

Lineer Cebir

Lineer Cebir 2: Lineer Dönüşümler, Determinantlar ve
Özdeğerler

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

	Giriş	8
1	Lineer Dönüşümler	9
1.1	Tanım	9
1.2	Örnekler	9
1.3	Ters Dönüşüm	11
1.4	Alıştırma	11
2	Koordinatlar ve İzomorfizm	13
2.1	Koordinatlar	13
2.2	Koordinatları Bir Tabandan Diğetine Çevirmek	14
2.3	Her n -Boyutlu Uzay K^n 'dir	15
2.4	Dönüşüm Tabanda Belirlenir	16
2.5	Alıştırma	17
3	Çekirdek ve Görüntü	19
3.1	Tanım	19
3.2	Görüntüyü Doğuran Küme	19
3.3	Görüntü Hesabı	20
3.4	Çekirdek Hesabı	21
3.5	Alıştırma	23
4	Boyut Teoremi, Rank ve Nullity	25
4.1	Görüntü, Matrisin Sütun Uzayıdır	25
4.2	Boyut Teoremi	25
4.3	Rank ve Nullity	27
4.4	Boyutları Kısa Yoldan Bulmak	27
4.5	Hesap Örnekleri	28
4.6	Alıştırma	29
5	Singüler Olmayan Dönüşümler	31
5.1	Tanım	31
5.2	Bire Birlikle Denkliği	31
5.3	Lineer Bağımsızlığın Korunması	31
5.4	Boyut Engeli	32
5.5	Alıştırma	33
6	Dönüşümler ve Denklem Sistemleri	34
6.1	Sistemin Dönüşüm Dili	34

6.2	Çözüm Uzayının Boyutu	34
6.3	Kare Sistemler	35
6.4	Alıştırma	35
7	Dönüşümlerin Uzayı	37
7.1	İki İşlem	37
7.2	$\text{Hom}(V, U)$	37
7.3	Boyut	38
7.4	Çözümlü Örnekler	39
7.5	Alıştırma	41
8	Bileşke ve Operatörler Cebri	42
8.1	Bileşke	42
8.2	Lineer Operatörler	43
8.3	Cebir Yapısı	43
8.4	Birim, Kuvvetler ve Polinomlar	44
8.5	Çözümlü Örnekler	45
8.6	Alıştırma	46
9	Tersinir Operatörler	47
9.1	Tanım	47
9.2	Tersinirlik Ölçütü	47
9.3	Ters Operatörün Hesabı	48
9.4	Kare Denklem Sistemleri	49
9.5	Alıştırma	50
10	Bir Operatörün Matrisi	51
10.1	Koordinat Vektörünü Hatırlayalım	51
10.2	Matris Gösterimi	51
10.3	Standart Tabanda: Matrisin Kendisi	52
10.4	Temel Teorem	53
10.5	Çözümlü Örnekler	54
10.6	İki Uzay Arasında: Dikdörtgen Matris Gösterimi	55
10.7	Alıştırma	57
11	Operatör Cebri ile Matris Cebri	59
11.1	Toplama ve Skalerle Çarpma	59
11.2	Çarpma	60
11.3	İki Boyutlu Durumda Açık Hesap	60
11.4	Alıştırma	61
12	Taban Değişirme	63
12.1	Geçiş Matrisi	63
12.2	Koordinatların Değişimi	64

12.3	Operatör Matrisinin Değişimi	65
12.4	Tabanı Neden Değiştiririz?	66
12.5	Alıştırma	67
13	Problemler	70
13.1	Bir Vektörün Koordinatlarını Bulmak	70
13.2	Geçiş Matrisini Kısa Yoldan Hesaplamak	71
13.3	Koordinatları Bir Tabandan Diğerine Taşımak	73
13.4	Operatörün Matrisini Yeni Tabanda Yazmak	76
13.5	$\mathbb{R}^n$ Dışında: Polinom Uzayı	79
13.6	Çekirdek, Görüntü ve Boyut	80
13.7	Dönüşümü Taban Değerlerinden Kurmak	81
13.8	Matris Gösterimi ve Taban Değişimi	82
13.9	İspat Problemleri	86
13.10	Alıştırma	88
14	Benzerlik ve İz	91
14.1	Benzer Matrisler	91
14.2	Bir Matrisin İzi	93
14.3	Köşegenleştirilebilir Operatörler	95
14.4	Alıştırma	96
15	İki Uzay Arasında Matris Gösterimi	98
15.1	Temel Eşitlik	98
15.2	Dönüşüm Uzayı ile Matris Uzayı	99
15.3	Bileşkenin Matrisi	99
15.4	İki Tabanın Birden Değişmesi	100
15.5	Kanonik Form	101
15.6	Çözümlü Örnekler	101
15.7	Alıştırma	105
16	Permütasyonlar	107
16.1	Tanım ve Gösterim	107
16.2	İşaret	108
16.3	İşaretin Çarpımsallığı	109
16.4	Alıştırma	111
17	Determinant ve Özellikleri	112
17.1	Tanım	112
17.2	Küçük Mertebeler	112
17.3	Transpoze	113
17.4	Satır Değişimi	114
17.5	Sıfır Satır, Eşit Satırlar, Üçgensellik	115
17.6	Satır İşlemleri	115

17.7	Regülerlik Ölçütü	116
17.8	Çarpımın Determinantı	117
17.9	Alıştırma	118
18	Kofaktör Açılımı ve Ters Matris	120
18.1	Minör ve Kofaktör	120
18.2	Laplace Açılımı	121
18.3	Ek Matris	123
18.4	Alıştırma	125
19	Cramer Kuralı ve Operatörün Determinantı	128
19.1	Cramer Kuralı	128
19.2	Homojen Sistemler	130
19.3	Bir Lineer Operatörün Determinantı	131
19.4	Alıştırma	132
20	Matris ve Operatör Polinomları	134
20.1	Bir Matriste Polinom	134
20.2	İşlemlerle Uyum	135
20.3	Operatör Polinomları	135
20.4	Alıştırma	137
21	Özdeğerler ve Özvektörler	138
21.1	Tanım	138
21.2	Matrisler İçin	139
21.3	Farklı Özdeğerler, Bağımsız Özvektörler	140
21.4	Alıştırma	141
22	Karakteristik Polinom ve Cayley-Hamilton Teoremi	143
22.1	Karakteristik Polinom	143
22.2	Özdeğerler Karakteristik Polinomun Kökleridir	144
22.3	Cayley-Hamilton Teoremi	145
22.4	Cayley-Hamilton ile Ters Hesabı	147
22.5	Alıştırma	147
23	Köşegenleştirme	149
23.1	Ölçüt	149
23.2	Çözümlü Örnekler	150
23.3	Köşegenleştirilemeyen Matrisler	152
23.4	Alıştırma	154
24	Problemler	156
24.1	Çekirdek, Görüntü, Rank ve Sıfırlık	156
24.2	Determinantlar ve Ters Matris	157
24.3	Dönüşüm Uzayında Lineer Bağımsızlık	158

24.4	Özdeğerler ve Köşegenleştirme	159
24.5	Cayley-Hamilton Uygulaması	162
24.6	Genel Tekrar: Vektör Uzayları	163
24.7	Alıştırma	165

Giriş

Lineer cebir, vektör uzayları ile bunlar arasındaki lineer dönüşümleri inceleyen, hemen her uygulamalı matematik dalının ortak dilini oluşturan temel derstir. Bu arşiv iki dönemlik bir müfredatı kapsar: birinci dönem cebirsel yapılardan başlayıp matrisler ve denklem sistemleri üzerinden vektör uzaylarına ulaşır, ikinci dönem ise bu uzaylar arasındaki lineer dönüşümleri, onların matrislerle temsilini, determinantları ve özdeğer kuramını konu alır.

Not

Aşağıdaki müfredatta yer alan tüm başlıkların notları hazırdır; bu notlara bağlantılardan ulaşabilirsiniz.

1. Lineer Dönüşümler

Vektör uzaylarını tanıdık; şimdi aralarındaki fonksiyonlara bakıyoruz. Ama her fonksiyon değil: uzayların taşıdığı iki işlemi — toplama ve skalerle çarpma — bozmayanlar. Bunlara **lineer dönüşüm** denir ve lineer cebirin asıl konusu, uzaylardan çok bu dönüşümlerdir.

1.1 Tanım

Tanım 1.1 (Lineer Dönüşüm). U ve V , aynı bir K komutatif cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. Bir

$$F : V \rightarrow U$$

dönüşümüne, aşağıdaki iki koşul gerçekleştiğinde bir **lineer dönüşüm** (veya vektör uzayı homomorfizmi) denir:

- i. $\forall v, w \in V$ için $F(v + w) = F(v) + F(w)$
- ii. $\forall k \in K$ ve $\forall v \in V$ için $F(kv) = kF(v)$

Tanımın iki doğrudan sonucu vardır.

1. İkinci koşulda $k = 0_K$ alınırsa

$$F(0_V) = F(0_K v) = 0_K F(v) = 0_U$$

elde edilir: **her lineer dönüşüm sıfır vektörü sıfır vektöre götürür.**

2. İki koşul birleştirilirse, her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$F(av + bw) \stackrel{i}{=} F(av) + F(bw) \stackrel{ii}{=} aF(v) + bF(w)$$

olur. Tümevarımla bu, herhangi sonlu bir lineer kombinezona genişler:

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_n F(v_n)$$

❓ Lineer dönüşüm neyi korur?

Son eşitlik, lineer dönüşümlerin neden bu kadar kullanışlı olduğunu özetler: bir vektörü taban vektörleri cinsinden yazıp dönüşümü uygularsanız, katsayılar olduğu gibi kalır. Yani bir lineer dönüşümü bilmek için onu yalnızca **taban vektörlerinde** bilmek yeter — bu gözlem ilerideki bölümün ana teoremidir.

1.2 Örnekler

Örnek 1.1 (Bir İzdüşüm Lineerdir). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

- i. $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} F((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \\ &= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) \\ &= F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

ii. $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} F(k(x, y, z)) &= F(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0) \\ &= k(x, y, 0) = kF(x, y, z) \end{aligned}$$

İki koşul da sağlandığından F lineerdir. Geometrik olarak F , uzaydaki her noktayı xy -düzlemine dik olarak düşürür.

■

Örnek 1.2 (Öteleme Lineer Değildir). $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 2)$ dönüşümünün lineer olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Her lineer dönüşüm sıfır vektörü sıfır vektöre götürmek zorundadır. Oysa burada

$$F(0_{\mathbb{R}^2}) = F(0, 0) = (1, 2) \neq (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

Demek ki F bir lineer dönüşüm **değildir**. (Öteleme, doğruları doğrulara götürmesine rağmen başlangıç noktasını yerinden oynattığı için lineer sayılmaz.)

■

Örnek 1.3 (Sıfır Dönüşümü ve Birim Dönüşüm). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı olsun.

a) Her $v \in V$ için $F(v) = 0_U$ ile tanımlı $F : V \rightarrow U$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

b) Her $v \in V$ için $I(v) = v$ ile tanımlı $I : V \rightarrow V$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $v, w \in V$ ve $k \in K$ için

$$F(v + w) = 0_U = 0_U + 0_U = F(v) + F(w)$$

$$F(kv) = 0_U = k0_U = kF(v)$$

(İkinci satırda $k0_U = 0_U$ olduğu **temel özellikler teoreminden** gelir.) Bu dönüşüme **sıfır lineer dönüşümü** denir ve 0 ile gösterilir.

b) $v, w \in V$ ve $k \in K$ için

$$I(v + w) = v + w = I(v) + I(w), \quad I(kv) = kv = kI(v)$$

Bu dönüşüme **identik (birim) lineer dönüşüm** denir.

■

Örnek 1.4 (Matrisle Verilen Dönüşüm). K komutatif bir cisim ve A bir $A_{(m,n)}$ K -matrisi olsun. K^n ve K^m 'in elemanları sütun matrisler olarak düşünölmek üzere

$$T : K^n \rightarrow K^m, \quad v \mapsto Av$$

dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Matris çarpımının **dağılma ve skalerle uyum özellikleri** doğrudan sonucu verir. $v, w \in K^n$ ve $k \in K$ için

$$T(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = T(v) + T(w)$$

$$T(kv) = A(kv) = k(Av) = kT(v)$$

Demek ki T lineerdir. İleride göreceğimiz gibi, sonlu boyutlu uzaylar arasındaki **her** lineer dönüşüm uygun bir matrisle bu biçimde temsil edilebilir.

■

1.3 Ters Dönüşüm

Teorem 1.1 (Ters Dönüşüm de Lineerdir). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bire bir ve örten bir lineer dönüşüm olsun. O hâlde ters dönüşüm

$$F^{-1} : U \rightarrow V$$

de bir lineer dönüşümdür.

İspat.

Toplama. $u, u' \in U$ alalım. F örten olduğundan $F(v) = u$ ve $F(v') = u'$ olacak $v, v' \in V$ vardır. F lineer olduğundan

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = u + u'$$

Ters dönüşümün tanımıyla $F^{-1}(u) = v$, $F^{-1}(u') = v'$ ve $F^{-1}(u + u') = v + v'$ 'dir. Demek ki

$$F^{-1}(u + u') = v + v' = F^{-1}(u) + F^{-1}(u')$$

Skalerle çarpma. $k \in K$ ve $u \in U$ alalım. F örten olduğundan $F(v) = u$ olacak bir $v \in V$ vardır. F lineer olduğundan

$$F(kv) = kF(v) = ku$$

Buradan $F^{-1}(ku) = kv = kF^{-1}(u)$ bulunur.

İki koşul da sağlandığından F^{-1} lineerdir. (Bire birlik, F^{-1} 'in bir fonksiyon olarak tanımlı olmasını sağlar.)

■

Tanım 1.2 (İzomorfizm). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun.

- F bire bir ise F 'ye V 'nin U içine bir (vektör uzayı) **izomorfizmi** denir.
- F hem bire bir hem de örten ise F 'ye V 'nin U üzerine bir (vektör uzayı) **izomorfizmi** denir.

1.4 Alıştırma

Alıştırma 1.1 (Lineerlik Sınamaları).

- $T, F : V \rightarrow W$ birer lineer dönüşüm olsun. Her $v \in V$ için $(T + F)(v) = T(v) + F(v)$ ile tanımlanan $T + F$ dönüşümünün de lineer olduğunu gösteriniz.
- $T : V \rightarrow W$ lineer bir dönüşüm ve $a \in K$ olsun. Her $v \in V$ için $(aT)(v) = aT(v)$ ile tanımlanan aT dönüşümünün de lineer olduğunu gösteriniz.
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (y - z, x + y, z - 2x)$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ dönüşümünün lineer olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) $v, w \in V$ ve $k \in K$ olsun. Tanımı açıp T ile F 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} (T + F)(v + w) &= T(v + w) + F(v + w) \\ &= (T(v) + T(w)) + (F(v) + F(w)) \end{aligned}$$

W 'de toplama asosyatif ve komutatif olduğundan terimler yeniden gruplanabilir:

$$= (T(v) + F(v)) + (T(w) + F(w)) = (T + F)(v) + (T + F)(w)$$

Skalerle çarpma için:

$$\begin{aligned}(T + F)(kv) &= T(kv) + F(kv) = kT(v) + kF(v) \\ &= k(T(v) + F(v)) = k(T + F)(v)\end{aligned}$$

Son adımda **M2** aksiyomu kullanıldı. Demek ki $T + F$ lineerdir.

b) $v, w \in V$ ve $k \in K$ olsun:

$$\begin{aligned}(aT)(v + w) &= aT(v + w) = a(T(v) + T(w)) \\ &= aT(v) + aT(w) = (aT)(v) + (aT)(w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(aT)(kv) &= aT(kv) = a(kT(v)) = (ak)T(v) \\ &= (ka)T(v) = k(aT(v)) = k(aT)(v)\end{aligned}$$

Burada K 'nin komutatif olması ($ak = ka$) ve **M4** aksiyomu kullanıldı. Demek ki aT lineerdir.

c) $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ olsun:

$$\begin{aligned}T(v_1 + v_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (z_1 + z_2) - 2(x_1 + x_2))\end{aligned}$$

Her bileşende terimleri indislere göre ayıralım:

$$\begin{aligned}&= (y_1 - z_1, x_1 + y_1, z_1 - 2x_1) + (y_2 - z_2, x_2 + y_2, z_2 - 2x_2) \\ &= T(v_1) + T(v_2)\end{aligned}$$

Skalerle çarpma için:

$$\begin{aligned}T(k(x, y, z)) &= T(kx, ky, kz) = (ky - kz, kx + ky, kz - 2kx) \\ &= k(y - z, x + y, z - 2x) = kT(x, y, z)\end{aligned}$$

Demek ki T lineerdir. (Genel kural: bileşenleri değişkenlerin **sabit katsayılı birinci dereceden** ifadeleri olan ve sabit terim içermeyen her dönüşüm lineerdir.)

d) Toplama koşulunu tek bir karşı örnekle bozalım. $v = (1, 0)$ ve $w = (0, 1)$ alalım:

$$F(v + w) = F(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$F(v) + F(w) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$1 \neq 0$ olduğundan $F(v + w) \neq F(v) + F(w)$ 'dir; F lineer değildir. (Bu dönüşüm sıfır vektörünü sıfıra götürüyor olmasına rağmen lineer değildir — sıfır koşulu gerekli olmakla birlikte yeterli değildir.)

■

Bir lineer dönüşümü taban vektörlerindeki değerleri belirliyordu. Bu fikri sağlamlaştırmak için önce vektörleri tabana göre sayılarla adreslemeyi öğrenmeliyiz: [koordinatlar ve izomorfizm](#).

2. Koordinatlar ve İzomorfizm

Sonlu boyutlu bir uzayda taban seçmek, her vektöre bir sayı listesi adresi vermek demektir. Bu bölümde önce bu adresin tek türlü belirli olduğunu gösterecek, ardından iki büyük sonuca varacağız: n -boyutlu **her** vektör uzayı aslında K^n 'dir ve bir lineer dönüşüm, taban vektörlerindeki değerleriyle tamamen belirlenir.

2.1 Koordinatlar

Tanım 2.1 (İzomorf Uzaylar). U ve V , aynı bir K komutatif cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. V 'nin U **üzerine** bir izomorfizmi varsa " V, U 'ya **izomorf**" denir ve

$$V \cong U$$

biçiminde gösterilir.

V, K üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $v \in V$ olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$ uzayı doğurduğundan v , bu vektörlerin bir lineer kombinasyonudur:

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \quad (a_i \in K)$$

Bu gösteriliş **tektir**. Gerçekten $v = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ ikinci bir gösteriliş olsaydı, iki ifadeyi taraf tarafa çıkararak

$$(a_1 - b_1) e_1 + (a_2 - b_2) e_2 + \dots + (a_n - b_n) e_n = 0_V$$

bulunurdu. $\{e_1, \dots, e_n\}$ bir taban, dolayısıyla lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfır olmalıdır:

$$a_i - b_i = 0_K \implies a_i = b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Tanım 2.2 (Koordinatlar). Yukarıdaki $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ skalerleri, E tabanı ve v vektörü tarafından tamamen belirlidir. Bu skalerlere v 'nin $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ tabanına göre **koordinatları** denir ve

$$[v]_E = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

biçiminde gösterilir.

! Peki buradaki v hangi tabanda? — Hiçbirinde

En sık sorulan soru şudur: " $[v]_E = (a_1, \dots, a_n)$ yazdığımızda, $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ eşitliğindeki v standart tabanda mı?" Hayır. v , uzayın bir **elemanıdır** — bir ok, bir polinom, bir matris — ve hiçbir tabana bağlı değildir. Eşitlik, vektörlerin kendileri arasındadır; taban seçmek v 'yi değiştirmez, yalnızca v 'ye **hangi sayı listesiyle ad verdiğimizizi** değiştirir.

$\mathbb{R}^n$ 'de kafa karıştıran incelik şudur: $v = (3, 5)$ yazımının kendisi zaten standart tabana göre koordinatlarıdır, çünkü

$$(3, 5) = 3(1, 0) + 5(0, 1)$$

Yani standart taban s için $[v]_s = (3, 5) = v$ 'dir — vektörle koordinatları çakışır. Başka bir taban seçildiğinde bu çakışma bozulur: $f_1 = (1, 1), f_2 = (1, 2)$ tabanında aynı vektör

$$(3, 5) = 1 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (1, 2) \implies [v]_f = (1, 2)$$

olur. Vektör aynı vektördür; değişen yalnızca adresidir.

Örnek 2.1 (Koordinatların Bulunması). $v = (3, 1, -4) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün $\mathbb{R}^3$ 'ün $E = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

$e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ olsun ve $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ yazalım:

$$(3, 1, -4) = x(1, 1, 1) + y(0, 1, 1) + z(0, 0, 1) = (x, x + y, x + y + z)$$

Bileşenler eşitlenirse

$$x = 3, \quad x + y = 1, \quad x + y + z = -4$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_2 + R_3]{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 \end{pmatrix}$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan tek çözüm vardır:

$$x = 3, \quad y = -2, \quad z = -5$$

Demek ki $v = 3e_1 - 2e_2 - 5e_3$ ve

$$[v]_E = (3, -2, -5)$$

Sağlama:

$$3(1, 1, 1) - 2(0, 1, 1) - 5(0, 0, 1) = (3, 3 - 2, 3 - 2 - 5) = (3, 1, -4)$$

■

2.2 Koordinatları Bir Tabandan Diğereine Çevirmek

İki taban, aynı vektöre iki farklı sayı listesi verir. Birinden diğereine geçmenin en yalın yolu iki adımdır ve yeni hiçbir araç gerektirmez.

💡 İki adımda taban değişimi

$f = \{f_1, \dots, f_n\}$ ve $g = \{g_1, \dots, g_n\}$, V 'nin iki tabanı olsun; $[v]_f = (a_1, \dots, a_n)$ verilsin ve $[v]_g$ istensin.

1. **Vektörü kurun:** $v = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ toplamını hesaplayın; artık v 'nin kendisi elinizdedir.
2. **Yeni tabanda çözün:** $v = x_1 g_1 + \dots + x_n g_n$ denklemini $x_1, \dots, x_n$ için çözün; çıkan liste $[v]_g$ 'dir.

Örnek 2.2 (İki Adımın Uygulanması). $\mathbb{R}^2$ 'de $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ ve $g_1 = (2, 1)$, $g_2 = (1, 1)$ tabanları veriliyor. $[v]_f = (1, 2)$ olduğuna göre $[v]_g$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

1. adım. Vektörü kuralım:

$$v = 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 = (1, 1) + 2(1, 2) = (3, 5)$$

2. adım. $v = xg_1 + yg_2$ yazalım:

$$(3, 5) = x(2, 1) + y(1, 1) = (2x + y, x + y)$$

$2x + y = 3$ ve $x + y = 5$ denklemlerinden, taraf tarafa çıkararak $x = -2$, buradan $y = 7$ bulunur:

$$[v]_g = (-2, 7)$$

Kontrol. $-2(2, 1) + 7(1, 1) = (-4 + 7, -2 + 7) = (3, 5) \checkmark$

■

i Not

Bu iki adım her zaman çalışır; ama aynı taban çiftiyle çok sayıda vektör çevrilecekse her seferinde sistem çözmek israftır. İki adımı tek bir matris çarpımına sıkıştıran araç **geçiş matrisidir**; onu **taban değiştirme** bölümünde kuracağız, hesap pratiği ise **Problemler** bölümünde toplanmıştır.

2.3 Her n-Boyutlu Uzay K^n 'dir

Teorem 2.1 (n-Boyutlu Uzaylar K^n 'e İzomorftur). V, K üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı ise V, K^n 'e izomorftur:

$$V \cong K^n$$

İspat.

$E = \{e_1, \dots, e_n\}$, V 'nin bir tabanı olsun. Her $v \in V$

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad (a_i \in K)$$

biçiminde tek türlü yazıldığından

$$F : V \rightarrow K^n, \quad v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \mapsto (a_1, \dots, a_n) = [v]_E$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bunun bir izomorfizm olduğunu dört adımda görelim.

1. F iyi tanımlıdır. $v = w$ olsun. Koordinatlar tek türlü belirli olduğundan v 'nin ve w 'nin katsayı listeleri çakışır, yani $[v]_E = [w]_E$ ve $F(v) = F(w)$ 'dir.

2. F örtendir. Herhangi bir $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ verildiğinde $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in V$ vektörü kurulabilir ve $F(v) = (a_1, \dots, a_n)$ 'dir.

3. F bire birdir. $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ ve $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ için $F(v) = F(w)$ olsun. O hâlde

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \implies a_i = b_i \quad (i = 1, \dots, n) \implies v = w$$

4. F lineerdir. Aynı gösterimlerle

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F((a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n) \\ &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = F(v) + F(w) \end{aligned}$$

ve $k \in K$ için

$$\begin{aligned} F(kv) &= F((ka_1)e_1 + \dots + (ka_n)e_n) = (ka_1, \dots, ka_n) \\ &= k(a_1, \dots, a_n) = kF(v) \end{aligned}$$

Dört adım birlikte F 'nin V 'den K^n üzerine bir izomorfizm olduğunu verir: $V \cong K^n$.

■

💡 Teoremin anlamı

K üzerinde n -boyutlu bütün vektör uzayları — matrisler, polinomlar, fonksiyonların uygun alt uzayları — cebirsel olarak K^n 'in aynısıdır. Bir taban seçmek, o uzayı K^n 'e çevirmekten başka bir şey değildir. Bu yüzden sonlu boyutlu uzaylarda çalışırken sıralı n -lilerle uğraşmak genellik kaybı yaratmaz.

2.4 Dönüşüm Tabanda Belirlenir

Teorem 2.2 (Lineer Dönüşümün Tabanla Belirlenmesi). V ve U , aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V 'nin bir tabanı ve $u_1, u_2, \dots, u_n$ da U 'nun herhangi n elemanı olsun. O hâlde

$$F(v_1) = u_1, \quad F(v_2) = u_2, \quad \dots, \quad F(v_n) = u_n$$

olacak biçimde bir $F : V \rightarrow U$ lineer dönüşümü vardır ve bu dönüşüm tek olarak belirlidir.

İspat.

1. Dönüşüm tanımlanabilir. $\{v_1, \dots, v_n\}$ bir taban olduğundan her $v \in V$

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

biçiminde tek türlü yazılır. Bu katsayıları kullanarak

$$F(v) := a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \in U$$

tanımını yapalım. Katsayılar tek türlü belirli olduğundan F iyi tanımlıdır: $v = w$ ise katsayılar aynıdır ve $F(v) = F(w)$ 'dir.

Ayrıca her i için

$$v_i = 0_K v_1 + \dots + 1_K v_i + \dots + 0_K v_n$$

$$\implies F(v_i) = 0_K u_1 + \dots + 1_K u_i + \dots + 0_K u_n = u_i$$

yani istenen koşullar sağlanır.

2. F lineerdir. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ve $w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ olsun. Toplamın koordinatları katsayıların toplamıdır:

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F((a_1 + b_1)v_1 + \dots + (a_n + b_n)v_n) \\ &= (a_1 + b_1)u_1 + \dots + (a_n + b_n)u_n \\ &= (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) + (b_1 u_1 + \dots + b_n u_n) \\ &= F(v) + F(w) \end{aligned}$$

$k \in K$ için

$$\begin{aligned} F(kv) &= F((ka_1)v_1 + \dots + (ka_n)v_n) = (ka_1)u_1 + \dots + (ka_n)u_n \\ &= k(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = kF(v) \end{aligned}$$

3. F tektir. $G : V \rightarrow U$ de lineer olsun ve $G(v_i) = u_i$ ($i = 1, \dots, n$) koşulunu sağlasın. Herhangi bir $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$ için G 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} G(v) &= a_1 G(v_1) + a_2 G(v_2) + \dots + a_n G(v_n) \\ &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = F(v) \end{aligned}$$

Her $v \in V$ için $G(v) = F(v)$ olduğundan $G = F$ 'dir.

■

Örnek 2.3 (Dönüşümü Taban Değerlerinden Kurmak). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümü $T(1, 1) = 3$ ve $T(0, 1) = -2$ koşullarını sağlasın. Böyle bir dönüşüm var mıdır? Varsa $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için $T(a, b)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Önce $\{(1, 1), (0, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanı olduğunu görelim: iki vektör de sıfırdan farklıdır ve hiçbirinin katı değildir, dolayısıyla bağımsızdır; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan iki elemanlı bağımsız küme bir tabandır.

Taban vektörlerindeki değerler verildiğine göre, önceki teorem gereği böyle bir T **vardır ve tektir**. $T(a, b)$ 'yi hesaplamak için (a, b) 'yi taban cinsinden yazalım:

$$(a, b) = x(1, 1) + y(0, 1) = (x, x + y) \implies x = a, \quad x + y = b$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b - a \end{array} \right)$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan tek çözüm vardır: $x = a, y = b - a$. Şimdi T 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} T(a, b) &= T(x(1, 1) + y(0, 1)) = xT(1, 1) + yT(0, 1) = 3x - 2y \\ &= 3a - 2(b - a) = 5a - 2b \end{aligned}$$

Demek ki $T(a, b) = 5a - 2b$ 'dir. Sağlama: $T(1, 1) = 5 - 2 = 3$ ve $T(0, 1) = 0 - 2 = -2$.

■

2.5 Alıştırma

Alıştırma 2.1 (Koordinatlar ve Tabanla Belirlenme).

a) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü

$$T(2, 0, 0, 0) = (4, 0), \quad T(2, 2, 0, 0) = (1, -1)$$

$$T(2, 2, 2, 0) = (0, -2), \quad T(2, 2, 2, 2) = (-4, 0)$$

koşullarını sağlasın. Böyle bir dönüşüm var mıdır? Varsa $T(8, 6, 4, 2)$ 'yi bulunuz.

b) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü

$$T(3, 0, 0, 0) = (1, -1), \quad T(3, 3, 0, 0) = (0, -1)$$

$$T(3, 3, 3, 0) = (2, 0), \quad T(3, 3, 3, 3) = (0, 2)$$

koşullarını sağlasın. $T(12, 9, 6, 3)$ 'ü bulunuz.

c) $F : V \rightarrow W$ üzerine bir vektör uzayı izomorfizmi olsun ($V \cong W$). $\{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin bir tabanı ise $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ 'in de W 'nin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Önce verilen dört vektörün bir taban olduğunu görelim. Bunları satır kabul eden matris

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

alt üçgenseldir; ikinci satırdan birinciye, üçüncüden ikinciye, dördüncüden üçüncüyü çıkarırsak

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

merdiven matrisi elde edilir; dört vektör lineer bağımsızdır. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ olduğundan bir tabandır ve dönüşüm vardır, üstelik tektir.

Şimdi $(8, 6, 4, 2)$ 'yi bu taban cinsinden yazalım:

$$(8, 6, 4, 2) = a(2, 0, 0, 0) + b(2, 2, 0, 0) + c(2, 2, 2, 0) + d(2, 2, 2, 2)$$

Bileşenleri sondan başa doğru okuyalım:

$$2d = 2 \implies d = 1$$

$$2c + 2d = 4 \implies c = 1$$

$$2b + 2c + 2d = 6 \implies b = 1$$

$$2a + 2b + 2c + 2d = 8 \implies a = 1$$

Yani dördünün toplamı. T lineer olduğundan

$$\begin{aligned} T(8, 6, 4, 2) &= T(2, 0, 0, 0) + T(2, 2, 0, 0) + T(2, 2, 2, 0) + T(2, 2, 2, 2) \\ &= (4, 0) + (1, -1) + (0, -2) + (-4, 0) = (1, -3) \end{aligned}$$

b) Aynı yapı: dört vektör yine bir tabandır (aynı üçgen argüman, çarpan 3 ile). $(12, 9, 6, 3)$ 'ü yazalım:

$$3d = 3 \implies d = 1, \quad 3c + 3d = 6 \implies c = 1$$

$$3b + 3c + 3d = 9 \implies b = 1$$

$$3a + 3b + 3c + 3d = 12 \implies a = 1$$

Yine dördünün toplamı çıktı:

$$T(12, 9, 6, 3) = (1, -1) + (0, -1) + (2, 0) + (0, 2) = (3, 0)$$

c) İki koşulu ayrı ayrı denetleyelim.

Doğurma. $w \in W$ alalım. F örten olduğundan $F(v) = w$ olacak bir $v \in V$ vardır. v 'yi taban cinsinden yazalım: $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. F lineer olduğundan

$$w = F(v) = a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n)$$

Demek ki $W = L(F(v_1), \dots, F(v_n))$ 'dir.

Bağımsızlık. $a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = 0_W$ olsun. F lineer olduğundan sol taraf

$$F(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0_W$$

biçiminde yazılır. Öte yandan her lineer dönüşüm için $F(0_V) = 0_W$ 'dir ve F bire bir olduğundan 0_W 'ye giden tek vektör 0_V 'dir:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ bağımsız olduğundan bütün a_i 'ler sıfırdır. Demek ki $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ bağımsızdır. İki koşul birlikte kümenin W 'nin bir tabanı olduğunu verir. Bunun bir sonucu da şudur: izomorf uzayların boyutları eşittir. ■

Bir lineer dönüşümü incelemenin iki doğal yolu vardır: hangi vektörleri sıfıra gönderdiğine bakmak ve hangi vektörlere ulaştığına bakmak. Sıradaki bölüm bu iki alt uzayı tanıtıyor: **çekirdek ve görüntü**.

3. Çekirdek ve Görüntü

Bir lineer dönüşümü iki alt uzay özetler: hangi vektörleri sıfıra ezdiği ve hangi vektörlere ulaştığı. Birincisi dönüşümün kaybettiği bilgiyi, ikincisi ürettiği bilgiyi ölçer. Bu bölümde ikisini de tanımlayıp hesaplamayı öğreneceğiz.

3.1 Tanım

Tanım 3.1 (Görüntü). U ve V , aynı bir K komutatif cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. U 'nun

$$\text{Im } F = \{ F(v) \in U : v \in V \}$$

alt kümesine F 'nin **görüntüsü** (resmi) denir.

Tanım 3.2 (Çekirdek). $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olmak üzere V 'nin

$$\text{Ker } F = \{ v \in V : F(v) = 0_U \}$$

alt kümesine F 'nin **çekirdeği** denir.

Teorem 3.1 (Çekirdek ve Görüntü Birer Alt Uzaydır). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde $\text{Im } F$, U 'nun bir alt uzayı; $\text{Ker } F$ de V 'nin bir alt uzayıdır.

İspat.

$\text{Im } F \leq U$. Her lineer dönüşüm için $F(0_V) = 0_U$ olduğundan $0_U \in \text{Im } F$ 'dir; dolayısıyla $\text{Im } F \neq \emptyset$ ve tanım gereği $\text{Im } F \subseteq U$ 'dur.

$a, b \in K$ ve $u, u' \in \text{Im } F$ alalım. Tanım gereği $F(v) = u$ ve $F(v') = u'$ olacak $v, v' \in V$ vardır. V bir vektör uzayı olduğundan $av + bv' \in V$ 'dir ve F lineer olduğundan

$$F(av + bv') = aF(v) + bF(v') = au + bu'$$

Sol taraf $\text{Im } F$ 'de olduğuna göre $au + bu' \in \text{Im } F$ 'dir. **Tek koşullu ölçüt** gereği $\text{Im } F$ bir alt uzaydır.

$\text{Ker } F \leq V$. Yine $F(0_V) = 0_U$ olduğundan $0_V \in \text{Ker } F$ 'dir ve $\text{Ker } F \neq \emptyset$ 'dir; ayrıca $\text{Ker } F \subseteq V$ 'dir. $a, b \in K$ ve $v, w \in \text{Ker } F$ alalım; yani $F(v) = 0_U$ ve $F(w) = 0_U$ 'dur. F lineer olduğundan

$$F(av + bw) = aF(v) + bF(w) = a0_U + b0_U = 0_U + 0_U = 0_U$$

Demek ki $av + bw \in \text{Ker } F$ 'dir ve $\text{Ker } F$ bir alt uzaydır.

■

3.2 Görüntüyü Doğuran Küme

Teorem 3.2 (Doğuran Kümenin Görüntüsü). $F : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm ve $v_1, \dots, v_n \in V$ vektörleri V 'yi doğursun, yani $V = L(v_1, \dots, v_n)$ olsun. O hâlde $F(v_1), \dots, F(v_n)$ vektörleri de $\text{Im } F$ 'yi doğurur:

$$\text{Im } F = L(F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n))$$

İspat.

$\text{Im } F \subseteq L(F(v_1), \dots, F(v_n))$. $u \in \text{Im } F$ olsun; $F(v) = u$ olacak bir $v \in V$ vardır. v 'yi doğuran küme cinsinden yazalım:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad (a_i \in K)$$

F lineer olduğundan

$$u = F(v) = a_1 F(v_1) + \cdots + a_n F(v_n) \in L(F(v_1), \dots, F(v_n))$$

Ters kapsama. Her i için $F(v_i) \in \text{Im } F$ 'dir ve $\text{Im } F$ bir alt uzay olduğundan, *gerilen uzayın en küçüklüğü gereği*

$$L(F(v_1), \dots, F(v_n)) \subseteq \text{Im } F$$

İki kapsama birlikte eşitliği verir.

■

Teorem 3.3 (Bağımsızlık Geri Taşınır). $T : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm ve $v_1, \dots, v_n \in V$ olsun. $T(v_1), \dots, T(v_n) \in U$ vektörleri lineer bağımsız ise $v_1, \dots, v_n \in V$ vektörleri de lineer bağımsızdır.

İspat.

$a_1, \dots, a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0_V$$

olsun. Her iki tarafa T uygulayalım; T lineer olduğundan ve $T(0_V) = 0_U$ olduğundan

$$0_U = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n)$$

$T(v_1), \dots, T(v_n)$ lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0_K$$

Demek ki $v_1, \dots, v_n$ lineer bağımsızdır.

■

⚠ Ters yön genel olarak doğru değildir

Teorem yalnızca bir yönde çalışır: görüntülerin bağımsızlığı, orijinalerin bağımsızlığını gerektirir. Ters doğru değildir — sıfır dönüşümünü düşünün: V 'de ne kadar bağımsız vektör alırsanız alın, hepsinin görüntüsü 0_U 'dur ve bunlar bağımlıdır. Ters yönün de geçerli olması için $\text{Ker } T = \{0_V\}$ olması gerekir.

3.3 Görüntü Hesabı

Az önceki teorem, görüntüyü bulmayı tamamen mekanik bir işe çevirir.

💡 Görüntü üç adımda

$F : K^n \rightarrow K^m$ lineer dönüşümü verilsin.

1. Standart taban vektörlerinin görüntülerini $F(e_1), \dots, F(e_n)$ hesaplayın; doğuran kümenin görüntüsü teoremi gereği bu vektörler $\text{Im } F$ 'yi doğurur.
2. Bu görüntüleri **satır** kabul eden matrisi merdiven şekline indirin; **satır işlemleri satır uzayını değiştirmez**.
3. Sıfırdan farklı satırlar $\text{Im } F$ 'nin bir tabanıdır; sayıları da $\dim(\text{Im } F)$ 'yi verir.

Örnek 3.1 (Görüntünün Bulunması). $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$F(x, y, s, t) = (x + y + s, x + 2y - t, 2x + 3y + s - t)$$

biçiminde tanımlanıyor.

- a) $\text{Im } F$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.
 b) $u = (1, 2, 3)$ ve $w = (1, 1, 1)$ vektörlerinin $\text{Im } F$ 'de olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

a) Standart taban vektörlerinin görüntülerini hesaplayalım:

$$F(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2), \quad F(0, 1, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

$$F(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 1), \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, -1, -1)$$

Doğuran kümenin görüntüsü teoremi gereği bu dört vektör $\text{Im } F$ 'yi doğurur. Bunları satır kabul eden matrisi merdiven şekline indirelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_2 + R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satır uzayı değişmediğinden ve merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız olduğundan

$$\{ (1, 1, 2), (0, 1, 1) \} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

b) Taban elimizde olduğuna göre üyelik sorusu iki bilinmeyenli bir sisteme iner:

$$a(1, 1, 2) + b(0, 1, 1) = (a, a + b, 2a + b)$$

$u = (1, 2, 3)$ için $a = 1, a + b = 2$ yani $b = 1$; üçüncü bileşen $2a + b = 3$ ✓ sağlanır. Demek ki

$$u = (1, 1, 2) + (0, 1, 1) \in \text{Im } F$$

$w = (1, 1, 1)$ için $a = 1, a + b = 1$ yani $b = 0$; ama üçüncü bileşen $2a + b = 2 \neq 1$ olur. Sistem tutarsızdır:

$$w = (1, 1, 1) \notin \text{Im } F$$

Yani F hangi girdiyle beslenirse beslensin çıktısı asla $(1, 1, 1)$ olamaz.

■

3.4 Çekirdek Hesabı

Çekirdeği bulmak, bir homojen lineer denklem sistemi çözmektir.

Örnek 3.2 (Çekirdeği Yalnız Sıfır Olan Bir Dönüşüm). $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Ker } T$ 'yi ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0)$ koşulu şu homojen sistemi verir:

$$a_1 = 0, \quad a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_1 + R_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\sim]{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_2 + R_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{R_4 \rightarrow -R_3 + R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir ($r = n = 4$); homojen sistemin sıfır çözümünden başka çözümü yoktur:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (0, 0, 0, 0) \} = \{ 0_{\mathbb{R}^4} \}, \quad \dim(\text{Ker } T) = 0$$

■

Örnek 3.3 (Çekirdeği Bir Doğru Olan Dönüşüm). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Ker } T$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

$T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu şu sistemi verir:

$$x + 2y - z = 0, \quad y + z = 0, \quad x + y - 2z = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow -R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Kalan sistem

$$x + 2y - z = 0, \quad y + z = 0$$

olup $n = 3, r = 2$ 'dir. **Çözüm uzayının boyutu**

$$\dim(\text{Ker } T) = n - r = 3 - 2 = 1$$

Serbest değişken z 'dir. $z = a$ alalım:

$$y = -a, \quad x = -2y + z = 2a + a = 3a$$

Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (3a, -a, a) : a \in \mathbb{R} \} = L \left((3, -1, 1) \right)$$

ve $\{(3, -1, 1)\}$, $\text{Ker } T$ 'nin bir tabanıdır. Sağlama: $3 - 2 - 1 = 0, -1 + 1 = 0, 3 - 1 - 2 = 0$.

Geometrik okuma: T , başlangıçtan geçen bir doğruyu tamamen sıfıra ezmektedir.

■

3.5 Alıştırma

Alıştırma 3.1 (Çekirdek Hesapları).

- a) $F : V \rightarrow W$ lineer bir dönüşüm ve $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olsun. $v_1, \dots, v_n \in V$ lineer bağımsız ise $F(v_1), \dots, F(v_n) \in W$ vektörlerinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
- b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y - z, x + y, z - 2x)$ dönüşümünün çekirdeğini ve boyutunu bulunuz.
- c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (z - 3y, 4x, x + 2y - z)$ dönüşümünün çekirdeğini ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $a_1, \dots, a_n \in K$ için

$$a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_n F(v_n) = 0_W$$

olsun. F lineer olduğundan sol taraf tek bir görüntü olarak yazılır:

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = 0_W$$

Bu, $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ vektörünün $\text{Ker } F$ 'de olduğu anlamına gelir. Varsayım gereği $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olduğundan

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0_V$$

$v_1, \dots, v_n$ lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır: $a_1 = \dots = a_n = 0_K$. Demek ki $F(v_1), \dots, F(v_n)$ lineer bağımsızdır.

Bu, “bağımsızlık geri taşınır” teoreminin tersidir ve tam olarak $\text{Ker } F = \{0_V\}$ koşulu altında geçerlidir. Nitekim $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olması, F 'nin bire bir olmasıyla eşdeğerdir:

$$F(v) = F(w) \Rightarrow F(v - w) = 0_W \Rightarrow v - w \in \text{Ker } F = \{0_V\} \Rightarrow v = w$$

b) $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu:

$$y - z = 0, \quad x + y = 0, \quad z - 2x = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim (sütunlar x, y, z):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$r = n = 3$ olduğundan yalnızca sıfır çözüm vardır: $z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$. Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (0, 0, 0) \}, \quad \dim(\text{Ker } T) = 0$$

c) $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu:

$$z - 3y = 0, \quad 4x = 0, \quad x + 2y - z = 0$$

İkinci denklem doğrudan $x = 0$ verir. Birinci denklemden $z = 3y$; bunu üçüncüye taşıyalım:

$$0 + 2y - 3y = 0 \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 3 \cdot 0 = 0$$

Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (0, 0, 0) \}, \quad \dim(\text{Ker } T) = 0$$

(Aynı sonuç matris diliyle de görülür: katsayılar matrisinin rankı 3'tür, $\dim(\text{Ker } T) = 3 - 3 = 0$. Çekirdeğin yalnız sıfırdan ibaret olması, bu iki dönüşümün de bire bir olduğunu söyler.)

■

Buraya kadar bir lineer dönüşümün iki temel alt uzayını tanıdık. Sıradaki bölüm bu ikisinin boyutlarını tek bir eşitlikle birbirine bağlıyor.

4. Boyut Teoremi, Rank ve Nullity

Bir lineer dönüşüm tanım kümesindeki bilginin bir kısmını yok eder, kalanını görüntüye taşır. Yok edilen kısmı çekirdek, taşınan kısmı görüntü ölçer. Bu bölümün teoremi bu iki ölçünün toplamının, tanım kümesinin boyutunu tam olarak verdiğini söyler – hiçbir şey kaybolmaz, yalnızca yer değişir.

4.1 Görüntü, Matrisin Sütun Uzayıdır

Boyut teoremine geçmeden önce, matrislerle tanımlanan dönüşümlerde görüntünün ne olduğunu görelim.

Örnek 4.1 (Matris Dönüşümünün Görüntüsü). K komutatif bir cisim, $A = (a_{ij})$ (m, n) tipinde bir K -matris ve

$$T : K^n \rightarrow K^m, \quad v \mapsto A \cdot v$$

bu matrisin belirlediği lineer dönüşüm olsun. $\text{Im } T$ nedir?

Çözüm.

K^n 'in elemanlarını sütun matris olarak düşünelim ve

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1_K \\ 0_K \\ \vdots \\ 0_K \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0_K \\ 1_K \\ \vdots \\ 0_K \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0_K \\ \vdots \\ 0_K \\ 1_K \end{pmatrix}$$

standart tabanını alalım. Bu vektörler K^n 'i doğurduğundan, **doğuran kümenin görüntüsü** teoremi gereği $T(e_1), \dots, T(e_n)$ vektörleri $\text{Im } T$ 'yi doğurur.

Öte yandan $A \cdot e_i$ çarpımı, A 'nın i . sütununu verir:

$$T(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Demek ki $\text{Im } T$ 'yi doğuran vektörler tam olarak A 'nın sütunlarıdır:

$$\text{Im } T = A \text{ matrisinin sütun uzayı}$$

■

i Not

Bu gözlem, bir matris dönüşümünün görüntüsünü hesaplamayı tamamen mekanik hâle getirir: sütunları alın, **satır uzayı yöntemiyle** bir taban bulun. $\text{Im } T$ 'nin boyutu da A 'nın rankıdır.

4.2 Boyut Teoremi

Teorem 4.1 (Boyut Teoremi). V ve U , aynı bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı, V sonlu boyutlu ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\dim V = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$$

İspat.

$\dim V = n$ olsun. $\text{Ker } F$, V 'nin bir alt uzayı olduğundan sonlu boyutludur; $\dim(\text{Ker } F) =: r$ diyelim. *Alt uzayın boyutu* gereği $r \leq n$ 'dir. Teoremi ispatlamak için $\dim(\text{Im } F) = n - r$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\{w_1, \dots, w_r\}$, $\text{Ker } F$ 'nin bir tabanı olsun. Bu küme V 'de lineer bağımsız olduğundan, *taban genişletme* ile V 'nin bir tabanına tamamlanabilir:

$$\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$$

Şimdi

$$B := \{ F(v_1), \dots, F(v_{n-r}) \}$$

kümesinin $\text{Im } F$ 'nin bir tabanı olduğunu gösterelim.

(i) **B , $\text{Im } F$ 'yi doğurur.** $u \in \text{Im } F$ olsun; $F(v) = u$ olacak bir $v \in V$ vardır. v 'yi yukarıdaki taban cinsinden yazalım:

$$v = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 v_1 + \dots + b_{n-r} v_{n-r}$$

F lineer olduğundan

$$u = F(v) = a_1 F(w_1) + \dots + a_r F(w_r) + b_1 F(v_1) + \dots + b_{n-r} F(v_{n-r})$$

Fakat $w_i \in \text{Ker } F$ olduğundan $F(w_1) = \dots = F(w_r) = 0_U$ 'dur. Geriye

$$u = b_1 F(v_1) + \dots + b_{n-r} F(v_{n-r})$$

kalır; yani $u \in L(B)$ 'dir. Demek ki $\text{Im } F = L(B)$ 'dir.

(ii) **B lineer bağımsızdır.** $a_1, \dots, a_{n-r} \in K$ olmak üzere

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_{n-r} F(v_{n-r}) = 0_U$$

olsun. F lineer olduğundan

$$F(a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r}) = 0_U$$

olur; yani

$$a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} \in \text{Ker } F$$

bulunur.

$\{w_1, \dots, w_r\}$ çekirdeği doğurduğundan, uygun $b_1, \dots, b_r \in K$ için

$$a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} = b_1 w_1 + \dots + b_r w_r$$

yazılır, yani

$$a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} - b_1 w_1 - \dots - b_r w_r = 0_V$$

$\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$ kümesi V 'nin bir tabanı, dolayısıyla lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_1 = \dots = a_{n-r} = b_1 = \dots = b_r = 0_K$$

Özel olarak $a_1 = \dots = a_{n-r} = 0_K$ 'dir; B lineer bağımsızdır.

(i) ve (ii) birlikte B 'nin $\text{Im } F$ 'nin bir tabanı olduğunu verir. B 'nin eleman sayısı $n - r$ olduğundan

$$\dim(\text{Im } F) = n - r = \dim V - \dim(\text{Ker } F)$$

■

4.3 Rank ve Nullity

Tanım 4.1 (Bir Dönüşümün Rankı). V ve U , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. F 'nin **rankı**, görüntüsünün boyutudur:

$$\text{rank}(F) = \dim(\text{Im } F)$$

Tanım 4.2 (Nullity). $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olmak üzere F 'nin **Nullity'si**, çekirdeğinin boyutudur:

$$\text{Nullity}(F) = \dim(\text{Ker } F)$$

i Not

Genel kültür: bazı Türkçe kaynaklar $\text{Nullity}(F)$ için **sıfırlık** terimini kullanır; ikisi aynı sayıdır. Bu notlarda Nullity gösterimine bağlı kalacağız.

Bu dille boyut teoremi şu kısa biçimi alır: V sonlu boyutlu ise

$$\dim V = \text{Nullity}(F) + \text{rank}(F)$$

💡 Teoremi nasıl okumalı?

Nullity , dönüşümün ezdiği yönlerin sayısıdır; rank ise ayakta kalan yönlerin sayısı. Toplamları sabittir: tanım kümesinin boyutu. Bu yüzden bir dönüşüm ne kadar çok ezerse görüntüsü o kadar dar olur — ikisini aynı anda büyütmek mümkün değildir.

4.4 Boyutları Kısa Yoldan Bulmak

Bir soru yalnızca $\dim(\text{Im } F)$ ve $\dim(\text{Ker } F)$ değerlerini istiyorsa, ne görüntünün ne de çekirdeğin bir tabanını hesaplamak gerekir.

💡 Tek indirgeme, iki boyut

$F : K^n \rightarrow K^m$ lineer dönüşümü verilsin.

- Standart taban vektörlerinin görüntülerini $F(e_1), \dots, F(e_n)$ satır kabul eden matrisi yazın ve merdiven şekline indirin.
- Sıfırdan farklı satır sayısı r olsun. Bu sayı F 'nin rankıdır: $\dim(\text{Im } F) = r$.
- Çekirdeğin boyutu boyut teoreminden bedavaya gelir: $\dim(\text{Ker } F) = n - r$. Homojen sistemi çözmeye gerek yoktur.

Çekirdeğin sistemini zaten merdivene indirdiyseniz ikinci bir kısa yol daha vardır: $\dim(\text{Ker } F)$, sistemin **serbest değişken sayısına** eşittir.

Örnek 4.2 (Taban Hesaplamadan İki Boyut). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + 2y + z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\dim(\text{Im } T)$ ve $\dim(\text{Ker } T)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

Standart taban görüntüleri $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$ ve $T(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$ 'dir. Bunları satır yazalım ve indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı satır sayısı 2 olduğundan

$$\dim(\text{Im } T) = \text{rank } (T) = 2, \quad \dim(\text{Ker } T) = 3 - 2 = 1$$

Ne çekirdeğin denklemleri çözüldü ne de görüntü için ayrıca bir taban seçildi; iki boyut da tek indirgemenen okundu.

■

4.5 Hesap Örnekleri

Örnek 4.3 (Çekirdek ve Görüntünün Birlikte Hesabı). $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Im } F$ ve $\text{Ker } F$ 'nin birer tabanını ve boyutlarını bulunuz.

Çözüm.

Görüntü. $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ vektörleri $\mathbb{R}^4$ 'ü doğurduğundan, görüntüleri de $\text{Im } F$ 'yi doğurur:

$$F(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1), \quad F(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$F(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3), \quad F(0, 0, 0, 1) = (1, -1, -3)$$

Bu dört vektörü satır kabul eden matrisi merdiven şekline indirgeyelim:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

A ile B satır eşdeğer olduğundan satır uzayları aynıdır ve bu uzay $\text{Im } F$ 'dir. B 'nin sıfırdan farklı satırları bir merdiven matrisin satırları olduğundan lineer bağımsızdır:

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

Çekirdek. $F(x, y, s, t) = (0, 0, 0)$ koşulu şu homojen sistemi verir:

$$x - y + s + t = 0, \quad x + 2s - t = 0, \quad x + y + 3s - 3t = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Eşdeğer sistem

$$x - y + s + t = 0, \quad y + s - 2t = 0$$

olup bilinmeyen sayısı $n = 4$, denklem sayısı $r = 2$ 'dir. Serbest değişken sayısı $n - r = 2$ ve serbest değişkenler s ile t 'dir; dolayısıyla $\dim(\text{Ker } F) = 2$.

Bir taban için serbest değişkenlere sırayla 1 ve 0 verelim:

- $s = 1, t = 0$: $y = -1, x = y - s - t = -2$, yani $(-2, -1, 1, 0) \in \text{Ker } F$
- $s = 0, t = 1$: $y = 2, x = y - s - t = 1$, yani $(1, 2, 0, 1) \in \text{Ker } F$

$\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ çekirdeğin bir tabanıdır

Kontrol. Boyut teoremi sağlanıyor:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F) \Rightarrow 4 = 2 + 2$$

■

Örnek 4.4 (Rankı İki Olan Bir Operatör). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Im } T$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

Standart taban vektörlerinin görüntüleri $\text{Im } T$ 'yi doğurur: $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 1)$ ve $T(0, 0, 1) = (-1, 1, -2)$. Bunları satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

B bir merdiven matris olduğundan sıfırdan farklı satırları lineer bağımsızdır ve A ile B 'nin satır uzayları aynıdır:

$$\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\} \text{ bir tabandır, } \dim(\text{Im } T) = 2$$

Bu dönüşümün çekirdeğinin $L((3, -1, 1))$, yani boyutunun 1 olduğunu daha önce hesaplamıştık. Boyut teoremi yine tutuyor: $3 = 1 + 2$.

■

4.6 Alıştırma

Alıştırma 4.1 (Boyut Teoremi Uygulamaları).

1. V sonlu boyutlu ve $F : V \rightarrow U$ lineer olsun. $\dim V = \dim(\text{Im } F)$ olması için gerek ve yeter koşulun $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olduğunu gösteriniz.
2. $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü şöyle tanımlansın:

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

Bu dönüşümün rankını bulunuz.

3. Bir $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü için Nullity (T) en az kaç olabilir?

Çözüm.

1. Boyut teoremi gereği

$$\dim V = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$$

oldüğundan

$$\dim V = \dim(\text{Im } F) \Leftrightarrow \dim(\text{Ker } F) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } F = \{0_V\}$$

Son denklik, boyutu sıfır olan tek uzayın sıfır uzayı olmasından gelir.

2. Bu dönüşümün çekirdeğinin yalnız sıfır vektöründen ibaret olduğunu, yani $\dim(\text{Ker } T) = 0$ olduğunu çekirdek hesabında bulmuştuk. Boyut teoreminden

$$\text{rank } (T) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\text{Ker } T) = 4 - 0 = 4$$

3. $\text{Im } T$, $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğundan $\dim(\text{Im } T) \leq 3$ 'tür. Boyut teoreminden

$$\text{Nullity } (T) = 5 - \dim(\text{Im } T) \geq 5 - 3 = 2$$

Demek ki $\text{Nullity } (T)$ en az 2'dir; özel olarak böyle bir dönüşümün çekirdeği hiçbir zaman yalnız sıfırdan ibaret olamaz.

■

5. Singüler Olmayan Dönüşümler

Bir lineer dönüşümün sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra ezip ezmediği, dönüşümün bilgi kaybedip kaybetmediğini belirler. Bu bölümde bu ayrımı adlandırıyor, bire birlikle ve lineer bağımsızlığın korunmasıyla nasıl aynı şey olduğunu görüyoruz.

5.1 Tanım

Tanım 5.1 (Singüler ve Singüler Olmayan Dönüşüm). V ve U , aynı bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer

$$F(v) = 0_U \text{ olacak şekilde bir } v \in V \setminus \{0_V\}$$

varsa F 'ye **singüler** denir. Eğer

$$F(v) = 0_U \Leftrightarrow v = 0_V,$$

yani başka bir deyişle $\text{Ker } F = \{0_V\}$ ise F 'ye **singüler değil** (singüler olmayan) denir.

i Not

Her lineer dönüşüm 0_V 'yi 0_U 'ya götürür; bu kaçınılmazdır. Singüler olmak, bunun *dışında* da sıfıra giden bir vektörün bulunması demektir.

5.2 Bire Birlikle Denkliği

Teorem 5.1 (Singüler Olmama Ölçütü). V ve U , K üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bir $F : V \rightarrow U$ lineer dönüşümünün bir izomorfizm, yani bire bir olması için gerek ve yeter koşul F 'nin singüler olmamasıdır.

İspat.

Gereklik. F bir izomorfizm, yani bire bir olsun. $v \in \text{Ker } F$ alalım; $F(v) = 0_U$ 'dur. Öte yandan her lineer dönüşüm için $F(0_V) = 0_U$ olduğundan $F(v) = F(0_V)$ olur. F bire bir olduğundan $v = 0_V$ 'dir. Demek ki $\text{Ker } F = \{0_V\}$, yani F singüler değildir.

Yeterlik. F singüler olmasın, yani $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olsun. $v, w \in V$ için $F(v) = F(w)$ olduğunu varsayalım. O hâlde

$$\begin{aligned} F(v) - F(w) = 0_U &\Rightarrow F(v - w) = 0_U \\ &\Rightarrow v - w \in \text{Ker } F = \{0_V\} \end{aligned}$$

Buradan $v - w = 0_V$, yani $v = w$ elde edilir. Demek ki F bire birdir. ■

5.3 Lineer Bağımsızlığın Korunması

Singüler olmayan dönüşümleri tanımanın ikinci yolu, bağımsız kümelere ne yaptıklarına bakmaktır.

Teorem 5.2 (Bağımsızlık İleri Taşınır). $F : V \rightarrow U$ singüler olmayan bir lineer dönüşüm olsun. $\{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin lineer bağımsız bir alt kümesi ise $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ de U 'nun lineer bağımsız bir alt kümesidir.

İspat.

$a_1, \dots, a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_n F(v_n) = 0_U$$

olsun. F lineer olduğundan

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = 0_U \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \text{Ker } F$$

F singüler olmadığından $\text{Ker } F = \{0_V\}$ 'dir; dolayısıyla

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0_V$$

$v_1, \dots, v_n$ lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0_K$$

Demek ki $F(v_1), \dots, F(v_n)$ lineer bağımsızdır.

■

Bu özelliğin tersi de doğrudur; birlikte tam bir karakterizasyon verirler.

Teorem 5.3 (Bağımsızlık Korunmasıyla Karakterizasyon). $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. F 'nin singüler olmaması için gerek ve yeter koşul, V 'nin lineer bağımsız her alt kümesinin F altındaki görüntüsünün U 'nun lineer bağımsız bir alt kümesi olmasıdır.

İspat.

Gereklik. Bir önceki teoremdir.

Yeterlik. V 'nin her lineer bağımsız alt kümesinin görüntüsü lineer bağımsız olsun. $v \in V \setminus \{0_V\}$ alalım. Tek elemanlı $\{v\}$ kümesi, $v \neq 0_V$ olduğundan lineer bağımsızdır. Varsayım gereği $\{F(v)\}$ de lineer bağımsızdır; tek elemanlı bir kümenin bağımsız olması ise

$$F(v) \neq 0_U$$

demektir. Sıfırdan farklı hiçbir vektör sıfıra gitmediğinden $\text{Ker } F = \{0_V\}$, yani F singüler değildir.

■

🔗 Kısaça

Singüler olmayan lineer dönüşümler — yani izomorfizmler — lineer bağımsız kümeleri lineer bağımsız kümelere götürürler. Tersine, herhangi bir lineer bağımsız kümeyi yine lineer bağımsız bir kümeye götüren bir lineer dönüşüm singüler değildir.

5.4 Boyut Engeli

Bazı uzay çiftleri arasında singüler olmayan bir dönüşüm kurmak, boyutlar yüzünden baştan imkânsızdır.

Örnek 5.1 (Singüler Olmayan Bir Dönüşümün Bulunmadığı Durum). Bütün singüler olmayan $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümlerini bulunuz.

Çözüm.

$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ herhangi bir lineer dönüşüm olsun. Tanım kümesi $V = \mathbb{R}^4$ için

$$\dim V = \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

Öte yandan $\text{Im } T$, $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğundan

$$\dim(\text{Im } T) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Buradan $\dim \mathbb{R}^4 \neq \dim(\text{Im } T)$ çıkar. **Boyut teoreminin sonucu** gereği $\dim V = \dim(\text{Im } T)$ ile T 'nin singüler olmaması denk olduğundan, T singülerdir.

Demek ki **her** $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü singülerdir; başka bir ifadeyle singüler olmayan bir $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü **yoktur**. ■

⚠ Genel kural

$\dim V > \dim U$ ise V 'den U 'ya giden **her** lineer dönüşüm singülerdir: boyut teoremi gereği böyle bir dönüşümün Nullity'si en az $\dim V - \dim U > 0$ olur, yani çekirdek yalnız sıfırdan ibaret kalmaz. Dar bir uzaya sığmak için mutlaka bilgi kaybetmek gerekir.

5.5 Alıştırma

Alıştırma 5.1 (Singülerlik Üzerine).

1. V ve U , K üzerinde iki vektör uzayı; $T : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm ve $k \in K \setminus \{0_K\}$ olsun. T 'nin singüler olması için gerek ve yeter koşulun kT dönüşümünün singüler olması olduğunu gösteriniz. (Burada kT , her $v \in V$ için $(kT)(v) = kT(v)$ ile tanımlıdır.)
2. $F : V \rightarrow W$ lineer ve $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olsun. $v_1, \dots, v_n \in V$ lineer bağımsız ise $F(v_1), \dots, F(v_n)$ vektörlerinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
3. $F : V \rightarrow W$ üzerine bir izomorfizm olsun. $\{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin bir tabanı ise $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ kümesinin W 'nin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. Gereklik. T singüler olsun. O hâlde $T(v) = 0_U$ olacak bir $v \in V \setminus \{0_V\}$ vardır. Bu v için

$$(kT)(v) = kT(v) = k0_U = 0_U$$

olur; yani kT de sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra götürür ve singülerdir.

Yeterlik. kT singüler olsun; $(kT)(w) = 0_U$ olacak bir $w \in V \setminus \{0_V\}$ vardır. T lineer olduğundan

$$T(kw) = kT(w) = (kT)(w) = 0_U$$

$k \neq 0_K$ ve $w \neq 0_V$ olduğundan $kw \neq 0_V$ 'dir, yani $kw \in V \setminus \{0_V\}$ 'dir. Demek ki T sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra götürüyor: T singülerdir.

2. $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olması F 'nin singüler olmaması demektir; iddia doğrudan **bağımsızlığın ileri taşınması** teoremidir.

3. F bire bir olduğundan singüler değildir; (2) gereği $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ lineer bağımsızdır. Ayrıca $V = L(v_1, \dots, v_n)$ olduğundan **doğuran kümenin görüntüsü** gereği

$$\text{Im } F = L(F(v_1), \dots, F(v_n))$$

F örten olduğundan $\text{Im } F = W$ 'dir, yani bu vektörler W 'yi doğurur. Hem doğuran hem lineer bağımsız olduklarından $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$, W 'nin bir tabanıdır. ■

6. Dönüşümler ve Denklem Sistemleri

Bir lineer denklem sistemi, aslında bir lineer dönüşümün belirli bir değeri aldığı noktaları sormaktan başka bir şey değildir. Bu bakış açısı, sistemler hakkında daha önce ölçütlerle kurduğumuz sonuçları tek bir teoremden — boyut teoreminden — türetmeyi sağlar.

6.1 Sistemin Dönüşüm Dili

K komutatif bir cisim olmak üzere, m lineer denklemlili ve n bilinmeyenli

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

sistemini ele alalım. [Matris gösterimiyle](#) bu sistem

$$AX = B$$

biçiminde yazılır; burada $A = (a_{ij})$ katsayılar matrisi (m, n) tipinde, $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ bilinmeyenler matrisi $(n, 1)$ tipinde ve $B = (b_1, \dots, b_m)^t$ sabitler matrisi $(m, 1)$ tipindedir. Şimdi bu matrisin belirlediği lineer dönüşümü düşünelim:

$$T : K^n \rightarrow K^m, \quad v \mapsto A \cdot v$$

Bu dilde sistemin çözüm kümesi

$$\{ X \in K^n : T(X) = AX = B \}$$

kümesidir; yani B vektörünün T altındaki ters görüntüsüdür. İlgili homojen sistemin çözüm uzayı ise

$$W = \{ X \in K^n : T(X) = AX = O \} = \text{Ker } T$$

olur.

i Not

İki gözlem sistemin bütün yapısını verir: **çözüm uzayı bir çekirdektir** ve **görüntü, A 'nın sütun uzayıdır**. Birincisi çözümlerin sayısını, ikincisi sistemin çözülebilirliğini yönetir.

6.2 Çözüm Uzayının Boyutu

Teorem 6.1 (Homojen Sistemin Çözüm Uzayının Boyutu). $AX = O$ homojen lineer denklem sisteminin W çözüm uzayının boyutu

$$\dim W = n - r$$

dir; burada n bilinmeyenlerin sayısı, $r = \text{rank } (A)$ 'dır.

İspat.

$T : K^n \rightarrow K^m, v \mapsto A \cdot v$ lineer dönüşümünü alalım. Yukarıda gördüğümüz gibi

$$W = \text{Ker } T$$

dir. K^n sonlu boyutlu olduğundan [boyut teoremi](#) uygulanabilir:

$$\dim K^n = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$$

Buradan

$$\dim(\text{Ker } T) = \dim K^n - \dim(\text{Im } T)$$

elde edilir. Sağ taraftaki iki terimi de tanıyoruz:

- $\dim K^n = n$, yani sistemdeki bilinmeyenlerin sayısı;
- $\text{Im } T$, A 'nın sütun uzayı olduğundan $\dim(\text{Im } T) = \text{rank } (A) = r$ 'dir.

Demek ki

$$\dim W = \dim(\text{Ker } T) = n - r$$

■

💡 Kapanan halka

Bu formülü [rank bölümünde](#) merdiven şeklinden okuyarak kullanmıştık: serbest değişken sayısı $n - r$ 'dir. Yukarıdaki ispat, aynı formülün merdiven hesabından bağımsız, tamamen yapısal bir nedeni olduğunu gösteriyor.

6.3 Kare Sistemler

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğunda ($m = n$) T bir operatör, yani K^n 'i kendi içine götüren bir lineer dönüşüm olur. Bu durumda homojen sistemin tek bir sorusu bütün sistemin kaderini belirler.

Örnek 6.1 (Kare Sistemde Homojen Sistemin Rolü). K üzerinde n denklemlili ve n bilinmeyenli bir $AX = B$ sisteminde, ilgili $AX = O$ homojen sisteminin yalnız sıfır çözümü olsun. Sistemin çözüm sayısı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.

$T : K^n \rightarrow K^n, v \mapsto A \cdot v$ dönüşümünü alalım; bu bir lineer operatördür. Varsayım gereği

$$\text{Ker } T = \{ X \in K^n : AX = O \} = \{0_{K^n}\}$$

olduğundan T [singüler değildir](#), dolayısıyla bire birdir. Ayrıca boyut teoreminden

$$\dim(\text{Im } T) = \dim K^n - \dim(\text{Ker } T) = n - 0 = n$$

olup $\text{Im } T$, K^n 'in n boyutlu bir alt uzayı, yani K^n 'in kendisidir: T örtendir.

T hem bire bir hem örten olduğundan, her $B \in K^n$ için $T(X) = AX = B$ olacak **bir ve yalnız bir** $X \in K^n$ vardır. Demek ki sistem hangi sabitler matrisiyle kurulursa kurulsun tek çözümlüdür.

■

Bu gözlemin tam karşılığını, tersinir operatörleri tanımladıktan sonra [bir teorem olarak](#) yazacağız.

6.4 Alıştırma

Alıştırma 6.1 (Dönüşüm Diliyle Sistemler).

1. A , $(3, 5)$ tipinde bir $\mathbb{R}$ -matris ve $\text{rank } (A) = 3$ olsun. $AX = O$ sisteminin çözüm uzayının boyutunu bulunuz.
2. $AX = O$ homojen sisteminde denklem sayısı bilinmeyen sayısından küçükse ($m < n$), sistemin sıfırdan farklı bir çözümü olduğunu gösteriniz.
3. A , (m, n) tipinde bir K -matris olsun. $AX = B$ sisteminin her $B \in K^m$ için çözülebilir olması ile $\text{rank } (A) = m$ olmasının denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. Bilinmeyen sayısı $n = 5$, rank $r = 3$ 'tür. Boyut formülünden

$$\dim W = n - r = 5 - 3 = 2$$

2. $T : K^n \rightarrow K^m, v \mapsto A \cdot v$ dönüşümünü alalım. $\text{Im } T, K^m$ 'in bir alt uzayı olduğundan

$$r = \dim(\text{Im } T) \leq m < n$$

Boyut teoreminden

$$\dim(\text{Ker } T) = n - r > 0$$

Boyutu sıfırdan büyük bir uzay yalnız sıfır vektöründen ibaret olamaz; dolayısıyla $\text{Ker } T$ sıfırdan farklı bir vektör içerir. Bu vektör, sistemin sıfırdan farklı bir çözümüdür.

3. $T : K^n \rightarrow K^m, v \mapsto A \cdot v$ olsun. Sistem her $B \in K^m$ için çözülebilirdir ancak ve ancak her B bir $T(X)$ değeri olarak yazılabilirse, yani

$$\text{Im } T = K^m$$

ise. $\text{Im } T, K^m$ 'in bir alt uzayı olduğundan bu eşitlik

$$\dim(\text{Im } T) = \dim K^m = m$$

ile denktir. $\text{Im } T, A$ 'nın sütun uzayı olduğundan $\dim(\text{Im } T) = \text{rank } (A)$ 'dır; koşul $\text{rank } (A) = m$ 'e indirgenir.

■

7. Dönüşümlerin Uzayı

Şimdiye kadar lineer dönüşümleri tek tek inceledik. Bu bölümde onları bir arada, tek bir kümenin elemanları olarak ele alıyoruz: iki lineer dönüşüm toplanabilir, bir dönüşüm skalerle çarpılabilir ve bu işlemler altında bütün lineer dönüşümler kümesi kendisi de bir vektör uzayı olur.

7.1 İki İşlem

Teorem 7.1 (Toplam ve Skalerle Çarpım Lineerdir). V ve U , aynı bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı; $F : V \rightarrow U$ ve $G : V \rightarrow U$ iki lineer dönüşüm ve $k \in K$ olsun. Bu durumda

$$F + G : V \rightarrow U, \quad v \mapsto (F + G)(v) = F(v) + G(v)$$

$$kF : V \rightarrow U, \quad v \mapsto (kF)(v) = k F(v)$$

biçiminde tanımlanan dönüşümlerin ikisi de lineerdir.

İspat.

$F + G$ lineerdir. Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned} (F + G)(av + bw) &= F(av + bw) + G(av + bw) \\ &= aF(v) + bF(w) + aG(v) + bG(w) \\ &= a (F(v) + G(v)) + b (F(w) + G(w)) \\ &= a (F + G)(v) + b (F + G)(w) \end{aligned}$$

İkinci satırda F ile G 'nin lineerliği kullanıldı.

kF lineerdir. Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned} (kF)(av + bw) &= k F(av + bw) = k (aF(v) + bF(w)) \\ &= a kF(v) + b kF(w) = a (kF)(v) + b (kF)(w) \end{aligned}$$

■

7.2 Hom(V, U)

Teorem 7.2 (Lineer Dönüşümlerin Vektör Uzayı). V ve U , bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bu durumda V 'den U 'ya tanımlanmış tüm lineer dönüşümlerin oluşturduğu küme, yani

$$\{ F : V \rightarrow U : F \text{ lineer} \}$$

yukarıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı $\text{Hom}(V, U)$ ile gösterilir.

i Not

“Hom” kısaltması *homomorfi* kelimesinden gelir; lineer dönüşümlerin bir başka adı vektör uzayı homomorfisidir.

Uzayın sıfırı ve ters elemanı doğrudan okunur.

Örnek 7.1 (Hom(V,U)'nın Sıfırı ve Ters Elemanı). $\text{Hom}(V, U)$ vektör uzayının sıfırını ve herhangi bir $F \in \text{Hom}(V, U)$ elemanının toplama işlemine göre tersini bulunuz.

Çözüm.**Sıfır.** Sıfır lineer dönüşümü

$$0 : V \rightarrow U, \quad v \mapsto 0_U$$

uzayın sıfırıdır. Gerçekten her $F \in \text{Hom}(V, U)$ ve her $v \in V$ için

$$(F + 0)(v) = F(v) + 0(v) = F(v) + 0_U = F(v)$$

$$(0 + F)(v) = 0(v) + F(v) = 0_U + F(v) = F(v)$$

olduğundan $F + 0 = 0 + F = F$ 'dir.**Ters eleman.** $-F := (-1)F$, yani her $v \in V$ için $(-F)(v) = -F(v)$ olarak tanımlansın. Bir lineer dönüşümün skaler katı lineer olduğundan $-F \in \text{Hom}(V, U)$ 'dur ve her $v \in V$ için

$$(-F + F)(v) = -F(v) + F(v) = 0_U = 0(v)$$

$$(F + (-F))(v) = F(v) - F(v) = 0_U = 0(v)$$

olduğundan

$$-F + F = F + (-F) = 0$$

dır; yani $-F$, F 'nin toplama işlemine göre tersidir.

■

 Lineer kombinezonların değeri $F_1, \dots, F_n \in \text{Hom}(V, U)$, $a_1, \dots, a_n \in K$ ve $v \in V$ için

$$(a_1 F_1 + \dots + a_n F_n)(v) = a_1 F_1(v) + \dots + a_n F_n(v)$$

olur. Yani dönüşümler arasındaki bir lineer kombinezonun bir noktadaki değeri, o noktadaki değerlerin aynı lineer kombinezonudur. Bağımsızlık hesaplarında hep bu kullanılır.

7.3 Boyut

Teorem 7.3 (Hom(V,U)'nın Boyutu). V ve U sonlu boyutlu, $\dim V = m$ ve $\dim U = n$ olsun. Bu durumda $\text{Hom}(V, U)$ de sonlu boyutludur ve

$$\dim \text{Hom}(V, U) = m \cdot n$$

İspat. $\{v_1, \dots, v_m\}$, V 'nin bir tabanı ve $\{u_1, \dots, u_n\}$, U 'nin bir tabanı olsun. *Dönüşümün tabanda belirlenmesi teoremi gereği*, her $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, n$ için

$$F_{ij}(v_i) = u_j \quad \text{ve} \quad F_{ij}(v_k) = 0_U \quad (k \neq i)$$

olacak biçimde bir tek $F_{ij} : V \rightarrow U$ lineer dönüşümü vardır. Bu dönüşümlerin sayısı $m \cdot n$ 'dir. Şimdi

$$\{F_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$$

kümesinin $\text{Hom}(V, U)$ 'nin bir tabanı olduğunu gösterelim.**(i) Kümemiz $\text{Hom}(V, U)$ 'yu doğurur.** $F \in \text{Hom}(V, U)$ olsun ve

$$F(v_k) =: w_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

diyelim. $w_k \in U$ ve $\{u_1, \dots, u_n\}$, U 'nin tabanı olduğundan uygun $a_{k1}, \dots, a_{kn} \in K$ için

$$w_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n \quad (k = 1, \dots, m)$$

yazılır. Şimdi

$$G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij} \in \text{Hom}(V, U)$$

dönüşümünü alalım. $k \neq i$ için $F_{ij}(v_k) = 0_U$ ve $F_{kj}(v_k) = u_j$ olduğundan, toplamda yalnız $i = k$ terimleri sağ kalır:

$$\begin{aligned} G(v_k) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj} F_{kj}(v_k) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj} u_j = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n = w_k \end{aligned}$$

Demek ki F ile G lineer dönüşümleri V 'nin bir tabanının her elemanında aynı değeri alıyor:

$$F(v_k) = w_k = G(v_k) \quad (k = 1, \dots, m)$$

Tabanda belirlenme teoreminin teklik kısmı gereği $F = G$ 'dir. Böylece her F , F_{ij} 'lerin bir lineer kombinasyonu olarak yazıldı.

(ii) **Kümemiz lineer bağımsızdır.** $a_{ij} \in K$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij} = 0$$

olsun; burada sağ taraf sıfır lineer dönüşümüdür. Her $k = 1, \dots, m$ için bu eşitliğin v_k 'daki değerine bakalım:

$$0_U = 0(v_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} F_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj} u_j$$

yani

$$a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n = 0_U$$

$\{u_1, \dots, u_n\}$, U 'nun bir tabanı, dolayısıyla lineer bağımsız olduğundan

$$a_{k1} = a_{k2} = \cdots = a_{kn} = 0_K \quad (k = 1, \dots, m)$$

Demek ki bütün a_{ij} 'ler sıfırdır; küme lineer bağımsızdır.

(i) ve (ii)'den $\{F_{ij}\}$ kümesi $\text{Hom}(V, U)$ 'nun bir tabanıdır. Eleman sayısı $m \cdot n$ olduğundan

$$\dim \text{Hom}(V, U) = m \cdot n$$

■

7.4 Çözümlü Örnekler

Örnek 7.2 (Dönüşümler Arasında İşlemler). $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümleri

$$F(x, y, z) = (2x, y + z), \quad G(x, y, z) = (x - z, y)$$

biçiminde tanımlanıyor. $F + G$, $3F$ ve $2F - 5G$ dönüşümlerini bulunuz.

Çözüm.

Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için değerleri doğrudan hesaplayalım.

$$(F + G)(x, y, z) = (2x, y + z) + (x - z, y) = (3x - z, 2y + z)$$

$$(3F)(x, y, z) = 3(2x, y + z) = (6x, 3y + 3z)$$

$$\begin{aligned}(2F - 5G)(x, y, z) &= 2(2x, y + z) - 5(x - z, y) \\ &= (4x, 2y + 2z) + (-5x + 5z, -5y) \\ &= (-x + 5z, -3y + 2z)\end{aligned}$$

■

Örnek 7.3 (Üç Dönüşümün Lineer Bağımsızlığı). $F, G, H \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dönüşümleri

$$F(x, y, z) = (x + y + z, x + y), \quad G(x, y, z) = (2x + z, x + y)$$

$$H(x, y, z) = (2y, x)$$

biçiminde tanımlanıyor. Bu üç vektörün $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$aF + bG + cH = 0$$

olsun; burada $0, \mathbb{R}^3$ 'ten $\mathbb{R}^2$ 'ye sıfır lineer dönüşümüdür. Bu bir dönüşüm eşitliği olduğundan, her noktada sağlanmalıdır; uygun noktalar seçelim.

(1, 0, 0) noktası.

$$\begin{aligned}(aF + bG + cH)(1, 0, 0) &= aF(1, 0, 0) + bG(1, 0, 0) + cH(1, 0, 0) \\ &= a(1, 1) + b(2, 1) + c(0, 1) = (a + 2b, a + b + c)\end{aligned}$$

Bu $(0, 0)$ 'a eşit olmalı:

$$a + 2b = 0 \quad \text{ve} \quad a + b + c = 0 \tag{1}$$

(0, 1, 0) noktası.

$$\begin{aligned}(aF + bG + cH)(0, 1, 0) &= aF(0, 1, 0) + bG(0, 1, 0) + cH(0, 1, 0) \\ &= a(1, 1) + b(0, 1) + c(2, 0) = (a + 2c, a + b)\end{aligned}$$

Bu da $(0, 0)$ 'a eşit olmalı:

$$a + 2c = 0 \quad \text{ve} \quad a + b = 0 \tag{2}$$

(1)'in birinci denklemi ile (2)'nin ikinci denklemini birlikte alalım: $a + 2b = 0$ ve $a + b = 0$ 'dan $b = 0$, dolayısıyla $a = 0$ bulunur. (2)'nin birinci denkleminde $c = 0$ çıkar.

Demek ki

$$aF + bG + cH = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

olup F, G, H vektörleri $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsızdır.

■

i Not

Bu örnekte $\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) = 3 \cdot 2 = 6$ 'dır; bulduğumuz üç bağımsız dönüşüm, altı boyutlu bir uzayın üç boyutlu bir alt uzayını gerer.

7.5 Alıştırma

Alıştırma 7.1 (Dönüşüm Uzayı Üzerine).

1. $T, F : V \rightarrow W$ lineer dönüşümler olsun. $T + F$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
2. $T : V \rightarrow W$ lineer ve $a \in K$ olsun. aT dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
3. $\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ ve $\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ boyutlarını bulunuz.

Çözüm.

1. Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned}
 (T + F)(av + bw) &= T(av + bw) + F(av + bw) \\
 &= aT(v) + bT(w) + aF(v) + bF(w) \\
 &= a(T(v) + F(v)) + b(T(w) + F(w)) \\
 &= a(T + F)(v) + b(T + F)(w)
 \end{aligned}$$

olduğundan $T + F$ lineerdir.

2. Her $b, c \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned}
 (aT)(bv + cw) &= aT(bv + cw) = a(bT(v) + cT(w)) \\
 &= b aT(v) + c aT(w) = b(aT)(v) + c(aT)(w)
 \end{aligned}$$

olduğundan aT lineerdir.

3. Boyut formülünden

$$\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = n \cdot 1 = n$$

İkincisi, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer fonksiyonların uzayının yine n boyutlu olduğunu söyler.

■

8. Bileşke ve Operatörler Cebri

Lineer dönüşümler toplanıp skalerle çarpılabildiği gibi, uygun oldukları yerde birbirleriyle bileşke de yapılabilir. Bir vektör uzayını kendi içine götüren dönüşümler için bu bileşke her zaman tanımlıdır ve uzaya bir çarpma işlemi kazandırır. Ortaya çıkan yapıya cebir denir.

8.1 Bileşke

Teorem 8.1 (Bileşke Lineerdir). V, U ve W , aynı bir K komutatif cismi üzerinde üç vektör uzayı; $F : V \rightarrow U$ ve $G : U \rightarrow W$ iki lineer dönüşüm olsun. Bu durumda bileşke fonksiyon

$$G \circ F : V \rightarrow W, \quad v \mapsto (G \circ F)(v) = G (F(v))$$

bir lineer dönüşümdür.

İspat.

Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned} (G \circ F)(av + bw) &= G (F(av + bw)) = G (aF(v) + bF(w)) \\ &= a G (F(v)) + b G (F(w)) \\ &= a (G \circ F)(v) + b (G \circ F)(w) \end{aligned}$$

İlk satırda F 'nin, ikinci satırda G 'nin lineerliği kullanıldı.

■

Teorem 8.2 (Bileşkenin İşlemlerle Uyumunu). V, U, W üç vektör uzayı; $F, F' : V \rightarrow U$ ve $G, G' : U \rightarrow W$ lineer dönüşümler ve $k \in K$ olsun. Bu durumda

- i. $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$
- ii. $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$
- iii. $k(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF)$

İspat.

Bütün eşitlikler dönüşüm eşitliği olduğundan her $v \in V$ için değerleri karşılaştırmak yeterlidir.

(i)

$$\begin{aligned} (G \circ (F + F'))(v) &= G ((F + F')(v)) \\ &= G (F(v) + F'(v)) \\ &= G (F(v)) + G (F'(v)) \\ &= (G \circ F)(v) + (G \circ F')(v) \\ &= (G \circ F + G \circ F')(v) \end{aligned}$$

G 'nin lineerliği, $G (F(v) + F'(v))$ değerini iki terime ayırırken kullanıldı.

(ii)

$$\begin{aligned} ((G + G') \circ F)(v) &= (G + G') (F(v)) \\ &= G (F(v)) + G' (F(v)) \\ &= (G \circ F)(v) + (G' \circ F)(v) \\ &= (G \circ F + G' \circ F)(v) \end{aligned}$$

(iii) Önce birinci eşitlik:

$$\begin{aligned} (k(G \circ F))(v) &= k(G \circ F)(v) = kG(F(v)) \\ &= (kG)(F(v)) = ((kG) \circ F)(v) \end{aligned}$$

Sonra ikincisi; burada G 'nin lineerliği kullanılır:

$$\begin{aligned} (k(G \circ F))(v) &= kG(F(v)) = G(kF(v)) \\ &= G((kF)(v)) = (G \circ (kF))(v) \end{aligned}$$

■

8.2 Lineer Operatörler

Tanım 8.1 (Lineer Operatör). V , bir K komutatif cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V 'yi kendi içine götüren bir

$$T : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümüne **V üzerinde bir lineer operatör** denir. V 'den V 'ye tanımlanmış tüm lineer dönüşümlerin oluşturduğu vektör uzayı, yani $\text{Hom}(V, V)$,

$$A(V) := \text{Hom}(V, V)$$

ile gösterilir.

Dönüşümlerin uzayı bölümündeki iki teoremden hemen şunlar çıkar: $A(V)$, K üzerinde bir vektör uzayıdır ve V n boyutlu ise

$$\dim A(V) = n \cdot n = n^2$$

Ayrıca $A(V)$ 'nin iki elemanının bileşkesi yine $A(V)$ 'dedir. Bu, $A(V)$ üzerinde bir **çarpma** işlemi verir:

$$ST := S \circ T \in A(V) \quad (S, T \in A(V))$$

8.3 Cebir Yapısı

Tanım 8.2 (Cebir). $\mathcal{A}$, bir K komutatif cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\mathcal{A}$ 'da bir “ $\cdot$ ” (çarpma) işlemi tanımlanmış olsun. Eğer her $F, G, H \in \mathcal{A}$ ve her $k \in K$ için

- i. $F(G + H) = FG + FH$
- ii. $(G + H)F = GF + HF$
- iii. $k(GF) = (kG)F = G(kF)$

sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ 'ya **K üzerinde bir cebir** denir.

Tanım 8.3 (Asosyatif Cebir). K üzerinde bir $\mathcal{A}$ cebri, ayrıca her $F, G, H \in \mathcal{A}$ için

$$(FG)H = F(GH)$$

koşulunu da sağlıyorsa $\mathcal{A}$ 'ya bir **asosyatif cebir** denir.

Teorem 8.3 (A(V) Bir Asosyatif Cebirdir). V , K üzerinde bir vektör uzayı olsun. $A(V)$, $ST = S \circ T$ çarpma işlemine göre K üzerinde bir asosyatif cebirdir. $A(V)$ 'ye **V üzerindeki lineer operatörler cebri** denir.

İspat.

Cebir tanımının üç koşulu, bileşkenin işlemlerle uyumunu veren teoremin üç maddesinin ta kendisidir.

Geriye asosyatiflik kalıyor. $F, G, H \in A(V)$ olsun; $F, G, H : V \rightarrow V$ birer lineer dönüşümdür ve dolaşısıyla $(F \circ G) \circ H$ ile $F \circ (G \circ H)$ de V 'den V 'ye lineer dönüşümlerdir. Her $v \in V$ için

$$\begin{aligned} ((FG)H)(v) &= ((F \circ G) \circ H)(v) = (F \circ G)(H(v)) = F(G(H(v))) \\ (F(GH))(v) &= (F \circ (G \circ H))(v) = F((G \circ H)(v)) = F(G(H(v))) \end{aligned}$$

İki sağ taraf aynı olduğundan her $v \in V$ için değerler eşittir, yani

$$(FG)H = F(GH)$$

Öyleyse $A(V)$ bir asosyatif cebirdir.

■

⚠ Çarpım komutatif değildir

$A(V)$ bir cebirdir ama komutatif bir cebir değildir: genel olarak $ST \neq TS$ 'dir. Dahası çarpımın sıfır bölenleri de vardır – $TS = 0$ iken $ST \neq 0$ olabilir. Aşağıdaki örnekler her ikisini de gösteriyor.

8.4 Birim, Kuvvetler ve Polinomlar

V üzerindeki identik lineer dönüşüm

$$I : V \rightarrow V, \quad v \mapsto v$$

$A(V)$ 'nin elemanıdır ve her $T \in A(V)$ için

$$TI = IT = T$$

sağlanır; yani I , çarpmanın birim elemanıdır.

Bir T lineer operatörünün **kuvvetleri** şöyle tanımlanır:

$$T^1 = T, \quad T^2 = TT = T \circ T, \quad T^3 = T \circ T \circ T, \quad \dots$$

genel olarak n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ tane}}$$

Tanım 8.4 (Operatör Polinomu). $p(x)$, K üzerinde herhangi bir polinom olsun:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, a_i \in K$$

Bu durumda V üzerindeki $p(T)$ lineer operatörü

$$p(T) := a_0I + a_1T + a_2T^2 + \dots + a_nT^n$$

olarak tanımlanır.

Tanım 8.5 (Polinomun Kökü). T , V üzerinde bir lineer operatör ve $p(x)$, K üzerinde bir polinom olsun. Eğer $p(T) = 0$ ise T 'ye $p(x)$ polinomunun bir **kökü** (sıfırı) denir; buradaki 0 , V üzerindeki sıfır operatörüdür.

i Not

Sabit terimin a_0 değil a_0I olarak yazıldığına dikkat edin: a_0 bir skaler, $p(T)$ ise bir operatördür. Skalere operatöre çeviren şey birim operatördür.

8.5 Çözümlü Örnekler

Örnek 8.1 (Bir Polinomun Kökü Olan Operatör). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatörü $T(x, y, z) = (0, x, y)$ biçiminde tanımlanıyor. $T + I$ ve T^3 operatörlerini bulunuz.

Çözüm.

Her $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}(T + I)(a, b, c) &= T(a, b, c) + I(a, b, c) \\ &= (0, a, b) + (a, b, c) = (a, a + b, b + c)\end{aligned}$$

Kuvvetleri sırayla hesaplayalım:

$$T^2(a, b, c) = T(T(a, b, c)) = T(0, a, b) = (0, 0, a)$$

$$T^3(a, b, c) = T(T^2(a, b, c)) = T(0, 0, a) = (0, 0, 0)$$

Demek ki T^3 , her vektörü sıfıra götüren operatördür:

$$T^3 = 0$$

Başka bir ifadeyle T , $p(x) = x^3$ polinomunun bir köküdür.

■

Örnek 8.2 (Çarpımın Komutatif Olmaması). $\mathbb{R}^2$ üzerinde $S(x, y) = (y, x)$ ve $T(x, y) = (0, x)$ lineer operatörleri veriliyor. $S + T$, $2S - 3T$, ST , TS , S^2 ve T^2 operatörlerini bulunuz.

Çözüm.

Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için:

$$(S + T)(x, y) = (y, x) + (0, x) = (y, 2x)$$

$$(2S - 3T)(x, y) = 2(y, x) - 3(0, x) = (2y, -x)$$

$$(ST)(x, y) = S(T(x, y)) = S(0, x) = (x, 0)$$

$$(TS)(x, y) = T(S(x, y)) = T(y, x) = (0, y)$$

Görüldüğü gibi $ST \neq TS$ 'dir.

$$S^2(x, y) = S(S(x, y)) = S(y, x) = (x, y) \Rightarrow S^2 = I$$

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(0, x) = (0, 0) \Rightarrow T^2 = 0$$

■

Örnek 8.3 (Operatör Çarpımında Sıfır Bölenler). $\mathbb{R}^2$ üzerinde $S(x, y) = (0, x)$ ve $T(x, y) = (x, 0)$ operatörleri veriliyor. $TS = 0$ olduğunu, buna karşılık $ST \neq 0$ olduğunu ve $T^2 = T$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(TS)(x, y) = T(S(x, y)) = T(0, x) = (0, 0)$$

olduğundan $TS = 0$ 'dır; burada 0 , $\mathbb{R}^2$ üzerindeki sıfır operatörüdür.

Öte yandan

$$(ST)(x, y) = S(T(x, y)) = S(x, 0) = (0, x)$$

olup $x \neq 0$ için $(0, x) \neq (0, 0)$ olacağından $ST \neq 0$ 'dır.

Son olarak

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x, 0) = (x, 0) = T(x, y)$$

olduğundan $T^2 = T$ dir.

■

💡 Ne öğrendik?

İki sıfırdan farklı operatörün çarpımı sıfır olabiliyor ($TS = 0$), üstelik çarpanların sırası değişince sonuç değişebiliyor ($ST \neq 0$). $A(V)$, sayılarla çalışmaya alışkın sezginin geçerli olmadığı bir cebirdir; buna karşılık kare matrislerin cebri de tam olarak böyledir. Bu benzerlik tesadüf değil — [matris gösterimi bölümünde](#) ikisinin aynı yapı olduğunu göreceğiz.

8.6 Alıştırma

Alıştırma 8.1 (Operatör Cebri Üzerine).

1. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (2x, y + z)$ ve $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x, y) = (y, x)$ olsun. $G \circ F$ dönüşümünü bulunuz; $F \circ G$ tanımlı mıdır?
2. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (0, x)$ olsun. T 'nin kökü olduğu bir polinom bulunuz.
3. $S, T \in A(V)$ olsun. $(S + T)^2 = S^2 + ST + TS + T^2$ olduğunu gösteriniz. Bu ifade neden $S^2 + 2ST + T^2$ değildir?

Çözüm.

1. $G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tanımlıdır ve her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(G \circ F)(x, y, z) = G(F(x, y, z)) = G(2x, y + z) = (y + z, 2x)$$

$F \circ G$ ise **tanımlı değildir**: G 'nin görüntü kümesi $\mathbb{R}^2$, F 'nin tanım kümesi ise $\mathbb{R}^3$ 'tür, dolayısıyla F bir $G(x, y)$ değerine uygulanamaz.

2. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$T^2(x, y) = T(0, x) = (0, 0)$$

olduğundan $T^2 = 0$ 'dır. Demek ki T , $p(x) = x^2$ polinomunun bir köküdür.

3. Cebir aksiyomlarındaki dağılma özelliklerini kullanalım:

$$\begin{aligned} (S + T)^2 &= (S + T)(S + T) \\ &= S(S + T) + T(S + T) && \text{(sağdan dağılma)} \\ &= SS + ST + TS + TT && \text{(soldan dağılma)} \\ &= S^2 + ST + TS + T^2 \end{aligned}$$

Ortadaki iki terimi $2ST$ olarak birleştirebilmek için $ST = TS$ olması gerekirdi; oysa operatör çarpımı genel olarak komutatif değildir. Yukarıdaki örnekte $S(x, y) = (y, x)$ ve $T(x, y) = (0, x)$ için $ST(x, y) = (x, 0)$ iken $TS(x, y) = (0, y)$ bulmuştuk; bu iki operatör eşit olmadığından açılım dört terimli kalır.

■

9. Tersinir Operatörler

Bir lineer operatörün tersinin olması, uyguladığı dönüşümün geri alınabilmesi demektir. Sonlu boyutlu uzaylarda bunun tek bir engeli vardır: sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra ezmek. Bu bölüm o engelin gerçekten tek engel olduğunu gösteriyor.

9.1 Tanım

Tanım 9.1 (Tersinir Operatör). $T : V \rightarrow V$ bir lineer operatör, yani $T \in A(V)$ olsun. Eğer

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

olacak şekilde bir $T^{-1} \in A(V)$ varsa, T^{-1} lineer operatörüne T 'nin **tersi** denir. Tersi olan bir $T \in A(V)$ operatörüne de **tersinir operatör** denir.

9.2 Tersinirlik Ölçütü

Teorem 9.1 (Tersinirlik Ölçütü). V , bir K komutatif cismi üzerinde **sonlu boyutlu** bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. Bu durumda T 'nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul T 'nin **singüler olmamasıdır**.

İspat.

Gereklik. T tersinir olsun. Bir fonksiyonun tersinin olması için gerek ve yeter koşul bire bir ve örten olmasıdır; özel olarak T bire birdir. **Singüler olmama ölçütü** gereği $\text{Ker } T = \{0_V\}$, yani T singüler değildir.

Yeterlik. T singüler olmasın. O hâlde $\text{Ker } T = \{0_V\}$ 'dir ve T bire birdir. V sonlu boyutlu olduğundan **boyut teoremi** uygulanabilir:

$$\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) = 0 + \dim(\text{Im } T) = \dim(\text{Im } T)$$

$\text{Im } T$, V 'nin bir alt uzayıdır ve boyutu V 'nin boyutuna eşittir; dolayısıyla

$$\text{Im } T = V$$

yani T örtendir. T hem bire bir hem örten olduğundan tersi vardır; ters fonksiyonun da lineer olduğunu **daha önce** görmüştük, yani $T^{-1} \in A(V)$ 'dir.

■

Teorem 9.2 (Sonlu Boyutta Üç Denk Koşul). V sonlu boyutlu ve $T \in A(V)$ olsun. Aşağıdaki üç koşul birbirine denktir:

- i. T tersinirdir;
- ii. T bire birdir;
- iii. T örtendir.

İspat.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Tersinirlik ölçütü gereği

$$T \text{ tersinirdir} \Leftrightarrow T \text{ singüler değildir}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{0_V\} \Leftrightarrow T \text{ bire birdir}$$

Son denklik singüler olmama ölçütüdür.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Boyut teoreminden

$$\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) \quad (*)$$

$\text{Im } T, V$ 'nin bir alt uzayı olduğundan

$$T \text{ örtendir} \Leftrightarrow \text{Im } T = V \Leftrightarrow \dim(\text{Im } T) = \dim V$$

(*) gereği bu son eşitlik $\dim(\text{Ker } T) = 0$, yani $\text{Ker } T = \{0_V\}$ ile denktir. O da T 'nin singüler olmaması, dolayısıyla tersinir olmasıdır.

■

⚠ Sonlu boyut şartı vazgeçilmezdir

Bu denkliklerin hepsi V 'nin sonlu boyutlu olmasına dayanır. Sonsuz boyutlu uzaylarda bire bir olup örten olmayan operatörler vardır; örneğin bütün reel dizilerin uzayında $(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$ kaydırma operatörü bire birdir ama örten değildir.

9.3 Ters Operatörün Hesabı

Ters operatörü bulmak bir denklem sistemi çözmektir: $T(v) = w$ eşitliğinde v 'yi w cinsinden yazmak yeterlidir.

Örnek 9.1 (Düzlemde Bir Ters Operatör). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörü $T(x, y) = (y, 2x - y)$ biçiminde tanımlanıyor. T 'nin tersinir olduğunu gösteriniz ve T^{-1} 'i bulunuz.

Çözüm.

Tersinirlik. $T(x, y) = (0, 0)$ koşulu

$$y = 0 \quad \text{ve} \quad 2x - y = 0$$

verir; buradan $y = 0$ ve $x = 0$ bulunur. Demek ki

$$\text{Ker } T = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

olup T singüler değildir; tersinirlik ölçütü gereği T 'nin tersi vardır.

Tersin hesabı. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$T(x, y) = (s, t) \Leftrightarrow T^{-1}(s, t) = (x, y)$$

olduğundan $T(x, y) = (s, t)$ eşitliğini çözelim:

$$(y, 2x - y) = (s, t) \Rightarrow y = s, \quad 2x - y = t$$

İkinci denklemde $y = s$ yerine konursa $2x = s + t$, yani

$$x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t, \quad y = s$$

Öyleyse

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (s, t) \mapsto \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t, s \right)$$

■

Örnek 9.2 (Uzayda Bir Ters Operatör). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatörü

$$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$$

biçiminde tanımlanıyor. T 'nin tersinir olduğunu gösteriniz ve T^{-1} 'i bulunuz.

Çözüm.**Tersinirlik.** $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu

$$2x = 0, \quad 4x - y = 0, \quad 2x + 3y - z = 0$$

homojen sistemini verir. Birinci denklemden $x = 0$, ikinciden $y = 4x = 0$, üçüncüden $z = 2x + 3y = 0$ bulunur; sistemin tek çözümü sıfır çözümüdür. Demek ki

$$\text{Ker } T = \{(0, 0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

olup T singüler değildir ve tersi vardır.

Tersin hesabı. $T(x, y, z) = (r, s, t)$ eşitliğini çözelim:

$$2x = r, \quad 4x - y = s, \quad 2x + 3y - z = t$$

Üç bilinmeyenli ve üç denklemlili bu sistemin tek çözümü vardır. Sırayla:

$$x = \frac{r}{2}, \quad y = 4x - s = 2r - s$$

$$z = 2x + 3y - t = r + 3(2r - s) - t = 7r - 3s - t$$

Öyleyse

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, s, t) \mapsto \left(\frac{r}{2}, 2r - s, 7r - 3s - t \right)$$

■

9.4 Kare Denklem Sistemleri

Tersinir operatörler, denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olan sistemleri tek bir soruya indirger.

Teorem 9.3 (Kare Sistemlerin Çözüm Sayısı). K komutatif bir cisim olmak üzere, n lineer denklemlili ve n bilinmeyenli

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (*)$$

sistemini ele alalım. Bu durumda:

- $(*)$ ile ilgili homojen sistemin yalnız sıfır çözümü varsa, $(*)$ 'in **tek çözümü** vardır.
- Homojen sistemin sıfırdan farklı bir çözümü varsa, $(*)$ 'in ya **çözümü yoktur** ya da **birden fazla çözümü** vardır.

İspat.

Sistemi $AX = B$ matris denklemi olarak yazalım; $A = (a_{ij})$ artık n . mertebeden bir kare matristir. Bu matrisin belirlediği

$$T : K^n \rightarrow K^n, \quad v \mapsto A \cdot v$$

lineer operatörünü alalım.

(i) $AX = O$ homojen sisteminin yalnız sıfır çözümü olsun. Bu, çözüm uzayının

$$W = \{ X \in K^n : T(X) = AX = O \} = \text{Ker } T = \{0_{K^n}\}$$

olması demektir; yani T singüler değildir. Tersinirlik ölçütü gereği T 'nin tersi vardır, dolayısıyla T bire bir ve örtendir. O hâlde her $B \in K^n$ için

$$T(X) = AX = B$$

olacak biçimde bir ve yalnız bir $X \in K^n$ vardır; $(*)$ 'in **tek çözümü** vardır.

(ii) $AX = O$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\text{Ker } T \neq \{0_{K^n}\}$$

olup T singülerdir ve bire bir değildir. Tersinirlik ölçütü gereği T 'nin tersi yoktur, dolayısıyla T örten de değildir. İki durum mümkündür:

- Ya $T(X) = AX = B$ olacak hiçbir $X \in K^n$ yoktur; bu durumda $(*)$ 'in çözümü yoktur.
- Ya da böyle bir X vardır. Bu durumda, $AX_0 = O$ olan sıfırdan farklı bir X_0 alınırsa

$$A(X + X_0) = AX + AX_0 = B + O = B$$

olduğundan $X + X_0 \neq X$ de bir çözümdür; yani $(*)$ 'in birden fazla çözümü vardır.

■

💡 Pratikte ne işe yarar?

Kare bir sistemde sabitler matrisi B ne olursa olsun çözüm sayısını belirleyen tek şey, katsayılar matrisidir. Homojen sistemi bir kez çözmek, o katsayı tablosuyla kurulabilecek **bütün** sistemler hakkında bilgi verir. Bu, **regülerlik ölçütüyle** de örtüşür: A 'nın regüler olması, homojen sistemin yalnız sıfır çözümü olmasıyla aynı şeydir.

9.5 Alıştırma

Alıştırma 9.1 (Tersinir Operatörler Üzerine).

1. V sonlu boyutlu ve $S, T \in A(V)$ tersinir olsun. ST 'nin de tersinir olduğunu ve $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ olduğunu gösteriniz.
2. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ operatörünün tersinir olup olmadığını belirleyiniz.
3. $T \in A(V)$ ve $T^2 = 0$, $T \neq 0$ olsun. T 'nin tersinir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

1. S ve T tersinir olduğundan $S^{-1}, T^{-1} \in A(V)$ vardır. $T^{-1}S^{-1}$ elemanının ST 'nin tersi olduğunu doğrudan çarparak görelim; asosiyatiflik serbestçe kullanılabilir:

$$(ST) (T^{-1}S^{-1}) = S (TT^{-1}) S^{-1} = S I S^{-1} = SS^{-1} = I$$

$$(T^{-1}S^{-1}) (ST) = T^{-1} (S^{-1}S) T = T^{-1} I T = T^{-1}T = I$$

Demek ki ST tersinirdir ve $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ 'dir.

2. $T(x, y) = (0, 0)$ koşulu

$$x + y = 0 \quad \text{ve} \quad 2x + 2y = 0$$

verir. İkinci denklem birincinin iki katı olduğundan sistem tek bir denkleme, $x + y = 0$ 'a indirgenir. Bu denklemin $(1, -1)$ gibi sıfırdan farklı çözümleri vardır:

$$T(1, -1) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad (1, -1) \in \text{Ker } T$$

Demek ki $\text{Ker } T \neq \{(0, 0)\}$ 'dir; T singülerdir ve **tersinir değildir**.

3. T tersinir olsaydı, $T^2 = 0$ eşitliğini soldan T^{-1} ile çarparak

$$T^{-1} (TT) = T^{-1} 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad (T^{-1}T) T = 0 \quad \Rightarrow \quad IT = T = 0$$

elde ederdik. Bu, $T \neq 0$ varsayımıyla çelişir. Öyleyse T tersinir değildir.

■

10. Bir Operatörün Matrisi

Sonlu boyutlu bir uzayda bir taban seçmek, her vektörü bir sayı dizisiyle temsil etmek demektir. Aynı seçim, o uzay üzerindeki her lineer operatörü de bir kare matrisle temsil etmemizi sağlar. Bu bölümde bu temsili kuruyor ve operatörün bir vektöre uygulanmasının, matrisin koordinat vektörüyle çarpılmasına karşılık geldiğini gösteriyoruz.

10.1 Koordinat Vektörünü Hatırlayalım

V , K üzerinde bir vektör uzayı; $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $v \in V$ olsun. v 'yi

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad (a_i \in K)$$

olarak **tek türlü yazabiliyorduk**. Bu bölümde koordinatları **sütun matris** olarak yazacağız:

$$[v]_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

10.2 Matris Gösterimi

Tanım 10.1 (Bir Lineer Operatörün Matris Gösterimi). V , bir K komutatif cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı; $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $T \in A(V)$ bir lineer operatör olsun. $T(e_1), \dots, T(e_n) \in V$ vektörlerini, $a_{ij} \in K$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ T(e_2) &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ &\vdots \\ T(e_n) &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

biçiminde **tek türlü** yazabiliriz. Bu durumda

$$[T]_e := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

K -matrisine, V üzerindeki T lineer operatörünün e tabanına göre **matris gösterimi**, kısaca **T 'nin e tabanındaki matrisi** denir.

💡 Kuralı akılda tutmanın yolu

Yukarıdaki katsayı tablosunun **devriği** alınıyor. Pratikte tek bir cümle yeter:

$[T]_e$ 'nin j . **sütunu**, $T(e_j)$ vektörünün e tabanındaki koordinatlarıdır.

Yani $[T]_e$ 'nin sütunları sırayla $[T(e_1)]_e, [T(e_2)]_e, \dots, [T(e_n)]_e$ 'dir.

i Not

Bundan sonraki örneklerde e harfini **standart taban** için, f harfini standart olmayan tabanlar için kullanacağız. Tanımdaki e ise herhangi bir tabanı gösteren genel simgedir.

Örnek 10.1 (Bir Matris Gösteriminin Hesabı). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörü $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ biçiminde tanımlanıyor. $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$ tabanına göre $[T]_f$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Önce f 'nin gerçekten bir taban olduğunu görelim: f_1 ile f_2 lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^2$ iki boyutlu olduğundan lineer bağımsız iki vektör bir taban oluşturur.

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini yine f cinsinden yazalım:

$$T(f_1) = T(1, 1) = (4 - 2, 2 + 1) = (2, 3)$$

$(2, 3) = x(1, 1) + y(-1, 0) = (x - y, x)$ denkleminde $x = 3$ ve $x - y = 2$, yani $y = 1$ bulunur:

$$T(f_1) = 3(1, 1) + 1 \cdot (-1, 0) = 3f_1 + f_2$$

Benzer biçimde

$$T(f_2) = T(-1, 0) = (-4, -2)$$

ve $(-4, -2) = x(1, 1) + y(-1, 0)$ denkleminde $x = -2$, $x - y = -4$, yani $y = 2$:

$$T(f_2) = -2(1, 1) + 2(-1, 0) = -2f_1 + 2f_2$$

Sütunları bu koordinatlardan kurarak

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

10.3 Standart Tabanda: Matrisin Kendisi

Örnek 10.2 (Matris Dönüşümünün Standart Tabandaki Matrisi). K komutatif bir cisim, $A = (a_{ij})$ n . mertebeden bir kare K -matris ve

$$T : K^n \rightarrow K^n, \quad v \mapsto A \cdot v$$

lineer operatörü olsun. K^n 'in standart tabanı $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere $[T]_e = A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

K^n 'in elemanlarını sütun matris olarak düşünüyoruz; e_i , i . bileşeni 1_K , diğerleri 0_K olan sütun matristir. $A \cdot e_i$ çarpımı A 'nın i . sütununu verir:

$$T(e_i) = A \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ni}e_n$$

Demek ki $T(e_i)$ 'nin standart tabandaki koordinatları A 'nın i . sütunudur. $[T]_e$ 'nin i . sütunu tam olarak bu koordinatlardan kurulduğuna göre

$$[T]_e = A$$

■

i Not

Bu, gösterimin tutarlı olduğunu söyler: bir matrisin belirlediği operatörün standart tabandaki matrisi yine o matristir. Başka bir taban seçildiğinde ise farklı bir matris çıkar — [taban değiştirme bölümünde](#) ikisinin nasıl bağlandığını göreceğiz.

10.4 Temel Teorem

Matris gösterimi bir isimlendirme değil, bir hesap aracıdır: operatörü uygulamak, matrisle çarpmaya dönüşür.

Teorem 10.1 (Operatörün Uygulanması Matrisle Çarpımdır). V sonlu boyutlu, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $T \in A(V)$ olsun. Bu durumda

$$\text{her } v \in V \text{ için } [T]_e \cdot [v]_e = [T(v)]_e$$

İspat.

$i = 1, \dots, n$ için

$$T(e_i) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \dots + a_{in}e_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$$

olsun; tanım gereği $[T]_e, (a_{ij})$ tablosunun devriğidir.

$v \in V$ ve $k_i \in K$ olmak üzere

$$v = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n = \sum_{i=1}^n k_ie_i$$

olsun; o hâlde $[v]_e = (k_1, k_2, \dots, k_n)^t$ 'dir. T lineer olduğundan

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^n k_ie_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n k_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}k_i\right) e_j = \sum_{j=1}^n (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n) e_j \end{aligned}$$

Öyleyse $T(v)$ 'nin e tabanına göre koordinat vektörü

$$[T(v)]_e = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{n1}k_n \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{n2}k_n \\ \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{nn}k_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

Öte yandan matris çarpımını yapalım:

$$\begin{aligned} [T]_e \cdot [v]_e &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{n1}k_n \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{n2}k_n \\ \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{nn}k_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İki sütun matris aynı olduğundan

$$[T]_e \cdot [v]_e = [T(v)]_e$$

■

Örnek 10.3 (Teoremin Sayısal Doğrulaması). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olsun. $v = (5, 7)$ için teoremi doğrulayınız.

Çözüm.

Koordinat vektörleri. v 'yi f cinsinden yazalım: $(5, 7) = x(1, 1) + y(-1, 0) = (x - y, x)$ 'ten $x = 7$, $y = 2$ bulunur:

$$v = (5, 7) = 7f_1 + 2f_2 \quad \Rightarrow \quad [v]_f = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$T(v)$ 'yi hesaplayıp onu da f cinsinden yazalım:

$$T(v) = T(5, 7) = (20 - 14, 10 + 7) = (6, 17)$$

$(6, 17) = x(1, 1) + y(-1, 0)$ 'dan $x = 17$, $y = 11$:

$$T(v) = 17f_1 + 11f_2 \quad \Rightarrow \quad [T(v)]_f = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Çarpım. $[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ olduğunu yukarıda hesaplamıştık:

$$[T]_f \cdot [v]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 - 4 \\ 7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix} = [T(v)]_f$$

■

10.5 Çözümlü Örnekler

Örnek 10.4 (Standart Tabanda Matris Gösterimleri). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde aşağıdaki operatörlerin $e = \{e_1, e_2\}$ tabanına göre matris gösterimlerini bulunuz.

- $T(x, y) = (2y, 3x - y)$
- $T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$

Çözüm.

(i)

$$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 3) = 0e_1 + 3e_2$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (2, -1) = 2e_1 - e_2$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T(e_1) = T(1, 0) = (3, 1) = 3e_1 + e_2$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (-4, 5) = -4e_1 + 5e_2$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Her iki durumda da matris, operatörün katsayı tablosunun kendisidir; standart tabanda bu hep böyledir.

■

Örnek 10.5 (Standart Olmayan Bir Tabanda). $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (2, 5)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanıdır. Yukarıdaki iki operatörün f tabanına göre matris gösterimlerini bulunuz.

Çözüm.

Her iki şıkta da (a, b) 'yi f cinsinden yazmamız gerekecek:

$$(a, b) = x(1, 3) + y(2, 5) = (x + 2y, 3x + 5y)$$

$$\Rightarrow x + 2y = a, 3x + 5y = b$$

Birinci denklemi 3 ile çarpıp ikinciden çıkaralım: $y = 3a - b$, buradan $x = a - 2y = 2b - 5a$. Yani

$$(a, b) = (2b - 5a)f_1 + (3a - b)f_2 \quad (\star)$$

(i) $T(x, y) = (2y, 3x - y)$.

$$T(f_1) = T(1, 3) = (6, 0)$$

($\star$)'da $a = 6$, $b = 0$: katsayılar $2 \cdot 0 - 5 \cdot 6 = -30$ ve $3 \cdot 6 - 0 = 18$, yani $T(f_1) = -30f_1 + 18f_2$.

$$T(f_2) = T(2, 5) = (10, 1)$$

($\star$)'da $a = 10$, $b = 1$: katsayılar $2 - 50 = -48$ ve $30 - 1 = 29$, yani $T(f_2) = -48f_1 + 29f_2$.

$$[T]_f = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

(ii) $T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$.

$$T(f_1) = T(1, 3) = (3 - 12, 1 + 15) = (-9, 16)$$

($\star$): katsayılar $32 + 45 = 77$ ve $-27 - 16 = -43$, yani $T(f_1) = 77f_1 - 43f_2$.

$$T(f_2) = T(2, 5) = (6 - 20, 2 + 25) = (-14, 27)$$

($\star$): katsayılar $54 + 70 = 124$ ve $-42 - 27 = -69$, yani $T(f_2) = 124f_1 - 69f_2$.

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{pmatrix}$$

■

⚠ Matris tabana bağlıdır

Aynı operatörün iki farklı tabandaki matrisleri bambaşka görünebilir — yukarıdaki $T(x, y) = (2y, 3x - y)$ operatörü standart tabanda $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f tabanında ise $\begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$ matrisiyle temsil ediliyor. Matris gösterimini yazarken alt indiste hangi tabanın kullanıldığını belirtmek bu yüzden şart.

10.6 İki Uzay Arasında: Dikdörtgen Matris Gösterimi

Şimdiye kadar bir uzayı kendi içine götüren operatörleri ele aldık; bu durumda tek bir taban seçmek yetiyordu. $T : V \rightarrow U$ gibi **iki farklı uzay** arasındaki bir dönüşüm için ise iki taban seçilir: biri V 'de, biri U 'da.

Tanım 10.2 (İki Tabana Göre Matris Gösterimi). V ve U , K üzerinde sırasıyla m ve n boyutlu iki vektör uzayı; $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ V 'nin, $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ ise U 'nun bir tabanı ve $T : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm olsun. j . sütunu $[T(v_j)]_C$ olan

$$[T]_{C,B} := \left([T(v_1)]_C \mid [T(v_2)]_C \mid \dots \mid [T(v_m)]_C \right)_{(n,m)}$$

K -matrisine, T 'nin B ve C tabanlarına göre **matris gösterimi** denir.

İ Not

Boyutlara dikkat: $[T]_{C,B}$ matrisi (n, m) tipindedir – satır sayısı **varış** uzayının, sütun sayısı **çıkış** uzayının boyutudur. $V = U$ ve $B = C = e$ alınırsa $[T]_{e,e} = [T]_e$ olur ve önceki tanıma dönülür.

Temel teoremin karşılığı aynen geçerlidir; ispatı da operatör durumundakiyle sözcüğü sözcüğüne aynıdır:

$$\text{her } v \in V \text{ için } [T]_{C,B} \cdot [v]_B = [T(v)]_C$$

Örnek 10.6 (Bir Dikdörtgen Matris Gösterimi). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y)$$

biçiminde tanımlanıyor. $B, \mathbb{R}^3$ 'ün standart tabanı ve $C = \{u_1, u_2\}$ ile $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (1, 1)$ olmak üzere $[T]_{C,B}$ matrisini bulunuz ve $v = (1, 1, 1)$ için temel eşitliği doğrulayınız.

Çözüm.

Sütunlar. Önce $\mathbb{R}^2$ 'de C tabanına göre koordinat almayı hazırlayalım: $(p, q) = a(1, 0) + b(1, 1) = (a + b, b)$ olduğundan $b = q$ ve $a = p - q$ 'dur.

$$T(1, 0, 0) = (1, 3) \Rightarrow b = 3, a = 1 - 3 = -2$$

$$\Rightarrow [T(1, 0, 0)]_C = (-2, 3)^t$$

$$T(0, 1, 0) = (2, -1) \Rightarrow b = -1, a = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow [T(0, 1, 0)]_C = (3, -1)^t$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 0) \Rightarrow b = 0, a = -1$$

$$\Rightarrow [T(0, 0, 1)]_C = (-1, 0)^t$$

Bu üç sütunu yan yana koyalım:

$$[T]_{C,B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

Doğrulama. $v = (1, 1, 1)$ için B standart taban olduğundan $[v]_B = (1, 1, 1)^t$ 'dir:

$$[T]_{C,B} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 - 1 \\ 3 - 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Öte yandan $T(1, 1, 1) = (1 + 2 - 1, 3 - 1) = (2, 2)$ olup bunun C koordinatları $b = 2$, $a = 2 - 2 = 0$, yani $(0, 2)^t$ 'dir:

$$[T(v)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = [T]_{C,B} \cdot [v]_B \checkmark$$

■

🔗 Taban değişirse

Burada kullanılan **geçiş matrisi** kavramı **taban değiştirme** bölümünde tanımlanacak, aşağıdaki formül de **iki uzay arasında matris gösterimi** bölümünde ispatlanacak; şimdilik sonucu ileriye dönük bir not olarak kaydediyoruz. V 'de B 'den B' 'ne geçiş matrisi P , U 'da C 'den C' 'ne geçiş matrisi Q olmak üzere

$$[T]_{C',B'} = Q^{-1} \cdot [T]_{C,B} \cdot P$$

Operatör durumunda $V = U$, $B = C$ ve $B' = C'$ olduğundan $Q = P$ çıkar ve bu formül tanınık $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ benzerlik bağıntısına indirgenir.

i Not

Dönüşümlerin uzayı bölümünde $\dim \text{Hom}(V, U) = m \cdot n$ olduğunu ispatlarken kurduğumuz F_{ij} dönüşümleri, bu gösterimde tam olarak tek bir girdisi 1_K , kalanı 0_K olan matrislere karşılık gelir. Boyut sayımının neden $m \cdot n$ çıktığı böylece somutlaşır: (n, m) tipinde bir matrisin $m \cdot n$ tane girdisi vardır.

10.7 Alıştırma

Alıştırma 10.1 (Matris Gösterimi Hesapları).

1. $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir T operatörü şöyle tanımlansın:

$$T(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$$

Bu operatörün standart tabandaki matrisini bulunuz.

2. Standart tabanı kullanarak aşağıdaki operatörlerin matrislerini yazınız:

- $T(x, y, z) = (2x - 3y + 4z, 5x - y + 2z, 4x + 7y)$
 - $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$
3. $\mathbb{R}^3$ üzerinde $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ ve $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 0, 0)$ olsun. $[T]_f$ matrisini bulunuz ve $v = (a, b, c)$ için $[T]_f \cdot [v]_f = [T(v)]_f$ eşitliğini doğrulayınız.

Çözüm.

1. Standart taban vektörlerinin görüntüleri:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (a_1, b_1, c_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (a_2, b_2, c_2) = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (a_3, b_3, c_3) = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$$

Sütunları bu koordinatlardan kurunca

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

yani katsayı tablosunun kendisi çıkar.

2. Birinci şıktan doğrudan okunur:

$$\text{a. } [T]_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b. } [T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Önce (a, b, c) 'nin f tabanındaki koordinatlarını bulalım:

$$(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0) = (x + y + z, x + y, x)$$

Buradan $x = c$, $x + y = b$ yani $y = b - c$, ve $x + y + z = a$ yani $z = a - b$:

$$(a, b, c) = c f_1 + (b - c) f_2 + (a - b) f_3 \quad (\star \star)$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini yazalım:

$$T(f_1) = T(1, 1, 1) = (2 + 1, 1 - 4, 3) = (3, -3, 3)$$

$(\star \star)$: $c = 3$, $b - c = -3 - 3 = -6$, $a - b = 3 - (-3) = 6$, yani $T(f_1) = 3f_1 - 6f_2 + 6f_3$.

$$T(f_2) = T(1, 1, 0) = (2, -3, 3) \Rightarrow T(f_2) = 3f_1 - 6f_2 + 5f_3$$

$$T(f_3) = T(1, 0, 0) = (0, 1, 3) \Rightarrow T(f_3) = 3f_1 - 2f_2 - f_3$$

Sütunları kurarak

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Doğrulama. $v = (a, b, c)$ için $(\star \star)$ gereği $[v]_f = (c, b - c, a - b)^t$ 'dir. Öte yandan

$$T(v) = (2b + c, a - 4b, 3a)$$

olup $(\star \star)$ bu vektöre uygulanırsa katsayılar sırayla $3a$, $(a - 4b) - 3a = -2a - 4b$ ve $(2b + c) - (a - 4b) = -a + 6b + c$ çıkar:

$$[T(v)]_f = \begin{pmatrix} 3a \\ -2a - 4b \\ -a + 6b + c \end{pmatrix}$$

Çarpımı yapalım:

$$\begin{aligned} [T]_f \cdot [v]_f &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b - c \\ a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c + 3(b - c) + 3(a - b) \\ -6c - 6(b - c) - 2(a - b) \\ 6c + 5(b - c) - (a - b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a \\ -2a - 4b \\ -a + 6b + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İki sütun aynı olduğundan eşitlik doğrulanmış olur.

■

11. Operatör Cebri ile Matris Cebri

Bir taban seçtiğimizde her operatöre bir kare matris karşılık geliyordu. Bu karşılık gelme yalnızca bir etiketleme değil: operatörlerle yapılan her işlem, matrislerle yapılan karşılık gelen işleme dönüşür. Bu bölümde bunu üç eşitlikle kesinleştiriyoruz.

11.1 Toplama ve Skalerle Çarpma

Teorem 11.1 (A(V) ile Matris Uzayının İzomorfluluğu). V , bir K komutatif cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı olsun. $A(V)$ ile V üzerindeki lineer operatörlerin K üzerinde oluşturdıkları cebri, $\mathcal{A}$ ile de n . mertebeden kare K -matrislerin K üzerinde oluşturdıkları cebri gösterelim. Bu durumda

$$A(V) \rightarrow \mathcal{A}, \quad T \mapsto [T]_e$$

dönüşümü $A(V)$ 'den $\mathcal{A}$ üzerine bir **vektör uzayı izomorfizmidir**; yani bire bir ve örtendir, ayrıca her $S, T \in A(V)$ ve $k \in K$ için

$$[S + T]_e = [S]_e + [T]_e \quad \text{ve} \quad [kT]_e = k [T]_e$$

İspat.

Dönüşüm bire birdir. Farklı operatörlerin matrisleri farklıdır: $S \neq T$ ise V 'nin bir taban vektöründe $S(e_i) \neq T(e_i)$ olmalıdır (aksi hâlde **tabanda belirlenme** gereği $S = T$ olurdu), dolayısıyla matrislerin i . sütunları farklıdır ve $[S]_e \neq [T]_e$ 'dir.

Dönüşüm örtendir. $M \in \mathcal{A}$ verilsin ve $(m_{ij}) = M^t$ olsun.

$$F(e_i) = \sum_{j=1}^n m_{ij} e_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

koşuluyla belirlenen bir $F : V \rightarrow V$ lineer operatörü, **tabanda belirlenme teoremi gereği vardır ve tektir**; tanım gereği $[F]_e = M$ 'dir.

İşlemlerle uyum. $S, T \in A(V)$ için

$$S(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \quad T(e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

olsun; $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ diyelim. O hâlde tanım gereği $[S]_e = A^t$ ve $[T]_e = B^t$ 'dir. Toplam için:

$$(S + T)(e_i) = S(e_i) + T(e_i) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) e_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

Katsayı tablosu $(a_{ij} + b_{ij}) = A + B$ olduğundan

$$[S + T]_e = (A + B)^t = A^t + B^t = [S]_e + [T]_e$$

Skalerle çarpım için, $k \in K$ olmak üzere:

$$(kT)(e_i) = kT(e_i) = k \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j = \sum_{j=1}^n (kb_{ij}) e_j$$

Katsayı tablosu $(kb_{ij}) = kB$ olduğundan

$$[kT]_e = (kB)^t = k B^t = k [T]_e$$

■

11.2 Çarpma

Teorem 11.2 (Bileşkenin Matrisi Matrislerin Çarpımıdır). V sonlu boyutlu, e bir tabanı olsun. Her $S, T \in A(V)$ için

$$[ST]_e = [S]_e \cdot [T]_e$$

İspat.

$T(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ ve $S(e_j) = \sum_{k=1}^n b_{jk} e_k$ olsun; $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ diyelim. Tanım gereği $[T]_e = A^t$ ve $[S]_e = B^t$ 'dir.

$ST = S \circ T$ operatörünün taban vektörlerindeki değerlerini hesaplayalım; S lineer olduğundan

$$\begin{aligned} (ST)(e_i) &= S(T(e_i)) = S\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} S(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n b_{jk} e_k\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\right) e_k \end{aligned}$$

Matris çarpımının tanımı gereği $A \cdot B = (c_{ik})$ matrisinin girdileri

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

olduğundan, ST 'nin katsayı tablosu tam olarak $A \cdot B$ 'dir. Öyleyse **transpozenin çarpımla uyumu** kullanılarak

$$[ST]_e = (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t = [S]_e \cdot [T]_e$$

■

💡 Neden devrik alınıyor?

$[T]_e$ 'yi katsayı tablosunun devriği olarak tanımlamamızın nedeni tam olarak bu teoremdir. Devrik alınmasaydı $(A \cdot B)^t = B^t A^t$ kuralı yüzünden çarpımların sırası ters dönerdi; bu tanımla ise bileşkenin sırası matris çarpımının sırasıyla birebir örtüşür.

Üç eşitliği bir araya getirince şu sonuç çıkar: **$A(V)$ ile n . mertebeden kare matrisler cebri, bir taban seçimiyle aynı yapıdır.** Operatörlerle yapılan bütün hesaplar matrislerle, matrislerle yapılan bütün hesaplar operatörlerle yürütülebilir.

📖 Not

Bu izomorfizm, **operatör cebri**nde karşılaştığımız tuhaflıkların matrislerdekiyle aynı olmasını açıklar: matris çarpımının komutatif olmaması ve sıfır bölünlerinin bulunması ile operatör çarpımınıninkiler aynı olgunun iki yüzüdür. Boyut sayımı da tutar: $\dim A(V) = n^2$ ve n . mertebeden kare matrislerin uzayının boyutu da n^2 'dir.

11.3 İki Boyutlu Durumda Açık Hesap

Örnek 11.1 (dim $V = 2$ İçin Üç Eşitliğin Doğrulanması). V, K üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayı ve $e = \{e_1, e_2\}$ bir tabanı olsun. $T, S \in A(V)$ operatörleri

$$T(e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad T(e_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

$$S(e_1) = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad S(e_2) = d_1 e_1 + d_2 e_2$$

ile verilsin. $[T + S]_e$, $[kT]_e$ ve $[ST]_e$ matrislerini hesaplayınız.

Çözüm.

Tanım gereği

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad [S]_e = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Toplam.

$$(T + S)(e_1) = T(e_1) + S(e_1) = (a_1 + c_1)e_1 + (a_2 + c_2)e_2$$

$$(T + S)(e_2) = T(e_2) + S(e_2) = (b_1 + d_1)e_1 + (b_2 + d_2)e_2$$

$$\begin{aligned} [T + S]_e &= \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + d_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = [T]_e + [S]_e \end{aligned}$$

Skalerle çarpım. $k \in K$ için

$$(kT)(e_1) = (ka_1)e_1 + (ka_2)e_2, \quad (kT)(e_2) = (kb_1)e_1 + (kb_2)e_2$$

$$[kT]_e = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = k [T]_e$$

Çarpım. S lineer olduğundan

$$\begin{aligned} (ST)(e_1) &= S(T(e_1)) = S(a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1 S(e_1) + a_2 S(e_2) \\ &= a_1(c_1 e_1 + c_2 e_2) + a_2(d_1 e_1 + d_2 e_2) \\ &= (a_1 c_1 + a_2 d_1)e_1 + (a_1 c_2 + a_2 d_2)e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ST)(e_2) &= S(T(e_2)) = S(b_1 e_1 + b_2 e_2) \\ &= (b_1 c_1 + b_2 d_1)e_1 + (b_1 c_2 + b_2 d_2)e_2 \end{aligned}$$

Sütunları kurarak

$$\begin{aligned} [ST]_e &= \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 & b_1 c_1 + b_2 d_1 \\ a_1 c_2 + a_2 d_2 & b_1 c_2 + b_2 d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = [S]_e \cdot [T]_e \end{aligned}$$

■

11.4 Alıştırma

Alıştırma 11.1 (İzomorfizmin Kullanımı).

- $\mathbb{R}^2$ üzerinde $S(x, y) = (y, x)$ ve $T(x, y) = (0, x)$ operatörlerinin standart tabandaki matrislerini bulunuz; $[ST]_e$ ile $[TS]_e$ 'yi hem doğrudan hem de matris çarpımıyla hesaplayıp karşılaştırınız.
- $T \in A(V)$ tersinir ve e bir taban olsun. $[T^{-1}]_e = ([T]_e)^{-1}$ olduğunu gösteriniz.
- $\dim V = n$ olsun. Bir $T \in A(V)$ operatörünün tersinir olması için gerek ve yeter koşulun $[T]_e$ matrisinin regüler olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. Standart tabanda

$$S(e_1) = S(1, 0) = (0, 1) = e_2, \quad S(e_2) = S(0, 1) = (1, 0) = e_1$$

$$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1) = e_2, \quad T(e_2) = T(0, 1) = (0, 0)$$

olduğundan

$$[S]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Doğrudan hesapla $(ST)(x, y) = S(0, x) = (x, 0)$ ve $(TS)(x, y) = T(y, x) = (0, y)$ bulunur; bunların matrisleri

$$[ST]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [TS]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matris çarpımıyla da aynı sonuçlar çıkar:

$$[S]_e [T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_e [S]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

İki matris farklı olduğundan $ST \neq TS$ 'dir.

2. Önce birim operatörün matrisini bulalım: $I(e_i) = e_i$ olduğundan $[I]_e = I_n$ 'dir. Şimdi $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ eşitliklerinin matrisini alalım; çarpım teoremi gereği

$$[T]_e \cdot [T^{-1}]_e = [TT^{-1}]_e = [I]_e = I_n$$

$$[T^{-1}]_e \cdot [T]_e = [T^{-1}T]_e = [I]_e = I_n$$

Bu, $[T^{-1}]_e$ matrisinin $[T]_e$ 'nin tersi olduğunu söyler:

$$[T^{-1}]_e = ([T]_e)^{-1}$$

3. Gereklik. T tersinir ise (2) gereği $[T]_e$ 'nin tersi vardır, yani $[T]_e$ regülerdir.

Yeterlik. $[T]_e$ regüler olsun; $[T]_e \cdot M = M \cdot [T]_e = I_n$ olacak bir M kare matrisi vardır. İzomorfizm örten olduğundan $[F]_e = M$ olacak bir $F \in A(V)$ bulunur. O hâlde

$$[TF]_e = [T]_e \cdot [F]_e = I_n = [I]_e, \quad [FT]_e = [F]_e \cdot [T]_e = I_n = [I]_e$$

İzomorfizm bire bir olduğundan $TF = I$ ve $FT = I$ 'dir; yani $F = T^{-1}$ ve T tersinirdir.

■

12. Taban Değiştirme

Bir operatörün matrisi seçilen tabana bağlıdır. Peki tabanı değiştirdiğimizde matris nasıl değişir? Bu bölümün cevabı tek bir formüldür ve lineer cebirin en çok kullanılan bağıntılarından biridir: uygun bir matrisle sağdan ve tersiyle soldan çarpmak.

12.1 Geçiş Matrisi

Tanım 12.1 (Geçiş Matrisi). V , bir K komutatif cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı; $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{f_1, \dots, f_n\}$ ise V 'nin iki tabanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ &\vdots \\ f_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

biçiminde tek türlü yazılır ($a_{ij} \in K$). Bu durumda

$$P := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

kare K -matrisine, $\{e_1, \dots, e_n\}$ tabanından $\{f_1, \dots, f_n\}$ tabanına **geçiş matrisi** denir.

🔗 Kural aynı

Operatör matrisinde olduğu gibi burada da devrik alınıyor; sonuç yine sütunlarla ifade edilir:

P 'nin j . sütunu, f_j vektörünün e tabanındaki koordinatlarıdır.

Geçiş matrisinin tersi her zaman vardır. Gerçekten $f_1, \dots, f_n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan, katsayı tablosu P^t satır kanonik şekli birim matris olan bir matristir; **regülerlik ölçütü** gereği P^t regülerdir, dolayısıyla P de regülerdir. Ayrıca:

📌 Not

P^{-1} matrisi, $\{f_1, \dots, f_n\}$ tabanından $\{e_1, \dots, e_n\}$ tabanına geçiş matrisidir. İki taban arasındaki geçiş, hangi yönde okunursa okunsun aynı matris çiftini kullanır.

Örnek 12.1 (Düzlemde İki Yönlü Geçiş). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ olmak üzere $e = \{e_1, e_2\}$ ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin iki tabanıdır. Her iki yöndeki geçiş matrislerini bulunuz.

Çözüm.
 e' 'den f' 'ye.

$$f_1 = (1, 1) = e_1 + e_2, \quad f_2 = (-1, 0) = -e_1 + 0e_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f 'den e 'ye.

$$e_1 = (1, 0) = 0(1, 1) - (-1, 0) = 0f_1 - f_2$$

$$e_2 = (0, 1) = (1, 1) + (-1, 0) = f_1 + f_2$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Çarpım.

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

olup Q , P 'nin tersidir.

■

12.2 Koordinatların Değişimi

Teorem 12.1 (Koordinat Vektörlerinin Dönüşümü). V n boyutlu; $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ve $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ iki tabanı; P ise e tabanından f tabanına geçiş matrisi olsun. Bu durumda

$$\text{her } v \in V \text{ için } P \cdot [v]_f = [v]_e$$

başka bir ifadeyle

$$[v]_f = P^{-1} \cdot [v]_e$$

İspat.

$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ ($i = 1, \dots, n$) olsun; tanım gereği P , (a_{ij}) tablosunun devriğidir. $v \in V$ ve $k_i \in K$ olmak üzere

$$v = k_1f_1 + k_2f_2 + \dots + k_nf_n = \sum_{i=1}^n k_if_i$$

olsun; o hâlde $[v]_f = (k_1, \dots, k_n)^t$ 'dir. Şimdi v 'yi e tabanı cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n k_if_i = \sum_{i=1}^n k_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}k_i \right) e_j \\ &= \sum_{j=1}^n (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n) e_j \end{aligned}$$

Öyleyse

$$[v]_e = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{n1}k_n \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{n2}k_n \\ \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{nn}k_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

Bu sütun matris, tam olarak $P \cdot [v]_f$ çarpımıdır:

$$P \cdot [v]_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = [v]_e$$

P regüler olduğundan her iki tarafı soldan P^{-1} ile çarparak $[v]_f = P^{-1}[v]_e$ elde edilir.

■

Örnek 12.2 (Koordinat Dönüşümünün Doğrulanması). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ ve $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Yukarıdaki teoremi doğrulayınız.

Çözüm.

Koordinatlar. $v = (a, b) = a e_1 + b e_2$ olduğundan $[v]_e = (a, b)^t$ dir. f tabanı için

$$(a, b) = x(1, 1) + y(-1, 0) = (x - y, x) \Rightarrow x = b, y = b - a$$

yani $v = b f_1 + (b - a) f_2$ ve $[v]_f = (b, b - a)^t$ dir.

Doğrulama. Bir önceki örnekte $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu:

$$P \cdot [v]_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - (b - a) \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = [v]_e$$

$$P^{-1} \cdot [v]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b - a \end{pmatrix} = [v]_f$$

■

12.3 Operatör Matrisinin Değişimi

Teorem 12.2 (Taban Değişimi Altında Operatör Matrisi). V n boyutlu; e ve f iki tabanı; P ise e tabanından f tabanına geçiş matrisi olsun. Bu durumda V üzerindeki her T lineer operatörü için

$$[T]_f = P^{-1} \cdot [T]_e \cdot P$$

İspat.

Her $v \in V$ için aşağıdaki zinciri kuralım:

$$\begin{aligned} P^{-1} [T]_e P [v]_f &= P^{-1} [T]_e [v]_e \\ &= P^{-1} [T(v)]_e \\ &= [T(v)]_f \\ &= [T]_f [v]_f \end{aligned}$$

Birinci ve üçüncü adımda koordinat dönüşümü ($P[v]_f = [v]_e$ ile $P^{-1}[w]_e = [w]_f$), ikinci ve dördüncü adımda ise “operatörün uygulanması matrisle çarpımdır” teoremi kullanıldı.

Demek ki her $v \in V$ için

$$(P^{-1} [T]_e P) \cdot [v]_f = [T]_f \cdot [v]_f$$

$v \mapsto [v]_f$ dönüşümü V ’den K^n üzerine örten olduğundan, bu eşitlik her $X \in K^n$ sütun matrisi için geçerlidir:

$$(P^{-1} [T]_e P) \cdot X = [T]_f \cdot X$$

Burada X olarak sırayla K^n ’in standart taban sütunları $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ alınırsa (bunlar V ’deki e tabanıyla karıştırılmamalıdır), iki matrisin karşılıklı sütunlarının aynı olduğu görülür. Öyleyse

$$P^{-1} \cdot [T]_e \cdot P = [T]_f$$

■

💡 Hesap pratiği

Bu bölümdeki iki formülün — koordinat dönüşümü ve $P^{-1}[T]_e P$ bağıntısı — hesap pratiği, geçiş matrisini kısa yoldan bulma yöntemi ve ikisi de standart olmayan tabanlarla kurulmuş sorular bir sonraki **Problemler** bölümünde toplanmıştır.

Örnek 12.3 (Formülün Sayısal Doğrulaması). $\mathbb{R}^2$ üzerinde $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ operatörü veriliyor. $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olmak üzere $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

Standart tabandaki matris:

$$T(e_1) = T(1, 0) = (4, 2) = 4e_1 + 2e_2$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (-2, 1) = -2e_1 + e_2$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

P ve P^{-1} 'i yukarıdan alarak çarpımı yapalım:

$$\begin{aligned} P^{-1}[T]_e P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bu, aynı operatörün f tabanındaki matrisi olarak doğrudan hesapladığımız

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisiyle aynıdır.

■

12.4 Tabanı Neden Değiştiririz?

Buraya kadar taban değişiminin *nasıl* yapıldığını gördük. Peki neden yapılır? Cevap tek bir cümlede: **doğru taban, operatörün matrisini basitleştirir.**

Örnek 12.4 (Yansımanın Köşegen Matrisi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ operatörü, düzlemin $y = x$ doğrusuna göre yansımasıdır. Bu operatörün standart tabandaki ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$ tabanındaki matrislerini karşılaştırınız.

Çözüm.

Standart tabanda. $T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1) = e_2$ ve $T(e_2) = T(0, 1) = (1, 0) = e_1$ olduğundan

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f tabanında. $f_1 = (1, 1)$ yansıma doğrusunun üzerindedir, $f_2 = (1, -1)$ ise doğruya diktir:

$$\begin{aligned}
T(f_1) &= T(1, 1) = (1, 1) = f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 \\
T(f_2) &= T(1, -1) = (-1, 1) = -f_2 = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 \\
[T]_f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Benzerlik bağıntısıyla kontrol. e standart taban olduğundan P 'nin sütunları doğrudan f_1 ve f_2 'dir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tersini blok indirgemeye bulalım:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&P^{-1}[T]_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&(\ P^{-1}[T]_e \) \ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [T]_f \quad \checkmark
\end{aligned}$$

■

💡 Köşegen matrisin anlamı

$[T]_f$ **köşegen** çıktı; bu, T 'nin f_1 yönünü olduğu gibi bıraktığını (1 katı), f_2 yönünü ise ters çevirdiğini (-1 katı) doğrudan okutuyor. Bir operatörü köşegen yapan bir taban aramak, lineer cebirin en verimli sorularından biridir; sistematik cevabı **özdeğer ve özvektör** kuramıdır.

12.5 Alıştırma

Alıştırma 12.1 (Taban Değiştirme Hesapları). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ve $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (2, 5)$ olmak üzere e ve f , $\mathbb{R}^2$ 'nin iki tabanıdır.

- e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi ve f 'den e 'ye geçiş matrisi Q 'yu bulup $Q = P^{-1}$ olduğunu gösteriniz.
- Her $v \in \mathbb{R}^2$ için $[v]_f = P^{-1}[v]_e$ olduğunu doğrulayınız.
- $T(x, y) = (2y, 3x - y)$ operatörü için $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

1. Geçiş matrisleri:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (1, 3) = e_1 + 3e_2, & f_2 &= (2, 5) = 2e_1 + 5e_2 \\
\Rightarrow P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ters yön için $(a, b) = xf_1 + yf_2$ denklemini çözelim: $x + 2y = a$ ve $3x + 5y = b$ 'den

$$x = 2b - 5a, \quad y = 3a - b \quad (\star)$$

$(a, b) = (1, 0)$ için $x = -5, y = 3$; $(a, b) = (0, 1)$ için $x = 2, y = -1$:

$$e_1 = -5f_1 + 3f_2, \quad e_2 = 2f_1 - f_2 \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Çarpalım:

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & 2-2 \\ -15+15 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Demek ki $Q = P^{-1}$ 'dir.

2. $v = (a, b)$ için $[v]_e = (a, b)^t$ 'dir. $(\star)$ gereği $[v]_f = (2b - 5a, 3a - b)^t$ 'dir. Öte yandan

$$P^{-1}[v]_e = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a + 2b \\ 3a - b \end{pmatrix} = [v]_f$$

3. Standart tabanda $T(e_1) = (0, 3)$ ve $T(e_2) = (2, -1)$ olduğundan

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

f tabanında ise $T(f_1) = T(1, 3) = (6, 0)$ ve $T(f_2) = T(2, 5) = (10, 1)$ olup $(\star)$ ile

$$T(f_1) = -30f_1 + 18f_2, \quad T(f_2) = -48f_1 + 29f_2$$

$$\Rightarrow [T]_f = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

Şimdi formülü sınavalım:

$$\begin{aligned} P^{-1}[T]_e P &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix} = [T]_f \end{aligned}$$

■

Alıştırma 12.2 (Ters Yönde Sorular).

1. $\mathbb{R}^2$ 'de e standart taban olmak üzere, e 'den bir f tabanına geçiş matrisi $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ olarak veriliyor. f tabanını bulunuz.
2. $\{(1, 2), (2, 4)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanı mıdır? Bu küme için geçiş matrisi kurmaya çalışırsanız ne ters gider?

Çözüm.

1. e standart taban olduğunda geçiş matrisinin tanımı basitleşir: P 'nin j . sütunu, f_j 'nin standart tabandaki koordinatlarıdır — yani f_j 'nin kendisidir. Sütunları okuyalım:

$$f_1 = (2, 3), \quad f_2 = (1, 2)$$

Bunların gerçekten bir taban oluşturduğunu P 'nin regülerliğinden biliyoruz — bir geçiş matrisi tanım gereği regülerdir. Doğrudan da görülebilir: $x(2, 3) + y(1, 2) = (0, 0)$ denklemi $2x + y = 0$ ve $3x + 2y = 0$ verir; birinciden $y = -2x$, ikincide yerine konursa $3x - 4x = 0$, yani $x = 0$ ve $y = 0$ çıkar. İki vektör lineer bağımsız olduğundan ve $\mathbb{R}^2$ iki boyutlu olduğundan bir taban oluştururlar.

2. $(2, 4) = 2 \cdot (1, 2)$ olduğundan bu iki vektör lineer bağımlıdır; küme bir taban **değildir**.

Yine de sütunları bu vektörler olan matrisi kursaydık

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olurdu. M 'nin satır kanonik şekli birim matris olmadığından **regülerlik ölçütü** gereği M singülerdir ve tersi yoktur. Oysa geçiş matrisi tanım gereği regülerdir — nitekim P^{-1} 'in varlığı, koordinatları geri çevirebilmemizin tek güvencesiydi. Somut olarak: $(1, 2)$ ile $(2, 4)$ yalnızca $y = 2x$ doğrusunu gerdiğinden, bu doğrunun dışındaki hiçbir vektörün “koordinatları” yazılamaz; doğru üzerindeki vektörlerin ise koordinatları tek türlü belirli değildir.

■

13. Problemler

Buraya kadar lineer dönüşümleri, çekirdek ve görüntülerini, dönüşüm uzaylarını, operatör matrisini ve taban değiştirmeyi kurduk. Bu bölüm bir ara duraktır: yeni bir kavram tanıtmaz, öğrendiklerimizi çözümlü problemler üzerinde çalıştırır. Önce hesap tekniklerini adım adım geliştiriyor, sonra karma problemlere geçiyoruz.

i Not

Bazı kaynaklarda ve derslerde **taban** yerine **baz** denir; ikisi aynı şeydir. Bu notlarda “taban” terimini kullanacağız. Aynı şekilde “geçiş matrisi” yerine kimi kaynaklarda “baz değişim matrisi” ya da “taban dönüşüm matrisi” adları geçer.

13.1 Bir Vektörün Koordinatlarını Bulmak

Her şey buna dayanır: $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ bir taban ve v bir vektörse, $[v]_f$ 'yi bulmak

$$v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$$

denklemini $x_1, \dots, x_n$ için çözmektir. Bu bir lineer denklem sistemidir ve f bir taban olduğundan **tek çözümü** vardır.

💡 Üç adımda koordinat

1. $v = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ yazın ve bileşenleri eşitleyerek sistemi kurun.
2. Sistemi çözün – genişletilmiş matris $(f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n \ | \ v)$ 'yi satır kanonik şekle indirmek en hızlısıdır; burada f_j 'ler **sütun** olarak yazılır.
3. Çıkan $(x_1, \dots, x_n)$ değerlerini **sütun** olarak yazın: $[v]_f = (x_1, \dots, x_n)^t$.

Örnek 13.1 (Verilen Tabana Göre Koordinatlar). $\mathbb{R}^3$ 'te $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, 0, 1)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ bir tabandır. $v = (3, 5, 4)$ vektörünün f tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

$x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v &= x f_1 + y f_2 + z f_3 = x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) + z(1, 0, 1) \\ &= (x + z, x + y, y + z) \end{aligned}$$

Bileşenleri eşitleyelim:

$$x + z = 3, \quad x + y = 5, \quad y + z = 4$$

Üç denklemi toplarsak $2(x + y + z) = 12$, yani $x + y + z = 6$ bulunur. Şimdi her denklemi bu toplamdan çıkaralım:

$$y = 6 - 3 = 3, \quad z = 6 - 5 = 1, \quad x = 6 - 4 = 2$$

Kontrol. Bulunan katsayılar aranan vektörü verir ✓

$$2(1, 1, 0) + 3(0, 1, 1) + 1(1, 0, 1) = (2 + 1, 2 + 3, 3 + 1) = (3, 5, 4)$$

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

⚠ Sıraya dikkat

Koordinatlar taban vektörlerinin **sırasına** bağlıdır. Aynı kümeyi $\{f_3, f_1, f_2\}$ sırasıyla alsaydık aynı vektörün koordinatları $(1, 2, 3)^t$ olurdu. Bu yüzden taban bir küme değil, **sıralı** bir listedir; soruda verilen sırayı bozmayın.

13.2 Geçiş Matrisini Kısa Yoldan Hesaplamak

$\mathbb{R}^n$ 'de tabanlardan biri standart taban değilse, geçiş matrisini tanımdan hesaplamak her bir f_j için ayrı bir denklem sistemi çözmek demektir. Bunun yerine tek bir matris çarpımı yeter.

Teorem 13.1 (Geçiş Matrisinin Çarpanlara Ayrılması). $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ve $f = \{f_1, \dots, f_n\}$, K^n 'in iki tabanı olsun. M_e ile sütunları $e_1, \dots, e_n$ olan matrisi, M_f ile sütunları $f_1, \dots, f_n$ olan matrisi gösterelim. Bu durumda e tabanından f tabanına geçiş matrisi

$$P = M_e^{-1} \cdot M_f$$

İspat.

s ile K^n 'in standart tabanını gösterelim. Sütunları e_j olan M_e matrisi, tanım gereği s tabanından e tabanına geçiş matrisidir; benzer biçimde M_f de s 'den f 'ye geçiş matrisidir. **Koordinat vektörlerinin dönüşümü** teoremi gereği her $v \in K^n$ için

$$M_e \cdot [v]_e = [v]_s \quad \text{ve} \quad M_f \cdot [v]_f = [v]_s$$

Sağ taraflar aynı olduğundan

$$M_e \cdot [v]_e = M_f \cdot [v]_f$$

M_e regüler olduğundan her iki tarafı soldan M_e^{-1} ile çarpalım:

$$[v]_e = M_e^{-1} M_f \cdot [v]_f$$

Öte yandan aynı teorem, e 'den f 'ye geçiş matrisi P için $P \cdot [v]_f = [v]_e$ olduğunu söylüyordu. Demek ki her v için

$$(M_e^{-1} M_f) \cdot [v]_f = P \cdot [v]_f$$

$v \mapsto [v]_f$ dönüşümü K^n üzerine örten olduğundan bu eşitlik her sütun matris için geçerlidir; sırayla standart taban sütunları alınırsa iki matrisin bütün sütunlarının aynı olduğu görülür:

$$P = M_e^{-1} M_f$$

■

💡 Formülü akılda tutmak

Sağdaki matris **varılan** tabanı, soldaki tersi alınan matris **çıkılan** tabanı taşır. Özel olarak e standart taban ise $M_e = I_n$ olur ve $P = M_f$ çıkar – yani bilinen kural: **sütunlar hedef tabanın vektörleridir**.

Aynı fikir ikiden çok tabana da genişler.

Teorem 13.2 (Geçişlerin Zincirlenmesi). e, f ve g, V 'nin üç tabanı; P_1 e 'den f 'ye, P_2 ise f 'den g 'ye geçiş matrisi olsun. Bu durumda e 'den g 'ye geçiş matrisi

$$P_1 \cdot P_2$$

çarpımıdır.

İspat.

Koordinat vektörlerinin dönüşümü teoremi gereği her $v \in V$ için

$$P_1 \cdot [v]_f = [v]_e \quad \text{ve} \quad P_2 \cdot [v]_g = [v]_f$$

İkinciye birincide yerine koyalım:

$$(P_1 P_2) \cdot [v]_g = P_1 (P_2 [v]_g) = P_1 \cdot [v]_f = [v]_e$$

Demek ki $P_1 P_2$ matrisi, her $v \in V$ için g koordinatlarını e koordinatlarına çeviriyor. Burada v olarak sırayla $g_1, \dots, g_n$ alalım: $[g_j]_g$ tam olarak K^n 'in j . standart taban sütunu olduğundan sol taraf $P_1 P_2$ 'nin j . sütununu verir. Öyleyse $P_1 P_2$ 'nin j . sütunu $[g_j]_e$ 'dir; **geçiş matrisi tanımı** gereği bu, e 'den g 'ye geçiş matrisidir.

■

i Not

Burada $g = e$ alınırsa $P_1 P_2 = I_n$ çıkar, yani $P_2 = P_1^{-1}$: “ f 'den e 'ye geçiş matrisi P^{-1} 'dir” kuralı bu genel sonucun özel hâlidir. Zincir kuralı, üç veya daha çok taban içeren sorularda ara adımları tek tek hesaplamak yerine matrisleri çarpmayı sağlar.

Örnek 13.2 (İkisi de Standart Olmayan İki Taban). $\mathbb{R}^2$ 'de $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ ve $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (1, 4)$ olsun. e tabanından f tabanına geçiş matrisini bulunuz.

Çözüm.

Sütunları taban vektörleri olan matrisleri yazalım:

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

M_e^{-1} 'i Gauss-Jordan yöntemiyle, yani $(M_e \mid I_2)$ blok matrisini indirgeyerek bulalım:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \\ &\quad M_e^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} P &= M_e^{-1} M_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+6 & -3+8 \\ 2-3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kontrol. P 'nin sütunları f_j 'nin e tabanındaki koordinatları olmalıydı:

$$3e_1 - e_2 = 3(1, 2) - (2, 3) = (1, 3) = f_1 \checkmark$$

$$5e_1 - 2e_2 = 5(1, 2) - 2(2, 3) = (1, 4) = f_2 \checkmark$$

■

Örnek 13.3 (Gauss-Jordan ile Geçiş Matrisi). $\mathbb{R}^3$ 'te $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$ ve $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ olsun. e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi bulunuz.

Çözüm.

$P = M_e^{-1}M_f$ olduğuna göre, M_e^{-1} 'i ayrıca hesaplamak yerine $(M_e | M_f)$ blok matrisini satır kanonik şekle indirgeyebiliriz; sol blok I_3 olduğunda sağ blok P 'yi verir:

$$(M_e | M_f) \sim (I_3 | M_e^{-1}M_f) = (I_3 | P)$$

Matrisleri kuralım (sütunlar taban vektörleridir):

$$(M_e | M_f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sol blok zaten üst üçgen; yukarı doğru temizleyelim.

$R_2 \rightarrow R_2 - R_3$ ve $R_1 \rightarrow R_1 - R_3$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sol blok birim matris oldu; sağ blok aradığımız matristir:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. P 'nin birinci sütunu $(0, 0, 1)^t$, yani $f_1 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 = (1, 1, 1) \checkmark$. İkinci sütun $(-1, 0, 1)^t$, yani

$$-e_1 + e_3 = -(1, 0, 0) + (1, 1, 1) = (0, 1, 1) = f_2 \checkmark$$

Üçüncü sütun $(0, -1, 1)^t$, yani $-e_2 + e_3 = -(1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (0, 0, 1) = f_3 \checkmark$

■

13.3 Koordinatları Bir Tabandan Diğere Taşımak

En sık karşılaşılan soru tipi budur: bir vektörün bir tabandaki koordinatları verilir, başka bir tabandaki koordinatları istenir.

❓ Hangi formül?

P , e 'den f 'ye geçiş matrisi olmak üzere

$$P \cdot [v]_f = [v]_e \quad \Leftrightarrow \quad [v]_f = P^{-1} \cdot [v]_e$$

Yönü karıştırmamak için şu cümleyi hatırlayın: **P , f koordinatlarını e koordinatlarına çevirir.** (P 'nin sütunları f 'nin vektörlerinin e 'deki koordinatları olduğundan bu doğaldır.)

Örnek 13.4 (Koordinat Dönüşümü Sorusu). $\mathbb{R}^3$ 'te $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$ ve $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ tabanları veriliyor. Bir v vektörünün e tabanındaki koordinatları

$$[v]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

olduğuna göre $[v]_f$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Birinci yol: doğrudan hesap. Önce v 'yi bulalım:

$$\begin{aligned} v &= 2e_1 - e_2 + 3e_3 = 2(1, 0, 0) - (1, 1, 0) + 3(1, 1, 1) \\ &= (2 - 1 + 3, -1 + 3, 3) = (4, 2, 3) \end{aligned}$$

Şimdi v 'yi f cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} v &= af_1 + bf_2 + cf_3 = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1) \\ &= (a, a + b, a + b + c) \end{aligned}$$

Bileşenleri eşitleyelim: $a = 4$, $a + b = 2$ yani $b = -2$, $a + b + c = 3$ yani $c = 1$. Öyleyse

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

İkinci yol: geçiş matrisiyle. Bir önceki örnekte $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu. Formül $[v]_f = P^{-1}[v]_e$ olduğuna göre P^{-1} 'e ihtiyacımız var; onu da ters yöndeki geçiş matrisi olarak, yani $P^{-1} = M_f^{-1}M_e$ ile hesaplayabiliriz. Daha kısası, P^{-1} 'in sütunlarının e_j 'lerin f tabanındaki koordinatları olduğunu kullanmaktır:

$$e_1 = (1, 0, 0) = f_1 - f_2 \Rightarrow (1, -1, 0)^t$$

$$e_2 = (1, 1, 0) = f_1 - f_3 \Rightarrow (1, 0, -1)^t$$

$$e_3 = (1, 1, 1) = f_1 \Rightarrow (1, 0, 0)^t$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi çarpalım:

$$P^{-1}[v]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 + 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

İki yol aynı sonucu verdi.

Not

İkinci yol tek bir vektör için birincisinden uzun görünebilir; ama aynı taban çiftiyle **birden çok** vektör sorulduğunda P^{-1} bir kez hesaplanır ve her vektör için yalnızca bir matris çarpımı kalır. “Aşağıdaki vektörlerin f tabanındaki koordinatlarını bulunuz” biçiminde çok şıklı bir soruda ikinci yol çok daha hızlıdır.

Örnek 13.5 (Aynı Taban Çiftiyle İki Yönlü Soru). $\mathbb{R}^2$ 'de $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ ve $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (1, 4)$ tabanlarını yeniden ele alalım; e 'den f 'ye geçiş matrisinin

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

olduğunu yukarıda, ikisi de standart olmayan iki taban örneğinde hesaplamıştık.

- a) $[v]_f = (1, -1)^t$ olan v vektörünün e tabanındaki koordinatlarını ve v 'nin kendisini bulunuz.
b) $[w]_e = (4, -1)^t$ olan w vektörünün f tabanındaki koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

a) İstenen yön tam olarak P 'nin yönüdür: $P \cdot [v]_f = [v]_e$.

$$[v]_e = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektörün kendisi:

$$v = -2e_1 + e_2 = -2(1, 2) + (2, 3) = (0, -1)$$

Kontrol. f koordinatlarıyla da aynı vektör çıkmalı: $f_1 - f_2 = (1, 3) - (1, 4) = (0, -1) \checkmark$

b) Bu kez ters yön gerekiyor: $[w]_f = P^{-1}[w]_e$. Önce P^{-1} 'i blok indirgemeye bulalım:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Şimdi çarpalım:

$$[w]_f = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. İki taraftan da vektörü kuralım:

$$w = 4e_1 - e_2 = 4(1, 2) - (2, 3) = (2, 5)$$

$$3f_1 - f_2 = 3(1, 3) - (1, 4) = (2, 5) \checkmark$$

13.4 Operatörün Matrisini Yeni Tabanda Yazmak

Örnek 13.6 (Operatör Matrisinin Taban Değişimi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörü $T(x, y) = (2x + 3y, x - y)$ biçiminde tanımlanıyor. $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ olmak üzere $[T]_f$ matrisini

- a) benzerlik bağıntısıyla,
- b) doğrudan tanımdan

hesaplayıp karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Benzerlik bağıntısıyla. Standart taban e için katsayı tablosu doğrudan okunur:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e standart taban olduğundan e 'den f 'ye geçiş matrisi, sütunları f_j olan matristir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tersini yine blok indirgemeyle bulalım:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ çarpımını soldan sağa yapalım:

$$P^{-1}[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 6+1 \\ -2+1 & -3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}[T]_e) P = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+7 & 3+14 \\ -1-4 & -1-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$$

b) Doğrudan tanımdan. Taban vektörlerinin görüntülerini yine f cinsinden yazalım:

$$T(f_1) = T(1, 1) = (2 + 3, 1 - 1) = (5, 0)$$

$(5, 0) = a(1, 1) + b(1, 2) = (a + b, a + 2b)$ denkleminde $a + b = 5$ ve $a + 2b = 0$; çıkarma ile $b = -5$, buradan $a = 10$:

$$T(f_1) = 10f_1 - 5f_2$$

$$T(f_2) = T(1, 2) = (2 + 6, 1 - 2) = (8, -1)$$

$a + b = 8$, $a + 2b = -1$ denklemlerinden $b = -9$, $a = 17$:

$$T(f_2) = 17f_1 - 9f_2$$

Sütunları bu koordinatlardan kurarak

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$$

İki yol aynı matrisi verdi.

■

Örnek 13.7 (Ters Yön: Yeni Tabandan Standart Tabana). Bir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörünün $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ tabanındaki matrisi

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$$

olarak veriliyor. T 'nin standart tabandaki matrisini ve $T(x, y)$ kuralını bulunuz.

Çözüm.

$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ eşitliğini $[T]_e$ için çözelim: her iki tarafı soldan P , sağdan P^{-1} ile çarparsak

$$[T]_e = P [T]_f P^{-1}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ile:

$$\begin{aligned} P [T]_f &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 5 & 17 - 9 \\ 10 - 10 & 17 - 18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P [T]_f) P^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 8 & -5 + 8 \\ 0 + 1 & 0 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Standart tabandaki matris katsayı tablosunun kendisi olduğundan

$$T(x, y) = (2x + 3y, x - y)$$

■

⚠ En sık yapılan hata

$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ ile $[T]_e = P [T]_f P^{-1}$ formüllerini karıştırmak. Şu kontrolü yapın: P , e 'den f 'ye geçiş matrisidir ve $P \cdot [v]_f = [v]_e$ eşitliğini sağlar — yani P soldan uygulandığında **f koordinatlarını e 'ye taşır**. O hâlde f tabanındaki matrisi elde etmek için, önce P ile f 'den e 'ye geçilir, $[T]_e$ uygulanır, sonra P^{-1} ile e 'den f 'ye dönülür; sağdan sola okunan bu sıra tam olarak $P^{-1}[T]_e P$ 'dir. Emin değilseniz sonucu bir taban vektöründe deneyin: $[T]_f$ 'nin birinci sütunu $T(f_1)$ 'in f koordinatlarını vermelidir.

Örnek 13.8 ($\mathbb{R}^3$ 'te Dönüşüm Matrisi). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatörü

$$T(x, y, z) = (x + y - z, 2y + z, x - z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ olmak üzere $[T]_f$ matrisini

- doğrudan tanımdan,
- benzerlik bağıntısıyla

hesaplayıp karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Doğrudan tanımdan. Bir (p, q, r) vektörünü f cinsinden yazmak kolaydır, çünkü

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = (a + b + c, b + c, c)$$

olduğundan bileşenler **sondan başa** okunarak çözülür: $c = r, b = q - r, a = p - q$.

$$T(f_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \Rightarrow c = 1, b = -1, a = 1$$

$$T(f_2) = T(1, 1, 0) = (2, 2, 1) \Rightarrow c = 1, b = 1, a = 0$$

$$T(f_3) = T(1, 1, 1) = (1, 3, 0) \Rightarrow c = 0, b = 3, a = -2$$

Bulunan koordinatlar sütunlara yazılır:

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Benzerlik bağıntısıyla. Standart tabandaki matris katsayı tablosundan okunur; e standart taban olduğundan geçiş matrisi de sütunları f_j olan matristir:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P^{-1} 'i blok indirgemeye bulalım; sol blok üst üçgen olduğundan yalnız yukarı temizlik gerekir. $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$ ve $R_1 \rightarrow R_1 - R_3$, ardından $R_1 \rightarrow R_1 - R_2$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Çarpımı soldan sağa yapalım:

$$\begin{aligned} P^{-1}[T]_e &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (P^{-1}[T]_e)P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İki yol aynı matrisi verdi.

Kontrol. $[T]_f$ 'nin birinci sütunu $T(f_1)$ 'in f koordinatları olmalı:

$$f_1 - f_2 + f_3 = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (1, 0, 1) = T(f_1) \checkmark$$

■

13.5 $\mathbb{R}^n$ Dışında: Polinom Uzayı

Taban değiştirme yalnızca $\mathbb{R}^n$ 'e özgü değildir; koordinat vektörü tanımlanabilen her sonlu boyutlu uzayda aynı şekilde çalışır.

Örnek 13.9 (Polinom Uzayında Taban Değiştirme). Derecesi en çok 2 olan reel polinomların uzayı $P_2(\mathbb{R})$ 'de

$$e = \{1, x, x^2\}, \quad f = \{1, x-1, (x-1)^2\}$$

tabanları veriliyor.

- a) e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi bulunuz.
b) $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ polinomunun f tabanındaki koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

a) P 'nin sütunları, f 'nin vektörlerinin e tabanındaki koordinatlarıdır. e tabanında bir polinomun koordinatları katsayılarıdır (sabit, x 'in katsayısı, x^2 'nin katsayısı sırasıyla):

$$f_1 = 1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow (1, 0, 0)^t$$

$$f_2 = x - 1 = -1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow (-1, 1, 0)^t$$

$$f_3 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow (1, -2, 1)^t$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$p(x) = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

yazalım ve sağ tarafı düzenleyelim:

$$a + b(x - 1) + c(x^2 - 2x + 1) = c x^2 + (b - 2c) x + (a - b + c)$$

$p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ile katsayıları eşitleyelim:

$$c = 2, \quad b - 2c = -5, \quad a - b + c = 3$$

İkinciden $b = -5 + 4 = -1$; üçüncüden $a = 3 + b - c = 3 - 1 - 2 = 0$. Öyleyse

$$[p]_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $[p]_e = (3, -5, 2)^t$ olduğuna göre $P[p]_f = [p]_e$ olmalı:

$$P[p]_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 + 2 \\ -1 - 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = [p]_e \checkmark$$

■

i Not

(b) şıkının yaptığı iş aslında $p(x)$ 'i $x = 1$ noktası etrafında yeniden yazmaktır: $p(x) = -(x - 1) + 2(x - 1)^2$. Taban değiştirmenin somut bir anlamı budur — aynı nesneyi başka bir “ölçü takımıyla” ifade etmek.

13.6 Çekirdek, Görüntü ve Boyut

Aşağıdaki iki problem aynı kalıptadır: bir dönüşümün lineer olduğu gösterilir, sonra görüntü ve çekirdeğin birer tabanı ile boyutları bulunur. **Boyut teoremi** her adımda bir kontrol noktası verir.

Örnek 13.10 (Düzleme Giden Bir Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü, her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$F(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

biçiminde tanımlanıyor.

- F 'nin lineer olduğunu gösteriniz.
- $\text{Im } F$ görüntü uzayının bir tabanını ve boyutunu bulunuz.
- $\text{Ker } F$ çekirdeğinin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\ &= (v_1 + w_1 + v_2 + w_2, v_2 + w_2 + v_3 + w_3) \\ &= (v_1 + v_2 + w_1 + w_2, v_2 + v_3 + w_2 + w_3) \\ &= (v_1 + v_2, v_2 + v_3) + (w_1 + w_2, w_2 + w_3) = F(v) + F(w) \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{R}$ için

$$F(kv) = (kv_1 + kv_2, kv_2 + kv_3) = k(v_1 + v_2, v_2 + v_3) = kF(v)$$

İki koşul da sağlandığından F lineerdir.

b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ü doğurduğundan, **doğuran kümenin görüntüsü** gereği görüntülerinin oluşturduğu küme $\text{Im } F$ 'yi doğurur:

$$F(1, 0, 0) = (1, 0), \quad F(0, 1, 0) = (1, 1), \quad F(0, 0, 1) = (0, 1)$$

Bu üç vektörden hangilerinin bağımsız olduğunu bulmak için satır olarak yazıp merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı iki satır kaldığından

$$\{(1, 0), (0, 1)\} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

(Görüntü bütün $\mathbb{R}^2$ 'dir, yani F örtendir.)

c) Tanım gereği

$$\begin{aligned} \text{Ker } F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{x + y = 0, \quad y + z = 0\} \end{aligned}$$

Birinciden $y = -x$, ikinciden $z = -y = x$ çıkar; x serbest değişkendir. $x = 1$ alalım:

$$\text{Ker } F = \{k(1, -1, 1) : k \in \mathbb{R}\}, \quad \{(1, -1, 1)\} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Ker } F) = 1$$

Kontrol. Boyut teoremi: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$, yani $3 = 1 + 2$ ✓

■

Örnek 13.11 (Uzayı Kendi İçine Götüren Bir Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$F(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

biçiminde tanımlanıyor. F 'nin lineer olduğunu gösteriniz; $\text{Im } F$ ile $\text{Ker } F$ 'nin birer tabanını ve boyutlarını bulunuz.

Çözüm.

Lineerlik. Her bileşen, değişkenlerin sabit katsayılı bir toplamıdır; bir önceki problemdeki hesabın aynısı yapılırsa

$$F(v + w) = F(v) + F(w), \quad F(kv) = kF(v)$$

elde edilir. (Genel kural: bileşenleri x, y, z 'nin homojen birinci dereceden ifadeleri olan her dönüşüm lineerdir.)

Görüntü. Standart taban vektörlerinin görüntüleri:

$$F(1, 0, 0) = (1, 0, 1), \quad F(0, 1, 0) = (2, 1, 0), \quad F(0, 0, 1) = (0, -1, 2)$$

Bunları satır olarak yazıp indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{ (1, 0, 1), (0, 1, -2) \} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

Çekirdek. $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$ denklemini çözelim:

$$x + 2y = 0, \quad y - z = 0, \quad x + 2z = 0$$

İkinciden $y = z$; birinciden $x = -2y = -2z$. Üçüncü denklem $-2z + 2z = 0$ ile kendiliğinden sağlanır. $z = 1$ alalım:

$$\text{Ker } F = \{ k(-2, 1, 1) : k \in \mathbb{R} \}, \quad \dim(\text{Ker } F) = 1$$

Kontrol. $3 = 1 + 2$ ✓ Ayrıca $\dim(\text{Ker } F) \neq 0$ olduğundan F singülerdir ve tersi yoktur.

■

13.7 Dönüşümü Taban Değerlerinden Kurmak

Bir lineer dönüşüm, bir taban üzerindeki değerleriyle tamamen belirlenir. Bu, iki yönlü bir araçtır: taban değerleri verilince dönüşümün formülü bulunabilir, matris gösterimi verilince de dönüşüm geri kurulabilir.

Örnek 13.12 (Verilen İki Değerden Dönüşümü Bulmak). $T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ve $T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü var mıdır? Varsa $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için $T \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Varlık. $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanı olduğunu görelim: iki vektör lineer bağımsızdır (biri diğerinin katı değil) ve $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ 'dir. **Dönüşümün tabanla belirlenmesi** teoremi gereği, bir tabanın vektörlerine istenen değerler verilerek **tek türlü belirli** bir lineer dönüşüm elde edilir. Öyleyse böyle bir T vardır ve tektir.

Formül. Önce (a, b) 'yi taban cinsinden yazalım:

$$(a, b) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x, 2x + y)$$

Bileşenleri eşitlersek $x = a$ ve $2a + y = b$, yani $y = b - 2a$ çıkar. Şimdi T 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} T \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) &= T \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (b - 2a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = a T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + (b - 2a) T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= a(3, -1, 5) + (b - 2a)(2, 1, -1) \\ &= (3a, -a, 5a) + (2b - 4a, b - 2a, -b + 2a) \\ &= (-a + 2b, -3a + b, 7a - b) \end{aligned}$$

Kontrol. $(a, b) = (1, 2)$ için $(-1 + 4, -3 + 2, 7 - 2) = (3, -1, 5) \checkmark$ ve $(a, b) = (0, 1)$ için $(2, 1, -1) \checkmark$
■

Örnek 13.13 (Matris Gösteriminden Formüle). $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanıdır. Bir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörünün bu tabana göre matris gösterimi

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

olduğuna göre $T(x, y)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Taban vektörlerinin görüntüleri. $[T]_f$ 'nin sütunları $T(f_j)$ 'nin f koordinatlarıdır:

$$T(f_1) = 2f_1 + 0f_2 = 2(1, 1) = (2, 2)$$

$$T(f_2) = 0f_1 - 3f_2 = -3(1, -1) = (-3, 3)$$

Genel vektör. $(x, y) = af_1 + bf_2 = (a + b, a - b)$ olsun. İki denklemi toplayıp çıkararak

$$a = \frac{x + y}{2}, \quad b = \frac{x - y}{2}$$

Formül. T lineer olduğundan

$$\begin{aligned} T(x, y) &= aT(f_1) + bT(f_2) = \frac{x + y}{2}(2, 2) + \frac{x - y}{2}(-3, 3) \\ &= \left(x + y, x + y \right) + \left(\frac{-3x + 3y}{2}, \frac{3x - 3y}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2x + 2y - 3x + 3y}{2}, \frac{2x + 2y + 3x - 3y}{2} \right) = \left(\frac{-x + 5y}{2}, \frac{5x - y}{2} \right) \end{aligned}$$

Kontrol. $T(1, 1) = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{5-1}{2} \right) = (2, 2) \checkmark$ ve $T(1, -1) = \left(\frac{-1-5}{2}, \frac{5+1}{2} \right) = (-3, 3) \checkmark$
■

💡 Köşegen matrisin okunuşu

Bu problemde $[T]_f$ köşegendi ve bu, T 'nin f_1 yönünü 2 katına çıkardığını, f_2 yönünü ise -3 katına götürdüğünü doğrudan okuttu. Standart tabandaki formül ise kesirli ve karmaşık göründü. Doğru tabanın operatörü nasıl sadeleştirdiğinin somut bir örneğidir.

13.8 Matris Gösterimi ve Taban Değişimi

Örnek 13.14 (Kompleks Sayılar Üzerinde Bir Operatör). Kompleks sayılar cismi $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ üzerinde 2 boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde, her $a + bi \in \mathbb{C}$ için

$$T(a + bi) = a - bi$$

lineer operatörü (eşlenik alma) veriliyor.

- a) $E = \{1, i\}$, $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir tabanıdır. $[T]_E$ matris gösterimini bulunuz.
 b) Her $v \in \mathbb{C}$ için $[T]_E [v]_E = [T(v)]_E$ olduğunu gösteriniz.
 c) $F = \{1 + i, 1 + 2i\}$ de $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir tabanıdır. $[T]_F$ 'yi bulunuz.
 d) E tabanından F tabanına geçiş matrisi P 'yi bulunuz.
 e) Her $v \in \mathbb{C}$ için $[v]_E = P [v]_F$ olduğunu gösteriniz.
 f) $[T]_F = P^{-1} [T]_E P$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

a) Taban vektörlerinin görüntülerini E cinsinden yazalım:

$$T(1) = T(1 + 0i) = 1 - 0i = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i \Rightarrow [T(1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(i) = T(0 + 1i) = 0 - 1i = -i = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i \Rightarrow [T(i)]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $v = a + bi$ olsun. E tabanına göre koordinatlar katsayılarıdır: $[v]_E = (a, b)^t$. Çarpalım:

$$[T]_E [v]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

Öte yandan $T(v) = a - bi$ olduğundan $[T(v)]_E = (a, -b)^t$ 'dir. İki taraf eşittir.

c) Önce F tabanına göre koordinat almayı hazırlayalım. $p + qi = x(1 + i) + y(1 + 2i) = (x + y) + (x + 2y)i$ olduğundan

$$x + y = p, \quad x + 2y = q \Rightarrow y = q - p, \quad x = p - y = 2p - q$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini bu kuralla yazalım:

$$T(1 + i) = 1 - i \Rightarrow p = 1, q = -1 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3, y = -1 - 1 = -2$$

$$T(1 + 2i) = 1 - 2i \Rightarrow p = 1, q = -2 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4, y = -2 - 1 = -3$$

$$[T]_F = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

d) Geçiş matrisinin sütunları, F vektörlerinin E tabanındaki koordinatlarıdır:

$$1 + i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 1 + 2i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) $v = a + bi$ olsun; (c) şıkkındaki kuralla $[v]_F = (2a - b, b - a)^t$ 'dir. Çarpalım:

$$P[v]_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a - b \\ b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2a - b) + (b - a) \\ (2a - b) + 2(b - a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = [v]_E \checkmark$$

(Bu, **koordinat vektörlerinin dönüşümü** teoreminin bu örnekteki doğrulamasıdır.)

f) $|P| = 2 - 1 = 1$ olduğundan

$$P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Önce $[T]_E P$ 'yi hesaplayalım:

$$[T]_E P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sonra soldan P^{-1} ile çarpalım:

$$P^{-1} ([T]_E P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 2+2 \\ -1-1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = [T]_F \checkmark$$

■

Örnek 13.15 (Standart Olmayan Bir Tabanda Operatör Matrisi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5x + y, 3x - 2y)$ operatörü veriliyor. $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ olmak üzere $e = \{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanıdır.

- a) $[T]_e$ matris gösterimini bulunuz.
b) Her $v \in \mathbb{R}^2$ için $[T]_e[v]_e = [T(v)]_e$ olduğunu gösteriniz.
c) $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (1, 4)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$ de bir tabandır. e tabanından f tabanına geçiş matrisi P 'yi bulunuz.

Çözüm.

a) Önce e tabanına göre koordinat kuralını çıkaralım: $(p, q) = \alpha(1, 2) + \beta(2, 3) = (\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta)$ olduğundan

$$\alpha + 2\beta = p, \quad 2\alpha + 3\beta = q$$

Birinciye 2 ile çarpıp ikinciden çıkaralım: $-\beta = q - 2p$, yani $\beta = 2p - q$; buradan $\alpha = p - 2\beta = p - 4p + 2q = -3p + 2q$.

$$[(p, q)]_e = \begin{pmatrix} -3p + 2q \\ 2p - q \end{pmatrix}$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini hesaplayıp bu kuralı uygulayalım:

$$T(e_1) = T(1, 2) = (5 + 2, 3 - 4) = (7, -1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -21 - 2 \\ 14 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(2, 3) = (10 + 3, 6 - 6) = (13, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} -39 + 0 \\ 26 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} -23 & -39 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci sütun $T(e_1)$ 'i geri verir $\checkmark$

$$-23(1, 2) + 15(2, 3) = (-23 + 30, -46 + 45) = (7, -1) = T(e_1)$$

b) $v = (p, q)$ olsun; koordinat kuralıyla $[v]_e = (-3p + 2q, 2p - q)^t$ 'dir. Çarpalım:

$$[T]_e[v]_e = \begin{pmatrix} -23 & -39 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3p + 2q \\ 2p - q \end{pmatrix}$$

Birinci satır:

$$-23(-3p + 2q) - 39(2p - q) = 69p - 46q - 78p + 39q = -9p - 7q$$

İkinci satır:

$$15(-3p + 2q) + 26(2p - q) = -45p + 30q + 52p - 26q = 7p + 4q$$

Öte yandan $T(v) = (5p + q, 3p - 2q)$ 'dur; koordinat kuralını buna uygulayalım:

$$-3(5p + q) + 2(3p - 2q) = -15p - 3q + 6p - 4q = -9p - 7q$$

$$2(5p + q) - (3p - 2q) = 10p + 2q - 3p + 2q = 7p + 4q$$

İki taraf da $(-9p - 7q, 7p + 4q)^t$ çıktı ✓

c) Geçiş matrisinin sütunları f_j 'nin e tabanındaki koordinatlarıdır; (a) şıkkındaki kuralı kullanalım:

$$f_1 = (1, 3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+6 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = (1, 4) \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+8 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bu, aynı taban çifti için yukarıda **İkisi de Standart Olmayan İki Taban** örneğinde $M_e^{-1}M_f$ çarpımıyla bulunan matrisin aynısıdır; iki yol da aynı sonucu verir.

■

Örnek 13.16 (Türev Operatörünün İki Tabandaki Matrisi). Derecesi en çok 2 olan reel polinomların uzayı $P_2(\mathbb{R})$ üzerinde türev operatörünü ele alalım:

$$D : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R}), \quad D(p) = p'$$

- a) $e = \{1, x, x^2\}$ tabanına göre $[D]_e$ matrisini bulunuz.
b) $\text{Ker } D$ ile $\text{Im } D$ 'nin boyutlarını bulup boyut teoremini doğrulayınız.
c) $f = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ tabanına göre $[D]_f$ matrisini hem doğrudan hem de taban değişimi formülüyle hesaplayınız.

Çözüm.

a) Taban vektörlerinin türevlerini alıp e cinsinden yazalım (e tabanında koordinatlar katsayılarıdır):

$$D(1) = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)^t, \quad D(x) = 1 \Rightarrow (1, 0, 0)^t, \quad D(x^2) = 2x \Rightarrow (0, 2, 0)^t$$

$$[D]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $D(p) = 0$ olması p 'nin sabit polinom olması demektir:

$$\text{Ker } D = \{ a : a \in \mathbb{R} \} = L(1), \quad \dim(\text{Ker } D) = 1$$

Görüntü, $[D]_e$ 'nin sıfırdan farklı sütunlarının gerdiği uzaydır; $(1, 0, 0)^t$ ve $(0, 2, 0)^t$ lineer bağımsız olduğundan

$$\text{Im } D = L(1, x), \quad \dim(\text{Im } D) = 2$$

Kontrol. $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3 = 1 + 2$ ✓

c) **Doğrudan hesap.** Önce f tabanına göre koordinat kuralını çıkaralım:

$$a + bx + cx^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x+x^2) = (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma)x + \gamma x^2$$

Sondan başlayarak: $\gamma = c, \beta = b - c, \alpha = a - b$.

Şimdi f 'nin vektörlerinin türevlerini alalım:

$$D(1) = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)^t$$

$$D(1+x) = 1 \Rightarrow a = 1, b = c = 0 \Rightarrow (1, 0, 0)^t$$

$$D(1+x+x^2) = 1+2x \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 0 \Rightarrow (1-2, 2-0, 0)^t = (-1, 2, 0)^t$$

$$[D]_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Taban değişimi formülüyle. P 'nin sütunları f vektörlerinin e koordinatlarıdır:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(P üst üçgen olduğundan tersi de üst üçgendir; çarpımla doğrulanabilir.)

$$[D]_e P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} ([D]_e P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [D]_f \checkmark$$

■

Örnek 13.17 (Üç Taban ve Zincir Kuralı). $\mathbb{R}^{2'}$ 'de e standart taban; $f = \{(1, 1), (1, 2)\}$ ve $g = \{(2, 1), (3, 2)\}$ olsun.

- e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi ve e 'den g 'ye geçiş matrisi R 'yi yazınız.
- f 'den g 'ye geçiş matrisi Q 'yu doğrudan hesaplayınız.
- $R = PQ$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

a) e standart taban olduğundan geçiş matrislerinin sütunları doğrudan hedef tabanın vektörleridir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Q 'nun sütunları, g vektörlerinin f tabanındaki koordinatlarıdır.

$$g_1 = (2, 1) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$$

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha + 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1, \alpha = 3$$

$$g_2 = (3, 2) : \quad \alpha + \beta = 3, \quad \alpha + 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = -1, \alpha = 4$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Zincir kuralına göre e 'den g 'ye geçiş, PQ çarpımı olmalıdır:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 4-1 \\ 3-2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = R \checkmark$$

■

13.9 İspat Problemleri

Örnek 13.18 (İzomorfizm Tabanı Tabana Götürür). V ve W , bir K komütatif cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow W$ bir **üzerine** (örten) vektör uzayı izomorfizmi olsun. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi V 'nin K üzerinde bir tabanı ise, $\{F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)\}$ kümesinin de W 'nin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bir tabanın iki özelliğini ayrı ayrı göstereyim.

Doğurma. $w \in W$ olsun. F örten olduğundan $F(v) = w$ olacak biçimde bir $v \in V$ vardır. $\{v_1, \dots, v_n\}$ bir taban olduğundan uygun $a_1, \dots, a_n \in K$ skalerleriyle

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

yazılır. F 'yi uygulayalım; F lineer olduğundan

$$w = F(v) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \cdots + a_n F(v_n)$$

Demek ki her $w \in W$, $F(v_i)$ 'lerin bir lineer kombinasyonudur.

Lineer bağımsızlık. $a_1 F(v_1) + \cdots + a_n F(v_n) = 0_W$ olsun. Lineerlikten

$$F(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = 0_W$$

F bir izomorfizm, dolayısıyla bire birdir; bire bir lineer dönüşümün çekirdeği yalnız sıfırdan oluşur:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0_V$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ lineer bağımsız olduğundan $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0_K$ 'dir.

İki özellik birlikte $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ 'nin W 'nin bir tabanı olduğunu verir.

■

i Not

Bu sonucun doğrudan bir çıkarımı vardır: izomorf iki sonlu boyutlu uzayın boyutları eşittir. Tabanın eleman sayısı boyut olduğundan $\dim W = n = \dim V$ 'dir.

Örnek 13.19 (Singüler Olmayanların Bileşkesi). U ve V , aynı bir K komütatif cismi üzerinde iki vektör uzayı; $F : V \rightarrow U$ ve $G : U \rightarrow V$ iki lineer dönüşüm olsun. F ve G 'nin her ikisi de singüler değilse, $G \circ F$ lineer dönüşümünün de singüler olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Singüler olmama ölçütü gereği bir lineer dönüşümün singüler olmaması, çekirdeğinin yalnız sıfır vektöründen oluşması demektir. Varsayımımız

$$\text{Ker } F = \{0_V\}, \quad \text{Ker } G = \{0_U\}$$

$G \circ F : V \rightarrow V$ dönüşümünün çekirdeğini inceleyelim:

$$\text{Ker } (G \circ F) = \{ v \in V : G(F(v)) = 0_V \}$$

$v \in \text{Ker } (G \circ F)$ olsun, yani $G(F(v)) = 0_V$ olsun. $F(v)$, G 'nin çekirdeğinde bir vektördür; $\text{Ker } G = \{0_U\}$ olduğundan

$$F(v) = 0_U$$

Bu kez v , F 'nin çekirdeğindedir; $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olduğundan

$$v = 0_V$$

Demek ki $\text{Ker } (G \circ F) = \{0_V\}$ 'dir ve $G \circ F$ singüler değildir.

■

💡 Aynı ifadenin başka okunuşları

Sonlu boyutlu uzaylarda singüler olmama, bire bir olmayla ve (boyutlar eşitse) örten olmayla denktir. Bu problem, “bire bir iki dönüşümün bileşkesi bire birdir” biçiminde de okunabilir. Matris diliyle karşılığı da tanındıktır: iki regüler matrisin çarpımı regülerdir.

13.10 Alıştırma

Alıştırma 13.1 (Koordinat ve Taban Soruları).

- $\mathbb{R}^2$ 'de $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 1)$ olsun. $v = (5, 3)$ vektörünün f tabanındaki koordinatlarını bulunuz.
- $\mathbb{R}^2$ 'de $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, -1)$ ve $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 1)$ tabanları veriliyor. e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi bulunuz. $[v]_e = (3, 1)^t$ ise $[v]_f$ nedir?
- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, 3x)$ operatörünün $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (2, 1)$ tabanındaki matrisini bulunuz.
- $P_2(\mathbb{R})$ 'de $f = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$ tabanına göre $p(x) = x^2 + 4x + 1$ polinomunun koordinatlarını bulunuz.
2. mertebeden reel kare matrislerin uzayı $M_2(\mathbb{R})$ 'de

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bir tabandır. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin bu tabana göre koordinatlarını bulunuz. 6. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (z, x, y)$ operatörünün $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ tabanındaki matrisini bulunuz.

Çözüm.

- $xf_1 + yf_2 = (2x + y, x + y) = (5, 3)$ denkleminde

$$2x + y = 5, \quad x + y = 3$$

Birinciden ikinciyi çıkarırsak $x = 2$, buradan $y = 1$:

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $2(2, 1) + (1, 1) = (5, 3)$ ✓

- Sütunları taban vektörleri olan matrisler:

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_e^{-1} 'i blok indirgemeyeyle bulalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_e^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = M_e^{-1}M_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrol. P 'nin birinci sütunu f_1 'in e 'deki koordinatları olmalı:

$$\frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \frac{3}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) = (2, 1) = f_1 \quad \checkmark$$

$[v]_f$ için önce v 'yi bulmak en kısıyası: $v = 3e_1 + e_2 = 3(1, 1) + (1, -1) = (4, 2)$. Şimdi

$$(4, 2) = x(2, 1) + y(1, 1) = (2x + y, x + y)$$

$$\Rightarrow 2x + y = 4, \quad x + y = 2$$

Buradan $x = 2, y = 0$:

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aynı sonucu $P^{-1}[v]_e$ ile de alabilirdiniz.

3. Doğrudan tanımdan gidelim.

$$T(f_1) = T(1, 1) = (1 + 2, 3) = (3, 3)$$

$(3, 3) = a(1, 1) + b(2, 1) = (a + 2b, a + b)$ denkleminde $a + 2b = 3, a + b = 3$; çıkarma ile $b = 0, a = 3$:

$$T(f_1) = 3f_1 + 0f_2$$

$$T(f_2) = T(2, 1) = (2 + 2, 6) = (4, 6)$$

$a + 2b = 4, a + b = 6$ denklemlerinden $b = -2, a = 8$:

$$T(f_2) = 8f_1 - 2f_2$$

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. $p(x) = a + b(x + 1) + c(x + 1)^2$ yazalım:

$$a + b(x + 1) + c(x^2 + 2x + 1) = cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$$

$p(x) = x^2 + 4x + 1$ ile eşitleyelim:

$$c = 1, \quad b + 2c = 4, \quad a + b + c = 1$$

İkinciden $b = 2$; üçüncüden $a = 1 - b - c = 1 - 2 - 1 = -2$:

$$[p]_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Bulunan katsayılar $p(x)$ 'i geri verir ✓

$$-2 + 2(x + 1) + (x + 1)^2 = -2 + 2x + 2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 1$$

5. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ yazalım ve sağ tarafı toplayalım:

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = \begin{pmatrix} a + b + c + d & b + c + d \\ c + d & d \end{pmatrix}$$

Bunu A ile karşılaştıralım:

$$\begin{pmatrix} a + b + c + d & b + c + d \\ c + d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sağ alttan başlayarak geriye doğru çözelim:

$$d = 4, \quad c + d = 3 \implies c = -1, \quad b + c + d = 2 \implies b = -1$$

$$a + b + c + d = 1 \implies a = 1 - (-1) - (-1) - 4 = -1$$

$$[A]_f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kontrol.

$$\begin{aligned} -f_1 - f_2 - f_3 + 4f_4 &= \begin{pmatrix} -1 - 1 - 1 + 4 & 0 - 1 - 1 + 4 \\ 0 + 0 - 1 + 4 & 0 + 0 + 0 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

6. Bir (p, q, r) vektörünün bu tabandaki koordinatları, $af_1 + bf_2 + cf_3 = (a + b + c, b + c, c)$ eşitliği sondan başa okunarak bulunur: $c = r, b = q - r, a = p - q$.

$$T(f_1) = (0, 1, 0) \Rightarrow (-1, 1, 0)^t$$

$$T(f_2) = (0, 1, 1) \Rightarrow (-1, 0, 1)^t$$

$$T(f_3) = (1, 1, 1) \Rightarrow (0, 0, 1)^t$$

$$[T]_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci sütun: $-f_1 + f_2 = -(1, 0, 0) + (1, 1, 0) = (0, 1, 0) = T(f_1) \checkmark$

■

14. Benzerlik ve İz

Taban değiştirme bölümü tek bir formülle kapanmıştı: aynı operatörün iki tabandaki matrisleri $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ bağıntısıyla birbirine bağlıdır. şimdi bu bağıntıyı operatörden bağımsız olarak, matrisler arasında bir ilişki gibi ele alıyoruz. Ortaya çıkan **benzerlik** kavramı, “bir matrisin hangi özellikleri taban seçimine bağlı değildir?” sorusunun doğru çerçevesidir; bu bölümde bu özelliklerden ikisini — rank ve iz — inceleyip, dersin geri kalanının etrafında döndüğü soruyu soruyoruz: bir operatörün matrisi hangi durumda köşegen yapılabilir?

14.1 Benzer Matrisler

Tanım 14.1 (Benzer Matrisler). A ve B , K üzerinde n . mertebeden iki kare matris olsun. Eğer

$$B = P^{-1}AP$$

olacak şekilde regüler bir P matrisi varsa, A ile B 'ye **benzer matrisler** denir ve $A \sim B$ yazılır.

Taban değişimi teoremi, aynı operatörün farklı tabanlardaki matrislerinin daima benzer olduğunu söylüyordu. Tersisi de doğrudur.

Teorem 14.1 (Benzer Matrisler Aynı Operatörü Temsil Eder). $A \sim B$ ise, K^n üzerinde uygun iki taban seçilerek A ile B 'nin aynı operatörün matrisleri olduğu görülebilir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olacak biçimde regüler bir P olsun. e ile K^n 'in standart tabanını gösterelim ve

$$T : K^n \rightarrow K^n, \quad v \mapsto A \cdot v$$

operatörünü alalım; *standart tabandaki matris* sonucundan $[T]_e = A$ 'dır.

P regüler olduğundan sütunları lineer bağımsızdır; n tane lineer bağımsız vektör K^n 'in bir tabanını oluşturur. Bu sütunları $f_1, \dots, f_n$ diye adlandıralım; $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ bir tabandır ve sütunları f_j olan matris tam olarak P olduğundan P , e 'den f 'ye geçiş matrisidir.

Taban değişimi teoremi gereği

$$[T]_f = P^{-1}[T]_e P = P^{-1}AP = B$$

Demek ki A ile B , aynı T operatörünün sırasıyla e ve f tabanlarındaki matrisleridir.

■

Teorem 14.2 (Benzerlik Bir Denklik Bağıntısıdır). K üzerinde n . mertebeden kare matrisler kümesinde benzerlik bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişkendir.

İspat.

Yansıma. $P = I_n$ alalım; $I_n^{-1}AI_n = A$ olduğundan $A \sim A$ 'dır.

Simetri. $B = P^{-1}AP$ olsun. Her iki tarafı soldan P , sağdan P^{-1} ile çarparsak

$$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$$

P^{-1} de regüler olduğundan $B \sim A$ 'dır.

Geçişme. $B = P^{-1}AP$ ve $C = Q^{-1}BQ$ olsun. Yerine koyalım:

$$C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

Son adımda *ters matrisin özellikleri* gereği $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ kullanıldı. PQ iki regüler matrisin çarpımı olarak regülerdir; öyleyse $A \sim C$ 'dir.

■

Benzer matrislerin ortak yanları, temsil ettikleri operatörün tabandan bağımsız özellikleridir. En temeli ranktır.

Teorem 14.3 (Benzer Matrislerin Rankı Eşittir). V sonlu boyutlu, e bir tabanı ve $T \in A(V)$ olsun. O zaman

$$\text{rank} ([T]_e) = \dim(\text{Im } T)$$

Özel olarak benzer iki matrisin rankı eşittir.

İspat.

$e = \{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$ V 'yi doğurduğundan *doğuran kümenin görüntüsü* gereği

$$\text{Im } T = L (T(e_1), \dots, T(e_n))$$

$[T]_e$ 'nin sütunları tam olarak $[T(e_1)]_e, \dots, [T(e_n)]_e$ olduğundan, $[T]_e$ 'nin sütun uzayı bu koordinat vektörlerinin gerdiği uzaydır.

$v \mapsto [v]_e$ dönüşümü V 'den K^n üzerine bir *izomorfizmdir*; izomorfizmler lineer bağımsızlığı ve doğuran olmayı koruduğundan $\text{Im } T$ ile onun koordinat görüntüsü aynı boyuttadır:

$$\dim(\text{Im } T) = \dim ([T]_e \text{ 'nin sütun uzayı}) = \text{rank} ([T]_e)$$

Şimdi $A \sim B$ olsun. **Benzer Matrisler Aynı Operatörü Temsil Eder** teoremi gereği A ile B , aynı T operatörünün iki farklı tabandaki matrisleridir. Sağ taraf $\dim(\text{Im } T)$ tabandan bağımsız olduğundan

$$\text{rank} (A) = \dim(\text{Im } T) = \text{rank} (B)$$

■

i Not

Bu, benzerliği çürütmek için pratik bir ölçüt verir: **rankları farklı olan iki matris benzer olamaz.** Ölçüt tek yönlüdür — rankları eşit olan iki matris benzer olmak zorunda değildir. Aynı işi gören, tabandan bağımsız iki büyüklük daha vardır: bu bölümde tanımlayacağımız **iz** ve determinantlar bölümünde tanımlayacağımız **determinant**.

Son olarak, benzerlik kuvvet almayla uyumludur; bu da operatör kuvvetlerini hesaplamayı kolaylaştırır.

Teorem 14.4 (Benzerlik ve Kuvvetler). $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ olsun. Bu durumda her $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$([T]_f)^m = P^{-1} ([T]_e)^m P$$

ve K üzerinde her $p(x)$ polinomu için

$$[p(T)]_f = P^{-1} p ([T]_e) P$$

İspat.

Kuvvet. Çarpımı açıp ortadaki PP^{-1} çiftlerini sadeleştirelim:

$$\begin{aligned} (P^{-1}[T]_e P)^m &= (P^{-1}[T]_e P) (P^{-1}[T]_e P) \cdots (P^{-1}[T]_e P) \\ &= P^{-1}[T]_e (PP^{-1}) [T]_e (PP^{-1}) \cdots [T]_e P \\ &= P^{-1} [T]_e [T]_e \cdots [T]_e P = P^{-1} ([T]_e)^m P \end{aligned}$$

Polinom. $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ olsun. *Matris gösteriminin toplama ve skalerle çarpımla uyumu* ile $[T^k]_f = ([T]_f)^k$ eşitliğini birlikte kullanalım:

$$\begin{aligned}
[p(T)]_f &= a_0[I]_f + a_1[T]_f + \cdots + a_m [T^m]_f \\
&= a_0 I_n + a_1 P^{-1}[T]_e P + \cdots + a_m P^{-1} ([T]_e)^m P \\
&= P^{-1} \left(a_0 I_n + a_1 [T]_e + \cdots + a_m ([T]_e)^m \right) P = P^{-1} p ([T]_e) P
\end{aligned}$$

İkinci satırda $[I]_f = I_n = P^{-1} I_n P$ olduğu kullanıldı.

💡 Ne işe yarar?

Taban değiştirme bölümündeki yansıma örneğinde $[T]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ köşegen çıkmıştı; böyle bir matrisin kuvvetini almak bir satırlık iştir: $([T]_f)^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix}$. Yukarıdaki teorem sayesinde standart tabandaki $[T]_e$ 'nin kuvveti de tek bir çarpımla bulunur: $([T]_e)^m = P ([T]_f)^m P^{-1}$. Köşegenleştirmenin bütün pratik değeri buradadır.

14.2 Bir Matrisin İzi

Tanım 14.2 (İz). $A = (a_{ij})$, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris olsun. A 'nın köşegeni üzerindeki elemanların toplamına A 'nın **izi** denir ve $\text{iz}(A)$ ile gösterilir:

$$\text{iz}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

İz, matristen bir sayı üreten en basit işlemdir: yalnızca köşegene bakar, çarpma bile gerektirmez. Buna rağmen taban değişimi altında korunur; bunu görmek için önce çarpımın izine bakalım.

Teorem 14.5 (Çarpımın İzi Sıra Değiştirir). A ve B , K üzerinde n . mertebeden iki kare matris olsun. O zaman

$$\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$$

İspat.

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ olsun. Çarpımın köşegen elemanı

$$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

olduğundan

$$\text{iz}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

Aynı hesabı BA için yapalım:

$$\text{iz}(BA) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij}$$

K komütatif olduğundan $b_{ji} a_{ij} = a_{ij} b_{ji}$ 'dir; sonlu bir çift toplamda terimlerin sırası da değiştirilebilir. Öyleyse iki toplam aynı terimlerden oluşur ve eşittir.

⚠ Dikkat

Teorem $AB = BA$ demiyor – matris çarpımı değişmeli değildir. Söylenen yalnızca iki çarpımın **izlerinin** eşit olduğudur; matrislerin kendileri farklı olabilir.

Sonuç 14.1 (Benzer Matrislerin İzi Eşittir). $A \sim B$ ise $\text{iz}(A) = \text{iz}(B)$ 'dir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olsun. Çarpımı $(P^{-1})(AP)$ biçiminde ikiye ayırıp bir önceki teoremi uygulayalım:

$$\text{iz}(B) = \text{iz}(P^{-1}(AP)) = \text{iz}((AP)P^{-1}) = \text{iz}(A(P P^{-1})) = \text{iz}(A)$$

■

Rankta olduğu gibi, izin de tabandan bağımsız olması onu operatörün kendisine ait bir büyüklük yapar.

Tanım 14.3 (Bir Operatörün İzi). V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $T \in A(V)$ ve e , V 'nin herhangi bir tabanı olsun. T 'nin **izi**

$$\text{iz}(T) := \text{iz}([T]_e)$$

biçiminde tanımlanır. T 'nin herhangi iki matris gösterimi benzer olduğundan ve benzer matrislerin izi eşit olduğundan, bu tanım e tabanının seçiminden bağımsızdır.

Örnek 14.1 (İki Operatörün İzi). Aşağıdaki iki operatörün izini bulunuz.

a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ şöyle tanımlansın:

$$T(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$$

b) 2. mertebeden reel kare matrislerin uzayı $V = M_2(\mathbb{R})$ üzerinde $T(A) = M \cdot A$, burada $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Çözüm.

a) Standart tabanda hesaplayalım. $T(e_1) = (a_1, b_1, c_1)$, $T(e_2) = (a_2, b_2, c_2)$, $T(e_3) = (a_3, b_3, c_3)$ olduğundan bu vektörler doğrudan $[T]_e$ 'nin sütunlarıdır:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{iz}(T) = a_1 + b_2 + c_3$$

b) V 'nin standart tabanını alalım:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dört çarpımı yapalım:

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1E_1 + 3E_3$$

$$T(E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 1E_2 + 3E_4$$

$$T(E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 4E_3$$

$$T(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_2 + 4E_4$$

Katsayıları **sütun** olarak yazalım:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{iz}(T) = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$$

$\text{iz}(M) = 1 + 4 = 5$ olduğuna dikkat edin: $\text{iz}(T) = 2 \text{iz}(M)$ çıktı. Bu bir rastlantı değildir; $M_2(K)$ üzerinde $A \mapsto MA$ operatörünün matrisi, M 'in iki kopyasını köşegen bloklar hâlinde taşır.

■

14.3 Köşegenleştirilebilir Operatörler

Taban değiştirmenin bütün amacı, operatörün matrisini olabildiğince sade bir biçime sokmaktır. En sade biçim köşegen matristir.

Tanım 14.4 (Köşegenleştirilebilir Operatör). V, K üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. $[T]_f$ matrisi köşegen olacak biçimde V 'nin bir f tabanı varsa T 'ye **köşegenleştirilebilir** operatör, f tabanına da T 'yi **köşegenleştiren taban** denir.

Teorem 14.6 (Köşegenleştirilebilirliğin Matris Ölçütü). V, n boyutlu bir vektör uzayı, $T \in A(V)$ ve A, T 'nin herhangi bir matris gösterimi olsun. T 'nin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul,

$$P^{-1}AP$$

köşegen olacak biçimde regüler bir P matrisinin var olmasıdır.

İspat.

$A = [T]_e$ olsun.

Gereklik. T köşegenleştirilebilir olsun, yani $[T]_f$ köşegen olacak biçimde bir f tabanı bulunsun. P, e 'den f 'ye geçiş matrisi olsun; P regülerdir ve taban değişimi teoremi gereği

$$P^{-1}AP = P^{-1}[T]_eP = [T]_f$$

sağ taraf köşegendir.

Yeterlik. P regüler ve $D = P^{-1}AP$ köşegen olsun. $P = (p_{ij})$ olmak üzere

$$f_j = p_{1j}e_1 + p_{2j}e_2 + \cdots + p_{nj}e_n \quad (j = 1, \dots, n)$$

vektörlerini tanımlayalım; yani f_j, P 'nin j . sütununu e tabanındaki koordinat vektörü olarak okuyan vektördür. P regüler olduğundan sütunları K^n 'de lineer bağımsızdır; $v \mapsto [v]_e$ bir izomorfizm olduğundan $f_1, \dots, f_n$ de V 'de lineer bağımsızdır. n tane lineer bağımsız vektör n boyutlu V 'nin bir tabanıdır, öyleyse $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ bir tabandır ve tanımı gereği P, e 'den f 'ye geçiş matrisidir. Taban değişimi teoremi gereği

$$[T]_f = P^{-1}[T]_eP = P^{-1}AP = D$$

köşegendir; demek ki T köşegenleştirilebilirdir.

■

Aynı ifade matris diliyle şöyle okunur: **bir kare matrisin köşegenleştirilebilir olması, köşegen bir matrise benzer olması demektir.**

i Sıradaki soru

Ölçüt doğru ama henüz kullanışlı değil: “böyle bir P var mı?” sorusunu cevaplamak için P 'yi arayıp durmak gerekiyor. $[T]_f$ 'nin köşegen olması, f tabanının her vektörü için

$$T(f_j) = k_j f_j$$

demektir — yani T , f_j 'yi yalnızca bir katsayıyla ölçekliyor, yönünü değiştirmiyor. Böyle vektörlere **özvektör**, karşısındaki k_j sayılarına **özdeğer** denir. Köşegenleştirme sorusunun sistematik cevabı bu iki kavramdadır ve **Özdeğerler ve Özvektörler** bölümünde verilecektir.

14.4 Alıştırma

Alıştırma 14.1 (Benzerlik ve İz Üzerine).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerinin benzer olmadığını gösteriniz.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ile $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisleri benzer midir?
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri benzer midir?
4. A ile B benzer ise A^t ile B^t 'nin de benzer olduğunu gösteriniz.
5. $\text{iz}(A + B) = \text{iz}(A) + \text{iz}(B)$ ve $\text{iz}(kA) = k \text{iz}(A)$ olduğunu gösteriniz.
6. $K = \mathbb{R}$ olmak üzere $AB - BA = I_2$ olacak biçimde 2. mertebeden A, B kare matrislerinin bulunamayacağını gösteriniz.

Çözüm.

1. İz tabandan bağımsızdır, dolayısıyla benzer matrislerin izleri eşit olmalıdır:

$$\text{iz}(A) = 1 + 4 = 5, \quad \text{iz}(B) = 0 + 0 = 0$$

İzler farklı olduğundan $A \not\sim B$ 'dir.

2. $A = 2I_2$ bir **skaler matristir**. Herhangi bir regüler P için

$$P^{-1}AP = P^{-1}(2I_2)P = 2P^{-1}I_2P = 2P^{-1}P = 2I_2 = A$$

olur; yani A yalnızca kendisine benzerdir. $B \neq A$ olduğundan A ile B **benzer değildir**.

Dikkat: bu örnekte ne rank ne de iz ölçütü işe yarar — her iki matrisin de rankı 2, izi 4'tür. Bu iki ölçüt benzerlik için gerek koşuldur, yeter koşul değildir.

3. Rankları karşılaştıralım: $\text{rank}(A) = 2$, $\text{rank}(C) = 1$ 'dir. Benzer matrislerin rankı eşit olmak zorunda olduğundan A ile C **benzer değildir**. (İz de ayırt eder: $\text{iz}(A) = 2$ ve $\text{iz}(C) = 1$ 'dir.)

4. $B = P^{-1}AP$ olsun. Transpozeyi alalım; $(XY)^t = Y^t X^t$ olduğundan

$$B^t = (P^{-1}AP)^t = P^t A^t (P^{-1})^t$$

$(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$ olduğunu kullanalım ve $Q = (P^t)^{-1}$ diyelim; bu durumda $P^t = Q^{-1}$ olur ve

$$B^t = Q^{-1}A^tQ$$

Q regüler olduğundan $A^t \sim B^t$ 'dir.

5. İkisi de köşegen elemanların toplamı üzerinden doğrudan görülür: $(A + B)_{ii} = a_{ii} + b_{ii}$ ve $(kA)_{ii} = k a_{ii}$ olduğundan

$$\text{iz}(A + B) = \sum_i (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_i a_{ii} + \sum_i b_{ii} = \text{iz}(A) + \text{iz}(B)$$

$$\text{iz}(kA) = \sum_i k a_{ii} = k \sum_i a_{ii} = k \text{iz}(A)$$

6. Böyle A, B bulunduğunu varsayalım. Her iki tarafın izini alalım; iz toplamsal olduğundan (5. şık) ve $\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$ olduğundan

$$\text{iz } (AB - BA) = \text{iz } (AB) - \text{iz } (BA) = 0$$

Öte yandan $\text{iz } (I_2) = 1 + 1 = 2$ 'dir. $0 = 2$ çelişkisi, varsayımın yanlış olduğunu gösterir.

■

15. İki Uzay Arasında Matris Gösterimi

Bir operatörün matrisi bölümünde $T : V \rightarrow U$ dönüşümünün iki tabana göre matris gösterimini tanımlamış, bir örnek üzerinde hesaplamıştık. Bu bölümde o gösterimin bütün cebirsel özelliklerini kuruyoruz: matris çarpımının bileşkeye, matris toplamının dönüşüm toplamına karşılık geldiğini gösterecek ve dönemin en çarpıcı sonucuna varacağız – tabanlar uygun seçilirse her lineer dönüşümün matrisi yalnızca **rankına** bağlı, son derece sade bir biçime iner.

Bölüm boyunca V ile U , K üzerinde sırasıyla m ve n boyutlu vektör uzayları; $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ V 'nin, $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ ise U 'nun bir tabanıdır. Hatırlatalım: $[T]_{C,B}$ matrisinin j . sütunu $[T(v_j)]_C$ 'dir ve matris (n, m) tipindedir.

15.1 Temel Eşitlik

Teorem 15.1 (Dönüşümün Uygulanması Matrisle Çarpımdır). $T : V \rightarrow U$ lineer olsun. Her $v \in V$ için

$$[T]_{C,B} \cdot [v]_B = [T(v)]_C$$

İspat.

$v \in V$ olsun ve B tabanına göre koordinatlarını $[v]_B = (x_1, \dots, x_m)^t$ ile gösterelim; yani

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m$$

T lineer olduğundan

$$T(v) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \dots + x_m T(v_m)$$

Koordinat almak da lineer bir işlemdir (*koordinat izomorfizmi*); her iki tarafın C tabanına göre koordinatlarını alalım:

$$[T(v)]_C = x_1 [T(v_1)]_C + x_2 [T(v_2)]_C + \dots + x_m [T(v_m)]_C$$

Sağ taraf, sütunları $[T(v_j)]_C$ olan matrisin $(x_1, \dots, x_m)^t$ sütunuyla çarpımından başka bir şey değildir:

$$[T(v)]_C = \left([T(v_1)]_C \mid \dots \mid [T(v_m)]_C \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = [T]_{C,B} \cdot [v]_B$$

■

i Not

Bu eşitlik, matris gösteriminin bütün anlamıdır: V ile U soyut uzaylar olsa bile, taban seçildikten sonra T 'yi uygulamak K^m 'den K^n 'e bir matris çarpımına dönüşür. Aşağıdaki üç teoremin ispatı da hep aynı fikri kullanır – iki matrisin eşit olduğunu göstermek için her ikisinin de aynı sütun vektörlerini ürettiğini görmek yeter.

💡 Sütunlar nasıl okunur

İki matrisin eşitliğini sütun sütun denetlemenin pratik yolu şudur: $[v_j]_B$, K^m 'in j . standart taban sütunudur. Bir matrisi bu sütunla çarpmak, matrisin j . sütununu almak demektir. Öyleyse “her v için $M_1[v]_B = M_2[v]_B$ ” bilgisinden, $v = v_j$ alarak M_1 ile M_2 'nin bütün sütunlarının eşit olduğu, yani $M_1 = M_2$ olduğu çıkar.

15.2 Dönüşüm Uzayı ile Matris Uzayı

Dönüşümlerin uzayı bölümünde $\text{Hom}(V, U)$ 'nin bir vektör uzayı olduğunu ve boyutunun $m \cdot n$ çıktığını görmüştük. Matris gösterimi bu iki uzayı birebir örtüştürür.

Teorem 15.2 (Hom(V,U) ile Matris Uzayının İzomorfluğu). $M_{n,m}(K)$ ile K üzerindeki (n, m) tipindeki matrislerin uzayını gösterelim. O zaman

$$\Phi : \text{Hom}(V, U) \rightarrow M_{n,m}(K), \quad \Phi(T) = [T]_{C,B}$$

bir vektör uzayı izomorfizmidir.

İspat.

Lineerlik. $T, S \in \text{Hom}(V, U)$ ve $k \in K$ olsun. $(T + S)(v_j) = T(v_j) + S(v_j)$ ve koordinat almak lineer olduğundan

$$[(T + S)(v_j)]_C = [T(v_j)]_C + [S(v_j)]_C$$

Bu, $[T + S]_{C,B}$ 'nin j . sütununun $[T]_{C,B}$ ile $[S]_{C,B}$ 'nin j . sütunlarının toplamı olduğunu söyler; bütün j 'ler için doğru olduğundan

$$[T + S]_{C,B} = [T]_{C,B} + [S]_{C,B}$$

Aynı hesap kT için $[kT]_{C,B} = k[T]_{C,B}$ verir. Öyleyse Φ lineerdir.

Bire birlik. $\Phi(T) = 0$ olsun, yani $[T]_{C,B}$ sıfır matris olsun. O zaman her j için $[T(v_j)]_C = 0$, dolayısıyla $T(v_j) = 0_U$ 'dur. Bir lineer dönüşüm taban üzerindeki değerleriyle belirlendiğinden (*tabanla belirlenme*) T sıfır dönüşümüdür. Çekirdeği yalnız sıfır olan lineer dönüşüm bire birdir.

Örtenlik. $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(K)$ verilsin. Tabanla belirlenme teoremi gereği

$$T(v_j) := a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{nj}u_n \quad (j = 1, \dots, m)$$

koşulunu sağlayan tek bir $T \in \text{Hom}(V, U)$ vardır. Bu T için $[T(v_j)]_C$ tam olarak A 'nın j . sütunudur, yani $\Phi(T) = A$ 'dır.

■

i Not

İzomorf uzayların boyutları eşit olduğundan bu teorem, $\dim \text{Hom}(V, U) = \dim M_{n,m}(K) = m \cdot n$ eşitliğinin ikinci bir ispatını verir. $V = U$ ve $B = C$ alınırsa, **operatör cebri ile matris cebri** bölümündeki $A(V) \cong M_n(K)$ izomorfizmine dönülür.

15.3 Bileşkenin Matrisi

Teorem 15.3 (Bileşkenin Matrisi Matrislerin Çarpımıdır). V, U ve W sonlu boyutlu uzaylar; B, C ve D sırasıyla bunların birer tabanı olsun. $F : V \rightarrow U$ ve $G : U \rightarrow W$ lineer dönüşümleri için

$$[G \circ F]_{D,B} = [G]_{D,C} \cdot [F]_{C,B}$$

İspat.

Her $v \in V$ için temel eşitliği üst üste iki kez uygulayalım:

$$\begin{aligned} [(G \circ F)(v)]_D &= [G(F(v))]_D = [G]_{D,C} \cdot [F(v)]_C \\ &= [G]_{D,C} \cdot ([F]_{C,B} \cdot [v]_B) = ([G]_{D,C} [F]_{C,B}) \cdot [v]_B \end{aligned}$$

Son adımda matris çarpımının birleşme özelliği kullanıldı. Öte yandan temel eşitlik doğrudan $G \circ F$ dönüşümüne uygulanırsa

$$[(G \circ F)(v)]_D = [G \circ F]_{D,B} \cdot [v]_B$$

Demek ki her v için $[G \circ F]_{D,B}[v]_B = ([G]_{D,C}[F]_{C,B})[v]_B$ 'dir. Yukarıdaki sütun okuma kuralı gereği (v yerine sırayla $v_1, \dots, v_m$ alınır) iki matrisin bütün sütunları eşittir:

$$[G \circ F]_{D,B} = [G]_{D,C}[F]_{C,B}$$

■

💡 Boyutlar tutuyor mu?

$\dim V = m$, $\dim U = n$, $\dim W = p$ olsun. $[G]_{D,C}$ matrisi (p, n) , $[F]_{C,B}$ ise (n, m) tipindedir; çarpımları (p, m) tipindedir ve $G \circ F : V \rightarrow W$ dönüşümünün matrisi de tam olarak (p, m) tipinde olmalıdır. Ortadaki n 'lerin sadeleşmesi, bileşkenin ancak " U ortak uzayı" üzerinden kurulabilmesinin matris dilindeki karşılığıdır.

15.4 İki Tabanın Birden Değişmesi

Operatörlerde tek bir taban vardı ve taban değişimi $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ formülünü vermişti. İki uzay söz konusu olduğunda iki geçiş matrisi devreye girer.

Teorem 15.4 (Dikdörtgen Gösterimde Taban Değişimi). B ile B' , V 'nin; C ile C' , U 'nun tabanları olsun. P , V 'de B 'den B' 'ne; Q ise U 'da C 'den C' 'ne geçiş matrisi olmak üzere her $F \in \text{Hom}(V, U)$ için

$$[F]_{C',B'} = Q^{-1} \cdot [F]_{C,B} \cdot P$$

İspat.

Geçiş matrisinin tanımı gereği her $v \in V$ ve her $u \in U$ için

$$P \cdot [v]_{B'} = [v]_B \quad \text{ve} \quad Q \cdot [u]_{C'} = [u]_C$$

İkincisinden $[u]_{C'} = Q^{-1}[u]_C$ çıkar. Şimdi $u = F(v)$ alıp temel eşitliği kullanalım:

$$\begin{aligned} [F]_{C',B'} \cdot [v]_{B'} &= [F(v)]_{C'} = Q^{-1} [F(v)]_C \\ &= Q^{-1} ([F]_{C,B} \cdot [v]_B) = Q^{-1} [F]_{C,B} P \cdot [v]_{B'} \end{aligned}$$

Bu eşitlik her $v \in V$ için geçerlidir; v yerine B' tabanının vektörlerini alarak iki matrisin sütunlarının eşit olduğu görülür.

■

i Not

İki özel hâl sık kullanılır. Yalnızca varış uzayında taban değişirse ($B = B'$, yani $P = I_m$) $[F]_{C',B} = Q^{-1}[F]_{C,B}$; yalnızca çıkış uzayında değişirse ($C = C'$, yani $Q = I_n$) $[F]_{C,B'} = [F]_{C,B}P$ olur. $V = U$, $B = C$ ve $B' = C'$ alındığında $Q = P$ olur ve formül tanınmış benzerlik bağıntısına iner.

15.5 Kanonik Form

İki tabanı birden serbestçe seçebilmek, operatör durumunda olmayan büyük bir esneklik verir. Bu esneklik sonuna kadar kullanılırsa şaşırtıcı derecede sade bir matris elde edilir.

Teorem 15.5 (Rankın Belirlediği Kanonik Form). $F : V \rightarrow U$ lineer ve $\text{rank } F = r$ olsun. O zaman V 'nin bir B tabanı ve U 'nun bir C tabanı vardır öyle ki

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Burada I_r , r . mertebeden birim matris; kalan bloklar sıfır matrislerdir.

İspat.

Boyut teoremi gereği $\dim(\text{Ker } F) = m - r$ 'dir. $\text{Ker } F$ 'nin bir tabanı $\{w_1, \dots, w_{m-r}\}$ olsun. Bir alt uzayın tabanı bütün uzayın tabanına genişletilebildiğinden

$$B = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{m-r}\}$$

V 'nin bir tabanı olacak biçimde $v_1, \dots, v_r$ vektörleri bulunabilir.

Şimdi $u_i := F(v_i)$ diyelim ($i = 1, \dots, r$). Bu r vektörün $\text{Im } F$ 'nin bir tabanı olduğunu görelim.

Doğurma. B bir taban olduğundan **doğuran kümenin görüntüsü** gereği $\text{Im } F$, $F(v_1), \dots, F(v_r), F(w_1), \dots, F(w_{m-r})$ vektörleri tarafından doğurulur. Son $m - r$ tanesi sıfırdır ($w_j \in \text{Ker } F$), dolayısıyla $\text{Im } F = L(u_1, \dots, u_r)$ 'dir.

Bağımsızlık. r tane vektör r boyutlu $\text{Im } F$ 'yi doğuruyorsa lineer bağımsızdır. (Doğrudan da görülebilir: $\sum a_i u_i = 0$ ise $F(\sum a_i v_i) = 0$, yani $\sum a_i v_i \in \text{Ker } F$ olur; bu vektör w_j 'lerin bir kombinasyonu olarak yazılınca B 'nin bağımsızlığı bütün a_i 'lerin sıfır olmasını gerektirir.)

$\{u_1, \dots, u_r\}$ lineer bağımsız olduğundan U 'nun bir tabanına genişletilebilir:

$$C = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$$

Artık matrisi yazabiliriz. $i \leq r$ için $F(v_i) = u_i$ olduğundan $[F(v_i)]_C$, K^n 'in i . standart taban sütunudur. $j = 1, \dots, m - r$ için $F(w_j) = 0$ olduğundan karşılık gelen sütun sıfırdır. Sütunları sırayla yan yana koyarsak

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

İlk r sütun sırasıyla K^n 'in ilk r standart taban sütunu, kalan $m - r$ sütun ise tamamen sıfırdır.

■

💡 Ne söylüyor?

Uygun tabanlarda her lineer dönüşümün matrisi yalnızca $r = \text{rank } F$ sayısına bağlıdır. Yani iki uzay arasındaki lineer dönüşümlerin *tek* değişmezi ranktır: rankları eşit iki dönüşüm, uygun tabanlarda tamamen aynı matrisle temsil edilir. Operatörlerde durum böyle değildir — orada taban tek olduğundan seçim özgürlüğü yarıya iner ve rank tek başına yetmez; hangi büyüklüklerin gerektiği **özdeğerler** bölümünün konusudur.

15.6 Çözümlü Örnekler

Örnek 15.1 (İki Tabana Göre Matris ve Doğrulaması). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$F(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ ve $C = \{(1, 3), (2, 5)\}$ tabanları veriliyor.

a) $[F]_{C,B}$ matrisini bulunuz.

b) Herhangi bir $v = (x, y, z)$ için $[F]_{C,B}[v]_B = [F(v)]_C$ eşitliğini doğrulayınız.

Çözüm.

a) Önce $\mathbb{R}^2$ 'de C tabanına göre koordinat almayı bir kez hazırlayalım. $(p, q) = a(1, 3) + b(2, 5)$ ise

$$a + 2b = p, \quad 3a + 5b = q$$

Birinciye 3 ile çarpıp ikinciden çıkaralım: $b = 3p - q$; buradan $a = p - 2b = p - 2(3p - q) = -5p + 2q$. Yani

$$(p, q) \mapsto [(p, q)]_C = \begin{pmatrix} -5p + 2q \\ 3p - q \end{pmatrix}$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini hesaplayıp bu kuralı uygulayalım:

$$F(1, 1, 1) = (3 + 2 - 4, 1 - 5 + 3) = (1, -1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 - 2 \\ 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$F(1, 1, 0) = (3 + 2, 1 - 5) = (5, -4) \Rightarrow \begin{pmatrix} -25 - 8 \\ 15 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$F(1, 0, 0) = (3, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -15 + 2 \\ 9 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Üç sütunu yan yana koyalım:

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Önce $[v]_B$ 'yi bulalım. $v = (x, y, z)$ vektörünü B tabanında açalım:

$$v = (x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) = (a + b + c, a + b, a)$$

Bileşenleri eşitlersek

$$a = z, \quad b = y - z, \quad c = x - y \quad \Rightarrow \quad [v]_B = \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

Çarpalım:

$$[F]_{C,B}[v]_B = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

Birinci satır: $-7z - 33(y - z) - 13(x - y) = -13x - 20y + 26z$.

İkinci satır: $4z + 19(y - z) + 8(x - y) = 8x + 11y - 15z$.

$$[F]_{C,B}[v]_B = \begin{pmatrix} -13x - 20y + 26z \\ 8x + 11y - 15z \end{pmatrix}$$

Şimdi sağ tarafı hesaplayalım. $F(v) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$ olduğuna göre (a) şıkkındaki koordinat kuralıyla $p = 3x + 2y - 4z$ ve $q = x - 5y + 3z$ alalım:

$$-5p + 2q = -5(3x + 2y - 4z) + 2(x - 5y + 3z) = -15x - 10y + 20z + 2x - 10y + 6z = -13x - 20y + 26z$$

$$3p - q = 3(3x + 2y - 4z) - (x - 5y + 3z) = 9x + 6y - 12z - x + 5y - 3z = 8x + 11y - 15z$$

İki taraf aynı çıktı: $[F]_{C,B}[v]_B = [F(v)]_C$ ✓

■

Örnek 15.2 (Standart Tabanlarda Matris Katsayı Matrisidir). $F : K^m \rightarrow K^n$ dönüşümü

$$F(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_j a_{1j}x_j, \sum_j a_{2j}x_j, \dots, \sum_j a_{nj}x_j \right)$$

biçiminde verilsin. B ve C standart tabanlar olmak üzere $[F]_{C,B} = (a_{ij})$ olduğunu gösteriniz ve aşağıdaki dönüşümlerin standart tabanlara göre matrislerini yazınız.

- a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y)$
b) $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, s, t) = (3x - 4y + 2s - 5t, 5x + 7y - s - 2t)$
c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $F(x, y, z) = (2x + 3y - 8z, x + y + z, 4x - 5z, 6y)$

Çözüm.

Genel durum. B standart taban olduğundan j . taban vektörü e_j 'nin görüntüsü, formülde $x_j = 1$ ve diğerleri 0 alınarak bulunur:

$$F(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$$

C de standart taban olduğundan bir vektörün koordinatları bileşenlerinin kendisidir; öyleyse $[F]_{C,B}$ 'nin j . sütunu $(a_{1j}, \dots, a_{nj})^t$ 'dir. Bu sütunlar yan yana konduğunda tam olarak (a_{ij}) matrisi elde edilir.

Kural. Katsayıları oldukları gibi yazmak yeter; **satırlar** çıkıştaki bileşenlere, **sütunlar** değişkenlere karşılık gelir.

a) İki değişken, üç bileşen: $(3, 2)$ tipinde bir matris.

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Dört değişken, iki bileşen: $(2, 4)$ tipinde.

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Üç değişken, dört bileşen: $(4, 3)$ tipinde. Görünmeyen katsayılar sıfırdır.

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Örnek 15.3 (Aynı Uzay, İki Farklı Taban). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$ olsun. Çıkışta standart taban e , varışta ise $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$ tabanı kullanılarak $[T]_{f,e}$ matrisini bulunuz.

Çözüm.

Bir önceki örnekte f tabanına göre koordinat kuralını çıkarmıştık:

$$[(p, q)]_f = \begin{pmatrix} -5p + 2q \\ 3p - q \end{pmatrix}$$

Standart taban vektörlerinin görüntülerini bu kuralla yazalım:

$$T(e_1) = T(1, 0) = (2, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -10 + 2 \\ 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (-3, 4) \Rightarrow \begin{pmatrix} 15 + 8 \\ -9 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{f,e} = \begin{pmatrix} -8 & 23 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci sütun $T(e_1)$ 'in f koordinatları olmalıydı:

$$-8(1, 3) + 5(2, 5) = (-8 + 10, -24 + 25) = (2, 1) = T(e_1) \checkmark$$

■

⚠ Bu bir operatör matrisi değildir

Yukarıdaki T bir operatördür ($V = U = \mathbb{R}^2$), ama çıkışta ve varışta **farklı** tabanlar kullanıldığından $[T]_{f,e}$ matrisi $[T]_e$ ya da $[T]_f$ ile karıştırılmamalıdır. Özel olarak benzerlik bağıntısı bu matris için geçerli değildir; benzerlikten söz edebilmek için iki tarafta da aynı taban kullanılmalıdır.

Örnek 15.4 (Bir Matris Dönüşümünün İki Gösterimi). $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ olmak üzere $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(v) = A \cdot v$ dönüşümünü ele alalım (vektörler sütun olarak yazılıyor).

- a) B ve C standart tabanlar iken $[F]_{C,B}$ nedir?
b) $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ ve $C' = \{(1, 3), (2, 5)\}$ tabanlarına göre $[F]_{C',B'}$ matrisini bulunuz.

Çözüm.

a) $F(e_j) = Ae_j$, yani A 'nın j . sütunudur; standart tabanda koordinatlar bileşenlerin kendisi olduğundan

$$[F]_{C,B} = A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Bir matris dönüşümünün standart tabanlardaki matrisi matrisin kendisidir.

b) Görüntüleri hesaplayalım:

$$F(1, 1, 1) = (2 + 5 - 3, 1 - 4 + 7) = (4, 4)$$

$$F(1, 1, 0) = (2 + 5, 1 - 4) = (7, -3)$$

$$F(1, 0, 0) = (2, 1)$$

C' tabanına göre koordinat kuralı yine $[(p, q)]_{C'} = (-5p + 2q, 3p - q)^t$ dir:

$$(4, 4) \Rightarrow \begin{pmatrix} -20 + 8 \\ 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad (7, -3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -35 - 6 \\ 21 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$(2, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -10 + 2 \\ 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$[F]_{C',B'} = \begin{pmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Taban değişimi teoremi de aynı sonucu vermelidir. B' den B' 'ne geçiş matrisi P 'nin sütunları B' vektörlerinin standart koordinatlarıdır; C' den C'' 'ne geçiş matrisi Q için de aynısı geçerlidir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(Q^{-1} , 2×2 ters alma kuralıyla bulundu: $\det Q = 5 - 6 = -1$.)

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+8 & -35-6 & -10+2 \\ 12-4 & 21+3 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

15.7 Alıştırma

Alıştırma 15.1 (İki Uzay Arasında Hesaplar).

1. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + y, y + z)$ dönüşümünün standart tabanlara göre matrisini yazınız ve rankını bulunuz.
2. Aynı F için, kanonik form teoremindeki gibi $[F]_{C,B} = (I_2 \ 0)$ olacak biçimde $\mathbb{R}^3$ 'ün bir B ve $\mathbb{R}^2$ 'nin bir C tabanını bulunuz.
3. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, x + y, y)$ ve $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x, y, z) = (x - z, y)$ olsun. $[G \circ F]$ matrisini hem doğrudan hem de çarpım teoremiyle hesaplayıp karşılaştırınız (bütün tabanlar standart).

Çözüm.

1. Katsayıları yazmak yeter:

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

İki satır lineer bağımsız olduğundan (biri diğerinin katı değil) rank 2'dir. Boyut teoremi gereği $\dim(\text{Ker } F) = 3 - 2 = 1$ 'dir.

2. Önce çekirdeği bulalım: $x + y = 0$ ve $y + z = 0$, yani $y = -x$ ve $z = -y = x$. Öyleyse $\text{Ker } F = L((1, -1, 1))$ ve $w_1 = (1, -1, 1)$ bir tabanıdır.

$r = 2$ olduğundan $\{v_1, v_2, w_1\}$ bir taban olacak biçimde iki vektör seçmeliyiz; en kolayı $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ denemektir. Sütunları bu üç vektör olan matris $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ üst üçgendir ve köşegeninde sıfır bulunmadığından regülerdir; öyleyse üç vektör lineer bağımsızdır. Öyleyse

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$$

Şimdi $u_1 = F(v_1) = (1, 0)$ ve $u_2 = F(v_2) = (1, 1)$ alalım; bunlar lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanını oluşturur:

$$C = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

Bu tabanlarla $F(v_1) = u_1$, $F(v_2) = u_2$ ve $F(w_1) = 0$ olduğundan

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (I_2 \ 0)$$

3. Doğrudan. $(G \circ F)(x, y) = G(x, x + y, y) = (x - y, x + y)$ olduğundan

$$[G \circ F] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Çarpımla. Katsayı matrisleri

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [G] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[G][F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

16. Permütasyonlar

Determinant, bir kare matrise bir sayı karşılık getiren işlemdir; 2. mertebede $ad - bc$ olarak tanıdığımız bu sayının genel tanımı, matrisin her satırından ve her sütunundan birer eleman seçilerek kurulan çarpımların işaretli toplamıdır. “Her satırdan ve her sütundan bir eleman” seçmenin kaç yolu olduğunu ve her seçimin hangi işareti alacağını söyleyen kavram **permütasyon**dur. Bu kısa bölümde determinanti tanımlamak için gereken kadarını kuruyoruz.

16.1 Tanım ve Gösterim

Tanım 16.1 (Permütasyon). $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinden kendisine tanımlı bire bir (dolayısıyla örten) bir σ fonksiyonuna bir **permütasyon** denir. Bütün bu permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir.

Bir permütasyon iki biçimde yazılır. **İki satırlı gösterimde** üstte girdiler, altta görüntüleri sıralanır:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Üst satır her zaman aynı olduğundan çoğu zaman yalnızca alt satır yazılır; buna **tek satırlı gösterim** denir:

$$\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n)$$

Örnek 16.1 (Küçük Permütasyon Kümeleri). S_2 ve S_3 ’ün elemanlarını tek satırlı gösterimle yazınız.

Çözüm.

S_2 ’de 1 ve 2’yi iki türlü sıralayabiliriz:

$$S_2 = \{12, 21\}$$

S_3 ’te ilk sıraya 3, kalan iki sıraya 2 seçenek düşer:

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

■

Önerme 16.1 (S_n ’in Eleman Sayısı). S_n kümesinin $n!$ tane elemanı vardır.

İspat.

Bir permütasyonu tek satırlı gösterimde kurmak, $1, 2, \dots, n$ sayılarını bir sıraya dizmek demektir. Birinci sıraya n sayıdan herhangi biri, ikinci sıraya kalan $n - 1$ sayıdan herhangi biri, üçüncü sıraya kalan $n - 2$ sayıdan herhangi biri konabilir ve bu böyle sürer. Öyleyse toplam seçenek sayısı

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

■

Permütasyonlar fonksiyon olduğundan bileşke alınabilir ve her permütasyonun tersi vardır; bileşke yine bire bir ve örten olduğundan S_n ’de kalır. Birim permütasyon $I = 12 \cdots n$ olmak üzere $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = I$ ’dır. Kısacası S_n , bileşke işlemiyle bir **gruptur**; $n \geq 3$ için değişmeli değildir.

Örnek 16.2 (Bileşke ve Ters Hesabı). S_5 'te $\sigma = 24513$ ve $\tau = 41352$ olsun. $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} ve τ^{-1} permütasyonlarını bulunuz.

Çözüm.

Gösterimi okuyalım: $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(5) = 3$; benzer biçimde $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 3$, $\tau(4) = 5$, $\tau(5) = 2$.

$\sigma \circ \tau$. Önce τ , sonra σ uygulanır:

$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(4) = 1, \quad (\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(1) = 2, \quad (\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(3) = 5$$

$$(\sigma \circ \tau)(4) = \sigma(5) = 3, \quad (\sigma \circ \tau)(5) = \sigma(2) = 4$$

$$\sigma \circ \tau = 12534$$

$\tau \circ \sigma$. Bu kez önce σ uygulanır:

$$(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(2) = 1, \quad (\tau \circ \sigma)(2) = \tau(4) = 5, \quad (\tau \circ \sigma)(3) = \tau(5) = 2$$

$$(\tau \circ \sigma)(4) = \tau(1) = 4, \quad (\tau \circ \sigma)(5) = \tau(3) = 3$$

$$\tau \circ \sigma = 15243$$

İki sonuç farklıdır; bileşke değişmeli değildir.

Tersler. $\sigma^{-1}(j)$, “ j sayısı σ 'nın kaçınıcı sırasında?” sorusunun cevabıdır. $\sigma = 24513$ dizisinde 1 dördüncü, 2 birinci, 3 beşinci, 4 ikinci, 5 üçüncü sıradadır:

$$\sigma^{-1} = 41523$$

$\tau = 41352$ dizisinde 1 ikinci, 2 beşinci, 3 üçüncü, 4 birinci, 5 dördüncü sıradadır:

$$\tau^{-1} = 25314$$

■

16.2 İşaret

Determinanttaki her çarpımın önüne bir artı ya da eksi konacak; bu işareti belirleyen sayı şudur.

Tanım 16.2 (Ters Sayısı, Çift ve Tek Permütasyon). $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ bir permütasyon olsun. $i > k$ olduğu hâlde i sayısının dizide k 'dan önce geldiği (i, k) ikililerine σ 'nın **tersleri** (inversiyonları) denir. Ters sayısı çift ise σ 'ya **çift**, tek ise **tek** permütasyon denir. σ 'nın **işareti** şöyle tanımlanır:

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

💡 Ters saymanın pratik yolu

Diziyi soldan sağa tarayın; her sayı için **sağında kalan kendisinden küçük** sayıları sayın ve bu sayıları toplayın. Toplam, ters sayısıdır.

Örnek 16.3 (İki Permütasyonun İşareti).

- S_5 'te $\sigma = 35142$ permütasyonunun işaretini bulunuz.
- S_6 'da $\tau = 542163$ permütasyonunun işaretini bulunuz.

Çözüm.

a) Her sayının sağındaki küçükleri sayalım:

Sayı	Sağında kalan küçükler	Adet
3	1, 2	2
5	1, 4, 2	3
1	—	0
4	2	1
2	—	0

Toplam $2 + 3 + 0 + 1 + 0 = 6$; çift sayıda ters vardır, öyleyse σ çifttir ve $\text{sgn}(\sigma) = +1$ 'dir.

b) Aynı sayımı $\tau = 542163$ için yapalım:

Sayı	Sağında kalan küçükler	Adet
5	4, 2, 1, 3	4
4	2, 1, 3	3
2	1	1
1	—	0
6	3	1
3	—	0

Toplam $4 + 3 + 1 + 0 + 1 + 0 = 9$; tek sayıda ters vardır, öyleyse τ tektir ve $\text{sgn}(\tau) = -1$ 'dir.

■

i Not

Birim permütasyon $I = 12 \cdots n$ artan sıralı olduğundan hiç tersi yoktur; I çifttir ve $\text{sgn}(I) = +1$ 'dir. S_3 'te 123, 231, 312 çift; 132, 213, 321 tektir — çift ve tek permütasyonların sayısı eşittir. Bu, $n \geq 2$ için her zaman böyledir.

16.3 İşaretin Çarpımsallığı

İşaretin determinant hesabındaki bütün gücü, bileşkeyle uyumlu olmasından gelir. Bunu doğrudan ters sayarak göstermek zahmetlidir; kısa yol, işareti bir polinom üzerinden okumaktır.

Tanım 16.3 (Fark Polinomu). n değişkenli

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

polinomuna **fark polinomu** denir; çarpım, $1 \leq i < j \leq n$ koşulunu sağlayan bütün ikililer üzerinden alınır. Bir σ permütasyonu için

$$\sigma(g) := \prod_{i < j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

yazalım; bu, g 'de her x_i değişkeninin yerine $x_{\sigma(i)}$ konarak elde edilen polinomdur.

Lemma 16.1 (Fark Polinomu İşareti Görür). Her $\sigma \in S_n$ için

$$\sigma(g) = \text{sgn}(\sigma) \cdot g$$

İspat.

$\sigma(g)$ 'nin çarpanları, $i < j$ olan her ikili için $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ biçimindedir. σ bire bir olduğundan $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ ikilileri, $\{1, \dots, n\}$ 'in bütün ikili alt kümelerini tam bir kez tarar. Öyleyse $\sigma(g)$ ile g aynı çarpanlardan oluşur; tek fark bazı çarpanların ters işaretli yazılmış olmasıdır:

- $\sigma(i) < \sigma(j)$ ise $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ çarpanı g 'de aynen bulunur;
- $\sigma(i) > \sigma(j)$ ise $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)} = - (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$ olur ve bir (-1) çıkar.

İkinci durum tam olarak σ 'nın terslerinde ortaya çıkar: $i < j$ olduğu hâlde $\sigma(i) > \sigma(j)$ olması, büyük sayının dizide küçükten önce gelmesi demektir. Ters sayısı t ise

$$\sigma(g) = (-1)^t g = \text{sgn}(\sigma) \cdot g$$

■

Teorem 16.1 (İşaret Çarpımsaldır). Her $\sigma, \tau \in S_n$ için

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma) \quad \text{ve} \quad \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$$

İspat.

Çarpımsallık. $\sigma(g)$ işlemi “her x_i yerine $x_{\sigma(i)}$ yaz” demektir. Bu yer değiştirmeyi önce σ , sonra τ için art arda uygularsak, x_i önce $x_{\sigma(i)}$, o da $x_{\tau(\sigma(i))}$ olur; yani iki işlemin art arda uygulanması $\tau \circ \sigma$ permütasyonunun yer değiştirmesidir:

$$(\tau \circ \sigma)(g) = \tau(\sigma(g))$$

Şimdi önceki lemmayı iki kez kullanalım. Sağ tarafta önce içindeki $\sigma(g) = \text{sgn}(\sigma)g$ yazılır; sabit bir katsayı yer değiştirmeden etkilenmediğinden

$$\tau(\sigma(g)) = \tau(\text{sgn}(\sigma)g) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \tau(g) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \cdot g$$

Sol taraf ise yine lemma gereği $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot g$ 'dir. g sıfır polinomu olmadığından katsayılar eşittir:

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma)$$

Ters. $\sigma \circ \sigma^{-1} = I$ ve $\text{sgn}(I) = 1$ olduğundan, az önceki eşitlikle

$$\text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$$

İşaretler yalnızca $+1$ ya da -1 olabildiğinden bu ancak iki işaret eşitken mümkündür.

■

En basit permütasyonlardan biri, yalnızca iki sayının yerini değiştirip kalanına dokunmayan permütasyondur. Determinantın işaret kuralı bunun işaretine dayanır.

Tanım 16.4 (Transpozisyon). $k \neq l$ olmak üzere $\tau(k) = l$, $\tau(l) = k$ ve $i \neq k, l$ için $\tau(i) = i$ olan τ permütasyonuna bir **transpozisyon** denir.

Teorem 16.2 (Her Transpozisyon Tektir). Her transpozisyonun işareti -1 'dir.

İspat.

$k < l$ olsun. τ 'nın tek satırlı gösterimi, birim permütasyonun k . ve l . sıralarındaki sayıların yer değiştirmiş hâlidir:

$$\tau = 1 \ 2 \ \dots \ (k-1) \ \underbrace{l}_{k. \text{ sıra}} \ (k+1) \ \dots \ (l-1) \ \underbrace{k}_{l. \text{ sıra}} \ (l+1) \ \dots \ n$$

Terslerini sayalım. Yerinde duran sayılar kendi aralarında artan sırada olduğundan aralarında ters yoktur; ters ancak k ya da l içeren ikililerde ortaya çıkar:

- (l, k) ikilisi: $l > k$ ve l dizide önce geliyor -1 ters.
- l ile aradaki $k + 1, \dots, l - 1$ sayıları: l bunların hepsinden büyük ve hepsinden önce geliyor $-l - k - 1$ ters.
- Aradaki $k + 1, \dots, l - 1$ sayıları ile k : her biri k 'dan büyük ve k 'dan önce geliyor $-l - k - 1$ ters.

Toplam ters sayısı

$$1 + 2(l - k - 1)$$

Bu sayı her zaman tektir; öyleyse τ tektir ve $\text{sgn}(\tau) = -1$ 'dir.

■

i Nerede kullanacağız?

Determinantın tanımında her permütasyon bir işaretle çarpılacak. Bu bölümün üç sonucu bir sonraki bölümde şu üç özelliğe dönüşür: işaretin çarpımsallığı $|AB| = |A| |B|$ eşitliğinin, transpozisyonun tek olması “iki satır yer değiştirince determinantın işaret değişmesi”nin, $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$ eşitliği ise $|A^t| = |A|$ 'nın temelidir.

16.4 Alıştırma

Alıştırma 16.1 (Permütasyon Hesapları).

1. S_4 'ün bütün elemanlarını tek satırlı gösterimle yazınız ve kaçının çift olduğunu bulunuz.
2. S_6 'da $\sigma = 341625$ permütasyonunun işaretini ve σ^{-1} 'i bulunuz.
3. σ tek, τ çift ise $\sigma \circ \tau$ ve $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ permütasyonlarının işaretlerini belirleyiniz.

Çözüm.

1. $|S_4| = 4! = 24$ 'tür. Birinci sıradaki sayıya göre gruplayalım:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432

2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421

4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

Çift ve tek permütasyonların sayısı eşit olduğundan 12 tanesi çifttir. (Neden eşit olduğunu görmek için: τ sabit bir transpozisyon olsun; $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ eşlemesi çiftleri teklere, teklere çiftlere birebir götürür.)

2. Sağdaki küçükleri sayalım: $3 \rightarrow \{1, 2\}$: 2; $4 \rightarrow \{1, 2\}$: 2; $1 \rightarrow$ yok: 0; $6 \rightarrow \{2, 5\}$: 2; $2 \rightarrow$ yok: 0; $5 \rightarrow$ yok: 0. Toplam 6, çift; $\text{sgn}(\sigma) = +1$.

Ters için “hangi sayı kaçınıcı sırada?” sorusunu cevaplayalım: $\sigma = 341625$ dizisinde 1 üçüncü, 2 beşinci, 3 birinci, 4 ikinci, 5 altıncı, 6 dördüncü sıradadır:

$$\sigma^{-1} = 351264$$

3. İşaret çarpımsal olduğundan

$$\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) = (-1)(+1) = -1$$

yani $\sigma \circ \tau$ tektir. İkincisi için üç çarpımı birleştirelim ve $\text{sgn}(\tau^{-1}) = \text{sgn}(\tau)$ olduğunu kullanalım:

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}) = \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) = (\text{sgn}(\tau))^2 \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma) = -1$$

öyleyse $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ de tektir.

■

17. Determinant ve Özellikleri

Bir kare matrise, satırlarının “bağımsız olup olmadığını” tek bir sayıyla bildiren bir büyüklük karşılık getirmek istiyoruz. İkinci mertebede bu sayıyı zaten tanıyoruz: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi ancak ve ancak $ad - bc \neq 0$ iken tersinirdir. Bu bölümde aynı sayının her merteye için tanımını verip özelliklerini çıkarıyoruz.

17.1 Tanım

Tanım 17.1 (Determinant). K komütatif bir cisim ve $A = (a_{ij})$, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris olsun. A ’nın **determinantı**

$$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

biçiminde tanımlanır. Toplam, S_n ’in bütün $n!$ permütasyonu üzerinden alınır.

Tanımı okuyalım: her terim, matrisin **her satırından ve her sütunundan tam olarak bir** eleman seçilerek kurulan bir çarpımdır. Birinci çarpan birinci satırdan, ikinci çarpan ikinci satırdan gelir; hangi sütunlardan alındığını σ belirler ve σ bire bir olduğundan hiçbir sütun iki kez kullanılmaz. Terimin işareti ise σ ’nın işaretidir.

⚠ Determinant yalnız kare matrisler için tanımlıdır

Tanım, satır sayısı ile sütun sayısının eşit olmasına dayanır. Dikdörtgen bir matrisin determinantından söz edilemez.

17.2 Küçük Mertebeler

Birinci mertebe. S_1 tek elemanlıdır, o da birim permütasyondur:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

İkinci mertebe. $S_2 = \{12, 21\}$; birincisi çift, ikincisi tektir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Üçüncü mertebe. S_3 ’ün üç çift (123, 231, 312) ve üç tek (132, 213, 321) elemanı vardır:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Üçüncü mertebeyi hatırlamak

Altı terim şöyle gruplanabilir:

$$|A| = a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

yani birinci satırın elemanları, sırasıyla $+$, $-$, $+$ işaretleriyle, kendi satır ve sütunları silindiğinde kalan 2×2 determinantlarla çarpılıp toplanıyor. Bu, **kofaktör açılımı** bölümünde her merteye için ispatlanacak kuralın üçüncü mertebedeki hâlidir.

Örnek 17.1 (İkinci ve Üçüncü Mertebeden Hesaplar). Aşağıdaki determinantları hesaplayınız.

- a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$
b) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$
c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$
d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Çözüm.

a) $3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23.$

b) $(a-b)(a+b) - a \cdot a = a^2 - b^2 - a^2 = -b^2.$

c) Üçüncü merteye kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} & 2(6 \cdot 1 - 7 \cdot 9) - 3(5 \cdot 1 - 7 \cdot 8) + 4(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) \\ &= 2(6 - 63) - 3(5 - 56) + 4(45 - 48) = 2(-57) - 3(-51) + 4(-3) \\ &= -114 + 153 - 12 = 27 \end{aligned}$$

d) İlk satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} & 2((-4)(5) - 2(-1)) - 3(0 \cdot 5 - 2 \cdot 1) + (-4)(0 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1) \\ &= 2(-20 + 2) - 3(0 - 2) - 4(0 + 4) = -36 + 6 - 16 = -46 \end{aligned}$$

■

Not

Tanımdaki terim sayısı $n!$ 'dir: $n = 4$ için 24, $n = 5$ için 120, $n = 10$ için 3 628 800. Tanımdan doğrudan hesaplamak bu yüzden pratik değildir. Aşağıdaki özellikler, determinantı satır işlemleriyle hesaplamayı – yani n^3 mertebesinde bir işle bitirmeyi – mümkün kılar.

17.3 Transpoze

Teorem 17.1 (Bir Matris ile Transpozisinin Determinantları Eşittir). Her n . mertebeden kare A matrisi için $|A^t| = |A|$ 'dır.

İspat.

$B = A^t$ diyelim; tanım gereği $b_{ij} = a_{ji}$ 'dir. Determinant tanımını B için yazalım:

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Sabit bir σ için çarpanları yeniden sıralayalım. K komütatif olduğundan çarpanların sırası önemsizdir; $a_{\sigma(i)}$ çarpanında $j = \sigma(i)$, yani $i = \sigma^{-1}(j)$ diyelim. σ bire bir olduğundan j , 1'den n 'e kadar bütün değerleri bir kez alır:

$$a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

Ayrıca $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$ 'dir. Öyleyse

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ eşlemesi S_n 'i kendisine birebir götürdüğünden, σ^{-1} yerine τ yazıp toplamı τ üzerinden almak aynı toplamı verir:

$$|A^t| = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = |A|$$

■

i Satır neyse sütun odur

Bu teoremin pratik değeri büyüktür: aşağıda satırlar için ispatlanan her özellik, transpoze alınarak sütunlar için de geçerli olur. Bir determinant hesabında satır işlemleri kadar sütun işlemleri de serbestçe kullanılabilir.

17.4 Satır Değişimi

Önerme 17.1 (İki Satır Yer Değiştirirse İşaret Değişir). B matrisi, A 'nın iki satırının yer değiştirmesiyle elde edilsin. O zaman $|B| = -|A|$ 'dir.

İspat.

Yer değiştiren satırlar k ve l olsun ve τ , k ile l 'yi değiştiren transpozisyonu göstereyin. Bu durumda B 'nin satırları $b_{ij} = a_{\tau(i)j}$ eşitliğiyle verilir. Determinant tanımından

$$|B| = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\tau(i)\sigma(i)}$$

Çarpımda i yerine $\tau(i)$ yazarak satır indislerini artan sıraya alalım; $\tau \circ \tau = I$ olduğundan

$$\prod_i a_{\tau(i)\sigma(i)} = \prod_i a_{i\sigma(\tau(i))} = \prod_i a_{i(\sigma \circ \tau)(i)}$$

İşaretlerin çarpımsallığı ve $\text{sgn}(\tau) = -1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(\sigma \circ \tau)$$

Öyleyse

$$|B| = - \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma \circ \tau) \prod_i a_{i(\sigma \circ \tau)(i)}$$

$\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ eşlemesi S_n 'i kendisine birebir götürdüğünden, toplam bütün permütasyonlar üzerinden alınan aynı toplamdır:

$$|B| = - \sum_{\rho} \text{sgn}(\rho) \prod_i a_{i\rho(i)} = -|A|$$

■

17.5 Sıfır Satır, Eşit Satırlar, Üçgensellik

Teorem 17.2 (Determinantın Üç Temel Özelliği). A , n . mertebeden bir kare matris olsun.

(i) A 'nın bir satırı (ya da bir sütunu) tamamen sıfırlardan oluşuyorsa $|A| = 0$ 'dır.

(ii) A 'nın iki satırı (ya da iki sütunu) birbirinin aynı ise $|A| = 0$ 'dır.

(iii) A üçgensel ise $|A|$, esas köşegen elemanlarının çarpımıdır:

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Özel olarak $|I_n| = 1$ 'dir.

İspat.

(i) Determinantın her terimi her satırdan bir çarpan içerir; sıfır satırdan gelen çarpan 0 olduğundan bütün terimler sıfırdır.

(ii) k ve l satırları aynı olsun: her j için $a_{kj} = a_{lj}$. τ , k ile l 'yi değiştiren transpozisyon olsun. S_n 'in elemanlarını $\{\sigma, \sigma \circ \tau\}$ ikilileri hâlinde eşleyelim; $\tau \neq I$ olduğundan $\sigma \neq \sigma \circ \tau$ 'dur ve her permütasyon tam olarak bir ikilide bulunur, yani $n!/2$ ikili oluşur.

Bir ikilinin iki teriminin toplamına bakalım. $\rho = \sigma \circ \tau$ olsun; $\rho(k) = \sigma(l)$, $\rho(l) = \sigma(k)$ ve $i \neq k, l$ için $\rho(i) = \sigma(i)$ 'dir. ρ 'nun terimindeki çarpımda k ve l satırlarından gelen çarpanlar

$$a_{k\sigma(l)} \text{ ve } a_{l\sigma(k)}$$

olur. İki satır aynı olduğundan $a_{k\sigma(l)} = a_{l\sigma(l)}$ ve $a_{l\sigma(k)} = a_{k\sigma(k)}$ 'dir; yani ρ 'nun çarpımı σ 'ninkiyile aynı sayıdır. İşaretler ise zıttır: $\text{sgn}(\rho) = -\text{sgn}(\sigma)$. Demek ki her ikilinin iki terimi birbirini götürür ve toplam sıfırdır.

(iii) A üst üçgensel olsun, yani $i > j$ için $a_{ij} = 0$. Bir terimin sıfırdan farklı olabilmesi için her i 'de $a_{i\sigma(i)} \neq 0$, yani $\sigma(i) \geq i$ olmalıdır. $i = n$ için $\sigma(n) \geq n$, yani $\sigma(n) = n$ 'dir. $i = n-1$ için $\sigma(n-1) \geq n-1$ ve n değeri kullanıldığından $\sigma(n-1) = n-1$ 'dir. Aynı akıl yürütme yukarı doğru sürdürülürse $\sigma = I$ çıkar. Geriye tek bir terim kalır:

$$|A| = \text{sgn}(I) a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Alt üçgensel durum, transpoze alınarak buna indirgenir. I_n köşegeninde 1'ler bulunan üçgensel bir matris olduğundan $|I_n| = 1$ 'dir.

■

17.6 Satır İşlemleri

Teorem 17.3 (Determinant Satır İşlemleri Altında). A , n . mertebeden bir kare matris olsun.

(i) B , A 'nın bir satırının $c \in K$ ile çarpılmasıyla elde edilirse $|B| = c|A|$ 'dir.

(ii) B , A 'nın bir satırının c katının başka bir satıra eklenmesiyle elde edilirse $|B| = |A|$ 'dir.

İspat.

(i) k . satır c ile çarpılmış olsun. Determinantın her terimi k . satırdan tam olarak bir çarpan içerdiğinden her terim c ile çarpılır:

$$|B| = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (c a_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = c |A|$$

(ii) Önce bir ara adım: determinant her satırda toplamsaldır. A 'nın k . satırı iki satırın toplamı, yani $a_{kj} = u_j + v_j$ biçiminde olsun. A' ile k . satırı (u_j) , A'' ile k . satırı (v_j) olan (kalan satırları A ile aynı) matrisleri gösterelim. Her terimde k . satırdan gelen çarpanı ayırıp dağıtalım:

$$|A| = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) (u_{\sigma(k)} + v_{\sigma(k)}) \prod_{i \neq k} a_{i\sigma(i)} = |A'| + |A''|$$

Şimdi B , A 'nın l . satırının c katının k . satıra eklenmesiyle elde edilsin ($k \neq l$). B 'nin k . satırı $(a_{kj} + c a_{lj})$ 'dir. Yukarıdaki toplamsallıkla

$$|B| = |A| + |C|$$

Burada C , k . satırı $(c \ a_{lj})$ olan matristir. (i) gereği $|C| = c |D|$ 'dir; D ise k . satırı l . satırın aynısı olan matristir. İki satırı aynı olan bir matrisin determinantı sıfır olduğundan $|D| = 0$, dolayısıyla

$$|B| = |A| + c \cdot 0 = |A|$$

■

💡 Hesap yöntemi

Bu iki özellik ile satır değişimi kuralı, determinant hesabının pratik yöntemini verir: matrisi elemanter satır işlemleriyle üçgensel şekle indirgeyin, sonra köşegeni çarpın. Yalnız iki noktaya dikkat edin — satır değişimi işareti çevirir, bir satırı c ile çarpmak determinantı c katına çıkarır. Bir satırın katını başka bir satıra eklemek ise determinantı hiç değiştirmez; hesabın omurgası budur.

Örnek 17.2 (Satır İşlemleriyle Determinant). $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix}$ determinantını satır işlemleriyle hesaplayınız.

Çözüm.

Birinci sütunu temizleyelim; kullanılan işlemler bir satırın katını başka bir satıra eklemek olduğundan determinant değişmez:

$$R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2, \quad R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Şimdi $R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3$:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 5 = -5$$

Kontrol. Üçüncü mertebe kuralı da aynı sonucu verir ✓

$$\begin{aligned} & 1(3 \cdot (-4) - 1 \cdot 8) - 2(2 \cdot (-4) - 1 \cdot 3) + (-1)(2 \cdot 8 - 3 \cdot 3) \\ &= 1(-20) - 2(-11) - 1(7) \\ &= -20 + 22 - 7 = -5 \end{aligned}$$

■

17.7 Regülerlik Ölçütü

Önerme 17.2 (Elemanter Matrisle Çarpım). $\hat{E}$ bir *elemanter matris* ve A aynı mertebeden bir kare matris olsun. O zaman

$$|\hat{E}A| = |\hat{E}| \cdot |A|$$

Ayrıca $|\hat{E}| \neq 0$ 'dır.

İspat.

$\hat{E}A$ matrisi, A 'ya karşılık gelen elemanter satır işleminin uygulanmasıyla elde edilir. Üç işlemi tek tek ele alalım; $\hat{E}$ 'nin determinantı, aynı işlemin I_n 'e uygulanmasıyla bulunur.

Satır değişimi. $|\hat{E}| = -|I_n| = -1$ ve $|\hat{E}A| = -|A|$ 'dır; eşitlik sağlanır.

Bir satırı $c \neq 0$ ile çarpmak. $\hat{E}$ köşegeninde bir tane c , kalanında 1 bulunan köşegen bir matristir, yani $|\hat{E}| = c$; ayrıca $|\hat{E}A| = c|A|$ 'dır.

Bir satırın katını başka satıra eklemek. $\hat{E}$ üçgenseldir ve köşegeni bütünüyle 1'lerden oluşur, yani $|\hat{E}| = 1$; ayrıca $|\hat{E}A| = |A|$ 'dir. Üç durumda da $|\hat{E}| \in \{-1, c, 1\}$ sıfırdan farklıdır.

■

Teorem 17.4 (Regülerliğin Determinant Ölçütü). n . mertebeden bir A kare matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul $|A| \neq 0$ olmasıdır.

İspat.

A , satır işlemleriyle bir R satır kanonik şekline indirgensin. Her satır işlemi bir elemanter matrisle soldan çarpmaya karşılık geldiğinden

$$R = \hat{E}_m \cdots \hat{E}_2 \hat{E}_1 A$$

Determinant alıp bir önceki önermeyi ardışık olarak uygulayalım:

$$|R| = |\hat{E}_m| \cdots |\hat{E}_1| \cdot |A|$$

Baştaki çarpanların hepsi sıfırdan farklı olduğundan

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |R| \neq 0$$

Şimdi iki hâli ayıralım. **Regülerlik ölçütü** gereği A regülerse $R = I_n$ 'dir ve $|R| = 1 \neq 0$ olur. A regüler değilse aynı sonucun notunda belirtildiği gibi R 'nin bir satırı tamamen sıfırdır ve $|R| = 0$ olur. İki hâl birleştirilirse

$$A \text{ regüler} \Leftrightarrow |R| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

■

i Denk koşullar listesi

A , n . mertebeden bir kare matris olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A regülerdir (tersi vardır).
2. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ 'dir.
3. $A \cdot x = 0$ homojen sisteminin yalnız sıfır çözümü vardır.
4. $\text{rank}(A) = n$ 'dir, yani satırları (ve sütunları) lineer bağımsızdır.
5. A elemanter matrislerin bir çarpımıdır.
6. $|A| \neq 0$ 'dır.

İlk beşi **regülerlik ölçütü** ve **rank** bölümlerinde kurulmuştu; determinant listeye altıncı ve hesaplanması en kolay olan maddeyi ekler.

17.8 Çarpımın Determinantı

Teorem 17.5 (Çarpımın Determinantı Determinantların Çarpımıdır). Aynı mertebeden her A, B kare matrisleri için

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

İspat.

Birinci hâl: A regüler değil. O zaman $|A| = 0$ olduğundan sağ taraf sıfırdır; sol tarafın da sıfır olduğunu görelim. A regüler olmadığından $\text{rank}(A) < n$ 'dir. Öte yandan AB 'nin j . sütunu, A ile B 'nin j . sütununun çarpımıdır; yani AB 'nin her sütunu A 'nın sütunlarının bir lineer kombinasyonudur. Demek ki AB 'nin sütun uzayı A 'nın sütun uzayının içinde kalır:

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) < n$$

Öyleyse AB de regüler değildir ve $|AB| = 0$ 'dır. İki taraf da sıfırdır.

İkinci hâl: A regüler. Bu durumda A , elemanter matrislerin bir çarpımıdır:

$$A = \hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_m$$

Elemanter matrisle çarpım önermesini ardışık olarak uygulayalım. Önce $B = I_n$ alarak

$$|A| = |\hat{E}_1| |\hat{E}_2| \cdots |\hat{E}_m|$$

Sonra aynı önermeyi AB çarpımına uygulayalım:

$$|AB| = |\hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_m B| = |\hat{E}_1| |\hat{E}_2| \cdots |\hat{E}_m| \cdot |B| = |A| \cdot |B|$$

■

Sonuç 17.1 (Ters Matrisin Determinantı). A regüler ise

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

İspat.

$AA^{-1} = I_n$ eşitliğinin determinantını alalım:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |I_n| = 1$$

A regüler olduğundan $|A| \neq 0$ 'dır; her iki tarafı $|A|$ 'ya bölmek yeter.

■

⚠ Toplam için benzer bir kural yoktur

$|A + B|$ ile $|A| + |B|$ genellikle farklıdır. Örneğin $A = I_2$ ve $B = -I_2$ için $|A| + |B| = 1 + 1 = 2$ iken $A + B$ sıfır matristir ve $|A + B| = 0$ 'dır.

17.9 Alıştırma

Alıştırma 17.1 (Determinant Hesapları).

1. $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$ olacak biçimdeki bütün $k \in \mathbb{R}$ değerlerini bulunuz.
2. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.
3. $A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$ için $|A| = 0$ denklemini çözünüz.
4. A ve B aynı mertebeden regüler matrisler olsun. $|A^{-1}BA| = |B|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. $|A| = 2k^2 - 4k = 2k(k - 2)$ olduğundan $k = 0$ ya da $k = 2$ 'dir.

2. Kesirlerden kurtulmak için birinci satırı 6, ikinci satırı 4 ile çarpalım. Her çarpma determinantı o çarpanla büyüttüğünden, sonuçta çıkan sayıyı 24'e bölmemiz gerekecek:

$$24|A| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Sağdaki determinanı üçgensel şekle indirgeyerek hesaplayalım. Önce $R_1 \leftrightarrow R_3$ ile başa 1 getirelim; satır değişimi işareti çevirir:

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix}$$

$R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2$ ve $R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3$ (determinant değişmez):

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$R_3 \rightarrow -\frac{3}{7}R_2 + R_3$ ile üçgensel şekle inelim; son köşe $-5 + 3 = -2$ olur:

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - (1 \cdot 14 \cdot (-2)) = 28$$

Öyleyse $24 |A| = 28$ ve $|A| = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$ 'dır.

3. Determinantı, üçüncü mertebe kuralını birinci satıra göre gruplayarak açalım:

$$\begin{aligned} |A| &= (t+3) [(t-3)(t+4)+6] - (-1) [5(t+4)-6] + 1 [-30-6(t-3)] \\ &= (t+3) [t^2+t-12+6] + [5t+14] + [-30-6t+18] \\ &= (t+3) (t^2+t-6) + 5t+14-6t-12 \\ &= (t+3)(t+3)(t-2) - t+2 \\ &= (t+3)^2(t-2) - (t-2) = (t-2) [(t+3)^2-1] \end{aligned}$$

Köşeli parantezi çarpanlara ayıralım: $(t+3)^2-1 = (t+3-1)(t+3+1) = (t+2)(t+4)$. Öyleyse

$$|A| = (t-2)(t+2)(t+4)$$

ve $|A| = 0$ denkleminin çözümleri $t = 2, t = -2, t = -4$ 'tür.

4. Çarpımın determinanı kuralını iki kez ve ters matrisin determinanı sonucunu bir kez kullanalım:

$$|A^{-1}BA| = |A^{-1}| \cdot |B| \cdot |A| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot |A| = |B|$$

(Skalerler değişmeli olduğundan sıralama serbesttir.) Bu, **benzer matrislerin determinantlarının eşit olduğunu** söyler; iz ve rank gibi determinant da tabandan bağımsız bir büyüklüktür.

■

18. Kofaktör Açılımı ve Ters Matris

Determinantı tanımından hesaplamak $n!$ terim yazmak demektir. Bir önceki bölümde satır işlemleriyle üçgensel şekle inip köşegeni çarpmanın çok daha kısa olduğunu gördük. Bu bölümde üçüncü bir yol kuruyoruz: n . mertebeden bir determinantı, $(n - 1)$. mertebeden n tane determinanta indirgeyen **kofaktör açılımı**. Bu açılım, hem hesap için hem de ters matrisin kapalı formülü için kullanılacak.

18.1 Minör ve Kofaktör

Tanım 18.1 (Minör ve Kofaktör). $A = (a_{ij})$, n . mertebeden bir kare matris olsun ($n \geq 2$). A 'nın i . satırı ile j . sütunu silinerek elde edilen $(n - 1)$. mertebeden kare matris M_{ij} ile gösterilir; $|M_{ij}|$ sayısına a_{ij} elemanının **minörü** denir.

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

sayısına ise a_{ij} elemanının **kofaktörü** (işaretli minörü) denir.

İşaret şablonu

$(-1)^{i+j}$ çarpanı, satranç tahtası gibi dizilen bir işaret şablonundan okunur:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Sol üst köşe daima $+$ 'dır; komşu her adımda işaret değişir.

Örnek 18.1 (Bir Kofaktörün Hesabı).

- a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinde $a_{23} = 7$ elemanının kofaktörünü bulunuz.
- b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinde $b_{23} = 7$ elemanının kofaktörünü bulunuz.

Çözüm.

a) İkinci satır ile üçüncü sütunu silelim:

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{23}| = 18 - 24 = -6$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}(-6) = (-1)(-6) = 6$$

b) İkinci satır ile üçüncü sütun silinince

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

kalır. Üçüncü mertebe kuralıyla:

$$\begin{aligned}
 |M_{23}| &= 2(0 \cdot 2 - (-3)(-2)) - 1(4 \cdot 2 - (-3) \cdot 3) + 4(4(-2) - 0 \cdot 3) \\
 &= 2(-6) - 1(8 + 9) + 4(-8) = -12 - 17 - 32 = -61 \\
 B_{23} &= (-1)^{2+3}(-61) = 61
 \end{aligned}$$

■

18.2 Laplace Açılımı

Teorem 18.1 (Bir Satıra veya Sütuna Göre Açılım). A , n . mertebeden bir kare matris olsun ($n \geq 2$). Her i için

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

ve her j için

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Yani determinant, herhangi bir satırın (ya da sütunun) elemanları kendi kofaktörleriyle çarpılıp toplanarak hesaplanabilir.

İspat.

İspatı üç adımda kuruyoruz.

1. Adım: sol üst köşe. A 'nın birinci satırı $(a_{11}, 0, \dots, 0)$ olsun. Determinant tanımındaki terimlerden $\sigma(1) \neq 1$ olanların hepsi sıfırdır (birinci satırdan gelen çarpan sıfır olur). Geriye $\sigma(1) = 1$ olan permütasyonlar kalır; bunlar $\{2, \dots, n\}$ kümesinin permütasyonlarıyla birebir eşleşir ve $\sigma(1) = 1$ hiçbir ters üretmediğinden işaretleri de aynıdır. Öyleyse

$$|A| = a_{11} \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \text{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \dots a_{n\sigma'(n)} = a_{11} |M_{11}|$$

2. Adım: tek elemanlı satır, genel yer. Şimdi A 'nın i . satırı, yalnız j . sütununda a_{ij} bulunan, kalanı sıfır olan bir satır olsun. i . satırı, komşu satırlarla $i - 1$ kez yer değiştirerek en üste taşıyalım; sonra j . sütunu, komşu sütunlarla $j - 1$ kez yer değiştirerek en sola taşıyalım. Her yer değiştirme determinantın işaretini çevirdiğinden toplam işaret çarpanı

$$(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i+j}$$

olur. Bu taşımalar kalan satır ve sütunların **görelî sırasını bozmaz**; dolayısıyla elde edilen matrisin sol üst köşesi a_{ij} , geri kalanı ise tam olarak M_{ij} 'dir. 1. adım gereği

$$|A| = (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}| = a_{ij} A_{ij}$$

3. Adım: satırda toplamsallık. Herhangi bir A matrisinin i . satırını

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in})$$

biçiminde n satırın toplamı olarak yazalım. **Determinantın her satırda toplamsal olduğunu** bir önceki bölümde göstermiştik; öyleyse

$$|A| = \sum_{j=1}^n |A^{(j)}|$$

Burada $A^{(j)}$, i . satırı yalnız j . sütunda a_{ij} taşıyan matristir. 2. adım gereği $|A^{(j)}| = a_{ij} A_{ij}$ 'dir; toplarsak satıra göre açılım elde edilir.

Sütun hâli. $|A| = |A^t|$ olduğundan, satır açılımını A^t 'ye uygulamak sütun açılımını verir.

■

❓ Hangi satırı seçmeli?

Açılım her satır ve sütun için geçerli olduğundan, **en çok sıfır içeren** satırı ya da sütunu seçmek en kısa hesabı verir. Daha da iyisi: önce satır (ya da sütun) işlemleriyle bir satırda tek bir sıfırdan farklı eleman bırakmak, sonra ona göre açmaktır. Bir satırın katını başka bir satıra eklemek determinanti değiştirmedikinden bu adım bedavadır.

Örnek 18.2 (Dördüncü Mertebeden Bir Determinant).

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

Dördüncü satırın ilk elemanı 1; bunu kullanarak birinci sütunun kalanını sıfırlayalım. Kullanılan işlemler determinanti değiştirmez:

$$R_1 \rightarrow -5R_4 + R_1, \quad R_2 \rightarrow -2R_4 + R_2, \quad R_3 \rightarrow 5R_4 + R_3$$

Satırları tek tek hesaplayalım:

$$R_1 : (5, 4, 2, 1) - 5(1, -2, -1, 4) = (0, 14, 7, -19)$$

$$R_2 : (2, 3, 1, -2) - 2(1, -2, -1, 4) = (0, 7, 3, -10)$$

$$R_3 : (-5, -7, -3, 9) + 5(1, -2, -1, 4) = (0, -17, -8, 29)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -17 & -8 & 29 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Birinci sütunda yalnız $a_{41} = 1$ sıfırdan farklı; bu sütuna göre açalım. İşaret $(-1)^{4+1} = -1$ 'dir:

$$= 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 14 & 7 & -19 \\ 7 & 3 & -10 \\ -17 & -8 & 29 \end{vmatrix}$$

Kalan üçüncü mertebeden determinanti birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} & 14 (3 \cdot 29 - (-10)(-8)) - 7 (7 \cdot 29 - (-10)(-17)) + (-19) (7(-8) - 3(-17)) \\ &= 14(87 - 80) - 7(203 - 170) - 19(-56 + 51) = 14(7) - 7(33) - 19(-5) \\ &= 98 - 231 + 95 = -38 \end{aligned}$$

Öyleyse determinant $(-1)(-38) = 38$ 'dir.

■

Örnek 18.3 (Önce Sıfır Üretmek). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

İkinci satırda zaten bir sıfır var. Sütun işlemi yaparak ikinci satırı tek elemanlı hâle getirelim: $C_3 \rightarrow 2C_1 + C_3$ (sütun işlemleri de determinanti değiştirmez, çünkü $|A| = |A^t|$):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4+6 \\ 1 & 0 & -2+2 \\ -2 & 3 & 3-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Şimdi ikinci satıra göre açalım; yalnız $a_{21} = 1$ kaldı ve işareti $(-1)^{2+1} = -1$ 'dir:

$$= 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$$

■

18.3 Ek Matris

Kofaktör açılımı yalnızca bir hesap yöntemi değildir; ters matrisin kapalı formülünü de verir. Bunun için kofaktörleri bir matrise yerleştiriyoruz — dikkat: **transpoze alarak**.

Tanım 18.2 (Ek (Adjoint) Matris). A , n . mertebeden bir kare matris ve A_{ij} , a_{ij} elemanının kofaktörü olsun. Kofaktörler matrisinin transpozesine A 'nın **ek matrisi** denir ve ek A ile gösterilir:

$$\text{ek } A = (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Yani ek A matrisinin (i, j) girdisi A_{ji} 'dir.

Örnek 18.4 (Bir Ek Matrisin Hesabı). $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin ek matrisini bulunuz.

Çözüm.

Dokuz kofaktörü işaret şablonuna dikkat ederek hesaplayalım:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 2 = -18, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 4) = -11$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 3) = 5$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 0) = -4$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

Kofaktörler matrisini yazıp transpozisini alalım:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ek } A = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

■

Teorem 18.2 (Ek Matris Çarpımı). n . mertebeden her A kare matrisi için

$$A \cdot \text{ek } A = \text{ek } A \cdot A = |A| \cdot I_n$$

İspat.

$A \cdot \text{ek } A$ çarpımının (i, k) girdisini yazalım. $\text{ek } A$ 'nın (j, k) girdisi A_{kj} olduğundan

$$(A \cdot \text{ek } A)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}$$

Köşegen üzerinde ($i = k$). Toplam, $|A|$ 'nin i . satıra göre kofaktör açılımıdır:

$$\sum_j a_{ij} A_{ij} = |A|$$

Köşegen dışında ($i \neq k$). A matrisinin k . satırını silip yerine i . satırının bir kopyasını koyarak elde edilen matrise B diyelim. B 'nin i . ve k . satırları aynı olduğundan $|B| = 0$ 'dır. Öte yandan B 'nin k . satırı $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ 'dir ve k . satır dışındaki satırlar A ile aynı olduğundan B 'nin k . satıra ait kofaktörleri A 'nunkilerle birebir aynıdır: $B_{kj} = A_{kj}$. $|B|$ 'yi k . satıra göre açalım:

$$0 = |B| = \sum_j b_{kj} B_{kj} = \sum_j a_{ij} A_{kj}$$

Demek ki çarpımın köşegen girdileri $|A|$, diğer girdileri 0'dır:

$$A \cdot \text{ek } A = |A| I_n$$

$\text{ek } A \cdot A$ için aynı hesap sütun açılımıyla yapılır.

■

Sonuç 18.1 (Tersin Ek Matrisle Formülü). $|A| \neq 0$ ise A regülerdir ve

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ek } A$$

İspat.

$|A| \neq 0$ olduğundan $A \cdot \text{ek } A = |A| I_n$ eşitliğinin iki tarafını $|A|$ 'ya bölebiliriz:

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \text{ek } A \right) = I_n$$

Kare matrisler için $AB = I_n$ olması $B = A^{-1}$ demek olduğundan sonuç çıkar.

■

Örnek 18.5 (Ek Matrisle Ters Hesabı). Bir önceki örnekteki $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm.

Determinantı, birinci sütuna göre açarak hesaplayalım (bu sütunda bir sıfır var):

$$|A| = 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 2(-18) + 1(-10) = -46$$

$|A| = -46 \neq 0$ olduğundan A regülerdir:

$$A^{-1} = \frac{1}{-46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{4}{23} \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci satır ile birinci sütunu çarpalım:

$$2 \cdot \frac{9}{23} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{23}\right) + (-4) \left(-\frac{2}{23}\right) = \frac{18 - 3 + 8}{23} = \frac{23}{23} = 1 \checkmark$$

■

⚠ Hangi yöntem?

Ek matris formülü **kuramsal** olarak değerlidir: tersin girdilerinin, A 'nın girdilerinin bir polinomu (bölü $|A|$) olduğunu gösterir. Hesap için ise pahalıdır $-n$. mertebede n^2 tane $(n-1)$. mertebeden determinant istenir. Sayısal hesapta **Gauss-Jordan yöntemi** tercih edilir. Formül asıl olarak 2×2 ve 3×3 matrislerde ve teorik akıl yürütmelerde kullanılır.

Örnek 18.6 (İkinci Mertebede Ek Matris). $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. ek A 'yı ve ek (ek A)'yı bulunuz.

Çözüm.

İkinci mertebede minörler tek elemanlıdır: a_{11} 'in minörü d , a_{12} 'ninki c , a_{21} 'inki b , a_{22} 'ninki a 'dır. İşaret şablonuyla

$$A_{11} = d, \quad A_{12} = -c, \quad A_{21} = -b, \quad A_{22} = a$$

Kofaktörler matrisi $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$; transpozisini alalım:

$$\text{ek } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bu, “köşegeni değiştir, diğer ikisinin işaretini çevir” biçiminde bilinen kuraldır; $|A| = ad - bc \neq 0$ iken

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aynı kuralı ek A 'ya uygularsak

$$\text{ek (ek } A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

yani ikinci mertebede ek matris almak, iki kez uygulandığında matrisi geri verir.

■

18.4 Alıştırma

Alıştırma 18.1 (Determinant Hesapları). Aşağıdaki determinantları hesaplayınız.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

Çözüm.

1. Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} & 1 \left((-2)(-1) - 3 \cdot 5 \right) - 2 \left(4(-1) - 3 \cdot 2 \right) + 3 \left(4 \cdot 5 - (-2) \cdot 2 \right) \\ & = (2 - 15) - 2(-4 - 6) + 3(20 + 4) = -13 + 20 + 72 = 79 \end{aligned}$$

2. Birinci satırda bir sıfır var; yine birinci satıra göre açalım:

$$2 \left(2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \right) - 0 + 1 \left(4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \right) = 2(2 + 9) + (12 - 10) = 22 + 2 = 24$$

3. Aynı biçimde:

$$2 \left(2 \cdot 5 - (-3)(-3) \right) - 0 + 1 \left(3(-3) - 2(-1) \right) = 2(10 - 9) + (-9 + 2) = 2 - 7 = -5$$

4. Birinci satırda iki sıfır var; açılımda tek terim kalır:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$$

5. Bu kez ikinci **sütuna** göre açmak en kısasıdır; o sütunda yalnız $a_{32} = -3$ sıfırdan farklıdır ve işareti $(-1)^{3+2} = -1$ 'dir:

$$-(-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(4 + 3) = 21$$

6. Önce köşede bir 1 üretelim: $R_1 \rightarrow R_3 + R_1$ işlemi determinanti değiştirmez ve

$$R_1 : (3, -2, -5, 4) + (-2, 4, 7, -3) = (1, 2, 2, 1)$$

verir. Şimdi bu satırla birinci sütunun kalanını temizleyelim:

$$R_2 \rightarrow 5R_1 + R_2 = (0, 12, 18, 0)$$

$$R_3 \rightarrow 2R_1 + R_3 = (0, 8, 11, -1)$$

$$R_4 \rightarrow -2R_1 + R_4 = (0, -7, -9, 6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 18 & 0 \\ 0 & 8 & 11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 18 & 0 \\ 8 & 11 & -1 \\ -7 & -9 & 6 \end{vmatrix}$$

Kalan determinanti birinci satıra göre açalım (üçüncü elemanı sıfırdır):

$$\begin{aligned} & 12 \left(11 \cdot 6 - (-1)(-9) \right) - 18 \left(8 \cdot 6 - (-1)(-7) \right) = 12(66 - 9) - 18(48 - 7) \\ & = 12(57) - 18(41) = 684 - 738 = -54 \end{aligned}$$

■

Alıştırma 18.2 (Kofaktör ve Ek Matris). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor.

1. $|A|$ determinantını hesaplayınız.
2. ek A matrisini bulunuz.
3. $A \cdot \text{ek } A = |A| I_3$ eşitliğini doğrulayınız.

4. A^{-1} matrisini bulunuz.

Çözüm.

1. Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} |A| &= 1(3 \cdot 7 - 4 \cdot 5) - 2(2 \cdot 7 - 4 \cdot 1) + 3(2 \cdot 5 - 3 \cdot 1) \\ &= 1(21 - 20) - 2(14 - 4) + 3(10 - 3) = 1 - 20 + 21 = 2 \end{aligned}$$

2. Dokuz kofaktör:

$$\begin{aligned} A_{11} &= +(21 - 20) = 1, & A_{12} &= -(14 - 4) = -10, & A_{13} &= +(10 - 3) = 7 \\ A_{21} &= -(14 - 15) = 1, & A_{22} &= +(7 - 3) = 4, & A_{23} &= -(5 - 2) = -3 \\ A_{31} &= +(8 - 9) = -1, & A_{32} &= -(4 - 6) = 2, & A_{33} &= +(3 - 4) = -1 \end{aligned}$$

Kofaktörler matrisinin transpozesi:

$$\text{ek } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Çarpalım:

$$A \cdot \text{ek } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Birinci satır: $(1 - 20 + 21, 1 + 8 - 9, -1 + 4 - 3) = (2, 0, 0)$.

İkinci satır: $(2 - 30 + 28, 2 + 12 - 12, -2 + 6 - 4) = (0, 2, 0)$.

Üçüncü satır: $(1 - 50 + 49, 1 + 20 - 21, -1 + 10 - 7) = (0, 0, 2)$.

$$A \cdot \text{ek } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 = |A| I_3 \checkmark$$

4. $|A| = 2$ olduğundan

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

■

19. Cramer Kuralı ve Operatörün Determinantı

Determinantı, ortaya çıkışına yakın bir soruya döndürüyoruz: bir lineer denklem sistemini çözmek. Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğunda çözüm, tümüyle determinantlarla yazılabilir. Bölümün ikinci yarısında ise determinantın matristen operatöre taşınmasını tamamlıyoruz.

19.1 Cramer Kuralı

n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir sistemi ele alalım:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Matris diliyle bu sistem $A \cdot x = b$ 'dir; burada $A = (a_{ij})$ katsayı matrisi, x ve b ise sütun matrislerdir.

Tanım 19.1 (Sistemin Determinantları). Yukarıdaki sistem için

$$\Delta := |A|$$

sayısına **sistemin determinantı** denir. Ayrıca Δ_i , A 'nın i . sütunu b sütunuyla değiştirilerek elde edilen matrisin determinantıdır:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (b \text{ sütunu } i. \text{ sırada})$$

Teorem 19.1 (Cramer Kuralı). Yukarıdaki sistemin **tek** çözümünün olması için gerek ve yeter koşul $\Delta \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda çözüm

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

İspat.

Tek çözüm ölçütü. Sistem $Ax = b$ biçimindedir. A regülerse her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpmak $x = A^{-1}b$ verir; bu tek çözümdür. A regüler değilse $Ax = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir x_0 çözümü vardır ([denk koşullar listesi](#)); bu durumda sistemin ya hiç çözümü yoktur ya da bir x^* çözümü varsa $x^* + x_0$ da çözümdür, yani çözüm tek değildir. Demek ki tek çözümün varlığı A 'nın regülerliğine, o da $\Delta = |A| \neq 0$ koşuluna denktir.

Formül. $\Delta \neq 0$ olsun. Tersin ek matrisle formülü gereği

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\Delta} \text{ek } A \cdot b$$

ek A 'nın (i, j) girdisi A_{ji} olduğundan, x 'in i . bileşeni

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n A_{ji} b_j$$

Sağdaki toplama bakalım. A 'nın i . sütununu b ile değiştirerek elde edilen matrise C diyelim. C ile A , i . sütun dışında aynı olduğundan C 'nin i . sütununa ait kofaktörleri A 'ninkilerle birebir aynıdır (i . sütun silindiğinde kalan matris değişmez). $|C|$ 'yi i . sütuna göre açalım:

$$\Delta_i = |C| = \sum_{j=1}^n c_{ji} C_{ji} = \sum_{j=1}^n b_j A_{ji}$$

İki eşitliği birleştirirsek $x_i = \Delta_i / \Delta$ bulunur.

■

⚠ İki uyarı

1. Kural yalnızca **denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit** olduğunda kullanılabilir; aksi hâlde A kare olmadığından Δ tanımlı bile değildir.
2. $\Delta = 0$ ise kural hiçbir şey söylemez: sistemin çözümü olmayabilir de, sonsuz çözümü olabilir de. Bu durumda **Gauss yok etme yöntemine** dönmek gerekir.

Örnek 19.1 (İki Bilinmeyenli Sistemler). Aşağıdaki sistemleri Cramer kuralıyla çözünüz.

- a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} ax - 2by = c \\ ab \neq 0 \text{ olmak üzere } 3ax - 5by = 2c \end{cases}$

Çözüm.

a) Üç determinantı yazalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 = 19, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 3 = 38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$$

$\Delta = 19 \neq 0$ olduğundan tek çözüm vardır:

$$x = \frac{38}{19} = 2, \quad y = \frac{-19}{19} = -1$$

Kontrol. $2(2) - 3(-1) = 7$ ✓ ve $3(2) + 5(-1) = 1$ ✓

b)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 4 = -39$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$$

$$x = \frac{-39}{-13} = 3, \quad y = \frac{-13}{-13} = 1$$

c)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{vmatrix} = -5ab + 6ab = ab$$

$ab \neq 0$ olduğundan tek çözüm vardır.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & -2b \\ 2c & -5b \end{vmatrix} = -5bc + 4bc = -bc, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ 3a & 2c \end{vmatrix} = 2ac - 3ac = -ac$$

$$x = \frac{-bc}{ab} = -\frac{c}{a}, \quad y = \frac{-ac}{ab} = -\frac{c}{b}$$

■

Örnek 19.2 (Üç Bilinmeyenli Bir Sistem).

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

sistemini Cramer kuralıyla çözünüz.

Çözüm.

Sistemin determinantı. Birinci satıra göre açalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(15 - 4) - 3(9 + 2) + (-1)(6 + 5) = 22 - 33 - 11 = -22$$

$\Delta \neq 0$ olduğundan sistemin tek çözümü vardır.

Δ_x . Birinci sütun b ile değiştirilir:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(15 - 4) - 3(24 - 2) + (-1)(16 - 5) = 11 - 66 - 11 = -66$$

Δ_y . İkinci sütun değiştirilir:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(24 - 2) - 1(9 + 2) + (-1)(3 + 8) = 44 - 11 - 11 = 22$$

Δ_z . Üçüncü sütun değiştirilir:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(5 - 16) - 3(3 + 8) + 1(6 + 5) = -22 - 33 + 11 = -44$$

Bölelim:

$$x = \frac{-66}{-22} = 3, \quad y = \frac{22}{-22} = -1, \quad z = \frac{-44}{-22} = 2$$

Kontrol. $2(3) + 3(-1) - 2 = 1$ ✓, $3(3) + 5(-1) + 2(2) = 8$ ✓, $-3 + 2(-1) + 3(2) = 1$ ✓

■

19.2 Homojen Sistemler

Teorem 19.2 (Homojen Sistemin Sıfırdan Farklı Çözümü). n bilinmeyenli n denklemden oluşan $A \cdot x = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün bulunması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta = |A| = 0$$

olmasıdır.

İspat.

Homojen sistemin her zaman $x = 0$ çözümü vardır. Cramer kuralına göre $\Delta \neq 0$ ise çözüm tektir, yani yalnız sıfır çözümü bulunur. Tersine $\Delta = 0$ ise A regüler değildir; *denk koşullar listesi* gereği bu, $Ax = 0$ sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün olması demektir.

■

i Not

Bu ölçüt, ilerideki bölümlerin en çok kullanılan aracıdır: bir sayının **özdeğer** olması, tam olarak uygun bir homojen sistemin sıfırdan farklı çözümü olması demektir ve bu da bir determinantın sıfır olmasına indirgenir.

19.3 Bir Lineer Operatörün Determinantı

Rank ve iz gibi determinant da taban seçiminden bağımsızdır; bunu göstermek için tek gereken çarpım kuralıdır.

Teorem 19.3 (Benzer Matrislerin Determinantları Eşittir). $A \sim B$ ise $|A| = |B|$ 'dir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olsun; P regüler olduğundan $|P| \neq 0$ 'dır. Çarpımın determinantı kuralını iki kez uygulayalım:

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \frac{1}{|P|} \cdot |A| \cdot |P| = |A|$$

Determinantlar K 'nın elemanları, yani skalerler olduğundan sıraları serbestçe değiştirilebilir.

■

Tanım 19.2 (Bir Operatörün Determinantı). V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $T \in A(V)$ ve e, V 'nin herhangi bir tabanı olsun. T 'nin **determinantı**

$$\det(T) := |[T]_e|$$

biçiminde tanımlanır. T 'nin iki matris gösterimi benzer ve benzer matrislerin determinantları eşit olduğundan tanım e tabanının seçiminden bağımsızdır.

Teorem 19.4 (Operatör Determinantının Özellikleri). V sonlu boyutlu ve $S, T \in A(V)$ olsun.

(i) $\det(S \circ T) = \det(S) \cdot \det(T)$

(ii) T 'nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $\det(T) \neq 0$ olmasıdır; bu durumda

$$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$$

İspat.

e, V 'nin bir tabanı olsun.

(i) *Bileşkenin matrisi matrislerin çarpımı* olduğundan $[S \circ T]_e = [S]_e[T]_e$ 'dir. Determinant alıp çarpım kuralını kullanalım:

$$\det(S \circ T) = |[S]_e[T]_e| = |[S]_e| \cdot |[T]_e| = \det(S) \det(T)$$

(ii) $T \mapsto [T]_e$ eşlemesi bir cebir izomorfizmi olduğundan T tersinirdir ancak ve ancak $[T]_e$ regülerse. Regülerlik ölçütü gereği bu da $|[T]_e| \neq 0$, yani $\det(T) \neq 0$ demektir.

T tersinir olsun. $T \circ T^{-1} = I$ ve $\det(I) = |I_n| = 1$ olduğundan (i) gereği

$$\det(T) \cdot \det(T^{-1}) = 1$$

$\det(T) \neq 0$ olduğundan iki tarafı bölmek yeter.

■

Örnek 19.3 (İki Operatörün Determinantı). Aşağıdaki operatörlerin determinantlarını bulunuz.

- a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x - z, x + 2y - 4z, 3x - 3y + z)$
 b) $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, S(x, y, z) = (2x - 4y + z, x - 2y + 3z, 5x + y - z)$

Çözüm.

a) Standart tabanda matris, katsayı matrisidir:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} \det(T) &= 2 (2 \cdot 1 - (-4)(-3)) - 0 + (-1) (1(-3) - 2 \cdot 3) \\ &= 2(2 - 12) - 1(-3 - 6) = -20 + 9 = -11 \end{aligned}$$

$\det(T) = -11 \neq 0$ olduğundan T tersinirdir.

b)

$$[S]_e = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(S) &= 2 ((-2)(-1) - 3 \cdot 1) - (-4) (1(-1) - 3 \cdot 5) + 1 (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 5) \\ &= 2(2 - 3) + 4(-1 - 15) + (1 + 10) = -2 - 64 + 11 = -55 \end{aligned}$$

■

19.4 Alıştırma

Alıştırma 19.1 (Cramer Kuralı ve Operatör Determinantı).

- $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ sistemini Cramer kuralıyla çözünüz.
- $\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün bulunduğu k değerlerini belirleyiniz.
- $T \in A(V)$ singüler ise $\det(T) = 0$ olduğunu gösteriniz.
- $\det(kT) = k^n \det(T)$ olduğunu gösteriniz ($n = \dim V$).

Çözüm.

1. Katsayı matrisinin determinantını birinci satıra göre açalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - 3) - 2(-2 - 3) + 1(2 + 1) = -2 + 10 + 3 = 11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(1 - 3) - 2(-5 - 0) + 1(5 - 0) = -6 + 10 + 5 = 9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5 - 0) - 3(-2 - 3) + 1(0 - 5) = -5 + 15 - 5 = 5$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0 - 5) - 2(0 - 5) + 3(2 + 1) = -5 + 10 + 9 = 14$$

$$x = \frac{9}{11}, \quad y = \frac{5}{11}, \quad z = \frac{14}{11}$$

Kontrol. Üçüncü denklem: $\frac{9}{11} + \frac{5}{11} - \frac{14}{11} = 0$ ✓

2. $\Delta = k^2 - 1$ 'dir. Sıfırdan farklı çözümün bulunması için $\Delta = 0$, yani $k = 1$ ya da $k = -1$ olmalıdır.

3. T singüler ise $\text{Ker } T \neq \{0\}$ 'dir, yani $T(v) = 0$ olacak biçimde bir $v \neq 0$ vardır. e bir taban olmak üzere temel eşitlik gereği

$$[T]_e \cdot [v]_e = [T(v)]_e = 0$$

$v \neq 0$ olduğundan $[v]_e \neq 0$ 'dır; demek ki $[T]_e x = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü vardır. Homojen sistem ölçütü gereği $|[T]_e| = 0$, yani $\det(T) = 0$ 'dır.

4. $[kT]_e = k[T]_e$ 'dir. Bir matrisin bütün girdilerini k ile çarpmak, n satırın her birini k ile çarpmak demektir; her satır çarpımı determinantı k katına çıkardığından

$$\det(kT) = |k[T]_e| = k^n |[T]_e| = k^n \det(T)$$

■

20. Matris ve Operatör Polinomları

Bir kare matrisin kuvvetleri tanımlıydı ve skalerle çarpılıp toplanabiliyordu; bu iki işlem bir arada, bir polinomu bir matriste “hesaplama” imkânı verir. Sonraki bölümlerin bütün araçları — karakteristik polinom, Cayley-Hamilton teoremi, köşegenleştirme ölçütü — bu basit fikrin üzerine kurulur.

20.1 Bir Matriste Polinom

Tanım 20.1 (Matris Polinomu). K üzerinde

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

bir polinom ve A , m . mertebeden bir kare K -matris olsun. f 'nin A 'daki değeri

$$f(A) := a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_m$$

kare matrisidir. Burada $A^0 = I_m$ olarak alınır; yani sabit terim birim matrisle çarpılır.

⚠ Sabit terim skaler değil, skaler matristir

$f(A)$ bir matristir; toplamın her terimi de matris olmalıdır. Bu yüzden sabit terim a_0 değil $a_0 I_m$ 'dir. $f(A) = 0$ yazıldığında da sağ taraf sıfır **matrisidir**.

Örnek 20.1 (İki Polinomun Değeri). $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$ ve $g(t) = t^2 - 5t - 2$ polinomları ile $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor. $f(A)$ ve $g(A)$ 'yı hesaplayınız.

Çözüm.

Önce A^2 'yi bulalım:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$f(A)$:

$$\begin{aligned} f(A) &= 2A^2 - 3A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14-3+7 & 20-6+0 \\ 30-9+0 & 44-12+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$g(A)$:

$$g(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Tanım 20.2 (Bir Polinomun Kökü Olan Matris). $f(A) = 0$ ise A matrisine $f(t)$ polinomunun bir kökü (sıfırı) denir.

Yukarıdaki örnekte $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisi $g(t) = t^2 - 5t - 2$ polinomunun bir köküdür. Bu bir rastlantı değildir: ilerideki bölümlerde her kare matrisin, kendi **karakteristik polinomunun** bir kökü olduğunu göreceğiz — g tam olarak bu matrisin karakteristik polinomudur.

20.2 İşlemlerle Uyum

Teorem 20.1 (Değerlendirme İşlemleri Korur). $f(t)$ ve $g(t)$, K üzerinde polinomlar; A bir kare K -matris ve $k \in K$ olsun. O zaman

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A), \quad (f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A), \quad (kf)(A) = k f(A)$$

İspat.

$f(t) = \sum_i a_i t^i$ ve $g(t) = \sum_j b_j t^j$ olsun.

Toplam. $(f + g)(t) = \sum_i (a_i + b_i) t^i$ olduğundan

$$(f + g)(A) = \sum_i (a_i + b_i) A^i = \sum_i a_i A^i + \sum_i b_i A^i = f(A) + g(A)$$

Çarpım. $(f \cdot g)(t) = \sum_i \sum_j a_i b_j t^{i+j}$ ’dir. Değerlendirirsek

$$(f \cdot g)(A) = \sum_i \sum_j a_i b_j A^{i+j}$$

Öte yandan matris çarpımı toplama üzerine dağıldığından

$$f(A) \cdot g(A) = \left(\sum_i a_i A^i \right) \left(\sum_j b_j A^j \right) = \sum_i \sum_j a_i b_j A^i A^j = \sum_i \sum_j a_i b_j A^{i+j}$$

İki taraf aynıdır. Burada $A^i A^j = A^{i+j}$ eşitliği kullanıldı.

Skalerle çarpım. $(kf)(t) = \sum_i (ka_i) t^i$ olduğundan $(kf)(A) = \sum_i ka_i A^i = k f(A)$ ’dir.

■

Sonuç 20.1 (Aynı Matrisin Polinomları Değişmelidir). Her f, g polinomu ve her kare A matrisi için

$$f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$$

İspat.

Polinom çarpımı değişmelidir: $f \cdot g = g \cdot f$. Bir önceki teoremi iki yönde de uygulayalım:

$$f(A)g(A) = (f \cdot g)(A) = (g \cdot f)(A) = g(A)f(A)$$

■

i Not

Matris çarpımı genel olarak değişmeli değildir; ama **aynı** matristen üretilen polinomlar birbiriyle değişir. Sebep basittir: $A^i A^j = A^j A^i$ ’dir. Bu, ileride çarpanlara ayırma yaparken serbestçe kullanacağımız bir kolaylıktır.

20.3 Operatör Polinomları

Aynı tanım lineer operatörler için **operatörler cebri** bölümünde verilmişti: $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0$ ve $T \in A(V)$ olmak üzere

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0 I$$

operatörü tanımlanıyor ve $f(T) = 0$ olduğunda T 'ye f 'nin bir kökü deniyordu. Tek fark, birim matrisin yerini birim operatörün almasıdır.

Matrisler için yukarıda ispatlanan üç eşitlik, operatörler için de aynen geçerlidir; ispatları sözcüğü sözcüğüne aynıdır, çünkü operatörler cebri de toplama, skalerle çarpma ve bileşke işlemleriyle matris cebriyle aynı kuralları sağlar. Aşağıdaki teorem bu benzerliğin tesadüf olmadığını gösterir.

Teorem 20.2 (Polinom Matris Gösterimiyle Değişir). V sonlu boyutlu, e bir tabanı ve $T \in A(V)$ olsun. $A = [T]_e$ olmak üzere her f polinomu için

$$[f(T)]_e = f(A)$$

Özel olarak

$$f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$$

İspat.

Operatör cebri ile matris cebri bölümünde $T \mapsto [T]_e$ eşleminin bir **cebir izomorfizmi** olduğunu görmüştük: toplamı toplama, skalerle çarpımı skalerle çarpıma, bileşkeyi matris çarpımına götürür ve birim operatörü birim matrise gönderir. Bileşkeyi koruduğundan kuvvetleri de korur:

$$[T^i]_e = ([T]_e)^i = A^i$$

$f(t) = \sum_i a_i t^i$ olsun. Toplama ve skalerle çarpma korunduğundan

$$[f(T)]_e = \left[\sum_i a_i T^i \right]_e = \sum_i a_i [T^i]_e = \sum_i a_i A^i = f(A)$$

Son ifade için: eşleme bire bir olduğundan $f(T)$ sıfır operatörü olması ile $[f(T)]_e$ sıfır matris olması aynı şeydir. ■

🔍 Neden önemli?

Bu teorem, operatörlerle ilgili polinom sorularını matris hesabına çevirir. “ T şu polinomun kökü müdür?” sorusunu cevaplamak için bir taban seçip matrisi yazmak ve sayısal bir hesap yapmak yeter; üstelik hangi tabanın seçildiği sonucu değiştirmez, çünkü farklı tabanlardaki matrisler benzerdir ve benzerlik polinom almayla uyumludur: $[f(T)]_f = P^{-1} f([T]_e) P$.

Örnek 20.2 (İki Hesap).

- a) $f(t) = t^2 - 3t + 7$ ve $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ için $f(A)$ 'yı bulunuz.
b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin $f(t) = t^2 - 4t - 5$ polinomunun bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8 & -2-10 \\ 4+20 & -8+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - 3A + 7I_2 = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7-3+7 & -12+6 \\ 24-12 & 17-15+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 4+12 \\ 2+6 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^2 - 4A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demek ki A , $f(t)$ 'nin bir köküdür.

■

20.4 Alıştırma

Alıştırma 20.1 (Polinom Hesapları).

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ve $f(t) = t^2 - 5t + 6$ için $f(A)$ 'yı hesaplayınız.
2. A köşegen bir matris ve köşegen elemanları $d_1, \dots, d_n$ ise $f(A)$ 'nın da köşegen olduğunu ve köşegen elemanlarının $f(d_1), \dots, f(d_n)$ olduğunu gösteriniz.
3. A , $f(t)$ 'nin bir kökü ve P regüler ise $P^{-1}AP$ matrisinin de $f(t)$ 'nin bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2-3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^2 - 5A + 6I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A üçgensel olduğundan köşegeni 2 ve 3'tür; $f(t) = (t-2)(t-3)$ polinomu bu iki sayıda sıfırlanıyor. Bir sonraki alıştırma bunun neden beklendiğini açıklıyor.

2. Köşegen matrislerin çarpımı köşegendir ve köşegen elemanları çarpılır; tümevarımla

$$A^i = \text{diag} (d_1^i, d_2^i, \dots, d_n^i)$$

Skalerle çarpma ve toplama da köşegen üzerinde ayrı ayrı yapıldığından

$$f(A) = \sum_i a_i A^i = \text{diag} \left(\sum_i a_i d_1^i, \dots, \sum_i a_i d_n^i \right) = \text{diag} (f(d_1), \dots, f(d_n))$$

3. Benzerlik ve kuvvetler teoremi gereği her i için $(P^{-1}AP)^i = P^{-1}A^iP$ 'dir. Öyleyse

$$f(P^{-1}AP) = \sum_i a_i P^{-1}A^iP = P^{-1} \left(\sum_i a_i A^i \right) P = P^{-1}f(A)P = P^{-1} \cdot 0 \cdot P = 0$$

(Sabit terimde $a_0 I_n = P^{-1}a_0 I_n P$ olduğu kullanıldı.)

■

21. Özdeğerler ve Özvektörler

Bir operatörün matrisini köşegen yapan taban aramak, [benzerlik](#) bölümünde ortaya çıkan sorumuzdu. $[T]_f$ matrisinin köşegen olması, f tabanının her f_j vektörü için

$$T(f_j) = k_j f_j$$

demektir: T , f_j 'nin yönünü değiştirmiyor, yalnızca bir katsayıyla ölçekliyor. Böyle vektörleri ve karşılardaki katsayıları incelemeye başlıyoruz.

21.1 Tanım

Tanım 21.1 (Özdeğer ve Özvektör). V , K üzerinde bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. Bir $\lambda \in K$ skaleri için

$$T(v) = \lambda v$$

olacak biçimde **sıfırdan farklı** bir $v \in V$ vektörü varsa, λ 'ya T 'nin bir **özdeğeri**, v 'ye de λ özdeğerine ait bir **özvektörü** denir.

⚠ Sıfır vektör özvektör değildir

$T(0) = 0 = \lambda \cdot 0$ eşitliği her λ için doğrudur; sıfır vektörü özvektör saysaydık her skaler özdeğer olurdu ve kavram anlamsızlaşırdı. Buna karşılık $\lambda = 0$ **özdeğer olabilir**: $T(v) = 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir v varsa, yani T singülerse, 0 bir özdeğerdir.

Bir özvektörün sıfırdan farklı her katı yine aynı özdeğere ait bir özvektördür: $T(kv) = kT(v) = k\lambda v = \lambda(kv)$. Dahası, aynı özdeğere ait özvektörler sıfır vektörüyle birlikte bir alt uzay oluşturur.

Önerme 21.1 (Öz Uzay). $\lambda \in K$ ve

$$V_\lambda := \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

olsun. V_λ , V 'nin bir alt uzayıdır ve

$$V_\lambda = \text{Ker} (\lambda I - T)$$

λ bir özdeğer ise V_λ 'ya λ 'nın **öz uzayı** denir.

İspat.

$v \in V$ için

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda v - T(v) = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - T)(v) = 0$$

olduğundan V_λ , $\lambda I - T$ lineer operatörünün çekirdeğidir. Çekirdek bir alt uzay olduğundan V_λ bir alt uzayıdır. ■

Teorem 21.1 (Özdeğerin Singülerlik Ölçütü). $\lambda \in K$ skalerinin T 'nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul, $\lambda I - T$ operatörünün **singüler** olmasıdır.

İspat.

λ bir özdeğerdir $\Leftrightarrow T(v) = \lambda v$ olacak biçimde $v \neq 0$ vardır $\Leftrightarrow (\lambda I - T)(v) = 0$ olacak biçimde $v \neq 0$ vardır $\Leftrightarrow \text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda I - T$ singülerdir.

■

Örnek 21.1 (İki Basit Örnek).

- a) Birim operatör I_V 'nin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.
b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ operatörünün (yani $y = x$ doğrusuna göre yansımanın) özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm.

a) Her v için $I_V(v) = v = 1 \cdot v$ olduğundan sıfırdan farklı her vektör bir özvektördür ve tek özdeğer $\lambda = 1$ 'dir. Öz uzay bütün V 'dir.

b) $T(x, y) = \lambda(x, y)$ eşitliğini yazalım:

$$y = \lambda x, \quad x = \lambda y$$

Birinciye ikincide yerine koyalım: $x = \lambda^2 x$. $x = 0$ olursa birinci denklemden $y = 0$ çıkar; bu sıfır vektörüdür, kabul edilmez. Öyleyse $x \neq 0$ ve $\lambda^2 = 1$, yani $\lambda = 1$ ya da $\lambda = -1$ 'dir.

$\lambda = 1$ için $y = x$; öz uzay $y = x$ doğrusudur ve $(1, 1)$ bir özvektördür.

$\lambda = -1$ için $y = -x$; öz uzay $y = -x$ doğrusudur ve $(1, -1)$ bir özvektördür.

Geometrik olarak beklenen sonuç: yansıma, ayna doğrusu üzerindeki vektörleri değiştirmez, doğruya dik olanları ters çevirir. $\{(1, 1), (1, -1)\}$ tabanında T 'nin matrisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ köşegen matrisidir.

■

21.2 Matrisler İçin

A , n . mertebeden bir kare K -matris olsun. A 'yı, K^n üzerinde $v \mapsto A \cdot v$ operatörü olarak okuyabiliriz; bu operatörün özdeğer ve özvektörlerine A 'nın özdeğer ve özvektörleri denir. Açık yazılışı:

$$A \cdot v = \lambda v, \quad v \neq 0$$

Bu denklemi $(\lambda I_n - A) v = 0$ biçiminde yazarsak, aradığımız şey bir **homojen sistemin sıfırdan farklı çözümü** olur. **Homojen sistem ölçütü** tam olarak bu durumu bir determinanta bağlar:

$$\lambda, A \text{ 'nın bir özdeğeridir} \Leftrightarrow |\lambda I_n - A| = 0$$

Örnek 21.2 (İkinci Mertebeden Bir Matrisin Özdeğerleri). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve her özdeğere ait öz uzayı bulunuz.

Çözüm.

Özdeğerler. $(tI_2 - A) v = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı çözümü olması için determinantı sıfır olmalıdır:

$$|tI_2 - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 6 = t^2 - 3t - 4$$

$$t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4 \text{ veya } t = -1$$

$\lambda = 4$ için öz uzay. $t = 4$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3x - 2y = 0$$

İki denklem birbirinin katıdır; serbest değişkene keyfi değer verelim. $x = 2$ için $y = 3$:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \{kv : k \in \mathbb{R}\}$$

Kontrol. $A v = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4v \checkmark$

$\lambda = -1$ için öz uzay. $t = -1$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0$$

$x = 1$ için $y = -1$:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_{-1} = \{k w : k \in \mathbb{R}\}$$

Kontrol. $A w = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -w \checkmark$

■

💡 Hesabın iskeleti

Bir matrisin özdeğer ve özvektörlerini bulmak daima üç adımdır:

1. $|tI_n - A| = 0$ denklemini kurup köklerini bulun — bunlar özdeğerlerdir.
2. Her özdeğer λ için t yerine λ koyup $(\lambda I_n - A)x = 0$ homojen sistemini çözün.
3. Çözüm uzayının bir tabanını yazın; bu, λ 'nın öz uzayının tabanıdır.

İkinci adımda sistemin **her zaman** sıfırdan farklı çözümü vardır; çıkmıyorsa birinci adımda ya da çözümde bir hesap hatası var demektir.

21.3 Farklı Özdeğerler, Bağımsız Özvektörler

Köşegenleştirmeye giden yolun kilit taşı aşağıdaki teoremdir.

Teorem 21.2 (Farklı Özdeğerlere Ait Özvektörler Lineer Bağımsızdır). $v_1, v_2, \dots, v_m, T$ operatörünün sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ özdeğerlerine ait özvektörleri olsun. Özdeğerler ikişer ikişer farklı ise ($i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$) $v_1, \dots, v_m$ lineer bağımsızdır.

İspat.

m üzerinden tümevarım yapalım.

Başlangıç. $m = 1$ için: $v_1 \neq 0$ olduğundan tek elemanlı $\{v_1\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Adım. İddia $m - 1$ için doğru olsun ve

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0 \quad (*)$$

olsun. T 'yi uygulayalım; T lineer ve $T(v_i) = \lambda_i v_i$ olduğundan

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_m \lambda_m v_m = 0 \quad (**)$$

Şimdi $(*)$ 'i λ_m ile çarpıp $(**)$ 'dan çıkaralım. Son terimler birbirini götürür:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_m)v_2 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0$$

Tümevarım varsayımı gereği $v_1, \dots, v_{m-1}$ lineer bağımsızdır; öyleyse bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

Özdeğerler farklı olduğundan $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ 'dır ve K bir cisim olduğundan $a_i = 0$ çıkar. Bunları $(*)$ 'da yerine koyarsak $a_m v_m = 0$ kalır; $v_m \neq 0$ olduğundan $a_m = 0$ 'dır. Bütün katsayılar sıfır olduğuna göre $v_1, \dots, v_m$ lineer bağımsızdır.

■

Sonuç 21.1 (n Farklı Özdeğer). $\dim V = n$ ve $T \in A(V)$ operatörünün n tane farklı özdeğeri varsa, bu özdeğerlere ait özvektörler V 'nin bir tabanını oluşturur.

İspat.

n tane farklı özdeğere ait n özvektör, yukarıdaki teorem gereği lineer bağımsızdır. n boyutlu bir uzayda n tane lineer bağımsız vektör bir taban oluşturur.

■

⚠ Tersini doğru değildir

Teorem, farklı özdeğerlere ait özvektörlerin bağımsız olduğunu söyler; bunun tersi, yani “lineer bağımsız özvektörlerin özdeğerleri farklıdır” ifadesi **yanlıştır**. Aynı özdeğere ait öz uzay birden çok boyutlu olabilir; o zaman aynı özdeğerin lineer bağımsız birden çok özvektörü bulunur. Birim operatör bunun en uç örneğidir: tek özdeğeri 1’dir, ama sıfırdan farklı her vektör özvektörüdür.

21.4 Alıştırma

Alıştırma 21.1 (Özdeğer ve Özvektör Hesapları).

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve öz uzaylarını bulunuz.
2. λ , T 'nin bir özdeğeri ve v buna ait bir özvektör ise, her $m \in \mathbb{Z}^+$ için λ^m 'nin T^m 'nin bir özdeğeri ve v 'nin buna ait bir özvektörü olduğunu gösteriniz.
3. $0 \in K$ skalerinin T 'nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşulun T 'nin singüler olması olduğunu gösteriniz.
4. T tersinir ve λ bir özdeğeri ise $\lambda \neq 0$ olduğunu ve λ^{-1} 'in T^{-1} 'in bir özdeğeri olduğunu gösteriniz.
5. λ , A 'nın bir özdeğeri ise her f polinomu için $f(\lambda)$ 'nin $f(A)$ 'nin bir özdeğeri olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1.

$$|tI_2 - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3) - 2 = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$$

Özdeğerler 1 ve 4’tür.

$$t = 1: \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y = 0. y = 1 \text{ için } x = -2:$$

$$V_1 = \{ k(-2, 1) : k \in \mathbb{R} \}$$

$$t = 4: \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0. x = 1 \text{ için } y = 1:$$

$$V_4 = \{ k(1, 1) : k \in \mathbb{R} \}$$

2. $T(v) = \lambda v$ olsun. T 'yi bir kez daha uygulayalım:

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$$

Aynı adımı tekrarlayarak (tümevarımla) her m için $T^m(v) = \lambda^m v$ elde edilir. $v \neq 0$ olduğundan λ^m , T^m 'nin bir özdeğeri.

3. Tanımı $\lambda = 0$ için yazalım:

$$0, T \text{ 'nin özdeğeri } \Leftrightarrow T(v) = 0 \cdot v = 0 \text{ olacak biçimde } v \neq 0 \text{ vardır}$$

Sağ taraf, $\text{Ker } T \neq \{0\}$ demektir; bu da tanım gereği T 'nin **singüler** olmasıdır.

4. $\lambda = 0$ olsaydı 3. şık gereği T singüler, yani tersinmez olurdu. Öyleyse $\lambda \neq 0$ 'dır ve λ^{-1} vardır.

$T(v) = \lambda v$ eşitliğine soldan T^{-1} uygulayalım:

$$v = T^{-1}(\lambda v) = \lambda T^{-1}(v) \Rightarrow T^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$$

$v \neq 0$ olduğundan λ^{-1}, T^{-1} 'in bir özdeğeridir.

5. $f(t) = \sum_i a_i t^i$ olsun. 2. sıktaki hesabın matris hâli her i için $A^i v = \lambda^i v$ verir ($A^0 v = I v = v = \lambda^0 v$). Toplayalım:

$$f(A) v = \sum_i a_i A^i v = \sum_i a_i \lambda^i v = \left(\sum_i a_i \lambda^i \right) v = f(\lambda) v$$

$v \neq 0$ olduğundan $f(\lambda), f(A)$ 'nın bir özdeğeridir.

■

22. Karakteristik Polinom ve Cayley-Hamilton Teoremi

Önceki bölümde özdeğerleri $|tI_n - A| = 0$ denkleminin kökleri olarak bulmuştuk. Soldaki ifade, t değişkenine bağlı bir polinomdur ve matrisin en önemli tek değişmezini oluşturur. Bu bölümde onu adlandırıp özelliklerini çıkarıyoruz.

22.1 Karakteristik Polinom

Tanım 22.1 (Karakteristik Matris ve Karakteristik Polinom). $A = (a_{ij})$, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris ve t bir değişken olsun.

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisine A 'nın **karakteristik matrisi**, determinantına ise A 'nın **karakteristik polinomu** denir:

$$\Delta_A(t) := |tI_n - A|$$

$\Delta_A(t) = 0$ denkleminin A 'nın **karakteristik denklemi** denir.

Önerme 22.1 (Karakteristik Polinomun Baş ve Son Katsayıları). $\Delta_A(t)$, katsayıları K 'dan olan n . dereceden bir polinomdur ve

$$\Delta_A(t) = t^n - \text{iz}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

İspat.

Derece ve baş katsayı. Determinant tanımındaki her terim, her satırdan bir çarpan alır. Değişken t yalnızca köşegende bulunduğundan, en yüksek dereceli terim ancak bütün çarpanlar köşegenden alındığında ortaya çıkar; bu da birim permütasyona karşılık gelen

$$(t - a_{11})(t - a_{22})\cdots(t - a_{nn})$$

çarpımıdır. Başka her permütasyon köşegen dışından en az iki çarpan aldığından derecesi en çok $n - 2$ 'dir. Öyleyse t^n ve t^{n-1} katsayıları yalnız yukarıdaki çarpımdan gelir. Çarpımı açarsak t^n 'nin katsayısı 1, t^{n-1} 'in katsayısı ise

$$-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -\text{iz}(A)$$

Sabit terim. Bir polinomun sabit terimi, $t = 0$ konarak bulunur:

$$\Delta_A(0) = |0 \cdot I_n - A| = |-A|$$

$-A$, A 'nın her satırının -1 ile çarpılmasıyla elde edilir; n satır için

$$|-A| = (-1)^n |A|$$

■

i Not

İki katsayı, iki tanıdık büyüklüğü geri veriyor: t^{n-1} 'in katsayısı $-\text{iz}(A)$, sabit terim $(-1)^n |A|$. Bu, hesabın doğruluğunu denetlemenin en hızlı yoludur: karakteristik polinomu bulduktan sonra iki katsayıyı iz ve determinantla karşılaştırın.

Örnek 22.1 (Üçüncü Mertebeden Bir Karakteristik Polinom). $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz.

Çözüm.

Karakteristik matrisi yazalım:

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-1 & -3 & 0 \\ 2 & t-2 & 1 \\ -4 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım (üçüncü elemanı sıfır olduğundan iki terim kalır):

$$\begin{aligned} \Delta_A(t) &= (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 0 & t+2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & t+2 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)(t-2)(t+2) + 3(2(t+2) + 4) \\ &= (t-1)(t^2-4) + 3(2t+8) = t^3 - 4t - t^2 + 4 + 6t + 24 \\ \Delta_A(t) &= t^3 - t^2 + 2t + 28 \end{aligned}$$

Kontrol. $\text{iz}(A) = 1 + 2 - 2 = 1$ olduğundan t^2 'nin katsayısı -1 olmalıydı ✓. Determinant

$$|A| = 1(2(-2) - (-1) \cdot 0) - 3((-2)(-2) - (-1) \cdot 4) + 0 = -4 - 3(8) = -28$$

olduğundan sabit terim $(-1)^3(-28) = 28$ olmalıydı ✓

■

22.2 Özdeğerler Karakteristik Polinomun Kökleridir

Teorem 22.1 (Özdeğerlerin Karakterizasyonu). A, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris olsun. Bir $\lambda \in K$ skalerinin A 'nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta_A(\lambda) = 0$$

olmasıdır.

İspat.

Zincirleme denklikleri yazalım:

$$\begin{aligned} \lambda, A \text{ 'nın özdeğeri} &\Leftrightarrow (\lambda I_n - A)v = 0 \text{ olacak biçimde } v \neq 0 \text{ vardır} \\ &\Leftrightarrow \lambda I_n - A \text{ singülerdir} \\ &\Leftrightarrow |\lambda I_n - A| = 0 \Leftrightarrow \Delta_A(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

İkinci denklik özdeğerin singülerlik ölçütü, üçüncüsü ise **regülerliğin determinant ölçütüdür.**

■

❓ Kaç özdeğer olabilir?

$\Delta_A(t)$, n . dereceden bir polinomdur; bir cisim üzerinde n . dereceden bir polinomun en çok n kökü olduğundan, n . mertebeden bir matrisin **en çok n farklı özdeğeri** vardır. Kaç tane olduğu K 'ya bağlıdır. $K = \mathbb{C}$ ise cebirin esas teoremi gereği her polinomun en az bir kompleks kökü vardır; öyleyse **her kompleks kare matrisin en az bir özdeğeri vardır**. $K = \mathbb{R}$ ise durum farklıdır: $t^2 + 1$ gibi reel kökü olmayan bir karakteristik polinom, hiç reel özdeğeri olmayan bir matris demektir.

Teorem 22.2 (Benzer Matrislerin Karakteristik Polinomları Aynıdır). $A \sim B$ ise $\Delta_A(t) = \Delta_B(t)$ 'dir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olacak biçimde regüler bir P olsun. $P^{-1}(tI_n)P = tI_n$ olduğuna dikkat ederek yazalım:

$$\begin{aligned}\Delta_B(t) &= |tI_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tI_n)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(tI_n - A)P| = |P^{-1}| \cdot |tI_n - A| \cdot |P| \\ &= \frac{1}{|P|} \cdot |tI_n - A| \cdot |P| = \Delta_A(t)\end{aligned}$$

■

Tanım 22.2 (Bir Operatörün Karakteristik Polinomu). V , n boyutlu bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. T 'nin **karakteristik polinomu**, T 'nin herhangi bir matris gösteriminin karakteristik polinomu-
dur:

$$\Delta_T(t) := \Delta_{[T]_e}(t)$$

T 'nin iki matris gösterimi benzer olduğundan ve benzer matrislerin karakteristik polinomları aynı olduğundan tanım taban seçiminden bağımsızdır. $\Delta_T(t)$ 'nin derecesi $n = \dim V$ 'dir ve bir $\lambda \in K$ skalerinin T 'nin özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $\Delta_T(\lambda) = 0$ olmasıdır.

⚠ Tersı doğru değildir

“Benzer matrislerin karakteristik polinomları aynıdır” ifadesinin tersi yanlıştır: aynı karakteristik polinoma sahip iki matris benzer olmak zorunda değildir. **Köşegenleştirme** bölümünde, karakteristik polinomları özdeş olduğu hâlde biri köşegenleştirilebilen, diğeri köşegenleştirilemeyen iki matris göreceğiz; bunlar benzer olamaz.

22.3 Cayley-Hamilton Teoremi

Teorem 22.3 (Cayley-Hamilton Teoremi). Her kare matris, kendi karakteristik polinomunun bir köküdür:

$$\Delta_A(A) = 0$$

İspat.

$\Delta_A(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0$ olsun.

$B(t)$ ile $tI_n - A$ karakteristik matrisinin **ek matrisini** gösterelim. $B(t)$ 'nin girdileri, $tI_n - A$ 'nın $(n-1)$. mertebeden minörleri olduğundan t 'nin derecesi en çok $n-1$ olan polinomlardır. Öyleyse $B(t)$, girdileri sabit olan matrislerle

$$B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \dots + B_1t + B_0$$

biçiminde yazılabilir; burada $B_0, \dots, B_{n-1}$ sabit n . mertebeden kare matrislerdir. *Ek matris çarpımı* teoremini $tI_n - A$ matrisine uygulayalım:

$$(tI_n - A) B(t) = |tI_n - A| I_n = \Delta_A(t) I_n$$

Sol tarafı açalım:

$$(tI_n - A) B(t) = B_{n-1}t^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})t^{n-1} + \dots \\ \dots + (B_0 - AB_1)t - AB_0$$

Sağ taraf ise

$$\Delta_A(t)I_n = I_n t^n + c_{n-1}I_n t^{n-1} + \dots + c_1 I_n t + c_0 I_n$$

İki polinom matrisi eşitse aynı dereceli katsayı matrisleri eşittir:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I_n \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= c_{n-1}I_n \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1 I_n \\ -AB_0 &= c_0 I_n \end{aligned}$$

Şimdi bu eşitlikleri sırasıyla soldan $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I_n$ ile çarpıp taraf tarafa toplayalım. Sağ tarafların toplamı

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I_n = \Delta_A(A)$$

Sol tarafların toplamında ise ardışık terimler birbirini götürür:

$$A^n B_{n-1} + (A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1}) + \dots + (AB_0 - A^2 B_1) - AB_0 = 0$$

Demek ki $\Delta_A(A) = 0$ 'dır.

■

⚠ Sık yapılan hata

“ $\Delta_A(t) = |tI - A|$ ifadesinde t yerine A yazalım: $\Delta_A(A) = |AI - A| = |0| = 0$ ” akıl yürütmesi **geçersizdir**. $|tI - A|$ ifadesinde t bir skalerdir; yerine bir matris koymak tanımsızdır. Yukarıdaki ispat tam da bu boşluğu kapatmak için yapılır.

Örnek 22.2 (Teoremin Sayısal Doğrulaması). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi için Cayley-Hamilton teoremini doğrulayınız.

Çözüm.

Karakteristik polinom bir önceki bölümde bulunmuştu:

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 6 = t^2 - 3t - 4$$

Şimdi t yerine A koyalım. Önce A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+4 \\ 3+6 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_A(A) = A^2 - 3A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

22.4 Cayley-Hamilton ile Ters Hesabı

Teoremin en kullanışlı sonucu, tersi bir polinom hesabına indirger.

Sonuç 22.1 (Tersin Cayley-Hamilton'la Bulunması). $\Delta_A(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0$ ve $c_0 \neq 0$ olsun. O zaman A regülerdir ve

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0} \left(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_2A + c_1I_n \right)$$

İspat.

Sabit terim $c_0 = (-1)^n |A|$ olduğundan $c_0 \neq 0$ olması $|A| \neq 0$, yani A 'nın regüler olması demektir. Cayley-Hamilton teoremi gereği

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I_n = 0$$

Sabit terimi karşıya atalım ve kalan terimlerin ortak çarpanı olarak A 'yı ayıralım:

$$A \left(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_1I_n \right) = -c_0I_n$$

İki tarafı $-c_0$ 'a bölersek, A ile çarpımı I_n veren matris ortaya çıkar; kare matrisler için bu matris A^{-1} 'dir. ■

Örnek 22.3 (Cayley-Hamilton ile Ters). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini Cayley-Hamilton teoremiyle bulunuz.

Çözüm.

Karakteristik polinom:

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)(t-1) - 1 = t^2 - 3t + 1$$

Teorem gereği $A^2 - 3A + I_2 = 0$ 'dır. Buradan

$$\begin{aligned} A^2 - 3A &= -I_2 \quad \Rightarrow \quad A(A - 3I_2) = -I_2 \\ \Rightarrow \quad A(3I_2 - A) &= I_2 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = 3I_2 - A \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kontrol. $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$ ■

22.5 Alıştırma

Alıştırma 22.1 (Karakteristik Polinom Üzerine).

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz ve reel özdeğerlerinin olup olmadığını araştırınız.
2. A ile A^t 'nin karakteristik polinomlarının aynı olduğunu gösteriniz.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ matrisinin kökü olduğu bir polinom bulunuz.
4. Üçgensel bir matrisin özdeğerlerinin köşegen elemanları olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -4 & t+1 \end{vmatrix} = (t-3)(t+1) + 8 = t^2 - 2t + 5$$

Diskriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ olduğundan polinomun reel kökü yoktur; A 'nın reel özdeğeri yoktur. (Kompleks sayılar cismi üzerinde bakılırsa kökler $1 \pm 2i$ 'dir.)

Kontrol. iz $(A) = 3 - 1 = 2$ ve $|A| = -3 + 8 = 5$; katsayılar -2 ve $(+1)^2 \cdot 5 = 5$ olmalıydı ✓

2. $(tI_n - A)^t = tI_n^t - A^t = tI_n - A^t$ 'dir. Bir matrisle transpozisinin determinantları eşit olduğundan

$$\Delta_A(t) = |tI_n - A| = |(tI_n - A)^t| = |tI_n - A^t| = \Delta_{A^t}(t)$$

3. Cayley-Hamilton teoremi gereği her matris kendi karakteristik polinomunun köküdür; öyleyse

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -5 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} = (t-2)(t+3) - 5 = t^2 + t - 11$$

polinomu aranan polinomlardan biridir.

Doğrulama. $A^2 = \begin{pmatrix} 4+5 & 10-15 \\ 2-3 & 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$A^2 + A - 11I_2 = \begin{pmatrix} 9+2-11 & -5+5 \\ -1+1 & 14-3-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

4. A üçgensel ise $tI_n - A$ da üçgenseldir ve köşegeni $t - a_{11}, \dots, t - a_{nn}$ 'dir. Üçgensel bir matrisin determinantı köşegeninin çarpımı olduğundan

$$\Delta_A(t) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn})$$

Bu polinomun kökleri $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 'dir; özdeğerler karakteristik polinomun kökleri olduğundan iddia ispatlanmıştır.

■

23. Köşegenleştirme

Bütün bölümün sorusuna geldik: bir operatörün matrisi ne zaman köşegen yapılabilir? Benzerlik bölümünde ölçütü matris diliyle yazmıştık — $P^{-1}AP$ köşegen olacak biçimde regüler bir P var mı? Özdeğer ve özvektör kavramları elimizde olduğuna göre artık bu soruya tam bir cevap verebiliriz.

23.1 Ölçüt

Teorem 23.1 (Köşegenleştirmenin Özvektör Ölçütü). V, K üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. T 'nin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul, V 'nin T 'nin **özvektörlerinden oluşan bir tabanın** bulunmasıdır.

Bu durumda $f = \{v_1, \dots, v_n\}$ böyle bir taban ve v_i, k_i özdeğerine ait bir özvektör olmak üzere

$$[T]_f = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

yani köşegen üzerindeki elemanlar özdeğerlerdir.

İspat.

Tanım gereği $[T]_f$ matrisinin j . sütunu $[T(v_j)]_f$ 'dir.

Gereklik. $[T]_f$ köşegen ve köşegen elemanları $k_1, \dots, k_n$ olsun. j . sütunda yalnız j . satırda k_j bulunduğundan

$$T(v_j) = 0 \cdot v_1 + \cdots + k_j v_j + \cdots + 0 \cdot v_n = k_j v_j$$

Taban vektörleri sıfırdan farklı olduğundan her v_j bir özvektördür; yani f , özvektörlerden oluşan bir tabandır.

Yeterlik. $f = \{v_1, \dots, v_n\}$ özvektörlerden oluşan bir taban ve $T(v_j) = k_j v_j$ olsun. O zaman $[T(v_j)]_f$, yalnız j . bileşeni k_j olan sütundur; bu sütunlar yan yana konduğunda köşegen matris elde edilir.

■

Aynı ifadenin matris dilindeki karşılığı, hesapta doğrudan kullanacağımız biçimdir.

Sonuç 23.1 (Köşegenleştiren Matris). A , n . mertebeden bir kare K -matris olsun. A 'nın köşegen bir matrise benzer olması için gerek ve yeter koşul, A 'nın n tane **lineer bağımsız özvektörünün** bulunmasıdır. Bu durumda sütunları bu özvektörler olan P matrisi regülerdir ve

$$P^{-1}AP = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

Burada k_i, P 'nin i . sütunundaki özvektörün ait olduğu özdeğerdir.

İspat.

A 'yı K^n üzerinde $v \mapsto Av$ operatörü olarak okuyalım; standart tabanda matrisi A 'dır. Yukarıdaki teorem gereği bu operatör köşegenleştirilebilirdir ancak ve ancak K^n 'in özvektörlerden oluşan bir tabanı, yani n tane lineer bağımsız özvektör varsa.

$v_1, \dots, v_n$ böyle bir taban olsun ve P , sütunları bu vektörler olan matris olsun. P 'nin sütunları lineer bağımsız olduğundan P regülerdir ve tanımı gereği standart tabandan $\{v_1, \dots, v_n\}$ tabanına geçiş matrisidir. **Taban değişimi teoremi** gereği $P^{-1}AP$, operatörün yeni tabandaki matrisidir; teoremin ikinci kısmı bunun $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ olduğunu söyler.

■

💡 Köşegenleştirme adımları

1. $\Delta_A(t) = |tI_n - A|$ karakteristik polinomunu bulun ve köklerini (özdeğerleri) belirleyin.
2. Her özdeğer için $(\lambda I_n - A)x = 0$ sistemini çözüp öz uzayın bir tabanını bulun.
3. Bulunan özvektörleri sayın. Toplam sayı n ise matris köşegenleştirilebilir; n 'den azsa köşegenleştirilemez.
4. P 'yi bu özvektörleri **sütun** olarak yazarak kurun; $P^{-1}AP$ köşegen matrisinin köşegeni, sütunlarla **aynı sırada** özdeğerlerdir.

Sonuç 23.2 (n Farklı Özdeğer Yeter). n . mertebeden bir A matrisinin karakteristik polinomunun K 'da n tane **farklı** kökü varsa A köşegenleştirilebilir.

İspat.

Her farklı özdeğere ait birer özvektör seçelim; **farklı özdeğerlere ait özvektörler lineer bağımsız olduğundan** n tane lineer bağımsız özvektör elde edilir.

■

⚠️ Koşul yeter, gerek değil

n farklı özdeğer bulunması köşegenleştirilebilirlik için yeterlidir ama gerekli değildir. Birim matris tek bir özdeğere (1) sahiptir, buna rağmen zaten köşegendir. Aşağıdaki üçüncü mertebeden örnek de iki özdeğerle köşegenleştirilebilen bir matris gösterecek. Belirleyici olan özdeğerlerin sayısı değil, **lineer bağımsız özvektörlerin** sayısıdır.

23.2 Çözümlü Örnekler

Örnek 23.1 (İkinci Mertebeden Bir Köşegenleştirme). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz; yani $P^{-1}AP$ köşegen olacak biçimde regüler bir P bulunuz.

Çözüm.

Özdeğerler bölümünde bu matrisin özdeğerlerinin 4 ve -1 , karşılık gelen özvektörlerin ise

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 4), \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = -1)$$

olduğunu bulmuştuk. İki farklı özdeğere ait bu iki özvektör lineer bağımsızdır; 2. mertebede iki tane lineer bağımsız özvektör bulunduğuna göre A köşegenleştirilebilir.

P 'yi sütunları v ve w olacak biçimde kuralım:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad |P| = -2 - 3 = -5 \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Şimdi çarpımı yapalım. Önce AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 & 1-2 \\ 6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8+12}{5} & \frac{-1+1}{5} \\ \frac{24-24}{5} & \frac{-3-2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Köşegende, sütunlarla aynı sırada özdeğerler çıktı.

i Not

Aslında P^{-1} 'i hesaplamaya gerek yoktu: AP 'nin sütunları $Av = 4v$ ve $Aw = -w$ olduğundan $AP = P \operatorname{diag}(4, -1)$ 'dir; soldan P^{-1} ile çarpmak sonucu doğrudan verir. Yukarıdaki hesap yalnızca doğrulama amacıyla açık yapılmıştır.

■

Örnek 23.2 (Üçüncü Mertebeden Bir Köşegenleştirme). $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm.

1. Karakteristik polinom. Karakteristik matris

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_A(t) &= (t-1) [(t+5)(t-4) + 18] - 3 [-3(t-4) - 18] - 3 [-18 + 6(t+5)] \\ &= (t-1) (t^2 + t - 20 + 18) - 3(-3t + 12 - 18) - 3(6t + 12) \\ &= (t-1)(t^2 + t - 2) + 9t + 18 - 18t - 36 \\ &= (t-1)(t+2)(t-1) - 9t - 18 \end{aligned}$$

Son satırda $t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1)$ ayrıştırması yapıldı. Şimdi ortak çarpanı görelim: $-9t - 18 = -9(t+2)$ olduğundan

$$\Delta_A(t) = (t+2) [(t-1)^2 - 9] = (t+2)(t-1-3)(t-1+3) = (t+2)^2(t-4)$$

Kontrol. iz $(A) = 1 - 5 + 4 = 0$; polinomu açarsak $t^3 - 12t - 16$ çıkar ve t^2 'nin katsayısı gerçekten 0'dır ✓

Özdeğerler -2 (iki katlı) ve 4 'tür.

2. $\lambda = -2$ öz uzayı. Karakteristik matriste $t = -2$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üç denklem de $x - y + z = 0$ 'a indirgenir. İki serbest değişken vardır:

$$y = 1, z = 0 \Rightarrow x = 1 : u = (1, 1, 0)$$

$$y = 0, z = -1 \Rightarrow x = 1 : v = (1, 0, -1)$$

$\{u, v\}$ lineer bağımsızdır (biri diğerinin katı değil) ve V_{-2} iki boyutludur.

3. $\lambda = 4$ öz uzayı. $t = 4$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x = y$ verir; birinci denklem $x + y - z = 0$ 'dan $z = 2x$ çıkar. $x = 1$ alalım:

$$w = (1, 1, 2), \quad V_4 \text{ bir boyutludur}$$

4. Sonuç. u, v ve w lineer bağımsızdır: u ile v aynı öz uzayda bağımsız, w ise farklı bir özdeğere ait olduğundan onların gerdiği uzayın dışındadır. Üç tane lineer bağımsız özvektör bulunduğuna göre A köşegenleştirilebilir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kontrol. AP 'nin sütunlarını hesaplayalım:

$$Au = (1 - 3, 3 - 5, 6 - 6) = (-2, -2, 0) = -2u \checkmark$$

$$Av = (1 - 3, 3 - 3, 6 - 4) = (-2, 0, 2) = -2v \checkmark$$

$$Aw = (1 - 3 + 6, 3 - 5 + 6, 6 - 6 + 8) = (4, 4, 8) = 4w \checkmark$$

Demek ki $AP = P \text{ diag } (-2, -2, 4)$, yani $P^{-1}AP$ yukarıdaki köşegen matristir. ■

23.3 Köşegenleştirilemeyen Matrisler

Örnek 23.3 (Aynı Karakteristik Polinom, Farklı Sonuç). $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilip köşegenleştirilemeyeceğini araştırınız.

Çözüm.

Karakteristik polinom. Karakteristik matris

$$tI_3 - B = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}$$

Üçüncü sütuna göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_B(t) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & t-5 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} + (t+2) \begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 7 & t-5 \end{vmatrix} \\ &= (-42 - 6t + 30) - (-6t - 18 + 6) + (t+2)(t^2 - 2t - 15 + 7) \\ &= (-6t - 12) - (-6t - 12) + (t+2)(t^2 - 2t - 8) \\ &= (t+2)(t+2)(t-4) = (t+2)^2(t-4) \end{aligned}$$

Bir önceki örnekteki A matrisiyle **aynı** karakteristik polinom çıktı.

$\lambda = -2$ öz uzayı. $t = -2$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x = y$ verir; birinci denklem bununla birlikte $z = 0$ verir. Serbest değişken tek olduğundan öz uzay **bir** boyutludur:

$$u = (1, 1, 0), \quad V_{-2} = \{ku\}$$

$\lambda = 4$ öz uzayı. $t = 4$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x - y + z = 0$, birinci denklem $7x - y + z = 0$ 'dır; farkları $6x = 0$, yani $x = 0$ ve $y = z$ verir:

$$v = (0, 1, 1), \quad V_4 \text{ bir boyutludur}$$

Sonuç. B 'nin yalnızca **iki** lineer bağımsız özvektörü vardır; üç boyutlu uzayın özvektörlerden oluşan bir tabanı kurulamaz. Öyleyse B köşegenleştirilemez.

i İki sonuç birden

Son iki örnek birlikte iki şey söyler.

1. Karakteristik polinom köşegenleştirilebilirliği belirlemez: A ile B 'nin karakteristik polinomları aynı olduğu hâlde A köşegenleştirilebilir, B değildir. Belirleyici olan, katlı bir kökün öz uzayının **boyutudur**.

2. Benzer matrislerin karakteristik polinomları aynıdır ama tersi doğru değildir: $A \sim B$ 'dir, çünkü A köşegen bir matrise benzerken B benzeyemez — benzerlik geçişken olduğundan $A \sim B$ olsaydı B de köşegenleştirilebilirdi.

Örnek 23.4 (Reel Özdeğeri Olmayan Bir Matris). $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisini önce $\mathbb{R}$, sonra $\mathbb{C}$ üzerinde inceleyiniz.

Çözüm.

$$\Delta_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) + 2 = t^2 + 1$$

$\mathbb{R}$ üzerinde. $t^2 + 1$ polinomunun reel kökü yoktur; B 'nin reel özdeğeri yoktur, dolayısıyla reel özvektörü de yoktur ve köşegenleştirilemez.

$\mathbb{C}$ üzerinde. Kökler i ve $-i$ 'dir; iki farklı özdeğer bulunduğu için B kompleks sayılar üzerinde köşegenleştirilebilirdir.

$t = i$ için:

$$\begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ -2 & i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (i-1)x + y = 0$$

$x = 1$ alırsak $y = 1 - i$ ve $v = (1, 1 - i)$ olur.

$t = -i$ için:

$$\begin{pmatrix} -i-1 & 1 \\ -2 & -i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (i+1)x - y = 0$$

$x = 1$ alırsak $y = 1 + i$ ve $w = (1, 1 + i)$ olur.

■

Örnek 23.5 (Tek Özdeğer, Tek Boyutlu Öz Uzay). $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini gösteriniz. Kompleks sayılar üzerinde çalışmak sonucu değiştirir mi?

Çözüm.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-3)(t-1) + 1 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

Tek özdeğer $\lambda = 2$ 'dir. Öz uzayı bulalım:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x + y = 0$$

Tek serbest değişken vardır; $x = 1$ için $v = (1, 1)$ ve $V_2 = \{kv\}$ bir boyutludur. İki boyutlu uzayda yalnız bir lineer bağımsız özvektör bulunduğundan A köşegenleştirilemez.

Kompleks sayılar üzerinde. Karakteristik polinom $(t - 2)^2$ olarak aynı kalır; kökü de yine yalnız 2'dir ve öz uzay hesabı birebir aynı çıkar. Demek ki cismi büyütmek burada bir şey değiştirmez — sorun kökün kompleks olmasında değil, **kathı** olmasındadır.

■

Örnek 23.6 (Bir Operatörün İncelenmesi). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ operatörünün özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz; köşegenleştirilebilir midir?

Çözüm.

Matris gösterimi. Standart tabanda sütunlar $T(e_1) = (2, 0, 0)$, $T(e_2) = (1, 1, 2)$, $T(e_3) = (0, -1, 4)$ 'tür:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Karakteristik polinom. Birinci sütunda yalnız bir eleman sıfırdan farklı; bu sütuna göre açalım:

$$\Delta_T(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 0 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = (t-2) [(t-1)(t-4) + 2]$$

$$= (t-2) (t^2 - 5t + 6) = (t-2)(t-2)(t-3) = (t-2)^2(t-3)$$

Özdeğerler 2 (iki katlı) ve 3'tür.

$\lambda = 2$ öz uzayı.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0, y + z = 0$$

Buradan $y = z = 0$ ve x serbesttir: $u = (1, 0, 0)$ ve V_2 bir boyutludur.

$\lambda = 3$ öz uzayı.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0, 2y + z = 0$$

$y = 1$ alırsak $x = 1, z = -2$: $v = (1, 1, -2)$ ve V_3 bir boyutludur.

Sonuç. Toplam iki lineer bağımsız özvektör var; $\mathbb{R}^3$ 'ün özvektörlerden oluşan bir tabanı kurulamaz. T köşegenleştirilemez.

■

23.4 Alıştırma

Alıştırma 23.1 (Köşegenleştirme Alıştırmaları).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz.
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini gösteriniz.
3. A köşegenleştirilebilir ve $P^{-1}AP = D$ ise, her $m \in \mathbb{Z}^+$ için $A^m = PD^mP^{-1}$ olduğunu gösteriniz ve 1. şıktaki matris için A^3 'ü hesaplayınız.

Çözüm.

1.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-3) - 8 = t^2 - 4t - 5 = (t-5)(t+1)$$

Özdeğerler 5 ve -1'dir.

 $t = 5: \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x - y = 0$; özvektör $v = (1, 1)$. $t = -1: \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x + 2y = 0$; $y = -1$ için $x = 2$, özvektör $w = (2, -1)$.İki farklı özdeğer bulunduğundan A köşegenleştirilebilir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $Av = (1 + 4, 2 + 3) = (5, 5) = 5v$ ✓ ve $Aw = (2 - 4, 4 - 3) = (-2, 1) = -w$ ✓

2.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & 1 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-3) + 1 = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$$

Tek özdeğer 4'tür. Öz uzay:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = y$$

Öz uzay bir boyutludur; iki boyutlu uzayda iki lineer bağımsız özvektör bulunamadığından A köşegenleştirilemez.3. $P^{-1}AP = D$ eşitliğinden $A = PDP^{-1}$ çıkar. Kuvvet alalım; ortadaki $P^{-1}P$ çiftleri sadeleşir:

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD(P^{-1}P)D \dots DP^{-1} = PD^mP^{-1}$$

1. şıktaki matris için $D = \text{diag}(5, -1)$ olduğundan $D^3 = \text{diag}(125, -1)$ 'dir. P^{-1} 'i bulalım: $|P| = -1 - 2 = -3$ olduğundan

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$PD^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & -2 \\ 125 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 125 & -2 \\ 125 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{125-2}{3} & \frac{250+2}{3} \\ \frac{125+1}{3} & \frac{250-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 84 \\ 42 & 83 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 9+32 & 36+48 \\ 8+34 & 32+51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 84 \\ 42 & 83 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

24. Problemler

Kitabın son bölümü yeni bir kavram tanıtmaz; buraya kadar kurulan bütün araçları karma problemler üzerinde bir arada çalıştırır. Sorular kabaca işlenişteki sıraya göre dizilmiştir: önce lineer dönüşümler ve boyut hesapları, sonra determinantlar ve ters matris, ardından özdeğerler ve köşegenleştirme; bölüm, birinci dönemin vektör uzayı konularına dönen bir genel tekrar kısmıyla kapanır.

24.1 Çekirdek, Görüntü, Rank ve Sıfırlık

Örnek 24.1 (Bir Operatörün Rankı ve Sıfırlığı). $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü

$$L(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + z, x - 2y + 2z)$$

biçiminde veriliyor. L 'nin çekirdek ve görüntü uzaylarını belirleyerek rank (L) ile Nullity (L) değerlerini bulunuz. (Bazı kaynaklarda Nullity yerine **sıfırlık** terimi geçer; ikisi aynı sayıdır.)

Çözüm.

Görüntü. Standart taban vektörlerinin görüntüleri $\text{Im } L$ 'yi doğurur:

$$L(1, 0, 0) = (1, 2, 1), \quad L(0, 1, 0) = (2, 0, -2), \quad L(0, 0, 1) = (-1, 1, 2)$$

Bu üç vektörü satır olarak yazıp merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

İkinci satırı -4 'e bölüp üçüncü satırdan çıkaralım:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{ (1, 2, 1), (0, 1, 1) \} \text{ bir tabandır,} \quad \text{rank } (L) = \dim(\text{Im } L) = 2$$

Çekirdek. $L(x, y, z) = (0, 0, 0)$ denklem sistemini çözelim:

$$x + 2y - z = 0, \quad 2x + z = 0, \quad x - 2y + 2z = 0$$

İkinciden $z = -2x$. Bunu birincide yerine koyalım: $x + 2y + 2x = 0$, yani $3x + 2y = 0$ ve $y = -\frac{3}{2}x$. Üçüncü denklem kendiliğinden sağlanır:

$$x - 2\left(-\frac{3}{2}x\right) + 2(-2x) = x + 3x - 4x = 0 \checkmark$$

Kesirden kurtulmak için $x = 2$ alalım: $y = -3$, $z = -4$.

$$\text{Ker } L = \{ k(2, -3, -4) : k \in \mathbb{R} \}, \quad \text{Nullity } (L) = \dim(\text{Ker } L) = 1$$

Kontrol. Boyut teoremi: $3 = 1 + 2 \checkmark$ Ayrıca $L(2, -3, -4) = (2 - 6 + 4, 4 - 4, 2 + 6 - 8) = (0, 0, 0) \checkmark$

Nullity sıfırdan farklı olduğundan L singülerdir; buna denk olarak $[L]_e$ matrisinin determinantı sıfırdır. ■

24.2 Determinantlar ve Ters Matris

Örnek 24.2 (Ek Matrisle Ters ve Belirlediği Dönüşüm). $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini ek matris yardımıyla bulunuz ve A^{-1} matrisinin $\mathbb{R}^3$ üzerinde belirlediği lineer dönüşümü yazınız.

Çözüm.

Determinant. Birinci satıra göre açalım:

$$|A| = 1(2 \cdot 5 - 1 \cdot 3) - 3(2 \cdot 5 - 1 \cdot 0) + 4(2 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = 7 - 30 + 24 = 1$$

$|A| = 1 \neq 0$ olduğundan A regülerdir.

Kofaktörler. İşaret şablonuna dikkat ederek dokuz kofaktörü yazalım:

$$A_{11} = +(10 - 3) = 7, \quad A_{12} = -(10 - 0) = -10, \quad A_{13} = +(6 - 0) = 6$$

$$A_{21} = -(15 - 12) = -3, \quad A_{22} = +(5 - 0) = 5, \quad A_{23} = -(3 - 0) = -3$$

$$A_{31} = +(3 - 8) = -5, \quad A_{32} = -(1 - 8) = 7, \quad A_{33} = +(2 - 6) = -4$$

Ek matris. Kofaktörler matrisinin transpozisini alalım:

$$\text{ek } A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -10 & 5 & 7 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ek } A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -10 & 5 & 7 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Kontrol. A 'nın birinci satırı ile A^{-1} 'in sütunlarını çarpalım:

$$(1, 3, 4) \cdot (7, -10, 6) = 7 - 30 + 24 = 1, \quad (1, 3, 4) \cdot (-3, 5, -3) = -3 + 15 - 12 = 0$$

$$(1, 3, 4) \cdot (-5, 7, -4) = -5 + 21 - 16 = 0 \checkmark$$

Belirlediği dönüşüm. Bir matrisin sütun vektörleri üzerinde belirlediği dönüşüm $v \mapsto A^{-1}v$ 'dir; bileşenleri açalım:

$$T(x, y, z) = (7x - 3y - 5z, -10x + 5y + 7z, 6x - 3y - 4z)$$

Bu dönüşüm, A 'nın belirlediği $v \mapsto Av$ dönüşümünün tersidir.

■

Örnek 24.3 (Dördüncü Mertebeden Bir Determinant).

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

Üçüncü satırın ilk elemanı 1'dir; onu kullanarak birinci sütunun kalanını sıfırlayalım. Bir satırın katını başka bir satıra eklemek determinantı değiştirmez:

$$R_1 \rightarrow -2R_3 + R_1, \quad R_2 \rightarrow 2R_3 + R_2, \quad R_4 \rightarrow R_3 + R_4$$

Satırları tek tek hesaplayalım:

$$R_1 : (2, 5, -3, -2) - 2(1, 3, -2, 2) = (0, -1, 1, -6)$$

$$R_2 : (-2, -3, 2, -5) + 2(1, 3, -2, 2) = (0, 3, -2, -1)$$

$$R_4 : (-1, -6, 4, 3) + (1, 3, -2, 2) = (0, -3, 2, 5)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Birinci sütunda yalnız $a_{31} = 1$ sıfırdan farklıdır; bu sütuna göre açalım. İşaret $(-1)^{3+1} = +1$ 'dir:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Kalan determinanı birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} &= -1 \left((-2)(5) - (-1)(2) \right) - 1 \left(3 \cdot 5 - (-1)(-3) \right) + (-6) \left(3 \cdot 2 - (-2)(-3) \right) \\ &= -1(-10 + 2) - 1(15 - 3) - 6(6 - 6) = 8 - 12 - 0 = -4 \end{aligned}$$

■

24.3 Dönüşüm Uzayında Lineer Bağımsızlık

Örnek 24.4 (Üç Dönüşümün Lineer Bağımsızlığı). $L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümleri

$$L_1(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1, a_2)$$

$$L_2(a_1, a_2) = (a_2 - a_1, 2a_1 + a_2, a_1)$$

$$L_3(a_1, a_2) = (3a_1, -2a_2, a_1 + 2a_2)$$

biçiminde veriliyor. $S = \{L_1, L_2, L_3\}$ kümesinin $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ uzayında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 0$$

olsun; buradaki 0, **dönüşüm uzayının** sıfır elemanı, yani her vektörü $(0, 0, 0)$ 'a götüren sıfır dönüşümüdür. Bu eşitlik **her** $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ için geçerli olmalıdır; özel olarak taban vektörlerinde de geçerlidir. **$(1, 0)$ vektöründe.** Üç dönüşümün değerleri:

$$L_1(1, 0) = (1, 2, 0), \quad L_2(1, 0) = (-1, 2, 1), \quad L_3(1, 0) = (3, 0, 1)$$

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(-1, 2, 1) + \gamma(3, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Bileşenleri eşitleyelim:

$$\alpha - \beta + 3\gamma = 0, \quad 2\alpha + 2\beta = 0, \quad \beta + \gamma = 0$$

İkinciden $\beta = -\alpha$, üçüncüden $\gamma = -\beta = \alpha$ çıkar. Bunları birincide yerine koyalım:

$$\alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

Buradan $\beta = 0$ ve $\gamma = 0$ bulunur.

Bütün katsayılar sıfır olmak zorunda olduğundan S lineer bağımsızdır.

Not. Yalnızca $(1, 0)$ vektörünü kullanmak sonuca ulaşmaya yetti. $(0, 1)$ vektörü de denenebilirdi:

$$L_1(0, 1) = (1, 0, 1), \quad L_2(0, 1) = (1, 1, 0), \quad L_3(0, 1) = (0, -2, 2)$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ bu denklemleri de sağlar; bir çelişki çıkmaz.

■

i Not

$\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) = 2 \cdot 3 = 6$ olduğundan bu üç dönüşüm, altı boyutlu bir uzayda lineer bağımsız bir üçlüdür; bir tabana genişletilebilir ama tek başına taban değildir.

24.4 Özdeğerler ve Köşegenleştirme

Örnek 24.5 (Bir Operatörün Özdeğer ve Özvektörleri). $\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3)$$

biçiminde veriliyor. θ 'nın özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri belirleyiniz.

Çözüm.

Matris gösterimi. Standart tabanda matris, katsayı matrisidir:

$$A = [\theta]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Karakteristik polinom.

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & -2 \\ -1 & -1 & t-3 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_\theta(t) &= (t-2) [(t-2)(t-3) - 2] + 1 [-(t-3) - 2] - 2 [1 + (t-2)] \\ &= (t-2) (t^2 - 5t + 4) + (-t+1) - 2(t-1) \\ &= (t-2)(t-1)(t-4) - (t-1) - 2(t-1) \\ &= (t-1) [(t-2)(t-4) - 3] = (t-1) (t^2 - 6t + 5) \\ &= (t-1)(t-1)(t-5) = (t-1)^2(t-5) \end{aligned}$$

Kontrol. iz $(A) = 2 + 2 + 3 = 7$; köklerin toplamı $1 + 1 + 5 = 7$ ✓

Özdeğerler $\lambda = 1$ (iki katlı) ve $\lambda = 5$ 'tir.

$\lambda = 1$ öz uzayı. Karakteristik matriste $t = 1$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

Üç denklem de aynıdır; iki serbest değişken vardır:

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 : \quad u = (-1, 1, 0)$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -2 : \quad v = (-2, 0, 1)$$

V_1 iki boyutludur ve $\{u, v\}$ bir tabanıdır.

$\lambda = 5$ öz uzayı. $t = 5$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x_1 + x_2 = 2x_3$, birinci denklem $3x_1 - x_2 = 2x_3$ verir. İkisini toplarsak $4x_1 = 4x_3$, yani $x_1 = x_3$; buradan $x_2 = 2x_3 - x_1 = x_3$ çıkar. $x_3 = 1$ alalım:

$$w = (1, 1, 1), \quad V_5 \text{ bir boyutludur}$$

Kontrol. $\theta(1, 1, 1) = (2 + 1 + 2, 1 + 2 + 2, 1 + 1 + 3) = (5, 5, 5) = 5w$ ✓ ve $\theta(-1, 1, 0) = (-2 + 1, -1 + 2, -1 + 1) = (-1, 1, 0) = u$ ✓

Ek gözlem. Toplam üç tane lineer bağımsız özvektör bulundu; öyleyse θ köşegenleştirilebilirdir ve sütunları u, v, w olan P matrisi için $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 1, 5)$ 'tir.

■

Örnek 24.6 (Bir Operatörün Köşegenleştirilmesi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(a, b) = (b - a, a - 3b)$ lineer dönüşümünün belirlediği matrisi bularak köşegenleştiriniz ve bir P regüler matrisi için $P^{-1}AP = D$ eşitliğini sağlayınız.

Çözüm.

Matris. Standart tabanda $T(1, 0) = (-1, 1)$ ve $T(0, 1) = (1, -3)$ olduğundan bunlar sütunlardır:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Karakteristik polinom.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} = (t+1)(t+3) - 1 = t^2 + 4t + 2$$

Kökleri bulalım:

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Kontrol. Köklerin toplamı $-4 = \text{iz}(A)$ ✓; çarpımları $(-2)^2 - 2 = 2 = |A| = 3 - 1$ ✓
İki farklı reel özdeğer olduğundan A köşegenleştirilebilirdir.

Özvektörler. $\lambda I_2 - A$ matrisinin birinci satırı $(\lambda + 1, -1)$ 'dir; denklem

$$(\lambda + 1)x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (\lambda + 1)x$$

$x = 1$ alalım.

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{2} : \quad v_1 = (1, \sqrt{2} - 1)$$

$$\lambda_2 = -2 - \sqrt{2} : \quad v_2 = (1, -\sqrt{2} - 1)$$

Kontrol. Önce Av_1 'i hesaplayalım:

$$Av_1 = (-1 + (\sqrt{2} - 1), 1 - 3(\sqrt{2} - 1)) = (\sqrt{2} - 2, 4 - 3\sqrt{2})$$

Öte yandan

$$\lambda_1 v_1 = (-2 + \sqrt{2})(1, \sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 2, (-2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1))$$

$$(-2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = -2\sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} = 4 - 3\sqrt{2} \quad \checkmark$$

Köşegenleştirme. Sütunları özvektörler olan matrisi kuralım:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, \quad |P| = -\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1 = -2\sqrt{2} \neq 0$$

P regülerdir ve $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ olduğundan

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

■

🔍 Özdeğerler tam sayı olmak zorunda değildir

Ders kitaplarındaki örneklerde özdeğerler çoğu zaman tam sayı çıkar; bu, sorunun kolay hesaplanabilmesi için özellikle seçilmiş olmasındandır. Yukarıdaki gibi karakteristik polinomun kökleri irrasyonel de olabilir. Böyle durumlarda P^{-1} 'i açıkça hesaplamak yerine $AP = PD$ eşitliğini doğrulamak çok daha kısadır.

Örnek 24.7 (Özdeğerlerden Okunanlar). 3. mertebeden bir A reel kare matrisinin özdeğerlerinin 1, 2 ve -3 olduğu biliniyor. Buna göre

- A 'nın karakteristik polinomunu,
- $\text{iz}(A)$ ve $|A|$ değerlerini,
- $|A^{-1}|$ ve $\text{iz}(A^2)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

a) Karakteristik polinom 3. dereceden, baş katsayısı 1 olan ve kökleri verilen sayılar olan polinomdur:

$$\Delta_A(t) = (t-1)(t-2)(t+3) = t^3 - 7t + 6$$

Açılımı görelim: $(t-1)(t-2) = t^2 - 3t + 2$ olduğundan çarpım şu polinomu verir:

$$(t^2 - 3t + 2)(t+3) = t^3 + 3t^2 - 3t^2 - 9t + 2t + 6 = t^3 - 7t + 6$$

b) Karakteristik polinomda t^2 'nin katsayısı $-\text{iz}(A)$, sabit terim ise $(-1)^3 |A| = -|A|$ 'dir. Açılımda t^2 terimi yoktur ve sabit terim 6'dır:

$$\text{iz}(A) = 0, \quad |A| = -6$$

Doğrulama. İz, özdeğerlerin toplamı: $1 + 2 - 3 = 0$ ✓ Determinant, özdeğerlerin çarpımı: $1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6$ ✓

c) $|A| = -6 \neq 0$ olduğundan A regülerdir ve

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{6}$$

λ , A 'nın bir özdeğeri ise λ^2 , A^2 'nin bir özdeğeridir. A 'nın özvektörlerinden oluşan bir taban bulunduğu bilinmese bile, karakteristik polinomun kökleri toplamının iz olduğu her zaman geçerlidir; A^2 'nin özdeğerleri 1, 4 ve 9 olduğundan

$$\text{iz}(A^2) = 1 + 4 + 9 = 14$$

■

Örnek 24.8 (Köşegenleştirmeye Kuvvet Hesabı). $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi için A^n 'yi n cinsinden bulunuz.

Çözüm.

Özdeğerler.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-4)(t-3) - 2 = t^2 - 7t + 10 = (t-5)(t-2)$$

Özdeğerler 5 ve 2'dir.

Özvektörler.

$t = 5$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x - y = 0$; özvektör $(1, 1)$.

$t = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$; $x = 1$ için $y = -2$, özvektör $(1, -2)$.

Köşegenleştirme.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad |P| = -3, \quad P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kuvvet. $A = PDP^{-1}$ olduğundan $A^n = PD^nP^{-1}$ 'dir:

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 2^n \\ 5^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 2^n \\ 5^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

Kontrol. $n = 1$ için

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 + 2 & 5 - 2 \\ 10 - 4 & 5 + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A \checkmark$$

■

24.5 Cayley-Hamilton Uygulaması

Örnek 24.9 (Cayley-Hamilton ile Ters Matris). Cayley-Hamilton teoremini ifade ediniz ve $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bu teorem yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

Teorem. Her kare matris, kendi karakteristik polinomunun bir köküdür: $\Delta_A(A) = 0$.

Karakteristik polinom.

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix}$$

Birinci sütunda bir sıfır var; bu sütuna göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_A(t) &= (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1) [(t-2)(t-1) - 1] + [(t-1) - 1] \\ &= (t-1) (t^2 - 3t + 1) + t - 2 \\ &= t^3 - 3t^2 + t - t^2 + 3t - 1 + t - 2 = t^3 - 4t^2 + 5t - 3 \end{aligned}$$

Kontrol. $\text{iz}(A) = 1 + 2 + 1 = 4$ olduğundan t^2 'nin katsayısı -4 olmalıydı ✓ Sabit terim $(-1)^3 |A| = -|A|$; gerçekten

$$|A| = 1(2-1) + 1(1-0) + 1(1-0) = 3$$

ve -3 çıktı ✓

Ters. Cayley-Hamilton teoremi gereği

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 3I_3 = 0$$

Sabit terimi karşıya atıp A 'yı ortak çarpan yapalım:

$$A(A^2 - 4A + 5I_3) = 3I_3 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 4A + 5I_3)$$

Önce A^2 'yi hesaplayalım:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(Örneğin birinci satır: $(1, -1, 1)$ ile sütunların çarpımları $1 - 1 + 0 = 0$, $-1 - 2 + 1 = -2$, $1 - 1 + 1 = 1$ 'dir.)

$$A^2 - 4A + 5I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Kontrol. A 'nın birinci satırı $(1, -1, 1)$ ile $3A^{-1}$ 'in sütunlarını çarpalım:

$$(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 3, \quad (1, -1, 1) \cdot (2, 1, -1) = 0, \quad (1, -1, 1) \cdot (-3, 0, 3) = 0$$

$\frac{1}{3}$ çarpanıyla birlikte birinci satır $(1, 0, 0)$ çıktı ✓

■

24.6 Genel Tekrar: Vektör Uzayları

Son üç problem, dönemin başındaki vektör uzayı kavramlarına dönüyor: alt uzay, direkt toplam, lineer bağımsızlık ve taban.

Örnek 24.10 (Alt Uzaylar ve Direkt Toplam).

$$U = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0 \}, \quad W = \{ (a, 0, 0) : a \in \mathbb{R} \}$$

olsun.

- a) U ve W kümelerinin $\mathbb{R}^3$ 'ün birer alt uzayı olduğunu gösteriniz.
b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ midir?

Çözüm.

a) U bir alt uzaydır. $(0, 1, -1) \in U$ olduğundan U boş değildir.

Toplama. $u = (a, b, c)$ ve $u' = (a', b', c')$, U 'da olsun; yani $a + b + c = 0$ ve $a' + b' + c' = 0$ 'dır. Toplamlarının bileşenleri toplanır:

$$u + u' = (a + a', b + b', c + c')$$

$$(a + a') + (b + b') + (c + c') = (a + b + c) + (a' + b' + c') = 0 + 0 = 0$$

Öyleyse $u + u' \in U$ 'dur.

Skalerle çarpım. $k \in \mathbb{R}$ için $ku = (ka, kb, kc)$ ve

$$ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot 0 = 0$$

Öyleyse $ku \in U$ 'dur.

W bir alt uzaydır. $(0, 0, 0) \in W$ olduğundan boş değildir. $w = (a, 0, 0)$ ve $w' = (a', 0, 0)$ için

$$w + w' = (a + a', 0, 0) \in W, \quad kw = (ka, 0, 0) \in W$$

b) Direkt toplam için iki koşul gerekir.

$\mathbb{R}^3 = U + W$. Herhangi bir $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünü yazalım:

$$(a, b, c) = \underbrace{(-b - c, b, c)}_{\in U} + \underbrace{(a + b + c, 0, 0)}_{\in W}$$

Birinci vektörün bileşenleri toplamı $-b - c + b + c = 0$ olduğundan U 'dadır; ikincisi tanımı gereği W 'dedir. Öyleyse $\mathbb{R}^3 \subseteq U + W$; ters kapsama açık olduğundan $\mathbb{R}^3 = U + W$ 'dir.

$U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$. $(a, b, c) \in U \cap W$ olsun. W 'de olmak $b = c = 0$ demektir; U 'da olmak ise $a + b + c = 0$, yani $a = 0$ demektir. Öyleyse kesişim yalnız sıfır vektöründen oluşur.

İki koşul da sağlandığından $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ 'dir.

■

Örnek 24.11 (Dört Boyutlu Uzayda Bağımsızlık). $\mathbb{R}^4$ 'te

$$w_1 = (1, 4, -1, 3), \quad w_2 = (2, 1, -3, -1), \quad w_3 = (0, 2, 1, -5)$$

vektörleri veriliyor.

- a) w_1, w_2, w_3 vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.
b) $W = L(w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere $(1, -6, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ vektörünün W 'ye ait olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

a) Üç vektörü satır olarak yazıp merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{2}{7}R_2 + R_3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & -7 \end{pmatrix}$$

Üç satır da sıfırdan farklı kaldı; merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız olduğundan w_1, w_2, w_3 lineer bağımsızdır ve $\dim W = 3$ 'tür.

b) $(1, -6, -1, 2) = x w_1 + y w_2 + z w_3$ olacak x, y, z arayalım. Bileşenleri eşitlersek:

$$x + 2y = 1, \quad 4x + y + 2z = -6, \quad -x - 3y + z = -1, \quad 3x - y - 5z = 2$$

Birinciden $x = 1 - 2y$. Üçüncüde yerine koyalım:

$$-(1 - 2y) - 3y + z = -1 \Rightarrow -1 + 2y - 3y + z = -1 \Rightarrow z = y$$

İkincide yerine koyalım:

$$4(1 - 2y) + y + 2y = -6 \Rightarrow 4 - 5y = -6 \Rightarrow y = 2$$

Buradan $z = 2$ ve $x = 1 - 4 = -3$ çıkar. Şimdi dördüncü denklemi denetleyelim:

$$3(-3) - 2 - 5(2) = -9 - 2 - 10 = -21 \neq 2$$

Dördüncü denklem sağlanmıyor; sistemin çözümü yoktur. Öyleyse

$$(1, -6, -1, 2) \notin W$$

■

Örnek 24.12 (Taban mıdır?).

$$\{ (1, 3, -4), (1, 4, -3), (2, 3, -11) \}$$

kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı mıdır? Sebebiyle birlikte açıklayınız.

Çözüm.

$\mathbb{R}^3$ üç boyutlu olduğundan üç vektörden oluşan bir küme, ancak lineer bağımsızsa taban olur. Bağımsızlığı sınavalım:

$$x(1, 3, -4) + y(1, 4, -3) + z(2, 3, -11) = (0, 0, 0)$$

$$x + y + 2z = 0, \quad 3x + 4y + 3z = 0, \quad -4x - 3y - 11z = 0$$

Birinciden $x = -y - 2z$; ikincide yerine koyalım:

$$3(-y - 2z) + 4y + 3z = 0 \Rightarrow y - 3z = 0 \Rightarrow y = 3z$$

Buradan $x = -3z - 2z = -5z$ çıkar. Üçüncü denklem kendiliğinden sağlanır:

$$-4(-5z) - 3(3z) - 11z = 20z - 9z - 11z = 0 \checkmark$$

z serbest kaldığından sistemin sıfırdan farklı çözümleri vardır; örneğin $z = 1$ için $(x, y, z) = (-5, 3, 1)$:

$$-5(1, 3, -4) + 3(1, 4, -3) + (2, 3, -11) = (-5 + 3 + 2, -15 + 12 + 3, 20 - 9 - 11) = (0, 0, 0)$$

Küme lineer bağımlıdır, dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı **değildir**.

Aynı sonucun determinantla görülüşü. Sütunları bu üç vektör olan matrisin determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -11 \end{vmatrix} = 1(-44 + 9) - 1(-33 + 12) + 2(-9 + 16) = -35 + 21 + 14 = 0$$

sıfır olduğundan matris regüler değildir; sütunları lineer bağımlıdır.

■

24.7 Alıştırma

Alıştırma 24.1 (Karma Sorular).

1. V bir vektör uzayı ve $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. S 'nin her alt kümesinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulunuz ve köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirleyiniz.
3. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ operatörünün determinantını hesaplayıp tersinir olup olmadığını söyleyiniz.

Çözüm.

1. S 'nin lineer bağımlı bir $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ alt kümesi ($m \leq n$) bulunduğunu varsayalım. O zaman hepsi birden sıfır olmayan $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ skalerleriyle

$$a_{i_1}v_{i_1} + \dots + a_{i_m}v_{i_m} = 0$$

yazılabilirdi. Bu eşitliğe, S 'nin geri kalan vektörlerini sıfır katsayıyla ekleyelim:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

Burada alt kümede bulunmayan indislerin katsayıları sıfırdır; ama en az bir a_{i_j} sıfırdan farklı olduğundan katsayıların hepsi sıfır değildir. Bu, S 'nin lineer bağımlı olması demektir ve varsayım ile çelişir. Öyleyse S 'nin her alt kümesi lineer bağımsızdır.

2. A alt üçgenseldir; üçgensel bir matrisin özdeğerleri köşegen elemanlarıdır:

$$\Delta_A(t) = (t - 2)(t - 3)(t - 5)$$

Özdeğerler 2, 3 ve 5'tir. Üç tane **farklı** özdeğer bulunduğundan A köşegenleştirilebilir.

3. Standart tabanda matris

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\det(T) = 1(1 - 0) - 1(0 - 1) + 0 = 1 + 1 = 2$$

$\det(T) = 2 \neq 0$ olduğundan T tersinirdir.

■