad b^* = -b$$

verir; yani $a + bi$ 'nin toplamsal tersi $-a - bi \in \mathbb{C}$ 'dir. **I-V** ile $\langle \mathbb{C}, \oplus \rangle$ komutatif bir gruptur.

VI. Çarpmaya göre kapalılık. $ac - bd \in \mathbb{R}$ ve $ad + bc \in \mathbb{R}$ olduğundan çarpım yine $\mathbb{C}$ 'dedir.

VII. Çarpmanın asosyatifliği. İki tarafı da açalım:

$$\begin{aligned} [(a + bi) \odot (c + di)] \odot (e + fi) &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f) \\ &\quad + ((ac - bd)f + (ad + bc)e)i \\ (a + bi) \odot [(c + di) \odot (e + fi)] &= (a(ce - df) - b(cf + de)) \\ &\quad + (a(cf + de) + b(ce - df))i \end{aligned}$$

Reel sayıların dağılım ve birleşme özellikleriyle iki ifadenin reel kısımları da sanal kısımları da aynıdır.

VIII. Çarpmanın komutatifliği. $\mathbb{R}$ 'de toplama ve çarpma komutatif olduğundan

$$\begin{aligned} (c + di) \odot (a + bi) &= (ca - db) + (cb + da)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i = (a + bi) \odot (c + di) \end{aligned}$$

IX. Dağılıma. Sol taraf

$$(a + bi) \odot [(c + di) \oplus (e + fi)] = (a(c + e) - b(d + f)) + (a(d + f) + b(c + e))i$$

sağ taraf ise

$$\begin{aligned} [(a + bi) \odot (c + di)] \oplus [(a + bi) \odot (e + fi)] &= ((ac - bd) + (ae - bf)) \\ &\quad + ((ad + bc) + (af + be))i \end{aligned}$$

olur; reel sayılarda $a(c + e) - b(d + f) = (ac - bd) + (ae - bf)$ ve $a(d + f) + b(c + e) = (ad + bc) + (af + be)$ olduğundan iki taraf eşittir. **I-IX** ile $\langle \mathbb{C}; \oplus, \odot \rangle$ komutatif bir halkadır.

X. $\mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ çarpmaya göre kapalıdır. $a + bi \neq 0_{\mathbb{C}}$, $c + di \neq 0_{\mathbb{C}}$ iken çarpımın sıfır olduğunu varsayalım:

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 0 + 0i \Rightarrow ac = bd, \quad ad = -bc$$

$a + bi \neq 0$ olduğundan a ile b 'den en az biri sıfırdan farklıdır; simetri gereği $a \neq 0$ kabul edebiliriz. Birinci eşitliği c ile, ikincisini d ile çarpalım:

$$ac^2 = bcd, \quad ad^2 = -bcd$$

Taraf tarafa toplanır

$$a (c^2 + d^2) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} c^2 + d^2 = 0 \implies c = d = 0$$

Bu, $c + di \neq 0_{\mathbb{C}}$ varsayımıyla çelişir. O hâlde çarpım sıfırdan farklıdır.

XI. Birim. $(1 + 0i) \odot (a + bi) = (1 \cdot a - 0 \cdot b) + (1 \cdot b + 0 \cdot a)i = a + bi$ olduğundan $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$ 'dir.

XII. Çarpımsal ters. $a + bi \neq 0_{\mathbb{C}}$ olsun; $(a^* + b^*i) \odot (a + bi) = 1 + 0i$ koşulu

$$aa^* - bb^* = 1, \quad a^*b + b^*a = 0$$

denklemlerini verir. Birinciye a , ikinciye b ile çarpıp toplarsak

$$a^* (a^2 + b^2) = a$$

$a + bi \neq 0$ olduğundan $a^2 + b^2 \neq 0$ 'dır ve $a^* = \frac{a}{a^2 + b^2}$ bulunur. Aynı iki denklemi bu kez $-b$ ve a ile çarpıp toplarsak

$$b^* (a^2 + b^2) = -b \implies b^* = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

a ile b 'den biri sıfırdan farklı olduğu için a^* ile b^* 'den de biri sıfırdan farklıdır; yani

$$a^* + b^*i = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \in \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$$

X-XII ile $\mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ çarpmaya göre bir gruptur. Dolayısıyla $\langle \mathbb{C}; \oplus, \odot \rangle$ komutatif bir cisimdir.

■

2.5 Sıfır Bölennli Bir Halka

Örnek 2.2 (Birimsiz ve Sıfır Bölennli Bir Halka). $M = \{ (a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$ kümesinde

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, bd), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac, 1)$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle M; \oplus, \odot \rangle$ 'nin ne tür bir cebirsel yapı olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.

$(1, 1) \in M$ olduğundan $M \neq \emptyset$ 'dir.

I. Toplamaya göre kapalılık. $a, c \in \mathbb{Z}$ için $a + c \in \mathbb{Z}$; $b, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $bd \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir.

II-III. Asosyatiflik ve komutatiflik. $\mathbb{Z}$ 'de toplanmanın, $\mathbb{R}$ 'de çarpmanın asosyatif ve komutatif olmasından

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)] &= (a + (c + e), b(df)) \\ &= ((a + c) + e, (bd)f) = [(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) \end{aligned}$$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, bd) = (c + a, db) = (c, d) \oplus (a, b)$$

IV. Sıfır. $(x, y) \oplus (a, b) = (a, b)$ koşulu $x + a = a$ ve $yb = b$ verir; $b \neq 0$ olduğundan $x = 0, y = 1$ bulunur. Demek ki $0_M = (0, 1)$ 'dir.

V. Toplamsal ters. $(a^*, b^*) \oplus (a, b) = (0, 1)$ koşulu $a^* + a = 0$ ve $b^*b = 1$ verir; buradan $a^* = -a \in \mathbb{Z}$ ve $b^* = \frac{1}{b} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir. Yani (a, b) 'nin toplamsal tersi $(-a, \frac{1}{b})$ 'dir.

VI-VIII. Çarpma. $ac \in \mathbb{Z}$ ve $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olduğundan çarpma kapalıdır. Asosyatiflik ve komutatiflik $\mathbb{Z}$ 'deki çarpmadan gelir:

$$[(a, b) \odot (c, d)] \odot (e, f) = (ace, 1) = (a(ce), 1) = (a, b) \odot [(c, d) \odot (e, f)]$$

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, 1) = (ca, 1) = (c, d) \odot (a, b)$$

IX. Dağılma. Sol taraf

$$(a, b) \odot [(c, d) \oplus (e, f)] = (a, b) \odot (c + e, df) = (a(c + e), 1) = (ac + ae, 1)$$

sağ taraf

$$[(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (e, f)] = (ac, 1) \oplus (ae, 1) = (ac + ae, 1)$$

İkisi eşittir; dolayısıyla $\langle M; \oplus, \odot \rangle$ komutatif bir halkadır.

Sıfır bölen var mı? $(5, 4)$ ve $(0, 3)$ elemanlarının ikisi de $0_M = (0, 1)$ 'den farklıdır; buna karşın

$$(5, 4) \odot (0, 3) = (5 \cdot 0, 1) = (0, 1) = 0_M$$

O hâlde $M \setminus \{0_M\}$ çarpmaya göre kapalı değildir: halka **sıfır bölenlidir**. Dolayısıyla bir cisim ya da tamlik bölgesi olamaz.

Birimi var mı? $(x, y) \odot (a, b) = (xa, 1) = (a, b)$ olması $b = 1$ gerektirir. Oysa $b \neq 1$ olan elemanlar var, örneğin $(0, 3)$. Demek ki birim eleman **yoktur**.

Sonuç: $\langle M; \oplus, \odot \rangle$ komutatif, birimsiz ve sıfır bölenli bir halkadır.

■

2.6 Alıştırma

Alıştırma 2.1 (Halka mı, Cisim mi?).

a) $H = \{ (a, 5^b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde

$$(a, 5^b) \oplus (c, 5^d) = (a + c, 5^{b+d}), \quad (a, 5^b) \odot (c, 5^d) = (ac, 1)$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle H; \oplus, \odot \rangle$ ne tür bir cebirsel yapıdır?

b) $H = \{ (a, b) : a \in \mathbb{Z}_5, b \in \mathbb{Z}_t \}$ kümesinde

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d - 1), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac, 1)$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle H; \oplus, \odot \rangle$ ne tür bir cebirsel yapıdır?

Çözüm.

a) $(0, 5^0) = (0, 1) \in H$ olduğundan $H \neq \emptyset$ 'dir.

Toplama. $a + c \in \mathbb{R}$ ve $b + d \in \mathbb{Z}$ olduğundan kapalıdır. Asosyatiflik ile komutatiflik $\mathbb{R}$ 'de toplanmanın ve $\mathbb{Z}$ 'de üstlerin toplanmasının aynı özelliklerinden gelir:

$$\begin{aligned} (a, 5^b) \oplus [(c, 5^d) \oplus (e, 5^f)] &= (a + (c + e), 5^{b+(d+f)}) \\ &= [(a, 5^b) \oplus (c, 5^d)] \oplus (e, 5^f) \end{aligned}$$

Sıfır için $(x, 5^y) \oplus (a, 5^b) = (a, 5^b)$ koşulu $x + a = a$ ve $5^{y+b} = 5^b$, yani $x = 0, y = 0$ verir: $0_H = (0, 5^0) = (0, 1)$. Toplamsal ters ise $(-a, 5^{-b})$ 'dir.

Çarpma. $ac \in \mathbb{R}$ ve $1 = 5^0$ olduğundan kapalıdır; $[(a, 5^b) \odot (c, 5^d)] \odot (e, 5^f) = ((ac)e, 1) = (a(ce), 1)$ ile asosyatif, $(ac, 1) = (ca, 1)$ ile komutatifdir.

Dağılma.

$$\begin{aligned} (a, 5^b) \odot [(c, 5^d) \oplus (e, 5^f)] &= (a, 5^b) \odot (c + e, 5^{d+f}) \\ &= (a(c + e), 1) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(a, 5^b) \odot (c, 5^d)] \oplus [(a, 5^b) \odot (e, 5^f)] &= (ac, 1) \oplus (ae, 1) \\ &= (ac + ae, 5^{0+0}) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

İkisi eşit olduğundan yapı komutatif bir halkadır.

Birim. $(x, 5^y) \odot (a, 5^b) = (xa, 1) = (a, 5^b)$ olması $5^b = 1$, yani $b = 0$ gerektirir; oysa $b \neq 0$ olan elemanlar vardır, örneğin $(0, 5)$. Birim eleman yoktur.

Sıfır bölen. $(0, 5) \neq 0_H$ ve $(3, 25) \neq 0_H$ iken

$$(0, 5) \odot (3, 25) = (0 \cdot 3, 1) = (0, 1) = 0_H$$

olduğundan yapı sıfır bölenlidir.

Sonuç: $\langle H; \oplus, \odot \rangle$ komutatif, birimsiz ve sıfır bölenli bir halkadır.

b) $(0, 1) \in H$ olduğundan $H \neq \emptyset$ 'dir.

Toplama kapalı mı? a, c çift ise $a + c$ çifttir; b, d tek ise $b + d$ çift, $b + d - 1$ tektir. Kapalıdır.

Asosyatiflik. İkinci bileşenler için

$$[(b + d - 1) + f] - 1 = b + d + f - 2 = b + [(d + f - 1) - 1] + 1 - 1$$

hesabının iki ucu da $b + d + f - 2$ 'dir; birinci bileşenlerde zaten $\mathbb{Z}$ 'de toplamının asosyatifliği geçerlidir.

Komutatiflik. $(a + c, b + d - 1) = (c + a, d + b - 1)$.

Sıfır. $(x, y) \oplus (a, b) = (a, b)$ koşulu $x + a = a$ ve $y + b - 1 = b$ verir: $x = 0$ (çift) ve $y = 1$ (tek). Demek ki $0_H = (0, 1)$ 'dir.

Toplamsal ters. $(a^*, b^*) \oplus (a, b) = (0, 1)$ koşulu $a^* = -a$ (çift) ve $b^* + b - 1 = 1$, yani $b^* = 2 - b$ verir; b tek olduğundan $2 - b$ de tektir.

Çarpma. a, c çift ise ac çifttir ve ikinci bileşen 1 tektir; kapalıdır. Asosyatiflik ve komutatiflik $\mathbb{Z}$ 'deki çarpımdan gelir.

Dağılma.

$$\begin{aligned} (a, b) \odot [(c, d) \oplus (e, f)] &= (a, b) \odot (c + e, d + f - 1) \\ &= (a(c + e), 1) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (e, f)] &= (ac, 1) \oplus (ae, 1) \\ &= (ac + ae, 1 + 1 - 1) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

İkisi eşittir; yapı komutatif bir halkadır.

Birim. $(x, y) \odot (a, b) = (xa, 1) = (a, b)$ olması $b = 1$ gerektirir; $b = 3$ olan elemanlar bulunduğundan birim yoktur.

Sıfır bölen. $(0, 3) \neq 0_H$ ve $(2, 5) \neq 0_H$ iken $(0, 3) \odot (2, 5) = (0, 1) = 0_H$ 'dir.

Sonuç: bu yapı da komutatif, birimsiz ve sıfır bölenli bir halkadır. İki soruda da çarpımın ikinci bileşeni sabit 1 olduğu için birim ve tersinirlik baştan kaybolur.

■

Cisim kavramı elimizde; artık üzerinde çalışacağımız sayıları sabitleyebiliriz. Sıradaki bölümde bu cismin elemanlarını bir tabloya dizip lineer cebirin baş nesnesini kuruyoruz: [matrisler](#).

3. Matrisler ve İşlemleri

Bir cismin elemanlarını dikdörtgen bir tabloya dizmek, ilk bakışta yalnızca bir düzenleme işi gibi görünür. Ama bu tabloya doğru işlemler tanımlandığında ortaya lineer cebirin baş nesnesi çıkar: denklem sistemlerini, dönüşümleri ve geometrik hareketleri aynı dille yazabilen matris. Bu bölümde matrisleri kurup dört temel işlemi tanımlıyoruz.

Bundan sonra K daima **komutatif bir cismi** gösterecektir; 0_K ve 1_K bu cismin sıfırı ve birimidir.

3.1 Matris Nedir?

Tanım 3.1 (Matris). K herhangi bir komutatif cisim ve $a_{ij} \in K$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) olmak üzere

$$A = (a_{ij})_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tablosuna K cismi üzerinde m satırlı, n sütunlu bir **matris** ($A_{(m,n)}$ K -matrisi) denir. a_{ij} elemanına matrisin (i, j) **bileşeni** denir: i satırın, j sütunun numarasıdır.

Tanım 3.2 (Satır ve Sütun Matrisleri). $A_{(1,n)}$ biçimindeki bir matrise K -**satır matrisi**, $A_{(m,1)}$ biçimindeki bir matrise K -**sütun matrisi** denir.

$K = \mathbb{R}$ alındığında

$$A_{(1,4)} = (1 \ 3 \ 4 \ 2), \quad A_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

sırasıyla bir satır matrisi, bir sütun matrisi ve 2×3 tipinde bir $\mathbb{R}$ -matristir. K 'nin her elemanı $A_{(1,1)}$ tipinde bir matris olarak düşünülebilir.

Tanım 3.3 (Sıfır Matris). Bütün bileşenleri 0_K olan matrise **sıfır matris** denir ve $O_{(m,n)}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4 (Matrislerin Eşitliği). Aynı tipteki iki matris, karşılıklı bütün bileşenleri eşitse **eşittir**:

$$A_{(m,n)} = B_{(m,n)} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

3.2 Toplama ve Skalerle Çarpma

Tanım 3.5 (Matrislerin Toplamı). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ ve $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ **aynı tipte** iki K -matris olsun. Bileşenleri

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

olan $C = (c_{ij})_{(m,n)}$ matrisine A ile B 'nin **toplamı** denir ve $C = A + B$ yazılır.

Farklı tipteki matrisler toplanamaz; toplama işlemi bileşen bileşen, yani K 'deki toplamayla yapılır.

Tanım 3.6 (Skalerle Çarpım). $\lambda \in K$ ve $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ olsun. Bileşenleri $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ olan matrise A 'nın λ skaleriyle çarpımı denir:

$$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{ij})_{(m,n)}$$

Özel olarak $-A = (-a_{ij})_{(m,n)}$ 'dir; burada $-a_{ij}$, a_{ij} 'nin K 'deki toplamsal tersidir.

Örnek 3.1 (Bir Skalerle Çarpım). $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}$ -matrisi ve $\lambda = -\sqrt{2}$ için λA matrisini bulunuz.

Çözüm.

Her bileşen $-\sqrt{2}$ ile çarpılır:

$$-\sqrt{2} A = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

■

Teorem 3.1 (Toplama ve Skalerle Çarpmanın Özellikleri). A, B, C aynı tipte K -matrisler ve $k_1, k_2 \in K$ olsun. O hâlde

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $A + O_{(m,n)} = A$
4. $A + (-A) = O_{(m,n)}$
5. $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
6. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
7. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
8. $1_K A = A$ ve $0_K A = O_{(m,n)}$

İspat.

Bütün özellikler bileşen bileşen doğrulanır; her biri K 'deki karşılık gelen özelliğe indirgenir. Örneğin birinci özelliğe her iki tarafın (i, j) bileşeni

$$[(A + B) + C]_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = [A + (B + C)]_{ij}$$

olur; ortadaki eşitlik K 'de toplamanın asosyatifiğidir. Beşinci özelliğe

$$[k_1(A + B)]_{ij} = k_1(a_{ij} + b_{ij}) = k_1a_{ij} + k_1b_{ij} = [k_1A + k_1B]_{ij}$$

olur; kullanılan tek şey K 'de çarpmanın toplama üzerine dağılmasıdır. Diğerleri de aynı yolla, sırasıyla K 'de toplamanın komutatifiği, 0_K 'nin sıfır oluşu, $-a$ 'nın ters oluşu ve çarpmanın asosyatifiği kullanılarak elde edilir.

■

💡 Matrisler toplamaya göre bir grup

İlk dört özellik tam olarak şunu söyler: sabit bir (m, n) tipi için bütün K -matrislerin kümesi, matris toplamasına göre komutatif bir gruptur; sıfırı $O_{(m,n)}$, bir A matrisinin tersi $-A$ 'dır. Kalan dört özellik ise skalerle çarpmanın bu grupla nasıl uyduğunu söyler — ileride göreceğimiz **vektör uzayı** tanımının aksiyomları tam olarak bunlardır.

3.3 Matris Çarpımı

Toplama tanımı beklenen biçimdeydi; çarpım ise satır ile sütunu eşleştirir ve bu yüzden tipler üzerinde bir uyum koşulu getirir.

Tanım 3.7 (Matrislerin Çarpımı). $A = (a_{ij})_{(m,p)}$ ve $B = (b_{ij})_{(p,n)}$ K -matrisler olsun; yani A 'nın sütun sayısı B 'nin satır sayısına eşit olsun. Bileşenleri

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^p a_{it}b_{tj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

olan $C = (c_{ij})_{(m,n)}$ matrisine A ile B 'nin **çarpımı** denir: $C = AB$.

c_{ij} , A 'nın i -inci satırı ile B 'nin j -inci sütununun karşılıklı bileşenleri çarpılıp toplanarak elde edilir. $A_{(m,p)}$ ve $B_{(q,n)}$ matrislerinde $p \neq q$ ise AB çarpımı **tanımlanamaz**.

⚠ Çarpımda kaybolan iki alışkanlık

1. Sıfır bölenler vardır. Sıfır matristen farklı iki matrisin çarpımı sıfır matris olabilir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2. Çarpım komutatif değildir. $A_{(2,3)}$ ve $B_{(3,2)}$ için AB bir 2×2 , BA ise bir 3×3 matristir; tipleri bile farklıdır. Kare matrislerde tipler uyuşsa da eşitlik genel olarak sağlanmaz.

Örnek 3.2 (İki Matrisin Çarpımı). $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ için AB çarpımını hesaplayınız ve $AB \neq BA$ olduğunu gözlemleyiniz.

Çözüm.

A bir 2×3 , B bir 3×2 matristir; AB bir 2×2 matristir. Bileşenleri tek tek yazalım:

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 2 - 1 + 8 = 9$$

$$c_{12} = 1 \cdot 3 + (-1)(-2) + 2 \cdot 5 = 3 + 2 + 10 = 15$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 4 = 6 - 3 - 8 = -5$$

$$c_{22} = 3 \cdot 3 + (-3)(-2) + (-2) \cdot 5 = 9 + 6 - 10 = 5$$

Yani

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

BA çarpımı ise tanımlıdır ama 3×3 tipindedir; iki matrisin tipleri farklı olduğundan $AB \neq BA$ 'dır.

■

Teorem 3.2 (Çarpımın Özellikleri). Aşağıdaki çarpımların tanımlı olduğu tiplerde alınmak üzere, $k \in K$ için

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $k(AB) = (kA)B = (Ak)B = A(kB)$
5. $O_{(p,m)}A_{(m,n)} = O_{(p,n)}$ ve $B_{(m,n)}O_{(n,p)} = O_{(m,p)}$
6. AB matrisinin i -inci satırı, A 'nın i -inci satırı $\cdot B$ çarpımına eşittir.

İspat.

Altıncı özelliği yazalım; diğerleri de aynı biçimde bileşenler üzerinden yürür. $A = (a_{ij})_{(m,p)}$ ve $B = (b_{ij})_{(p,n)}$ olsun. AB 'nin i -inci satırının j -inci bileşeni tanım gereği

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Öte yandan A 'nın i -inci satırı $(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ip})$ bir $1 \times p$ matristir; bunu B ile çarparsak elde edilen $1 \times n$ matrisin j -inci bileşeni yine aynı toplamdır. İki satır bileşen bileşen çakıştığından eşittirler.

■

3.4 Birim Matris

Tanım 3.8 (Birim Matris). Esas köşegen üzerindeki bileşenleri 1_K , diğer bütün bileşenleri 0_K olan $n \times n$ matrise n -inci mertebeden **birim matris** denir ve I_n ile gösterilir:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1_K & 0_K & \cdots & 0_K \\ 0_K & 1_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & 0_K & \cdots & 1_K \end{pmatrix}$$

Her $A_{(m,n)}$ için $I_n A = A = A I_n$ 'dir; özel olarak A n -inci mertebeden kare matris ise $I_n A = A I_n = A$ 'dır.

i Kare matrisler bir halka oluşturur

n -inci mertebeden bütün kare K -matrislerin kümesi, matris toplaması ve matris çarpımı işlemleriyle **birimli** bir **halkadır**; birimi I_n 'dir. Bu halka $n \geq 2$ için **komutatif değildir** ve **sıfır bölennlidir** — yukarıdaki iki uyarı tam olarak bunu söylüyordu.

3.5 Transpoze

Tanım 3.9 (Transpoze). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ matrisinde satırlarla sütunların yeri değiştirilerek elde edilen $n \times m$ matrise A 'nın **transpozesi** denir ve A^t ile gösterilir. Yani A^t 'nin (j, i) bileşeni a_{ij} 'dir.

Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorem 3.3 (Transpozenin Özellikleri). Uygun tiplerde alınmak üzere $k \in K$ için

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(kA)^t = kA^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

İspat.

Dördüncü özelliği gösterelim; sıranın tersine dönmesi tam olarak burada ortaya çıkar. $A = (a_{ij})_{(m,p)}$, $B = (b_{ij})_{(p,n)}$ olsun.

AB matrisinin (i, j) bileşeni $a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$ 'dir; dolayısıyla $(AB)^t$ matrisinin (j, i) bileşeni de aynı sayıdır.

$B^t A^t$ matrisinin (j, i) bileşeni ise, B^t 'nin j -inci satırı ile A^t 'nin i -inci sütununun çarpımıdır; bunlar sırasıyla B 'nin j -inci sütunu ile A 'nın i -inci satırıdır:

$$b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \dots + b_{pj}a_{ip}$$

K komutatif bir cisim olduğundan $b_{tj}a_{it} = a_{it}b_{tj}$ 'dir ve iki ifade terim terim aynıdır. Bileşenler çakıştığından $(AB)^t = B^t A^t$ 'dir.

■

3.6 Alt Matris

Tanım 3.10 (Alt Matris). $A_{(m,n)}$ matrisinin p satırı ve q sütunu ($p < m, q < n$) silinerek elde edilen $(m-p) \times (n-q)$ tipindeki matrise A 'nın bir **alt matrisi** denir.

Örnek 3.3 (Bir Alt Matrisin Bulunması). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ matrisinde ikinci satır ile ikinci ve dördüncü sütunları silerek elde edilen alt matrisi yazınız.

Çözüm.

Geriye birinci ve üçüncü satırlar ile birinci ve üçüncü sütunlar kalır:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

3.7 Alıştırma

Alıştırma 3.1 (Matris İşlemleri).

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ için AB ve BA çarpımlarını hesaplayıp karşılaştırınız.
- $A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ için $(A^t)^t = A$ eşitliğini doğrulayınız ve AA^t çarpımının tipini belirleyip hesaplayınız.
- A ve B n -inci mertebeden kare matrisler olmak üzere $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ eşitliğinin genel olarak doğru olmadığını gösteriniz; hangi ek koşul altında doğru olur?

Çözüm.

a) Önce AB 'yi hesaplayalım:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi BA 'yı hesaplayalım:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

İki matris aynı tipte olduğu hâlde eşit değildir: matris çarpımı komutatif değildir.

b) Transpozeyi alalım:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Satırla sütunun yerini iki kez değiştirmek başlangıçtaki matrisi verir. A bir 2×3 , A^t bir 3×2 matris olduğundan AA^t bir 2×2 matristir:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2^2 + (-1)^2 + 0^2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 1^2 + 3^2 + 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 26 \end{pmatrix}$$

c) Dağılıma özelliğini iki kez uygulayalım:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A(A + B) + B(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Bu ifadenin $A^2 + 2AB + B^2$ olması için $AB + BA = 2AB$, yani $BA = AB$ gerekir. Genel olarak matris çarpımı komutatif olmadığından eşitlik doğru değildir. Somut bir karşı örnek için (a) şıkkındaki matrisleri alalım: orada $AB \neq BA$ olduğundan

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak A ile B **değişmeli** olduğunda, yani $AB = BA$ olduğunda geçerlidir.

■

Matrisleri toplayıp çarpmayı öğrendik; şimdi onları sadeleştirmeyi öğreneceğiz. Satırlar üzerinde yapılan üç basit işlem, her matrisi olabildiğince yalın bir biçime indirger: [merdiven matrisler ve satır eşdeğerlik](#).

4. Merdiven Matrisler ve Satır Eşdeğerlik

Bir matrisi sadeleştirmenin standart yolu, satırları üzerinde üç basit işlem yapmaktır. Bu işlemler matrisi tanınmaz hâle getirmez; taşıdığı bilgiyi korurken görünüşünü basamak basamak inen bir merdivene çevirir. Bu bölümde o merdiveni tanımlayıp her matrisin ona indirgenebildiğini göstereceğiz — ilerideki bütün hesap yöntemlerinin (ters bulma, denklem çözme, rank hesabı) motoru budur.

4.1 Merdiven Matrisler

Tanım 4.1 (Merdiven Matris). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ bir K -matris olsun. $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ olmak üzere

1. $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ bileşenleri 0_K 'dan farklı,
2. $i \leq r$ ve $j < j_i$ için $a_{ij} = 0_K$, ayrıca $i > r$ için bütün $a_{ij} = 0_K$

ise A 'ya bir K -**merdiven matris** (ezelon matris) denir. Buradaki a_{ij_i} bileşenlerine **ayrıcalıklı elemanlar** denir.

Sözle söylersek: ilk r satırın her biri sıfırdan farklı bir bileşenle başlar, bu ilk sıfırdan farklı bileşenlerin sütun numaraları aşağı indikçe kesin artar ve r -inci satırdan sonraki bütün satırlar tamamen sıfırdır.

Tanım 4.2 (Satır İndirgenmiş Merdiven Matris). Bir K -merdiven matriste ayrıca

1. $j_1, j_2, \dots, j_r$ sütunlarında ayrıcalıklı elemanlardan başka 0_K 'dan farklı bileşen yoksa,
2. ayrıcalıklı elemanların hepsi 1_K 'ya eşitse

bu matrise **satır indirgenmiş merdiven matris** denir.

⚠ İki uç örnek

Sıfır matris $O_{(m,n)}$ bir merdiven matris **değildir**: tanım, sıfırdan farklı en az bir ayrıcalıklı eleman ister. Buna karşılık birim matris I_n bir satır indirgenmiş merdiven matristir — ayrıcalıklı elemanları köşegen üzerindeki 1_K 'lardır ve o sütunlarda başka bileşen yoktur.

4.2 Elemanter Satır İşlemleri

Tanım 4.3 (Elemanter Satır İşlemleri). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisi üzerinde tanımlı üç işleme **elemanter satır işlemleri** denir. R_i ile i -inci satır gösterilmek üzere:

$$[e_1]: R_i \leftrightarrow R_j \quad (\text{iki satırın yeri değiştirilir})$$

$$[e_2]: R_i \rightarrow kR_i \quad (k \in K, k \neq 0_K)$$

$$[e_3]: R_i \rightarrow kR_j + R_i \quad (k \in K \setminus \{0_K\}, i \neq j)$$

Tanım 4.4 (Satır Eşdeğerlik). $B_{(m,n)}$ matrisi, $A_{(m,n)}$ matrisine sonlu sayıda elemanter satır işlemi uygulanarak elde ediliyorsa A ile B 'ye **satır eşdeğer** matrisler denir ve

$$A \sim^{\text{satır}} B$$

yazılır.

Üç işlemin de geri alınabilir olduğuna dikkat edin: yer değiştirme kendi tersidir, k ile çarpma k^{-1} ile çarpılarak, $kR_j + R_i$ ise $-kR_j + R_i$ ile geri alınır. Bu yüzden satır eşdeğerlik gerçekten simetrik bir bağıntıdır.

4.3 Her Matris Bir Merdivene İnegelir

Teorem 4.1 (Merdiven Şekline İndirgeme). Sıfır matristen farklı her $A_{(m,n)}$ K -matrisi, bir K -merdiven matrise satır eşdeğerdir.

İspat.

$A \neq O_{(m,n)}$ olduğundan A 'nın 0_K 'dan farklı en az bir bileşeni vardır. 0_K 'dan farklı bileşen içeren **ilk** sütunun numarası j_1 olsun; tanım gereği j_1 'den önceki bütün sütunlar tamamen sıfırdır.

Durum 1: $a_{1j_1} \neq 0_K$. Her $l = 2, \dots, m$ için $a_{lj_1} \neq 0_K$ olduğunda

$$R_l \rightarrow -\frac{a_{lj_1}}{a_{1j_1}}R_1 + R_l$$

işlemi uygulanır. Bu işlemten sonra j_1 -inci sütunun ilk bileşeni dışındaki bütün bileşenleri 0_K olur.

Durum 2: $a_{1j_1} = 0_K$. j_1 -inci sütunda 0_K 'dan farklı bir a_{tj_1} bileşeni vardır. $R_1 \leftrightarrow R_t$ işlemiyle bu bileşen birinci satıra taşınır ve Durum 1'deki işlemler uygulanır.

Her iki durumda da elde edilen matriste birinci satır j_1 -inci sütunda sıfırdan farklı bir bileşenle başlar ve o sütunun altı tamamen sıfırdır. Şimdi bu matrisin **birinci satırı dışında kalan** $(m-1) \times n$ alt matrisine aynı işlem tekrarlanır. Her adımda geriye kalan alt matrisin satır sayısı bir azaldığından, işlem sonlu adımda ya alt matris sıfır matrise dönerek ya da satırlar tükenerek durur. Duruş anında elde edilen matris, tanımdaki iki koşulu da sağlayan bir merdiven matristir.

■

Tanım 4.5 (Merdiven Şekli). Yukarıdaki teoremle bulunan, A 'ya satır eşdeğer olan merdiven matrise A 'nın bir **merdiven şekli** denir.

Örnek 4.1 (Bir Merdiven Şekli). $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin bir merdiven şeklini bulunuz.

Çözüm.

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Şimdi ikinci sütunun altını temizleyelim:

$$R_3 \rightarrow -\frac{7}{3}R_2 + R_3 \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Ayrıcalıklı elemanlar 1, 3 ve $\frac{7}{3}$ 'tür; sütun numaraları $j_1 = 1 < j_2 = 2 < j_3 = 3$ olarak artmaktadır.

Bulunan matris A 'nın bir merdiven şeklidir.

■

⚠ Merdiven şekli tek türlü belirli değildir

Aynı matris, işlemlerin sırasına göre farklı merdiven matrislere indirgenebilir. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi için

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

matrislerinin ikisi de A 'nın birer merdiven şeklidir; ikinci yolda yalnızca ikinci satır $\frac{1}{4}$ ile çarpılmıştır. $B \neq C$ olduğundan merdiven şekli tek değildir.

4.4 Satır Kanonik Şekil

Teorem 4.2 (Satır İndirgenmiş Merdivene İndirgeme). Her K -merdiven matris, bir K -satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğerdir. Dolayısıyla sıfır matristen farklı her $A_{(m,n)}$ matrisi bir satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğerdir.

İspat.

A 'nın bir merdiven şekli alınsın; ayrıcalıklı elemanları $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ olsun. Önce her $i = 1, \dots, r$ için

$$R_i \rightarrow (a_{ij_i})^{-1} R_i$$

işlemi uygulanır; $a_{ij_i} \neq 0_K$ ve K bir cisim olduğundan bu tersler vardır ve bütün ayrıcalıklı elemanlar 1_K olur. Ardından $i = r, r-1, \dots, 2$ sırasıyla, j_i -inci sütunda i -inci satırın **üstünde** kalan her a_{lj_i} bileşeni için

$$R_l \rightarrow -a_{lj_i} R_i + R_l \quad (l < i)$$

uygulanır. Altan yukarı doğru ilerlendiğinden, temizlenen bir sütun sonraki adımlarda bozulmaz. Sonuçta ayrıcalıklı sütunlarda tek sıfırdan farklı bileşen 1_K 'lar olarak kalır; bu bir satır indirgenmiş merdiven matristir. ■

Merdiven şeklinin aksine, satır indirgenmiş merdiven şekli **tek türlü** belirlidir; bu yüzden ona A 'nın **satır kanonik şekli** denir.

Örnek 4.2 (Satır Kanonik Şekil). $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.

Çözüm.

Hesabı kolaylaştırmak için ayrıcalıklı eleman olarak 1'i seçelim:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & -9 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 4R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -6R_1 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matris bir merdiven matristir. Şimdi ayrıcalıklı elemanı 1 yapıp üstünü temizleyelim:

$$R_2 \rightarrow \frac{1}{9}R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Son matris A 'nın satır kanonik şeklidir.

■

Örnek 4.3 (Sıfır Satır İçeren Bir Kanonik Şekil). $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.

Çözüm.

Birinci sütunun ilk bileşeni sıfır olduğundan önce satır değiştirelim:

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \quad R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Bu bir merdiven matristir; üçüncü satırın tamamen sıfır olması tanıma aykırı değildir ($r = 2$). Şimdi kanonik şekle geçelim:

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad R_1 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

■

4.5 Alıştırma

Alıştırma 4.1 (Merdiven ve Kanonik Şekiller).

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin bir merdiven şeklini bulunuz.
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.

Çözüm.

a) Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

İkinci sütun tamamen sıfır olduğundan sıradaki ayrıcalıklı eleman üçüncü sütundadır ($j_2 = 3$):

$$R_3 \rightarrow -\frac{5}{4}R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Ayrıcalıklı elemanların sütunları $j_1 = 1 < j_2 = 3 < j_3 = 4$ olarak arttığından bu bir merdiven matristir.

b) Matris zaten merdiven şeklindedir; ayrıcalıklı elemanlar 2, 3 ve 2'dir. Önce hepsini 1 yapalım:

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Şimdi alttan yukarı doğru ayrıcalıklı sütunları temizleyelim. Beşinci sütun için

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -\frac{5}{3}R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -3R_3 + R_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Üçüncü sütun için

$$R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Son matris satır kanonik şekildedir; birinci satırın dördüncü bileşeni $\frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{15-8}{6} = \frac{7}{6}$, dir.

c) Yukarıdaki örnekte bu matrisin merdiven şeklini bulmuştuk:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right)$$

Ayrıcalıklı elemanları 1 yapalım:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{3}{7}R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{array} \right)$$

Üçüncü sütunu temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow \frac{4}{3}R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -3R_3 + R_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & \frac{23}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{array} \right)$$

İkinci satırın son bileşeni $\frac{4}{3} - \frac{40}{21} = \frac{28-40}{21} = -\frac{4}{7}$, birinci satırınki ise $-1 + \frac{30}{7} = \frac{23}{7}$, dir. Son olarak ikinci sütunu temizleyelim:

$$R_1 \rightarrow 2R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{array} \right)$$

çünkü $\frac{23}{7} - \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$, dir. Bu, A 'nın satır kanonik şeklidir.

■

Satır işlemleri şimdilik elle uygulanan kurallar gibi duruyor. Sıradaki bölümde kare matrislerin özel ailelerini tanıyacak ve bir matrisin “bölünebilir” olmasının ne demek olduğunu soracağız: [kare matrisler ve ters matris](#).

5. Kare Matrisler ve Ters Matris

Satır ve sütun sayısı eşit olan matrisler ayrı bir dünya kurar: yalnız onlar kendileriyle çarpılabilir, kuvvet alabilir ve — şanslıysa — bölünebilir. Bu bölümde kare matrislerin özel ailelerini tanıyıp lineer cebirin en çok kullanılan kavramlarından birine varıyoruz: ters matris.

5.1 Kare Matrisler ve Esas Köşegen

Tanım 5.1 (Kare Matris). Satır ve sütun sayıları eşit olan bir K -matrise **kare matris** denir. Bir kare matriste birbirine eşit olan satır ve sütun sayısına, kare matrisin **mertebe**si denir.

Tanım 5.2 (Esas Köşegen). $A = (a_{ij})_{(n,n)}$ n -inci mertebeden bir kare K -matris olsun. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bileşenlerine **esas köşegen** üzerinde bulunan bileşenler denir.

Tanım 5.3 (Üçgensel Matris). Esas köşegeninin altındaki **veya** üstündeki bütün bileşenleri 0_K olan kare matrise **üçgensel matris** denir.

Tanım 5.4 (Köşegen Matris). Esas köşegeninin dışında kalan bütün bileşenleri 0_K olan kare matrise **köşegen matris** denir.

Tanım 5.5 (Skaler Matris). Esas köşegenindeki bileşenlerin tamamı aynı bir $\lambda \neq 0_K$ skalerine eşit olan köşegen matrise **skaler matris** denir. Özel olarak $\lambda = 1_K$ alınırsa **birim matris** I_n elde edilir: birim matris, $\lambda = 1_K$ olan skaler matristir.

Örnekler $K = \mathbb{R}$ üzerinde:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{kare}), & B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (\text{üçgensel}) \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{üçgensel}), & D &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{köşegen}) \\ E &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{skaler}), & F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad (\text{birim}) \end{aligned}$$

A matrisinin esas köşegeni üzerindeki bileşenler $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = 1$ ve $a_{44} = 0$ 'dır.

Teorem 5.1 (Skaler Matrislerin Değişmeliliği). A , n -inci mertebeden bir skaler K -matris ve B de n -inci mertebeden herhangi bir kare K -matris olsun. O hâlde

$$AB = BA$$

Ayrıca herhangi bir $A_{(m,n)}$ için $I_m A = A = A I_n$ 'dir ve bir köşegen matrisin, dolayısıyla birim matrisin transpozesi kendisine eşittir.

İspat.

A skaler olduğundan $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$ olmak üzere esas köşegeni λ 'lardan, geri kalanı 0_K 'lerden oluşur. $B = (b_{ij})_{(n,n)}$ alalım. Çarpım tanımında A 'nın i -inci satırının yalnızca i -inci bileşeni sıfırdan farklı olduğundan

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj} = \lambda b_{ij}$$

Benzer şekilde A 'nın j -inci sütununun yalnızca j -inci bileşeni sıfırdan farklı olduğundan

$$(BA)_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it}a_{tj} = b_{ij}\lambda$$

K komutatif bir cisim olduğundan $\lambda b_{ij} = b_{ij}\lambda$ 'dır; iki matrisin bütün bileşenleri çakışır ve $AB = BA$ olur.

■

5.2 Ters Matris

Tanım 5.6 (Ters Matris). A , n -inci mertebeden bir kare K -matris olsun.

$$AB = BA = I_n$$

olacak şekilde n -inci mertebeden bir kare B K -matrisi varsa, B 'ye A 'nın **tersi** denir ve $B = A^{-1}$ biçiminde gösterilir.

Teorem 5.2 (Tersin Özellikleri).

1. n -inci mertebeden bir A kare K -matrisinin tersi varsa, bu ters tek olarak belirlidir.
2. Ters olan bir A kare matrisi için $(A^{-1})^{-1} = A$ 'dır.
3. A ve B tersleri olan n -inci mertebeden kare matrisler ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 'dir.
4. $A_1, A_2, \dots, A_m$ tersleri olan n -inci mertebeden kare matrisler ise

$$(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

İspat.

1. A 'nın birbirinden farklı B ve C gibi iki tersi olduğunu varsayalım:

$$AB = BA = I_n, \quad AC = CA = I_n$$

Matris çarpımının asosyatifliğini kullanalım:

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C$$

Bu, $B \neq C$ varsayımıyla çelişir. O hâlde ters varsa tektir.

2. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ bağıntısı, A^{-1} için okunduğunda tam olarak A 'nın A^{-1} 'in tersi olduğunu söyler; yani $(A^{-1})^{-1} = A$ 'dır.

3. $B^{-1}A^{-1}$ matrisinin AB 'nin tersi olduğunu doğrudan çarparak görelim:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$$

Her iki çarpım da I_n verdiğiinden $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 'dir.

4. Üçüncü özellikten tümevarımla elde edilir: $m = 2$ için iddia üçüncü özelliktir. $m - 1$ çarpan için doğru olduğu varsayılırsa, $A_1 \cdots A_{m-1}$ 'i tek bir matris sayarak

$$(A_1 \cdots A_{m-1} A_m)^{-1} = A_m^{-1} (A_1 \cdots A_{m-1})^{-1} = A_m^{-1} (A_{m-1}^{-1} \cdots A_1^{-1})$$

bulunur; bu da iddia edilen ifadedir.



Tanım 5.7 (Regüler ve Singüler Matris). Tersi olan bir matrise **regüler** (tersinir) matris, tersi olmayan bir matrise **singüler** matris denir.

⚠ Her kare matrisin tersi yoktur

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi singülerdir. Gerçekten $AB = BA = I_2$ olacak bir $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ olsaydı

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

çıkardı; bu ise $1 \neq 0$ olmasıyla çelişir.

5.3 Matrisin Kuvvetleri

Tanım 5.8 (Matris Kuvvetleri). A , n -inci mertebeden bir kare K -matris ve m bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^{m+1} = A^m A$$

biçiminde tanımlanır. Örneğin $A^2 = AA$ ve $A^3 = A^2 A$ 'dır.

ℓ ve m negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$A^\ell A^m = A^{\ell+m}, \quad (A^\ell)^m = A^{\ell m}$$

eşitlikleri geçerlidir. A regüler ise negatif tam sayı kuvvetleri de

$$A^{-m} = (A^{-1})^m$$

biçiminde tanımlanır ve $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$ 'dir.

5.4 Alıştırma

Alıştırma 5.1 (Kare Matrisler ve Ters).

- A ve B n -inci mertebeden köşegen K -matrisler ve $k \in K \setminus \{0_K\}$ olsun. $A + B$, AB ve kA matrislerinin de köşegen olduğunu gösteriniz.
- A kare matrisinin tersi varsa A^t 'nin de tersi olduğunu ve $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ olduğunu gösteriniz.
- $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ köşegen matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşulun her i için $a_{ii} \neq 0_K$ olduğunu gösterip A^{-1} 'i bulunuz.

Çözüm.

a) $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ köşegen olsun; yani $i \neq j$ iken $a_{ij} = b_{ij} = 0_K$ 'dir.

Toplam: $i \neq j$ için $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0_K + 0_K = 0_K$; toplam köşegendir.

Skalerle çarpım: $i \neq j$ için $(kA)_{ij} = k \cdot 0_K = 0_K$; sonuç köşegendir.

Çarpım: Bileşeni açalım:

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

A köşegen olduğundan $a_{it} = 0_K$ olmayan tek terim $t = i$ olanıdır; toplam $a_{ii}b_{ij}$ 'ye iner. B de köşegen olduğundan $i \neq j$ iken $b_{ij} = 0_K$ 'dir, yani $(AB)_{ij} = 0_K$ 'dir. Köşegen üzerinde ise $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ bulunur:

$$\text{diag} (a_{11}, \dots, a_{nn}) \cdot \text{diag} (b_{11}, \dots, b_{nn}) = \text{diag} (a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn})$$

b) A regüler olsun: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Her iki eşitliğin transpozisini alalım ve $(XY)^t = Y^tX^t$ kuralını kullanalım:

$$(AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t = I_n^t = I_n$$

$$(A^{-1}A)^t = A^t(A^{-1})^t = I_n^t = I_n$$

İki çarpım da I_n verdiğiinden A^t regülerdir ve tanım gereği tersi $(A^{-1})^t$ 'dir. (Burada $I_n^t = I_n$ olduğunu, birim matrisin köşegen olmasından kullandık.)

c) Yeterlik. Her $a_{ii} \neq 0_K$ olsun. K bir cisim olduğundan her a_{ii} 'nin tersi vardır. (a) şıkkındaki köşegen çarpım kuralıyla

$$\text{diag} (a_{11}, \dots, a_{nn}) \cdot \text{diag} (a_{11}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}) = \text{diag} (1_K, \dots, 1_K) = I_n$$

olur; çarpım köşegen matrislerde değişmeli olduğundan diğer sıra da I_n verir. Demek ki A regülerdir ve

$$A^{-1} = \text{diag} (a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$$

Gereklik. Bir k için $a_{kk} = 0_K$ olsun. A köşegen olduğundan k -inci satırının bütün bileşenleri 0_K 'dir. Herhangi bir B matrisi için, çarpımın satırlarına ilişkin kuraldan

$$(AB) \text{ matrisinin } k \text{-inci satırı} = (A \text{ 'nın } k \text{-inci satırı}) \cdot B = (0_K \cdots 0_K)$$

olur. Oysa I_n 'nin k -inci satırında $1_K \neq 0_K$ bulunur; dolayısıyla hiçbir B için $AB = I_n$ olamaz ve A singülerdir.

■

Bir matrisin tersinin olup olmadığını, tanıma dönüp bilinmeyen bir B aramadan anlayabilir miyiz? Ve varsa bu tersi sistemli biçimde hesaplayabilir miyiz? İki sorunun da yanıtı satır işlemlerinde saklı: [elemanter matrisler ve ters hesabı](#).

6. Elemanter Matrisler ve Ters Hesabı

Elemanter satır işlemleri şimdiye kadar “matris üzerinde yapılan hamleler” olarak kaldı. Bu bölümde her hamlenin aslında uygun bir matrisle **soldan çarpmak** olduğunu göreceğiz. Bu tek gözlem, satır işlemlerini matris cebirinin içine taşır ve arkasından iki büyük sonuç gelir: bir matrisin ne zaman regüler olduğunun ölçütü ve tersini hesaplayan sistemli yöntem.

6.1 Elemanter Satır Matrisleri

Tanım 6.1 (Elemanter Satır Matrisi). I_m K -birim matrisine yalnız bir tane **elemanter satır işlemi** uygulanarak elde edilen m -inci mertebeden kare K -matrise **elemanter satır matrisi** denir ve $\hat{E}$ ile gösterilir:

$$e(I_m) =: \hat{E}, \quad e_1(I_m) =: \hat{E}_1, \quad e_2(I_m) =: \hat{E}_2, \quad e_3(I_m) =: \hat{E}_3$$

Bundan sonra “elemanter matris” dendiğinde elemanter satır matrisi anlaşılacaktır.

I_3 üzerinde üç işlemin karşılığı:

$$e_1 : R_2 \leftrightarrow R_3 \Rightarrow \hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 : R_3 \rightarrow -6R_3 \Rightarrow \hat{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e_3 : R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2 \Rightarrow \hat{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2 Satır İşlemi Bir Çarpımdır

Teorem 6.1 (Elemanter İşlem Elemanter Matrisle Çarpımdır). e herhangi bir elemanter satır işlemi, $\hat{E} = e(I_m)$ buna karşılık gelen elemanter satır matrisi ve A bir $A_{(m,n)}$ K -matris olsun. O hâlde

$$e(A) = \hat{E}A$$

İspat.

İspatın tamamı, çarpımın satırlarına ilişkin şu kurala dayanır: $\hat{E}A$ matrisinin i -inci satırı, ($\hat{E}$ 'nin i -inci satırı) $\cdot A$ çarpımına eşittir. Ayrıca $I_m A = A$ 'dır.

1. $e = e_1 (R_i \leftrightarrow R_j)$. $\hat{E}_1$ 'in i -inci satırı, I_m 'nin j -inci satırıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 A \text{ 'nin } i \text{-inci satırı} &= (I_m \text{ 'nin } j \text{-inci satırı}) A \\ &= (I_m A) \text{ 'nin } j \text{-inci satırı} = A \text{ 'nin } j \text{-inci satırı} \end{aligned}$$

Bu ise tam olarak $e_1(A)$ 'nin i -inci satırıdır. Aynı hesap j -inci satır için, ve $t \neq i, j$ olan bütün t satırları için (o satırlarda $\hat{E}_1$ ile I_m çakıştığından) tekrarlanır. Bütün satırlar çakıştığından $e_1(A) = \hat{E}_1 A$ 'dır.

2. $e = e_2 (R_i \rightarrow kR_i, k \neq 0_K)$. $\hat{E}_2$ 'nin i -inci satırı, I_m 'nin i -inci satırının k katıdır:

$$\hat{E}_2 A \text{ 'nin } i \text{-inci satırı} = k (I_m \text{ 'nin } i \text{-inci satırı}) A = k (A \text{ 'nin } i \text{-inci satırı})$$

Diğer satırlar değişmez; sonuç $e_2(A)$ 'dır.

3. $e = e_3 (R_i \rightarrow kR_j + R_i)$. $\hat{E}_3$ 'ün i -inci satırı, I_m 'nin j -inci satırının k katı ile i -inci satırının toplamıdır:

$$\hat{E}_3 A \text{ 'nın } i \text{ -inci satırı} = k (A \text{ 'nın } j \text{ -inci satırı}) + (A \text{ 'nın } i \text{ -inci satırı})$$

Bu da $e_3(A)$ 'nın i -inci satırındır; diğer satırlar değişmez.

■

Teorem 6.2 (Elemantar Matrisler Regülerdir). *Elemantar satır matrisleri regülerdir ve elemantar satır matrislerinin tersleri de elemantar satır matrisleridir.*

İspat.

Her elemantar işlemin, aynı türden bir elemantar işlemle geri alınabildiğini kullanacağız.

1. $e_1 : R_i \leftrightarrow R_j$. Aynı yer değiştirme iki kez uygulanırsa matris değişmez:

$$I_m = e_1 (\hat{E}_1) = e_1(I_m)\hat{E}_1 = \hat{E}_1\hat{E}_1$$

Demek ki $\hat{E}_1$ kendi tersidir.

2. $e_2 : R_i \rightarrow kR_i$ ($k \neq 0_K$). Bunun geri alınışı $e'_2 : R_i \rightarrow \frac{1}{k}R_i$ 'dir; K bir cisim olduğundan $k^{-1} \in K \setminus \{0_K\}$ 'dir. $\hat{E}'_2 = e'_2(I_m)$ olmak üzere

$$I_m = e'_2 (\hat{E}_2) = \hat{E}'_2\hat{E}_2, \quad I_m = e_2 (\hat{E}'_2) = \hat{E}_2\hat{E}'_2$$

yani $\hat{E}'_2, \hat{E}_2$ 'nin tersidir ve kendisi de elemantardır.

3. $e_3 : R_i \rightarrow kR_j + R_i$. Geri alınışı $e'_3 : R_i \rightarrow -kR_j + R_i$ 'dir ve aynı hesaplama $\hat{E}'_3\hat{E}_3 = \hat{E}_3\hat{E}'_3 = I_m$ bulunur.

■

I_3 üzerinde somut olarak: $R_1 \leftrightarrow R_2$ matrisinin tersi kendisidir; $R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3$ matrisinin tersi $R_3 \rightarrow 2R_3$ matrisidir; $R_2 \rightarrow 5R_3 + R_2$ matrisinin tersi $R_2 \rightarrow -5R_3 + R_2$ matrisidir.

6.3 Satır Eşdeğerliğin Cebirsel Karşılığı

Teorem 6.3 (Satır Eşdeğerlik ve Regüler Çarpan). $A_{(m,n)}$ ve $B_{(m,n)}$ K -matrisler olsun. A 'nın B 'ye satır eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul, bir takım elemantar satır matrislerinin çarpımı olan regüler bir P matrisiyle

$$B = PA$$

yazılabilmesidir.

İspat.

Gereklik. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olsun; A 'yı B 'ye dönüştüren elemantar satır işlemleri sırasıyla $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(p)}$ olsun:

$$e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(2)} \left(e^{(1)}(A) \right) \right) \dots \right) = B$$

Her adımda önceki teoremi uygularsak, $\hat{E}^{(i)} = e^{(i)}(I_m)$ olmak üzere

$$\hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(2)} \hat{E}^{(1)} A = B$$

elde edilir; ara adımlarda matris çarpımının asosiyatifliği kullanılmıştır. $P = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)}$ dersek $PA = B$ olur. Elemantar matrisler regüler ve regüler matrislerin çarpımı regüler olduğundan P regülerdir ve tanımlı gereği elemantar matrislerin çarpımı biçimindedir.

Yeterlik. $B = (\hat{E}^{(t)} \dots \hat{E}^{(2)} \hat{E}^{(1)}) A$ olacak biçimde elemantar matrisler var olsun. Asosiyatiflikle

$$B = \hat{E}^{(t)} \left(\dots \left(\hat{E}^{(2)} \left(\hat{E}^{(1)} A \right) \right) \dots \right) = e^{(t)} \left(\dots \left(e^{(2)} \left(e^{(1)}(A) \right) \right) \dots \right)$$

yazılır; yani B, A 'dan sonlu sayıda elemantar satır işlemiyle elde edilmiştir: $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$.

■

6.4 Regülerliğin Ölçütü

Teorem 6.4 (Regülerlik Ölçütü). Bir $A_{(n,n)}$ K -matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$$

olmasıdır.

İspat.

Yeterlik. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ olsun. Önceki teoreme göre $PA = I_n$ olacak regüler bir P vardır. O hâlde

$$A = I_n A = (P^{-1}P)A = P^{-1}(PA) = P^{-1}I_n = P^{-1}$$

P regüler olduğundan P^{-1} de regülerdir; yani $A = P^{-1}$ regülerdir ve

$$A^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$$

Gereklik. A regüler olsun. O hâlde $A \neq O_{(n,n)}$ 'dir ve sıfır matristen farklı her matris bir tek satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğer olduğundan $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olacak bir B vardır. Önceki teoremden $B = PA$ biçimindedir; iki regüler matrisin çarpımı regüler olduğundan B regülerdir.

Şimdi $B = I_n$ olduğunu gösterelim. $B \neq I_n$ olsaydı, B satır indirgenmiş bir merdiven matris olduğundan son satırı tamamen 0_K 'lerden ibaret olurdu. B regüler olduğundan B^{-1} vardır ve

$$BB^{-1} \text{ matrisinin son satırı} = (B \text{ 'nin son satırı}) B^{-1} = (0_K \cdots 0_K)$$

olurdu. Oysa $BB^{-1} = I_n$ 'nin son satırında $1_K \neq 0_K$ bulunur — çelişki. Demek ki $B = I_n$, yani $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ 'dir.

■

💡 İspattan çıkan üç sonuç

1. n -inci mertebeden kare matrisler için $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$ 'dir; dolayısıyla $AB = I_n$ ise doğrudan $B = A^{-1}$ (ve $A = B^{-1}$) denebilir — iki sırayı da denetlemeye gerek yoktur.
2. A^{-1} matrisi, A 'yı I_n 'e dönüştüren elemanter satır matrislerinin çarpımıdır.
3. Herhangi bir satırı veya herhangi bir sütunu tamamen 0_K 'lerden oluşan bir kare matrisin tersi yoktur, çünkü böyle bir matris I_n 'e satır eşdeğer olamaz. Daha genel olarak, A regüler değilse bir satırı tamamen 0_K 'lerden oluşan bir matrise satır eşdeğerdir.

6.5 Blok Matrisler

Yatay ve düşey çizgiler kullanarak bir $A_{(m,n)}$ K -matrisi **blok** adı verilen alt matrislere ayrılabilir; bloklara ayrılmış bir matrise **blok matris** denir. Aynı matris farklı biçimlerde bloklara ayrılabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Bloklarla işlemler, bileşenlerle işlemlerin birebir kopyasıdır. $A = (A_{ij})$ blok matrisi ve $k \in K$ için $kA = (kA_{ij})$ 'dir. $A = (A_{ij})$ ile $B = (B_{ij})$ aynı tipte bloklara ayrılmışsa $A + B = (A_{ij} + B_{ij})$ 'dir. $U = (U_{ik})$ ve $V = (V_{kj})$ blok matrislerinde U_{ik} blokunun sütun sayısı V_{kj} blokunun satır sayısına eşitse

$$W_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}V_{2j} + \cdots + U_{ip}V_{pj} \Rightarrow UV = (W_{ij})$$

olur — yani bloklar sanki birer bileşenmiş gibi çarpılır.

6.6 Tersin Hesaplanması

Teorem 6.5 (Gauss-Jordan Yöntemiyle Ters). $A_{(n,n)}$ regüler bir K -matris olmak üzere, $n \times 2n$ tipindeki blok matris için

$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{satır}} (I_n \mid P) \Rightarrow P = A^{-1}$$

İspat.

$(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{satır}} (I_n \mid P)$ olsun; yani

$$e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(1)} \left((A \mid I_n) \right) \right) \dots \right) = (I_n \mid P)$$

olacak elemanter satır işlemleri vardır. Satır işlemleri iki bloka da aynı anda uygulandığından bu tek eşitlik iki eşitliğe ayrılır:

$$e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(1)}(A) \right) \dots \right) = I_n, \quad e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(1)}(I_n) \right) \dots \right) = P$$

$\hat{E}^{(i)} = e^{(i)}(I_n)$ dersek bunlar

$$\hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)} A = I_n, \quad \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)} I_n = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)} = P$$

biçimini alır. Birincisinden $A^{-1} = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)}$, ikincisinden ise bu çarpımın P olduğu okunur; dolayısıyla $A^{-1} = P$ 'dir.

■

Örnek 6.1 (Bir Tersin Hesaplanması). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ -matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm.

$(A \mid I_3)$ blok matrisini yazıp sol bloku I_3 yapmaya çalışalım:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[R_2 \rightarrow -R_2]{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_3]{R_2 \rightarrow -R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[R_1 \rightarrow -2R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow -R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_1 \rightarrow -2R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow -R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sol blok I_3 olduğuna göre sağ blok aranan terstir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sağlama olarak AA^{-1} 'in birinci satırını hesaplayalım: $(1 \ 0 \ 2)$ satırı ile sırasıyla sütunlar çarpıldığında $-11 + 12 = 1$, $2 - 2 = 0$, $2 - 2 = 0$ bulunur.

■

Örnek 6.2 (Singüler Bir Matris). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ matrisinin singüler olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Regülerlik ölçütü gereği A 'nın satır kanonik şeklinin I_3 olup olmadığına bakmak yeterlidir:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_1 + R_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elde edilen B matrisi, A 'nın satır indirgenmiş merdiven şeklindedir ve $B \neq I_3$ 'tür. Satır kanonik şekil tek türlü belirli olduğundan $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_3$ olamaz; dolayısıyla A singülerdir.

■

6.7 Alıştırma

Alıştırma 6.1 (Ters Hesabı ve Regülerlik).

- a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.
- b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.
- c) Bir $A_{(n,n)}$ matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşulun, A 'nın bir takım elemanter satır matrislerinin çarpımı biçiminde yazılabildiğini gösteriniz.

Çözüm.

a) $(A \mid I_3)$ üzerinde çalışalım. Önce birinci satırı -1 ile çarparak köşeye 1 getirelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Üçüncü satırda 1 belirdiğine göre onu ikinci sıraya alalım:

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -5R_2 + R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 6 & -5 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -3R_3 + R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -25 & 18 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array} \right)$$

Son olarak ikinci sütunu temizleyelim:

$$R_1 \rightarrow 2R_2 + R_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array} \right)$$

Demek ki

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Sağlama: AA^{-1} 'in birinci satırı $(5+20-24 \quad -4-14+18 \quad 3+12-15) = (1 \ 0 \ 0)$.

b) Aynı yöntemi uygulayalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 + R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

Üçüncü sütunu temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 + R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

$$R_1 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 + R_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

Yani

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Sağlama: BB^{-1} 'in birinci satırı $(16-5-10 \quad -2+1+1 \quad -6+2+4) = (1 \ 0 \ 0)$.

c) Gereklik. A regüler olsun. Regülerlik ölçütüne göre $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ 'dir; dolayısıyla elemanter matrislerin çarpımı olan bir P ile $PA = I_n$ yazılır. Buradan

$$A = P^{-1}$$

bulunur. $P = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)}$ ise çarpımın tersi kuralıyla

$$A = P^{-1} = (\hat{E}^{(1)})^{-1} \dots (\hat{E}^{(p)})^{-1}$$

olur. Elemanter matrislerin tersleri de elemanter olduğundan A , elemanter matrislerin bir çarpımıdır.

Yeterlik. $A = \hat{E}^{(1)} \hat{E}^{(2)} \dots \hat{E}^{(p)}$ olsun. Her elemanter matris regülerdir ve regüler matrislerin çarpımı regülerdir; nitekim

$$A^{-1} = (\hat{E}^{(p)})^{-1} \dots (\hat{E}^{(1)})^{-1}$$

matrisi A 'nın tersidir. Demek ki A 'nın tersi vardır.

■

Matris makinesi hazır. Şimdi onu asıl işinde kullanacağız: bilinmeyenleri bulmak. Sıradaki bölümde lineer denklemleri ve sistemlerini kurup çözüm kümesinin yapısını inceliyoruz: [lineer denklemler ve sistemleri](#).

7. Lineer Denklemler ve Sistemleri

Lineer cebirin çıkış noktası, adını da veren nesnedir: bilinmeyenlerin yalnızca birinci kuvvetleriyle görüldüğü denklemler. Bu bölümde önce tek bir lineer denklemin ne zaman çözüldüğünü, ardından bir denklem sisteminin çözüm kümesinin nasıl bir yapı taşıdığını inceliyoruz. Çıkacak sonuç şaşırtıcı derecede düzenlidir: bir sistemin bütün çözümleri, tek bir çözümün etrafına dizilmiş olarak bulunur.

7.1 Lineer Denklem

Tanım 7.1 (Lineer Denklem). K komutatif bir cisim olsun. x_i ($i = 1, \dots, n$) bilinmeyenler (değişkenler), $a_i \in K$ ve $b \in K$ olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

ifadesine K cismi üzerinde n bilinmeyenli bir **lineer denklem** denir. a_i 'ye x_i değişkeninin **katsayısı**, b 'ye denklemin **sabit terimi** denir.

x_i yerine $k_i \in K$ konulduğunda

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n = b$$

oluyorsa, $x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$ 'ye (1) denkleminin bir **çözümü** denir ve bu çözüm

$$u = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 7.1 (Bir n-li Çözüm mü?). $K = \mathbb{R}$ üzerinde $x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 3$ denklemini için $u = (3, 2, 1, 0)$ ve $v = (1, 2, 4, 5)$ dörtlülerini sınamayız.

Çözüm.

u için bilinmeyenlerin yerine sırayla 3, 2, 1, 0 koyalım:

$$3 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3 + 4 - 4 = 3$$

Eşitlik sağlandığından u bir çözümdür. v için ise

$$1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 5 = 1 + 4 - 16 + 5 = -6 \neq 3$$

olduğundan v bir çözüm **değildir**.

■

Tek bir lineer denklemin çözümleri üç duruma ayrılır.

1. Katsayılarından en az biri sıfırdan farklı. Diyelim $a_1 \neq 0_K$ olsun. K bir cisim olduğundan a_1^{-1} vardır ve denklem

$$x_1 = a_1^{-1}b - a_1^{-1}a_2x_2 - \dots - a_1^{-1}a_nx_n$$

biçiminde yazılabilir. $x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenlerine keyfi değerler verilerek x_1 için bir değer bulunur; bu değerlerin tümü birlikte bir çözüm oluşturur. Ayrıca denklemin **her** çözümü bu biçimde elde edilir. Özel olarak tek bilinmeyenli $ax = b$ ($a \neq 0_K$) denkleminin tek çözümü $x = a^{-1}b$ 'dir.

2. Bütün katsayılar sıfır, sabit terim sıfırdan farklı. Denklem

$$0_Kx_1 + \dots + 0_Kx_n = b, \quad b \neq 0_K$$

biçimindedir ve sol taraf hangi değerler için de olsa 0_K olduğundan **çözümü yoktur**.

3. Bütün katsayılar ve sabit terim sıfır. Bu durumda her $(k_1, \dots, k_n)$ n -lisi denklemi sağlar; çözüm kümesi K^n 'in tamamıdır.

Örnek 7.2 (Tek Denklemin Çözümleri). $K = \mathbb{R}$ üzerinde $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 8$ denkleminin çözümlerini betimleyiniz ve bir örnek veriniz.

Çözüm.

x_1 'in katsayısı $2 \neq 0$ olduğundan denklem x_1 için çözülebilir:

$$2x_1 = 8 + 4x_2 - x_3 \implies x_1 = 4 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

x_2 ve x_3 'e herhangi bir değer verildiğinde x_1 'in değeri belirlenir ve üç değer birlikte bir çözüm oluşturur. Örneğin $x_2 = 3, x_3 = 2$ alalım:

$$x_1 = 4 + 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 + 6 - 1 = 9$$

Yani $(9, 3, 2)$ denklemin bir çözümüdür.

■

7.2 Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 7.2 (Lineer Denklem Sistemi). K komutatif bir cisim, $a_{ij}, b_i \in K$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) olmak üzere $x_1, \dots, x_n$ bilinmeyenlerinden oluşan m tane lineer denklemin oluşturduğu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2)$$

topluluğuna n bilinmeyenli m denklemlili bir **lineer denklem sistemi** denir.

$b_1, b_2, \dots, b_m$ 'nin hepsi birden 0_K değilse sisteme **homojen olmayan**, hepsi 0_K ise **homojen** lineer denklem sistemi denir.

$u = (k_1, \dots, k_n)$ n -lisi (2) sistemindeki denklemlerin **her birini** sağlıyorsa u 'ya sistemin bir **(özel) çözümü** denir. Bütün özel çözümlerin oluşturduğu kümeye sistemin **çözüm kümesi** (veya **genel çözümü**) denir.

(2) sistemindeki sabit terimlerin yerine 0_K konulmasıyla elde edilen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0_K \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0_K \end{aligned} \quad (3)$$

sistemine, (2) ile **ilgili homojen sistem** denir.

i Homojen sistem hiçbir zaman çözümsüz değildir

(3) sisteminin en az bir çözümü daima vardır: $(0_K, 0_K, \dots, 0_K)$ n -lisi bütün denklemleri sağlar. Bu çözüme **sıfır çözüm** veya **triviyal çözüm** denir. Bir homojen sistemin sıfır çözümden farklı çözümleri varsa bunlara **triviyal olmayan çözümler** denir. Homojen sistemlerde asıl soru “çözüm var mı?” değil, “sıfırdan başka çözüm var mı?” sorusudur.

7.3 Katsayılar Matrisi ve Genişletilmiş Matris

Tanım 7.3 (Katsayılar Matrisi). (2) sistemindeki bilinmeyenlerin katsayılarıyla oluşturulan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{(m,n)}$$

matrisine sistemin **katsayılar matrisi** denir.

Tanım 7.4 (Genişletilmiş Matris). Katsayılar matrisine sabit terimlerin bir sütun olarak eklenmesiyle elde edilen

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)_{(m,n+1)}$$

matrisine sistemin **genişletilmiş matrisi** denir.

Genişletilmiş matris, sistemin bütün bilgisini taşıyan tek nesnedir: bilinmeyenlerin adları unutulup yalnızca sayılarla çalışılabilir. Sonraki bölümlerde çözüm yöntemleri tam olarak bu matris üzerinde yürütülecektir.

7.4 Çözüm Kümesinin Yapısı

Teorem 7.1 (Genel Çözümün Yapısı). u , (2) homojen olmayan sisteminin bir özel çözümü ve W da (2) ile ilgili (3) homojen sisteminin genel çözümü olsun. Bu takdirde (2) sisteminin U genel çözümü

$$U = u + W = \{u + w : w \in W\}$$

kümesidir.

İspat.

Teoremin hipotezi gereği $U \neq \emptyset$ 'dir. İki kapsamayı ayrı ayrı göstereceğiz.

$u + W \subseteq U$. $u = (u_1, \dots, u_n)$, (2)'nin bir çözümü olduğundan

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4)$$

$w = (w_1, \dots, w_n) \in W$ alalım; w , (3)'ün bir çözümü olduğundan

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n = 0_K \quad (i = 1, \dots, m) \quad (5)$$

(4) ve (5) taraf tarafa toplanır ve dağılma özelliği kullanılırsa

$$a_{i1}(u_1 + w_1) + a_{i2}(u_2 + w_2) + \cdots + a_{in}(u_n + w_n) = b_i + 0_K = b_i$$

bulunur. Demek ki $u + w = (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n)$ de (2)'nin bir çözümüdür; her $w \in W$ için bu doğru olduğundan $u + W \subseteq U$ 'dur.

$U \subseteq u + W$. $v = (v_1, \dots, v_n) \in U$ keyfi bir çözüm olsun:

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

v 'yi u 'nun etrafında yazalım:

$$v = (u_1 + (v_1 - u_1), \dots, u_n + (v_n - u_n)) = u + (v - u)$$

Şimdi $v - u = (v_1 - u_1, \dots, v_n - u_n)$ n -lisinin (3)'ü sağladığını görelim. Her i için

$$\begin{aligned} a_{i1}(v_1 - u_1) + \cdots + a_{in}(v_n - u_n) &= (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) \\ &\quad - (a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n) \\ &= b_i - b_i = 0_K \end{aligned}$$

Burada K 'nin komutatif bir halka olmasından gelen $-(ab) = a(-b)$ ve $-(c_1 + \dots + c_n) = (-c_1) + \dots + (-c_n)$ kuralları kullanılmıştır. Demek ki $v - u \in W$ ve $v = u + (v - u) \in u + W$ 'dir. İki kapsama birlikte $U = u + W$ verir.

■

Teoremin okunuşu

Homojen olmayan bir sistemin çözüm kümesi, ilgili homojen sistemin çözüm kümesinin **bir vektör kadar kaydırılmış hâlidir**. Bunun iki pratik sonucu var: bir sistemin bütün çözümlerini bulmak için tek bir özel çözüm ile homojen sistemin genel çözümünü bilmek yeterlidir; ve bir sistemin **tek** çözümü olması, ilgili homojen sistemin sıfır çözümünden başka çözümünün olmaması demektir.

7.5 Alıştırma

Alıştırma 7.1 (Denklemler ve Çözüm Kümeleri).

- $K = \mathbb{R}$ üzerinde $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ denkleminin bütün çözümlerini betimleyiniz ve iki farklı çözüm yazınız.
- $x + y + z = 6$ denkleminin bir özel çözümünün $(1, 2, 3)$ olduğunu doğrulayınız; ilgili homojen denklemin genel çözümünü bulup denklemin genel çözümünü $u + W$ biçiminde yazınız.
- Homojen olmayan bir sistemin iki farklı çözümü varsa, sonsuz çoklukta çözümü olduğunu gösteriniz. (Burada K sonsuz bir cisim, örneğin $\mathbb{R}$, alınsın.)

Çözüm.

a) x_1 'in katsayısı $3 \neq 0$ olduğundan denklem x_1 için çözülür:

$$3x_1 = 5 + x_2 - 2x_3 \implies x_1 = \frac{5 + x_2 - 2x_3}{3}$$

$x_2 = a, x_3 = b$ serbest bırakılırsa çözüm kümesi

$$\left\{ \left(\frac{5 + a - 2b}{3}, a, b \right) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

olur. $a = 1, b = 0$ için $(2, 1, 0)$; $a = 0, b = 1$ için $(1, 0, 1)$ çözümleri elde edilir. Sağlama: $3 \cdot 2 - 1 + 0 = 5$ ve $3 \cdot 1 - 0 + 2 = 5$.

b) Doğrudan yerine koyalım: $1 + 2 + 3 = 6$ olduğundan $u = (1, 2, 3)$ bir çözümdür.

İlgili homojen denklem $x + y + z = 0$ 'dır. Buradan $x = -y - z$ olur; $y = a, z = b$ serbest bırakılırsa

$$W = \{ (-a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Genel çözüm, teoremin verdiği biçimde

$$U = u + W = \{ (1 - a - b, 2 + a, 3 + b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

olur. Bileşenler toplandığında $1 - a - b + 2 + a + 3 + b = 6$ çıkması, kümenin gerçekten çözümlerden oluştuğunu doğrular.

c) Sistemin $u \neq v$ gibi iki çözümü olsun. Teoremin ispatındaki hesabın aynısıyla $w = v - u$ farkı ilgili homojen sistemin bir çözümüdür ve $u \neq v$ olduğundan $w \neq (0, \dots, 0)$ 'dır.

Şimdi herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için tw 'nin de homojen sistemi sağladığını görelim: i -inci denklemde

$$a_{i1}(tw_1) + \dots + a_{in}(tw_n) = t(a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n) = t \cdot 0 = 0$$

Demek ki $tw \in W$ 'dir ve teoreme göre $u + tw$ sistemin bir çözümüdür. $w \neq 0$ olduğundan w 'nin sıfırdan farklı bir w_j bileşeni vardır; farklı t değerleri $u + tw$ çözümünün j -inci bileşenini farklı yapar. $\mathbb{R}$ sonsuz olduğundan böylece sonsuz çoklukta farklı çözüm elde edilir.

Bunun tersi de aynı akıl yürütmeyeyle görülür: bir sistemin çözüm sayısı ya sıfırdır, ya birdir, ya da sonsuzdur — “tam olarak iki çözüm” diye bir durum yoktur.

■

Çözüm kümesinin yapısını biliyoruz ama henüz onu bulacak bir yöntemimiz yok. Sıradaki adım, sistemi çözüm kümesini bozmadan sadeleştirmektir: [eşdeğer sistemler ve merdiven şekli](#).

8. Eşdeğer Sistemler ve Merdiven Şekli

Bir denklem sistemini çözmenin klasik yolu, denklemleri birbirinden çıkarıp bilinmeyenleri teker teker yok etmektir. Bu bölümde o hamlenin neden meşru olduğunu – yani çözüm kümesini neden bozmadığını – kanıtlayacak ve sistemi olabildiğince yalın bir biçime, **merdiven şekline** getireceğiz. Bu biçime ulaşıldığında çözümün varlığı ve tekliliği tek bir sayıya bakarak okunur.

8.1 Denklemlerin Lineer Birleşimleri

Teorem 8.1 (Denklemlerin Lineer Birleşimi). (2) lineer denklem sistemindeki 1-inci denklemi $c_1 \in K$ ile, 2-inci denklemi $c_2 \in K$ ile, ..., m -inci denklemi $c_m \in K$ ile çarpıp taraf tarafa toplayarak elde edilen

$$\begin{aligned} & (c_1 a_{11} + \dots + c_m a_{m1}) x_1 + \dots + (c_1 a_{1n} + \dots + c_m a_{mn}) x_n \\ & = c_1 b_1 + \dots + c_m b_m \end{aligned} \quad (8)$$

denklemi, (2) sisteminin **her** çözümü tarafından sağlanır.

İspat.

$u = (u_1, \dots, u_n)$, (2) sisteminin bir çözümü olsun. O hâlde her $i = 1, \dots, m$ için

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = b_i$$

(8) denkleminin sol tarafında x_j yerine u_j koyup terimleri satırlara göre gruplayalım:

$$\begin{aligned} & (c_1 a_{11} + \dots + c_m a_{m1}) u_1 + \dots + (c_1 a_{1n} + \dots + c_m a_{mn}) u_n \\ & = c_1 \underbrace{(a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n)}_{b_1} + \dots + c_m \underbrace{(a_{m1}u_1 + \dots + a_{mn}u_n)}_{b_m} \\ & = c_1 b_1 + \dots + c_m b_m \end{aligned}$$

Bu ise (8)'in sağ tarafıdır; yani u , (8) denklemini sağlar. Ara adımda yalnızca K 'de çarpmanın toplama üzerine dağılması ve toplamının komutatifliği kullanılmıştır.

■

Tanım 8.1 (Eşdeğer Sistemler). Çözüm kümeleri aynı olan iki lineer denklem sistemine **eşdeğer** (denk) sistemler denir.

8.2 Yok Etme Adımı Çözüm Kümesini Değiştirmez

Teorem 8.2 (Yok Etme Adımı). (2) sistemindeki i -inci denklemi L_i ile gösterelim ($i > 1$) ve $a_{11} \neq 0_K$ olsun. (2) sistemindeki L_i denklemini yerine

$$-a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$$

denklemini koymakla elde edilen sistem, (2) sistemiyle eşdeğerdir.

İspat.

Yeni sistemi $(\star)$ ile gösterelim; $(\star)$, L_1 denklemini aynen taşır ve L_i yerine $L'_i = -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$ denklemini içerir; diğer denklemler değişmemiştir.

(2)'nin her çözümü $(\star)$ 'ı sağlar. L'_i denklemini, (2)'nin denklemlerinin bir lineer birleşimidir (L_1 için katsayı $-a_{i1}$, L_i için a_{11} , diğerleri için 0_K). Bir önceki teoreme göre (2)'nin her çözümü bu birleşimi sağlar. Değişmeyen denklemler zaten sağlanır.

($\star$)'ın her çözümü (2)'yi sağlar. $a_{11} \neq 0_K$ ve K bir cisim olduğundan a_{11}^{-1} vardır. L'_i tanımından

$$a_{11}L_i = L'_i + a_{i1}L_1 \implies L_i = a_{11}^{-1}L'_i + a_{11}^{-1}a_{i1}L_1$$

yazılır; yani L_i denklemi, ($\star$) sistemindeki L'_i ve L_1 denklemlerinin bir lineer birleşimidir. Yine önceki teoreme göre ($\star$)'ın her çözümü L_i 'yi sağlar; diğer denklemler ortak olduğundan ($\star$)'ın her çözümü (2)'nin de çözümüdür.

İki kapsama birlikte çözüm kümelerinin eşit olduğunu verir.

■

i Üç pratik uyarı

1. Teoremdeki $a_{11} \neq 0_K$ varsayımı bir kısıtlama değildir: denklemlerin yerleri değiştirilerek bu daima sağlanabilir ve yer değiştirmeye elde edilen sistem – her denklem diğerinin bir lineer birleşimi olduğundan – asıl sistemle eşdeğerdir.
2. Elde edilen sistem $0_Kx_1 + \dots + 0_Kx_n = b$ ($b \neq 0_K$) denklemini içeriyorsa, bu denklemin çözümü olmadığından **sistemin çözümü yoktur**.
3. Elde edilen sistem $0_Kx_1 + \dots + 0_Kx_n = 0_K$ denklemini içeriyorsa, bu denklem her n -li tarafından sağlandığından sistemden **atılabilir**.

8.3 Merdiven Şekli

Yok etme adımı tekrar tekrar uygulanarak (2) sistemi, $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_r$ ve

$$a_{11} \neq 0_K, \quad a_{2j_2} \neq 0_K, \quad \dots, \quad a_{rj_r} \neq 0_K$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \dots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned} \tag{9}$$

sistemine geçirilebilir. Önceki teoremden (2) ile (9) eşdeğerdir.

Tanım 8.2 (Merdiven Şekli). (9) sistemine (2) sisteminin bir **merdiven şekli** denir.

Tanım 8.3 (Serbest Değişkenler). (9) merdiven şeklindeki

$$x_i \quad (i \neq 1, j_2, \dots, j_r)$$

bilinmeyenlerine, yani hiçbir denklemin başında görünmeyen bilinmeyenlere **serbest değişkenler** denir.

💡 Matris diliyle aynı şey

(9) sisteminin genişletilmiş matrisi, (2) sisteminin genişletilmiş matrisinin bir **merdiven şeklidir**. Yani denklemler üzerinde yapılan yok etme adımları, genişletilmiş matris üzerinde yapılan elemanter satır işlemlerinden başka bir şey değildir. Uygulamada hesap her zaman matris üzerinde yürütülür.

(9) sisteminde $r \leq n$ 'dir: her denklem bir öncekinden daha ileri bir sütunda başladığından denklem sayısı bilinmeyen sayısını aşamaz. Başka bir deyişle **herhangi bir lineer denklem sistemi, denklem sayısı bilinmeyen sayısından küçük veya ona eşit olan bir sisteme eşdeğerdir**.

8.4 Çözümün Varlığı ve Tekliği

Teorem 8.3 (Merdiven Şeklinde Çözüm). (9) merdiven şeklindeki sistemde:

1. $r = n$ ise, yani denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitse, sistemin çözümü vardır ve bu çözüm **tektir**.
2. $r < n$ ise, $n - r$ tane serbest değişkene keyfi değerler vererek sistemin bir çözümü bulunabilir; bu durumda sistemin **birden fazla** çözümü vardır.

İspat.

1. $r = n$ olsun. Sütun numaraları $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq n$ kesin arttığından zorunlu olarak $j_i = i$ 'dir; yani sistem üçgen biçimindedir ve i -inci denklem x_i ile başlar. Son denklem

$$a_{nn}x_n = b_n, \quad a_{nn} \neq 0_K$$

biçimindedir ve tek çözümü $x_n = a_{nn}^{-1}b_n$ 'dir. Bu değer bir üstteki denkleme taşınırsa o denklem yalnız x_{n-1} bilinmeyenli birinci dereceden bir denkleme iner ve yine tek biçimde çözülür. Aşağıdan yukarı doğru ilerlenerek $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ değerlerinin her biri tek türlü belirlenir.

2. $r < n$ olsun. Serbest değişkenlere K 'den keyfi değerler atayalım. Bu değerler yerine konduğunda (9) sistemi, $x_1, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ bilinmeyenlerinden oluşan ve birinci durumdaki gibi üçgen biçimde olan r denklemlili bir sisteme dönüşür; yukarıdaki gibi aşağıdan yukarı çözülerek bu bilinmeyenlerin değerleri bulunur. Serbest değişkenlere verilen her farklı değer ailesi bir çözüm ürettiğinden ve serbest değişken sayısı $n - r \geq 1$ olduğundan sistemin birden fazla çözümü vardır.

■

Bu teoremden çıkan üç okuma:

1. (9) sisteminin ve dolayısıyla ona eşdeğer olan (2) sisteminin en az bir çözümü vardır — merdiven şekline inildiyse ve içinde $0_K = b \neq 0_K$ türü bir denklem kalmadıysa.
2. Merdiven şeklinde $r < n$ ise serbest değişkenlere mümkün olan her değer verilebilir; çözüm sayısı birden fazladır.
3. Bir sistemin **tek** çözümünün olması, **genel çözümün yapısı gereği**, ilgili homojen sistemin sıfır çözümünden başka çözümünün olmaması durumunda ortaya çıkar.

8.5 Homojen Sistemler

Teorem 8.4 (Homojen Sistemlerde Triviyal Olmayan Çözüm). K komutatif bir cisim ve $a_{ij} \in K$ olmak üzere (3) homojen sisteminin bir merdiven şekli r denklemlili olsun.

1. $r = n$ ise homojen sistemin sıfır çözümden başka çözümü **yoktur**.
2. $r < n$ ise homojen sistemin sıfır çözümden **farklı** bir çözümü vardır.

İspat.

Homojen bir sistemde bütün sabit terimler 0_K olduğundan, yok etme adımları sabit terimleri 0_K olarak bırakır: merdiven şekli de homojendir.

1. $r = n$ ise bir önceki teoremin birinci maddesine göre çözüm tektir. Sıfır çözüm daima bir çözüm olduğundan, tek olan çözüm sıfır çözümdür.
2. $r < n$ ise en az bir serbest değişken vardır. Bu serbest değişkenlerden birine $1_K \neq 0_K$, diğerlerine 0_K değerini verelim; teoremin ikinci maddesine göre bu atama bir çözüm üretir. Elde edilen n -linin o serbest değişkene karşılık gelen bileşeni $1_K \neq 0_K$ olduğundan çözüm sıfır çözüm değildir.

■

 Denklemden çok bilinmeyen varsa

Bilinmeyen sayısı denklem sayısından **büyük** olan bir homojen lineer denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı bir çözümü vardır. Gerçekten merdiven şeklindeki denklem sayısı r , başlangıçtaki denklem sayısı m 'yi aşamaz; $m < n$ ise $r \leq m < n$ olur ve teoremin ikinci maddesi uygulanır. Bu küçük gözlem, ilerideki lineer bağımsızlık ve boyut teoremlerinin belkemiğidir.

8.6 Alıştırma

Alıştırma 8.1 (Eşdeğerlik ve Merdiven Şekli).

- a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$; $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8$ sisteminin bir merdiven şeklini bulunuz, serbest değişkenleri belirleyip çözüm kümesini yazınız.
- b) Aşağıdaki homojen sistemlerin sıfır çözümünden farklı çözümünün olup olmadığını, tek bir hesap yapmadan gerektendiriniz:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ & 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ & 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ \text{(ii)} \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

- c) İki lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisleri satır eşdeğer ise sistemlerin eşdeğer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

- a) İkinci denklemden birincinin iki katını çıkaralım, yani $L_2 \rightarrow -2L_1 + L_2$ uygulayalım:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Bu bir merdiven şeklidir: $j_1 = 1 < j_2 = 2$ ve $r = 2$, $n = 3$ 'tür. Serbest değişken sayısı $n - r = 1$ 'dir; serbest değişken x_3 'tür.

$x_3 = a$ alalım. İkinci denklemden $x_2 = 2 - 3a$; birinci denklemden

$$x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 = 3 - 2(2 - 3a) + a = 3 - 4 + 6a + a = -1 + 7a$$

Çözüm kümesi

$$\{ (-1 + 7a, 2 - 3a, a) : a \in \mathbb{R} \}$$

Sağlama için $a = 0$ alalım: $(-1, 2, 0)$ için $-1 + 4 - 0 = 3$ ve $-2 + 10 + 0 = 8$ doğrudur.

b) (i) Sistem homojendir; bilinmeyen sayısı $n = 4$, denklem sayısı $m = 3$ 'tür. $n > m$ olduğundan merdiven şeklindeki denklem sayısı $r \leq 3 < 4$ olur ve sıfır çözümünden farklı bir çözüm vardır.

(ii) Burada $n = m = 3$ 'tür; bu tek başına sonucu belirlemez, çünkü merdiven şeklindeki r değeri 3'ten küçük de olabilir. Kısa bir hesap gerekir:

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow -2L_1 + L_2 : x_2 + 8x_3 = 0 \\ L_3 &\rightarrow -3L_1 + L_3 : -7x_2 + 5x_3 = 0 \end{aligned}$$

Ardından $L_3 \rightarrow 7L_2 + L_3$ ile $61x_3 = 0$ elde edilir. Merdiven şekli

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \quad x_2 + 8x_3 = 0, \quad 61x_3 = 0$$

olup $r = n = 3$ 'tür; dolayısıyla yalnızca sıfır çözüm vardır.

c) İki sistemin genişletilmiş matrisleri $(A | b)$ ve $(A' | b')$ olsun ve $(A | b) \stackrel{\text{satır}}{\sim} (A' | b')$ olsun. Satır eşdeğerlik, sonlu sayıda elemanter satır işlemiyle geçiş demektir; her elemanter satır işleminin denklemler üzerindeki karşılığı şudur:

- $R_i \leftrightarrow R_j$: iki denklemin yer değiştirmesi,
- $R_i \rightarrow kR_i$ ($k \neq 0_K$): bir denklemin sıfırdan farklı bir skalerle çarpılması,
- $R_i \rightarrow kR_j + R_i$: bir denklemin, başka bir denklemin k katıyla toplanması.

Üçü de yeni denklemleri eski denklemlerin lineer birleşimi olarak verir; lineer birleşim teoremine göre eski sistemin her çözümü yeni sistemi sağlar. Öte yandan üç işlemin her biri geri alınabilir (sırasıyla aynı yer değiştirme, k^{-1} ile çarpma ve $-kR_j + R_i$); dolayısıyla aynı gerekçeyle yeni sistemin her çözümü de eskisini sağlar. İki çözüm kümesi birbirini kapsadığından eşittir: sistemler eşdeğerdir.

■

Kuram tamamlandı: hangi hamlelerin serbest olduğunu ve merdiven şekline inildiğinde neye bakılacağını biliyoruz. Sırada bunun düzenli bir hesap yöntemine dönüşmesi var: [Gauss yok etme yöntemi](#).

9. Gauss Yok Etme Yöntemi

Kuram hazır: satır işlemleri çözüm kümesini değiştirmiyor ve merdiven şekline inildiğinde her şey okunabiliyor. Geriye bunu düzenli bir hesaba çevirmek kalıyor. Yöntem hep aynıdır – genişletilmiş matrisi yaz, merdiven şekline indir, aşağıdan yukarı geri yerine koy – ve karşılaşılabilecek bütün durumlar üç başlıkta toplanır: çözüm yok, tek çözüm, sonsuz çözüm.

9.1 Yöntemin Adımları

Bir sistemi çözerken izlenecek yol şudur:

1. Sistemin **genişletilmiş matrisi** $(A | b)$ yazılır.
2. Elemanter satır işlemleriyle bu matris bir **merdiven matrise** indirgenir.
3. Merdiven matriste $(0_K \cdots 0_K | b)$, $b \neq 0_K$ biçiminde bir satır varsa sistemin **çözümü yoktur**; işlem burada biter.
4. Aksi hâlde tamamen sıfır satırlar atılır ve kalan denklem sayısı r ile bilinmeyen sayısı n karşılaştırılır. $r = n$ ise **tek çözüm** vardır; $r < n$ ise $n - r$ tane **serbest değişken** belirlenir ve bunlara birer parametre atanır.
5. En alttaki denklemden başlanarak bilinmeyenler yukarı doğru çözülür.

9.2 Çözumsuz Bir Sistem

Örnek 9.1 (Çözümü Olmayan Sistem). $K = \mathbb{R}$ üzerinde

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 5\end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi yazıp birinci sütunun altını temizleyelim. Kesirlerden kaçınmak için ikinci ve üçüncü satırları 2 ile çarpıp birinciye çıkaralım – bu, $L_2 \rightarrow -3L_1 + 2L_2$ ve $L_3 \rightarrow -3L_1 + 2L_3$ adımlarına karşılık gelir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 & 7 \end{array} \right)$$

Şimdi ikinci sütunun altını temizleyelim:

$$R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right)$$

Son satır

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -8$$

denkleme karşılık gelir; sol taraf hangi değerler için de olsa 0 olduğundan bu denklemin çözümü yoktur. Merdiven şeklindeki sistemin çözümü olmadığına göre, ona eşdeğer olan asıl sistemin de **çözümü yoktur**.

■

9.3 Tek Çözümlü Bir Sistem

Örnek 9.2 (Denklem Sayısı Fazla, Çözüm Tek).

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\x_1 + 3x_2 + x_3 &= 11 \\2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 13 \\2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 22\end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -2R_1 + R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -2R_2 + R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tamamen sıfır olan son satır atılır. Kalan sistem

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \quad x_2 + 4x_3 = 7, \quad -2x_3 = -2$$

olup $r = n = 3$ 'tür; dolayısıyla çözüm tektir. Aşağıdan yukarı çözelim:

$$-2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$x_2 = 7 - 4x_3 = 7 - 4 = 3$$

$$x_1 = 4 - 2x_2 + 3x_3 = 4 - 6 + 3 = 1$$

Çözüm kümesi $\{(1, 3, 1)\}$ 'dir. Sağlama olarak dördüncü denklemi deneyelim: $2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2 + 18 + 2 = 22$.

■

9.4 İki Homojen Sistem

Örnek 9.3 (Triviyal Olmayan Çözümü Olan Homojen Sistem).

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

Homojen sistemlerde sabit terim sütunu hep 0 kaldığından yalnızca katsayılar matrisi üzerinde çalışmak yeterlidir; yine de sütunu yazalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kalan sistem

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad -5x_2 + 3x_3 = 0$$

olup $r = 2 < n = 3$ 'tür. Serbest değişken sayısı $n - r = 1$ 'dir; serbest değişken x_3 'tür. $x_3 = a$ alalım:

$$-5x_2 + 3a = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{5}a$$

$$x_1 = -x_2 + x_3 = -\frac{3}{5}a + a = \frac{2}{5}a$$

Çözüm kümesi

$$\left\{ \left(\frac{2}{5}a, \frac{3}{5}a, a \right) : a \in \mathbb{R} \right\}$$

$a = 5$ alınırsa $(2, 3, 5)$ gibi somut bir triviyal olmayan çözüm elde edilir; sağlama: $2 + 3 - 5 = 0$, $4 - 9 + 5 = 0$, $2 - 12 + 10 = 0$.

■

Örnek 9.4 (Yalnızca Sıfır Çözümü Olan Homojen Sistem).

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 + R_3]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Merdiven şeklinde $r = n = 3$ 'tür; dolayısıyla sistemin tek çözümü vardır ve homojen bir sistemin çözümü daima sıfır çözümü içerdiğinden bu tek çözüm sıfır çözümüdür. Nitekim aşağıdan yukarı:

$$\frac{11}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0, \quad 2x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \quad x_1 = -x_2 + x_3 = 0$$

Çözüm kümesi $\{(0, 0, 0)\}$ 'dir.

■

9.5 İki Serbest Değişkenli Sistemler

Örnek 9.5 (Zaten Merdiven Şeklinde Bir Sistem).

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

sisteminin çözüm kümesini bulunuz ve bir özel çözüm yazınız.

Çözüm.

Genişletilmiş matris

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 6 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

zaten bir merdiven matristir: ayrıcalıklı elemanlar 2, 1 ve 1 olup sütunları $j_1 = 1 < j_2 = 2 < j_3 = 4$ olarak artmaktadır. Burada $r = 3 < n = 5$ 'tir; serbest değişken sayısı $n - r = 2$ 'dir ve serbest değişkenler ayrıcalıklı sütunlarda görünmeyen x_3 ile x_5 'tir.

$x_3 = a, x_5 = b$ alalım. Üçüncü denklemden

$$x_4 = 2 + 3b$$

İkinci denklemden

$$x_2 = 1 + 4x_3 - x_4 = 1 + 4a - (2 + 3b) = -1 + 4a - 3b$$

Birinci denklemden

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 3 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 3 + 3(-1 + 4a - 3b) - 6a - 2(2 + 3b) + 5b \\ &= 3 - 3 + 12a - 9b - 6a - 4 - 6b + 5b = 6a - 10b - 4 \end{aligned}$$

Buradan $x_1 = 3a - 5b - 2$ bulunur. Çözüm kümesi

$$\{ (3a - 5b - 2, -1 + 4a - 3b, a, 2 + 3b, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Özel bir çözüm için $a = 2, b = 1$ alalım: $(-1, 4, 2, 5, 1)$. Sağlama: ikinci denklemden $4 - 8 + 5 = 1$, üçüncüde $5 - 3 = 2$, birincide $-2 - 12 + 12 + 10 - 5 = 3$.

■

Örnek 9.6 (Dört Bilinmeyenli Bir Sistem).

$$x + 2y - 2z + 3w = 2, \quad 2x + 4y - 3z + 4w = 5$$

$$5x + 10y - 8z + 11w = 12$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

İkinci sütun tamamen boş kaldığından ayrıcalıklı sütunlar $j_1 = 1$ ve $j_2 = 3$ 'tür; serbest değişkenler y ve w 'dir ($n - r = 4 - 2 = 2$).

$y = a, w = b$ alalım. İkinci denklemden

$$z = 1 + 2b$$

Birinci denklemden

$$x = 2 - 2y + 2z - 3w = 2 - 2a + 2(1 + 2b) - 3b = 4 - 2a + b$$

Çözüm kümesi

$$\{ (4 - 2a + b, a, 1 + 2b, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

■

Örnek 9.7 (Bilinmeyen Sırasına Dikkat).

$$x - 3y - 2w + 4z = 5, \quad 2y + w + 5z = 2, \quad y - 3z = 4$$

sistemini x, y, w, z sırasıyla çözünüz.

Çözüm.

Sütunları x, y, w, z sırasında yazalım:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -6 \end{array} \right)$$

Karşılık gelen sistem

$$x - 3y - 2w + 4z = 5, \quad y - 3z = 4, \quad w + 11z = -6$$

olup $r = 3 < n = 4$ 'tür; tek serbest değişken z 'dir. $z = a$ alalım:

$$w = -6 - 11a, \quad y = 4 + 3a$$

$$\begin{aligned} x &= 5 + 3y + 2w - 4z = 5 + 3(4 + 3a) + 2(-6 - 11a) - 4a \\ &= 5 + 12 + 9a - 12 - 22a - 4a = 5 - 17a \end{aligned}$$

Çözüm kümesi, bileşenler (x, y, w, z) sırasında olmak üzere

$$\{ (5 - 17a, 4 + 3a, -6 - 11a, a) : a \in \mathbb{R} \}$$

■

9.6 Alıştırma

Alıştırma 9.1 (Gauss Yöntemiyle Çözüm).

- $x + 2y - 3z = 6; 2x - y + 4z = 2; 4x + 3y - 2z = 14$ sistemini çözünüz.
- $2x + y - 3z = 5; 3x - 2y + 2z = 5; 5x - 3y - z = 16$ sistemini çözünüz.
- $x + 2y + 3z = 3; 2x + 3y + 8z = 4; 3x + 2y + 17z = 1$ sistemini çözünüz.
- $x + 2y + 2z = 2; 3x - 2y - z = 5; 2x - 5y + 3z = -4; x + 4y + 6z = 0$ sistemini çözünüz.

Çözüm.

a) Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sıfır satır atılır; kalan iki denklem üç bilinmeyenlidir, yani $n - r = 1$ serbest değişken vardır: $z = a$ alalım. İkinci denklem $-5y + 10a = -10$, yani

$$y = 2 + 2a$$

Birinci denklemden

$$x = 6 - 2y + 3z = 6 - 2(2 + 2a) + 3a = 6 - 4 - 4a + 3a = 2 - a$$

Çözüm kümesi $\{(2 - a, 2 + 2a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ 'dir. Sağlama ($a = 1$, yani $(1, 4, 1)$): $1 + 8 - 3 = 6$, $2 - 4 + 4 = 2$, $4 + 12 - 2 = 14$.

b) Köşeye 1 getirmek için önce ikinci satırdan birinciye çıkaralım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \rightarrow -R_1 + R_2]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & 12 & -26 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Üçüncü denklem doğrudan y 'yi verir: $-2y = 6 \Rightarrow y = -3$. İkinci denklemden

$$7(-3) - 13z = 5 \Rightarrow -13z = 26 \Rightarrow z = -2$$

Birinci denklemden

$$x = 3y - 5z = -9 + 10 = 1$$

Çözüm kümesi $\{(1, -3, -2)\}$ 'dir. Sağlama: $2 - 3 + 6 = 5$, $3 + 6 - 4 = 5$, $5 + 9 + 2 = 16$.

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -4R_2 + R_3]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Serbest değişken z 'dir; $z = a$ alalım. İkinci denklemden $-y + 2a = -2$, yani

$$y = 2 + 2a$$

Birinci denklemden

$$x = 3 - 2y - 3z = 3 - 2(2 + 2a) - 3a = 3 - 4 - 4a - 3a = -1 - 7a$$

Çözüm kümesi $\{(-1 - 7a, 2 + 2a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ 'dir.

d) Dört denklem, üç bilinmeyen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow -R_1 + R_4]{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Son satırı sadeleştirip ikinci sıraya alalım:

$$\xrightarrow[R_4 \rightarrow \frac{1}{2}R_4]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_4]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

İkinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{array}{c}
R_3 \rightarrow 9R_2 + R_3 \\
R_4 \rightarrow 8R_2 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 17 & -17 \\
0 & 0 & 9 & -9
\end{array} \right)
\begin{array}{c}
R_3 \rightarrow \frac{1}{17}R_3 \\
R_4 \rightarrow \frac{1}{9}R_4 \\
\sim
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c}
R_4 \rightarrow -R_3 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right)$$

Sıfır satır atıldığında $r = n = 3$ kalır; çözüm tektir:

$$z = -1, \quad y = -1 - 2z = -1 + 2 = 1, \quad x = 2 - 2y - 2z = 2 - 2 + 2 = 2$$

Çözüm kümesi $\{(2, 1, -1)\}$ 'dir. Sağlama (üçüncü denklem): $4 - 5 - 3 = -4$.

■

Bir sistemin katsayıları sabit sayılar yerine bir parametre içerdiğinde, çözümün varlığı ve tekliği o parametrenin değerine bağlı hâle gelir. Sıradaki bölümde bu ayrımı yapmayı öğreniyoruz: [parametrelili sistemlerin tartışması](#).

10. Parametrelili Sistemlerin Tartışması

Katsayılarından biri sabit bir sayı yerine a ya da k gibi bir parametre olduğunda soru değişir: “çözüm nedir?” yerine “hangi parametre değerinde çözüm vardır, hangisinde yoktur?” diye sorulur. Yöntem yine aynıdır – genişletilmiş matris merdiven şekline indirilir – ama son ayrıcalıklı elemanı sıfırlayan parametre değerlerine ayrı ayrı bakmak gerekir. Bu bölümde o **tartışma** tekniğini kuruyoruz.

10.1 Kritik Değer Nereden Çıkar?

Merdiven şekline inildiğinde en alttaki denklem tipik olarak

$$p(a)x_n = q(a)$$

biçimini alır; burada p ve q , parametreye bağlı ifadelerdir. Üç durum vardır:

- $p(a) \neq 0_K$ ise denklem x_n için tek türlü çözülür; merdiven şeklinde $r = n$ olur ve **çözüm vardır**.
- $p(a) = 0_K$ ve $q(a) \neq 0_K$ ise denklem $0_K = q(a) \neq 0_K$ hâline gelir; **çözüm yoktur**.
- $p(a) = 0_K$ ve $q(a) = 0_K$ ise denklem $0_K = 0_K$ olur ve atılır; geriye kalan denklem sayısı bilinmeyen sayısından küçük olduğundan **birden fazla çözüm** vardır.

Tartışma, tam olarak $p(a) = 0_K$ denkleminin köklerini bulup bu üç dala ayırmaktır.

10.2 Tek Parametrelili Bir Sistem

Örnek 10.1 (a Parametresine Göre Tartışma).

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3, \quad x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2$$

sisteminde $a \in \mathbb{R}$ değerini, (i) sistemin çözümü yoktur, (ii) sistemin birden fazla çözümü vardır, (iii) sistemin bir tek çözümü vardır hâllerinin her biri için belirleyiniz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

İkinci sütunun altını temizleyelim:

$$R_3 \rightarrow -(a-1)R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 - (a-1)(a+2) & 1 - (a-1) \end{array} \right)$$

Üçüncü satırdaki ifadeleri sadeleştirelim:

$$4 - (a-1)(a+2) = 4 - (a^2 + a - 2) = -(a^2 + a - 6) = (a+3)(2-a)$$

$$1 - (a-1) = 2 - a$$

Buna karşılık gelen sistem

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_2 + (a+2)x_3 = 1, \quad (a+3)(2-a)x_3 = 2-a$$

(i) $a = -3$ ise. Üçüncü denklem $0 = 5$ hâline gelir; bu denklemin çözümü olmadığından **sistemin çözümü yoktur**.

(ii) $a = 2$ ise. Üçüncü denklem $0 = 0$ olur ve atılır. Geriye

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_2 + 4x_3 = 1$$

sistemi kalır; burada denklem sayısı 2, bilinmeyen sayısı 3'tür, yani $r < n$ 'dir. Bir serbest değişken vardır ve **birden fazla çözüm** bulunur. $x_3 = t$ alınırsa $x_2 = 1 - 4t$ ve

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - (1 - 4t) + t = 5t$$

olur; çözüm kümesi $\{(5t, 1 - 4t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 'dir.

(iii) $(a + 3)(2 - a) \neq 0$, yani $a \neq -3$ ve $a \neq 2$ ise. Merdiven şeklinde denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir ($r = n = 3$); **bir tek çözüm** vardır. Üçüncü denklemin iki tarafı $2 - a \neq 0$ ile sadeleştirilirse

$$(a + 3)x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{a + 3}$$

İkinci denklemden

$$x_2 = 1 - (a + 2)x_3 = 1 - \frac{a + 2}{a + 3} = \frac{1}{a + 3}$$

Birinci denklemden

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - \frac{1}{a + 3} + \frac{1}{a + 3} = 1$$

Yani tek çözüm $\left(1, \frac{1}{a + 3}, \frac{1}{a + 3}\right)$ 'tür. $a = 0$ için bu $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verir; sağlama: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 1$, $2 + 1 + 0 = 3$, $1 + 0 + 1 = 2$.

■

10.3 İki Parametrelili Bir Sistem

Örnek 10.2 (a ve b Parametrelerine Göre Tartışma). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$2x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + 3x_3 = 0, \quad -ax_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = b$$

sisteminin çözümünü a ve b 'nin değerlerine göre inceleyiniz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi yazıp köşeye 1 getirelim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow aR_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Üçüncü ve dördüncü satırların yerini değiştirip son sütunu temizleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -6a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 6a & 6ab \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 6aR_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 6a & 6ab \end{pmatrix}$$

Karşılık gelen sistem

$$x_1 + 3x_3 = 0, \quad x_2 - 6x_3 = 0, \quad x_3 + x_4 = b, \quad 6ax_4 = 6ab$$

1. $a \neq 0$ ise. Son denklem $x_4 = b$ verir ve merdiven şeklinde $r = n = 4$ 'tür; çözüm tektir. Üçüncü denklemden $x_3 = b - x_4 = 0$, ikinciden $x_2 = 6x_3 = 0$, birinciden $x_1 = -3x_3 = 0$ bulunur:

$$\text{Çözüm kümesi} = \{ (0, 0, 0, b) \}$$

Özel olarak $b = 0$ ise sistem homojendir ve tek çözüm $(0, 0, 0, 0)$, yani sıfır çözümdür – homojen bir sistemin $r = n$ hâlinde triviyal olmayan çözümü olmadığı sonucuyla uyumlu.

2. $a = 0$ ise. Son denklem $0 = 0$ olur ve atılır. Geriye üç denklem kalır:

$$x_1 + 3x_3 = 0, \quad x_2 - 6x_3 = 0, \quad x_3 + x_4 = b$$

Burada $r = 3$, $n = 4$ 'tür; serbest değişken sayısı $n - r = 1$ 'dir ve serbest değişken x_4 'tür. $x_4 = c$ alalım:

$$x_3 = b - c, \quad x_2 = 6(b - c) = 6b - 6c, \quad x_1 = -3(b - c) = 3c - 3b$$

Çözüm kümesi

$$\{ (3c - 3b, 6b - 6c, b - c, c) : c \in \mathbb{R} \}$$

$b = 0, c = 1$ için $(3, -6, -1, 1)$ elde edilir; sağlama: $6 - 6 = 0, 3 - 3 = 0, 0 \cdot (-6) = 0, -1 + 1 = 0$.

■

10.4 Alıştırma

Alıştırma 10.1 (Parametrel Sistemler).

a) $\mathbb{R}$ üzerinde

$$kx + y + z = 1, \quad x + ky + z = 1, \quad x + y + kz = 1$$

sistemindeki k değerini, (i) bir tek çözüm vardır, (ii) çözüm yoktur, (iii) birden fazla çözüm vardır hâlleri için belirleyiniz.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde

$$x + y + kz = 2, \quad 3x + 4y + 2z = k, \quad 2x + 3y - z = 1$$

sistemi için aynı tartışmayı yapınız.

c) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ sisteminin çözümünün olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) Köşeye 1 getirmek için birinci ve üçüncü satırların yerini değiştirelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -kR_1 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{array} \right)$$

Son satırdaki katsayıyı çarpanlara ayıralım:

$$2 - k - k^2 = - (k^2 + k - 2) = -(k+2)(k-1) = (k+2)(1-k)$$

Yani son denklem $(k+2)(1-k)z = 1-k$ 'dir.

(iii) $k = 1$ ise: İkinci ve üçüncü satırlar tamamen sıfır olur ve atılır. Geriye tek bir denklem, $x + y + z = 1$, kalır. Üç bilinmeyen, bir denklem: iki serbest değişken vardır ve **birden fazla çözüm** bulunur.

$k \neq 1$ ise: Son denklemin iki tarafı $1-k \neq 0$ ile sadeleştirilir: $(k+2)z = 1$.

(ii) $k = -2$ ise: Denklem $0 = 1$ hâline gelir; **çözüm yoktur**.

(i) $k \neq 1$ ve $k \neq -2$ ise: $r = n = 3$ 'tür ve **bir tek çözüm** vardır:

$$z = \frac{1}{k+2}$$

İkinci denklem $(k-1)(y-z) = 0$ biçimindedir; $k \neq 1$ olduğundan $y = z$ 'dir. Birinci denklemden

$$x = 1 - y - kz = 1 - (k+1)z = 1 - \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

Yani tek çözüm $\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$ 'dir; simetrik bir sistemde simetrik bir çözüm bulunması beklenen sonuçtur.

b) İndirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 1 & -1-2k & -3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 0 & k-3 & 3-k \end{pmatrix}$$

Son denklem $(k-3)z = 3-k = -(k-3)$ 'tür.

(i) $k \neq 3$ ise: İki taraf $k-3 \neq 0$ ile sadeleştirilir ve $z = -1$ bulunur; $r = n = 3$ olduğundan **çözüm tektir**. İkinci denklem $y + (2-3k)z = k-6$ idi; $z = -1$ konursa

$$y - (2-3k) = k-6 \implies y = k-6+2-3k = -4-2k$$

bulunur. Birinci denklemden

$$x = 2 - y - kz = 2 + 4 + 2k + k = 6 + 3k$$

Tek çözüm $(6+3k, -4-2k, -1)$ 'dir. $k = 0$ için $(6, -4, -1)$ çıkar; sağlama: $6-4+0 = 2$, $18-16-2 = 0$, $12-12+1 = 1$.

(iii) $k = 3$ ise: Son denklem $0 = 0$ olur ve atılır. Geriye iki denklem, üç bilinmeyen kalır ($r = 2 < n = 3$); **birden fazla çözüm** vardır. $z = t$ alınırsa ikinci denklemden $y = -3 + 7t$ ve birinciden

$$x = 2 - y - 3t = 2 + 3 - 7t - 3t = 5 - 10t$$

bulunur.

(ii) Son denklemin sabit terimi ile katsayısı daima birbirinin ters işaretlisi olduğundan $0 = q \neq 0$ hâli hiçbir k için ortaya çıkmaz: sistemin **çözumsuz olduğu bir k değeri yoktur**.

c) Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Son satır $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3$ denklemine karşılık gelir; sol taraf daima 0 olduğundan bu denklemin çözümü yoktur. Merdiven şekli asıl sisteme eşdeğer olduğundan **sistemin çözümü yoktur**.

Aynı sonucu şöyle de okuyabiliriz: ikinci ve üçüncü denklemler indirgeme sonunda aynı sol tarafa $(-7x_2 + 11x_3)$ fakat farklı sabit terimlere (10 ve 7) sahip olmuştur; bir ifade aynı anda iki farklı değer alamaz.

■

Denklemler sisteminin kuramı ve hesabı tamamlandı. Buradan sonra bakış açısı değişiyor: n -lileri tek tek çözümler olarak değil, üzerinde toplama ve skalerle çarpma tanımlı bir uzayın elemanları olarak göreceğiz. Bu, dersin ikinci yarısının konusu olan **vektör uzayları**dır.

11. Vektör Uzayları

Şimdiye kadar iki farklı yerde aynı hesap kalıbını gördük: sıralı n -lileri toplayıp bir sayıyla çarpmak, matrisleri toplayıp bir sayıyla çarpmak. Her ikisinde de aynı sekiz özellik geçerliydi. Bu bölümde o kalıbı soyutlayıp adını koyuyoruz – **vektör uzayı** – ve böylece bir kez ispatladığımız her şeyin, aynı aksiyomları sağlayan bütün yapılar için geçerli olmasını sağlıyoruz.

11.1 Tanım ve Aksiyomlar

Tanım 11.1 (Vektör Uzayı). K komutatif bir cisim ve V boş olmayan bir küme olsun. V 'de bir **toplama** ve K 'nin elemanlarıyla bir **skalerle çarpma** tanımlansın. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V 'ye K üzerinde bir **vektör uzayı** (linear uzay) denir ve $V(K)$ ile gösterilir. V 'nin elemanlarına **vektörler**, K 'nin elemanlarına **skalerler** denir.

A1. $\forall u, v \in V$ için $u + v \in V$

A2. $\forall u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$

A3. $\forall u, v \in V$ için $u + v = v + u$

A4. $\exists 0_V \in V$ öyle ki $\forall u \in V$ için $0_V + u = u$ (**sıfır vektör**)

A5. $\forall u \in V$ için $\exists x \in V$ öyle ki $x + u = 0_V$ (bu x için $-u$ yazılır)

M1. $\forall k \in K, \forall u \in V$ için $ku \in V$

M2. $\forall k \in K, \forall u, v \in V$ için $k(u + v) = ku + kv$

M3. $\forall k_1, k_2 \in K, \forall u \in V$ için $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$

M4. $\forall k_1, k_2 \in K, \forall u \in V$ için $(k_1 k_2)u = k_1(k_2u)$

M5. $1_K \in K$ olmak üzere $\forall u \in V$ için $1_K u = u$

A1–A5 aksiyomları tam olarak $\langle V, + \rangle$ 'nin **komutatif bir grup** olduğunu söyler. **M1–M5** ise skalerlerin bu grupla nasıl uyduğunu belirler.

11.2 Sıfır Vektörle İlgili Kurallar

Aksiyomlarda $k \cdot 0_V$ ya da $0_K \cdot u$ çarpımlarının ne olduğu yazmaz; bunlar teorem olarak çıkar.

Teorem 11.1 (Temel Özellikler). $V(K)$ bir vektör uzayı olsun. O hâlde

1. $\forall k \in K$ için $k 0_V = 0_V$
2. $\forall u \in V$ için $0_K u = 0_V$
3. $k \in K, u \in V$ ve $ku = 0_V$ ise $k = 0_K$ veya $u = 0_V$ 'dir
4. $\forall k \in K, \forall u \in V$ için $(-k)u = k(-u) = -(ku)$

İspat.

1. $0_V = 0_V + 0_V$ olduğundan (**A4**), dağılma aksiyomuyla

$$k 0_V = k (0_V + 0_V) = k 0_V + k 0_V$$

Her iki tarafa soldan $-(k 0_V)$ ekleyelim:

$$0_V = -(k 0_V) + (k 0_V + k 0_V) = (-(k 0_V) + k 0_V) + k 0_V = 0_V + k 0_V = k 0_V$$

2. K bir cisim olduğundan $0_K = 0_K + 0_K$ 'dir; **M3** ile

$$0_K u = (0_K + 0_K) u = 0_K u + 0_K u$$

Aynı ekleme yapılırsa $0_K u = 0_V$ bulunur.

3. $ku = 0_V$ olsun ve $k \neq 0_K$ olduğunu varsayalım. K bir cisim olduğundan k^{-1} vardır:

$$u \stackrel{M5}{=} 1_K u = (k^{-1}k) u \stackrel{M4}{=} k^{-1}(ku) = k^{-1} 0_V \stackrel{(1)}{=} 0_V$$

Demek ki $k \neq 0_K$ ise zorunlu olarak $u = 0_V$ 'dir.

4. Birinci özellikten ve M2'den

$$0_V = k 0_V = k (u + (-u)) = ku + k(-u) \implies k(-u) = -(ku)$$

İkinci özellikten ve M3'ten

$$0_V = 0_K u = (k + (-k)) u = ku + (-k)u \implies (-k)u = -(ku)$$

İkisi birlikte $(-k)u = k(-u) = -(ku)$ verir.

■

11.3 Temel Örnekler

Örnek 11.1 (Sıralı n-lilerin Uzayı). K komutatif bir cisim ve

$$V = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in K \}$$

olsun. Toplama ve skalerle çarpma bileşen bileşen tanımlansın:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$k(a_1, \dots, a_n) = (ka_1, \dots, ka_n)$$

V 'nin K üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzay K^n ile gösterilir.

Çözüm.

$(0_K, \dots, 0_K) \in V$ olduğundan $V \neq \emptyset$ 'dir. On aksiyyomun her biri, bileşenlerde K 'nin bir özelliğine indirgenir.

A1. $a_i + b_i \in K$ olduğundan toplam V 'dedir.

A2–A3. K 'de toplama asosyatif ve komutatif olduğundan, bileşen bileşen

$$[(a_i) + (b_i)] + (c_i) = (a_i + b_i) + c_i = (a_i + (b_i + c_i)) = (a_i) + [(b_i) + (c_i)]$$

A4. $0_V = (0_K, \dots, 0_K)$ 'dir; çünkü $0_K + a_i = a_i$ 'dir.

A5. $(a_1, \dots, a_n)$ 'nin toplamsal tersi $(-a_1, \dots, -a_n)$ 'dir.

M1. $ka_i \in K$ olduğundan $k(a_i) \in V$ 'dir.

M2. K 'de çarpma toplama üzerine dağıldığından $k(a_i + b_i) = ka_i + kb_i$ 'dir.

M3. Yine dağılma özelliğinden $(k_1 + k_2)a_i = k_1 a_i + k_2 a_i$ 'dir.

M4. K 'de çarpma asosyatif olduğundan $(k_1 k_2)a_i = k_1(k_2 a_i)$ 'dir.

M5. $1_K a_i = a_i$ olduğundan $1_K(a_i) = (a_i)$ 'dir.

Demek ki K^n , K üzerinde bir vektör uzayıdır. $K = \mathbb{R}$ alındığında elde edilen $\mathbb{R}^n$, n boyutlu reel Öklid uzayıdır.

■

Örnek 11.2 (Matrislerin Uzayı). Bileşenleri K cisiminden alınmış bütün $A_{(m,n)}$ K -matrislerinin kümesi, **matrislerin toplamı ve skalerle çarpımı** işlemlerine göre K üzerinde bir vektör uzayıdır.

Gerçekten daha önce ispatladığımız sekiz özellik tam olarak A1–A5 ve M2–M5 aksiyyomlarıydı: sıfır vektör $O_{(m,n)}$ sıfır matrisi, A 'nın toplamsal tersi $-A$ 'dır. A1 ve M1 ise toplam ve skalerle çarpımın yine aynı tipte bir matris vermesidir.

Örnek 11.3 (Fonksiyonların Uzayı). $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, K komutatif bir cisim ve

$$V = \{ f \mid f : X \rightarrow K \text{ bir fonksiyon} \}$$

olsun. Toplama ve skalerle çarpma noktasal tanımlansın:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (kf)(x) = k f(x) \quad (\forall x \in X)$$

V 'nin K üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Her $x \in X$ için $0(x) = 0_K$ ile tanımlı **sıfır fonksiyonu** V 'dedir; dolayısıyla $V \neq \emptyset$ 'dir. İki fonksiyonun eşitliği, her noktada aynı değeri almaları demektir; bu yüzden bütün aksiyomlar “her x için” denetlenir.

A1. $f(x) + g(x) \in K$ olduğundan $f + g$ yine X 'ten K 'ye bir fonksiyondur.

A2. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= [f + (g + h)](x) \end{aligned}$$

A3. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$

A4. $g + f = f$ olması her x için $g(x) + f(x) = f(x)$, yani $g(x) = 0_K$ demektir; o hâlde $0_V = 0$ sıfır fonksiyonudur.

A5. $f^* + f = 0$ koşulu her x için $f^*(x) = -f(x)$ verir; yani $-f$ fonksiyonu $(-f)(x) = -f(x)$ ile tanımlıdır.

M1. $kf(x) \in K$ olduğundan $kf \in V$ 'dir.

M2. Her $x \in X$ için

$$[k(f + g)](x) = k(f(x) + g(x)) = kf(x) + kg(x) = (kf + kg)(x)$$

M3. Her $x \in X$ için

$$[(k_1 + k_2)f](x) = (k_1 + k_2)f(x) = k_1f(x) + k_2f(x) = (k_1f + k_2f)(x)$$

M4. $[(k_1k_2)f](x) = (k_1k_2)f(x) = k_1(k_2f(x)) = [k_1(k_2f)](x)$

M5. $(1_K f)(x) = 1_K f(x) = f(x)$

Bütün aksiyomlar sağlandığından V, K üzerinde bir vektör uzayıdır.

■

💡 Vektör her zaman bir ok değildir

Son örnekte “vektörler” birer fonksiyondur; ondan önceki örnekte birer matris. Vektör uzayı kavramının gücü tam da buradadır: tanım, elemanların ne olduğuna değil, yalnızca nasıl toplandıklarına ve nasıl ölçeklendiklerine bakar. Bu yüzden ileride ispatlayacağımız her teorem — taban, boyut, rank — aynı anda hem $\mathbb{R}^n$ hem matrisler hem de fonksiyonlar için geçerli olacaktır.

11.4 Vektör Uzayı Olmayan Yapılar

Bir aksiyomun tek bir karşı örnekle bozulması, yapının vektör uzayı olmasını engeller.

Örnek 11.4 (Üç Karşı Örnek). $V = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$ kümesinde aşağıdaki işlemlerin tanımlandığı yapıların $\mathbb{R}$ üzerinde birer vektör uzayı **olmadığını** gösteriniz.

a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ve $k(a, b) = (ka, b)$

b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ ve $k(a, b) = (ka, kb)$

c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ve $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$

Çözüm.

a) **M3** aksiyomunu sınavalım. $v = (a, b)$ için

$$(k_1 + k_2)v = ((k_1 + k_2)a, b) = (k_1a + k_2a, b)$$

$$k_1v + k_2v = (k_1a, b) + (k_2a, b) = (k_1a + k_2a, 2b)$$

$b \neq 0$ olan her vektör için $b \neq 2b$ 'dir; örneğin $v = (1, 1)$, $k_1 = k_2 = 1$ alındığında sol taraf $(2, 1)$, sağ taraf $(2, 2)$ çıkar. **M3** sağlanmadığından yapı bir vektör uzayı değildir.

b) A3 aksiyomunu sınavalım. $v = (1, 2)$ ve $w = (3, 4)$ için

$$v + w = (1, 2), \quad w + v = (3, 4)$$

$v + w \neq w + v$ olduğundan toplama komutatif değildir; yapı vektör uzayı değildir. (Aynı işlem **A4** ve **A5**'i de bozar.)

c) Yine M3'ü sınavalım. $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ ve $v = (3, 4)$ alalım:

$$(k_1 + k_2)v = 3v = (3^2 \cdot 3, 3^2 \cdot 4) = (27, 36)$$

$$k_1v + k_2v = 1 \cdot (3, 4) + 2 \cdot (3, 4) = (3, 4) + (12, 16) = (15, 20)$$

İki taraf farklı olduğundan **M3** sağlanmaz; yapı vektör uzayı değildir.

■

11.5 Alıştırma

Alıştırma 11.1 (Vektör Uzayı mı?).

- $V = \mathbb{R}^2$ kümesinde toplama alışıldık biçimde, skalerle çarpma ise $k(a, b) = (ka, 0)$ olarak tanımlansın. Bu yapının bir vektör uzayı olup olmadığını belirleyiniz.
- $V(K)$ bir vektör uzayı, $u, v \in V$ ve $k \in K \setminus \{0_K\}$ olsun. $ku = kv$ ise $u = v$ olduğunu gösteriniz.
- $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 3a\}$ kümesinin, $\mathbb{R}^2$ 'deki alışıldık işlemlerle bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) M5 aksiyomunu sınavalım: her u için $1_K u = u$ olmalıdır. $u = (1, 1)$ alalım:

$$1 \cdot (1, 1) = (1 \cdot 1, 0) = (1, 0) \neq (1, 1)$$

M5 sağlanmadığından yapı bir vektör uzayı değildir. (Diğer dokuz aksiyomun sağlanıyor olması durumu kurtarmaz; tanım hepsini birden ister.)

b) $ku = kv$ olsun. Her iki tarafa $-(kv)$ ekleyip **M2** ve teoremin dördüncü maddesini kullanalım:

$$0_V = ku - kv = ku + k(-v) = k(u + (-v)) = k(u - v)$$

Şimdi teoremin üçüncü maddesini uygulayalım: $k(u - v) = 0_V$ olduğundan ya $k = 0_K$ 'dir ya da $u - v = 0_V$ 'dir. Varsayım gereği $k \neq 0_K$ olduğundan $u - v = 0_V$, yani $u = v$ bulunur.

c) V , düzlemde $b = 3a$ doğrusu üzerindeki noktalardan oluşur; elemanları $(a, 3a)$ biçimindedir. $(0, 0) \in V$ olduğundan $V \neq \emptyset$ 'dir.

A1. $(a, 3a) + (c, 3c) = (a + c, 3a + 3c) = (a + c, 3(a + c)) \in V$

M1. $k(a, 3a) = (ka, 3ka) = (ka, 3(ka)) \in V$

A4. $(0, 0) = (0, 3 \cdot 0) \in V$ ve toplamaya göre etkisizdir.

A5. $(a, 3a)$ 'nın tersi $(-a, -3a) = (-a, 3(-a)) \in V$ 'dir.

Kalan aksiyomlar (**A2**, **A3**, **M2–M5**) $\mathbb{R}^2$ 'de zaten geçerli olduğundan ve $V \subseteq \mathbb{R}^2$ aynı işlemleri taşıdığından bunlar V 'nin elemanları için de sağlanır. Demek ki V bir vektör uzayıdır.

Bu son gözlem bir sonraki bölümün de fikridir: büyük bir uzayın içinde yaşayan ve iki işlem altında kapalı olan her alt küme, kendiliğinden bir vektör uzayıdır.

■

Son alıştırmada gördüğümüz durum o kadar sık karşımıza çıkar ki ayrı bir ad ve kısa bir ölçüt hak eder: **alt uzaylar**.

12. Alt Uzaylar

Bir vektör uzayının içinde, kendisi de vektör uzayı olan alt kümeler bulunur. Bunları bulmak için on aksiyomu baştan denetlemeye gerek yoktur: büyük uzaydan miras alınan özellikler zaten geçerlidir, geriye yalnızca **kapalılık** kalır. Bu bölümde o kısa ölçütü kurup bol örnekle çalıştıracağız.

12.1 Tanım ve Ölçüt

Tanım 12.1 (Alt Uzay). V, K üzerinde bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. W 'nin kendisi de V 'deki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre K üzerinde bir vektör uzayı ise, W 'ye V 'nin bir **alt uzayı** (alt vektör uzayı) denir.

Teorem 12.1 (Alt Uzay Ölçütü). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. W 'nin V 'nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1. $\forall v, w \in W$ için $v + w \in W$
2. $\forall k \in K, \forall v \in W$ için $kv \in W$

İspat.

Gereklik. W bir alt uzay, yani kendi başına bir vektör uzayı ise **A1** ve **M1** aksiyomlarını sağlar; bunlar tam olarak (1) ve (2) koşullarıdır.

Yeterlik. (1) ve (2) sağlansın. (1) tam olarak **A1**, (2) tam olarak **M1**'dir. $W \subseteq V$ olduğundan W 'nin elemanları aynı zamanda V 'nin elemanlarıdır ve V 'de geçerli olan **A2, A3, M2, M3, M4, M5** aksiyomları W 'nin elemanları için de geçerlidir. Geriye **A4** ve **A5** kalır.

A4. $W \neq \emptyset$ olduğundan bir $u \in W$ vardır. (2) koşulunda $k = 0_K$ alalım: $0_K u \in W$ 'dir. Öte yandan **temel özellikler teoreminden** $0_K u = 0_V$ 'dir; demek ki $0_V \in W$ 'dir. Her $w \in W \subseteq V$ için $0_V + w = w$ olduğundan 0_V , W 'nin de sıfır vektörüdür.

A5. $w \in W$ olsun. (2) koşulunda $k = -1_K$ alalım: $(-1_K)w \in W$ 'dir. Yine temel özelliklerden $(-1_K)w = - (1_K w) = -w$ 'dir; yani $-w \in W$ 'dir.

Bütün aksiyomlar sağlandığından W , V 'nin bir alt uzayıdır.

■

İki koşul tek bir koşulda birleştirilebilir; uygulamada en çok kullanılan biçim budur.

Teorem 12.2 (Tek Koşullu Ölçüt). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. W 'nin V 'nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall k, l \in K, \forall v, w \in W \quad kv + lw \in W$$

olmasıdır.

İspat.

Gereklik. W alt uzay ise önceki ölçütün (2) koşuluyla $kv \in W$ ve $lw \in W$, ardından (1) koşuluyla $kv + lw \in W$ olur.

Yeterlik. Koşul sağlansın. $k = l = 1_K$ alınırsa

$$v + w = 1_K v + 1_K w \in W$$

elde edilir; bu, önceki ölçütün birinci koşuludur. $l = 0_K$ alınırsa, $0_K w = 0_V$ ve $kv + 0_V = kv$ olduğundan

$$kv \in W$$

bulunur; bu da ikinci koşuldur. Önceki teorem uygulanarak W 'nin alt uzay olduğu sonucuna varılır.

■

12.2 Örnekler

Örnek 12.1 (Aşikâr Alt Uzaylar). Herhangi bir $V(K)$ vektör uzayı için $\{0_V\}$ ve V 'nin kendisi, V 'nin birer alt uzayıdır. Bunlara V 'nin **şikâr alt uzayları** denir. Gerçekten $\{0_V\}$ için $k0_V + l0_V = 0_V + 0_V = 0_V$ 'dir; V için koşul zaten **A1** ve **M1**'dir.

Örnek 12.2 ($\mathbb{R}^3$ İçinde Bir Düzlem). $V = \mathbb{R}^3$ ve $W = \{ (a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R} \}$ olsun. W 'nin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$(0, 0, 0) \in W$ olduğundan $W \neq \emptyset$ 'dir.

Toplama: $(a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0) \in W$

Skalerle çarpma: $k(a, b, 0) = (ka, kb, 0) \in W$

İki koşul da sağlandığından W bir alt uzayıdır. Geometrik olarak W , xy -düzlemidir: başlangıç noktasından geçen bir düzlem.

■

Örnek 12.3 (Homojen Sistemin Çözüm Kümesi). K cismi üzerinde n bilinmeyenli bir **homojen lineer denklem sisteminin** çözüm kümesi W , K^n 'in bir alt uzayıdır.

İspat.

Sistem $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0_K$ ($i = 1, \dots, m$) olsun.

Sıfır çözüm daima bir çözüm olduğundan $(0_K, \dots, 0_K) \in W$ ve $W \neq \emptyset$ 'dir. Ayrıca çözümler n -li olduğundan $W \subseteq K^n$ 'dir.

$u = (u_1, \dots, u_n)$ ve $w = (w_1, \dots, w_n)$ iki çözüm olsun. Her i için

$$\begin{aligned} a_{i1}(u_1 + w_1) + \dots + a_{in}(u_n + w_n) \\ = (a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n) + (a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n) \\ = 0_K + 0_K = 0_K \end{aligned}$$

olduğundan $u + w \in W$ 'dir. Benzer şekilde $k \in K$ için

$$a_{i1}(kw_1) + \dots + a_{in}(kw_n) = k(a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n) = k0_K = 0_K$$

olduğundan $kw \in W$ 'dir. Ölçüt gereği W bir alt uzayıdır.

■

Teorem 12.3 (Alt Uzayların Kesişimi). U ve W , $V(K)$ 'nin iki alt uzayı ise $U \cap W$ de V 'nin bir alt uzayıdır.

İspat.

U ve W birer alt uzay olduğundan $0_V \in U$ ve $0_V \in W$ 'dir; dolayısıyla $0_V \in U \cap W$ ve $U \cap W \neq \emptyset$ 'dir. Ayrıca $U \cap W \subseteq U \subseteq V$ 'dir.

$a, b \in U \cap W$ olsun. $a, b \in U$ ve U alt uzay olduğundan $a + b \in U$ 'dur; aynı biçimde $a + b \in W$ 'dir.

Demek ki $a + b \in U \cap W$ 'dir.

$k \in K$ ve $a \in U \cap W$ olsun. $ka \in U$ ve $ka \in W$ olduğundan $ka \in U \cap W$ 'dir. Ölçüt gereği $U \cap W$ bir alt uzayıdır.

■

Aynı akıl yürütme sonlu sayıda alt uzay için tekrarlanabilir: $U_1, U_2, \dots, U_n$ alt uzaylar ise $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ de bir alt uzayıdır.

12.3 Alt Uzay Olmayan Kümeler

Örnek 12.4 ($\mathbb{R}^3$ 'te Üç Karşı Örnek). $V = \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki alt kümelerin alt uzay olmadığını gösteriniz.

- a) $W = \{ (a, b, c) : a \geq 0 \}$
 b) $W = \{ (a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 \}$
 c) $W = \{ (a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Q} \}$

Çözüm.

a) Skalerle çarpma kapalı değildir. $k = -5 \in \mathbb{R}$ ve $w = (1, 2, 3) \in W$ alalım:

$$kw = (-5, -10, -15)$$

Birinci bileşen $-5 < 0$ olduğundan $kw \notin W$ 'dir.

b) Toplama kapalı değildir. $v = (1, 0, 0) \in W$ ve $w = (0, 1, 0) \in W$ 'dir (her ikisi için de kare toplamı $1 \leq 1$). Buna karşın

$$v + w = (1, 1, 0), \quad 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 > 1$$

olduğundan $v + w \notin W$ 'dir.

c) Skalerle çarpma kapalı değildir; skalerler $\mathbb{R}$ 'den alındığı için irrasyonel bir çarpan seçmek yeter. $k = \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ ve $w = (2, 3, 4) \in W$ için

$$kw = (2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$$

bileşenleri irrasyoneldir; $kw \notin W$ 'dir.

■

Örnek 12.5 (Fonksiyon Uzayında Alt Uzaylar). $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ vektör uzayı için aşağıdaki alt kümelerin alt uzay olup olmadığını belirleyiniz.

- a) $W = \{f \in V : f(3) = 0\}$
 b) $W = \{f \in V : \forall x, f(-x) = -f(x)\}$ (tek fonksiyonlar)
 c) $W = \{f \in V : \forall x, f(x) \geq 0\}$

Çözüm.

a) Sıfır fonksiyonu $0(3) = 0$ sağladığından $0 \in W$ ve $W \neq \emptyset$ 'dir. $k, l \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in W$ için

$$(kf + lg)(3) = kf(3) + lg(3) = k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0$$

olduğundan $kf + lg \in W$ 'dir: W bir **alt uzaydır**.

b) Sıfır fonksiyonu tektir ($0(-x) = 0 = -0(x)$), dolayısıyla $W \neq \emptyset$ 'dir. $f, g \in W$ ve $k, l \in \mathbb{R}$ için her x 'te

$$(kf + lg)(-x) = kf(-x) + lg(-x) = -kf(x) - lg(x) = -(kf + lg)(x)$$

olduğundan $kf + lg$ de tektir: W bir **alt uzaydır**.

c) Toplama kapalıdır ($f, g \geq 0$ ise $f + g \geq 0$), ama skalerle çarpma kapalı değildir. $f(x) = x^2$ fonksiyonu W 'dedir; buna karşın

$$((-1)f)(x) = -x^2$$

fonksiyonu $x \neq 0$ için negatif değer alır, yani $(-1)f \notin W$ 'dir. Demek ki W bir **alt uzay değildir**.

■

 Hızlı eleme: sıfır vektör içeride mi?

Her alt uzay sıfır vektörü içermek zorundadır. Bu yüzden bir kümenin alt uzay olmadığını göstermenin en hızlı yolu çoğu zaman $0_V \notin W$ olduğunu fark etmektir. Örneğin $\{(a, b, c) : a + b + c = 1\}$ kümesi alt uzay olamaz, çünkü $(0, 0, 0)$ denklemi sağlamaz.

12.4 Alıştırma

Alıştırma 12.1 (Alt Uzay mı?).

- a) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b - c = 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.
- b) U ve W , $V(K)$ 'nin alt uzayları olsun. $U \cup W$ 'nin genel olarak alt uzay olmadığını bir karşı örnekle gösteriniz.
- c) V , n -inci mertebeden reel kare matrislerin uzayı olsun. Köşegen matrislerin kümesinin V 'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $(0, 0, 0)$ için $0 + 0 - 0 = 0$ olduğundan $(0, 0, 0) \in W$ ve $W \neq \emptyset$ 'dir.

$v = (a_1, b_1, c_1)$ ve $w = (a_2, b_2, c_2)$ kümenin elemanları, $k, l \in \mathbb{R}$ olsun:

$$a_1 + 2b_1 - c_1 = 0, \quad a_2 + 2b_2 - c_2 = 0$$

$kv + lw = (ka_1 + la_2, kb_1 + lb_2, kc_1 + lc_2)$ vektörünü denklemde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} & (ka_1 + la_2) + 2(kb_1 + lb_2) - (kc_1 + lc_2) \\ &= k \underbrace{(a_1 + 2b_1 - c_1)}_0 + l \underbrace{(a_2 + 2b_2 - c_2)}_0 = 0 \end{aligned}$$

Demek ki $kv + lw \in W$ 'dir ve tek koşullu ölçüt gereği W bir alt uzaydır. (W , tek denklemlili bir homojen sistemin çözüm kümesidir; genel sonuçtan da doğrudan çıkar.)

b) $V = \mathbb{R}^2$ alalım. $U = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ ve $W = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$ kümelerinin ikisi de birer alt uzaydır (iki koordinat eksenini).

$u = (1, 0) \in U \subseteq U \cup W$ ve $w = (0, 1) \in W \subseteq U \cup W$ 'dir. Buna karşın

$$u + w = (1, 1)$$

vektörü ne U 'da ne de W 'dedir; yani $u + w \notin U \cup W$ 'dir. Toplama kapalı olmadığından $U \cup W$ bir alt uzay değildir.

(İki alt uzayın birleşiminin alt uzay olması, ancak birinin diğerini kapsamaması hâlinde mümkündür. Birleşimin yerini tutacak doğru kavram, bir sonraki bölümde tanımlayacağımız **toplama** $U + W$ 'dir.)

c) Köşegen matrislerin kümesi D olsun; $A \in D$ demek $i \neq j$ iken $a_{ij} = 0$ demektir. Sıfır matris köşegendir, dolayısıyla $D \neq \emptyset$ 'dir.

$A, B \in D$ ve $k, l \in \mathbb{R}$ olsun. $kA + lB$ matrisinin (i, j) bileşeni $ka_{ij} + lb_{ij}$ 'dir. $i \neq j$ için

$$ka_{ij} + lb_{ij} = k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0$$

olduğundan $kA + lB$ de köşegendir. Ölçüt gereği D bir alt uzaydır.

■

İki alt uzayın birleşimi işe yaramadı; peki onları içeren en küçük alt uzay nedir? Yanıt, elemanları teker teker toplamaktan geçiyor: **alt uzayların toplamı ve direkt toplam**.

13. Toplamlar ve Direkt Toplam

İki alt uzayın birleşimi genelde alt uzay değildir. Doğru kavram birleşim değil, **toplam**dır: bir uzaydan bir vektör, diğerinden bir vektör alıp toplamak. Bu bölümde toplamın her zaman alt uzay olduğunu göreceğiz, ardından toplamın en düzenli hâlini – yazılışın tek türlü olduğu **direkt toplamı** – tanımlayacağız.

13.1 Alt Uzayların Toplamı

Teorem 13.1 (Toplam Bir Alt Uzaydır). U ve W , $V(K)$ vektör uzayının iki alt uzayı olsun.

$$U + W = \{ u + w : u \in U, w \in W \}$$

kümesi de $V(K)$ 'nin bir alt uzayıdır.

İspat.

U ve W alt uzay olduğundan $0_V \in U$ ve $0_V \in W$ 'dir; buradan

$$0_V = 0_V + 0_V \in U + W$$

olur ve $U + W \neq \emptyset$ 'dir. Ayrıca $U, W \subseteq V$ ve V toplamaya göre kapalı olduğundan $U + W \subseteq V$ 'dir.

Toplama. $u_1 + w_1$ ve $u_2 + w_2$ kümenin iki elemanı olsun ($u_i \in U, w_i \in W$). V 'de toplama asosyatif ve komutatif olduğundan terimler yeniden gruplanabilir:

$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W$$

Skalerle çarpma. $k \in K$ için **M2** aksiyomuyla

$$k(u + w) = \underbrace{ku}_{\in U} + \underbrace{k w}_{\in W} \in U + W$$

Ölçüt gereği $U + W$ bir alt uzaydır. ■

$U \subseteq U + W$ ve $W \subseteq U + W$ 'dir (birinde $w = 0_V$, diğerinde $u = 0_V$ alınır); dolayısıyla $U + W$, hem U 'yu hem W 'yi içeren bir alt uzaydır – üstelik böyle alt uzayların en küçüğüdür.

13.2 Direkt Toplam

Tanım 13.1 (Direkt Toplam). U ve W , $V(K)$ 'nin alt uzayları olsun. Her $v \in V$ için

$$v = u + w \quad (u \in U, w \in W)$$

biçiminde **bir ve yalnız bir türlü** bir yazılış varsa, V 'ye U ile W 'nin **direkt toplamı** denir ve

$$V = U \oplus W$$

yazılır.

Tanımda iki şey birden isteniyor: yazılışın **var olması** ve **tek olması**. Aşağıdaki teorem bu ikisini denetlenmesi kolay iki koşula çevirir.

Teorem 13.2 (Direkt Toplam Ölçütü). $V = U \oplus W$ olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1. $V = U + W$

$$2. U \cap W = \{0_V\}$$

İspat.

Gereklik. $V = U \oplus W$ olsun.

Her $v \in V$ bir $u + w$ olarak yazıldığından $V \subseteq U + W$ 'dir; $U + W \subseteq V$ zaten geçerli olduğundan $V = U + W$ 'dir. Birinci koşul sağlanır.

Şimdi $a \in U \cap W$ alalım. a 'yı iki farklı biçimde yazabiliriz:

$$a = \underbrace{a}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in W}, \quad a = \underbrace{0_V}_{\in U} + \underbrace{a}_{\in W}$$

Yazılış tek olduğundan bu iki gösterilişin karşılıklı parçaları eşit olmalıdır: $a = 0_V$. Demek ki $U \cap W = \{0_V\}$ 'dir (0_V her iki alt uzayda da bulunduğundan kesişim boş değildir).

Yeterlik. (1) ve (2) sağlansın. $v \in V$ alalım. $V = U + W$ olduğundan

$$v = u + w \quad (u \in U, w \in W)$$

biçiminde bir yazılış **vardır**. Bunun **tek** olduğunu görelim: $v = u' + w'$ ikinci bir yazılış olsun ($u' \in U$, $w' \in W$). O hâlde

$$u + w = u' + w' \implies u - u' = w' - w$$

Sol taraf U 'da, sağ taraf W 'dedir ve ikisi eşit olduğundan bu ortak eleman $U \cap W = \{0_V\}$ 'dedir:

$$u - u' = w' - w = 0_V \implies u = u', \quad w = w'$$

Yazılış tek olduğundan $V = U \oplus W$ 'dir.

■

13.3 Çözümlü Örnekler

Örnek 13.1 (Simetrik ve Antisimetrik Ayrışımı). V , n -inci mertebeden reel kare matrislerin uzayı olsun.

$$U = \{ M \in V : M^t = M \}, \quad W = \{ M \in V : M^t = -M \}$$

U simetrik, W antisimetrik matrislerin kümesidir. $V = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce U ve W 'nin birer alt uzay olduğunu görelim: $O^t = O = -O$ olduğundan sıfır matris her ikisinde de ve transpoze işlemi $(kA + lB)^t = kA^t + lB^t$ ile lineer davrandığından her iki koşul da toplam ve skalerle çarpma altında korunur.

1. $V = U + W$. $A \in V$ keyfi bir matris olsun ve şu ayrışımı yazalım:

$$A = \frac{1}{2} (A + A^t) + \frac{1}{2} (A - A^t)$$

Birinci terim simetriktir:

$$\left[\frac{1}{2} (A + A^t) \right]^t = \frac{1}{2} (A^t + A) = \frac{1}{2} (A + A^t)$$

İkinci terim antisimetriktir:

$$\left[\frac{1}{2} (A - A^t) \right]^t = \frac{1}{2} (A^t - A) = -\frac{1}{2} (A - A^t)$$

Demek ki her A matrisi bir simetrik ile bir antisimetriğin toplamıdır: $V = U + W$.

2. $U \cap W = \{O\}$. $A \in U \cap W$ olsun. O hâlde hem $A^t = A$ hem de $A^t = -A$ 'dır; buradan

$$A = -A \implies 2A = O \implies A = O$$

(Reel sayılarda $2 \neq 0$ olduğundan bölme yapılabilir.)
İki koşul da sağlandığından $V = U \oplus W$ 'dir.

■

Örnek 13.2 ($\mathbb{R}^3$ 'te Bir Direkt Toplam). $U = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = c \}$ ve $W = \{ (0, b, c) : b, c \in \mathbb{R} \}$ olsun. $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. $\mathbb{R}^3 = U + W$. Keyfi bir (a, b, c) vektörünü şöyle ayıralım:

$$(a, b, c) = \underbrace{(a, a, a)}_{\in U} + \underbrace{(0, b-a, c-a)}_{\in W}$$

Birinci terimin üç bileşeni de eşittir, ikinci terimin ilk bileşeni sıfırdır; ikisi de ait oldukları kümededir.

2. $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$. $(a, b, c) \in U \cap W$ olsun. U 'da olmak $a = b = c$ demektir; W 'de olmak $a = 0$ demektir. İkisi birlikte $a = b = c = 0$ verir.

İki koşul sağlandığından $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ 'dir.

■

Örnek 13.3 (Toplam Direkt Olmayabilir). $U = \{ (a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R} \}$ ve $W = \{ (0, b, c) : b, c \in \mathbb{R} \}$ olsun. $\mathbb{R}^3 = U + W$ olduğunu, fakat toplamın direkt olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Toplam $\mathbb{R}^3$ 'tür. Her (a, b, c) için

$$(a, b, c) = \underbrace{(a, b, 0)}_{\in U} + \underbrace{(0, 0, c)}_{\in W}$$

yazılabilir; dolayısıyla $\mathbb{R}^3 = U + W$ 'dir.

Yazılış tek değildir. $(3, 5, 7)$ vektörünü iki farklı biçimde yazalım:

$$(3, 5, 7) = (3, 1, 0) + (0, 4, 7) = (3, -4, 0) + (0, 9, 7)$$

Her iki ayrışım da birinci terim U 'da, ikinci terim W 'dedir; ama ayrışımalar farklıdır. Demek ki $\mathbb{R}^3$, U ile W 'nin direkt toplamı **değildir**.

Bunun nedenini ölçüt açıkça gösterir:

$$U \cap W = \{ (0, b, 0) : b \in \mathbb{R} \} \neq \{(0, 0, 0)\}$$

Kesişim yalnızca sıfır vektöründen ibaret olmadığı için teklğin bozulması kaçınılmazdır: kesişimdeki herhangi bir $(0, t, 0)$ vektörü birinci terimden çıkarılıp ikinciye eklenerek yeni bir ayrışım üretilebilir.

■

💡 Kesişim, teklğin ölçüsüdür

Son iki örnek yan yana konduğunda direkt toplamın ne anlama geldiği netleşir: toplam her zaman vardır, tek olan yazılıştır. Kesişim ne kadar büyükse yazılış o kadar çok çeşitlenir; kesişim yalnızca sıfır vektörüne indiğinde her vektörün tek bir adresi kalır.

13.4 Alıştırma

Alıştırma 13.1 (Toplam ve Direkt Toplam).

a) $U = \{ (a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R} \}$ ve $W = \{ (0, 0, c) : c \in \mathbb{R} \}$ için $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

- b) $U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = a\}$ ve $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = -a\}$ için $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ olduğunu gösterip $(5, 1)$ vektörünün ayrışımını bulunuz.
- c) $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ uzayında U çift fonksiyonların, W tek fonksiyonların kümesi olsun. $V = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Önce ikisinin de alt uzay olduğunu not edelim; her biri bileşenlerinden bazılarının sıfır olmasıyla tanımlıdır ve bu koşul toplam ile skalerle çarpma altında korunur.

Toplam: Her $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)$$

olduğundan $\mathbb{R}^3 = U + W$ 'dir.

Kesişim: $(a, b, c) \in U \cap W$ olsun. U 'da olmak $c = 0$, W 'de olmak $a = b = 0$ demektir; ikisi birlikte $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ verir.

Demek ki $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ 'dir. (Önceki örnekten farkı: orada ikinci uzay $(0, b, c)$ biçimindeydi ve b bileşeni her iki uzayda da serbestti.)

b) $U, y = x$ doğrusu; $W, y = -x$ doğrusudur. İkisi de başlangıçtan geçtiğinden birer alt uzaydır.

Toplam: (a, b) verilsin; $(a, b) = (s, s) + (t, -t)$ olacak s, t arıyoruz:

$$s + t = a, \quad s - t = b \implies s = \frac{a+b}{2}, \quad t = \frac{a-b}{2}$$

Her (a, b) için bu s ve t bulunduğundan $\mathbb{R}^2 = U + W$ 'dir.

Kesişim: $(a, b) \in U \cap W$ ise $b = a$ ve $b = -a$; buradan $a = -a$, yani $a = 0$ ve $b = 0$ 'dır.

Demek ki $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ 'dir. $(5, 1)$ için $s = \frac{5+1}{2} = 3$ ve $t = \frac{5-1}{2} = 2$:

$$(5, 1) = (3, 3) + (2, -2)$$

c) f çift ise $f(-x) = f(x)$, tek ise $f(-x) = -f(x)$ 'tir. Her iki koşul da lineer olduğundan U ve W birer alt uzaydır.

Toplam: Keyfi bir f için

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x)}$$

yazalım. $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$ olduğundan g çifttir; $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$ olduğundan h tektir. Demek ki $V = U + W$ 'dir.

Kesişim: $f \in U \cap W$ ise her x için $f(x) = f(-x) = -f(x)$, yani $2f(x) = 0$ ve $f(x) = 0$ 'dır. Demek ki f sıfır fonksiyonudur.

Sonuç: $V = U \oplus W$. Bu, simetrik-antisimetrik matris ayrışımının fonksiyonlardaki tam karşılığıdır; ikisinde de aynı $\frac{1}{2}(A \pm A^t)$ hilesi kullanılmıştır.

■

Alt uzayları toplayarak yenilerini üretmeyi öğrendik. Peki elimizde birkaç vektör varsa, onların ürettiği en küçük alt uzay hangisidir? Bu soru bizi dersin merkezindeki kavrama götürür: **lineer kombinezonlar ve doğuran kümeler**.

14. Lineer Kombinasyonlar ve Doğuran Kümeler

Elimizde birkaç vektör varsa, onlarla ulaşabileceğimiz bütün vektörler nelerdir? Yanıt basittir: her birini bir skalerle çarpıp toplayarak elde edilenler. Bu işleme **lineer kombinasyon** denir ve bu bölümde göstereceğimiz gibi, bir kümenin bütün lineer kombinasyonları o kümeyi içeren **en küçük** alt uzayı oluşturur.

14.1 Lineer Kombinasyon

Tanım 14.1 (Lineer Kombinasyon). $V(K)$ bir vektör uzayı, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ ve $a_1, a_2, \dots, a_m \in K$ olsun.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \in V$$

biçiminde yazılan her elemana, $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörlerinin bir **lineer kombinasyonu** denir.

Teorem 14.1 (Gerilen Alt Uzay). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq S \subseteq V$ olsun. S içindeki elemanların bütün lineer kombinasyonlarının kümesi, V 'nin S 'yi içeren bir alt uzayıdır; bu alt uzay $L(S)$ ile gösterilir. Ayrıca W , V 'nin S 'yi içeren herhangi bir alt uzayı ise $L(S) \subseteq W$ 'dir.

İspat.

$S \subseteq L(S)$ ve $L(S) \neq \emptyset$. Her $v \in S$ için $v = 1_K v$ tek terimli bir lineer kombinondur; dolayısıyla $v \in L(S)$ 'dir.

$L(S)$ bir alt uzayıdır. $u, w \in L(S)$ alalım:

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m, \quad w = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

burada $u_i, w_j \in S$ ve $a_i, b_j \in K$ 'dir. O hâlde

$$u + w = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

ifadesi yine S elemanlarının bir lineer kombinasyonudur, yani $u + w \in L(S)$ 'dir. Benzer şekilde $k \in K$ için

$$ku = (ka_1) u_1 + \dots + (ka_m) u_m \in L(S)$$

Ölçüt gereği $L(S)$ bir alt uzayıdır.

En küçüklük. W , S 'yi içeren bir alt uzay olsun. $v_1, \dots, v_m \in S \subseteq W$ ve W bir alt uzay olduğundan, kapalılık tekrar tekrar uygulanarak

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \in W$$

bulunur. Yani S elemanlarının her lineer kombinasyonu W 'dedir: $L(S) \subseteq W$.

■

$L(S)$ alt uzayına, S tarafından doğurulan (gerilen) alt uzay denir; S 'ye de $L(S)$ 'nin bir **doğuran kümesi** denir. Teoremin son kısmı şunu söyler: $L(S)$, S 'yi içeren bütün alt uzayların en küçüğüdür.

💡 Gösterim

$S = \{v_1, \dots, v_m\}$ sonlu bir küme olduğunda $L(S)$ yerine kısaca $L(v_1, \dots, v_m)$ yazılır. $V = L(v_1, \dots, v_m)$ ifadesi " V uzayı $v_1, \dots, v_m$ vektörleri tarafından doğrulur" diye okunur.

14.2 Standart Doğuran Küme

Örnek 14.1 (K^n 'i Doğuran Vektörler). K komutatif bir cisim olmak üzere K^n uzayında

$$e_1 = (1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad e_2 = (0_K, 1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad \dots, \quad e_n = (0_K, \dots, 0_K, 1_K)$$

vektörlerini ve $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ kümesini alalım. $K^n = L(S)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$L(S)$ bir alt uzay ve $S \subseteq K^n$ olduğundan $L(S) \subseteq K^n$ 'dir.

Ters kapsama için keyfi bir $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ alalım. Skalerle çarpma ve toplama bileşen bileşen işlediğinden

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n &= (a_1, 0_K, \dots, 0_K) + (0_K, a_2, 0_K, \dots, 0_K) + \dots + (0_K, \dots, 0_K, a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Demek ki her vektör e_i 'lerin bir lineer kombinasyonu: $K^n \subseteq L(S)$. İki kapsama birlikte $K^n = L(S)$ verir.

■

14.3 Bir Vektör Lineer Kombinasyon mudur?

Soru her zaman bir denklem sistemine dönüşür: bilinmeyenler skalerlerdir.

Örnek 14.2 ($\mathbb{R}^4$ 'te Bir Sınama). $v = (3, 9, -4, -2) \in \mathbb{R}^4$ vektörü

$$u_1 = (1, -2, 0, 3), \quad u_2 = (2, 3, 0, -1), \quad u_3 = (2, -1, 2, 1)$$

vektörlerinin bir lineer kombinasyonu mudur? Yani $v \in L(u_1, u_2, u_3)$ midir?

Çözüm.

$v = xu_1 + yu_2 + zu_3$ olacak $x, y, z \in \mathbb{R}$ arıyoruz. Sağ tarafı bileşenlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} x(1, -2, 0, 3) + y(2, 3, 0, -1) + z(2, -1, 2, 1) \\ = (x + 2y + 2z, -2x + 3y - z, 2z, 3x - y + z) \end{aligned}$$

Bunu v 'ye eşitlemek şu sistemi verir:

$$x + 2y + 2z = 3, \quad -2x + 3y - z = 9, \quad 2z = -4, \quad 3x - y + z = -2$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \xrightarrow[R_4 \rightarrow -3R_1 + R_4]{R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & -5 & -11 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_2 + R_4]{R_4 \rightarrow R_2 + R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistem tutarlıdır ve $r = n = 3$ olduğundan tek çözüm vardır. Aşağıdan yukarı çözelim:

$$2z = -4 \implies z = -2$$

$$7y + 3(-2) = 15 \implies 7y = 21 \implies y = 3$$

$$x = 3 - 2y - 2z = 3 - 6 + 4 = 1$$

Demek ki

$$v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$$

Sağlama:

$$(1, -2, 0, 3) + (6, 9, 0, -3) + (-4, 2, -4, -2) = (3, 9, -4, -2)$$

■

Örnek 14.3 ($\mathbb{R}^3$ ü Doğuran Üç Vektör). $\mathbb{R}^3$ uzayının $u = (1, 2, 3), v = (0, 1, 2), w = (0, 0, 1)$ vektörleri tarafından doğrulduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Keyfi bir $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün bu üçünün lineer kombinasyonu olduğunu göstereceğiz:

$$(a, b, c) = xu + yv + zw = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$$

Bileşenler eşitlenirse

$$x = a, \quad 2x + y = b, \quad 3x + 2y + z = c$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 2 & 1 & 0 & | & b \\ 3 & 2 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & -2a + b \\ 0 & 2 & 1 & | & -3a + c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & -2a + b \\ 0 & 0 & 1 & | & a - 2b + c \end{pmatrix}$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan ($r = n = 3$) sistemin tek çözümü vardır:

$$x = a, \quad y = -2a + b, \quad z = a - 2b + c$$

Bu değerler her (a, b, c) için var olduğuna göre $\mathbb{R}^3 = L(u, v, w)$ 'dir.

Sağlama olarak $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ alalım: $x = 1, y = -2, z = 1$ ve

$$1 \cdot (1, 2, 3) - 2 \cdot (0, 1, 2) + 1 \cdot (0, 0, 1) = (1, 2 - 2, 3 - 4 + 1) = (1, 0, 0)$$

■

14.4 Alıştırma

Alıştırma 14.1 (Lineer Kombinasyonlar).

- $v = (1, -2, 5)$ vektörü $L((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1))$ alt uzayının bir elemanı mıdır?
- $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün $u = (2, 1, 0), v = (1, -1, 2), w = (0, 3, -4)$ tarafından doğrulan alt uzaya ait olması için a, b, c arasındaki bağıntıyı bulunuz.
- $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ alt uzayının $u = (2, -1, 0)$ ve $v = (1, 3, 0)$ tarafından doğrulduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $v = x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) + z(2, -1, 1)$ olacak x, y, z arıyoruz. Bileşenler:

$$x + y + 2z = 1, \quad x + 2y - z = -2, \quad x + 3y + z = 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & -2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

Sistem tutarlıdır; aşağıdan yukarı çözelim:

$$5z = 10 \implies z = 2, \quad y = -3 + 3z = 3$$

$$x = 1 - y - 2z = 1 - 3 - 4 = -6$$

Demek ki v bu alt uzayın bir elemanıdır:

$$(1, -2, 5) = -6(1, 1, 1) + 3(1, 2, 3) + 2(2, -1, 1)$$

Sağlama: $(-6 + 3 + 4, -6 + 6 - 2, -6 + 9 + 2) = (1, -2, 5)$.

b) $(a, b, c) = xu + yv + zw$ koşulunu yazalım:

$$x(2, 1, 0) + y(1, -1, 2) + z(0, 3, -4) = (2x + y, x - y + 3z, 2y - 4z)$$

Sistem:

$$2x + y = a, \quad x - y + 3z = b, \quad 2y - 4z = c$$

Bu kez soru “çözüm var mı?” olduğundan sistemin **tutarlılık koşulunu** arıyoruz. Genişletilmiş matriste köşeye 1 getirelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 3 & -6 & a - 2b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array} \right)$$

Üçüncü satırı 3, ikinciyi 2 ile çarpıp çıkaralım — eşdeğer olarak $R_3 \rightarrow -\frac{2}{3}R_2 + R_3$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 3 & -6 & a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & c - \frac{2(a-2b)}{3} \end{array} \right)$$

Sistemin çözümü olması için son satırın sabit teriminin sıfır olması gerekir:

$$c - \frac{2a - 4b}{3} = 0 \implies 3c = 2a - 4b \implies 2a - 4b - 3c = 0$$

Aranan bağıntı budur: (a, b, c) vektörü ancak ve ancak $2a - 4b - 3c = 0$ olduğunda $L(u, v, w)$ 'dedir. (Bu, üç vektörün $\mathbb{R}^3$ 'ü doğurmadığını, yalnızca bir düzlem gerdiğini de gösterir.)

c) İki kapsamayı ayrı ayrı görelim.

$L(u, v) \subseteq W$: u ve v 'nin üçüncü bileşeni sıfır olduğundan, her $xu + yv$ kombinasyonunun üçüncü bileşeni de sıfırdır; yani $L(u, v) \subseteq W$ 'dir.

$W \subseteq L(u, v)$: Keyfi bir $(a, b, 0) \in W$ için $xu + yv = (a, b, 0)$ arayalım:

$$x(2, -1, 0) + y(1, 3, 0) = (2x + y, -x + 3y, 0)$$

Üçüncü bileşen kendiliğinden uyuyor; kalan sistem

$$2x + y = a, \quad -x + 3y = b$$

Birinci denklemden $y = a - 2x$; ikincide yerine koyalım:

$$-x + 3(a - 2x) = b \implies -7x = b - 3a \implies x = \frac{3a - b}{7}$$

$$y = a - 2x = \frac{a + 2b}{7}$$

Her $(a, b, 0)$ için bu değerler var olduğundan $W \subseteq L(u, v)$ 'dir. İki kapsama birlikte $W = L(u, v)$ verir.

■

Bir matrisin satırlarına K^n 'in vektörleri gözüyle bakarsak, doğuran küme kavramı doğrudan matris hesabına bağlanır. Sıradaki bölümde bu köprüyü kuruyoruz: **satır uzayı ve sütun uzayı**.

15. Satır Uzayı ve Sütun Uzayı

Bir matrisin satırlarına K^n 'in vektörleri gözüyle bakılabilir. O zaman matrisin taşıdığı bilgi, bu satırların gerdiği alt uzaydır — ve elemanter satır işlemleri bu alt uzayı değiştirmez. Bu gözlem, “iki vektör ailesi aynı alt uzayı mı geriyor?” sorusunu tamamen mekanik bir hesaba indirger.

15.1 Tanım

Tanım 15.1 (Satır Uzayı). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ bir K -matris olsun. A 'nın satırları

$$R_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \quad \dots, \quad R_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

K^n 'in elemanları olarak düşünülürse, $L(R_1, \dots, R_m) \subseteq K^n$ alt uzayına A 'nın **satır uzayı** denir.

Tanım 15.2 (Sütun Uzayı). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ matrisinin sütunları

$$C_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \quad \dots, \quad C_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

K^m 'in elemanları olarak düşünülürse, $L(C_1, \dots, C_n) \subseteq K^m$ alt uzayına A 'nın **sütun uzayı** denir.

15.2 Satır İşlemleri Satır Uzayını Korur

Teorem 15.1 (Satır Eşdeğerlik ve Satır Uzayı). *Satır eşdeğer matrislerin satır uzayları aynıdır.*

İspat.

$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olsun. *Elemanter satır işlemlerinin her biri — iki satırın yer değiştirmesi, bir satırın sıfırdan farklı bir skalerle çarpılması, bir satıra başka bir satırın katının eklenmesi — yeni satırları eski satırların lineer kombinasyonu olarak verir. Dolayısıyla B 'nin her satırı ya A 'nın bir satırındır ya da A 'nın satırlarının bir lineer kombinasyonudur; hepsi A 'nın satır uzayındadır.*

A 'nın satır uzayı bir alt uzay olduğundan, gerilen alt uzayın en küçüklüğü gereği

$$B \text{ 'nin satır uzayı} \subseteq A \text{ 'nin satır uzayı}$$

Öte yandan her elemanter satır işlemi geri alınabilir olduğundan B 'ye uygun işlemler uygulanarak A elde edilir; aynı akıl yürütmeyeyle

$$A \text{ 'nin satır uzayı} \subseteq B \text{ 'nin satır uzayı}$$

İki kapsama birlikte eşitliği verir.

■

Teorem 15.2 (Kanonik Şekiller ve Eşitlik). *İki satır indirgenmiş merdiven matrisin satır uzaylarının aynı olması için gerek ve yeter koşul, sıfırdan farklı satırlarının birbirinin aynı olmasıdır.*

Buna bir de şu olguyu ekleyelim: her $A_{(m,n)}$ K -matrisi **bir tek** satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğerdir; bu matrise A 'nın **satır kanonik şekli** denir. İkisi birlikte pratik bir ölçüt verir.

❓ İki gerilen uzay eşit mi? Üç adımda yanıt

$L(u_1, \dots, u_p)$ ile $L(v_1, \dots, v_q)$ alt uzaylarının aynı olup olmadığını anlamak için:

1. u_i 'leri satır kabul eden A matrisini, v_j 'leri satır kabul eden C matrisini yaz.
2. Her ikisini de satır kanonik şekline indir.
3. Sıfırdan farklı satırlar birebir aynıysa iki uzay eşittir; değilse farklıdır.

15.3 Çözümlü Örnekler

Örnek 15.1 (İki Uzay Aynı mı?). $u_1 = (1, 2, -1, 3)$, $u_2 = (2, 4, 1, -2)$, $u_3 = (3, 6, 3, -7)$ tarafından doğrulan U ile $v_1 = (1, 2, -4, 11)$, $v_2 = (2, 4, -5, 14)$ tarafından doğrulan V alt uzayları aynı mıdır?

Çözüm.

u_i 'leri satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3]{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

(Son adımda $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ kullanıldı.) Şimdi v_j 'ler için aynısını yapalım:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow 4R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} =: D$$

(Burada $11 - \frac{32}{3} = \frac{1}{3}$ 'tür.)

B ile D 'nin sıfırdan farklı satırları birebir aynıdır; dolayısıyla satır uzayları eşittir. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ ve $C \stackrel{\text{satır}}{\sim} D$ olduğundan

$$U = A \text{ 'nin satır uzayı} = B \text{ 'nin satır uzayı} \\ = D \text{ 'nin satır uzayı} = C \text{ 'nin satır uzayı} = V$$

İki alt uzay aynıdır.

■

Örnek 15.2 (Üç Matrisin Satır Uzayları).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrislerinden hangilerinin satır uzaıları aynıdır?

Çözüm.

Üçünün de satır kanonik şeklini bulalım.

$$A \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C \xrightarrow{R_2 \rightarrow -4R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ile C 'nin sıfırdan farklı satıruları $(1 \ 0 \ 2)$ ve $(0 \ 1 \ 3)$ olarak çıkışır; dolayısıyla A ile C 'nin satır uzaıları **aynıdır**.

B 'nin birinci satırı $(1 \ 0 \ 1)$ olup diğerlerinden farklıdır; B 'nin satır uzaı A ile C 'ninkinden **farklıdır**.

■

15.4 Alıştırma

Alıştırma 15.1 (Satır Uzaıları).

- a) $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (2, 3, -1)$, $u_3 = (3, 1, -5)$ ve $v_1 = (1, -1, -3)$, $v_2 = (3, -2, -8)$, $v_3 = (2, 1, -3)$ olsun. $L(u_1, u_2, u_3)$ ile $L(v_1, v_2, v_3)$ uzaıları $\mathbb{R}^3$ 'ün aynı alt uzaı mıdır?
- b) A bir K -matris ise A 'nın satır uzaının, A^t 'nin sütun uzaına eşit olduğunu gözlemleyiniz.

Çözüm.

a) u_i 'lerin matrisini indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi v_j 'ler için:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

İki satır kanonik şekil birebir aynıdır; dolayısıyla iki alt uzaı **eşittir**:

$$L(u_1, u_2, u_3) = L(v_1, v_2, v_3) = L((1, 0, -2), (0, 1, 1))$$

b) **Transpoze tanımı** gereği A^t 'nin i -inci sütunu, A 'nın i -inci satırının kendisidir. Aynı vektör ailesi söz konusu olduğundan geldikleri alt uzaılar da aynıdır:

$$A \text{ 'nin satır uzaı } = A^t \text{ 'nin sütun uzaı}$$

Simetrik olarak A 'nın sütun uzayı, A^t 'nin satır uzayına eşittir. Bu gözlem sayesinde sütun uzayıyla ilgili her soru, transpoze alınarak satır uzayı sorusuna çevrilebilir — ve satır uzayında elimizde satır işlemleri gibi güçlü bir araç vardır.

■

Bir alt uzayı doğuran kümede gereksiz vektörler bulunabilir: biri diğerlerinin lineer kombinasyonuysa onu atmak uzayı değiştirmez. “Gereksiz vektör yok” durumunu kesinleştiren kavram sıradaki bölümün konusudur: [lineer bağımlılık ve bağımsızlık](#).

16. Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

Bir alt uzayı doğuran kümede gereksiz vektörler bulunabilir: bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonuysa, onu atmak gerilen uzayı değiştirmez. “Gereksiz vektör yok” durumunu tam olarak yakalayan kavram **lineer bağımsızlıktır** ve tüm taban-boyut kuramı bunun üzerine kurulur.

16.1 Tanım

Tanım 16.1 (Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ olsun.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0_V$$

olacak biçimde **hepsi birden sıfır olmayan** $a_1, \dots, a_m \in K$ elemanları varsa, $v_1, \dots, v_m$ vektörlerine K üzerinde **lineer bağımlı** denir.

Eğer bu bağıntı ancak $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0_K$ olması hâlinde gerçekleştirilebiliyorsa, yani

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0_V \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0_K$$

ise $v_1, \dots, v_m$ vektörlerine K üzerinde **lineer bağımsız** denir.

İki basit gözlem:

- $v_1, \dots, v_m$ vektörlerinden biri sıfır vektörü ise bu vektörler **lineer bağımlıdır**. Gerçekten $v_j = 0_V$ ise $0_K v_1 + \dots + 1_K v_j + \dots + 0_K v_m = 0_V$ bağıntısında $1_K \neq 0_K$ 'dir.
- $v \neq 0_V$ ise tek başına v **lineer bağımsızdır**: $av = 0_V$ ve $v \neq 0_V$ iken **temel özellikler teoremi** $a = 0_K$ verir.

💡 Bağımsızlık bir homojen sistem sorusudur

K^n 'de $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ bağıntısı, bilinmeyenleri $a_1, \dots, a_m$ olan bir **homojen lineer denklem sistemine** dönüşür. Vektörler bağımsızdır $\Leftrightarrow$ sistemin yalnızca sıfır çözümü vardır $\Leftrightarrow$ merdiven şeklindeki denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir. Bütün hesaplı örnekler bu tercümeyle çözülür.

16.2 Çözümlü Örnekler

Örnek 16.1 ($\mathbb{R}^4$ 'te Bağımsız Üç Vektör). $V = \mathbb{R}^4$ olsun. $v_1 = (6, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 5, -3, 1)$, $v_3 = (0, 0, 7, -2)$ vektörlerinin $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (0, 0, 0, 0)$ olsun:

$$\begin{aligned} x(6, 2, 3, 4) + y(0, 5, -3, 1) + z(0, 0, 7, -2) \\ = (6x, 2x + 5y, 3x - 3y + 7z, 4x + y - 2z) \end{aligned}$$

Bileşenler sıfıra eşitlenirse şu homojen sistem çıkar:

$$6x = 0, \quad 2x + 5y = 0, \quad 3x - 3y + 7z = 0, \quad 4x + y - 2z = 0$$

Birinci denklemden doğrudan $x = 0$ bulunur. Bunu ikinciye taşıyalım:

$$5y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Üçüncü denklemde $x = y = 0$ konursa

$$7z = 0 \implies z = 0$$

(Dördüncü denklem $4 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$ ile kendiliğinden sağlanır.) Merdiven şeklinde denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir ($r = n = 3$); sistemin tek çözümü sıfır çözümdür. Demek ki

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \implies x = y = z = 0$$

yani v_1, v_2, v_3 lineer bağımsızdır.

■

Örnek 16.2 ($\mathbb{R}^3$ 'te Bağımlı Üç Vektör). $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$, $w = (5, 3, -2) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$xu + yv + zw = (0, 0, 0)$ yazalım:

$$x(1, -1, 0) + y(1, 3, -1) + z(5, 3, -2) = (x + y + 5z, -x + 3y + 3z, -y - 2z)$$

Homojen sistem:

$$x + y + 5z = 0, \quad -x + 3y + 3z = 0, \quad -y - 2z = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Merdiven şeklinde denklem sayısı $r = 2$, bilinmeyen sayısı $n = 3$ 'tür. $r < n$ olduğundan sistemin sıfır çözümünden farklı çözümleri vardır: serbest değişken z 'dir.

$z = 1$ alalım. İkinci denklemden $y = -2$, birinciden $x = -y - 5z = 2 - 5 = -3$ bulunur. Yani

$$-3u - 2v + w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Katsayılar hepsi birden sıfır olmadığından u, v, w lineer bağımlıdır. Sağlama:

$$\begin{aligned} -3(1, -1, 0) - 2(1, 3, -1) + (5, 3, -2) &= (-3 - 2 + 5, 3 - 6 + 3, 0 + 2 - 2) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

■

16.3 Bağımlılığın Anlamı

Teorem 16.1 (Bağımlılık Ölçütü). $v_1, \dots, v_m \in V(K)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul, içlerinden birinin diğerlerinin bir lineer kombinasyonu olmasıdır.

İspat.

Gereklik. Vektörler bağımlı olsun; o hâlde hepsi birden sıfır olmayan $b_1, \dots, b_m \in K$ ile

$$b_1v_1 + \dots + b_jv_j + \dots + b_mv_m = 0_V$$

yazılır. Sıfırdan farklı katsayılardan birini, diyelim $b_j \neq 0_K$ olanını seçelim. K bir cisim olduğundan b_j^{-1} vardır; bağıntıyı b_j^{-1} ile çarpalım:

$$(b_j^{-1}b_1)v_1 + \dots + \underbrace{(b_j^{-1}b_j)}_{1_K}v_j + \dots + (b_j^{-1}b_m)v_m = 0_V$$

v_j terimini yalnız bırakalım:

$$v_j = - (b_j^{-1}b_1) v_1 - \dots - (b_j^{-1}b_{j-1}) v_{j-1} - (b_j^{-1}b_{j+1}) v_{j+1} - \dots - (b_j^{-1}b_m) v_m$$

Yani v_j , diğerlerinin lineer kombinezonudur.

Yeterlik. v_j , diğerlerinin bir lineer kombinezonu olsun:

$$v_j = a_1v_1 + \dots + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_mv_m$$

Bütün terimleri sola alalım:

$$a_1v_1 + \dots + a_{j-1}v_{j-1} + (-1_K) v_j + a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_mv_m = 0_V$$

v_j 'nin katsayısı $-1_K \neq 0_K$ olduğundan katsayılar hepsi birden sıfır değildir; vektörler lineer bağımlıdır. ■

Bir sonraki teorem bu sonucu keskinleştirir: bağımlılık hâlinde, “diğerlerinin” değil doğrudan **kendisinden öncekilerin** kombinezonu olan bir vektör bulunabilir.

Teorem 16.2 (Öncekilerin Kombinezonu). $v_1, \dots, v_m \in V(K)$ ($m \geq 2$) vektörlerinin hiçbirisi sıfır vektörü olmasın. Bu vektörlerin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul, içlerinden birinin, diyelim v_i 'nin ($i \in \{2, \dots, m\}$), kendisinden **öncekilerin** bir lineer kombinezonu olmasıdır:

$$v_i = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} \quad (a_1, \dots, a_{i-1} \in K)$$

İspat.

Gereklik. Vektörler bağımlı olsun:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = 0_V$$

katsayılar hepsi birden sıfır olmamak üzere, $a_t \neq 0_K$ koşulunu sağlayan **en büyük** indis t olsun. t 'den sonraki bütün katsayılar sıfır olduğundan bağıntı

$$a_1v_1 + \dots + a_tv_t = 0_V$$

hâline iner.

$t > 1$ olduğunu görelim: $t = 1$ olsaydı $a_1v_1 = 0_V$ ve $a_1 \neq 0_K$ olurdu; buradan $v_1 = 0_V$ çıkardı ve bu, hiçbir vektörün sıfır olmadığı hipoteziyle çelişirdi. Demek ki $t > 1$ 'dir.

Şimdi bağıntıyı a_t^{-1} ile çarpıp v_t 'yi yalnız bırakalım:

$$v_t = - (a_t^{-1}a_1) v_1 - \dots - (a_t^{-1}a_{t-1}) v_{t-1}$$

Yani v_t , kendisinden öncekilerin bir lineer kombinezonudur.

Yeterlik. $v_i = a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1}$ olsun. Terimleri sola alalım:

$$a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + (-1_K) v_i + 0_Kv_{i+1} + \dots + 0_Kv_m = 0_V$$

v_i 'nin katsayısı $-1_K \neq 0_K$ olduğundan vektörler lineer bağımlıdır. ■

16.4 Merdiven Matrisin Satırları

Teorem 16.3 (Merdiven Matrisin Satırları Bağımsızdır). Bir merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsızdır.

İspat.

$A_{(m,n)}$ bir merdiven K -matris ve sıfırdan farklı satırları $R_1, \dots, R_\ell$ olsun. Bu satırların lineer **bağımlı** olduğunu varsayalım.

Satırların hiçbirisi sıfır vektörü olmadığından bir önceki teorem uygulanabilir — satırları $R_\ell, R_{\ell-1}, \dots, R_1$ sırasıyla ele alalım. O hâlde bir R_t satırı, kendisinden **sonraki** satırların bir lineer kombinezonudur:

$$R_t = a_\ell R_\ell + a_{\ell-1} R_{\ell-1} + \cdots + a_{t+1} R_{t+1}$$

R_t 'nin ilk sıfırdan farklı bileşeni, yani ayrıcalıklı elemanı, s -inci sütunda bulunsun. Merdiven matris tanımı gereği ayrıcalıklı elemanların sütun numaraları aşağı indikçe kesin arttığından, $R_{t+1}, \dots, R_\ell$ satırlarının hepsinin s -inci bileşeni 0_K 'dir.

O hâlde yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının s -inci bileşeni

$$a_\ell \cdot 0_K + \cdots + a_{t+1} \cdot 0_K = 0_K$$

olur. Ama sol tarafın s -inci bileşeni, tanım gereği 0_K 'dan farklı olan ayrıcalıklı elemandır — çelişki. Demek ki $R_1, \dots, R_\ell$ satırları lineer bağımsızdır.

■

Bu teorem, bir vektör ailesinin bağımsızlığını sınamanın en pratik yolunu verir: vektörleri satır kabul eden matrisi merdiven şekline indir; sıfır satır çıkmıyorsa vektörler bağımsızdır.

16.5 Beş Uyarı

1. $v_1, \dots, v_m$ lineer bağımlı ise $\{v_1, \dots, v_m\}$ kümesine **lineer bağımlı küme**, bağımsız ise **lineer bağımsız küme** denir.
2. Vektörlerden herhangi ikisi eşitse, örneğin $v_1 = v_2$ ise, vektörler lineer bağımlıdır:

$$v_1 - v_2 + 0_K v_3 + \cdots + 0_K v_m = 0_V$$

bağıntısında v_1 'in katsayısı $1_K \neq 0_K$ 'dir.

3. İki vektörün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul, birinin diğersinin bir katı olmasıdır: $v_1 = av_2$ ($a \in K$).

4. Lineer bağımlı bir küme içeren kümenin kendisi de lineer bağımlıdır. Bundan dolayı bir lineer bağımsız kümenin her alt kümesi de lineer bağımsızdır.

5. $\{v_1, \dots, v_m\}$ lineer bağımsız ise, indislerin herhangi bir permütasyonu $i_1, \dots, i_m$ için $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ de lineer bağımsızdır: bağımsızlık sıralamaya bağlı değildir.

16.6 Alıştırma

Alıştırma 16.1 (Bağımlı mı, Bağımsız mı?).

- a) $\mathbb{R}^3$ 'te $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(7, -4, 1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz.
- b) $\mathbb{R}^3$ 'te $(1, 2, -3)$, $(1, -3, 2)$, $(2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz.
- c) $u, v, w \in V(K)$ lineer bağımsız olsun. $u + v$, $u - v$, $u - 2v + w$ vektörlerinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
- d) $v = (1 + i, 2i)$ ve $w = (1, 1 + i)$ vektörlerinin $\mathbb{C}^2$ 'de $\mathbb{C}$ üzerinde lineer bağımlı, fakat $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $x(1, -2, 1) + y(2, 1, -1) + z(7, -4, 1) = (0, 0, 0)$ homojen sistemini kuralım:

$$x + 2y + 7z = 0, \quad -2x + y - 4z = 0, \quad x - y + z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2]{R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r = 2 < n = 3$ olduğundan sıfırdan farklı çözüm vardır: vektörler **lineer bağımlıdır**. $z = 1$ alınırsa $y = -2$ ve $x = -2y - 7z = 4 - 7 = -3$; yani

$$-3(1, -2, 1) - 2(2, 1, -1) + (7, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

b) Aynı yolla:

$$x + y + 2z = 0, \quad 2x - 3y - z = 0, \quad -3x + 2y + 5z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow 3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$r = n = 3$ olduğundan yalnızca sıfır çözüm vardır ($z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$): vektörler **lineer bağımsızdır**.

c) $a, b, c \in K$ için

$$a(u + v) + b(u - v) + c(u - 2v + w) = 0_V$$

olsun. Terimleri u, v, w 'ye göre toplayalım:

$$(a + b + c)u + (a - b - 2c)v + cw = 0_V$$

u, v, w lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfır olmalıdır:

$$a + b + c = 0_K, \quad a - b - 2c = 0_K, \quad c = 0_K$$

Üçüncü denklemden $c = 0_K$; bunu ilk ikisine taşıyalım:

$$a + b = 0_K, \quad a - b = 0_K$$

İkisini toplarsak $2a = 0_K$, çıkarırsak $2b = 0_K$ olur. (Burada K 'nin karakteristiğinin 2 olmadığını, örneğin $K = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ olduğunu varsayıyoruz.) Buradan $a = b = 0_K$ bulunur. Üç katsayı da sıfır çıktığından verilen vektörler lineer bağımsızdır.

d) $\mathbb{C}$ üzerinde bağımlı. w 'yi $1 + i$ skaleriyle çarpalım:

$$(1 + i)w = (1 + i, (1 + i)^2) = (1 + i, 1 + 2i + i^2) = (1 + i, 2i) = v$$

Demek ki $v = (1 + i)w$ 'dir; biri diğerinin katı olduğundan (üçüncü uyarı) iki vektör $\mathbb{C}$ üzerinde lineer bağımlıdır.

$\mathbb{R}$ üzerinde bağımsız. Bu kez skalerler yalnız reel olabilir. $a, b \in \mathbb{R}$ için $av + bw = (0, 0)$ olsun:

$$a(1 + i) + b = 0, \quad 2ai + b(1 + i) = 0$$

Birinci denklemleri reel ve sanal kısımlarına ayıralım:

$$(a + b) + ai = 0 \implies a = 0 \text{ ve } a + b = 0$$

Buradan $a = 0$ ve $b = 0$ bulunur; ikinci denklem de kendiliğinden sağlanır. Katsayılar sıfır olmak zorunda olduğundan vektörler $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsızdır.

Bu örnek önemli bir noktayı gösterir: bağımlılık, vektörlerin kendisi kadar **skalerlerin alındığı cisme** de bağlıdır.

■

Bir uzayı doğuran ve aynı zamanda lineer bağımsız olan bir küme, o uzay için en ekonomik tarif olur. Bu kümeler taban denir ve sıradaki bölümün konusudur: **taban ve boyut**.

17. Taban ve Boyut

Bir uzayı doğuran küme, o uzayı tarif eder; lineer bağımsız bir küme ise içinde fazlalık taşımaz. İkisi birden sağlandığında elde edilen küme, uzayın en ekonomik tarifidir: **taban**. Bu bölümde tabanı tanımlayacak ve dersin en önemli sayısal değişimine varacağız — bir uzayın bütün tabanlarının eleman sayısı aynıdır.

17.1 Taban ve Boyut

Tanım 17.1 (Taban). V , K komutatif cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V 'yi doğuran, yani

$$V = L(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

koşulunu sağlayan **lineer bağımsız** bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq V$ kümesine, V vektör uzayının bir **tabanı** denir.

Tanım 17.2 (Boyut). n elemanlı bir tabanı bulunan V vektör uzayına **n -boyutlu** (sonlu boyutlu) vektör uzayı denir ve $\dim V = n$ yazılır.

İki uç durum tanıma iliştilir:

- $\{0_V\}$ vektör uzayının boyutu sıfır kabul edilir: $\dim\{0_V\} = 0$.
- Sonlu boyutlu olmayan bir vektör uzayına **sonsuz boyutlu** vektör uzayı denir.

Örnek 17.1 (K^n 'in Standart Tabanı). K komutatif bir cisim olsun. K^n vektör uzayında

$$e_1 = (1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad e_2 = (0_K, 1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad \dots, \quad e_n = (0_K, \dots, 0_K, 1_K)$$

vektörlerinin K^n 'in bir tabanını oluşturduğunu ve $\dim K^n = n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğurma. $K^n = L(e_1, \dots, e_n)$ olduğunu daha önce gösterdik: her $(a_1, \dots, a_n)$ vektörü $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ biçiminde yazılır.

Bağımsızlık. Bu vektörleri satır kabul eden matris

$$A = \begin{pmatrix} 1_K & 0_K & \cdots & 0_K \\ 0_K & 1_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & 0_K & \cdots & 1_K \end{pmatrix} = I_n$$

birim matristir ve bir merdiven matristir. Merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız olduğundan $e_1, \dots, e_n$ bağımsızdır.

İki koşul birlikte $\{e_1, \dots, e_n\}$ 'in bir taban olduğunu verir; eleman sayısı n olduğundan $\dim K^n = n$ 'dir. Bu tabana K^n 'in **standart** (doğal) tabanı denir.

■

$K = \mathbb{R}$ ve $n = 3$ alındığında $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanıdır ve $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ 'tür.

Örnek 17.2 (Aynı Uzayın Başka Bir Tabanı). $\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ kümesinin de $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğurma. Bu üç vektörün $\mathbb{R}^3$ 'ü doğurduğunu daha önce hesaplamıştık: her (a, b, c) için

$$(a, b, c) = a(1, 2, 3) + (-2a + b)(0, 1, 2) + (a - 2b + c)(0, 0, 1)$$

Bağımsızlık. Vektörleri satır kabul eden matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bir merdiven matristir; ayrıcalıklı elemanları 1, 1, 1 olup sütun numaraları $1 < 2 < 3$ olarak artar. Dolayısıyla satırları lineer bağımsızdır.

Küme hem doğuruyor hem bağımsız olduğundan $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanıdır.

■

i Taban tek türlü belirli değildir

Son iki örnek $\mathbb{R}^3$ 'ün birbirinden farklı iki tabanını verdi. Genel olarak sonlu boyutlu bir $V(K)$ vektör uzayının birden fazla tabanı olabilir; taban **tek türlü belirli değildir**. Değişmeyen şey, birazdan göreceğimiz gibi, tabandaki eleman sayısıdır.

17.2 Doğuran Kümeyi Sadeleştirmek

Teorem 17.1 (Doğuran Kümeye Ekleme ve Çıkarma). $\{v_1, \dots, v_n\}$ kümesi bir $V(K)$ vektör uzayını doğursun, yani $V = L(v_1, \dots, v_n)$ olsun. O hâlde:

1. $w \in V$ olmak üzere $\{w, v_1, \dots, v_n\}$ kümesi lineer bağımlıdır ve V 'yi doğurur:

$$V = L(w, v_1, \dots, v_n)$$

2. v_i ($i \in \{2, \dots, n\}$) kendisinden öncekilerin bir lineer kombinasyonu ise $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ kümesi de V 'yi doğurur.

İspat.

1. $w \in V = L(v_1, \dots, v_n)$ olduğundan w, v_i 'lerin bir lineer kombinasyonudur; **bağımlılık ölçütü** gereği $\{w, v_1, \dots, v_n\}$ lineer bağımlıdır.

Doğurma için: $v \in V$ alalım. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ yazılır ve buna sıfır katsayılı bir terim eklemek serbesttir:

$$v = 0_K w + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in L(w, v_1, \dots, v_n)$$

Demek ki $V \subseteq L(w, v_1, \dots, v_n)$ 'dir. Ters kapsama, w ve v_i 'lerin hepsi V 'de olduğundan ve V bir alt uzay olduğundan geçerlidir. İki kapsama eşitliği verir.

2. $v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1}$ olsun. $L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) \subseteq V$ açıktır. Ters kapsama için $v \in V$ alalım:

$$v = t_1 v_1 + \dots + t_i v_i + \dots + t_n v_n$$

v_i yerine yukarıdaki ifadeyi koyup terimleri gruplayalım:

$$\begin{aligned} v &= t_1 v_1 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} + t_i (a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1}) + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_n v_n \\ &= (t_1 + t_i a_1) v_1 + \dots + (t_{i-1} + t_i a_{i-1}) v_{i-1} + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

Sağ tarafta v_i görünmüyor; yani $v \in L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ 'dir.

■

17.3 Değişirme Teoremi

Teorem 17.2 (Değişirme Teoremi). $\{v_1, \dots, v_n\}$ kümesi $V(K)$ vektör uzayını doğursun ve $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ lineer bağımsız bir küme olsun. O hâlde

$$m \leq n$$

ve $V(K)$, uygun $n - m$ tane v vektörü seçilerek elde edilen

$$\{w_1, \dots, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}\}$$

kümesi tarafından doğrulur. Dolayısıyla V 'de $n + 1$ veya daha fazla vektör daima lineer bağımlıdır.

İspat.

$\{w_1, \dots, w_m\}$ bağımsız olduğundan hiçbir w_j sıfır vektörü değildir. Gerekirse sıfır olan v_i 'ler atılarak v_i 'lerin de hiçbirinin sıfır olmadığı varsayılabilir (sıfır vektörünü atmak gerilen uzayı değiştirmez).

Birinci adım. $w_1 \in V = L(v_1, \dots, v_n)$ olduğundan, önceki teoremin birinci maddesiyle

$$\{w_1, v_1, \dots, v_n\} \text{ lineer bağımlıdır ve } V = L(w_1, v_1, \dots, v_n)$$

Bu kümenin hiçbir elemanı sıfır olmadığından **öncekilerin kombinezonu teoremi** uygulanır: kümedeki bir vektör, kendisinden öncekilerin lineer kombinezonudur. Bu vektör w_1 olamaz, çünkü listede w_1 'den önce hiçbir vektör yoktur ve $w_1 \neq 0_V$ 'dir. O hâlde bu vektör bir v_j 'dir. Önceki teoremin ikinci maddesiyle v_j atılabilir:

$$V = L(w_1, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

İkinci adım. Aynı işlemi w_2 ile tekrarlayalım:

$$\{w_1, w_2, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \text{ bağımlıdır ve } V \text{ 'yi doğurur}$$

Yine bir vektör öncekilerin kombinezonudur. Bu vektör w_1 olamaz; w_2 de olamaz, çünkü w_2 'nin öncesinde yalnızca w_1 vardır ve $\{w_1, w_2\}$ bağımsız olduğundan w_2, w_1 'in katı değildir. Demek ki yine bir v_t 'dir ve atılabilir.

Genel adım. Bu şekilde devam edildiğinde her adımda bir w eklenir ve bir v atılır. Atılan vektör hiçbir zaman bir w olamaz: $\{w_1, \dots, w_m\}$ bağımsız olduğundan hiçbir w_k kendisinden önceki w 'lerin kombinezonu değildir.

$m \leq n$. $m > n$ olsaydı n adım sonra bütün v 'ler tükenir ve

$$V = L(w_1, \dots, w_n)$$

olurdu. O zaman $w_{n+1} \in V$, $w_1, \dots, w_n$ 'in bir lineer kombinezonu olur ve $\{w_1, \dots, w_m\}$ lineer bağımlı çıkardı — hipotezle çelişir. Demek ki $m \leq n$ 'dir.

$m \leq n$ olduğunda işlem m adımda biter ve geriye $n - m$ tane v kalır:

$$V = L(w_1, \dots, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}})$$

Son iddia da buradan çıkar: V 'de $n + 1$ veya daha fazla vektör bağımsız olsaydı $m \geq n + 1 > n$ olurdu, bu ise az önce dışlandı.

■

17.4 Boyut İyi Tanımlıdır

Teorem 17.3 (Tabanların Eleman Sayısı). Sonlu boyutlu bir $V(K)$ vektör uzayının her tabanında aynı sayıda eleman vardır.

İspat.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{f_1, \dots, f_m\}$, $V(K)$ 'nin iki tabanı olsun.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ bir taban olduğundan $V = L(e_1, \dots, e_n)$ 'dir, yani V 'yi doğurur. $\{f_1, \dots, f_m\}$ bir taban olduğundan lineer bağımsızdır. Değişirme teoremini bu ikili için uygulayalım:

$$m \leq n$$

Şimdi rolleri değiştirelim: $\{f_1, \dots, f_m\}$ V 'yi doğurur ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ lineer bağımsızdır. Aynı teorem

$$n \leq m$$

verir. İki eşitsizlik birlikte $m = n$ sonucunu doğurur.

■

Bu teorem sayesinde $\dim V$ gerçekten uzaya ait bir sayıdır: hangi taban seçilirse seçilsin değişmez.

17.5 Alıştırma

Alıştırma 17.1 (Taban ve Boyut).

- $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.
- $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı olmadığını gösteriniz.
- $\mathbb{R}^4$ 'te $L((1, -2, 3, -1), (1, 1, -2, 3))$ alt uzayının boyutunu bulunuz.
- $\mathbb{R}^4$ 'te $L((3, -6, 3, -9), (-2, 4, -2, 6))$ alt uzayının boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ olduğundan üç elemanlı bir kümenin taban olması için lineer bağımsız olması yeterlidir; yine de burada doğrudan hesaplalarla ilerleyelim. Vektörleri satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matris bir merdiven matristir ve sıfır satırı yoktur; dolayısıyla üç vektör lineer bağımsızdır. Ayrıca merdivenin satır uzayı, ilk matrisin satır uzayına eşittir ve üç ayrıcalıklı eleman üç sütunu da kapsadığından bu uzay $\mathbb{R}^3$ 'ün tamamıdır. Küme hem bağımsız hem doğuran olduğundan bir tabandır.

b) Aynı yöntemi uygulayalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bir satır tamamen sıfır olduğundan üç vektör lineer **bağımlıdır**; bağımlı bir küme taban olamaz. (Nitekim gerilen uzayın boyutu 2'dir, $\mathbb{R}^3$ 'ün tamamı değildir.)

c) İki vektörü satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow -R_1 + R_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Merdiven şeklinde iki sıfırdan farklı satır kaldı; bunlar lineer bağımsızdır ve satır uzayı değişmediğinden alt uzayın bir tabanını oluştururlar. Demek ki

$$\dim L((1, -2, 3, -1), (1, 1, -2, 3)) = 2$$

(Aynı sonuç doğrudan da görülür: hiçbirinin katı olmadığından iki vektör bağımsızdır.)

d) Burada ikinci vektör birincinin bir katıdır:

$$-\frac{2}{3}(3, -6, 3, -9) = (-2, 4, -2, 6)$$

Dolayısıyla iki vektör lineer bağımlıdır ve gerdikleri uzay tek bir vektörün gerdiği uzaydır:

$$L((3, -6, 3, -9), (-2, 4, -2, 6)) = L((3, -6, 3, -9))$$

Sıfırdan farklı tek bir vektör bağımsız olduğundan bu küme bir tabandır ve boyut 1'dir.



Boyutun iyi tanımlı olduğunu biliyoruz. Şimdi bu sayının nasıl kullanıldığına bakalım: bağımsız kümeleri tabana tamamlamak, alt uzayların boyutlarını karşılaştırmak ve iki alt uzayın toplamının boyutunu hesaplamak. Sıradaki bölüm bunları veriyor: [boyut teoremleri](#).

18. Boyut Teoremleri

Boyutun iyi tanımlı bir sayı olduğunu biliyoruz. Bu bölümde onu bir araca dönüştürüyoruz: bağımsız bir küme ne zaman tabana tamamlanır, bir alt uzayın boyutu ana uzayınkinden nasıl küçük kalır ve iki alt uzayın toplamının boyutu nasıl hesaplanır? Son sorunun yanıtı, kesişimi de hesaba katan zarif bir formüldür.

18.1 Maksimal Bağımsız Alt Küme

Tanım 18.1 (Maksimal Bağımsız Alt Küme). S , bir $V(K)$ vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\{v_1, \dots, v_m\}$ kümesine S 'nin bir **maksimal bağımsız alt kümesi** denir:

Koşul 1. $\{v_1, \dots, v_m\}$, S 'nin lineer bağımsız bir alt kümesidir.

Koşul 2. Her $w \in S$ için $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

Teorem 18.1 (Bağımlılıktan Kombinezona). $\{v_1, \dots, v_m\}$, $V(K)$ 'nin lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. $w \in V$ için $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ kümesi lineer bağımlı ise w , $v_1, \dots, v_m$ vektörlerinin bir lineer kombinezonudur.

İspat.

Bağımlılık gereği, hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \dots, a_m, b \in K$ ile

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b w = 0_V$$

yazılır. Eğer $b = 0_K$ olsaydı bağıntı $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0_V$ hâline gelirdi ve katsayılar hepsi birden sıfır olmadığından $\{v_1, \dots, v_m\}$ bağımlı çıkardı — hipotezle çelişir. Demek ki $b \neq 0_K$ 'dir.

K bir cisim olduğundan b^{-1} vardır; w 'yi yalnız bırakalım:

$$w = - (b^{-1} a_1) v_1 - \dots - (b^{-1} a_m) v_m \in L(v_1, \dots, v_m)$$

■

Teorem 18.2 (Sonlu Doğuran Kümeden Taban). $V(K)$ vektör uzayı, boş kümeden farklı sonlu bir S kümesi tarafından doğrulsun ($V = L(S)$). Bu takdirde V sonlu boyutludur ve S 'nin bir alt kümesi V 'nin bir tabanıdır.

İspat.

S 'nin bütün elemanları 0_V ise $V = L(S) = \{0_V\}$ 'dir ve tanım gereği $\dim V = 0$ 'dır; iddia bu durumda geçerlidir.

Aksi hâlde S , sıfırdan farklı bir vektör içerir ve bu vektör tek başına lineer bağımsız bir alt küme oluşturur. S sonlu olduğundan S 'nin lineer bağımsız alt kümeleri de sonlu sayıdadır; bunlar arasında **eleman sayısı en büyük** olanı seçelim ve $\{v_1, \dots, v_m\}$ diyelim.

Bu küme S 'nin maksimal bağımsız alt kümesidir: $w \in S$ için $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ bağımsız olsaydı, daha çok elemanlı bağımsız bir alt küme bulunmuş olurdu ve bu seçimimizle çelişirdi (eğer w zaten v_i 'lerden biriyse küme tekrar eden vektör içerdiğinden bağımlıdır). Bir sonraki teorem bu kümenin bir taban olduğunu verir.

■

Teorem 18.3 (Maksimal Bağımsız Alt Küme Bir Tabandır). $\{v_1, \dots, v_m\}$, $V(K)$ 'yi doğuran bir S kümesinin ($V = L(S)$) maksimal bağımsız alt kümesi ise $\{v_1, \dots, v_m\}$, V 'nin bir tabanıdır.

İspat.

Küme zaten lineer bağımsızdır; geriye V 'yi doğurduğunu göstermek kalır.

$w \in S$ alalım. **Koşul 2** gereği $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ lineer bağımlıdır; $\{v_1, \dots, v_m\}$ bağımsız olduğundan bir önceki teorem uygulanır:

$$w \in L(v_1, \dots, v_m)$$

Bu her $w \in S$ için doğru olduğundan $S \subseteq L(v_1, \dots, v_m)$ 'dir. $L(v_1, \dots, v_m)$ bir alt uzay olduğundan, *gerilen uzayın en küçüklüğü gereği*

$$L(S) \subseteq L(v_1, \dots, v_m)$$

$V = L(S)$ olduğundan $V \subseteq L(v_1, \dots, v_m)$ 'dir; ters kapsama $v_i \in V$ olmasından gelir. Demek ki $V = L(v_1, \dots, v_m)$ 'dir ve küme hem bağımsız hem doğuran olduğundan bir tabandır.

■

18.2 Boyutun Üç Sonucu

Teorem 18.4 (Sonlu Boyutlu Uzaylarda Üç Sonuç). $V(K)$, n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. O hâlde:

1. V 'de $n + 1$ veya daha fazla elemanlı bir küme lineer bağımlıdır.
2. Herhangi bir lineer bağımsız küme, $V(K)$ 'nin bir tabanının alt kümesidir; yani bir tabana tamamlanabilir.
3. n elemanlı lineer bağımsız bir küme, $V(K)$ 'nin bir tabanıdır.

İspat.

$\{e_1, \dots, e_n\}$, $V(K)$ 'nin bir tabanı olsun.

1. Taban V 'yi doğurduğundan, *değiştirme teoremi* gereği V 'de bağımsız bir kümenin eleman sayısı n 'yi aşamaz. Dolayısıyla $n + 1$ veya daha fazla elemanlı her küme bağımlıdır.

2. $\{v_1, \dots, v_r\}$ lineer bağımsız olsun. Değiştirme teoremi, uygun $n - r$ tane taban vektörü seçilerek

$$V = L(v_1, \dots, v_r, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$$

olduğunu verir. Sağdaki küme S olsun; S sonludur ve $V = L(S)$ 'dir. Bir önceki teoreme göre S 'nin bir alt kümesi V 'nin tabanıdır. S 'nin eleman sayısı n 'dir ve V 'nin her tabanında n eleman bulunduğundan bu alt küme S 'nin kendisidir. Demek ki S bir tabandır ve $\{v_1, \dots, v_r\}$ 'yi içerir.

3. T , V 'nin n elemanlı bağımsız bir alt kümesi olsun. (2)'ye göre T , bir tabanın alt kümesidir; her tabanda n eleman bulunduğundan ve T de n elemanlı olduğundan T 'nin kendisi o tabandır.

■

Teorem 18.5 (Alt Uzayın Boyutu). $V(K)$ n -boyutlu bir vektör uzayı ve W , V 'nin bir alt vektör uzayı olsun. O hâlde

$$\dim W \leq n$$

Ayrıca $\dim W = n$ ise $W = V$ 'dir.

İspat.

$W \subseteq V$ olduğundan W 'nin bir tabanı, aynı zamanda V 'de lineer bağımsız bir kümedir. Bir önceki teoremin birinci maddesine göre V 'de bağımsız bir kümenin eleman sayısı n 'yi aşamaz; dolayısıyla W 'nin tabanı en çok n elemanlıdır, yani $\dim W \leq n$ 'dir.

$\dim W = n$ olsun ve $\{w_1, \dots, w_n\}$, W 'nin bir tabanı olsun. Bu küme V 'nin n elemanlı lineer bağımsız bir alt kümesidir; önceki teoremin üçüncü maddesiyle V 'nin de bir tabanıdır. O hâlde

$$V = L(w_1, \dots, w_n) = W$$

■

18.3 Boyut Formülü

Teorem 18.6 (Boyut Formülü). U ve W , $V(K)$ 'nin sonlu boyutlu alt vektör uzayları olsun. O hâlde $U + W$ de sonlu boyutludur ve

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Özel olarak $V = U \oplus W$ ise $\dim V = \dim U + \dim W$ 'dir.

İspat.

$U \cap W$, hem U 'nun hem W 'nin bir alt uzayıdır; $\dim(U \cap W) = k$ olsun ve $\{z_1, \dots, z_k\}$ bunun bir tabanı olsun.

Bu küme U 'da bağımsızdır; önceki teoremin ikinci maddesiyle U 'nun bir tabanına tamamlanabilir:

$$\{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p\} \text{ tabanı} \implies \dim U = k + p$$

Aynı biçimde W 'nin bir tabanına da tamamlanabilir:

$$\{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q\} \text{ tabanı} \implies \dim W = k + q$$

Şimdi

$$B = \{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$$

kümesinin $U + W$ 'nin bir tabanı olduğunu gösterelim.

B , $U + W$ 'yi doğurur. $U + W$ 'nin keyfi bir elemanı $u + w$ biçimindedir. $u \in U$, z 'ler ve u 'lar cinsinden; $w \in W$, z 'ler ve w 'ler cinsinden yazıldığından toplamları B 'nin elemanlarının bir lineer kombinezonudur.

B lineer bağımsızdır. Skalerler a_i, b_j, c_ℓ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^k a_i z_i + \sum_{j=1}^p b_j u_j + \sum_{\ell=1}^q c_\ell w_\ell = 0_V$$

olsun. Terimleri ayıralım:

$$x := \sum_{i=1}^k a_i z_i + \sum_{j=1}^p b_j u_j = - \sum_{\ell=1}^q c_\ell w_\ell$$

Sol taraf U 'nun, sağ taraf W 'nin bir elemanıdır; eşit olduklarına göre $x \in U \cap W$ 'dir. O hâlde x , $\{z_1, \dots, z_k\}$ cinsinden yazılır: $x = \sum d_i z_i$. Buradan

$$\sum_{i=1}^k d_i z_i + \sum_{\ell=1}^q c_\ell w_\ell = 0_V$$

elde edilir. $\{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q\}$, W 'nin tabanı olduğundan bağımsızdır; dolayısıyla bütün d_i ve c_ℓ katsayıları sıfırdır. $c_\ell = 0_K$ olduğu bilindiğine göre başlangıçtaki bağıntı

$$\sum_{i=1}^k a_i z_i + \sum_{j=1}^p b_j u_j = 0_V$$

hâline iner. Bu kez $\{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p\}$, U 'nun tabanı olduğundan bağımsızdır ve bütün a_i, b_j katsayıları sıfır çıkar. Demek ki B bağımsızdır.

Sonuç. B bir taban olduğundan

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= k + p + q = (k + p) + (k + q) - k \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

$V = U \oplus W$ ise **direkt toplam ölçütü** gereği $U \cap W = \{0_V\}$ ve $\dim(U \cap W) = 0$ 'dır; formül $\dim V = \dim U + \dim W$ 'ye iner.

■

18.4 Çözümlü Örnekler

Örnek 18.1 (K^4 'te Dört Vektör). K komutatif bir cisim olmak üzere K^4 'te

$$(1_K, 1_K, 1_K, 1_K), \quad (0_K, 1_K, 1_K, 1_K) \\ (0_K, 0_K, 1_K, 1_K), \quad (0_K, 0_K, 0_K, 1_K)$$

vektörlerinin K^4 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bu vektörler

$$A = \begin{pmatrix} 1_K & 1_K & 1_K & 1_K \\ 0_K & 1_K & 1_K & 1_K \\ 0_K & 0_K & 1_K & 1_K \\ 0_K & 0_K & 0_K & 1_K \end{pmatrix}$$

matrisinin satırlarıdır ve A bir merdiven matristir (ayrıcalıklı elemanların sütunları $1 < 2 < 3 < 4$).

Merdiven matrisin satırları bağımsız olduğundan dört vektör lineer bağımsızdır.

$\dim K^4 = 4$ olduğundan, 4 elemanlı lineer bağımsız bir küme kendiliğinden bir tabandır (üç sonuç teoreminin üçüncü maddesi). Demek ki verilen küme K^4 'ün bir tabanıdır.

■

Örnek 18.2 (Boyut Bir Üst Sınırdır). $\mathbb{R}^3$ 'te

$$v_1 = (257, -132, 58), \quad v_2 = (43, 0, -17) \\ v_3 = (521, -317, 94), \quad v_4 = (328, -512, -731)$$

vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu tek satırda gerekçelendiriniz.

Çözüm.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ 'tür ve n -boyutlu bir uzayda $n + 1$ veya daha fazla vektör daima lineer bağımlıdır. Burada $3 + 1 = 4$ vektör verildiğinden v_1, v_2, v_3, v_4 lineer bağımlıdır – sayıların ne olduğuna bakmaya bile gerek yoktur.

■

Örnek 18.3 (Taban Bulma ve Tabana Tamamlama). W , $\mathbb{R}^4$ 'ün $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$, $(3, 8, -3, -5)$ vektörleri tarafından doğrulan alt uzayı olsun.

a) W 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

b) Bulduğunuz tabanı $\mathbb{R}^4$ 'ün bir tabanına genişletiniz.

Çözüm.

a) Vektörleri satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olduğundan **satır uzayları aynıdır**:

$$W = B \text{ 'nin satır uzayı} = L \left((1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2) \right)$$

B bir merdiven matris olduğundan sıfırdan farklı iki satırı lineer bağımsızdır. Demek ki

$$\{ (1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2) \}$$

W 'nin bir tabanıdır ve $\dim W = 2$ 'dir.

b) Bağımsız bir küme her zaman bir tabana tamamlanabilir; burada tamamlamayı merdiven yapısını koruyacak biçimde seçelim. $(0, 0, 1, 1)$ ve $(0, 0, 0, 1)$ vektörlerini ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu bir merdiven matristir (ayrıcılık sütunlar $1 < 2 < 3 < 4$); dolayısıyla dört satırı lineer bağımsızdır. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ olduğundan 4 elemanlı bağımsız küme bir tabandır:

$$\{ (1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1) \}$$

kümesi $\mathbb{R}^4$ 'ün bir tabanıdır ve W 'nin tabanını içerir.

■

Örnek 18.4 (Kesişimin Boyutunu Formülle Bulmak). $U = L((1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1))$ ve $W = L((1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3))$, $\mathbb{R}^4$ 'ün alt uzayları olsun. $\dim(U + W)$ ve $\dim(U \cap W)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$\dim(U + W)$. $U + W$, altı vektörün tamamının gerdiği uzaydır; hepsini satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_1 + R_4 \\ R_5 \rightarrow -2R_1 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -R_1 + R_6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_2 + R_4 \\ R_5 \rightarrow -R_2 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -2R_2 + R_6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_5 \rightarrow -R_4 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -2R_4 + R_6 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı üç satır kaldığından $\dim(U + W) = 3$ 'tür ve

$$\{ (1, 1, 0, -1), (0, 1, 3, 1), (0, 0, -1, -2) \}$$

$U + W$ 'nin bir tabanıdır.

$\dim U$. U 'nin üç doğuran vektörünü indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim U = 2$ 'dir.

$\dim W$. Aynı işlem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim W = 2$ 'dir.

Kesişim. Boyut formülünü kullanalım:

$$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W) \implies \dim(U \cap W) = 1$$

Kesişimin bir tabanını bulmadan boyutunu öğrenmiş olduk.

■

18.5 Alıştırma

Alıştırma 18.1 (Boyut Hesapları).

- a) V , K üzerinde bir vektör uzayı ve $\dim V = 6$ olsun. U ve W , V 'nin birbirinden farklı gerçek alt uzayları ($U \subsetneq V$, $W \subsetneq V$, $U \neq W$) ve $\dim U = \dim W = 4$ olsun. $\dim(U \cap W)$ 'nin alabileceği bütün değerleri bulunuz.
- b) $U = L((1, 3, -2, 2, 3), (1, 4, -3, 4, 2), (2, 3, -1, -2, 9))$ ve $W = L((1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1))$, $\mathbb{R}^5$ 'in alt uzayları olsun. $U + W$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $d = \dim(U \cap W)$ diyelim. Boyut formülü

$$\dim(U + W) = 4 + 4 - d = 8 - d$$

verir.

Üst sınır: $U + W$, V 'nin bir alt uzayı olduğundan $\dim(U + W) \leq 6$ 'dır:

$$8 - d \leq 6 \implies d \geq 2$$

Alt sınır: $U \cap W \subseteq U$ olduğundan $d \leq \dim U = 4$ 'tür. $d = 4$ olsaydı, $U \cap W$, U 'nin $\dim U$ boyutlu bir alt uzayı olurdu ve **alt uzay boyutu teoremine** göre $U \cap W = U$ çıkardı. Aynı gerekçeyle $U \cap W = W$ olurdu, dolayısıyla $U = W$ – bu ise $U \neq W$ varsayımıyla çelişir. Demek ki $d \leq 3$ 'tür.

İki koşul birlikte $d \in \{2, 3\}$ verir. Her iki değer de gerçekleşebilir: $\mathbb{R}^6$ 'da $U = L(e_1, e_2, e_3, e_4)$ alıp $W = L(e_1, e_2, e_3, e_5)$ seçilirse $d = 3$; $W = L(e_1, e_2, e_5, e_6)$ seçilirse $d = 2$ olur.

b) Altı doğuran vektörün tamamını satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_1 + R_4 \\ R_5 \rightarrow -R_1 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -2R_1 + R_6 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

İkinci sütunu temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3 \\ R_5 \rightarrow -2R_2 + R_5 \\ R_6 \rightarrow R_2 + R_6 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Dördüncü satırı ayrıcalıklı satır olarak kullanalım:

$$\begin{array}{l} R_5 \rightarrow R_4 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -3R_4 + R_6 \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı üç satır kaldı; bunlar bir merdiven matrisin satırları olduğundan lineer bağımsızdır ve satır uzayı korunduğundan $U + W$ 'yi doğururlar. Demek ki

$$\{ (1, 3, -2, 2, 3), (0, 1, -1, 2, -1), (0, 0, 2, 0, -2) \}$$

$U + W$ 'nin bir tabanıdır ve $\dim(U + W) = 3$ 'tür.

■

Bir matrisin satır uzayının boyutu, o matrisin taşıdığı “bağımsız bilgi” miktarını ölçer. Bu sayıya rank denir ve denklem sistemleri hakkındaki her şeyi tek bir sayıya bağlar: [rank ve denklem sistemleri](#).

19. Rank ve Denklem Sistemleri

Bir matrisin satırlarının gerdiği uzayın boyutu, o matriste kaç tane “bağımsız satır” bulunduğunu söyler. Bu sayı — **rank** — şaşırtıcı biçimde sütunlar için de aynı çıkar ve lineer denklem sistemleri hakkındaki bütün soruları tek bir sayıya bağlar: çözüm var mı, kaç tane var, çözüm kümesinin boyutu nedir?

19.1 Rank

Tanım 19.1 (Satır Rankı). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisinin **satır uzayının** boyutuna A 'nın **satır rankı** denir.

Tanım 19.2 (Sütun Rankı). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisinin sütun uzayının boyutuna A 'nın **sütun rankı** denir.

Teorem 19.1 (Satır Rankı Sütun Rankına Eşittir). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisinin *satır rankı, sütun rankına eşittir.*

Bu ortak sayıya A matrisinin **rankı** denir ve $\text{rank}(A)$ ile gösterilir:

$$\text{rank}(A) = A \text{ 'nın satır rankı} = A \text{ 'nın sütun rankı}$$

💡 Rank nasıl hesaplanır?

A 'yı elemanter satır işlemleriyle bir merdiven matrise indirgeyin. Satır uzayı korunduğundan ve **merdivenin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız** olduğundan, bu satırlar satır uzayının bir tabanını oluşturur. Yani

$$\text{rank}(A) = \text{bir merdiven şeklindeki sıfırdan farklı satır sayısı}$$

Örnek 19.1 (Bir Rank Hesabı). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}$ -matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm.

Merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olduğundan satır uzayları aynıdır:

$$A \text{ 'nın satır uzayı} = L \left((1, 2, 0, -1), (0, 2, -3, -1) \right)$$

B bir merdiven matris olduğundan bu iki satır lineer bağımsızdır ve satır uzayının bir tabanını oluşturur. Demek ki satır uzayının boyutu 2'dir:

$$\text{rank}(A) = 2$$

■

19.2 Denklem Sistemlerine Uygulama

K cismi üzerinde m denklemlilik, n bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi matrislerle

$$AX = B$$

biçiminde yazılır; burada $A_{(m,n)}$ katsayılar matrisi, $X_{(n,1)}$ bilinmeyenler sütunu, $B_{(m,1)}$ sabit terimler sütunudur:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistemin genişletilmiş matrisi $(A, B)_{(m, n+1)}$ 'dir.

Teorem 19.2 (Çözülebilirliğin Rank Ölçütü). $AX = B$ denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşul, A katsayılar matrisinin rankının, (A, B) genişletilmiş matrisinin rankına eşit olmasıdır:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A, B)$$

Bu ölçüt, Gauss yönteminde gördüğümüz “çözumsuzlük işareti”nin cebirsel karşılığıdır: merdiven şeklinde sol tarafı tamamen sıfır, sağ tarafı sıfırdan farklı bir satır belirmesi, genişletilmiş matriste fazladan bir sıfırdan farklı satır bulunması demektir; o zaman $\text{rank}(A, B) = \text{rank}(A) + 1$ olur.

19.3 Homojen Sistemin Çözüm Uzayı

$AX = 0$ homojen sisteminin çözüm kümesi W 'nin K^n 'in bir alt uzayı olduğunu biliyoruz. Boyutu, rank tarafından belirlenir.

Teorem 19.3 (Çözüm Uzayının Boyutu). $AX = 0$ lineer homojen denklem sisteminin W çözüm uzayının boyutu

$$\dim W = n - r$$

dir; burada n bilinmeyenlerin sayısı, $r = \text{rank}(A)$ 'dır.

i Not

Bu teoremin ispatı için henüz elimizde uygun araç yok; dönüşümler ve denklem sistemleri bölümünde boyut teoremiyle birkaç satırda ispatlayacağız.

Bu teorem, merdiven şeklindeki **serbest değişken sayısı** ile çözüm uzayının boyutunun aynı şey olduğunu söyler. Bir taban da doğrudan okunur: serbest değişkenlerden birine 1_K , diğerlerine 0_K verilerek bulunan çözümler bir taban oluşturur.

Örnek 19.2 (Beş Bilinmeyenli Bir Homojen Sistem). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z + 3r - s &= 0 \\ x + 2y - 2z + 2r + s &= 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3r + 4s &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin W çözüm uzayının boyutunu ve bir tabanını bulunuz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim (sütunlar x, y, z, r, s sırasında):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Merdiven şeklindeki sistem

$$x + 2y - 4z + 3r - s = 0, \quad 2z - r + 2s = 0$$

olup $r = \text{rank}(A) = 2$ ve $n = 5$ 'tir. Demek ki

$$\dim W = n - r = 5 - 2 = 3$$

Ayrıcalıklı sütunlar birinci ve üçüncü sütunlardır; serbest değişkenler y, r ve s 'tir. Her birine sırayla 1, diğerlerine 0 vererek üç çözüm üretelim.

$y = 1, r = 0, s = 0$: İkinci denklemden $2z = 0$, yani $z = 0$; birinciden $x = -2y = -2$. Çözüm

$$w_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$$

$y = 0, r = 1, s = 0$: İkinciden $2z - 1 = 0$, yani $z = \frac{1}{2}$; birinciden

$$x = 4z - 3r + s - 2y = 2 - 3 = -1 \Rightarrow w_2 = \left(-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$y = 0, r = 0, s = 1$: İkinciden $2z + 2 = 0$, yani $z = -1$; birinciden

$$x = 4z - 3r + s - 2y = -4 + 1 = -3 \Rightarrow w_3 = (-3, 0, -1, 0, 1)$$

$\{w_1, w_2, w_3\}$, W 'nin bir tabanıdır.

■

Örnek 19.3 (Denklemlerle Verilmiş İki Alt Uzay). $\mathbb{R}^4$ 'te

$$U = \{ (a, b, c, d) : b + c + d = 0 \}, \quad W = \{ (a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d \}$$

alt uzayları veriliyor. U, W ve $U \cap W$ 'nin boyutlarını ve birer tabanını bulunuz.

Çözüm.

Üçü de birer homojen sistemin çözüm uzayıdır; her birinde $n = 4$ 'tür.

U . Tek denklem $0a + b + c + d = 0$ 'dır; katsayılar matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bir merdiven matristir ve rankı 1'dir. O hâlde

$$\dim U = 4 - 1 = 3$$

Serbest değişkenler a, c, d 'dir:

$$a = 1, c = 0, d = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow u_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$a = 0, c = 1, d = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow u_2 = (0, -1, 1, 0)$$

$$a = 0, c = 0, d = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow u_3 = (0, -1, 0, 1)$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$, U 'nin bir tabanıdır.

W . Denklemler $a + b = 0$ ve $c - 2d = 0$ 'dır; katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

bir merdiven matristir ve rankı 2'dir:

$$\dim W = 4 - 2 = 2$$

Serbest değişkenler b ve d 'dir:

$$b = 1, d = 0 \implies a = -1, c = 0 \implies w_1 = (-1, 1, 0, 0)$$

$$b = 0, d = 1 \implies a = 0, c = 2 \implies w_2 = (0, 0, 2, 1)$$

$\{w_1, w_2\}$, W 'nin bir tabanıdır.

$U \cap W$. Bir vektörün her iki kümede de olması, üç denklemi birden sağlaması demektir:

$$b + c + d = 0, \quad a + b = 0, \quad c - 2d = 0$$

Katsayılar matrisini merdiven şekline getirelim (sütunlar a, b, c, d):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bu bir merdiven matristir ve rankı 3'tür:

$$\dim(U \cap W) = 4 - 3 = 1$$

Tek serbest değişken d 'dir. $d = 1$ alalım: üçüncü denklemden $c = 2$, ikinciden $b = -c - d = -3$, birinciden $a = -b = 3$. Demek ki

$$v = (3, -3, 2, 1)$$

ve $\{v\}$, $U \cap W$ 'nin bir tabanıdır. Sağlama: $-3 + 2 + 1 = 0$, $3 - 3 = 0$, $2 = 2 \cdot 1$.

Boyut formülü de tutarlıdır: $\dim(U + W) = 3 + 2 - 1 = 4$, yani $U + W = \mathbb{R}^4$ 'tür.

■

19.4 Alıştırma

Alıştırma 19.1 (Rank ve Çözüm Uzayı).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

c) $x + 3y + 2z = 0$; $x + 5y + z = 0$; $3x + 5y + 8z = 0$ homojen sisteminin çözüm uzayının boyutunu ve bir tabanını bulunuz.

d) $x - 2y + 7z = 0$; $2x + 3y - 2z = 0$; $2x - y + z = 0$ homojen sisteminin çözüm uzayının boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) Merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -3R_1 + R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_2 + R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı iki satır kaldığından $\text{rank}(A) = 2$ 'dir.

b) Aynı yöntemle:

$$\begin{array}{l}
R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\
R_3 \rightarrow 2R_1 + R_3 \\
R_4 \rightarrow R_1 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\
R_4 \rightarrow 2R_2 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
R_4 \rightarrow -\frac{7}{3}R_3 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı üç satır kaldığından $\text{rank}(A) = 3$ 'tür. (A bir 4×3 matris olduğundan rank en çok 3 olabilir; bu üst sınıra ulaşılmıştır.)

c) Katsayılar matrisini indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\
R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank 2 ve $n = 3$ olduğundan

$$\dim W = 3 - 2 = 1$$

Serbest değişken z 'dir. Kesirlerden kaçınmak için $z = -2$ alalım: ikinci denklem $2y - z = 0$ 'dan $y = \frac{z}{2} = -1$; birinciden

$$x = -3y - 2z = 3 + 4 = 7$$

Demek ki $\{(7, -1, -2)\}$, W 'nin bir tabanıdır. Sağlama: $7 - 3 - 4 = 0$, $7 - 5 - 2 = 0$, $21 - 5 - 16 = 0$.

d) Katsayılar matrisini indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\
R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & -16 \\ 0 & 3 & -13 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_3 \rightarrow -\frac{3}{7}R_2 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & -16 \\ 0 & 0 & -\frac{43}{7} \end{pmatrix}$$

(Son bileşen $-13 + \frac{48}{7} = \frac{-91 + 48}{7} = -\frac{43}{7}$, dir.)

Rank 3 ve $n = 3$ olduğundan

$$\dim W = 3 - 3 = 0$$

Yani sistemin yalnızca sıfır çözümü vardır: $W = \{(0, 0, 0)\}$.

■

Vektör uzayları kuramı tamamlandı. Şimdi bu uzaylar arasındaki yapıyı koruyan fonksiyonlara geçiyoruz – lineer cebirin asıl nesnesi vektör uzayları değil, onlar arasındaki dönüşümlerdir: [lineer dönüşümler](#).