

Matematiğin Temelleri ve Mantık

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

	Giriş	6
1	Mantığa Giriş ve Temel Kavramlar	7
1.1	Mantığın Kısa Tarihi	7
1.2	Matematiğin Temelleri Üzerine Üç Okul	7
1.3	Temel Tanım ve Kavramlar	8
2	Önermeler ve Doğruluk Tabloları	9
2.1	Önerme Kavramı	9
2.2	Doğruluk Değeri	9
2.3	Basit ve Bileşik Önermeler	10
2.4	Doğruluk Tabloları	10
2.5	Denk Önermeler	11
3	Bağlaçlar ve Önermeler Cebiri	13
3.1	“Ve” İşlemi	13
3.2	“Veya” İşlemi	14
3.3	Dağılma Özelliği	14
3.4	“Değil” İşlemi	15
3.5	Yutma Özelliği	15
3.6	Çözümlü Uygulamalar	15
4	Totoloji ve Çelişki	18
4.1	Tanımlar	18
4.2	Temel Örnek: $p \vee p'$ ve $p \wedge p'$	18
4.3	t ve c ile İşlemler	18
4.4	Sadeleştirmede Kullanımı	19
5	De Morgan Kuralları ve Önerme Sadeleştirme	21
5.1	De Morgan Kuralları	21
5.2	Bileşik Önermelerin Değillenmesi	22
5.3	Sadeleştirme Uygulamaları	23
6	Koşullu Önerme ve Çeşitleri	26
6.1	“İse” İşlemi	26
6.2	Diğer İşlemler Cinsinden Yazılışı	26
6.3	Tersi, Karşıtı ve Karşıt Ters	27
6.4	“İse” İşleminin Dağılma Özellikleri	28
6.5	Çözümlü Uygulamalar	29

7	Mantıksal Gerektirme ve Çıkarım Kuralları	32
7.1	Mantıksal Gerektirme	32
7.2	Temel Çıkarım Kuralları	33
7.3	Çift Gerektirme (Karşılıklı Şart)	35
7.4	Denklik Araştırmaları	36
7.5	Çözümlü Uygulamalar	37
8	Niceleme Mantığı: Açık Önergeler ve Niceleyiciler	39
8.1	Açık Önerme	39
8.2	Niceleyiciler	39
8.3	Niceleyici İçeren Önergelerin Doğruluğu	40
8.4	Niceleyici İçeren Önergelerin Değillenmesi	41
8.5	Çözümlü Uygulamalar	42
9	Doğrudan İspat Yöntemi	46
9.1	İspat Yöntemleri	46
9.2	Doğrudan İspat	46
9.3	Tek ve Çift Sayılarla İlgili İspatlar	46
9.4	Eşitsizliklerle İlgili İspatlar	47
9.5	Bölünebilme ve Kongrüans	48
10	Karşıt Ters ile İspat	50
10.1	Yöntemin Dayanağı	50
10.2	Çözümlü Uygulamalar	50
11	Çelişki ile İspat (Olmayana Ergi)	53
11.1	Bir Önergemi Çürütmek	53
11.2	Çözümlü Uygulamalar	53
12	Durum İncelemeli İspat	57
12.1	Yöntem	57
12.2	Çözümlü Uygulamalar	57
12.3	Dört Yöntemin Karşılaştırılması	58
13	Küme Kavramı ve Gösterim Yöntemleri	60
13.1	Küme Kuramının Doğuşu	60
13.2	Kümenin Sezgisel Tanımı	60
13.3	Ögelik Bağıntısının Gösterimi	61
13.4	Russell Paradoksu	61
13.5	Niteleme Yöntemi	61
13.6	Listeleme Yöntemi	62
13.7	Venn Diyagramı Yöntemi	63

14	Alt Küme ve Küme Eşitliği	64
14.1	Alt Küme	64
14.2	İlk Sonuçlar	64
14.3	Eşit Kümeler	65
14.4	Kapsamanın Geçişme Özellikleri	66
14.5	Çözümlü Uygulamalar	67
15	Boş Küme, Kuvvet Kümesi ve Nicelik Sayısı	70
15.1	Boş Küme	70
15.2	Kuvvet Kümesi	71
15.3	Nicelik Sayısı	72
15.4	Çözümlü Uygulamalar	73
16	Birleşim ve Kesişim İşlemleri	75
16.1	Tanımlar	75
16.2	Temel Kapsama Teoremleri	75
16.3	Birleşim İşleminin Özellikleri	76
16.4	Kesişim İşleminin Özellikleri	77
16.5	Dağılma Özellikleri	77
17	Tümleyen, Fark ve Simetrik Fark	79
17.1	Tümleyen	79
17.2	Ayrık Kümeler	79
17.3	Fark İşlemi	80
17.4	Çözümlü Uygulamalar	81
17.5	Eleman Sayısı: İçerme–Dışarma	84
18	Kartezyen Çarpım ve Özellikleri	86
18.1	Sıralı İkili	86
18.2	Kartezyen Çarpım	86
18.3	Değişme ve Birleşme	87
18.4	Dağılma Özellikleri	87
18.5	Kapsama ile İlişkisi	88
19	Bağıntı Kavramı ve Özellikleri	90
19.1	Bağıntı	90
19.2	Ters (Karşıt) Bağıntı	91
19.3	Birim Bağıntı	92
19.4	Bir Kümede Tanımlı Bağıntıların Özellikleri	92

Giriş

Matematiğin temelleri, matematiksel akıl yürütmenin dilini ve kurallarını kuran derstir. Önermeler mantığından ispat tekniklerine, küme kuramından bağıntılara kadar; sonraki tüm derslerin üzerine inşa edileceği zemini hazırlar.

Not

Aşağıdaki müfredattaki tüm başlıkların notları hazırdır ve bağlantılardan ulaşılabilir.

1. Mantığa Giriş ve Temel Kavramlar

Mantık sözlüklerde “doğru düşünme sanatı veya bilimi”, “doğru düşünme yöntemi” ya da “gerçeği aramaya yönelik zihin işlemlerinden hangilerinin doğru hangilerinin yanlış olduğunu açıklayan ilkeleri yöntemli olarak inceleyen bilim” olarak tanımlanır.

Matematiğin temelleri dersinde mantığı bu geniş anlamıyla değil, **matematikselsel akıl yürütmenin dili** olarak ele alacağız: hangi cümlelerin bir hüküm bildirdiğini, bu hükümlerin nasıl birleştirileceğini ve bir sonucun öncüllerinden gerçekten çıkıp çıkmadığını kesin kurallarla inceleyeceğiz.

1.1 Mantığın Kısa Tarihi

Mantığın bir bilim olarak **Aristoteles** tarafından kurulduğu kabul edilir. Aristoteles’ten önce de mantıksal düşünme konusunda çabalar ve dağınık bilgiler vardır; ancak mantığı sistemli bir bilgi alanı hâline getiren odur. Dolayısıyla Aristoteles, mantığı *bulan* değil, mantığı **sistemli ve düzenli hâle getiren ilk kişidir**. Aristoteles’in mantık üzerine yazdığı altı kitap, kendisinden sonra **Organon** adı altında toplanmıştır:

- Kategoriler
- Önergeler (*De Interpretatione*)
- Birinci Analitikler
- İkinci Analitikler
- Topikler
- Sofistik Deliller

Orta Çağ boyunca Aristoteles mantığı batıda olduğu gibi doğuda da büyük önem taşımıştır. İslam dünyasında Aristoteles’in etkisi, Organon’un Arapçaya çevrilmesiyle başlamıştır. Önemli İslam mantıkçıları arasında **Fârâbî**, **İbn-i Sînâ** ve **Râzî** yer alır.

i Aristoteles mantığına yöneltilen eleştiri

Aristoteles mantığı sıklıkla eleştirilse de tek araç olarak varlığını yüzyıllarca sürdürmüştür. Eleştirilerin en önemli gerekçesi şudur: bu mantık, öncüllerden **tümdengelim** (dedüktif) bir yolla yine öncüllerde zaten mevcut olan bilgiyi verir. Örneğin “*Bütün insanlar ölümlüdür*” ve “*Sokrates bir insandır*” öncüllerinden “*Sokrates ölümlüdür*” sonucu çıkarılır. Oysa bu sonuç, aslında öncüllerin içerisinde zaten mevcuttur; akıl yürütme yeni bir bilgi üretmemiş, var olanı açığa çıkarmıştır.

19. yüzyılın ortalarında **George Cantor**, **Bertrand Russell** ve **Gottlob Frege** gibi matematikçi ve mantıkçıların çabalarıyla **modern (sembolik, matematikselsel) mantık** oluşturulmuştur. Modern mantık, Aristoteles mantığına göre çok daha karmaşık çıkarımları ifade etme ve **denetleme** imkânı veren yeni bir sembolik dildir.

1.2 Matematiğin Temelleri Üzerine Üç Okul

20. yüzyılın başlarında matematiğin temellerinin ne olduğu üzerine yürütülen tartışmalar, üç okulun ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Sezgicilik (intuitionism). “Sayılar ve genel olarak matematik, insan aklının bir ürünüdür; insan aklı olmasaydı onlar asla olmazdı” görüşünü savunur. Bu okul, matematiğin bir **buluş** değil bir **icat** olduğunu öne sürer. En büyük temsilcisi **L. E. J. Brouwer**’dir.

Biçimcilik (formalizm). Matematiğin bir **dil** olduğunu savunur. Temsilcisi **David Hilbert**’tir. Hilbert’e göre matematikselsel önermeler, biçimsel mantık kuralları kullanılarak aksiyomlardan elde edilmelidir. Hilbert, Brouwer’ın aksine, matematikte gerçeğin değil **tutarlılığın** önemli olduğunu savunmuştur.

Platonculuk (realizm). Sayıların, insan aklından bağımsız olarak var olan **soyut varlıklar** olduğunu savunur. Matematik insan aklının bir icadı değil, bir **buluş**dur; yani nesneler önceden vardır, insanlar sonradan fark etmiştir. Bu okulun en önemli temsilcisi **Kurt Gödel**’dir.

1.3 Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde hem bu derste hem de genel olarak matematik biliminde sıklıkla kullanılan temel terimleri belirliyoruz.

Tanım 1.1 (Tanım). Bir kavramın niteliklerini eksiksiz olarak belirten veya açıklayan ifadeye **tanım** denir.

Tanım 1.2 (Öncül). Araştırılması gerekli olmayan, doğru olduğu varsayılan önermedir.

Tanım 1.3 (Aksiyom (Belit)). Bir tanım veya teori ile ilişkili olan bir öncüdür. Diğer bir ifadeyle, doğruluğu **ispatlanmadan** doğru olduğu kabul edilen önermelere **aksiyom** denir. Aksiyom, diğer önermelerin en dayanağı sayılan temel önermedir.

Tanım 1.4 (Postülat). Belirli bir alana özgü olan, kanıtlanmasına veya ispatlanmasına gerek olmayan önermelerdir.

Tanım 1.5 (Teorem (Hipotez)). Mantık kuralları ile kanıtlanabilen/ispatlanabilen matematiksel önermelerdir.

Tanım 1.6 (Yardımcı Teorem (Lemma)). Bir teoremin ispatlanması için gerekli olan daha basit önermelerdir.

İspatlanması uzun ve karmaşık olan teoremler lemmalara bölünerek, lemmalar ispatlandıktan sonra ana teoremin ispatında bu lemmalara atıf yapılır. Böylelikle ana teoremin ispatını anlamak daha kolay bir hâle gelir.

💡 Sık kullanılan iki terim daha

- **Sonuç (corollary):** İspatlanmış bir teoremden neredeyse doğrudan, kısa bir akıl yürütmeye elde edilen önermedir.
- **Sanı (conjecture):** Doğru olduğu düşünülen, ancak henüz ispatlanmamış önermedir. İspatlandığı anda teorem adını alır.

! Aksiyom ile postülat farkı

İkisi de ispatsız kabul edilir; aradaki fark **kapsamdır**. Aksiyom bütün matematiğe ortak, en genel kabuldür; postülat ise belirli bir alana (örneğin Öklid geometrisine) özgü kabuldür. Modern matematikte bu ayrım büyük ölçüde silinmiş, her ikisi de “aksiyom” adıyla anılır olmuştur.

Bir sonraki bölümde bu kavramların üzerine kurulacağı en temel yapı taşını, yani **önerme** kavramını inceleyeceğiz.

2. Önermeler ve Doğruluk Tabloları

Matematiksel mantığın üzerine kurulduğu en küçük yapı taşı **önerme**dir. Bu bölümde bir cümlenin ne zaman önerme sayıldığını, önermelerin doğruluk değerlerini ve birden çok önermenin birlikte incelendiği doğruluk tablolarını ele alıyoruz.

2.1 Önerme Kavramı

Tanım 2.1 (Önerme). Doğru ya da yanlış **kesin bir hüküm** bildiren, **göreceli olmayan** ve aynı zamanda **hem doğru hem yanlış olmayan** cümlelere **önerme** denir. Önermeler genellikle $p, q, r, \dots$ veya $a, b, c, \dots$ şeklinde küçük harflerle gösterilir.

Örnek 2.1 (Önerme Olan Cümleler). Aşağıdaki cümlelerin her biri birer önermedir:

- p : “Türkiye’nin başkenti Ankara’dır.”
- q : “ $\sqrt{2}$ bir irrasyonel sayıdır.”
- r : “Bir yıl 12 aydır.”
- s : “ $4 + 5 > 17$ dir.”

Örnek 2.2 (Önerme Olmayan Cümleler). Aşağıdaki cümlelerin hiçbiri önerme değildir:

- “Ne kadar güzel bir gün!” — ünlem, bir hüküm bildirmez.
- “Sinemaya gidelim mi?” — soru cümlesidir.
- “ x yerine 3 yazın.” — emir cümlesidir.
- “Ne kadar ilginç bir konu.” — görecelidir; kişiden kişiye değişir.

2.2 Doğruluk Değeri

Tanım 2.2 (Doğruluk Değeri). Verilen bir önermenin doğru veya yanlış olmasına **önermenin doğruluk değeri** denir.

- Önerme doğru bir hüküm bildiriyorsa doğruluk değeri 1,
- yanlış bir hüküm bildiriyorsa doğruluk değeri 0’dır.

Örnek 2.3.

- p : “ $3 + 4 = 7$ dir.” $\rightarrow$ doğruluk değeri 1.
- q : “ $\pi = 3,15$ tir.” $\rightarrow$ doğruluk değeri 0.

Örnek 2.4 (Önerme mi, Değil mi?). Aşağıdaki ifadelerin hangileri birer önermedir? Önerme olanların doğruluk değerlerini belirleyiniz.

- a) “248 sayısı bir asal sayıdır.” b) “3 tam sayısı tektir.” c) “Ne kadar zor bir ders.”
d) “ $x^3 - 1 = 0$ dir.” e) “ $3x + 6$ ile 5 sayısını çarpınız.” f) “ $11 \cdot 12 = 132$ midir?”

Çözüm.

- a) Bir önermedir. $248 = 8 \cdot 31$ olduğu için 248 asal değildir. Önerme yanlış olduğundan doğruluk değeri 0’dır.
b) Bir önermedir; doğruluk değeri 1’dir.
c) Görecelik kavramı içerdiği için önerme **değildir**.

- d) Verilen ifade değişken içerdiğinden ve doğruluk değeri x 'e verilen değerlere göre değiştiğinden önerme **değildir**.
 e) Emir içeren bir ifade olup önerme **değildir**.
 f) Soru cümlesi olduğundan önerme **değildir**.
 ■

i Değişken içeren ifadeler

(d) şıkkındaki gibi değişken içeren ve doğruluğu değişkene bağlı olan ifadeler önerme değildir; bunlara **açık önerme** denir ve **niceleme mantığı** bölümünde ayrıca incelenirler.

2.3 Basit ve Bileşik Önermeler

Tanım 2.3 (Bileşik Önerme). İki veya daha fazla önermenin “ve”, “veya”, “ise” gibi bağlaçlarla birleştirilmesiyle veya bir önermenin sonuna “değil” eki konulması ile elde edilen önermelere **bileşik önerme** denir.

Bir bileşik önermeyi oluşturan her bir önermeye, o bileşik önermenin **bileşeni** adı verilir.

Tanım 2.4 (Basit Önerme). Hiçbir bileşeni olmayan, diğer bir ifadeyle yalnız bir hüküm bildiren cümlelere **basit önerme** adı verilir.

Örnek 2.5.

- p : “Bir hafta 7 gündür.” — **basit**
- q : “Bugün perşembedir **ve** ayın 1'idir.” — **bileşik**
- r : “Paris, Fransa'da **değildir**.” — **bileşik**
- s : “Bugün pazar **ise** ayın biri değildir.” — **bileşik**
- t : “Paris Fransa'dadır **veya** $2 + 11 = 13$ tür.” — **bileşik**

2.4 Doğruluk Tabloları

Tanım 2.5 (Doğruluk Tablosu). Bir bileşik veya basit önermenin çeşitli durumlardaki doğruluğunu belirtmek üzere düzenlenen çizelgelere **doğruluk tablosu** adı verilir.

Herhangi bir p önermesi için iki durum vardır: p ya doğrudur ya da yanlıştır.

p
1
0

i Neden yalnızca iki değer?

Bu derste kullandığımız mantık, doğruluk değerlerinin yalnızca 0 ve 1 olduğu **iki değerli (Aristo) mantıktır**.

Matematikte doğruluk değerinin 0 ile 1 arasındaki ara değerleri de ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ gibi) alabildiği **çok değerli** ve **bulanık** mantıklar da tanımlanmıştır; ancak bu derste bunları kullanmayacağız.

p ve q gibi **iki** önermenin doğruluklarının birbirlerine göre durumunu inceleyen tablo dört satırdan oluşur:

p	q
1	1
1	p doğru ise q doğrudur

p	q	
1	0	p doğru ise q yanlış
0	1	p yanlış ise q doğrudur
0	0	p yanlış ise q yanlış

Teorem 2.1 (Satır Sayısı). Birbirinden farklı n tane önermenin doğrulukları birbirlerine göre 2^n değişik durum olarak ortaya çıkar.

Örnek 2.6 (Üç Önermenin Doğruluk Tablosu). p, q, r gibi üç önerme için $2^3 = 8$ satır oluşur:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

💡 Tabloyu şaşmadan doldurmak

Sütunları soldan sağa **yarıya bölerek** doldurun: n önerme için ilk sütun 2^{n-1} tane 1 ve 2^{n-1} tane 0, ikinci sütun 2^{n-2} 'lik bloklar hâlinde 1 ve 0... biçiminde gider. Son sütun daima 1, 0, 1, 0, ... olarak değişir.

Böylece hiçbir durumu atlamadığınızdan ve hiçbirini iki kez yazmadığınızdan emin olursunuz.

2.5 Denk Önergeler

Tanım 2.6 (Denk Önergeler). İki önerme veya bileşik önerme, **mümkün olan tüm durumlarda** aynı doğruluk değerini alıyorsa bu iki önermeye **denk önergeler** denir.

p ve q önergeleri birbirine denk ise $p \equiv q$ şeklinde gösterilir ve “ p denktir q ” veya “ p , q 'ya denktir” şeklinde okunur.

Örnek 2.7. Aşağıdaki iki tabloyu karşılaştıralım.

p	q
1	1
0	0

Bütün satırlarda doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \equiv q$ 'dur.

s	t
1	1

s	t
0	1

İkinci satırda doğruluk değerleri farklı olduğundan $s \neq t$ 'dir.

! Denk olmamak için bir satır yeter

En az bir durumda doğrulukları aynı olmayan önermeler denk **değildir**. Denkliği göstermek için bütün satırların uyuşması gerekirken, denk olmadığını göstermek için **tek bir** karşı satır bulmak yeterlidir.

Bir sonraki bölümde önermeleri birbirine bağlayan **temel işlemleri ve bunların cebirsel özelliklerini** inceleyeceğiz.

3. Bağlaçlar ve Önermeler Cebiri

Önermeleri birbirine bağlayan üç temel işlem vardır: **ve** ($\wedge$), **veya** ($\vee$) ve **değil** ($\neg$). Bu bölümde önce bu işlemlerin doğruluk tablolarını, ardından toplama ve çarpmaya çok benzeyen cebirsel özelliklerini kuruyoruz. Bu özellikler, ilerideki bölümlerde karmaşık önermeleri doğruluk tablosu kurmadan sadeleştirmemizi sağlayacak.

3.1 “Ve” İşlemi

İki veya daha fazla önermenin aralarına “ve” koyarak bileşik önermeler oluşturabiliriz. p ile q önermelerinin arasına “ve” bağlacı konulursa “ p ve q ” bileşik önermesi elde edilir; $p \wedge q$ ile gösterilir.

i Aksiyom

p ve q gibi iki önerme verildiğinde, “ $p \wedge q$ ” önermesi **her ikisi de doğru olduğunda** doğru değerini alır; diğer tüm durumlarda ise bu önerme yanlış doğruluk değerini alır.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Örnek 3.1 (Doğruluk Değerleri Nelerdir?). a) p : “ $(-2 < 0)$ ve $(0 < 3)$ tür.” b) q : “ $\sqrt{-1}$ bir gerçel sayıdır ve $(-1 < -2)$ dir.”

Çözüm.

a) Her iki bileşen de doğrudur:

$$1 \wedge 1 \equiv 1$$

b) $\sqrt{-1}$ bir gerçel sayı değildir; ayrıca $-1 < -2$ de yanlıştır:

$$0 \wedge 0 \equiv 0$$

■

Teorem 3.1 (Ve İşleminin Özellikleri). p, q, r önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $p \wedge p \equiv p$ (eş güçlülük özelliği)

b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (değişme özelliği)

c) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$ (birleşme özelliği)

Alıştırma 3.1 (Doğruluk Tablosuyla İspat). Yukarıdaki üç özelliği doğruluk tablosu kurarak ispatlayınız. Birleşme özelliği için $2^3 = 8$ satırlık tablo gerekir; $q \wedge r, p \wedge q, (p \wedge q) \wedge r$ ve $p \wedge (q \wedge r)$ sütunlarını sırayla doldurup son iki sütunun çakıştığını gösteriniz.

3.2 “Veya” İşlemi

İki veya daha fazla önermenin “veya” bağlacı ile birleştirilmesinden bileşik önermeler elde edilir. p ve q önermeleri için “ p veya q ”, $p \vee q$ ile gösterilir.

i Aksiyom

p ve q önermelerinden **en az biri** doğru olduğunda “ $p \vee q$ ” bileşik önermesi doğru, bu iki önerme aynı anda yanlış olduğunda ise yanlıştır.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek 3.2 (Doğruluk Değerleri Nelerdir). a) p : “ $(3 + 9 = 12)$ veya $(-3 < -\frac{9}{2})$ dir.”
b) q : “4 bir asal sayıdır veya 9 sayısının 3 tane asal bölene vardır.”

Çözüm.

a) İlk bileşen doğrudur ($3 + 9 = 12$). “Veya” işleminde bir bileşenin doğru olması yeterli olduğundan diğerine bakmaya gerek yoktur:

$$1 \vee 0 \equiv 1$$

(İkinci bileşen $-3 < -4,5$ olduğundan yanlıştır.)

b) $4 = 2^2$ olduğundan asal değildir; ilk bileşen yanlıştır. $9 = 3^2$ olduğundan 9’un yalnızca **bir** asal bölene vardır; ikinci bileşen de yanlıştır:

$$0 \vee 0 \equiv 0$$

■

Teorem 3.2 (Veya İşleminin Özellikleri). p, q, r önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $p \vee p \equiv p$ (eş gücülük)
- b) $p \vee q \equiv q \vee p$ (değişme)
- c) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$ (birleşme)

3.3 Dağılma Özelliği

Teorem 3.3 (Dağılma Özellikleri). p, q, r önermeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\wedge$ ’nin $\vee$ üzerine **soldan** dağılması)
- b) $(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$ ($\wedge$ ’nin $\vee$ üzerine **sağdan** dağılması)
- c) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ($\vee$ ’nin $\wedge$ üzerine dağılması)

i Soldan ve sağdan dağılma

Bir işlemin diğer işlem üzerine hem sağdan hem soldan dağılma özelliği varsa, bu iki özellik kısaca “*birinci işlemin ikinci işlem üzerine dağılma özelliği vardır*” şeklinde ifade edilir.

$\wedge$ ve $\vee$ değişme özelliğine sahip olduğundan, bu ikisi için soldan dağılma sağdan dağılmayı doğrudan verir. Ancak **koşullu önerme** bölümünde göreceğimiz “ise” işlemi değişmeli **değildir**; orada iki yönü ayrı ayrı incelemek gerekecek.

! Sık karıştırılan nokta

$$p \wedge (q \vee r) \neq (p \wedge q) \vee r$$

Dağıtırken p 'nin **her iki** terime de dağıtılması gerekir. Doğrusu $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 'dir.

3.4 “Değil” İşlemi

Tanım 3.1 (Bir Önermenin Değili). Bir p önermesinin doğruluk değerinin değiştirilmesiyle elde edilen bileşik önermeye “ p 'nin değili” denir.

p' , $\neg p$ veya $\sim p$ ile gösterilir.

p	p'
1	0
0	1

Örnek 3.3.

- p : “7 asal sayıdır.” $\rightarrow p'$: “7 asal sayı değildir.”
- q : “ $3 < 8$ dir.” $\rightarrow q'$: “ $3 \geq 8$ dir.”
- r : “ $7 \times 5 = 40$ tır.” $\rightarrow r'$: “ $7 \times 5 \neq 40$ tır.”

Teorem 3.4 (Değil İşleminin Özellikleri). a) Doğru bir önermenin değili yanlıştır.

b) Yanlış bir önermenin değili doğrudur.

c) Bir önermenin değilinin değili kendisine denktir:

$$(p')' \equiv p$$

💡 Değil alırken eşitsizliğe dikkat

q : $3 < 8$ önermesinin değili $3 > 8$ **değil**, $3 \geq 8$ 'dir. “Küçüktür”ün değili “büyüktür” değil, “büyük veya eşittir”dir; çünkü eşitlik durumu da $<$ ilişkisini bozar.

3.5 Yutma Özelliği

Teorem 3.5 (Yutma (Absorpsiyon) Özelliği). Her p, q önermesi için

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p, \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

sağlanır.

Bu özellik sadeleştirme yaparken en çok işe yarayan kurallardan biridir: bir ifadede p ile başlayan bir parantez görürseniz, parantezin geri kalanı **yutulur**.

3.6 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 3.4 (Verilen Tabloları Tamamlama). Aşağıda verilen doğruluk tablolarını tamamlayınız.

a) $p \vee q'$ ve $p' \wedge q$ b) $(p' \vee q) \wedge r'$

Çözüm.

a)

p	q	p'	q'	$p \vee q'$	$p' \wedge q$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

Son iki sütun satır satır birbirinin **tersidir**; yani $p' \wedge q \equiv (p \vee q')'$ olduğu görülür.

b)

p	q	r	p'	q'	r'	$p' \vee q$	$(p' \vee q) \wedge r'$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1

$p' \vee q$ sütunu yalnızca p' ve q 'nin **ikisi de** 0 olduğunda 0 olur; yani sadece $p = 1$ ve $q = 0$ olan üçüncü ve dördüncü satırlarda.

■

Örnek 3.5 (Tablodan Önerme Yazma). Aşağıda verilen doğruluk tablosunu kullanarak, soru işareti bulunan yere $\wedge$, $\vee$ ve $'$ bağlaçlarını içeren uygun bir önerme yazınız.

p	q	?
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Çözüm.

Sonuç yalnızca **üçüncü** satırda 0'dır; yani $p = 0$ ve $q = 1$ olduğunda. Bir “veya” önermesi tam olarak bir satırda 0 oluyorsa, o satırda her iki bileşen de 0 olmalıdır. $p = 0$ olduğu için birinci bileşen p , $q = 1$ olduğu için ikinci bileşen q' seçilir:

p	q	q'	$p \vee q'$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

Aranan önerme $p \vee q'$ 'dür.

■

Örnek 3.6 (Tablodan Önerme Yazma (İki Sıfırlı)). Aşağıdaki doğruluk tablosunu sağlayan bir önerme yazınız.

p	q	?
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Çözüm.

Sonuç, p ile q **farklı** olduğunda 1, aynı olduğunda 0'dır. Bu davranışı iki koşulun kesişimi olarak kurabiliriz: “en az biri doğru” **ve** “en az biri yanlış”.

p	q	p'	q'	$p' \vee q'$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (p' \vee q')$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0

Aranan önerme $(p \vee q) \wedge (p' \vee q')$ 'dür.

■

Örnek 3.7 (Dört Önermeli Dağıtma). Her p, q, r, s önermesi için

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s)$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Doğruluk tablosu $2^4 = 16$ satır gerektirir; bunun yerine cebirsel özellikleri kullanalım.

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv [(p \vee q) \wedge r] \vee [(p \vee q) \wedge s] && (\text{dağılma}) \\
 &\equiv [r \wedge (p \vee q)] \vee [s \wedge (p \vee q)] && (\text{değişme}) \\
 &\equiv [(r \wedge p) \vee (r \wedge q)] \vee [(s \wedge p) \vee (s \wedge q)] && (\text{dağılma}) \\
 &\equiv (r \wedge p) \vee (r \wedge q) \vee (s \wedge p) \vee (s \wedge q) && (\text{birleşme}) \\
 &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s) && (\text{değişme})
 \end{aligned}$$

■

Bir sonraki bölümde bu cebire iki özel önerme ekleyeceğiz: daima doğru olan **totoloji** ile daima yanlış olan **çelişki**. Bunlar sadeleştirmeyi çok kısaltır; ayrıntısı için **totoloji ve çelişki** bölümüne bakınız.

4. Totoloji ve Çelişki

Önermeler cebirinde iki özel önerme vardır: bileşenleri ne olursa olsun **daima doğru** olan ve **daima yanlış** olan önermeler. Bunlar sayılardaki 0 ve 1'in rolüne çok benzer bir iş görür ve sadeleştirme yaparken en çok başvuru alan araçlardır.

4.1 Tanımlar

Tanım 4.1 (Totoloji). Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için **daima doğru** (1) olan bileşik önermeye **totoloji** denir ve t ile gösterilir.

Tanım 4.2 (Çelişki). Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için **daima yanlış** (0) olan bileşik önermeye **çelişki** denir ve c ile gösterilir.

i İki de birer bileşik önermedir

Totoloji ve çelişki birer bileşik önermedir. Totolojinin doğruluk değeri daima 1, çelişkinin doğruluk değeri ise daima 0'dır.

Bu yüzden hesaplarda t yerine 1, c yerine 0 yazmak serbesttir; iki gösterim de aynı anlama gelir.

4.2 Temel Örnek: $p \vee p'$ ve $p \wedge p'$

Teorem 4.1 (Üçüncü Hâlin İmkânsızlığı). Her p önermesi için $p \vee p'$ bir totoloji, $p \wedge p'$ ise bir çelişkidir:

$$p \vee p' \equiv t, \quad p \wedge p' \equiv c$$

İspat.

Her iki önerme için de doğruluk tablosu iki satırdan oluşur:

p	p'	$p \vee p'$	$p \wedge p'$
1	0	1	0
0	1	1	0

$p \vee p'$ sütunu bütün satırlarda 1 olduğundan totoloji, $p \wedge p'$ sütunu bütün satırlarda 0 olduğundan çelişkidir.

■

Bu iki denklik ders boyunca sürekli kullanılacaktır. Sözle ifade edersek: bir önerme ile değilinden **en az biri** daima doğrudur, **ikisi birden** asla doğru olamaz.

4.3 t ve c ile İşlemler

Totoloji ve çelişki, “ve” ile “veya” işlemlerinde birbirinin zıddı roller üstlenir.

Teorem 4.2 (Etkisiz ve Yutan Elemanlar). Her a önermesi için aşağıdaki denklikler sağlanır:

İşlem	Denklik	t ve c 'nin rolü
"ve"	$t \wedge a \equiv a \wedge t \equiv a$	t , "ve" işleminin etkisiz elemanıdır
"ve"	$c \wedge a \equiv a \wedge c \equiv c$	c , "ve" işleminin yutan elemanıdır
"veya"	$t \vee a \equiv a \vee t \equiv t$	t , "veya" işleminin yutan elemanıdır
"veya"	$c \vee a \equiv a \vee c \equiv a$	c , "veya" işleminin etkisiz elemanıdır

İspat.

Dört denklik de iki satırlık doğruluk tablolarıyla görülür. t sütunu daima 1, c sütunu daima 0'dır.

"Ve" işlemi için:

t	a	$t \wedge a$	$a \wedge t$	c	a	$c \wedge a$	$a \wedge c$
1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

İlk tabloda $t \wedge a$ sütunu a sütunuyla, ikinci tabloda $c \wedge a$ sütunu c sütunuyla çakışmaktadır.

"Veya" işlemi için:

t	a	$a \vee t$	$t \vee a$	c	a	$c \vee a$	$a \vee c$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0

Burada da $a \vee t$ sütunu t ile, $c \vee a$ sütunu a ile çakışmaktadır.

■

 Dört kuralı ezberlemeden hatırlamak

1'i "kesin doğru", 0'ı "kesin yanlış" diye okuyun:

- "Kesin doğru **ve** a " $\rightarrow$ her şey a 'ya bağlıdır $\rightarrow a$.
- "Kesin yanlış **ve** a " $\rightarrow$ zaten çökmüştür $\rightarrow c$.
- "Kesin doğru **veya** a " $\rightarrow$ zaten kazanılmıştır $\rightarrow t$.
- "Kesin yanlış **veya** a " $\rightarrow$ her şey a 'ya bağlıdır $\rightarrow a$.

4.4 Sadeleştirmede Kullanımı

Aşağıdaki iki örnek, bir bileşik önermenin totoloji olduğunu **doğruluk tablosu kurmadan**, yalnızca cebirsel özelliklerle nasıl gösterebileceğimizi anlatıyor. Aynı teknik bir sonraki bölümde çok daha karmaşık ifadelerde kullanılacak.

Örnek 4.1 (Cebirsel Yolla Totoloji Göstermek). $[(p \wedge q) \vee (p \wedge q')] \vee p'$ bileşik önermesinin bir totoloji olduğunu, önermeler cebirinin özelliklerini kullanarak ispat ediniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
[(p \wedge q) \vee (p \wedge q')] \vee p' &\equiv [p \wedge (q \vee q')] \vee p' \text{ (dağılma, ters yönde)} \\
&\equiv (p \wedge t) \vee p' \quad (q \vee q' \equiv t) \\
&\equiv p \vee p' \quad (t, \text{"ve"}\text{'nin etkisiz elemanı}) \\
&\equiv t
\end{aligned}$$

O hâlde verilen önerme bir totolojidir.

■

Örnek 4.2 (En Sade Hâle Getirme). $p \equiv (a \vee b) \wedge a'$ bileşik önermesini, işlem özelliklerinden faydalanarak en sade hâle getiriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
p &\equiv (a \vee b) \wedge a' \\
&\equiv (a \wedge a') \vee (b \wedge a') \text{ (} \wedge \text{'nin } \vee \text{ üzerine dağılması)} \\
&\equiv c \vee (b \wedge a') \quad (a \wedge a' \equiv c) \\
&\equiv b \wedge a' \quad (c, \text{"veya"}\text{'nın etkisiz elemanı})
\end{aligned}$$

■

Örnek 4.3 (Bir ve Sıfır İçeren İfade). Her p önermesi için

$$[(1 \wedge p') \vee (p \wedge p')] \vee p$$

önermesini en sade hâlde yazınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
[(1 \wedge p') \vee (p \wedge p')] \vee p &\equiv (p' \vee c) \vee p \text{ (} 1 \wedge p' \equiv p', p \wedge p' \equiv c \text{)} \\
&\equiv p' \vee p \quad (c, \text{"veya"}\text{'nın etkisiz elemanı}) \\
&\equiv t
\end{aligned}$$

Verilen önerme bir totolojidir.

■

! Totoloji mi, çelişki mi, hiçbir mi?

Bir bileşik önermeyi sadeleştirdiğinizde üç sonuçtan biri çıkar:

- t (veya 1) çıkarsa önerme bir **totolojidir**.
- c (veya 0) çıkarsa önerme bir **çelişkidir**.
- $q' \vee p$ gibi hâlâ değişken içeren bir ifade çıkarsa önerme **ikisi de değildir**; doğruluk değeri bileşenlere bağlıdır.

Üçüncü durum bir hata değildir; çoğu bileşik önerme bu sınıfa girer.

Bir sonraki bölümde, bileşik bir önermenin değilini almanın kuralını, yani **De Morgan kurallarını** inceleyeceğiz.

5. De Morgan Kuralları ve Önerme Sadeleştirme

Bir bileşik önermenin değilini almak, matematikte en sık ihtiyaç duyulan işlemlerden biridir: bir iddiayı çürütmek, olmayana ergi ile ispat yapmak veya bir tanımın “sağlanmadığı” durumu yazmak hep bu işleme dayanır.

Bu bölümde bileşik önermelerin nasıl değilleneceğini veren **De Morgan kurallarını** kuruyor ve ardından bu kuralları önerme sadeleştirmede kullanıyoruz.

5.1 De Morgan Kuralları

Teorem 5.1 (De Morgan Kuralları). p ve q herhangi iki önerme olmak üzere aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

$$\text{i)} (p \wedge q)' \equiv p' \vee q' \qquad \text{ii)} (p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

İspat.

Her iki kuralı da doğruluk tablosu kurarak gösterelim.

i)

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Son iki sütun bütün satırlarda çakıştığından $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ ’dür.

ii)

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Son iki sütun yine çakışmaktadır; o hâlde $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ’dür.

■

💡 Kuralı sözle hatırlamak

De Morgan kuralları tek cümlede özetlenir: **değil içeri girerken bağlaç yer değiştirir.**

- “ p ve q ” doğru **değilse**, en az biri yanlıştır $\rightarrow p'$ **veya** q' .
- “ p veya q ” doğru **değilse**, ikisi de yanlıştır $\rightarrow p'$ **ve** q' .

Örnek 5.1 (Doğrudan Uygulama). $(a \vee b')'$ bileşik önermesini sadeleştiriniz.

Çözüm.

$$(a \vee b')' \equiv a' \wedge (b')' \equiv a' \wedge b$$

■

Örnek 5.2 (Sıfırdan Farklı Karmaşık Sayı). x ve y gerçel sayıları, i de karesi -1 olan sanal sayıyı gösterdiğine göre, $x + iy$ karmaşık sayısının sıfırdan farklı olmasını önermelerle açıklayınız.

Çözüm.

$x + iy = 0$ olması, hem gerçel hem sanal kısmın sıfır olması demektir. O hâlde:

$$\begin{aligned} (x + iy \neq 0) &\equiv (x + iy = 0)' \\ &\equiv [(x = 0) \wedge (y = 0)]' \\ &\equiv (x \neq 0) \vee (y \neq 0) \quad (\text{De Morgan}) \end{aligned}$$

Yani bir karmaşık sayının sıfırdan farklı olması için gerçel kısmının **veya** sanal kısmının sıfırdan farklı olması yeterlidir.

■

Örnek 5.3 (Bir Kuraldan Diğerini Elde Etmek). Her a, b önermesi için $(a \wedge b)' \equiv a' \vee b'$ olduğu bilindiğine göre, $(a \vee b)' \equiv a' \wedge b'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Verilen $(a \wedge b)' \equiv a' \vee b'$ denkliği **her** önerme çifti için geçerlidir. O hâlde a yerine a' , b yerine b' yazabiliriz:

$$(a' \wedge b')' \equiv (a')' \vee (b')' \equiv a \vee b$$

Şimdi her iki tarafın değilini alalım:

$$((a' \wedge b')')' \equiv (a \vee b)'$$

Soldaki ifadede değilin değil kendisine denk olduğundan

$$a' \wedge b' \equiv (a \vee b)'$$

bulunur.

■

i İki kural birbirinden bağımsız değildir

Yukarıdaki örnek, De Morgan kurallarından yalnızca **birini** ispatlamanın yeterli olduğunu gösterir: harfleri değiştirmekle sonuçta değilini almak diğer kuralı verir. Bu “değişkenleri değiştirmekle” tekniği önermeler cebirinde sık kullanılır ve **ikilik (dualite) ilkesi** olarak adlandırılır.

5.2 Bileşik Önermelerin Değillenmesi

Örnek 5.4 (Değilini Yazma). Aşağıdaki bileşik önermelerin denk olduğu önermeleri bulunuz.

a) $[\text{"11 sayısı asaldır"} \vee (e < \pi)]'$ **b)** $[(p \wedge q)' \vee r]'$

Çözüm.

a) “Veya”nın değili, bileşenlerin değillerinin “ve”sidir:

$$[\text{"11 asaldır"} \vee (e < \pi)]' \equiv [\text{"11 asal değildir"} \wedge (e \geq \pi)]$$

b)

$$\begin{aligned} [(p \wedge q)' \vee r]' &\equiv ((p \wedge q)')' \wedge r' \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv (p \wedge q) \wedge r' \\ &\equiv p \wedge q \wedge r' \quad (\text{birleşme}) \end{aligned}$$

■

Örnek 5.5 (Çarpımı Sıfırdan Farklı Yapan Koşul). m ve n gerçel sayıları göstermek üzere, $(m - 1)(n + 2) \neq 0$ önermesinin denki olan önermeyi bulunuz.

Çözüm.

Bir çarpımın sıfır olması, çarpanlardan en az birinin sıfır olması demektir:

$$\begin{aligned} [(m - 1)(n + 2) \neq 0] &\equiv [(m - 1)(n + 2) = 0]' \\ &\equiv [(m - 1 = 0) \vee (n + 2 = 0)]' \\ &\equiv (m - 1 \neq 0) \wedge (n + 2 \neq 0) \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv (m \neq 1) \wedge (n \neq -2) \end{aligned}$$

Yani çarpımın sıfırdan farklı olması için **her iki** çarpanın da sıfırdan farklı olması gerekir.

■

! Değil alırken bağlacı çevirmeyi unutmak

Yukarıdaki örnekte en sık yapılan hata, sonucu $(m \neq 1) \vee (n \neq -2)$ olarak yazmaktır. Çarpanların bulunduğu ifade “veya” ile bağlıydı; değil alınınca bağlacı “**ve**”ye dönmek zorundadır.

Kontrol yöntemi basittir: $m = 1, n = 5$ alın. Çarpım $0 \cdot 7 = 0$ 'dır, yani $(m - 1)(n + 2) \neq 0$ önermesi yanlıştır. “Veya”lı yazım ise $n \neq -2$ sağlandığı için doğru değeri verirdi.

5.3 Sadeleştirme Uygulamaları

Örnek 5.6 (En Sade Hâle Getirme).

$$[((p \vee q) \wedge r)' \vee q']'$$

bileşik önermesini, doğruluk tablosu kullanmadan en sade hâle getiriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} [((p \vee q) \wedge r)' \vee q']' &\equiv (((p \vee q) \wedge r)')' \wedge (q')' \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv ((p \vee q) \wedge r) \wedge q \\ &\equiv (p \vee q) \wedge r \wedge q \quad (\text{birleşme}) \\ &\equiv ((p \vee q) \wedge q) \wedge r \quad (\text{birleşme ve değişme}) \\ &\equiv (q \wedge (p \vee q)) \wedge r \quad (\text{değişme}) \\ &\equiv (q \wedge (q \vee p)) \wedge r \quad (\text{değişme}) \\ &\equiv q \wedge r \quad (\text{yutma}) \end{aligned}$$

■

Örnek 5.7 (Totoloji mi?). $a \vee (b' \wedge a)$ bileşik önermesinin totoloji olup olmadığını araştırınız. Sonucunuzu doğruluk tablosuyla da sağlayınız.

Çözüm.
Cebirsel yol.

$$\begin{aligned}
 a \vee (b' \wedge a)' &\equiv a \vee ((b')' \vee a') \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv a \vee (b \vee a') \\
 &\equiv b \vee (a \vee a') \quad (\text{birleşme ve değişme}) \\
 &\equiv b \vee t \\
 &\equiv t
 \end{aligned}$$

Verilen önerme bir **totoloji**dir.
Doğruluk tablosuyla sağlama.

a	b	b'	$b' \wedge a$	$(b' \wedge a)'$	$a \vee (b' \wedge a)'$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Son sütun bütün satırlarda 1 olduğundan sonuç doğrulanmıştır.

■

Örnek 5.8 (De Morgan ile Totoloji İspatı). $(p \vee q) \vee (p \wedge q)'$ bileşik önermesinin bir totoloji olduğunu, doğruluk tablosu kurmadan ispat ediniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) \vee (p \wedge q)' &\equiv (p \vee q) \vee (p' \vee q') \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv p \vee (q \vee p') \vee q' \quad (\text{birleşme}) \\
 &\equiv p \vee (p' \vee q) \vee q' \quad (\text{değişme}) \\
 &\equiv (p \vee p') \vee (q \vee q') \quad (\text{birleşme}) \\
 &\equiv t \vee t \equiv t
 \end{aligned}$$

■

Örnek 5.9 (Bir Önerme ile Değilinin Ayrımı). p, q, r ilkel önermeleri verilsin. Tablo kullanmadan

$$[p \vee (q \wedge r)] \vee [p \vee (q \wedge r)]'$$

önermesinin totoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Kısaltma olarak $A \equiv p \vee (q \wedge r)$ diyelim. İfade $A \vee A'$ biçimindedir ve **Teorem 4.1** gereği bu bir totolojidir.

Aynı sonucu açık biçimde de görebiliriz:

$$\begin{aligned}
 [p \vee (q \wedge r)] \vee [p \vee (q \wedge r)]' &\equiv [p \vee (q \wedge r)] \vee [p' \wedge (q \wedge r)'] \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv ([p \vee (q \wedge r)] \vee p') \wedge ([p \vee (q \wedge r)] \vee (q \wedge r)') \quad (\vee \text{'nin } \wedge \text{ üzerine dağılması}) \\
 &\equiv ((p \vee p') \vee (q \wedge r)) \wedge (p \vee [(q \wedge r) \vee (q \wedge r)']) \quad (\text{birleşme ve değişme}) \\
 &\equiv (t \vee (q \wedge r)) \wedge (p \vee t) \\
 &\equiv t \wedge t \equiv t
 \end{aligned}$$

■

💡 Sadeleştirmede izlenecek sıra

Karmaşık bir önermeyi sadeleştirirken şu sıra hemen her zaman işe yarar:

1. **Değilleri içeri sok.** De Morgan ile en dıştaki değilleri harflere kadar taşıyın; $(p')' \equiv p$ ile ikili değilleri temizleyin.
2. **Aynı harfleri yan yana getir.** Birleşme ve değişme özellikleriyle p ile p' 'yi, q ile q' 'yü komşu yapın.
3. **Değişmezleri oluşturun.** $p \vee p' \equiv t$ ve $p \wedge p' \equiv c$ ile sabitleri açığa çıkarın.
4. **Sabitleri yut.** $t \vee A \equiv t$, $c \wedge A \equiv c$, $t \wedge A \equiv A$, $c \vee A \equiv A$ kurallarıyla ifadeyi kısaltın.
5. **Yutma kuralını ara.** $p \wedge (p \vee q)$ veya $p \vee (p \wedge q)$ kalıbı görürseniz doğrudan p yazın.

Buraya kadar üç işlemle çalıştık. Bir sonraki bölümde matematiksel teoremlerin neredeyse tamamının yazıldığı biçimi, yani “**ise**” işlemini tanımlıyoruz.

6. Koşullu Önerme ve Çeşitleri

Matematiksel teoremlerin neredeyse tamamı “eğer ... ise ...” biçiminde kurulur. Bu yüzden “ise” işlemi, mantığın matematiğe en doğrudan bakan yüzüdür. Bu bölümde koşullu önermeyi tanımlıyor, diğer işlemler cinsinden yazıyor ve bir koşullu önermeden türetilen üç yeni önermeyi inceliyoruz.

6.1 “İse” İşlemi

Tanım 6.1 (Koşullu Önerme). p ve q gibi iki önermenin arasına “ise” bağlacı konulmak suretiyle elde edilen bileşik önerme “ p ise q ” şeklinde okunur ve $p \Rightarrow q$ şeklinde gösterilir.

i Aksiyom

“ $p \Rightarrow q$ ” bileşik önermesi **sadece p doğru, q yanlış iken** yanlış değer alır. Diğer tüm durumlarda doğru değer alır.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p \Rightarrow q$ önermesi aşağıdaki biçimlerin hepsiyle okunabilir:

- “ p ise q ’dur”
- “ p , q ’yu gerektirir”
- “ p , q ’nun **yeter** şartıdır”
- “ q , p ’nin **gerek** şartıdır”

i Bileşenlerin adları

p ile q önermeleri, $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin bileşenleridir. $p \Rightarrow q$ önermesine **koşullu önerme** veya **gerektirme** adı verilir.

Bu koşullu önermede p ’ye **öncül** (varsayım, hipotez), q ’ya **sonuç** (hüküm) denir.

! Öncül yanlışsa önerme doğrudur

Tablonun son iki satırı ilk bakışta yadırgatıcıdır: p yanlış olduğunda q ne olursa olsun $p \Rightarrow q$ doğru kabul edilir.

Bunu bir söz verme gibi düşünebilirsiniz: “Sınavı geçersen sana kitap alacağım.” Sınavı geçemediyseniz, kitap alsanız da almasanız da sözünüzü çiğnememiş olursunuz. Söz ancak sınavı geçip kitap almadığımızda çiğnenir — tablonun tek 0 satırı budur.

6.2 Diğer İşlemler Cinsinden Yazılışı

Teorem 6.1 (İse İşleminin Açılımı). Her p, q önermesi için

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

İspat.

p	p'	q	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1

Son iki sütun bütün satırlarda çakışmaktadır.

■

Bu denklik bölümün en önemli aracıdır: “ise” içeren her ifadeyi $\wedge$, $\vee$ ve $'$ diline çevirip önceki bölümlerde kurduğumuz bütün cebiri kullanabiliriz.

Örnek 6.1 (Koşullu Önermenin Değili). $(p \Rightarrow q)'$ önermesini sadeleştiriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q)' &\equiv (p' \vee q)' \quad (\text{ise açılımı}) \\ &\equiv (p')' \wedge q' \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv p \wedge q' \end{aligned}$$

■

Teorem 6.2 (Koşullu Önermenin Değili).

$$(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$$

Sözle: “ p ise q ” önermesini çürütmenin tek yolu, p ’nin sağlandığı ama q ’nun sağlanmadığı **bir** durum göstermektir. Matematikte buna **karşı örnek vermek** denir.

6.3 Ters, Karşıtı ve Karşıt Ters

Tanım 6.2 (Bir Koşullu Önermenin Türevleri). Bir $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi verilsin.

- i) $p' \Rightarrow q'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin **tersi**,
- ii) $q \Rightarrow p$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıtı**,
- iii) $q' \Rightarrow p'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıt tersi** denir.

Teorem 6.3 (Karşıt Ters Denkliği). Her koşullu önerme, karşıt tersine denktir:

$$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$$

İspat.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
0	0	1	1	1	1

Son iki sütun çakışmaktadır.

Aynı sonuç cebirsel olarak da elde edilir:

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \equiv q \vee p' \equiv (q')' \vee p' \equiv q' \Rightarrow p'$$

■

! Yalnızca karşıt ters denktir

Bir koşullu önerme kendi **tersine** ve **karşıtına** denk **değildir**:

$$p \Rightarrow q \not\equiv p' \Rightarrow q', \quad p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$$

Örneğin “Bir sayı 4 ile bölünüyorsa çifttir” önermesi doğrudur; ama karşıtı olan “Bir sayı çiftse 4 ile bölünür” yanlıştır (6 sayısı). Karşıt tersi olan “Bir sayı çift değilse 4 ile bölünmez” ise yine doğrudur. Bu yüzden bir teoremi ispatlarken karşıt tersini ispatlamak serbesttir; karşıtını ispatlamak ise teoremi ispatlamaz.

6.4 “İse” İşleminin Dağılma Özellikleri

Teorem 6.4 (İse İşleminin Ve Üzerine Soldan Dağılması). Her a, b, c önermesi için

$$a \Rightarrow (b \wedge c) \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$$

İspat.

Sağ taraftan başlayalım:

$$\begin{aligned} (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) &\equiv (a' \vee b) \wedge (a' \vee c) \quad (\text{ise açılımı}) \\ &\equiv a' \vee (b \wedge c) \quad (\vee \text{'nin } \wedge \text{ üzerine dağılması}) \\ &\equiv a \Rightarrow (b \wedge c) \end{aligned}$$

■

Örnek 6.2 (Sağdan Dağılma Var mı?). Önergeler cebirinde “ise” işleminin “ve” işlemi üzerine **sağdan** dağılma özelliği olup olmadığını, doğruluk tablosu kullanmadan gösteriniz.

Çözüm.

$(b \wedge c) \Rightarrow a$ ile $(b \Rightarrow a) \wedge (c \Rightarrow a)$ önermelerini karşılaştıralım:

$$\begin{aligned} (b \Rightarrow a) \wedge (c \Rightarrow a) &\equiv (b' \vee a) \wedge (c' \vee a) \\ &\equiv (b' \wedge c') \vee a \quad (\text{dağılma}) \\ &\equiv (b \vee c)' \vee a \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv (b \vee c) \Rightarrow a \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz sonuç $(b \wedge c) \Rightarrow a$ değil, $(b \vee c) \Rightarrow a$ 'dır. O hâlde “ise” işleminin “ve” işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği **yoktur**.

■

i İki denklik bir arada

Son iki sonuç birlikte akılda tutulmalıdır:

$$a \Rightarrow (b \wedge c) \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c), \quad (b \vee c) \Rightarrow a \equiv (b \Rightarrow a) \wedge (c \Rightarrow a)$$

Öncül tarafında “veya”, sonuç tarafında “ve” bulunduğunda ifade iki koşullu önermenin “ve”sine ayrılır. Öncüldeki “ve” ise ayrılmaz.

6.5 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 6.3 (Öncüle Terim Taşıma). Temel özelliklerden faydalanarak

$$[a \Rightarrow (b \vee c)] \equiv [(a \wedge b') \Rightarrow c]$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} a \Rightarrow (b \vee c) &\equiv a' \vee (b \vee c) && \text{(ise açılımı)} \\ &\equiv (a' \vee b) \vee c && \text{(birleşme)} \\ &\equiv (a' \vee (b')') \vee c \\ &\equiv (a \wedge b')' \vee c && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (a \wedge b') \Rightarrow c \end{aligned}$$

■

 Bu denklik ne işe yarar?

Son örnek, ispat tekniklerinin temelini oluşturur: “*a ise b veya c*” biçimindeki bir teoremi ispatlamak yerine, “*a doğru ve b yanlış ise c doğrudur*” iddiasını ispatlamak yeterlidir. Yani sonuçtaki seçeneklerden birini yanlış varsayıp diğerini elde etmek serbesttir.

Örnek 6.4 (İç İç Koşullu Önerme).

$$[a' \Rightarrow (b \Rightarrow c')] \equiv [(b \wedge c) \Rightarrow a]$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} a' \Rightarrow (b \Rightarrow c') &\equiv a' \Rightarrow (b' \vee c') \\ &\equiv (a')' \vee (b' \vee c') && \text{(ise açılımı)} \\ &\equiv a \vee b' \vee c' && \text{(birleşme)} \\ &\equiv (b' \vee c') \vee a && \text{(değişme)} \\ &\equiv (b \wedge c)' \vee a && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (b \wedge c) \Rightarrow a \end{aligned}$$

■

Örnek 6.5 (Değilini Alıp Sadeleştirme). p, q, r önermeleri verilsin. Aşağıdaki bileşik önermelerin değerlerini yazınız ve sonuçtaki önermeleri sadeleştiriniz.

a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ **b)** $p \Rightarrow (q' \wedge r)$ **c)** $p \vee q \vee (p' \wedge q' \wedge r)$

Çözüm.**a)**

$$\begin{aligned}
 [(p \wedge q) \Rightarrow r]' &\equiv [(p \wedge q)' \vee r]' \\
 &\equiv ((p \wedge q)')' \wedge r' \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv (p \wedge q) \wedge r'
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 [p \Rightarrow (q' \wedge r)]' &\equiv [p' \vee (q' \wedge r)]' \\
 &\equiv (p')' \wedge (q' \wedge r)' \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv p \wedge (q \vee r')
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 [(p \vee q) \vee (p' \wedge q' \wedge r)]' &\equiv (p \vee q)' \wedge (p' \wedge q' \wedge r)' \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv (p \vee q)' \wedge [(p \vee q) \vee r'] \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv [(p \vee q)' \wedge (p \vee q)] \vee [(p \vee q)' \wedge r'] \quad (\text{dağılma}) \\
 &\equiv 0 \vee [(p \vee q)' \wedge r'] \\
 &\equiv (p \vee q)' \wedge r' \\
 &\equiv p' \wedge q' \wedge r' \quad (\text{De Morgan})
 \end{aligned}$$

■

Örnek 6.6 (Doğruluk Değerlerini Belirleme). p ve q , $p \Rightarrow q$ önermesi **yanlış** olacak şekilde ilkel önermeler olsun. Aşağıdaki her bir önermenin doğruluk değerini belirleyiniz.

a) $p \wedge q$ **b)** $p' \vee q$ **c)** $q \Rightarrow p$ **d)** $q' \Rightarrow p'$

e) $q \Leftrightarrow p$ **f)** $q \Leftrightarrow p'$ **g)** $p' \Leftrightarrow q'$

Çözüm.

$p \Rightarrow q$ önermesi yalnızca p doğru ve q yanlış iken 0 olur. O hâlde

$$p \equiv 1, \quad q \equiv 0$$

Bu değerleri yerine koyalım:

	Önerme	Hesap	Değer
a)	$p \wedge q$	$1 \wedge 0$	0
b)	$p' \vee q$	$0 \vee 0$	0
c)	$q \Rightarrow p$	$0 \Rightarrow 1$	1
d)	$q' \Rightarrow p'$	$1 \Rightarrow 0$	0
e)	$q \Leftrightarrow p$	$0 \Leftrightarrow 1$	0
f)	$q \Leftrightarrow p'$	$0 \Leftrightarrow 0$	1
g)	$p' \Leftrightarrow q'$	$0 \Leftrightarrow 1$	0

$\Leftrightarrow$ işlemi **mantıksal gerektirme** bölümünde tanımlanacaktır; burada yalnızca “iki taraf aynı değerdeyse 1” kuralını kullandık.

■

Örnek 6.7 (Bileşenlerin Değerlerini Bulma). Aşağıdaki önermenin **yanlış** olduğu bilindiğine göre p, q, r, s ilkel önermelerinin doğruluk değerlerini belirleyiniz.

$$[(p \wedge q) \wedge r] \Rightarrow (s \wedge r)$$

Çözüm.

Bir koşullu önerme yalnızca öncül doğru, sonuç yanlış iken 0 olur:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv 1, \quad s \wedge r \equiv 0$$

Birinci eşitlikte birleşme özelliğinden

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r \equiv 1$$

olur. Bir “ve” önermesinin doğru olması için bütün bileşenleri doğru olmalıdır:

$$p \equiv 1, \quad q \equiv 1, \quad r \equiv 1$$

İkinci eşitlikte $r \equiv 1$ bilgisini kullanalım:

$$s \wedge r \equiv s \wedge 1 \equiv s \equiv 0$$

Sonuç: $p \equiv q \equiv r \equiv 1$ ve $s \equiv 0$.

■

Bir sonraki bölümde, iki bileşik önerme arasındaki “*biri diğerini zorunlu kılar*” ilişkisini, yani [mantıksal gerektirme ve çıkarım kurallarını](#) inceleyeceğiz.

7. Mantıksal Gerektirme ve Çıkarım Kuralları

Bir teoremin ispatı, öncüllerden sonuca giden bir **çıkarım zinciridir**. Bu zincirin her halkasının geçerli olması, kullanılan adımın bir **mantıksal gerektirme** olmasına bağlıdır. Bu bölümde gerektirme kavramını kesin biçimde tanımlıyor ve matematikte en sık kullanılan çıkarım kurallarını tek tek ispatlıyoruz.

7.1 Mantıksal Gerektirme

Tanım 7.1 (Mantıksal Gerektirme). İki tane bileşik önermenin birbirini mantıksal olarak gerektirmesi için, bu iki bileşik önermenin arasına “ $\Rightarrow$ ” bağlacı konularak elde edilen yeni bileşik önermenin **totoloji** olması gerekir.

$a, b, c, \dots$ önermelerine bağlı P ve K bileşik önermeleri verildiğinde

$$P \Rightarrow K \equiv t$$

ise “ P önermesi K önermesini mantıksal olarak gerektirir” denir.

! İki farklı ok kullanımı

$\Rightarrow$ sembolü iki ayrı işi görür ve bu ikisi karıştırılmamalıdır:

- **İşlem olarak:** $p \Rightarrow q$, doğruluk değeri duruma göre 0 ya da 1 olan bir bileşik önermedir.
- **Bağıntı olarak:** “ P, K ’yı gerektirir” demek, $P \Rightarrow K$ bileşik önermesinin **her durumda** 1 olması demektir.

Yani gerektirme, koşullu önermenin totoloji hâlidir. Bir gerektirmeyi göstermek için daima “sonuç t mi?” sorusunu yanıtlarız.

Örnek 7.1 (Gerektiriyor mu?). $(p \wedge q)' \vee r$ önermesi, $(r \wedge q) \vee p'$ önermesini mantıksal olarak gerektirir mi?

Çözüm.

Aradığımız şey

$$[(p \wedge q)' \vee r] \Rightarrow [(r \wedge q) \vee p'] \stackrel{?}{\equiv} t$$

eşitliğidir. Önce açalım:

$$\begin{aligned} [(p \wedge q)' \vee r] \Rightarrow [(r \wedge q) \vee p'] &\equiv [(p \wedge q)' \vee r]' \vee [(r \wedge q) \vee p'] \\ &\equiv [(p \wedge q) \wedge r'] \vee (q \wedge r) \vee p' \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv (p \wedge q \wedge r') \vee (q \wedge r) \vee p' \end{aligned}$$

Şimdi p' ile ilk terimi birleştirelim:

$$p' \vee (p \wedge q \wedge r') \equiv (p' \vee p) \wedge (p' \vee (q \wedge r')) \equiv p' \vee (q \wedge r')$$

Buradan

$$\begin{aligned}
&\equiv p' \vee (q \wedge r') \vee (q \wedge r) \\
&\equiv p' \vee [q \wedge (r' \vee r)] \quad (\text{dağılma, ters yönde}) \\
&\equiv p' \vee (q \wedge t) \\
&\equiv p' \vee q
\end{aligned}$$

Sonuç $p' \vee q$ 'dur; bu bir totoloji **değildir** ($p \equiv 1, q \equiv 0$ için 0 olur). O hâlde $(p \wedge q)' \vee r$ önermesi $(r \wedge q) \vee p'$ önermesini mantıksal olarak **gerektirmez**.

Sağlama. $p \equiv 1, q \equiv 0, r \equiv 0$ alalım. Birinci önerme $(1 \wedge 0)' \vee 0 \equiv 1$, ikincisi $(0 \wedge 0) \vee 0 \equiv 0$ olur; yani öncül doğruyken sonuç yanlıştır.

■

7.2 Temel Çıkarım Kuralları

Aşağıdaki dört gerektirme, matematiksel ispatların iskeletini oluşturur.

Teorem 7.1 (Ayırma Kuralı (Modus Ponens)).

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

bir totolojidir.

İspat.

Önce öncülü sadeleştiririm:

$$(p' \vee q) \wedge p \equiv (p' \wedge p) \vee (q \wedge p) \equiv c \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

Buradan

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv (p \wedge q)' \vee q \equiv (p' \vee q') \vee q \equiv p' \vee (q' \vee q) \equiv p' \vee t \equiv t$$

■

Sözle: “ p ise q ” doğruysa ve p de doğruysa, q doğrudur. Teoremleri uygularken yaptığımız şey tam olarak budur.

Teorem 7.2 (Karşıt Ters Kuralı (Modus Tollens)).

$$[(p \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p'$$

bir totolojidir.

İspat.

Öncülü sadeleştiririm:

$$(p' \vee q) \wedge q' \equiv (p' \wedge q') \vee (q \wedge q') \equiv (p' \wedge q') \vee c \equiv p' \wedge q'$$

Buradan

$$\begin{aligned}
[(p \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p' &\equiv (p' \wedge q')' \vee p' \\
&\equiv (p \vee q) \vee p' \quad (\text{De Morgan}) \\
&\equiv (p \vee p') \vee q \equiv t \vee q \equiv t
\end{aligned}$$

■

Sözle: “ p ise q ” doğruysa ve q yanlırsa, p de yanlıştır. **Olmayana ergi** ile ispatın dayandığı kural budur.

Teorem 7.3 (Zincirleme Kuralı (Hipotetik Tasım)). Her a, b, c önermesi için

$$[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$$

bir totolojidir.

İspat.

$$\begin{aligned}
 [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] &\Rightarrow (a \Rightarrow c) \equiv [(a' \vee b) \wedge (b' \vee c)]' \vee (a' \vee c) \\
 &\equiv [(a' \vee b)' \vee (b' \vee c)'] \vee (a' \vee c) \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv [(a \wedge b') \vee (b \wedge c')] \vee a' \vee c \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv \underbrace{[a' \vee (a \wedge b')]}_{\equiv a' \vee b'} \vee \underbrace{[c \vee (b \wedge c')]}_{\equiv c \vee b} \\
 &\equiv (a' \vee b') \vee (b \vee c) \\
 &\equiv a' \vee (b' \vee b) \vee c \equiv a' \vee t \vee c \equiv t
 \end{aligned}$$

Alt çizgilerdeki iki sadeleştirme, dağılma özelliğinin doğrudan sonucudur:

$$\begin{aligned}
 a' \vee (a \wedge b') &\equiv (a' \vee a) \wedge (a' \vee b') \equiv t \wedge (a' \vee b') \equiv a' \vee b' \\
 c \vee (b \wedge c') &\equiv (c \vee b) \wedge (c \vee c') \equiv (c \vee b) \wedge t \equiv c \vee b
 \end{aligned}$$

■

Sözle: a' 'den b' 'ye, b' 'den c' 'ye gidilebiliyorsa a' 'dan c' 'ye gidilebilir. Uzun ispatların ara adımlarını birbirine bağlayan kural budur.

Teorem 7.4 (Ayrırcı Tasım).

$$[(p \vee q) \wedge p'] \Rightarrow q$$

bir totolojidir.

İspat.

Öncülü sadeleştiririm:

$$(p \vee q) \wedge p' \equiv (p \wedge p') \vee (q \wedge p') \equiv c \vee (q \wedge p') \equiv q \wedge p'$$

Buradan

$$\begin{aligned}
 [(p \vee q) \wedge p'] &\Rightarrow q \equiv (q \wedge p')' \vee q \\
 &\equiv (q' \vee p) \vee q \quad (\text{De Morgan}) \\
 &\equiv (q \vee q') \vee p \equiv t \vee p \equiv t
 \end{aligned}$$

■

Sözle: “ p veya q ” doğruysa ve p yanlışsa, q doğrudur. **Durum inceleme** ile ispatta seçenekleri eleme adımı bu kurala dayanır.

💡 Dört kural bir arada

Kural	Öncül	Sonuç
Ayırma (modus ponens)	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	q
Karşıt ters (modus tollens)	$(p \Rightarrow q) \wedge q'$	p'
Zincirleme (hipotetik tasım)	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$	$a \Rightarrow c$
Ayrırcı tasım	$(p \vee q) \wedge p'$	q

Dördünün de ispatı aynı kalıptadır: öncülü sadeleştir, $P' \vee K$ yaz, $x \vee x' \equiv t$ çıkart.

⚠ Modus ponens ile karıştırılan geçersiz çıkarım

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ bir totoloji **değildir**.

$p \equiv 0, q \equiv 1$ alalım: $p \Rightarrow q$ doğru, q doğru, ama p yanlıştır. Yani sonucun doğru olması öncülün doğru olmasını gerektirmez.

7.3 Çift Gerektirme (Karşılıklı Şart)

Tanım 7.2 (Karşılıklı Şart İşlemi). Verilen a ve b önermelerinden “ $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ ” bileşik önermesini elde etme işlemine **karşılıklı şart işlemi** veya **çift gerektirme işlemi** adı verilir.

Bu önerme $a \Leftrightarrow b$ şeklinde gösterilir ve “ a ancak ve ancak b ” ya da “ a için gerek ve yeter koşul b ’dir” şeklinde ifade edilir.

a	b	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Tablodan görüldüğü gibi $a \Leftrightarrow b$ önermesi, **iki taraf aynı doğruluk değerini aldığı**nda doğrudur.

Tanım 7.3 (Mantıksal Çift Gerektirme). $a, b, c, \dots$ önermelerine bağlı P ve K bileşik önermeleri verildiğinde, $P \Leftrightarrow K$ önermesi totoloji ise “ P önermesi K önermesini mantıksal olarak **çift gerektirir**” denir.

i Denklik ile çift gerektirme aynı şeydir

$P \Leftrightarrow K \equiv t$ olması ile $P \equiv K$ olması aynı anlama gelir: iki önerme bütün durumlarda aynı doğruluk değerini alır.

Bu yüzden şimdiye kadar “ $\equiv$ ” ile yazdığımız her denklik, aslında bir çift gerektirmedir.

Örnek 7.2 (De Morgan Kuralının Çift Gerektirmesi). $(a \vee b)'$ önermesinin $a' \wedge b'$ önermesini mantıksal olarak çift gerektirdiğini gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
 [(a \vee b)' \Leftrightarrow (a' \wedge b')] &\equiv [(a \vee b)' \Rightarrow (a' \wedge b')] \wedge [(a' \wedge b') \Rightarrow (a \vee b)'] \\
 &\equiv [(a \vee b) \vee (a' \wedge b')] \wedge [(a \vee b) \vee (a' \wedge b')] \\
 &\equiv (a \vee b) \vee (a' \wedge b') \quad (\text{eş güçlülük})
 \end{aligned}$$

İkinci satırda her iki köşeli parantez de aynı ifadeye indirgendi; çünkü $(a' \wedge b')' \equiv a \vee b$ ve $(a \vee b)' \equiv a' \wedge b'$ ’dür.

Kalan ifadeyi sadeleştirelim:

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \vee (a' \wedge b') &\equiv [a \vee (a' \wedge b')] \vee b \quad (\text{birleşme}) \\
 &\equiv [(a \vee a') \wedge (a \vee b')] \vee b \quad (\text{dağılma}) \\
 &\equiv (a \vee b') \vee b \\
 &\equiv a \vee (b' \vee b) \equiv a \vee t \equiv t
 \end{aligned}$$

O hâlde çift gerektirme sağlanır.

■

Örnek 7.3 (Ve İşleminin Çift Gerektilmeye). Doğruluk tablosu kullanmadan, $a \wedge b$ bileşik önermesinin $a \Leftrightarrow b$ bileşik önermesini mantıksal gerektilirdiğini ispatlayınız.

Çözüm.

$h \equiv [(a \wedge b) \Rightarrow (a \Leftrightarrow b)]$ önermesinin totoloji olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} h &\equiv (a \wedge b) \Rightarrow [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)] \\ &\equiv (a \wedge b) \Rightarrow [(a' \vee b) \wedge (b' \vee a)] \\ &\equiv (a \wedge b)' \vee [(a' \vee b) \wedge (b' \vee a)] \\ &\equiv (a' \vee b') \vee [(a' \vee b) \wedge (b' \vee a)] \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv [(a' \vee b') \vee (a' \vee b)] \wedge [(a' \vee b') \vee (b' \vee a)] \quad (\text{dağılma}) \end{aligned}$$

İki köşeli parantezi ayrı ayrı sadeleştiririm:

$$(a' \vee b') \vee (a' \vee b) \equiv a' \vee (b' \vee b) \equiv a' \vee t \equiv t$$

$$(a' \vee b') \vee (b' \vee a) \equiv (a' \vee a) \vee b' \equiv t \vee b' \equiv t$$

O hâlde $h \equiv t \wedge t \equiv t$ dir; gerektilme sağlanır.

■

Örnek 7.4 (Çift Gerektilmenin Değili). $(p' \Leftrightarrow q)' \equiv (p \Leftrightarrow q)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} (p' \Leftrightarrow q)' &\equiv [(p' \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')]' \\ &\equiv [(p \vee q) \wedge (q' \vee p')]' \\ &\equiv [[(p \vee q) \wedge q'] \vee [(p \vee q) \wedge p']]' \quad (\text{dağılma}) \end{aligned}$$

İçerideki iki parçayı sadeleştiririm:

$$(p \vee q) \wedge q' \equiv (p \wedge q') \vee (q \wedge q') \equiv p \wedge q'$$

$$(p \vee q) \wedge p' \equiv (p \wedge p') \vee (q \wedge p') \equiv q \wedge p'$$

Buradan

$$\begin{aligned} (p' \Leftrightarrow q)' &\equiv [(p \wedge q') \vee (q \wedge p')]' \\ &\equiv (p \wedge q')' \wedge (q \wedge p')' \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p) \\ &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\ &\equiv p \Leftrightarrow q \end{aligned}$$

■

7.4 Denklik Araştırmaları

Örnek 7.5 (Denk mi, Değil mi?). p, q, r ilkel önermeler olmak üzere aşağıdaki önerme çiftlerinin denk olup olmadığını araştırınız.

a) $q \Rightarrow (p \wedge p')$ ve q b) $p \Rightarrow q$ ve $q' \Rightarrow p'$

c) $(p \vee q) \Rightarrow r$ ve $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ d) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ve $p \vee (q \wedge r)$

Çözüm.

a)

$$q \Rightarrow (p \wedge p') \equiv q' \vee (p \wedge p') \equiv q' \vee c \equiv q'$$

Sonuç q'' 'dür ve $q' \neq q''$ dur. O hâlde bu iki önerme denk **değildir**.

b)

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \equiv q \vee p' \equiv (q')' \vee p' \equiv q' \Rightarrow p'$$

Denktir; bu zaten [Teorem 6.3](#) ile bildiğimiz karşıt ters denklidir.

c)

$$\begin{aligned} (p \vee q) \Rightarrow r &\equiv (p \vee q)' \vee r \\ &\equiv (p' \wedge q') \vee r \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv (p' \vee r) \wedge (q' \vee r) \quad (\vee \text{'nin } \wedge \text{ üzerine dağılması}) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

Denktir.

d) Sol tarafı dağılma özelliğiyle sadeleştirilim:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

Sağ taraf ise $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 'dir. Bu ikisi denk **değildir**.

Karşı örnek. $p \equiv 1, q \equiv 0, r \equiv 0$ alalım:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0, \quad p \vee (q \wedge r) \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$$

■

! İki dağılma kalıbı karıştırılabilir

(d) şıkkındaki iki ifade birbirine çok benzer görünse de farklıdır:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r), \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

Ortak çarpan parantezin dışına çıkarken **kendi bağlacıyla** çıkar: “ve” ile bağlıysa dışarıda “ve”, “veya” ile bağlıysa dışarıda “veya” kalır. Parantezin içindeki bağlaç ise diğeridir.

7.5 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 7.6 (Dağılma Aksiyomu). Doğruluk tablosu kullanmadan

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

bileşik önermesinin totoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce iki tarafı da $\wedge, \vee, '$ diline çevirelim:

$$\begin{aligned} [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] &\Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \\ &\equiv [p' \vee (q' \vee r)] \Rightarrow [(p' \vee q)' \vee (p' \vee r)] \\ &\equiv [p' \vee q' \vee r]' \vee [(p \wedge q') \vee p' \vee r] \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv (p \wedge q \wedge r') \vee (p \wedge q') \vee p' \vee r \quad (\text{De Morgan}) \end{aligned}$$

Şimdi r ile ilk terimi birleştirilim. $X \vee (Y \wedge X') \equiv X \vee Y$ kuralı gereği:

$$r \vee (p \wedge q \wedge r') \equiv r \vee (p \wedge q)$$

Buradan

$$\begin{aligned}
&\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge q') \vee p' \vee r \\
&\equiv [p \wedge (q \vee q')] \vee p' \vee r \quad (\text{dağılma, ters yönde}) \\
&\equiv (p \wedge t) \vee p' \vee r \\
&\equiv (p \vee p') \vee r \equiv t \vee r \equiv t
\end{aligned}$$

O hâlde verilen önerme bir totolojidir.

■

Örnek 7.7 (Totoloji Midir?). $(p \vee q) \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$ önermesi totoloji midir?

Çözüm.

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)] &\equiv (p \vee q)' \vee [q' \vee (p \wedge q)] \\
&\equiv (p' \wedge q') \vee q' \vee (p \wedge q) \quad (\text{De Morgan}) \\
&\equiv q' \vee (p \wedge q) \quad (\text{yutma: } q' \vee (q' \wedge p') \equiv q') \\
&\equiv (q' \vee p) \wedge (q' \vee q) \quad (\text{dağılma}) \\
&\equiv (q' \vee p) \wedge t \\
&\equiv q' \vee p
\end{aligned}$$

Sonuç $q' \vee p$ 'dir; totoloji **değildir**. $p \equiv 0, q \equiv 1$ için değeri 0 olur.

■

Örnek 7.8 (p' Önermesini Gerektilme). Her p, q önermesi için $(p \Rightarrow q) \wedge q'$ önermesinin p' önermesini mantıksal gerektirip gerektirmediğini araştırınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
[(p \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p' &\equiv [(p' \vee q) \wedge q']' \vee p' \\
&\equiv [(p' \wedge q') \vee (q \wedge q')] \vee p' \quad (\text{dağılma}) \\
&\equiv [(p' \wedge q') \vee c]' \vee p' \\
&\equiv (p' \wedge q')' \vee p' \\
&\equiv (p \vee q) \vee p' \quad (\text{De Morgan}) \\
&\equiv (p \vee p') \vee q \equiv t \vee q \equiv t
\end{aligned}$$

O hâlde $(p \Rightarrow q) \wedge q'$ önermesi p' önermesini mantıksal olarak **gerektirir**. Bu, [Teorem 7.2](#) ile aynı sonuçtur.

■

Buraya kadar bütün önermeler değişken içermiyordu. Bir sonraki bölümde değişken içeren ifadeleri, yani **açık önermeleri ve niceleyicileri** inceleyeceğiz.

8. Niceleme Mantığı: Açık Önermeler ve Niceleyiciler

Şimdiye kadar incelediğimiz bütün önermelerin doğruluk değeri sabitti. Oysa matematiğin gerçek cümleleri neredeyse hep değişken içerir: “ $x^2 \geq 0$ dir”, “ n bir asal sayıdır” gibi. Bu bölümde değişken içeren ifadeleri önerme hâline getiren araçları, yani **niceleyicileri** inceliyoruz.

8.1 Açık Önerme

“ $x + 1$ bir doğal sayıdır” cümlesini ele alalım. Bu cümle ilk bakışta önerme tanımındaki şartları gerçekleştirmemektedir. Çünkü x ’in tam sayılar üzerinde değişmekte olduğunu kabul edersek bu ifade

- $x \geq -1$ değerleri için **doğru** hüküm,
- $x < -1$ değerleri için **yanlış** hüküm

bildirir. Bu şekildeki ifadelere **açık önerme** denir.

Tanım 8.1 (Açık Önerme). p hüküm bildiren bir cümle olsun. Eğer

- a) p , en az bir **değişken** içeriyorsa,
- b) p bir önerme **değil**, fakat
- c) değişkenlerin alabileceği değerler için **önerme oluyor** ise p ’ye **açık önerme** denir.

Tek değişkenli açık önermeler $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ vb. şeklinde gösterilir. Benzer şekilde çok değişkenli açık önermeler, gerçel değerli fonksiyonlar gibi $p(x, y)$ biçiminde gösterilebilir.

i Açık önerme, önerme değildir

$p(x)$: $x + 1$ bir doğal sayıdır ifadesinin doğruluk değeri **yoktur**; ancak x yerine somut bir değer konulduğunda ($p(3)$, $p(-5)$ gibi) bir önerme elde edilir ve doğruluk değeri ortaya çıkar. Açık bir önermeyi önermeye çevirmenin ikinci yolu ise değişkeni bir **niceleyici** ile bağlamaktır; bu bölümün konusu budur.

8.2 Niceleyiciler

Aşağıdaki cümlelere bakalım:

- “Bazı paralelkenarlar dikdörtgendir.”
- “En az bir x gerçel sayısı için x ’in karesi kendisine eşittir.”
- “Her dikdörtgen bir karedir.”

Önermelerde olduğu gibi matematik dilinde de “bazı”, “en az bir”, “her” deyimleri kullanılır. Çokluk bildiren bu deyimlerden en anlamlı olanlar ayrılıp birer sembolle gösterilebilir.

8.2.1 Evrensel Niceleyici

Tanım 8.2 (Evrensel Niceleyici (Bildirici)). “Her” deyimini; “bütün”, “hepsi”, “ne olursa olsun” deyimleri ile eş anlamlıdır ve $\forall$ ile gösterilir. Bu ifadeye **evrensel niceleyici (bildirici)** adı verilir.

Örnek 8.1. “Her x gerçel sayısı için x ’in mutlak değeri kendisine eşittir” önermesi; “Bütün x gerçel sayıları için $|x| = x$ dir” veya “ x gerçel sayısı ne olursa olsun $|x| = x$ dir” önermelerine eşittir. Kısaca bu önerme

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$$

şeklinde ifade edilir.

x değişkenine bağlı bir açık önerme $p(x)$ ile gösterilirse, evrensel niceleyici içeren bir önerme

$$\forall x, p(x)$$

şeklinde yazılır ve “Her x için $p(x)$ gerçekleşir” ya da “Her x için $p(x)$ doğrudur” şeklinde ifade edilir.

8.2.2 Varlık Niceleyicisi

Tanım 8.3 (Varlık Niceleyicisi (Bildirici)). Matematikte “bazı” deyimini “en az bir var” veya “hiç olmazsa bir var” anlamında kullanırız. “Bazı” deyimini $\exists$ ile gösterilir ve **varlık bildirici** veya **varlık niceleyicisi** olarak ifade edilir.

Örnek 8.2. x gerçel sayı olmak üzere, “Bazı x sayıları için $x^2 = x$ dir” önermesi, “En az bir x gerçel sayısı vardır ki $x^2 = x$ dir” şeklinde ifade edilebilir.

Bu önermeyi kısaca

$$\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 = x$$

şeklinde ifade edebiliriz.

i Öyle ki sembolü

Varlık bildirici içeren açık önermelerde, varlık bildirici sembolünden sonra genellikle $\ni$ sembolü kullanılır ve bu sembolün önermeye kattığı anlam “**öyle ki**” ifadesidir:

$$\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 = x$$

x değişkenine bağlı bir açık önerme $p(x)$ ile gösterilirse, varlık bildirici kapsayan önermeyi $\exists x, p(x)$ veya $\exists x \ni p(x)$ şeklinde gösteririz.

8.3 Niceleyici İçeren Önermelerin Doğruluğu

$p(x)$ önerme fonksiyonunu sağlayan, diğer bir ifadeyle doğru kılan bütün x ’ler, x ’in tanımlandığı kümeye eşitse “ $\forall x, p(x)$ dir” önermesi doğrudur.

Başka bir ifadeyle x ’in tanımlandığı kümedeki bütün x değerleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ ise, $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ aynı anda doğru olduğunda “ $\forall x, p(x)$ ” önermesi doğru olur:

$$\forall x, p(x) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n)$$

x ’in tanımlandığı kümenin **en az bir** değeri için $p(x)$ doğru oluyorsa “ $\exists x, p(x)$ ” önermesi doğrudur. Hiçbiri doğru değilse yanlıştır:

$$\exists x, p(x) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n)$$

i Niceleyiciler genelleştirilmiş bağlaçlardır

Bu iki denklik, niceleyicilerin ne olduğunu tek cümlede anlatır: $\forall$ uzun bir “**ve**” zinciri, $\exists$ ise uzun bir “**veya**” zinciridir.

Bu yüzden deĞilleme kuralları da De Morgan kurallarının doğrudan genellemesi olacaktır.

Örnek 8.3 (Evrensel Önermelerin Doğruluk Değerleri). a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$ b) $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

Çözüm.

a) $x = -1$ için $|-1| = 1 \neq -1$ 'dir. Bir tek karşı örnek yeterlidir; önerme **yanlıştır** (doğruluk değeri 0).

b) Çarpanları açarsak her x gerçel sayısı için $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ olduğu görülür. Önerme **doğrudur** (doğruluk değeri 1).

■

Örnek 8.4 (Varlık Önermelerinin Doğruluk Değerleri). a) $\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 + 1 = 0$ b) $\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 = x$

Çözüm.

a) $x^2 + 1 = 0$ denkleminin diskriminantı

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$$

olduğundan gerçel kök yoktur. Yani $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan bir gerçel sayı bulunmaz; önerme **yanlıştır**.

b) $x = 1 \in \mathbb{R}$ için $1^2 = 1$ olduğundan önerme **doğrudur**. ($x = 0$ da bir örnektir.)

■

! İki niceleyici, iki farklı iş

Bir evrensel önermeyi **çürütmek** için tek bir karşı örnek yeter; **ispatlamak** için bütün değerlerin sağladığını göstermek gerekir.

Bir varlık önermesini **ispatlamak** için tek bir örnek yeter; **çürütmek** için hiçbir değer sağladığını göstermek gerekir.

8.4 Niceleyici İçeren Önermelerin Değillenmesi

Teorem 8.1 (Niceleyicilerin Değillenmesi).

$$[\forall x, p(x)]' \equiv \exists x, [p(x)]' \quad [\exists x, p(x)]' \equiv \forall x, [p(x)]'$$

İspat.

x değerleri $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinden alınıyor olsun.

Evrensel niceleyici için:

$$\begin{aligned} [\forall x, p(x)]' &\equiv [p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n)]' \\ &\equiv p'(x_1) \vee p'(x_2) \vee \dots \vee p'(x_n) \text{ (De Morgan)} \\ &\equiv \exists x, p'(x) \end{aligned}$$

Varlık niceleyicisi için:

$$\begin{aligned} [\exists x, p(x)]' &\equiv [p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n)]' \\ &\equiv p'(x_1) \wedge p'(x_2) \wedge \dots \wedge p'(x_n) \text{ (De Morgan)} \\ &\equiv \forall x, p'(x) \end{aligned}$$

■

Kısaca: **değil işareti niceleyicinin içine girerken niceleyiciyi çevirir.** “Her” ile “en az bir” yer değişir.

Örnek 8.5 (İfade Etme, Doğruluk ve Değilleme). Aşağıdaki önermeleri ifade ediniz, doğruluklarını belirtiniz ve değillerini yazınız.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$ b) $\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 - 3x + 2 > 0$

Çözüm.

a) “Her x gerçel sayısı için x ’in karesinin karekökü kendisine eşittir.”

$x \geq 0$ değerleri için sağlamıyor, fakat $x < 0$ değerleri için sağlamıyor (örneğin $x = -2$ için $\sqrt{4} = 2 \neq -2$). Bu nedenle **yanlıştır**.

Değili:

$$\exists x \in \mathbb{R} \ni \sqrt{x^2} \neq x$$

ve bu önerme **doğrudur**.

b) “En az bir x gerçel sayısı vardır öyle ki karesinden üç katını çıkarıp iki eklediğimizde sıfırdan büyük olur.”

$x = 0 \in \mathbb{R}$ için $p(0) = 0 - 0 + 2 = 2 > 0$ olduğundan önerme **doğrudur**.

Değili:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

■

Örnek 8.6 (Bileşik Nicelenmiş Önerme).

$$\left[\left(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x \right) \vee \left(\exists y \in \mathbb{R} \ni y^2 + 1 = 0 \right) \right]$$

önermesini ifade ediniz, doğruluk değerini belirleyiniz ve değilini alınız.

Çözüm.

İfade. “Her x gerçel sayısı için x ’in karesinin bir fazlası, x ’in iki katından büyük ve eşittir; veya en az bir y gerçel sayısı vardır öyle ki y ’nin karesinin bir fazlası sıfıra eşit olur.”

Doğruluk değeri. “ $\vee$ ” işlemi olduğu için en az birinin doğru olması, önermenin doğru olması için yeterlidir.

Birinci bileşeni inceleyelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$$

Bir gerçel sayının karesi daima sıfırdan büyük veya eşit olduğundan birinci bileşen **doğrudur**.

İkinci bileşende $y^2 = -1$ olmalıdır; bunu sağlayan bir gerçel sayı yoktur, yani ikinci bileşen **yanlıştır**. O hâlde $1 \vee 0 \equiv 1$; verilen önerme **doğrudur**.

Değili.

$$\begin{aligned} & \left[\left(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x \right) \vee \left(\exists y \in \mathbb{R} \ni y^2 + 1 = 0 \right) \right]' \\ & \equiv \left(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x \right)' \wedge \left(\exists y \in \mathbb{R} \ni y^2 + 1 = 0 \right)' \quad (\text{De Morgan}) \\ & \equiv \left(\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 + 1 < 2x \right) \wedge \left(\forall y \in \mathbb{R}, y^2 + 1 \neq 0 \right) \end{aligned}$$

■

⚠ Evrensel önermeyi tek değerle doğrulamak yetmez

Yukarıdaki (a) bileşeninde $x = 0$ koyup $1 \geq 0$ sonucunu görmek, önermenin **doğru olduğunu ispatlamaz**; yalnızca o tek değer için sağlandığını gösterir.

$\forall$ ile başlayan bir önermeyi doğrulamak için bütün x değerlerini kapsayan bir akıl yürütme gerekir — burada bunu $(x - 1)^2 \geq 0$ eşitsizliğiyle yaptık. Tek bir değer, ancak önermeyi **çürütmek** için (karşı örnek olarak) yeterlidir.

8.5 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 8.7 (Üç Açık Önerme). $p(x) := x \leq 3$, $q(x) := x + 1$ bir tek tam sayıdır, $r(x) := x > 0$ şeklinde tam sayılar üzerinde tanımlı açık önergeler olsun.

a) Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirleyiniz.

i) $p(3) \vee [q(3) \vee (r(3))']$ ii) $p(2) \Rightarrow [q(2) \Rightarrow (r(2))']$

iii) $[p(2) \wedge q(2)] \Rightarrow r(2)$ iv) $p(0) \Rightarrow [(q(-1))' \Leftrightarrow r(1)]$

b) $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$ önermesini doğru yapacak şekilde tüm x değerlerini belirleyiniz.

Çözüm.

a) i) $p(3) : 3 \leq 3$ doğru $\rightarrow 1$. $q(3) : 4$ tek değildir $\rightarrow 0$. $r(3) : 3 > 0$ doğru $\rightarrow 1$, dolayısıyla $(r(3))' \rightarrow 0$.

$$1 \vee (0 \vee 0) \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$$

Doğruluk değeri 1'dir.

ii) $p(2) : 2 \leq 3 \rightarrow 1$. $q(2) : 3$ tektir $\rightarrow 1$. $r(2) : 2 > 0 \rightarrow 1$, dolayısıyla $(r(2))' \rightarrow 0$.

$$1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$$

Doğruluk değeri 0'dır.

iii)

$$(1 \wedge 1) \Rightarrow 1 \equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$$

Doğruluk değeri 1'dir.

iv) $p(0) : 0 \leq 3 \rightarrow 1$. $q(-1) : -1 + 1 = 0$ tek değildir $\rightarrow 0$, dolayısıyla $(q(-1))' \rightarrow 1$. $r(1) : 1 > 0 \rightarrow 1$.

$$1 \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 1) \equiv 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$$

Doğruluk değeri 1'dir.

b) $p(x) \wedge r(x)$ koşulu $0 < x \leq 3$ demektir; tam sayılarda $x \in \{1, 2, 3\}$ olur. Ayrıca $q(x)$ 'in de doğru olması, yani $x + 1$ 'in tek tam sayı olması gerekir; bu da x 'in **çift** olmasını gerektirir.

O hâlde $x = 2$ olmalıdır.

■

Örnek 8.8 ($x^2 = 2x$ Açık Önermesi). Evrenimiz tam sayılar olmak üzere $p(x) := x^2 = 2x$ açık önermesini gösterebiliriz. Aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu belirleyiniz.

a) $p(0)$ b) $p(1)$ c) $p(2)$ d) $p(-2)$ e) $\exists x, p(x)$ f) $\forall x, p(x)$

Çözüm.

a) $0^2 = 0$ ve $2 \cdot 0 = 0$; **doğru**.

b) $1^2 = 1$ fakat $2 \cdot 1 = 2$; **yanlış**.

c) $2^2 = 4$ ve $2 \cdot 2 = 4$; **doğru**.

d) $(-2)^2 = 4$ fakat $2 \cdot (-2) = -4$; **yanlış**.

e) $x = 0$ için $p(0)$ doğru olduğundan, $p(x)$ 'i doğru kılan en az bir x vardır; **doğru**.

f) $x = 5$ için $p(5)$ yanlıştır; her x için $p(x)$ doğru değildir. **Yanlış**.

■

Örnek 8.9 (Sembolik Yazım ve Yorumlama). Tam sayılar üzerinde tanımlı aşağıdaki açık önermeler verilsin:

$$p(x) := x > 0, \quad q(x) := x \text{ bir çift tam sayıdır}, \quad r(x) := x \text{ bir tam karedir}$$

$$s(x) := x, 4 \text{ ile tam bölünür}, \quad t(x) := x, 5 \text{ ile tam bölünür}$$

a) Aşağıdaki önermeleri sembolik olarak yazınız.

i) En az bir tam sayı çifttir. ii) Çift bir pozitif tam sayı vardır. iii) Eğer x bir çift tam sayı ise 5 ile bölünmez. iv) 5 ile bölünen bir çift tam sayı yoktur. v) Eğer x bir çift tam sayı ve tam kare ise, o zaman $x, 4$ ile tam bölünür.

b) (a) şıkında verilen önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu belirleyiniz. Yanlış önerme için aksine bir örnek veriniz.

c) Aşağıdaki sembolik temsillerin her birini kelimelerle ifade ediniz.

- i) $\forall x, r(x) \Rightarrow p(x)$ ii) $\forall x, s(x) \Rightarrow q(x)$ iii) $\forall x, s(x) \wedge p(x)$

Çözüm.

a) i) $\exists x, q(x)$

ii) $\exists x, (p(x) \wedge q(x))$

iii) $\forall x, q(x) \Rightarrow (t(x))'$

iv) $\left[\exists x, (q(x) \wedge t(x)) \right]' \equiv \forall x, \left((q(x))' \vee (t(x))' \right)$

v) $\forall x, [q(x) \wedge r(x)] \Rightarrow s(x)$

b) i) **Doğru** ($x = 2$).

ii) **Doğru** ($x = 2$).

iii) **Yanlış**; $x = 10$ çifttir ve 5 ile bölünür.

iv) **Yanlış**; $x = 10$ hem çift hem 5 ile bölünür, yani böyle bir sayı vardır.

v) **Doğru**. Gerçekten, $x = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve $x = m^2$ ($m \in \mathbb{Z}$) olsun. $m^2 = 2k$ olduğundan m^2 çifttir. 2 asal sayı olduğu için m de çifttir; o hâlde $m = 2s$ ($s \in \mathbb{Z}$) yazılabilir. Buradan

$$x = m^2 = (2s)^2 = 4s^2, \quad s^2 \in \mathbb{Z}$$

bulunur; yani x , 4 ile tam bölünür.

c) i) “Her x tam sayısı için, eğer x bir tam kare ise x pozitifdir.”

ii) “Her x tam sayısı için, eğer x , 4 ile tam bölünüyorsa x bir çift tam sayıdır.”

iii) “Her x tam sayısı hem 4 ile tam bölünür hem de pozitifdir.”

■

! Niceleyici altında ve ile ise farklı şeyler söyler

(c) şıkkının son iki maddesi bu farkı iyi gösterir:

- $\forall x, (s(x) \Rightarrow p(x))$: “4 ile bölünen **her** sayı pozitifdir.” – yalnızca 4’ün katları hakkında bir iddiadır.
- $\forall x, (s(x) \wedge p(x))$: “**Her** tam sayı hem 4 ile bölünür hem pozitifdir.” – bütün tam sayılar hakkında bir iddiadır ve $x = 3$ yüzünden yanlıştır.

Koşullu önermede öncül yanlışsa ifade doğru sayılır; “ve” ise her iki tarafın da sağlanmasını ister.

Örnek 8.10 (Denklem Kökleriyle Niceleyiciler). $p(x), q(x), r(x)$ aşağıda verilen açık önergeler olsun:

$$p(x) := x^2 - 7x + 10 = 0, \quad q(x) := x^2 - 2x - 3 = 0, \quad r(x) := x < 0$$

Tam sayılar üzerinde aşağıda verilen önergelerin doğru ya da yanlış olduğunu belirleyiniz.

i) $\forall x, p(x) \Rightarrow (r(x))'$ ii) $\forall x, q(x) \Rightarrow r(x)$

iii) $\exists x, q(x) \Rightarrow r(x)$ iv) $\exists x, p(x) \Rightarrow r(x)$

Çözüm.

Önce açık önergeleri çarpanlarına ayıralım:

$$p(x) := (x - 5)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ve } x = 5 \text{ için doğrudur.}$$

$$q(x) := (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ve } x = -1 \text{ için doğrudur.}$$

i) **Doğrudur.** Verilen önermenin yanlış olabilmesi için, $p(x)$ ’in doğru olduğu bir x ’te $(r(x))'$ yanlış olmalıdır. $p(x)$ ’in doğru olduğu $x = 2$ ve $x = 5$ için $r(x)$ yanlıştır (ikisi de negatif değildir), yani $(r(x))'$ doğrudur. Diğer bütün x değerlerinde öncül yanlış olduğundan koşullu önerme doğrudur.

ii) **Yanlıştır.** $q(x)$ ’in doğru olduğu her x tam sayısı için $r(x)$ doğru değildir. Örneğin $x = 3$ için $q(3)$ doğru, ancak $r(3) : 3 < 0$ yanlıştır; yani $1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olur.

iii) **Doğrudur.** $q(x) \Rightarrow r(x)$ önermesini doğru yapacak en az bir x tam sayısı vardır: $x = -1$ için $q(-1)$ doğru ve $r(-1) : -1 < 0$ de doğrudur, yani $1 \Rightarrow 1 \equiv 1$ ’dir.

iv) **Doğrudur.** Burada aranan, $p(x) \Rightarrow r(x)$ önermesini doğru yapan **en az bir** x tam sayısıdır. $x = 0$ alalım: $p(0) = 10 \neq 0$ olduğundan öncül yanlıştır ve öncülü yanlış olan bir koşullu önerme doğrudur:

$$p(0) \Rightarrow r(0) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$$

O hâlde böyle bir x vardır; önerme doğrudur.

■

⚠ $\exists$ ile $\forall$ altında koşullu önerme

Son örneğin (iv) şikkı, niceleme mantığındaki en çok karıştırılan noktadır. Şu iki önermeyi ayırmak gerekir:

$$\exists x, (p(x) \Rightarrow r(x)) \quad \text{ile} \quad \forall x, (p(x) \Rightarrow r(x))$$

Birincisi için öncülü **yanlış** olan tek bir x bulmak bile yeterlidir; bu yüzden $p(x)$ 'in en az bir yerde yanlış olduğu her durumda birinci önerme otomatik olarak doğrudur.

İkincisi ise çok daha güçlü bir iddiadır: $p(x)$ 'in doğru olduğu **bütün** x 'lerde $r(x)$ 'in de doğru olmasını ister. Bu örnekte $\forall x, (p(x) \Rightarrow r(x))$ yanlıştır, çünkü $x = 2$ için $p(2)$ doğru ama $r(2)$ yanlıştır.

Örnek 8.11 (Değilini Alıp Basitleştirme). Aşağıdaki her bir önermeyi değilleyiniz ve basitleştiriniz.

- i) $\exists x, p(x) \vee q(x)$ ii) $\exists x, p(x) \wedge (q(x))'$
 iii) $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ iv) $\exists x, (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow r(x)$

Çözüm.

i)

$$[\exists x, p(x) \vee q(x)]' \equiv \forall x, (p(x))' \wedge (q(x))'$$

ii)

$$[\exists x, p(x) \wedge (q(x))']' \equiv \forall x, (p(x))' \vee q(x)$$

iii)

$$[\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)]' \equiv [\forall x, (p(x))' \vee q(x)]' \\ \equiv \exists x, p(x) \wedge (q(x))'$$

iv)

$$[\exists x, (p(x) \vee q(x)) \Rightarrow r(x)]' \equiv [\exists x, (p(x) \vee q(x))' \vee r(x)]' \\ \equiv \forall x, [(p(x) \vee q(x))' \vee r(x)]' \\ \equiv \forall x, (p(x) \vee q(x)) \wedge (r(x))'$$

■

💡 Değilleme için pratik kural

Uzun bir nicelenmiş önermenin değilini almak için soldan sağa yürüyün:

1. Her $\forall$ 'i $\exists$, her $\exists$ 'i $\forall$ yapın.
2. En içteki açık önermeye ulaşınca $\wedge \leftrightarrow \vee$ çevirin ve her bileşeni değilleyin.
3. Koşullu önerme varsa önce $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ ile açın; değili $p \wedge q'$ olur.

9. Doğrudan İspat Yöntemi

Bir matematiksel önermenin doğru olduğunu göstermeye **ispat** denir. Mantık bölümünde teoremlerin neredeyse tamamının

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

biçiminde kurulduğunu görmüştük. Bu bölümden itibaren, böyle bir önermenin doğruluğunu göstermek için kullanılan yöntemleri tek tek ele alıyoruz.

9.1 İspat Yöntemleri

Bir $p(x) \Rightarrow q(x)$ önermesini ispatlamanın başlıca dört yolu vardır:

- **Doğrudan ispat:** $p(x)$ 'in doğru olduğu kabul edilip $q(x)$ 'in doğruluğuna ulaşılır.
- **Karşıt ters ile ispat:** $q'(x) \Rightarrow p'(x)$ önermesi ispatlanır.
- **Çelişki ile ispat:** önermenin yanlış olduğu varsayıp bir çelişkiye ulaşılır.
- **Durum incelemeli ispat:** x 'in bütün olası hâlleri ayrı ayrı incelenir.

! Yönteminizi baştan söyleyin

Çözüme başlarken hangi ispat yönteminin kullanılacağı mutlaka belirtilmelidir. Okuyucu, “kabul edelim ki...” ile başlayan bir cümlede neyin kabul edildiğini ancak yöntemi bilirse doğru yorumlayabilir.

9.2 Doğrudan İspat

Tanım 9.1 (Doğrudan (Direkt) İspat Yöntemi). $p(x) \Rightarrow q(x)$ biçimindeki bir önermenin ispatında, $p(x)$ açık önermesinin doğru olduğu kabul edilerek $q(x)$ açık önermesinin de doğru olduğu gösterilirse, kullanılan yöntem **doğrudan ispat yöntemi** denir.

Bu yöntem, koşullu önermenin doğruluk tablosuna dayanır: $p \Rightarrow q$ önermesi yalnızca p doğru ve q yanlış iken yanlıştır. O hâlde p 'nin doğru olduğu durumda q 'nin de doğru olduğunu göstermek yeterlidir; p 'nin yanlış olduğu durumlarda önerme zaten doğrudur.

9.3 Tek ve Çift Sayılarla İlgili İspatlar

i Kullanacağımız tanımlar

Bir n tam sayısı için:

- $n = 2k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa n **çift**,
- $n = 2k + 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa n **tek** sayıdır.

Örnek 9.1 (Çiftten Teke). n bir çift tam sayı ise $3n + 5$ sayısının bir tek tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğrudan ispat yöntemini kullanacağız.

n çift bir tam sayı olsun. Bu durumda $n = 2k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre

$$3n + 5 = 3 \cdot 2k + 5 = 6k + 5 = 6k + 4 + 1 = 2 \underbrace{(3k + 2)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

olur. $t = 3k + 2$ dersek $t \in \mathbb{Z}$ 'dir ve

$$3n + 5 = 2t + 1$$

yazılır. O hâlde $3n + 5$ bir tek tam sayıdır.

■

9.4 Eşitsizliklerle İlgili İspatlar

Eşitsizlik ispatlarında izlenecek yol genellikle şudur: **daima doğru olan bir eşitsizlikten yola çıkıp** ($u^2 \geq 0$ gibi) cebirsel işlemlerle istenen eşitsizliğe ulaşmak.

Örnek 9.2 (Tam Kareye Tamamlama). Her x gerçel sayısı için $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. İfadeyi tam kareye tamamlayalım:

$$x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 6x + 9) + 1 = (x - 3)^2 + 1$$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $(x - 3)^2 \geq 0$ olduğundan

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$$

bulunur.

■

Örnek 9.3 (Karekök Sıralamayı Korur). x ve y pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $x \leq y$ ise $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x \leq y$ olsun; yani $x - y \leq 0$ 'dır. x ve y pozitif olduğundan $\sqrt{x}$ ve $\sqrt{y}$ tanımlıdır ve

$$x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \leq 0$$

yazılır. $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ olduğundan eşitsizliğin her iki tarafını bu pozitif sayıya bölebiliriz:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$$

■

⚠ Pozitif sayıya bölmek şart

Son adımda bölmenin eşitsizlik yönünü koruması, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 'nin **pozitif** olmasına dayanır. Negatif bir sayıya bölünseydi eşitsizlik yön değiştirirdi. Eşitsizlik ispatlarında bir çarpanla bölerken veya çarparken işaretini her seferinde gerekçelendirin.

Örnek 9.4 (Aritmetik–Geometrik Ortalama Eşitsizliği). x ve y pozitif gerçel sayılar ise $2\sqrt{xy} \leq x + y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Her gerçel sayının karesi negatif olmadığından

$$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

yazılır. Her iki tarafa $4xy$ ekleyelim:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$$

$x, y > 0$ olduğundan $x + y > 0$ ve $4xy > 0$ 'dır. Bir önceki örnekte ispatladığımız “karekök sıralamayı korur” özelliğini kullanarak her iki tarafın karekökünü alalım:

$$x + y \geq \sqrt{4xy} = 2\sqrt{xy}$$

■

💡 Eşitlik ne zaman sağlanır?

İspatın çıkış noktası $(x - y)^2 \geq 0$ olduğundan, eşitlik yalnızca $x = y$ iken gerçekleşir. Yani iki pozitif sayının **geometrik ortalaması** $\sqrt{xy}$, **aritmetik ortalaması** $\frac{x+y}{2}$ 'yi ancak sayılar eşitken yakalar.

Örnek 9.5 (Katsayılı Bir Eşitsizlik). x ve y gerçel sayılar olmak üzere

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq xy$$

midir? Araştırınız.

Çözüm.

Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Her gerçel sayının karesi negatif olmadığından

$$(2x - 3y)^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 12xy + 9y^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 \geq 12xy$$

yazılır. Her iki tarafı pozitif olan 12 sayısına bölelim:

$$\frac{4x^2}{12} + \frac{9y^2}{12} \geq xy \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq xy$$

O hâlde verilen eşitsizlik her $x, y \in \mathbb{R}$ için doğrudur.

■

i Doğru kareyi bulmak

Bu tür sorularda asıl iş, işe yarayacak tam kareyi seçmektir. $\alpha x^2 + \beta y^2 \geq xy$ biçimindeki bir eşitsizlik için $(ax - by)^2 \geq 0$ denenir ve açılımdaki orta terimin $-2abxy$ olduğu kullanılır; burada $a = 2$, $b = 3$ seçimi $12xy$ verdiği için işe yaramıştır.

9.5 Bölünebilme ve Kongrüans

Tanım 9.2 (Bölünebilme). $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ olsun. $b = a \cdot k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa, “ a sayısı b sayısını böler” denir ve $a \mid b$ ile gösterilir.

Örnek 9.6 (Bölünebilmenin Geçişme Özelliği). $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. $a \mid b$ olduğundan $b = a \cdot k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$, $b \mid c$ olduğundan $c = b \cdot t$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Birincisini ikincisinde yerine yazalım:

$$c = b \cdot t = (a \cdot k) \cdot t = a \cdot \underbrace{(k \cdot t)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$r = kt$ dersek $r \in \mathbb{Z}$ ve $c = a \cdot r$ olur. Bölünebilme tanımı gereği $a \mid c$ 'dir.

■

Tanım 9.3 (Kongrüans (Modüler Denklik)). $a, b \in \mathbb{Z}$ ve n pozitif bir tam sayı olsun. $n \mid (a - b)$ ise “ a ile b , modülo n 'ye göre denktir” denir ve

$$a \equiv b \pmod{n}$$

ile gösterilir.

Örnek 9.7 (Kongrüansın Karesi). $a \equiv b \pmod{n}$ ise $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. $a \equiv b \pmod{n}$ olduğundan $n \mid (a - b)$ 'dir; yani

$$a - b = n \cdot k$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Her iki tarafı $(a + b)$ ile çarpalım:

$$(a + b)(a - b) = (a + b) \cdot n \cdot k \Rightarrow a^2 - b^2 = n \cdot \underbrace{(k(a + b))}_{\in \mathbb{Z}}$$

O hâlde $n \mid (a^2 - b^2)$, yani $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ 'dir.

■

🔗 Doğrudan ispatın kalıbı

Yukarıdaki bütün örnekler aynı üç adımı izledi:

1. **Öncülü tanıma çevir.** “ n çifttir” yerine $n = 2k$, “ $a \mid b$ ” yerine $b = ak$ yaz. Sözel hipotez bir denkleme dönüşmeden hesap yapılamaz.
2. **Hedefi tanıma çevir.** Nereye varmak istediğinizi de aynı biçimde yazın; böylece hangi cebirsel düzenlemeyi arayacağınızı bilirsiniz.
3. **Aradaki cebiri yap** ve ortaya çıkan ifadenin tam sayı, kare, çarpan vb. olduğunu **açıkça belirtin**.

Bir sonraki bölümde, doğrudan gitmenin zor olduğu durumlarda başvurulacak **karşıt ters ile ispat** yöntemini inceleyeceğiz.

10. Karşıt Ters ile İspat

Bazı önermelerde öncülden yola çıkıp sonuca ulaşmak zordur; çünkü öncül “*şu sayı tektir*” gibi olumlu değil, “*şu sayı bölünmez*” gibi olumsuz bir bilgi verir. Böyle durumlarda önermeyi doğrudan değil, kendisine denk olan **karşıt tersi** üzerinden ispatlarız.

10.1 Yöntemin Dayanağı

Koşullu önerme bölümünde her koşullu önermenin karşıt tersine denk olduğunu ispatlamıştık:

$$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$$

Bu denklik, bir teoremi ispatlarken iki eşdeğer hedeften **istediğimizi** seçme özgürlüğü verir.

Tanım 10.1 (Karşıt Ters (Dolaylı) İspat Yöntemi). $p(x) \Rightarrow q(x)$ biçimindeki bir önermenin ispatında, önermenin karşıt tersi olan

$$q'(x) \Rightarrow p'(x)$$

önermesi doğrudan ispat yöntemiyle ispatlanırsa, kullanılan yöntem **karşıt ters ile ispat** veya **dolaylı ispat yöntemi** denir.

! Karşıtını değil, karşıt tersini ispatlayın

$p \Rightarrow q$ önermesinin

- **karşıtı** $q \Rightarrow p$,
- **tersi** $p' \Rightarrow q'$,
- **karşıt tersi** $q' \Rightarrow p'$

önermesidir. Bunlardan yalnızca **karşıt ters** özgün önermeye denktir. Karşıtı ya da tersi ispatlanırsa teorem ispatlanmış olmaz.

10.2 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 10.1 (Tekten Çifte). n bir tam sayı olmak üzere, $7n - 3$ bir tek tam sayı ise n 'nin bir çift tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Karşıt ters ispat yöntemini kullanalım. Önermenin bileşenleri

$$p(n) : 7n - 3 \text{ bir tek tam sayıdır,} \quad q(n) : n \text{ bir çift tam sayıdır}$$

olduğuna göre, ispatlayacağımız karşıt ters önerme

$$q'(n) \Rightarrow p'(n) : n \text{ bir tek tam sayı ise } 7n - 3 \text{ bir çift tam sayıdır}$$

biçimindedir.

n bir tek tam sayı olsun; yani $n = 2k + 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre

$$7n - 3 = 7(2k + 1) - 3 = 14k + 7 - 3 = 14k + 4 = 2 \underbrace{(7k + 2)}_{\in \mathbb{Z}}$$

olur. $t = 7k + 2 \in \mathbb{Z}$ dersek $7n - 3 = 2t$ yazılır; yani $7n - 3$ bir çift tam sayıdır.

Karşıt ters önerme doğru olduğundan, kendisine denk olan asıl önerme de doğrudur.

■

Örnek 10.2 (İkinci Dereceden Bir İfade). x bir tam sayı olmak üzere, $x^2 - 6x + 5$ çift bir tam sayı ise x 'in tek bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Verilen önermenin karşıt tersi olan

$$x \text{ çift ise } x^2 - 6x + 5 \text{ tektir}$$

önermesini ispatlayalım.

Kabul edelim ki x çift olsun. $x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= (2a)^2 - 6 \cdot 2a + 5 \\ &= 4a^2 - 12a + 5 \\ &= 4a^2 - 12a + 4 + 1 \\ &= 2(\underbrace{2a^2 - 6a + 2}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 \end{aligned}$$

yazılır. O hâlde $x^2 - 6x + 5$ tek sayıdır.

■

Örnek 10.3 (Bir Sıralama Eşitsizliği). Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $y^3 + yx^2 \leq x^3 + xy^2$ ise $y \leq x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Karşıt ters ispat yöntemini kullanalım. İspatlayacağımız karşıt ters önerme

$$x < y \Rightarrow x^3 + xy^2 < y^3 + yx^2$$

biçimindedir.

Kabul edelim ki $x < y$ olsun; buradan $y - x > 0$ 'dır. Ayrıca $x < y$ olduğundan x ile y aynı anda sıfır olamaz, dolayısıyla

$$x^2 + y^2 > 0$$

sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafını bu pozitif sayı ile çarparsak

$$(x^2 + y^2)(y - x) > 0$$

bulunur. Sol tarafı açalım:

$$yx^2 + y^3 - x^3 - xy^2 > 0 \Rightarrow x^3 + xy^2 < y^3 + yx^2$$

elde edilir. Karşıt ters önerme doğru olduğundan asıl önerme de doğrudur.

■

i Sonuç neden $y < x$ değil?

İspatın anahtarı şu özdeşliktir:

$$y^3 + yx^2 - x^3 - xy^2 = (y - x)(x^2 + y^2)$$

Buradan görülür ki $x^2 + y^2 > 0$ olduğu sürece iki tarafın karşılaştırılması tamamen $y - x$ 'in işaretine bağlıdır.

$x = y$ alındığında iki taraf **eşit** olur; yani hipotez $\leq$ olarak sağlanır ama $y < x$ sağlanmaz. Bu yüzden sonuç ancak $y \leq x$ olarak yazılabilir. Hipotezdeki $\leq$ işareti $<$ ile değiştirilirse sonuç da $y < x$ 'e güçlenir.

Örnek 10.4 (Bölünmeyen Çarpım). Herhangi $x, y \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $5 \nmid xy$ ise $5 \nmid x$ ve $5 \nmid y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Karşıt ters ispat yöntemini kullanalım. Sonuç bir “ve” önermesi olduğundan, değilini alırken De Morgan kuralı devreye girer:

$$(5 \nmid x \wedge 5 \nmid y)' \equiv (5 \mid x \vee 5 \mid y)$$

O hâlde ispatlayacağımız karşıt ters önerme

$$(5 \mid x \vee 5 \mid y) \Rightarrow 5 \mid xy$$

biçimindedir. İki durumu ayrı ayrı ele alalım.

1. durum: $5 \mid x$ olsun. Tanımdan $x = 5a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre

$$xy = (5a) \cdot y = 5 \cdot \underbrace{(ay)}_{\in \mathbb{Z}}$$

bulunur; yani $5 \mid xy$ 'dir.

2. durum: $5 \nmid x$ olsun. Tanımdan $y = 5b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre

$$xy = x \cdot (5b) = 5 \cdot \underbrace{(xb)}_{\in \mathbb{Z}}$$

bulunur; yani yine $5 \mid xy$ 'dir.

Her iki durumda da sonuç sağlandığından karşıt ters önerme doğrudur; dolayısıyla asıl önerme de doğrudur.

■

💡 Ne zaman karşıt ters?

Karşıt ters yöntemi özellikle şu iki durumda işe yarar:

- **Öncül olumsuzsa.** “ $5 \nmid xy$ ” hipotezinden hesaba başlayacak bir denklem çıkmaz; oysa değil olan “ $5 \mid xy$ ” doğrudan $xy = 5k$ verir.
- **Sonuç olumsuzsa.** “ x tektir” gibi bir sonuca varmak için genellikle x 'in çift olduğunu varsayıp ilerlemek daha kolaydır.

Kısacası: hangi tarafta **çarpan çıkarılabilecek** bir bilgi varsa, o tarafı hipotez yapın.

Bir sonraki bölümde, önermenin yanlış olduğunu varsayıp çelişkiye ulaşan **çelişki ile ispat** yöntemini inceleyeceğiz.

11. Çelişki ile İspat (Olmayana Ergi)

Şimdiye kadarki iki yöntem de hipotezden sonuca giden bir yol kuruyordu. Üçüncü yöntem bunun tam tersini yapar: **önermenin yanlış olduğunu varsayar** ve bu varsayımın matematiğin kabul edilmiş bir gerçeğiyle çatıştığını gösterir.

11.1 Bir Önermeyi Çürütmek

Bir teorem genellikle “her x için $p(x)$ ise $q(x)$ ’tir” biçiminde kurulur. **Niceleme mantığı** bölümünde öğrendiğimiz kurallarla bu önermenin değilini alalım:

$$\begin{aligned} [\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)]' &\equiv \exists x, [p(x) \Rightarrow q(x)]' \\ &\equiv \exists x, [p(x) \wedge q'(x)] \end{aligned}$$

Bu denklik iki şey söyler:

Tanım 11.1 (Aksine Örnek). Bir $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ önermesinin **yanlış** olduğunu göstermek için, $p(x)$ ’i doğru ve $q(x)$ ’i yanlış yapan **bir tek** x değeri bulmak yeterlidir. Böyle bir x değerine **aksine örnek** (karşı örnek) denir.

Tanım 11.2 (Çelişki ile İspat (Olmayana Ergi)). Bir önermenin doğru olduğunu göstermek için, önermenin **yanlış olduğu kabul edilir**; bu kabulden hareketle bilinen bir doğruyla çelişen bir sonuca ulaşırsa, kabulün yanlış olduğu, dolayısıyla önermenin doğru olduğu sonucuna varılır. Bu yöntem **çelişki ile ispat** veya **olmayana ergi** denir.

Bir $p \Rightarrow q$ önermesi için bu, “ p doğru ve q yanlış olsun” diye başlamak demektir; çünkü koşullu önermenin değil tam olarak budur.

11.2 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 11.1 (Trigonometrik Bir Eşitsizlik). Her $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gerçel sayısı için $\sin x + \cos x \geq 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Çelişki ile ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki verilen ifade doğru olmasın. O hâlde

$$\sin x + \cos x < 1$$

olacak şekilde bir $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vardır.

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olduğu için ne $\sin x$ ne de $\cos x$ negatiftir; dolayısıyla toplamları da negatif olamaz:

$$0 \leq \sin x + \cos x < 1$$

Bu eşitsizliğin bütün tarafları negatif olmadığından karesini alabiliriz:

$$0 \leq (\sin x + \cos x)^2 < 1$$

Sol tarafı açalım ve $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğini kullanalım:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x < 1$$

Buradan

$$2 \sin x \cos x < 0 \Rightarrow \sin x \cos x < 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir; çünkü $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\sin x \geq 0$ ve $\cos x \geq 0$ olduğundan çarpımları da negatif olamaz.

O hâlde kabulümüz yanlıştır; yani her $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\sin x + \cos x \geq 1$ 'dir.

■

Örnek 11.2 (Karesi Çift Olan Sayı). Bir $a \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer a^2 çift ise a 'nın da çift olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Çelişki ile ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki a^2 çift iken a çift olmasın; yani a tek olsun. Bu durumda $a = 2c + 1$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır ve

$$a^2 = (2c + 1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = \underbrace{2(2c^2 + 2c)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

olduğundan a^2 tektir. Bu ise a^2 'nin çift olduğu hipoteziyle çelişir.

Bu çelişki kabulümüzden kaynaklandığına göre kabulümüz yanlıştır: a^2 çift iken a çifttir.

■

i İki yönlü önermeler iki ispat ister

Yukarıdaki sonucun tam hâli şudur: **bir n tam sayısı tektir ancak ve ancak n^2 tektir.** Bir “ancak ve ancak” önermesi iki koşullu önermenin birleşimi olduğundan iki ayrı ispat gerektirir.

($\Rightarrow$) n tek ise n^2 tektir. Doğrudan: $n = 2k + 1$ için

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

olup n^2 tektir.

($\Leftarrow$) n^2 tek ise n tektir. Karşıt ters: n çift olsun, yani $n = 2k$. Bu durumda

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

olup n^2 çifttir. Karşıt ters önerme doğru olduğundan asıl önerme de doğrudur.

Örnek 11.3 ($\sqrt{2}$ İrrasyoneldir). $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Çelişki ile ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ rasyonel olsun. Buna göre

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0$$

olacak şekilde a ve b tam sayıları vardır. Buradaki kesrin **en sade hâlde** olduğunu, yani a ile b 'nin aralarında asal olduğunu kabul edebiliriz.

Her iki tarafın karesini alalım:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

O hâlde a^2 çifttir. **Örnek 11.2** gereği a da çifttir; yani $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Bunu yerine yazalım:

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$$

Buradan b^2 çift, yine **Örnek 11.2** gereği b de çift olur.

Bu ise bir çelişkidir: a ile b 'nin ikisi de çift çıktı, oysa aralarında asal olduklarını kabul etmiştik (ikisi de çift olsaydı ortak bölenleri 2 olurdu).

Çelişki kabulümüzden kaynaklandığına göre kabulümüz yanlıştır: $\sqrt{2}$ rasyonel değildir, irrasyoneldir.

■

Örnek 11.4 (Rasyonel ile İrrasyonelin Toplamı). “Bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayının toplamı bir irrasyonel sayıdır.” önermesini ispat ediniz.

Çözüm.

Herhangi bir $x \in \mathbb{Q}$ ve herhangi bir $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alalım. $z = x + y$ olsun; gösterilmesi gereken z 'nin irrasyonel olduğudur.

Çelişki ile ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki z rasyonel olsun.

$x \in \mathbb{Q}$ olduğundan $x = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ vardır. Kabulümüzden $z \in \mathbb{Q}$ olduğundan $z = \frac{c}{d}$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$ vardır.

$z = x + y$ eşitliğinden $y = z - x$ yazılır:

$$y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{bd}$$

Burada $cb - ad \in \mathbb{Z}, bd \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0, d \neq 0$ olduğundan $bd \neq 0$ 'dır. O hâlde $y \in \mathbb{Q}$ elde edilir. Bu ise başlangıçtaki y 'nin irrasyonel olması ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır; z irrasyoneldir.

■

Örnek 11.5 (Sonsuz Sayıda Asal Sayı Vardır). Asal sayıların sonsuz sayıda olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Çelişki ile ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki asal sayılar sonlu sayıda olsun ve bunların tamamı

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

olsun. Şimdi

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$$

sayısını ele alalım. $P > 1$ olduğundan P 'nin en az bir asal bölene vardır; bu asal bölene q diyelim. Kabulümüze göre bütün asal sayılar listemizde bulunduğundan, $q = p_i$ olacak şekilde bir i indisi vardır. Bu durumda:

- $p_i, p_1 p_2 \cdots p_n$ çarpımını böler (çarpanlardan biridir),
- p_i, P sayısını böler ($q = p_i$ bir bölenidir).

Bir sayı iki sayıyı bölüyorsa farklarını da böler:

$$p_i \mid (P - p_1 p_2 \cdots p_n) = 1$$

Bu ise bir çelişkidir; çünkü her asal sayı 2'den küçük olmadığından 1'i bölemez.

Çelişki, asal sayıların sonlu olduğu kabulünden kaynaklanmaktadır. O hâlde asal sayılar sonsuz sayıdadır.

■

! P 'nin kendisi asal olmak zorunda değildir

İspatta P 'nin **bir asal bölene** üzerinden ilerledik; P 'nin kendisinin asal olduğunu söylemedik. Bu ayrım önemlidir, çünkü P gerçekten asal olmayabilir:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$$

Çelişkiyi doğuran şey P 'nin asallığı değil, P 'nin asal bölenlerinden **hiçbirinin** listede olamamasıdır.

 Çelişki ile ispatın kalıbı

1. **Değili doğru yaz.** $p \Rightarrow q$ için “ p doğru ve q yanlış olsun” diye başlayın; $\forall$ içeren önermelerde değil alırken niceleyici çevrilir.
2. **Serbestçe hesapla.** Artık elinizde iki hipotez vardır; ikisini birden kullanabilirsiniz. Bu, yöntemi güçlü kılan şeydir.
3. **Çelişkiyi açıkça göster.** “ a hem çift hem tek çıktı”, “1’i bölen bir asal bulundu” gibi, hangi bilinen doğruyla çatıştığını yazın.
4. **Sonucu bağla.** “Çelişki kabulümüzden kaynaklandığına göre kabulümüz yanlıştır” cümlesiyle ispatı kapatın.

Bir sonraki bölümde, değişkenin bütün hâllerinin ayrı ayrı incelendiği **durum incelemeli ispat** yöntemini göreceğiz.

12. Durum İncelemeli İspat

Bazı önermelerde değişken hakkında tek bir hipotez yoktur; önerme “her tam sayı için” gibi bütün değerleri kapsar. Böyle durumlarda değişkenin alabileceği hâlleri **birbirini dışlayan ve hepsini kapsayan** gruplara ayırıp her grubu ayrı ayrı incelemek en pratik yoldur.

12.1 Yöntem

Tanım 12.1 (Durum İncelemeli İspat Yöntemi). Bir $p(x)$ açık önermesi verilmiş olsun. Bu açık önermenin bir x değeri için doğruluğu, x 'in özelliklerini içeren **tüm durumlar** göz önüne alınarak ispat edilirse, buna **durum incelemeli ispat yöntemi** adı verilir.

! Durumlar hem ayrık hem eksiksiz olmalı

Durum ayrımının geçerli olması için iki koşul gerekir:

- **Eksiksizlik:** her x değeri en az bir durumun içinde olmalıdır. Bir durum atlanırsa ispat eksik kalır.
- **Ayrıklık:** durumlar çakışmasa iyi olur; çakışma ispatı bozmaz ama gereksiz tekrar yaratır.

Tam sayılarda en güvenilir ayırım, bir m sayısına bölümden kalana göre yapılındır: $m = 2$ için tek/çift, $m = 3$ için kalan 0, 1, 2 olmak üzere üç durum.

12.2 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 12.1 (İki Durumlu Ayırım). n bir tam sayı ise $n^2 + 5n + 2$ tam sayısının çift olduğunu ispat ediniz.

Çözüm.

Bir tam sayı ya tek ya da çifttir; iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

1. durum: n tek olsun. O hâlde $n = 2k + 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\begin{aligned} n^2 + 5n + 2 &= (2k + 1)^2 + 5(2k + 1) + 2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 + 2 \\ &= 4k^2 + 14k + 8 \\ &= 2(2k^2 + 7k + 4) \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$t = 2k^2 + 7k + 4 \in \mathbb{Z}$ dersek $n^2 + 5n + 2 = 2t$ olur; yani ifade çifttir.

2. durum: n çift olsun. O hâlde $n = 2\ell$ olacak şekilde bir $\ell \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\begin{aligned} n^2 + 5n + 2 &= (2\ell)^2 + 5 \cdot 2\ell + 2 \\ &= 4\ell^2 + 10\ell + 2 \\ &= 2(2\ell^2 + 5\ell + 1) \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$m = 2\ell^2 + 5\ell + 1 \in \mathbb{Z}$ dersek $n^2 + 5n + 2 = 2m$ olur; yani ifade yine çifttir.

Her iki durumda da $n^2 + 5n + 2$ çift olduğundan, önerme her $n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur.

■

Örnek 12.2 (Üç Durumlu Ayrım). n bir tam sayı ise $n^3 - 4n$ tam sayısının 3 ile tam bölündüğünü ispat ediniz.

Çözüm.

Bir tam sayının 3 ile bölümünden kalan 0, 1 veya 2 olabilir; üç durumu ayrı ayrı inceleyelim.

1. durum: n sayısı 3 ile tam bölünsün. O hâlde $n = 3k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$n^3 - 4n = (3k)^3 - 4(3k) = 27k^3 - 12k = 3 \underbrace{(9k^3 - 4k)}_{\in \mathbb{Z}}$$

2. durum: n sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 olsun. O hâlde $n = 3\ell + 1$ olacak şekilde bir $\ell \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\begin{aligned} n^3 - 4n &= (3\ell + 1)^3 - 4(3\ell + 1) \\ &= 27\ell^3 + 27\ell^2 + 9\ell + 1 - 12\ell - 4 \\ &= 27\ell^3 + 27\ell^2 - 3\ell - 3 \\ &= 3 \underbrace{(9\ell^3 + 9\ell^2 - \ell - 1)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

3. durum: n sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olsun. O hâlde $n = 3r + 2$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\begin{aligned} n^3 - 4n &= (3r + 2)^3 - 4(3r + 2) \\ &= 27r^3 + 54r^2 + 36r + 8 - 12r - 8 \\ &= 27r^3 + 54r^2 + 24r \\ &= 3 \underbrace{(9r^3 + 18r^2 + 8r)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Üç durumda da $n^3 - 4n$ ifadesi 3'ün bir katı olarak yazıldığından, her $n \in \mathbb{Z}$ için $3 \mid (n^3 - 4n)$ 'dir. ■

 Aynı sonucun çarpanlara ayırarak ispatı

$n^3 - 4n$ ifadesi çarpanlarına ayrılabilir:

$$n^3 - 4n = n(n^2 - 4) = (n - 2)n(n + 2)$$

Modülo 3'te $-2 \equiv 1$ olduğundan $n - 2 \equiv n + 1$ 'dir. O hâlde üç çarpan sırasıyla

$$n + 1, \quad n, \quad n + 2 \pmod{3}$$

değerlerine denktir; bunlar birbirini izleyen üç kalan olduğundan 0, 1, 2 kalanlarının **hepsini** kapsar. Dolayısıyla çarpanlardan tam olarak biri 3 ile bölünür ve çarpım da 3 ile bölünür.

Bu ikinci yol daha kısadır, ancak durum incelemesi hiçbir yaratıcılık gerektirmediği için her zaman güvenle uygulanabilir.

12.3 Dört Yöntemin Karşılaştırılması

Aynı teoremi farklı yöntemlerle ispatlamak, hangi yöntemin ne zaman kolaylık sağladığını görmenin iyi yoludur.

Örnek 12.3 (Bir Teorem, Üç İspat). “ x gerçel sayısı $0 < x \leq 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa $x + \frac{1}{x} \geq 2$ dir.” teoremini a) doğrudan ispat, b) karşıt ters ispat ve c) çelişki ile ispat yöntemleriyle ispat ediniz.

Çözüm.

a) Doğrudan ispat.

$0 < x \leq 1$ olsun. Her gerçel sayının karesi negatif olmadığından

$$(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

yazılır. Hipotezden $x > 0$ olduğundan eşitsizliğin her iki tarafını x 'e bölebiliriz ve yön değişmez:

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

b) Karşıt ters ile ispat.

İspatlayacağımız karşıt ters önerme

$$x + \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow (0 < x \leq 1) \text{ sağlanmaz}$$

biçimindedir. Kabul edelim ki $x + \frac{1}{x} < 2$ olsun ($x \neq 0$). İfadeyi tek kesir hâline getirelim:

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x}$$

Hipotezden bu kesir negatiftir:

$$\frac{(x - 1)^2}{x} < 0$$

Payda bulunan $(x - 1)^2$ ifadesi hiçbir zaman negatif olmadığından, kesrin negatif olabilmesi için paydanın negatif olması, yani

$$x < 0$$

olması gerekir. $x < 0$ ise $0 < x \leq 1$ koşulu sağlanmaz. Karşıt ters önerme doğru olduğundan asıl önerme de doğrudur.

c) Çelişki ile ispat.

Kabul edelim ki önerme yanlış olsun; yani hem $0 < x \leq 1$ hem de

$$x + \frac{1}{x} < 2$$

sağlansın. $x > 0$ olduğundan eşitsizliğin her iki tarafını x ile çarpabiliriz ve yön değişmez:

$$x^2 + 1 < 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x - 1)^2 < 0$$

Bu ise bir çelişkidir; çünkü bir gerçel sayının karesi negatif olamaz. Çelişki kabulümüzden kaynaklandığına göre kabulümüz yanlıştır ve teorem doğrudur.

■

i Üç ispatın ortak çekirdeği

Dikkat edilirse üç ispat da aynı özdeşliğe dayandı:

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x - 1)^2}{x}$$

Yöntemler yalnızca bu özdeşliğe hangi kapıdan girdiğimizi değiştirdi. Bir teoremin “asıl fikri” genellikle yöntemden bağımsızdır; yöntem, o fikri sunma biçimidir.

Bu teoremin $0 < x \leq 1$ koşuluna da aslında ihtiyacı yoktur: ispatların üçünde de kullanılan tek şey $x > 0$ olmasıdır.

Bu bölümle ispat yöntemlerini tamamladık. Bir sonraki bölümden itibaren, bu yöntemleri kullanarak **kümeler kuramının** temel sonuçlarını kuracağız.

13. Küme Kavramı ve Gösterim Yöntemleri

Matematiğin birçok dalında çalışırken küme kavramını kullanırız. Özellikle yeni bir yapı inşa ederken ya da bir konuyu çalışırken küme kavramı ile karşılaşırız. Bu sık kullanımına karşın küme kavramını tanımlamak hiç kolay değildir.

13.1 Küme Kuramının Doğuşu

Küme kavramı ilk defa **Georg Cantor** (1845–1918) tarafından sonsuz büyüklüklerin tanımlanması ve karşılaştırılması amacı ile ortaya atılmıştır.

Cantor'un yaptığı gibi kümeyi “*nesnelerin bir topluluğu*” biçiminde tanımlamanın daha sonra **paradokslara** yol açtığı ortaya çıkmıştır. Bu paradokslardan kurtulabilmek için ilk olarak **Ernst Zermelo** (1871–1953) tarafından aksiyomatik bir yaklaşım gerçekleştirilmiştir. Daha sonra **Abraham Fraenkel** (1891–1965), Zermelo'nun aksiyomlarının uyarlanmasını yapmıştır. Günümüzde **Zermelo–Fraenkel (ZF) aksiyomatik kümeler kuramı** bu çalışmaların ürünüdür.

Diğer birçok matematikçi de kümeler kuramı üzerine farklı yaklaşımlar geliştirmiştir. Ancak bu yaklaşımları tartışmak bu dersin amacını aşmaktadır. Bizim amacımız **kümeler cebirini**, yani kümeler üzerinde birleşim, kesişim vb. işlemleri ve bunların özelliklerini incelemektir.

i Neden sezgisel tanımla yetiniyoruz?

Kümeler cebirini incelerken kümeyi sezgisel olarak “*nesnelerin bir topluluğu*” biçiminde tanımlamak bu inceleme için hem yeterli hem de aksiyomatik yöntemle göre çok daha kolay anlaşılırdır. Bu tanımsız terimlerin, kümeler kuramının aksiyomatik kuruluşu için eksiksiz olmadığını ve yapıyı paradokslardan arındırmaya yetmediğini belirtelim. Buna karşın kümeler cebirini incelememiz için yeterli alt yapıyı sağlayacaktır.

13.2 Kümenin Sezgisel Tanımı

Kümeler cebirini incelemek için aşağıdaki **dört tanımsız terime** ihtiyaç duymaktayız:

1. Küme
2. Öge (eleman)
3. Ögesi olma (elemanı olma, içerilme)
4. Nicelik sayısı

Bu terimler yardımıyla aşağıdaki özellikleri verebiliriz:

- **Küme**, belirli nesnelerin oluşturduğu bir topluluktur.
- Kümeyi oluşturan nesneler, kümenin **öğeleri** olarak adlandırılır.
- Bir öge, küme içinde **bir kez** yer alır.

Tanım 13.1 (Kümenin İyi Tanımlanması). Bir kümenin bütün öğelerinin kesinlikle belirli olacak biçimde tanımlanmasına **kümenin iyi tanımlanması** denir.

Öğeleri belirsiz olan veya bir ögenin o kümeye ait olup olmadığı anlaşılmayan bir küme var olamaz.

Örnek 13.1 (İyi Tanımlı mı?). “*En çok beğendiğimiz meyveler*” ile bir küme oluşturmak istersek, bu topluluk kişilere bağlı olarak farklı biçimlerde oluşturulabilir. Öğeleri belirli ve iyi anlaşılır olmadığından bu bir küme **değildir**.

Ancak “*birden küçük gerçel sayılar*” iyi tanımlı bir kümedir; çünkü verilen bir gerçel sayının bu kümeye ait olup olmadığı kesin bir şekilde belirlenebilir.

13.3 Ögelik Bağıntısının Gösterimi

Kümeleri genellikle $A, B, \dots, X, Y, \dots$ gibi **büyük harflerle**, kümenin öğelerini ise $a, b, \dots, x, y, \dots$ gibi **küçük harflerle** göstereceğiz.

- Bir a ögesi A kümesine aitse $a \in A$ ya da $A \ni a$ ile gösterilir ve “ a ögesi A kümesine aittir”, “ a ögesi A kümesinin ögesidir” veya “ A kümesi a ögesini içerir” biçiminde okunur.
- Bir b ögesi A kümesine ait değilse $b \notin A$ ya da $A \not\ni b$ ile gösterilir ve “ b ögesi A kümesine ait değildir” biçiminde okunur.

13.4 Russell Paradoksu

Bütün kümelerin kümesini

a) kendi kendini içeren kümeler, **b)** kendi kendini içermeyen kümeler

diye ikiye ayıralım. $P(X) : X \notin X$ açık önermesini tanımlayalım ve P 'nin tanımladığı kümeye bakalım:

$$A = \{X \mid X \notin X\}$$

Bu durumda “ A kümesi kendini içerir mi?” sorusunu yanıtlamaya çalışalım:

- Eğer A kümesi kendini içerirse, yani $A \in A$ ise, A 'nın tanımı gereği $A \notin A$ olur ki bu bir çelişkidir.
- Eğer A kümesi kendini içermezse, yani $A \notin A$ ise, A 'nın tanımı gereği $A \in A$ olur ki bu da yine bir çelişkidir.

Her iki hâlde de çelişkiye düşülür. **Russell paradoksu** olarak bilinen bu durum, “her özelliğin bir küme tanımladığı” varsayımının sürdürülemeyeceğini gösterir.

⚠ Evrensel küme, her şeyin kümesi değildir

Evrensel kümeyi “her şeyi içine alan küme” ya da “bütün kümelerin kümesi” biçiminde düşünmek yaygın bir hatadır. Çünkü bütün kümelerin kümesi adı verilen bir kümenin varlığı bizi sonuçta yukarıdaki gibi bir çelişkiye götürür. Bunun yerine, belirli bir konuda çalışırken gerekli olan bütün kümeleri ve gerekli bütün öğeleri içine alan küme olarak düşünmek yeterli olacaktır.

Tanım 13.2 (Evrensel Küme). Bir konuda çalışırken ele alınabilecek bütün öğeleri ve kümeleri içeren kümeye **evrensel küme** denir ve $\mathcal{E}$ ile gösterilir.

! Evrensel küme çalışılan konuya göre seçilir

Bir **tek** evrensel kümenin varlığını değil, çalışılan konuya göre bir evrensel kümenin belirlenmesinin yeterli olacağını söylüyoruz. Dolayısıyla çalışılan konuda öncelikle evrensel kümenin ne olduğunun bilinmesi önemlidir.

Örneğin $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$ gösteriminde A kümesinin öğeleri, x 'in neler olduğuna bağlı olarak tamamen farklılık gösterir:

$$\mathcal{E} = \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathcal{E} = \mathbb{R} \Rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\} = [2, 5]$$

Birincisi **dört ögeli sonlu** bir kümedir; ikincisi ise **sonsuz** ögeli bir kapalı aralıktır. Aynı gösterim, evrensel küme değiştiğinde bambaşka bir kümeyi ifade etmektedir.

Kümelerin gösterimi için üç yöntem vardır. Şimdi bunları ele alalım.

13.5 Niteleme Yöntemi

Tanım 13.3 (Niteleme (Ortak Özellik Belirleme) Yöntemi). Bir kümenin ögesinin belirleyici niteleklerini bir önerme olarak ifade ederek gösterme yöntemine **niteleme yöntemi** denir.

Bu gösterimde kümenin ögesini temsil eden x değişkeni ile bu ögelerin niteliklerini ifade eden $p(x)$ önermesi bir ayraç içinde ve aralarına $|$ ya da $:$ konularak gösterilir.

Örnek 13.2.

$$A = \{x \mid x \text{ pozitif gerçel sayıdır}\}, \quad B = \{x : x \text{ tek tam sayıdır}\}$$

kümeleri, niteleme yöntemi ile gösterilmiş iki kümedir.

Niteleme yöntemi ile gösterilen en bilindik küme örnekleri gerçel sayı **aralıklarıdır**.

Tanım 13.4 (Gerçel Sayı Aralıkları). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için:

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

kümesine **açık aralık**;

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

kümelerine **yarı açık aralık**;

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

kümesine ise **kapalı aralık** denir.

💡 Köşeli ayraç uçları içerir

Aralık gösteriminde **köşeli** ayraç ($[$ veya $]$) uç noktanın kümeye **dâhil** olduğunu, **yuvarlak** ayraç ($($ veya $)$) ise dâhil olmadığını belirtir. Eşitsizlikteki $\leq$ ile $<$ ayrımı tam olarak buna karşılık gelir.

13.6 Listeleme Yöntemi

Tanım 13.5 (Listeleme Yöntemi). Kümenin ögelerini tek tek ya da belirli bir kurala göre sıralı bir biçimde, ayraç içinde ve aralarına virgül konularak belirtilmesi yöntemine **listeleme yöntemi** adı verilir.

Kümenin ögelerinin **sırasının bir önemi yoktur**; diğer bir deyişle ögelerin yerlerinin değiştirilmesi aynı önermeyi ifade eder. Örneğin a, b, c, d elemanlarından oluşan küme

$$\{a, b, c, d\} \text{ ya da } \{c, a, b, d\} \text{ ya da } \{b, a, d, c\}$$

kümelerinden herhangi biri ile gösterilebilir.

Kümelerle çalışırken bazı işlemler sonucunda aynı ögeler liste içinde birden fazla görünebilse de, bu ögeler **bir kez** var sayılır; yani $\{a, a, b, c\}$ kümesi $\{a, b, c\}$ kümesi olarak yazılır.

Sık kullanılan bazı sayı kümelerinin listeleme yöntemiyle gösterilişlerini verelim:

Küme	Gösterim
Doğal sayılar	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Tam sayılar	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
Pozitif tam sayılar	$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
Çift tam sayılar	$\mathbb{C} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
Tek tam sayılar	$\mathbb{T} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -1, 1, 3, 5, \dots\}$
Rasyonel sayılar	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

i Doğal sayılar sıfırdan mı başlar?

Bu derste $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kabul ediyoruz; böylece $\mathbb{Z}^+$ ile $\mathbb{N}$ farklı kümeler olur. Bazı kaynaklarda $\mathbb{N}$ birden başlatılır; o kaynaklarda $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ 'dir. Bir soruya başlamadan önce hangi kabulün geçerli olduğunu kontrol etmek gerekir.

! Her küme her yöntemle gösterilemez

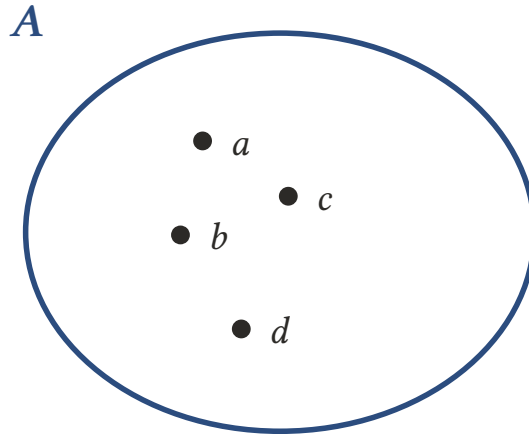
Bazı kümeler yalnız bir yöntemle gösterilebildiği gibi bazıları da her iki yöntemle gösterilebilir:

- $\mathbb{Q}$ kümesi yalnız **niteleme** yöntemiyle gösterilebilir; rasyonel sayıları bir liste hâlinde sıralamak mümkün değildir.
- $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{T}$ kümeleri **hem niteleme hem listeleme** yöntemiyle gösterilebilir.

13.7 Venn Diyagramı Yöntemi

Tanım 13.6 (Venn Diyagramı). İngiliz matematikçi **John Venn** (1834–1923) tarafından ortaya atılan ve kümelerin daire, elips gibi düzlemsel gösterilme yöntemlerine **Venn diyagramı** adı verilir.

Örneğin a, b, c, d elemanlarından oluşan A kümesinin Venn diyagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 13.1: $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin Venn diyagramı. Kapalı eğri kümeyi, içindeki noktalar öğeleri temsil eder.

Her küme Venn diyagramı yöntemi ile gösterilemediğinden Venn diyagramını kullanmayı tercih etmeyiz. Buna karşın **kümeler arasındaki ilişkileri** görselleştirmek için sonraki bölümlerde sık sık başvuracağız. Bir sonraki bölümde kümeler arasındaki en temel ilişkiyi, yani **alt küme ve eşitlik** kavramlarını inceleyeceğiz.

14. Alt Küme ve Küme Eşitliği

Kümeler arasındaki en temel ilişki, birinin öğelerinin tamamının diğerinde bulunmasıdır. Bu bölümde bu ilişkiyi kesin biçimde tanımlıyor ve küme eşitliğini bunun üzerine kuruyoruz.

14.1 Alt Küme

Tanım 14.1 (Alt Küme). A ve B , aynı $\mathcal{E}$ evrensel kümesinde tanımlı iki küme olmak üzere

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

gerçekleniyorsa, A kümesine B kümesinin **alt kümesi** (ya da B , A 'yı **kapsar**) denir ve

$$A \subseteq B \quad (\text{ya da } B \supseteq A)$$

ile gösterilir.

Tanım 14.2 (Öz Alt Küme). Eğer $A \subseteq B$ ve B kümesi A 'da olmayan en az bir tane eleman içerirse, A kümesine B kümesinin **öz alt kümesi** denir ve

$$A \subset B \quad (\text{ya da } A \subsetneq B)$$

ile gösterilir.

Tanım 14.3 (Alt Kümesi Olmama). Eğer A kümesinin en az bir tane elemanı B kümesine ait değilse, A kümesine B kümesinin **alt kümesi değildir** denir ve

$$A \not\subseteq B \quad (\text{ya da } B \not\supseteq A)$$

ile gösterilir.

! $\subset$ sembolü kaynaktan kaynağa değişir

Bu derste $\subset$ sembolü **öz alt küme** anlamında kullanılmaktadır: $A \subset B$ demek $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ demektir.

Bazı kaynaklarda ise $\subset$ ile $\subseteq$ eş anlamlı kullanılır, yani $A \subset A$ yazılabilir. Karışıklığı önlemek için öz alt kümeyi $\subsetneq$ ile yazmak en güvenli yoldur.

14.2 İlk Sonuçlar

Teorem 14.1 (Alt Kümenin Temel Sonuçları). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere:

Sonuç 1. $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$

Sonuç 2. $A \subseteq A$ (her $A \subseteq \mathcal{E}$ için)

Sonuç 3. $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x, (x \in A \wedge x \notin B)$

İspat.

Sonuç 3. Alt küme tanımını mantık diline çevirelim:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Her iki tarafın değilini alalım:

$$\begin{aligned}
A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \left[\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \right]' \\
&\Leftrightarrow \exists x, (x \in A \wedge x \notin B) \quad (\text{niceleyicinin değili}) \\
&\Leftrightarrow \exists x, \left((x \in A)' \vee (x \notin B) \right)' \quad (\text{ise açılımlı}) \\
&\Leftrightarrow \exists x, (x \in A) \wedge (x \notin B) \quad (\text{De Morgan})
\end{aligned}$$

Sözle: bir kümenin başka bir kümenin alt kümesi **olmadığını** göstermek için, birincide bulunup ikincide bulunmayan **bir tek** eleman göstermek yeterlidir.

Örnek 14.1 (Hangileri Doğrudur?). $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, b, 3, 4, \{a, b, c\}\}$ olsun. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- a) $A \not\subseteq B$ b) $\{A\} \subseteq B$ c) $A \subseteq B$ d) $A \subset B$

Çözüm.

Önce B kümesinin öğelerini tek tek belirleyelim: $a, b, 3, 4$ ve **kümenin kendisi bir öğe olarak** $\{a, b, c\}$. Yani B 'nin beş öğesi vardır.

a) $A = \{a, b, c\}$ olduğuna ve $\{a, b, c\}$ öğesi B 'nin bir elemanı olduğuna göre $A \in B$ 'dir. O hâlde $A \not\subseteq B$ önermesi **yanlıştır**.

b) $\{A\} = \{\{a, b, c\}\}$ kümesinin tek öğesi $\{a, b, c\}$ 'dir ve bu öğe B 'ye aittir. O hâlde $\{A\} \subseteq B$ önermesi **doğrudur**.

c) $c \in A$ olmasına karşın $c \notin B$ 'dir (B 'nin öğeleri arasında c tek başına yer almaz). **Teorem 14.1** gereği $A \not\subseteq B$ 'dir; önerme **yanlıştır**.

d) Öz alt küme olmak için önce alt küme olmak gerekir; (c) şıkkından $A \not\subseteq B$ olduğundan önerme **yanlıştır**.

⚠ Öge olmak ile alt küme olmak farklı şeylerdir

Yukarıdaki örnek bu ayrımı çok net gösterir:

$$A \in B \quad \text{ama} \quad A \not\subseteq B$$

A, B 'nin **bir öğesidir**; ama A 'nın öğeleri B 'nin öğeleri değildir. Bir kümenin öğesi olmak ($\in$) ile alt kümesi olmak ($\subseteq$) birbirinden tamamen bağımsız iki ilişkidir.

Kural: $x \in B$ sorusunda x 'in **kendisini** B 'nin öğeleri arasında ararız; $X \subseteq B$ sorusunda ise X 'in **her öğesini** B 'nin öğeleri arasında ararız.

14.3 Eşit Kümeler

Tanım 14.4 (Eşit Kümeler). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere

$$\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

gerçekleniyor ise A ve B kümelerine **eşittir** denir ve $A = B$ ile gösterilir.

Teorem 14.2 (Eşitliğin Çift Kapsama ile İfadesi). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

İspat.

Tanımdan başlayalım ve $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ denkleğini kullanalım:

$$\begin{aligned}
A = B &\Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow \forall x, \left[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A) \right] \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)}_{A \subseteq B} \wedge \underbrace{\forall x, (x \in B \Rightarrow x \in A)}_{B \subseteq A} \\
&\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)
\end{aligned}$$

Üçüncü adımda, evrensel niceleyicinin “ve” işlemi üzerine dağılabilmesi kullanılmıştır.

💡 Küme eşitliği ispatlarının standart kalıbı

Teorem 14.2, iki kümenin eşit olduğunu göstermenin standart yolunu verir: **iki kapsamayı ayrı ayrı ispatlamak**.

1. Keyfi bir $x \in A$ alıp $x \in B$ olduğunu göster $\Rightarrow A \subseteq B$.
2. Keyfi bir $x \in B$ alıp $x \in A$ olduğunu göster $\Rightarrow B \subseteq A$.

Bu iki adım tamamlandığında $A = B$ elde edilir. Kümeler cebirindeki hemen her özdeşlik böyle ispatlanır.

Teorem 14.3 (Eşit Olmama ve Öz Alt Küme). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere:

$$a) A \neq B \Leftrightarrow (A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A)$$

$$b) A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

İspat.

a) **Teorem 14.2**'nin değillenmesinden De Morgan kuralı ile:

$$A \neq B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]' \Leftrightarrow (A \not\subseteq B) \vee (B \not\subseteq A)$$

b) Öz alt küme tanımı mantıksal denklik olarak

$$A \subset B \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge \exists x (x \notin A \wedge x \in B)]$$

biçiminde yazılır. **Teorem 14.1**'in üçüncü sonucu kullanılırsa köşeli ayraç içindeki varlık önermesi $B \not\subseteq A$ olur:

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A)$$

Şimdi sağ tarafı düzenleyelim. $(A \subseteq B \wedge A \not\subseteq B)$ bir çelişki olduğundan, “veya” işleminin etkisiz elemanı olarak eklenebilir:

$$\begin{aligned}
(A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A) &\equiv (A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A) \vee c \\
&\equiv (A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A) \vee (A \subseteq B \wedge A \not\subseteq B) \\
&\equiv A \subseteq B \wedge (B \not\subseteq A \vee A \not\subseteq B) && \text{(dağılma)} \\
&\equiv A \subseteq B \wedge A \neq B && \text{(a) şıkkı)}
\end{aligned}$$

14.4 Kapsamanın Geçişme Özellikleri

Teorem 14.4 (Kapsamanın Geçişme Özellikleri). $A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olsun.

- a) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ 'dir.
- b) $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ 'dir.
- c) $A \subseteq B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ 'dir.
- d) $A \subset B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subset C$ 'dir.

İspat.

a) $A \subseteq C$ kapsamasını göstermek için her $x \in A$ için $x \in C$ olduğunu göstermeliyiz.

$A \subseteq B$ olduğundan her $x \in A$ için $x \in B$ olur. Benzer biçimde $B \subseteq C$ olduğundan her $x \in B$ için $x \in C$ elde edilir. İkisini birleştirirsek her $x \in A$ için $x \in C$ bulunur; yani $A \subseteq C$ 'dir.

b) Öz alt küme tanımından, $A \subset C$ olduğunu göstermek için hem her $x \in A$ için $x \in C$ olduğunu, hem de $y \notin A$ olacak şekilde bir $y \in C$ bulunduğunu göstermeliyiz.

İlk olarak $A \subset B$ olduğundan her $x \in A$ için $x \in B$ olur. Benzer biçimde $B \subset C$ olduğundan her $x \in B$ için $x \in C$ elde edilir; böylece $A \subseteq C$ 'dir.

İkinci olarak $A \subset B$ olduğundan $y \notin A$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. Ayrıca $B \subset C$ olduğundan bu y ögesi için $y \in C$ geçerlidir. Sonuçta $y \notin A$ olacak şekilde bir $y \in C$ bulunur. Bundan dolayı $A \subset C$ 'dir.

c) ve d) şıkları benzer biçimde yapılabileceğinden alıştırma olarak bırakılmıştır.

■

14.5 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 14.2 (Kapsama İlişkilerini Belirleme). $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$ ve $C = \{c, d\}$ ise aşağıdakilerin hepsi geçerlidir:

1) $B \subseteq A$ 2) $B \subset A$ 3) $C \subset A$ 4) $C \not\subseteq B$ 5) $A \subseteq A$

Gerçekten B 'nin bütün ögeleri A 'dadır ve $d \in A$, $d \notin B$ olduğundan kapsama özüdür. Benzer biçimde C 'nin ögeleri A 'dadır ve $a \in A$, $a \notin C$ 'dir. Öte yandan $d \in C$ fakat $d \notin B$ olduğundan C , B 'nin alt kümesi değildir.

Örnek 14.3 (Öge mi, Alt Küme mi?). $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$ olsun. Aşağıdaki önermelerden hangilerinin doğru olduğunu belirleyiniz.

a) $1 \in A$ b) $\{1\} \in A$ c) $\{1\} \subseteq A$ d) $\{\{1\}\} \subseteq A$

e) $\{2\} \in A$ f) $\{2\} \subseteq A$ g) $\{\{2\}\} \subseteq A$ h) $\{\{2\}\} \subset A$

Çözüm.

A kümesinin üç ögesi vardır: 1, $\{1\}$ ve $\{2\}$. Dikkat edilirse 2 sayısı A 'nın bir ögesi **değildir**.

a) 1, A 'nın ögeleri arasındadır. **Doğru.**

b) $\{1\}$, A 'nın ögeleri arasındadır. **Doğru.**

c) $\{1\}$ kümesinin tek ögesi olan 1, A 'ya aittir. **Doğru.**

d) $\{\{1\}\}$ kümesinin tek ögesi olan $\{1\}$, A 'ya aittir. **Doğru.**

e) $\{2\}$, A 'nın ögeleri arasındadır. **Doğru.**

f) $\{2\}$ kümesinin tek ögesi 2'dir; ancak $2 \notin A$ 'dır. **Yanlış.**

g) $\{\{2\}\}$ kümesinin tek ögesi olan $\{2\}$, A 'ya aittir. **Doğru.**

h) (g) şikkından kapsama vardır; ayrıca $1 \in A$ fakat $1 \notin \{\{2\}\}$ olduğundan kapsama özüdür. **Doğru.**

■

Örnek 14.4 (İç İçe Kümeler). $A \in X$ ve $X \in Y$ olan, ancak $A \notin Y$ şartını sağlayan X, Y, A kümelerine bir örnek veriniz.

Çözüm.

$$A = \{1, 2\}, \quad X = \{A\} = \{\{1, 2\}\}, \quad Y = \{X\} = \{\{\{1, 2\}\}\}$$

kümelerini alalım.

- X kümesinin tek ögesi A olduğundan $A \in X$ 'tir.
- Y kümesinin tek ögesi X olduğundan $X \in Y$ 'dir.
- Y 'nin tek ögesi $X = \{\{1, 2\}\}$ 'dir; oysa $A = \{1, 2\}$ 'dir ve $A \neq X$ olduğundan $A \notin Y$ 'dir.

Bu örnekte $A \in X$, $X \in Y$ ancak $A \notin Y$ sağlanmış olur.

■

! Ögelik bağıntısı geçişmeli değildir

Son örnek şunu gösterir: $A \in X$ ve $X \in Y$ olması $A \in Y$ olmasını **gerektirmez**. Yani $\in$ bağıntısı geçişme özelliğine sahip değildir.

Oysa Teorem 14.4 gereği $\subseteq$ bağıntısı geçişmelidir. İki bağıntının bu farkı, ögelik ile kapsamayı karıştırmamak için iyi bir hatırlatıcıdır.

Örnek 14.5 (Kapsama Aktarılır mı?). $\mathcal{E}$ bir evrensel küme ve $A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olsun. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \not\subseteq C$ ise, o zaman $A \not\subseteq C$ midir? Araştırınız.

Çözüm.

$A \subseteq B$ ve $B \not\subseteq C$ iken $A \not\subseteq C$ özelliği daima doğru **değildir**. Bir aksine örnek verelim:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad C = \{1, 2, 3\}$$

alalım. Bu durumda:

- A 'nın bütün öğeleri B 'de bulunduğundan $A \subseteq B$ 'dir.
- $4 \in B$ fakat $4 \notin C$ olduğundan $B \not\subseteq C$ 'dir.
- Ancak A 'nın bütün öğeleri C 'de bulunduğundan $A \subseteq C$ geçerlidir.

O hâlde hipotezler sağlandığı hâlde sonuç sağlanmamaktadır.

■

Örnek 14.6 (Aynı Küme, Farklı Formül). $\mathbb{Z}$ 'nin aşağıda verilen alt kümelerini göz önüne alalım:

$$A = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

$$B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

$$C = \{2p - 3 \mid p \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

$$D = \{2r + 1 \mid r \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

$$E = \{3s + 2 \mid s \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, \dots\}$$

$$F = \{2t - 2 \mid t \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

Aşağıdaki önermelerin hangilerinin doğru olduğunu belirleyiniz.

a) $A = B$ b) $A = C$ c) $B = C$ d) $D = E$ e) $D = F$ f) $E = F$

Çözüm.

Önce her kümenin ne olduğunu belirleyelim.

m bütün tam sayıları dolaştığında $2m + 1$ bütün **tek** tam sayıları verir. Aynı şekilde

$$2n + 3 = 2(n + 1) + 1, \quad 2p - 3 = 2(p - 2) + 1, \quad 2r + 1$$

yazılabildiğinden B, C ve D de tek tam sayılar kümesidir. O hâlde

$$A = B = C = D = \{\text{tek tam sayılar}\}$$

E kümesi 3 ile bölümünden kalan 2 olan tam sayılardan, F kümesi ise $2t - 2 = 2(t - 1)$ olduğundan **çift** tam sayılardan oluşur.

a), b), c) **Doğrudur**; dördü de aynı kümedir.

d) **Yanlıştır**. Örneğin $1 \in D$ fakat $1 \notin E$ 'dir (1 'in 3 ile bölümünden kalan 1'dir).

e) **Yanlıştır**. D tek, F çift tam sayılardan oluşur; ortak öğeleri bile yoktur.

f) **Yanlıştır**. Örneğin $2 \in E$ ve $2 \in F$ 'dir ama $5 \in E$ iken $5 \notin F$ 'dir.

■

 Formül farklı, küme aynı

Son örnek, bir kümenin **gösteriminin** kümenin **kendisini** belirlemediğini gösterir. $\{2m + 1\}$, $\{2n + 3\}$ ve $\{2p - 3\}$ farklı formüllerdir ama parametre bütün $\mathbb{Z}$ 'yi dolaştığında üçü de aynı kümeyi üretir.

Bu tür sorularda formülleri karşılaştırmak yerine, her birini $2k + r$ biçimine (yani “ m ’ye bölümünden kalan r olanlar” biçimine) indirgemek en güvenilir yoldur.

Bir sonraki bölümde hiç ögesi olmayan kümeyi ve bir kümenin bütün alt kümelerinden oluşan **kuvvet kümesini** inceleyeceğiz.

15. Boş Küme, Kuvvet Kümesi ve Nicelik Sayısı

Kümeler ile çalışırken bazı durumlarda hiçbir öge içermeyen kümeler ile karşılaşırız. Örneğin $2x - 1 = 0$ denkleminin tam sayı çözümlerinin kümesi hiçbir öge içermeyen kümedir. Bu bölümde önce böyle kümeleri, ardından bir kümenin bütün alt kümelerini toplayan kuvvet kümesini ele alıyoruz.

15.1 Boş Küme

Tanım 15.1 (Boş Küme). Hiçbir öge içermeyen kümeye **boş küme** denir ve $\emptyset$ ya da $\{\}$ ile gösterilir.

Örnek 15.1.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$$

kümeleri birer boş kümedir.

Gerçekten $x^2 + 1 = 0$ denkleminin gerçel kökü yoktur; $x^2 - 2 = 0$ denkleminin kökleri ise $\pm\sqrt{2}$ olup $\sqrt{2}$ irrasyonel olduğundan bu kökler $\mathbb{Q}$ 'da bulunmaz.

! $\emptyset$ ile $\{\emptyset\}$ aynı şey değildir

$\{\emptyset\}$ kümesi **bir öğeli** bir kümedir (ögesi boş kümedir); oysa $\emptyset$ hiç ögesi olmayan kümedir. Bu ikisi boş küme ile karıştırılmamalıdır:

$$\{\emptyset\} \neq \emptyset$$

Aynı şekilde $|\emptyset| = 0$ iken $|\{\emptyset\}| = 1$ 'dir. Boş bir kutu ile içinde boş bir kutu bulunan kutu farklı şeylerdir.

Teorem 15.1 (Boş Küme Her Kümenin Alt Kümesidir). Herhangi bir $A \subseteq \mathcal{E}$ için $\emptyset \subseteq A$ 'dır. Eğer $A \neq \emptyset$ ise, bu durumda $\emptyset \subset A$ 'dır.

İspat.

İlk kısmı çelişki ile ispat yöntemini kullanarak kanıtlayalım.

Kabul edelim ki $\emptyset \not\subseteq A$ olsun. Bu durumda alt küme olmama ölçütü gereği öyle bir $x \in \mathcal{E}$ vardır ki

$$x \in \emptyset \quad \text{ve} \quad x \notin A$$

sağlanır. Ancak $\emptyset$ hiçbir öge içermediğinden $x \in \emptyset$ olması mümkün değildir; bu bir çelişkidir. Böylece kabulümüz yanlıştır ve sonuç olarak $\emptyset \subseteq A$ 'dır.

İkinci kısım için ilk kısımdaki $\emptyset \subseteq A$ bilgisini kullanalım. $A \neq \emptyset$ olduğundan A 'nın en az bir ögesi vardır; bu öğeye x diyelim. $x \in A$ ve $x \notin \emptyset$ olduğundan $A, \emptyset$ 'de bulunmayan en az bir öge içerir. Öz alt küme tanımı gereği $\emptyset \subset A$ 'dır.

■

i Boş küme tektir

Yukarıdaki örnekte hem A kümesinin hem de B kümesinin boş küme olduğunu söyledik. Bu iki küme boş kümenin yalnızca iki farklı **ifadesi** olup birden fazla boş küme vardır anlamına gelmemektedir. Gerçekten A ve B gibi birden fazla boş küme olsa, **Teorem 15.1** gereği $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olacağından, çift kapsama ölçütüne göre $A = B$ bulunur.

Örnek 15.2 (Hangileri Boş Küme Değildir?). Aşağıdaki kümelerin hangileri boş küme değildir, belirleyiniz.

- a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 7 = 3\}$ b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3x + 5 = 9\}$
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 + 4 = 6\}$ d) $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 = 6\}$
e) $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 3 = 0\}$ f) $F = \{x \mid x \in \mathbb{C}, x^2 + 3x + 3 = 0\}$

Çözüm.

Bir kümenin boş olduğunu göstermek için istenen koşulu sağlayan değer, kümenin tanımlandığı sayı kümesinde **bulunmadığını** göstermek gerekir.

- a) $2x + 7 = 3 \Rightarrow x = -2$. Ancak $-2 \notin \mathbb{N}$ 'dir. O hâlde $A = \emptyset$.
b) $3x + 5 = 9 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$. Ancak $\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$ 'dir. O hâlde $B = \emptyset$.
c) $x^2 + 4 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Ancak $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 'dur. O hâlde $C = \emptyset$.
d) Aynı denklemin kökleri $\mathbb{R}$ 'de bulunur:

$$D = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \neq \emptyset$$

- e) $x^2 + 3x + 3 = 0$ denkleminin diskriminantı

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0$$

olduğundan gerçel kök yoktur. O hâlde $E = \emptyset$.

- f) Aynı denklemi karmaşık sayılarda çözelim. Tam kareye tamamlayalım:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} = \frac{3}{4}i^2 \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Buradan

$$F = \left\{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \neq \emptyset$$

Sonuç. Yalnızca D ve F kümeleri boş küme değildir.

■

💡 Aynı denklem, farklı evren, farklı küme

(c)-(d) ve (e)-(f) çiftleri aynı denklemi farklı sayı kümelerinde çözmektedir. Bir kümenin boş olup olmaması, tanımlandığı **evrensel kümeye** bağlıdır; denklemin kendisine değil.

15.2 Kuvvet Kümesi

Tanım 15.2 (Kuvvet Kümesi). Herhangi bir $A \subseteq \mathcal{E}$ için, A kümesinin **bütün alt kümelerinden** oluşan kümeye A kümesinin **kuvvet kümesi** denir ve $P(A)$ ile gösterilir.

Örnek 15.3. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$P(A) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \underbrace{\{1, 2, 3\}}_A \right\}$$

biçimindedir; sekiz ögesi vardır.

Örnek 15.4 (Boş Küme İçeren Kuvvet Kümeleri). $A = \emptyset$ ise $P(A) = \{\emptyset\}$ 'dir. $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ise $P(B)$ kümesini yazınız ve B ile ilgili kapsama-ögelik ilişkilerini belirleyiniz.

Çözüm.

B kümesinin iki ögesi vardır: $\emptyset$ ve $\{\emptyset\}$. Buna göre

$$P(B) = \left\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \underbrace{\{\{\emptyset\}\}}_B, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \right\}$$

biçimindedir. Buradan $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ ve $\{\{\emptyset\}\}$ kümeleri birbirinden **farklıdır**. Aşağıdaki ilişkilerin hepsi geçerlidir:

İlişki	Gerekçe
$\emptyset \subseteq B$	boş küme her kümenin alt kümesidir
$\emptyset \subset B$	$B \neq \emptyset$ olduğundan kapsama özdür
$\emptyset \in B$	$\emptyset$, B 'nin listelenmiş bir ögesidir
$\{\emptyset\} \subset B$	tek ögesi olan $\emptyset$, B 'ye aittir; $\{\emptyset\} \neq B$
$\{\emptyset\} \in B$	$\{\emptyset\}$, B 'nin listelenmiş bir ögesidir
$\{\{\emptyset\}\} \subseteq B$	tek ögesi olan $\{\emptyset\}$, B 'ye aittir
$\{\{\emptyset\}\} \notin B$	B 'nin ögeleri yalnızca $\emptyset$ ve $\{\emptyset\}$ 'dir
$\{\{\emptyset\}\} \in P(B)$	B 'nin bir alt kümesidir

■

! $X \subseteq A$ ile $X \in P(A)$ aynı ifadedir

Kuvvet kümesinin tanımı gereği

$$X \subseteq A \Leftrightarrow X \in P(A)$$

denkliği her zaman geçerlidir. Bu, kapsama sorularını ögelik sorularına çevirmenin kısa yoludur: son satırda $\{\{\emptyset\}\} \subseteq B$ olduğu için $\{\{\emptyset\}\} \in P(B)$ yazabildik.

15.3 Nicelik Sayısı

Tanım 15.3 (Nicelik Sayısı). Bir A kümesinin ögelerinin sayısına A kümesinin **nicelik sayısı** denir ve $|A|$ ile gösterilir.

Bir kümenin ögeleri sayılabiliyorsa sayma sonucunda elde edilen sayı o kümenin nicelik sayısı olur. Ancak kümelerin çoğunun ögeleri sayılabilir değildir. Böyle olsa bile, her kümenin ögelerinin sayısını belirtmek için aşağıdaki aksiyomu varsayacağız.

i Aksiyom

Her kümenin bir ve yalnız bir nicelik sayısı vardır. Sayılabilen bir kümenin nicelik sayısı, kümenin öğelerinin sayısıdır.

Tanım 15.4 (Sonlu ve Sonsuz Küme). Nicelik sayısı bir doğal sayıya eşit olan kümeye **sonlu küme** denir. Sonlu olmayan kümeye **sonsuz küme** denir.

Örnek 15.5.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}, \quad \emptyset$$

kümeleri birer sonlu küme iken $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ kümeleri sonsuz kümelerdir.

Teorem 15.2 (Kuvvet Kümesinin Nicelik Sayısı). $|A| = n$ ise $|P(A)| = 2^n$ 'dir.

i İspatı neden şimdi vermiyoruz?

Bu teoremin ispatı tümevarım yöntemi ile yapılabilir. Tümevarım yöntemini daha sonra ele alacağımız için teoremi şimdilik ispatlamadan ifade ediyoruz. Sezgisel gerekçe şudur: bir alt küme kurarken A 'nın her öğesi için “alırım / almam” biçiminde iki bağımsız seçim yaparız. n öğe için toplam seçim sayısı $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ 'dir.

Örnek 15.6. Yukarıdaki $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin nicelik sayısı $|A| = 3$ ve kuvvet kümesinin nicelik sayısı

$$|P(A)| = 2^3 = 8$$

olup gerçekten $P(A)$ 'da sekiz küme listelenmiştir.

15.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 15.7 (Boş Küme ile İlgili Önergeler). Aşağıdaki önermelerden hangilerinin doğru olduğunu belirleyiniz.

- a) $\emptyset \in \emptyset$ b) $\emptyset \subset \emptyset$ c) $\emptyset \subseteq \emptyset$ d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ e) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

Çözüm.

- a) $\emptyset$ hiçbir öğe içermediğinden hiçbir şey ona ait olamaz. **Yanlış.**
b) Öz alt küme olmak için $\emptyset$ 'in, $\emptyset$ 'de bulunmayan bir öğe içermesi gerekirdi. **Yanlış.**
c) **Teorem 15.1** gereği boş küme her kümenin, özel olarak kendisinin de alt kümesidir. **Doğru.**
d) $\{\emptyset\}$ kümesinin tek öğesi $\emptyset$ 'dir. **Doğru.**
e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 'dir; ayrıca $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ olduğundan kapsama özdür. **Doğru.**

■

Örnek 15.8 (Kuvvet Kümesi ve Nicelik Sayısı). Aşağıda verilen kümeler için $P(A)$ ve $|P(A)|$ değerlerini belirleyiniz.

- a) $A = \{1, \{1, 4\}\}$ b) $B = \{\{\emptyset\}, \{\pi\}, \pi\}$ c) $C = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$

Çözüm.

- a) A 'nın iki öğesi vardır: 1 ve $\{1, 4\}$. O hâlde $|P(A)| = 2^2 = 4$ ve

$$P(A) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{\{1, 4\}\}, \underbrace{\{1, \{1, 4\}\}}_A \right\}$$

b) B 'nin üç ögesi vardır: $\{ \emptyset \}$, $\{ \pi \}$ ve π . O hâlde $| P(B) | = 2^3 = 8$ ve

$$P(B) = \{ \emptyset, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \{ \pi \} \}, \{ \pi \}, \{ \{ \emptyset \}, \{ \pi \} \}, \{ \{ \emptyset \}, \pi \}, \{ \{ \pi \}, \pi \}, B \}$$

c) C 'nin üç ögesi vardır: 0 , $\emptyset$ ve $\{ \emptyset \}$. O hâlde $| P(C) | = 2^3 = 8$ ve

$$P(C) = \{ \emptyset, \{0\}, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{0, \emptyset\}, \{0, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, C \}$$

■

⚠ Kuvvet kümesinde $\emptyset$ iki farklı rolde görünebilir

(c) şıkında $\emptyset$ hem $P(C)$ 'nin **birinci** ögesidir (çünkü $\emptyset \subseteq C$), hem de $\{ \emptyset \}$ ögesinin içinde görünür (çünkü $\emptyset \in C$ olduğundan $\{ \emptyset \} \subseteq C$).

Bu ikisi karıştırılmamalıdır: birincisi " C 'nin boş alt kümesi", ikincisi " C 'nin $\emptyset$ ögesinden oluşan tek ögeli alt kümesi"dir.

Örnek 15.9 (Kuvvet Kümesinin Kuvvet Kümesi). $P (P(\{1\}))$ kümesini belirleyiniz ve bu kümenin eleman sayısını hesaplayınız.

Çözüm.

$A = \{1\}$ diyelim. $| A | = 1$ olduğundan

$$| P(A) | = 2^1 = 2, \quad P(A) = \{ \emptyset, \{1\} \}$$

Şimdi $P(A)$ iki ögeli bir küme olduğundan

$$| P (P(A)) | = 2^2 = 4$$

ve

$$P (P(A)) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{1\} \}, \underbrace{\{ \emptyset, \{1\} \}}_{P(A)} \}$$

bulunur.

■

Bir sonraki bölümde kümeler üzerindeki ilk iki işlemi, **birleşim** ve **kesişimi** ele alacağız.

16. Birleşim ve Kesişim İşlemleri

Kümeler cebirinin iki temel işlemi **birleşim** ve **kesişimdir**. Bu işlemlerin tanımları doğrudan mantıktaki “veya” ile “ve” bağlaçlarına dayanır; bu yüzden özellikleri de önermeler cebirinin özelliklerini birebir yansıtır.

16.1 Tanımlar

Tanım 16.1 (Birleşim). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere A ve B kümelerinin **birleşimi**

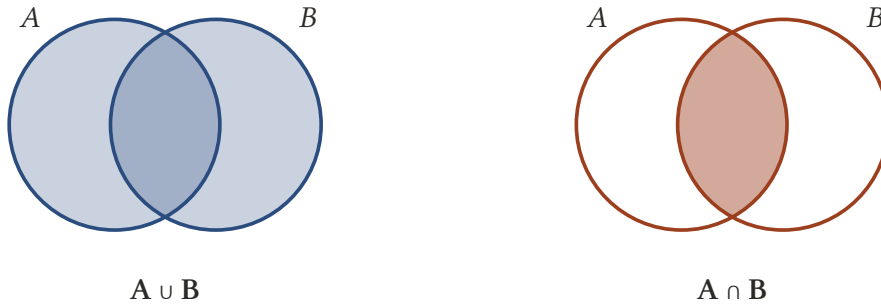
$$A \cup B = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 16.2 (Kesişim). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere A ve B kümelerinin **kesişimi**

$$A \cap B = \{ x \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 16.1: Solda birleşim: iki kümeden **en az birine** ait olan öğeler. Sağda kesişim: **her ikisine birden** ait olan öğeler.

16.2 Temel Kapsama Teoremleri

Teorem 16.1 (Birleşim ve Kesişimin Kapsama İlişkileri). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- a) $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$
- b) $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$

İspat.

a) Herhangi bir $x \in A$ alalım. Birleşim kümesinin tanımından $x \in A$ olması $(x \in A) \vee (x \in B)$ önermesini doğru kılar; yani $x \in A \cup B$ 'dir.

O hâlde her $x \in A$ için $x \in A \cup B$ 'dir; yani $A \subseteq A \cup B$ 'dir. B için de aynı akıl yürütme geçerlidir.

b) Herhangi bir $x \in A \cap B$ alalım. Kesişim kümesinin tanımından

$$x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

olur. “Ve” önermesinin her iki bileşeni de doğru olduğundan, her $x \in A \cap B$ için $x \in A$ ve her $x \in A \cap B$ için $x \in B$ ’dir. Buradan

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{ve} \quad A \cap B \subseteq B$$

elde edilir.

■

Teorem 16.2 (Kapsamanın İşlemlerle Korunması). $A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

a) $A \subseteq B$ ise $A \cup C \subseteq B \cup C$ ’dir.

b) $A \subseteq B$ ise $A \cap C \subseteq B \cap C$ ’dir.

İspat.

a) Kabul edelim ki $A \subseteq B$ olsun. Herhangi bir $x \in A \cup C$ alalım:

$$\begin{aligned} x \in A \cup C &\Rightarrow (x \in A) \vee (x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in B) \vee (x \in C) \quad (A \subseteq B \text{ kabulünden}) \\ &\Rightarrow x \in B \cup C \end{aligned}$$

O hâlde $A \cup C \subseteq B \cup C$ ’dir.

b) Benzer biçimde, herhangi bir $x \in A \cap C$ alalım:

$$\begin{aligned} x \in A \cap C &\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in B) \wedge (x \in C) \quad (A \subseteq B \text{ kabulünden}) \\ &\Rightarrow x \in B \cap C \end{aligned}$$

O hâlde $A \cap C \subseteq B \cap C$ ’dir.

■

İ Sonuç

$A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere

$$A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C \quad \text{ve} \quad A \cap C = B \cap C$$

Gerçekten $A = B$ ise hem $A \subseteq B$ hem $B \subseteq A$ olduğundan Teorem 16.2 iki yönde de uygulanır ve çift kapsama eşitliği verir.

Bu, kümeler cebirinde “eşitliğin her iki tarafını aynı kümeyle birleştirebiliriz” demenin kesin ifadesidir.

16.3 Birleşim İşleminin Özellikleri

Teorem 16.3 (Birleşimin Özellikleri). $A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere birleşim işlemi ile ilgili aşağıdaki özellikler geçerlidir:

a) $A \cup A = A$ (eş güçlülük özelliği)

b) $A \cup B = B \cup A$ (değişme özelliği)

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (birleşme özelliği)

d) $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A$

e) $A \cup \emptyset = A$

f) $A \cup \mathcal{E} = \mathcal{E}$

İspat.

(a), (b), (c) özellikleri, tanımdaki “veya” işleminin eş güçlülük, değişme ve birleşme özelliklerinin doğrudan sonucudur. (e) ve (f) ise sırasıyla çelişkinin “veya” işleminde etkisiz, totolojinin ise yutan eleman olmasından gelir.

(d) şikkını ayrıntılı ispatlayalım.

($\Rightarrow$) **Gerekliklik:** $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$.

$B \subseteq A$ olsun. **Teorem 16.2** gereği eşitsizliğin her iki tarafını A ile birleştirebiliriz:

$$A \cup B \subseteq A \cup A = A \Rightarrow A \cup B \subseteq A \quad (*)$$

Diğer taraftan **Teorem 16.1** gereği birleşim kümesi olmanın tanımından

$$A \subseteq A \cup B \quad (**)$$

(*) ve (**) birlikte çift kapsamayı verdiğiinden $A \cup B = A$ elde edilir.

($\Leftarrow$) **Yeterlik:** $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.

$A \cup B = A$ olsun. $B \not\subseteq A$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x \notin A$ olacak şekilde bir $x \in B$ vardır.

Diğer taraftan **Teorem 16.1** gereği $B \subseteq A \cup B$ her zaman geçerli olduğundan

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B = A$$

olur ki bu, $x \notin A$ olması ile çelişir. O hâlde $B \subseteq A$ 'dır.

■

16.4 Kesişim İşleminin Özellikleri

Teorem 16.4 (Kesişimin Özellikleri). $A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere kesişim işlemi ile aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- a) $A \cap A = A$ (eş güçlülük özelliği)
- b) $A \cap B = B \cap A$ (değişme özelliği)
- c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (birleşme özelliği)
- d) $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cap B = B$
- e) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- f) $A \cap \mathcal{E} = A$

💡 İki tablo aynı, roller yer değiştirmiş

Birleşim ile kesişimin özellikleri karşılaştırıldığında $\emptyset$ ile $\mathcal{E}$ 'nin rollerinin **takas edildiği** görülür:

	birleşim	kesişim
$\emptyset$	etkisiz eleman	yutan eleman
$\mathcal{E}$	yutan eleman	etkisiz eleman

Bu, önermeler cebirindeki c (çelişki) ile t (totoloji) arasındaki ilişkinin birebir yansımasıdır: $\emptyset$ kümesi c 'ye, $\mathcal{E}$ kümesi t 'ye karşılık gelir.

16.5 Dağılma Özellikleri

Teorem 16.5 (Dağılma Özellikleri). $A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

İspat.

a) Bir öğenin her iki kümeye ait olma koşulunu yazıp önermeler cebirinin dağılma özelliğini kullanalım:

$$\begin{aligned}
 x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] \\
 &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)] \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned}$$

Bütün adımlar denklik olduğundan iki küme aynı öğelere sahiptir; yani eşittirler.

b) Aynı akıl yürütme, “veya”nın “ve” üzerine dağılma özelliği ile tekrarlanır.

■

! Küme özdeşliklerinin kaynağı önermeler cebiridir

Bu bölümdeki bütün özellikler aynı şablonla ispatlandı:

1. $x \in$ (küme ifadesi) koşulunu **önermeye** çevir.
2. Önermeler cebirinde bilinen bir denkliği uygula.
3. Sonucu tekrar **küme diline** çevir.

Bu yüzden kümeler cebirinde ayrı bir kural listesi ezberlemeye gerek yoktur: $\cup \leftrightarrow \vee$, $\cap \leftrightarrow \wedge$, $\text{tümleyen} \leftrightarrow \text{değil}$, $\emptyset \leftrightarrow c$, $\mathcal{E} \leftrightarrow t$ karşılıklarını bilmek yeterlidir.

Bir sonraki bölümde tümleyen, fark ve simetrik fark işlemlerini tanımlayıp **De Morgan kurallarının küme karşılıklarını** inceleyeceğiz.

17. Tümleyen, Fark ve Simetrik Fark

Birleşim ve kesişim iki kümeyi birleştiren işlemlerdi. Bu bölümde bir kümenin **dışında** kalanları konu alan işlemleri tanımlıyoruz: tümleyen, fark ve simetrik fark.

17.1 Tümleyen

Tanım 17.1 (Tümleyen). $A \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere A kümesine ait olmayan ama $\mathcal{E}$ kümesine ait elemanların oluşturduğu kümeye A 'nın $\mathcal{E}$ 'ye göre **tümleyeni** denir ve

$$A' = A^c = \{ x \mid (x \in \mathcal{E}) \wedge (x \notin A) \}$$

ile gösterilir.

Teorem 17.1 (De Morgan Kuralları). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere:

$$\text{a)} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{b)} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

İspat.

a) Bir öğenin sol taraftaki kümeye ait olma koşulunu yazalım:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow (x \in \mathcal{E}) \wedge (x \notin A \cup B) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathcal{E}) \wedge \left[(x \in A) \vee (x \in B) \right]' \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathcal{E}) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B) \quad (\text{önermelerde De Morgan}) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

b) Aynı akıl yürütme, “ve”nin değilinin “veya” olması ile tekrarlanır.

■

Teorem 17.2 (Tümleyenin Özellikleri). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- a) $(A^c)^c = A$ b) $A \cup A^c = \mathcal{E}$ c) $A \cap A^c = \emptyset$
d) $A \subseteq B$ ise $B^c \subseteq A^c$ 'dir e) $A = B$ ise $A^c = B^c$ 'dir
f) $\emptyset^c = \mathcal{E}$ g) $\mathcal{E}^c = \emptyset$

! Tümleyen alınca kapsama yön değiştirir

(d) şıkkı özellikle dikkat gerektirir: $A \subseteq B$ iken $A^c \subseteq B^c$ **değil**, $B^c \subseteq A^c$ olur.
Bu, mantıktaki karşıt ters denkleğinin küme karşılığıdır: $(x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$.
Küme ne kadar büyükse tümleyeni o kadar küçüktür.

17.2 Ayırık Kümeler

Tanım 17.2 (Ayırık Kümeler). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olsun. Eğer

$$A \cap B = \emptyset$$

ise A ve B kümelerine **ayırık kümeler** denir.

Teorem 17.3 (Ayrıklık Ölçütü). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ olmak üzere

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c \quad (\text{veya } B \subseteq A^c)$$

İspat.

$(\Rightarrow)$ $A \cap B = \emptyset$ olsun. Keyfi bir $x \in A$ alalım. Eğer $x \in B$ olsaydı $x \in A \cap B$ olurdu; oysa $A \cap B = \emptyset$ 'dir. O hâlde $x \notin B$, yani $x \in B^c$ 'dir. Buradan $A \subseteq B^c$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $A \subseteq B^c$ olsun. Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ olsaydı, bir $x \in A \cap B$ ögesi bulunurdu. $x \in A \subseteq B^c$ olduğundan $x \notin B$ olurdu; oysa $x \in A \cap B$ olması $x \in B$ demektir. Bu bir çelişkidir. O hâlde $A \cap B = \emptyset$ 'dir. $B \subseteq A^c$ hâli de benzer biçimde gösterilir.

■

i Aynı sonucun cebirsel ispatı

$A \cap B = \emptyset$ olsun. Her iki tarafı B^c ile birleştirelim:

$$(A \cap B) \cup B^c = \emptyset \cup B^c = B^c$$

Sol tarafa dağılma özelliğini uygulayalım:

$$(A \cup B^c) \cap \underbrace{(B \cup B^c)}_{\mathcal{E}} = (A \cup B^c) \cap \mathcal{E} = A \cup B^c$$

O hâlde $A \cup B^c = B^c$ 'dir. Teorem 16.3'nin (d) şıkkı gereği bu, tam olarak $A \subseteq B^c$ demektir.

17.3 Fark İşlemi

Tanım 17.3 (İki Kümenin Farkı). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ kümeleri için

$$A \setminus B = A - B = \{ x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$$

biçiminde tanımlı kümeye B 'nin A içindeki tümleyeni denir ve " A fark B " şeklinde ifade edilir.

Teorem 17.4 (Farkın Kesişimle İfadesi). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ kümeleri için

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

İspat.

$A \setminus B \subseteq A \cap B^c$ olduğunu gösterelim. Her $x \in A \setminus B$ için $x \in A$ ve $x \notin B$ 'dir. $x \notin B$ olması $x \in B^c$ demek olduğundan $x \in A \cap B^c$ elde edilir. x keyfi olduğundan

$$A \setminus B \subseteq A \cap B^c \quad (*)$$

$A \cap B^c \subseteq A \setminus B$ olduğunu gösterelim. Her $x \in A \cap B^c$ için $x \in A$ ve $x \in B^c$, yani $x \notin B$ 'dir. Böylece $x \in A \setminus B$ elde edilir. x keyfi olduğundan

$$A \cap B^c \subseteq A \setminus B \quad (**)$$

$(*)$ ve $(**)$ 'dan $A \setminus B = A \cap B^c$ bulunur.

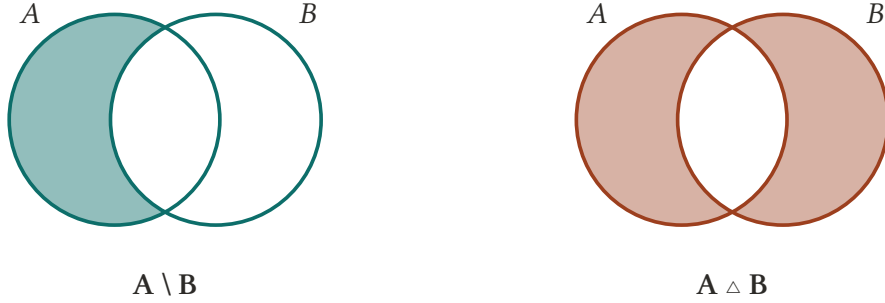
■

Bu teorem çok işlevseldir: **fark işlemini kesişim ve tümleyen cinsinden yazarak**, önceki bölümlerde kurduğumuz bütün cebiri fark içeren ifadeler de uygulayabiliriz.

Tanım 17.4 (Simetrik Fark). $A, B \subseteq \mathcal{E}$ kümeleri için

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

biçiminde tanımlı kümeye A ile B 'nin **simetrik farkı** denir.



Şekil 17.1: Solda fark: A 'da olup B 'de olmayanlar. Sağda simetrik fark: **tam olarak birine** ait olan öğeler; yani ortak bölge dışarıda kalır.

⚠ Fark işlemi değişmeli değildir

Keyfi kümeler için

$$B \setminus C \neq C \setminus B$$

olur. Örneğin $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ve $C = \{3, 4, 5, 6\}$ için $B \setminus C = \{2, 8\}$ iken $C \setminus B = \{3, 5\}$ 'tir. Simetrik fark ise değişmelidir: tanımındaki $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ifadesi A ile B yer değiştirdiğinde aynı kalır.

17.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 17.1 (Sayısal Bir Uygulama). $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ evrensel kümesinde

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{3, 4, 5, 6\}$$

kümeleri veriliyor. $A \setminus B$, B^c , $A \cap B^c$, $B \setminus C$ ve $C \setminus B$ kümelerini bulunuz.

Çözüm.

$A \setminus B$ kümesi, A 'da olup B 'de olmayan öğelerden oluşur. A 'nın 2 ve 4 öğeleri B 'de de bulunduğuundan bunlar çıkarılır:

$$A \setminus B = \{1, 3\}$$

B^c kümesi, $\mathcal{E}$ 'de olup B 'de olmayanlardır:

$$B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Teorem 17.4'i sağlamak için kesişimi hesaplayalım:

$$A \cap B^c = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3\} = A \setminus B \checkmark$$

Son olarak

$$B \setminus C = \{2, 8\}, \quad C \setminus B = \{3, 5\}$$

bulunur.

■

Örnek 17.2 (Birleşimi Boş Olan Kümeler). $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

Gerekliklik ($\Rightarrow$). $A \cup B = \emptyset$ olsun; $A = B = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Birleşim tanımından $A \subseteq A \cup B$ olduğunu biliyoruz. Hipotezden

$$A \subseteq \emptyset$$

elde edilir. Diğer taraftan her zaman $\emptyset \subseteq A$ olduğundan çift kapsamadan $A = \emptyset$ bulunur.

Benzer şekilde $B \subseteq A \cup B = \emptyset$ olup $\emptyset \subseteq B$ olduğundan $B = \emptyset$ elde edilir.

Yeterlik ($\Leftarrow$). $A = B = \emptyset$ olsun.

$$A \cup B = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

olduğundan ispat tamamlanır.

■

Örnek 17.3 (İfadeleri Sadeleştirme). $\mathcal{E}$ evrensel küme olmak üzere aşağıdaki kümeleri en sade hâlde yazınız.

a) $(B \cap A) \cup (A \cap \mathcal{E})$ b) $(\emptyset \cup A^c) \cup (A \cap \mathcal{E})$

Çözüm.

a) Kesişimin değişme özelliğini ve ardından dağılma özelliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} (B \cap A) \cup (A \cap \mathcal{E}) &= (A \cap B) \cup (A \cap \mathcal{E}) \quad (\text{değişme}) \\ &= A \cap (B \cup \mathcal{E}) \quad (\text{dağılma}) \\ &= A \cap \mathcal{E} \quad (\mathcal{E}, \text{ birleşimin yutan elemanı}) \\ &= A \end{aligned}$$

b) $\emptyset$ birleşimin etkisiz, $\mathcal{E}$ kesişimin etkisiz elemanıdır:

$$(\emptyset \cup A^c) \cup (A \cap \mathcal{E}) = A^c \cup A = \mathcal{E}$$

■

Örnek 17.4 (Fark ile İlgili Özdeşlikler). Her A, B, C kümesi için aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

a) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ b) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

Çözüm.

a) Farkı kesişim cinsinden yazıp dağılma özelliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} A \cup (B \setminus A) &= A \cup (B \cap A^c) \quad (\text{fark} = \text{kesişim}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \quad (\cup \text{'nun } \cap \text{ üzerine dağılması}) \\ &= (A \cup B) \cap \mathcal{E} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (A - B) \cap (A - C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \quad (\text{birleşme ve eş güçlülük}) \\ &= A \cap (B \cup C)^c \quad (\text{De Morgan}) \\ &= A - (B \cup C) \end{aligned}$$

■

Örnek 17.5 (A Kümesinin İkiye Ayrılması). $A - B$ ve $A \cap B$ kümelerinin birleşiminin A , kesişiminin ise $\emptyset$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Birleşim:

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \quad (\text{dağılma}) \\ &= A \cap \mathcal{E} = A\end{aligned}$$

Kesişim:

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap B) \\ &= A \cap (B \cap B^c) \quad (\text{birleşme ve değişme}) \\ &= A \cap \emptyset = \emptyset\end{aligned}$$

■

🔗 Bu sonuç neden önemli?

Son örnek, A kümesinin **ayrık** iki parçaya bölündüğünü söyler: B ile ortak olan kısım ve olmayan kısım. Eleman sayısı hesaplarında sık kullanılan

$$|A| = |A \cap B| + |A - B|$$

eşitliği doğrudan buradan gelir; çünkü ayrık kümelerin birleşiminin eleman sayısı, eleman sayılarının toplamıdır.

Örnek 17.6 (Simetrik Fark Özdeşlikleri). Her A, B kümesi için aşağıdakileri gösteriniz.

a) $(A \triangle B) \cap A = A - B$ b) $A - B = A - (A \cap B)$

Çözüm.

a) Simetrik farkın tanımını yazıp kesişimin birleşim üzerine dağılımını kullanalım:

$$\begin{aligned}(A \triangle B) \cap A &= [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap A \\ &= [(A \setminus B) \cap A] \cup [(B \setminus A) \cap A] \\ &= [(A \cap B^c) \cap A] \cup [(B \cap A^c) \cap A] \\ &= (A \cap B^c) \cup [B \cap \underbrace{A^c \cap A}_{\emptyset}] \\ &= (A \cap B^c) \cup \emptyset = A \cap B^c = A - B\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B^c) \quad (\text{De Morgan}) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \quad (\text{dağılma}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B^c) = A \cap B^c = A - B\end{aligned}$$

■

Örnek 17.7 (Simetrik Farkın Tümleyeni). Her A, B kümesi için $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
(A \triangle B)^c &= [(A - B) \cup (B - A)]^c \\
&= [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)]^c \\
&= (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A) && \text{(De Morgan, iki kez)} \\
&= [(A^c \cup B) \cap B^c] \cup [(A^c \cup B) \cap A] && \text{(dağılma)} \\
&= [(A^c \cap B^c) \cup (\underbrace{B \cap B^c}_{\emptyset})] \cup [(\underbrace{A^c \cap A}_{\emptyset}) \cup (B \cap A)] \\
&= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) \\
&= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) && \text{(De Morgan)}
\end{aligned}$$

■

İ Sonucun anlamı

$A \triangle B$, tam olarak **birine** ait olan öğelerdir. Tümleniyi ise geriye kalan iki bölgedir: **ikisine birden** ait olanlar $(A \cap B)$ ve **hiçbirine** ait olmayanlar $((A \cup B)^c)$. Venn diyagramında bu üç bölge evrensel kümeyi tam olarak kaplar.

Örnek 17.8 (Kesişimin Simetrik Fark Üzerine Dağılması). Kümelerde kesişimin simetrik fark üzerine sağdan dağılma özelliği vardır; yani

$$(B \triangle C) \cap A = (B \cap A) \triangle (C \cap A)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Sağ taraftan başlayalım:

$$\begin{aligned}
(B \cap A) \triangle (C \cap A) &= [(B \cap A) - (C \cap A)] \cup [(C \cap A) - (B \cap A)] \\
&= [(B \cap A) \cap (C \cap A)^c] \cup [(C \cap A) \cap (B \cap A)^c] \\
&= [(B \cap A) \cap (C^c \cup A^c)] \cup [(C \cap A) \cap (B^c \cup A^c)] \\
&= [(B \cap A) \cap C^c] \cup [\underbrace{(B \cap A) \cap A^c}_{\emptyset}] \cup [(C \cap A) \cap B^c] \cup [\underbrace{(C \cap A) \cap A^c}_{\emptyset}] \\
&= [(B \cap C^c) \cap A] \cup [(C \cap B^c) \cap A] \\
&= [(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)] \cap A && \text{(dağılma)} \\
&= [(B - C) \cup (C - B)] \cap A \\
&= (B \triangle C) \cap A
\end{aligned}$$

■

17.5 Eleman Sayısı: İçerme–Dışarma

Örnek 17.9 (Üç Küme İçin Eleman Sayısı). $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olduğu bilgisini kullanarak, A, B, C sonlu kümeleri için $A \cup B \cup C$ kümesinin eleman sayısını veren formülü ifade ediniz.

Çözüm.

$A \cup B$ kümesini tek bir küme gibi düşünüp verilen formülü uygulayalım:

$$\begin{aligned}
s(A \cup B \cup C) &= s((A \cup B) \cup C) \\
&= s(A \cup B) + s(C) - s((A \cup B) \cap C)
\end{aligned}$$

İlk terime formülü bir kez daha uygulayalım ve son terimde dağılma özelliğini kullanalım:

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Son ifadenin eleman sayısını yine aynı formülle hesaplayalım:

$$\begin{aligned} s((A \cap C) \cup (B \cap C)) &= s(A \cap C) + s(B \cap C) - s((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= s(A \cap C) + s(B \cap C) - s(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Hepsini yerine koyarsak

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

elde edilir.



💡 Formülün deseni

Tekli kümeler **artı**, ikili kesişimler **eksi**, üçlü kesişim **artı** işaretlerle girer. Genel olarak n küme için işaretler $(-1)^{k+1}$ deseniyle sıralanır. Bu kurala **içerme–dışarma ilkesi** denir.

Bir sonraki bölümde kümelerden yeni kümeler üreten bir başka işlemi, **kartezyen çarpımı** inceleyeceğiz.

18. Kartezyen Çarpım ve Özellikleri

Şimdiye kadarki bütün işlemler ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, tümleyen) aynı evrensel kümenin alt kümelerinden yine aynı evrende bir küme üretiyordu. Kartezyen çarpım ise farklıdır: öğeleri **sıralı ikililer** olan yeni bir küme üretir. Bu, analitik geometriden fonksiyonlara kadar pek çok yapının temelidir.

18.1 Sıralı İkili

Tanım 18.1 (Sıralı İkili). Verilen herhangi iki eleman belirli bir öncelik sırasına göre bir arada tek bir eleman gibi düşünülürse, bu iki elemanın oluşturduğu yeni elemana **sıralı ikili** adı verilir.

Tanım 18.2 (Sıralı İkililerin Eşitliği). İki sıralı ikilinin eşit olabilmesi için sırasıyla ilk ve ikinci bileşenleri birbirine eşit olmalıdır:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

! Sıralı ikili ile iki öğeli küme aynı şey değildir

Kümelerde öğelerin sırası önemsizdi: $\{a, b\} = \{b, a\}$ 'dır. Sıralı ikililerde ise sıra belirleyicidir:

$$(a, b) \neq (b, a) \quad (a \neq b \text{ olduğunda})$$

Ayrıca kümede öge tekrarı yok sayılırken (a, a) geçerli bir sıralı ikilidir.

i Sıralı üçlüler

Verilen herhangi üç eleman belirli bir öncelik sırasına göre tek bir eleman gibi düşünülürse buna **sıralı üçlü** denir. a, b, c herhangi üç eleman olmak üzere (a, b, c) sıralı üçlüsü için

$$(a, b, c) = ((a, b), c) = (a, (b, c))$$

kabul edilir. Bu bir **anlaşmadır**: sıralı üçlüyü iki farklı biçimde iç içe sıralı ikili olarak kurmak mümkündür ve bu ikisini özdeşleştiririz.

18.2 Kartezyen Çarpım

Tanım 18.3 (Kartezyen Çarpım). A ve B kümeleri verilsin. Birinci terimleri A 'dan ve ikinci terimleri B 'den alınmış bütün sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye A kümesinin B kümesi ile **kartezyen çarpımı** denir, $A \times B$ şeklinde yazılarak " A kartezyen çarpım B " diye okunur:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B) \}$$

Örnek 18.1. $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olsun. Bu durumda

$$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) \}$$

$$B \times A = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2) \}$$

olur. Her iki kümenin de altı ögesi vardır.

🔗 Eleman sayısı

A ve B sonlu kümeler olmak üzere

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Gerçekten birinci bileşen için $|A|$, ikinci bileşen için $|B|$ seçenek vardır ve bu seçimler bağımsızdır.

18.3 Değişme ve Birleşme

Teorem 18.1 (Kartezyen Çarpımın Değişme ve Birleşme Özellikleri). *i) Kartezyen çarpım işlemi **değişme** özelliğine sahip **değildir**.*

*ii) Kartezyen çarpım işlemi **birleşme** özelliğine sahiptir.*

İspat.

i) Bir aksine örnek yeterlidir. $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olsun. Örnek 18.1’te hesapladığımız kümelere bakalım:

$$(1, a) \in A \times B \quad \text{ama} \quad (1, a) \notin B \times A$$

çünkü $B \times A$ ’nın öğelerinin birinci bileşeni B ’den gelmelidir. Sıralı ikililerin eşitliği gereği $1 \neq a$ olduğundan $(1, a) \neq (a, 1)$ ’dir. O hâlde $A \times B \neq B \times A$ ’dır.

ii) A, B, C kümeleri verilsin. $D = A \times B$ diyelim:

$$\begin{aligned} (A \times B) \times C &= \{ (d, c) \mid (d \in A \times B) \wedge (c \in C) \} \\ &= \{ ((a, b), c) \mid ((a \in A) \wedge (b \in B)) \wedge (c \in C) \} \\ &= \{ (a, (b, c)) \mid (a \in A) \wedge ((b \in B) \wedge (c \in C)) \} \\ &= \{ (a, (b, c)) \mid (a \in A) \wedge ((b, c) \in B \times C) \} \\ &= A \times (B \times C) \end{aligned}$$

Üçüncü adımda hem “ve” işleminin birleşme özelliği hem de sıralı üçlü için yaptığımız $((a, b), c) = (a, (b, c))$ anlaşması kullanılmıştır.

■

18.4 Dağılma Özellikleri

Teorem 18.2 (Kartezyen Çarpımın Dağılma Özellikleri). *i) Kümelerde kartezyen çarpım işleminin **kesişim** işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.*

*ii) Kümelerde kartezyen çarpım işleminin **birleşim** işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.*

İspat.

Birleşim üzerine soldan dağılmayı, yani $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ eşitliğini gösterelim:

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= \{ (x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B \cup C) \} \\ &= \{ (x, y) \mid (x \in A) \wedge [(y \in B) \vee (y \in C)] \} \\ &= \{ (x, y) \mid [(x \in A) \wedge (y \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (y \in C)] \} \\ &= \{ (x, y) \mid [(x, y) \in A \times B] \vee [(x, y) \in A \times C] \} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

Üçüncü adımda “ve”nin “veya” üzerine dağılma özelliği kullanılmıştır. Diğer üç hâl de aynı şablonla, ilgili mantık özdeşliği kullanılarak gösterilir.

■

Örnek 18.2 (Kesişim Üzerine Sağdan Dağılma). Kümelerde kartezyen çarpım işleminin kesişim işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği var mıdır? İspat ediniz.

Çözüm.

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \times C &= \{ (x, y) \mid (x \in A \cap B) \wedge (y \in C) \} \\
 &= \{ (x, y) \mid [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (y \in C) \} \\
 &= \{ (x, y) \mid [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(y \in C) \wedge (y \in C)] \} \\
 &= \{ (x, y) \mid [(x \in A) \wedge (y \in C)] \wedge [(x \in B) \wedge (y \in C)] \} \\
 &= \{ (x, y) \mid [(x, y) \in A \times C] \wedge [(x, y) \in B \times C] \} \\
 &= (A \times C) \cap (B \times C)
 \end{aligned}$$

Üçüncü adımda “ve” işleminin eş güçlülük özelliği ($p \wedge p \equiv p$), dördüncü adımda ise değişme ve birleşme özellikleri kullanılmıştır.

■

Örnek 18.3 (Fark Üzerine Dağılma). $\mathcal{E}$ evrensel küme olmak üzere $A, B, C \subseteq \mathcal{E}$ olsun. Kartezyen çarpım tanımını kullanarak

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İki kapsamayı ayrı ayrı gösterelim.

1) $A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$.

$(x, y) \in A \times (B \setminus C)$ alalım. Tanımdan $x \in A$ ve $y \in B \setminus C$ ’dir; yani $x \in A$, $y \in B$ ve $y \notin C$ ’dir.

- $x \in A$ ve $y \in B$ olduğundan $(x, y) \in A \times B$ ’dir.
- $y \notin C$ olduğundan $(x, y) \notin A \times C$ ’dir.

Dolayısıyla $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ elde edilir. (x, y) keyfi olduğundan

$$A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C) \quad (1)$$

2) $(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$.

Keyfi bir $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ alalım. Fark tanımından $(x, y) \in A \times B$ ve $(x, y) \notin A \times C$ ’dir. Kartezyen çarpım tanımından $x \in A$ ve $y \in B$ ’dir. Ayrıca $x \in A$ olmasına karşın $(x, y) \notin A \times C$ olduğundan $y \notin C$ olmak zorundadır. O hâlde $y \in B \setminus C$ ’dir ve $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$ yazılır. (x, y) keyfi olduğundan

$$(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C) \quad (2)$$

(1) ve (2)’den $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ elde edilir.

■

18.5 Kapsama ile İlişkisi

Teorem 18.3 (Kartezyen Çarpımda Kapsama). A, B, C, D kümeleri verilsin.

$$[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)] \Rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$$

İspat.

Herhangi bir $(a, c) \in A \times C$ alalım:

$$\begin{aligned}
 (a, c) \in A \times C &\Rightarrow (a \in A) \wedge (c \in C) \\
 &\Rightarrow (a \in B) \wedge (c \in D) \quad (A \subseteq B \text{ ve } C \subseteq D \text{ kabullerinden}) \\
 &\Rightarrow (a, c) \in B \times D
 \end{aligned}$$

O hâlde $(A \times C) \subseteq (B \times D)$ ’dir.

İ Sonuçlar

Teorem 18.3'da özel seçimler yapılarak şunlar elde edilir. $A \subseteq B$ olsun:

1. Her C kümesi için $A \times C \subseteq B \times C$ ($C \subseteq C$ alınarak).
2. $A \times A \subseteq A \times B$ (birinci çarpanda $A \subseteq A$, ikincide $A \subseteq B$ alınarak).
3. $A \times B \subseteq B \times B$ (birinci çarpanda $A \subseteq B$, ikincide $B \subseteq B$ alınarak).
4. $A \times A \subseteq B \times B$ (her iki çarpanda $A \subseteq B$ alınarak).

Bu bölümde kurduğumuz $A \times B$ kümesinin alt kümeleri, bir sonraki bölümün konusu olan [bağıntı kavramını](#) doğuracaktır.

19. Bağntı Kavramı ve Özellikleri

Bir önceki bölümde $A \times B$ kartezyen çarpımını kurmuştuk. Bu kümenin öğeleri, birinci bileşeni A 'dan ikinci bileşeni B 'den gelen **bütün** sıralı ikililerdi. Uygulamada ise genellikle bu ikililerin hepsi değil, belirli bir kurala uyan bir kısmı ilgilendirir bizi. İşte bu “kısm” bağntı kavramını verir.

19.1 Bağntı

Tanım 19.1 (Bağntı). $A, B \neq \emptyset$ kümeleri verilsin. $A \times B$ 'nin her alt kümesine A 'dan B 'ye bağntı denir.

Bu tanıma göre A 'dan B 'ye bir β bağntısı

$$\beta = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B, p(x, y) \}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $p(x, y)$, x ile y arasındaki bağntıyı belirten özelliktir.

i Gösterim

A kümesinden B kümesine bir β bağntısı verildiğinde, $(x, y) \in \beta$ ise “ A kümesinin x ögesi, β bağntısı ile B kümesinin y ögesine bağlıdır” denir ve bu durum

$$(x, y) \in \beta \Leftrightarrow x \beta y \quad \text{veya} \quad (x, y) \in \beta \Leftrightarrow y = \beta(x)$$

ile gösterilir.

⚠ $\beta(x)$ gösterimi tek bir değer vermeyebilir

$y = \beta(x)$ yazımı fonksiyon gösterimini andırır da, genel bir bağntıda bir x ögesi **birden çok** y ögesine bağlı olabilir; hatta hiçbirine bağlı olmayabilir.

Her fonksiyon bir bağntıdır, ancak her bağntı bir fonksiyon değildir. Fonksiyon, her $x \in A$ için **bir ve yalnız bir** $y \in B$ bulunmasını isteyen özel bir bağntıdır.

Örnek 19.1 (Bağntı mıdır?). $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ olsun.

$$\beta_1 = \{ (1, a), (2, b), (3, b) \}, \quad \beta_2 = \{ (a, 1), (2, b), (3, a) \}$$

kümeleri için aşağıdakileri cevaplayınız.

a) β_1 , A 'dan B 'ye bir bağntı mıdır?

b) β_2 , A 'dan B 'ye bir bağntı mıdır?

c) $a = \beta_1(1)$, $2 \beta_1 b$, $b \beta_1 3$ gösterimlerinden hangileri doğru, hangileri yanlıştır?

Çözüm.

a) β_1 'in bütün öğelerinin birinci bileşeni A 'dan, ikinci bileşeni B 'dendir; yani $\beta_1 \subset A \times B$ 'dir. O hâlde β_1 , A 'dan B 'ye bir **bağntıdır**.

b) $(a, 1)$ ikilisinin birinci bileşeni $a \notin A$ 'dır; dolayısıyla $(a, 1) \notin A \times B$ 'dir. Buradan $\beta_2 \not\subset A \times B$ olur. O hâlde β_2 , A 'dan B 'ye bir bağntı **değildir**.

c)

- $a = \beta_1(1) \Leftrightarrow (1, a) \in \beta_1 \rightarrow$ **doğrudur**.
- $2 \beta_1 b \Leftrightarrow (2, b) \in \beta_1 \rightarrow$ **doğrudur**.
- $b \beta_1 3 \Leftrightarrow (b, 3) \in \beta_1 \rightarrow$ **yanlıştır**.

Örnek 19.2 (Bağntıları İkilerle Yazma). $A = \{1, 7, 10, 19\}$ kümesinde tanımlı β_1 ve β_2 bağntıları

$$\beta_1 = \{(x, y) : x \in A, y \in A, x - 2y \geq 5\}, \quad \beta_2 = \{(x, y) : x \in A, y \in A, 9 \mid x - y\}$$

şeklinde tanımlansın.

a) β_1 ve β_2 bağntılarını ikililerle yazınız. **b)** $\beta_1 \cap \beta_2$ 'yi belirleyiniz. **c)** $\beta_1(x) = 1$ için $x \in A$ 'yı bulunuz.

Çözüm.

a) β_1 için: $y \in A$ olduğundan en küçük y değeri 1'dir; $x - 2y \geq 5$ koşulundan $x \geq 5 + 2y \geq 7$ olmalıdır. O hâlde $x = 1$ hiçbir ikili vermez. Kalan değerleri deneyelim:

- $x = 7$ için $7 - 2y \geq 5 \Rightarrow 2y \leq 2 \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y = 1$
- $x = 10$ için $10 - 2y \geq 5 \Rightarrow 2y \leq 5 \Rightarrow y \leq 2,5 \Rightarrow y = 1$
- $x = 19$ için $19 - 2y \geq 5 \Rightarrow 2y \leq 14 \Rightarrow y \leq 7 \Rightarrow y = 1$ veya $y = 7$

Buradan

$$\beta_1 = \{(7, 1), (10, 1), (19, 1), (19, 7)\}$$

β_2 için farkı 9'un katı olan ikilileri arayalım. Köşegen ikililerin farkı 0 olduğundan hepsi bağntıya girer; ayrıca $10 - 1 = 9$, $19 - 1 = 18$, $19 - 10 = 9$ farkları da 9'un katıdır:

$$\beta_2 = \{(1, 1), (7, 7), (10, 10), (19, 19), (1, 10), (10, 1), (1, 19), (19, 1), (10, 19), (19, 10)\}$$

b) β_1 'in dört öğesini tek tek β_2 koşuluna göre sınavalım: $7 - 1 = 6$ ve $19 - 7 = 12$ sayıları 9 ile bölünmez; $10 - 1 = 9$ ve $19 - 1 = 18$ ise bölünür. O hâlde

$$\beta_1 \cap \beta_2 = \{(10, 1), (19, 1)\}$$

c) $\beta_1(x) = 1 \Leftrightarrow (x, 1) \in \beta_1$ olduğundan β_1 'in ikinci bileşeni 1 olan öğelerine bakalız:

$$x = 7, \quad x = 10, \quad x = 19$$

i Bağntılar birer küme olduğundan küme işlemlerine tabidir

(b) şıkında $\beta_1 \cap \beta_2$ kesişimini alabildik; çünkü bağntılar $A \times A$ 'nın alt kümeleridir. Aynı şekilde $\beta_1 \cup \beta_2$, $\beta_1 \setminus \beta_2$ ve β_1^c de tanımlıdır ve yine birer bağntıdır.

19.2 Ters (Karşıt) Bağntı

Tanım 19.2 (Ters Bağntı). A kümesinden B kümesine bir β bağntısı verildiğinde, β 'daki bütün sıralı ikililerin birinci ve ikinci terimlerinin yerleri değiştirilerek elde edilen B 'den A 'ya bağntıya, β bağntısının **ters bağntısı** adı verilir ve β^{-1} ile gösterilir.

Bu tanımdan, $\beta \subseteq A \times B$ ve $\beta = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, p(x, y)\}$ olmak üzere

$$\beta^{-1} \subseteq B \times A, \quad \beta^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \beta\}$$

yazabiliriz.

Teorem 19.1 (Ters Bağntının Temel Özellikleri). $\beta \subseteq A \times B$ olsun.

i) $(x, y) \in \beta \Leftrightarrow (y, x) \in \beta^{-1}$

ii) $\beta(x) = y \Leftrightarrow \beta^{-1}(y) = x$

Örnek 19.3 (Ters Bağntı Bulma). $A = \{2, 3, 4\}$ kümesinden $B = \{5, 6, 7, 8\}$ kümesine bir β bağntısı

$$\beta = \{(x, y) : x \in A, y \in B, x \mid y\}$$

şeklinde tanımlansın. β 'nin ters bağntısını yazınız.

Çözüm.

Önce β 'yı belirleyelim; A 'nın her öğesi için B 'de böldüğü sayıları arayalım:

- $x = 2: 2 \mid 6 \text{ ve } 2 \mid 8 \rightarrow (2, 6), (2, 8)$
- $x = 3: 3 \mid 6 \rightarrow (3, 6)$
- $x = 4: 4 \mid 8 \rightarrow (4, 8)$

O hâlde

$$\beta = \{ (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8) \}$$

$(x, y) \in \beta \Leftrightarrow (y, x) \in \beta^{-1}$ olduğundan, bütün ikililerin bileşenlerini yer değiştirelim:

$$\beta^{-1} = \{ (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4) \}$$

■

19.3 Birim Bağntı

Tanım 19.3 (Birim Bağntı). $A \neq \emptyset$ kümesi verilsin. $A \times A$ kümesinde birinci ve ikinci terimleri aynı olan bütün sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye **A 'da birim bağntı** adı verilir ve I_A veya Δ_A ile gösterilir:

$$I_A = \{ (x, x) \mid x \in A \}$$

19.4 Bir Kümede Tanımlı Bağntıların Özellikleri

Bundan sonraki özellikler yalnızca $\beta \subseteq A \times A$ biçimindeki, yani **aynı küme üzerinde** tanımlı bağntılar için anlamlıdır.

19.4.1 Yansıma Özelliği

Tanım 19.4 (Yansıma Özelliği ve Yansıyan Bağntı). A kümesinde tanımlı bir β bağntısı verildiğinde, A kümesinin **her** elemanı β bağntısı ile kendisine bağlı ise, başka bir deyişle A 'daki her x için $(x, x) \in \beta$ ise, β bağntısının A üzerinde **yansıma özelliği** vardır veya β , A 'da **yansıyan bağntıdır** denir.

Kısaca:

$$(\beta \subseteq A \times A \text{ yansıyan bağntı}) \Leftrightarrow (\forall x \in A); (x, x) \in \beta$$

i Birim bağntı ile ilişkisi

β bağntısının yansıyan olması, tam olarak

$$I_A \subseteq \beta$$

demektir. Yani yansıyan bir bağntı, birim bağntının bütün ikililerini içermek zorundadır.

Örnek 19.4 (Yansıyan mı?). a) Düzlemde tüm üçgenlerin kümesi P olsun. P 'de bir R bağntısı

$$R = \{(x, y) : x \text{ üçgeni ile } y \text{ üçgeni birbirinin benzeri}\}$$

şeklinde tanımlansın. R bağntısı yansıyan bağntı mıdır?

b) Düzlemde tüm doğruların oluşturduğu E kümesinde bir β bağıntısı, doğrular arasındaki diklik bağıntısı olsun. β yansıyan bağıntı mıdır?

Çözüm.

a) Her üçgen kendisi ile benzerdir (burada benzerlik oranı 1'dir). O hâlde her $x \in P$ için $(x, x) \in R$ olduğundan R **yansıyan bir bağıntıdır**.

b) Hiçbir doğru kendisine dik değildir. O hâlde düzlemde doğrular arasındaki diklik bağıntısı **yansıyan bağıntı değildir**.

■

19.4.2 Simetri Özelliği

Tanım 19.5 (Simetri Özelliği ve Simetrik Bağlılık). A kümesinde tanımlı β bağıntısındaki her (x, y) ikilisi için (y, x) ikilisi de β 'da ise, β bağıntısının A 'da **simetri özelliği** vardır veya β bağıntısı A 'da **simetrik bağıntıdır** denir.

Kısaca $(x$ ve y, A 'nın elemanları olmak üzere):

$$(\beta, A \text{ 'da simetrik bağıntıdır}) \Leftrightarrow [\forall (x, y) \in \beta \Rightarrow (y, x) \in \beta]$$

! Koşul yalnızca β 'daki ikililer için istenir

Tanımdaki $\forall (x, y) \in \beta$ ifadesi, β 'daki **bütün** (x, y) ikililerini göstermektedir. $A \times A$ 'daki bütün (x, y) ikililerinin β 'da olma zorunluluğu **yoktur**.

Yani simetriklik “her ikili bağıntıda olsun” demek değil, “bağıntıda olan her ikilinin tersi de bağıntıda olsun” demektir.

💡 Simetrikliğin kısa ölçütü

Ters bağıntı diliyle simetriklik tek satırda ifade edilir:

$$\beta \text{ simetriktir} \Leftrightarrow \beta = \beta^{-1}$$

Örnek 19.5 (Simetrik mi?). Aşağıdaki bağıntıların simetrik olup olmadığını araştırınız.

- Kuvvet kümesinde kümeler arasında alt küme bağıntısı
- Kuvvet kümesinde kümeler arasında ayrık olma bağıntısı
- Düzlemde doğrular arasındaki diklik bağıntısı
- Birimizin akrabalarının oluşturduğu kümede hala çocukları olma bağıntısı

Çözüm.

a) P bir kuvvet kümesi olmak üzere

$$\beta_1 = \{ (A, B) : A \in P, B \in P, A \subseteq B \}$$

bağıntısı P üzerinde tanımlı alt küme bağıntısıdır. $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ olan kümeler için $B \not\subseteq A$ 'dır. O hâlde $(A, B) \in \beta_1$ iken $(B, A) \notin \beta_1$ 'dir. Alt küme bağıntısı **simetrik değildir**.

b)

$$\beta_2 = \{ (A, B) : A \in P, B \in P, A \cap B = \emptyset \}$$

olsun. $(A, B) \in \beta_2$ olsun; yani $A \cap B = \emptyset$ 'dir. Kesişimin değişme özelliğinden $B \cap A = \emptyset$ olur, dolayısıyla $(B, A) \in \beta_2$ 'dir. O hâlde kümeler arasında ayrık olma bağıntısı **simetriktir**.

c) E düzlemdeki doğruların kümesi olmak üzere

$$\beta_3 = \{ (D_1, D_2) : D_1 \in E, D_2 \in E, D_1 \perp D_2 \}$$

olsun. $D_1 \perp D_2$ ise $D_2 \perp D_1$ olduğundan β_3 **simetriktir**.

d) A akrabaların kümesi olmak üzere

$$\beta_4 = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in A, y, x \text{ 'in hala çocuğudur} \}$$

olsun. y, x 'in hala çocuğu ise x, y 'nin **dayı çocuğudur**; hala çocuğu değildir. O hâlde $(x, y) \in \beta_4$ iken $(y, x) \notin \beta_4$ olduğundan β_4 **simetrik bağntı değildir**.

■

i Diklik bağntısı simetriktir ama yansıyan değildir

(c) şıkkındaki diklik bağntısı ile **Örnek 19.4**'nın (b) şıkkı birlikte okunduğunda, bir bağntının **simetrik olup yansıyan olmayabileceği** görülür.

Aynı şekilde alt küme bağntısı yansıyandır ($A \subseteq A$) ama simetrik değildir. İki özellik birbirinden bağımsızdır; bir bağntı ikisine birden, yalnız birine ya da hiçbirine sahip olabilir.