

Topoloji

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 7 Ekim 2026

İçindekiler

	Giriş	6
1	Önermeler Mantığı ve Niceleyiciler	7
1.1	Önermeler	7
1.2	Bağlaçlar: Ve, Veya, Değil	8
1.3	Gerektirme	8
1.4	Karşıt ve Ters-Karşıt	10
1.5	Denklik ve Doğruluk Tabloları	12
1.6	Niceleyiciler	14
1.7	Alıştırmalar	16
2	Kümeler ve Küme İşlemleri	19
2.1	Küme ve Eleman	19
2.2	Küme Kurucu Gösterim ve Sayı Kümeleri	21
2.3	Birleşim ve Kesişim	22
2.4	Küme Farkı ve Tümleyen	24
2.5	Eleman Yöntemiyle Küme Eşitliği İspatları	27
2.6	Alıştırmalar	29
3	İndisli Aileler ve Kartezyen Çarpım	31
3.1	İndisli Aileler	31
3.2	Genel De Morgan Kuralları	33
3.3	Genel Dağılma Kuralları	35
3.4	Kapsama, Birleşim ve Kesişim	36
3.5	Tümleyenle İlgili Özdeşlikler	36
3.6	Kartezyen Çarpım	38
3.7	Alıştırmalar	41
4	Fonksiyonlar ve Bileşke	43
4.1	Atama Kuralı	43
4.2	Fonksiyon	44
4.3	En Geniş Tanım Kümesi ve Görüntü	47
4.4	Bileşke	49
4.5	Alıştırmalar	52
5	Birebir ve Örten Fonksiyonlar, Ters Fonksiyon, Görüntü ve Ters Görüntü	54
5.1	Birebir ve Örten Fonksiyonlar	54

5.2	Ters Fonksiyon	56
5.3	Görüntü ve Ters Görüntü	58
5.4	Ters Görüntünün Küme İşlemleriyle Uyumu	60
5.5	Görüntünün Küme İşlemleriyle Uyumu	61
5.6	Görüntü ile Ters Görüntünün Art Arda Uygulanması	62
5.7	Alıştırmalar	63
6	Topoloji Tanımı ve İlk Örnekler	65
6.1	Topoloji Tanımı	65
6.2	Topolojik Uzay ve Açık Küme	66
6.3	İki Uç Örnek: En Kaba ve Ayrık Topoloji	66
6.4	Üç Elemanlı Küme Üzerindeki Topolojiler	68
6.5	Dört Elemanlı Küme Üzerindeki Örnekler	69
6.6	Gerçel Sayılar Üzerinde İki Topoloji	70
6.7	Alıştırmalar	72
7	Açık ve Kapalı Kümeler; Sonlu ve Sayılabilir Tömleyen Topolojileri	74
7.1	Açık ve Kapalı Kümeler	74
7.2	Kapalı Kümelerin Özellikleri	76
7.3	Sıfır Noktası Topolojileri	77
7.4	Sonlu Tömleyen Topolojisi	78
7.5	Sayılabilir Tömleyen Topolojisi	80
7.6	Daha İnce ve Daha Kaba Topolojiler	82
7.7	Alıştırmalar	84
8	Baz ve Alt Baz	86
8.1	Baz Tanımı	86
8.2	Bazın Ürettiği Topoloji	87
8.3	Açık Kümeler Baz Elemanlarının Birleşimidir	89
8.4	Bazlarla Topolojileri Karşılaştırma	90
8.5	Uygulamalar	91
8.6	Alt Baz	94
8.7	Alıştırmalar	95
9	Sıra Topolojisi	97
9.1	Tam Sıralı Kümeler ve Aralıklar	97
9.2	Sıra Topolojisinin Bazı	99
9.3	Gerçel Sayılar Üzerindeki Standart Topoloji	101
9.4	Düzlemde Sözlük Sırası Topolojisi	101
9.5	Pozitif Tam Sayılar Üzerindeki Sıra Topolojisi	102
9.6	Işınlar	103
9.7	Alıştırmalar	105

10	Çarpım Topolojisi	107
10.1	Çarpım Topolojisinin Tanımı	107
10.2	Bazlardan Baz	109
10.3	Düzlemin Standart Topolojisi	110
10.4	İzdüşümler	111
10.5	Çarpım Topolojisinin Alt Bazı	112
10.6	Alıştırmalar	113
11	Alt Uzay Topolojisi	115
11.1	Alt Uzay Topolojisinin Tanımı	115
11.2	Alt Uzayın Bazı	117
11.3	“Y’de Açık” ile “X’te Açık”	118
11.4	Alt Uzay ile Çarpım Topolojisinin Uyumu	119
11.5	Alt Uzay ile Sıra Topolojisinin Karşılaştırılması	120
11.6	Alıştırmalar	122

Giriş

Topoloji, uzaklık kavramına başvurmadan yalnızca “yakınlık” ve “açıklık” fikirleri üzerine kurulmuş geometrik yapıları inceler. Bir küme üzerinde hangi alt kümelerin *açık* sayılacağını söylemek, o küme üzerinde sürekliliğin, yakınsamanın ve sınırın ne demek olduğunu tek başına belirler. Bu yüzden topoloji, analizden cebire birçok alana ortak bir dil sağlar.

Bu notlar iki hazırlık kısmıyla başlar: önermeler mantığı ile küme kuramının dili ve fonksiyonların (görüntü, ters görüntü, birebir, örten) titiz bir tekrarı. Ardından topolojik uzayın tanımı, açık ve kapalı kümeler, bir topolojiyi baz ve alt bazla üretme, sıra topolojisi, çarpım topolojisi ve alt uzay topolojisi gelir. Her tanımın hemen ardından ne anlama geldiği bir cümleyle açıklanır; her teoremin ispatı adım adım, gerekçeleriyle verilir.

i Not

Bu dersin ilk iki kısmı (mantık-küme kuramı hazırlığı ve topolojik uzaylar) hazırdır ve aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Kalan kısımlar hazırlanma aşamasındadır; tamamlandıkça bu sayfadan bağlantılanacaktır.

1. Önermeler Mantığı ve Niceleyiciler

Topoloji, “açık küme”, “komşuluk”, “süreklilik” gibi kavramları kümeler ve bu kümeler hakkındaki cümlelerle kurar. “Her açık küme için...”, “öyle bir komşuluk vardır ki...”, “ $x \in U$ ise U açıktır” gibi cümleleri doğru okuyamayan ve doğru olumsuzlayamayan bir okuyucu, tanımların ne dediğini ve ispatların neden işlediğini göremez. Bu yüzden kitaba, matematiğin dili olan önermeler mantığıyla başlıyoruz.

Bu bölümde şunları öğreneceğiz: önerme ve doğruluk değeri; “ve”, “veya”, “değil” bağlaçları; “ise” ile kurulan gerektirme ve onun “veya” ile yazılışı; bir gerektirmenin karşıtı ile ters-karşıtının neden farklı şeyler olduğu; “ancak ve ancak” denkliği ve doğruluk tabloları; “her” ve “vardır” niceleyicileri ile bunların olumsuzlamaları.

Bölüm boyunca amaç, karmaşık bir kuram kurmak değil, sonraki bölümlerde her satırda kullanacağımız birkaç kuralı kesinleştirmektir. Bu kuralların hepsi doğruluk tablosu denen küçük bir çizelgeyle denetlenebilir; hiçbir şeyi ezberlemek gerekmez.

1.1 Önermeler

Matematik, doğru ya da yanlış olduğuna karar verilebilen cümlelerle çalışır. “ $2 + 3 = 5$ ” böyle bir cümledir; “Kapıyı kapat.” ya da “Bu sayı güzel.” böyle değildir.

Tanım 1.1 (Önerme ve Doğruluk Değeri). Doğru ya da yanlış olduğu kesin olarak belirlenebilen, ama aynı anda hem doğru hem yanlış olamayan bildirim cümlesine **önerme** (proposition) denir. Bir önermenin doğru (D) ya da yanlış (Y) oluşuna o önermenin **doğruluk değeri** denir. Önermeler $p, q, r, \dots$ gibi küçük harflerle gösterilir.

Yani bir önerme, “Bu doğru mu?” sorusunun tek bir cevabı olan cümledir; cevabın ne olduğunu henüz bilmiyoruz olabiliriz, ama cevap vardır ve tektir.

Örnek 1.1 (Önerme Olan ve Olmayan Cümleler). Aşağıdaki cümlelerden hangileri önermedir? Önerme olanların doğruluk değeri nedir?

- a) $2 + 3 = 5$.
- b) 7 bir çift sayıdır.
- c) $x + 1 = 3$.
- d) $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı değildir.
- e) 2’den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır.

Çözüm.

- a) Önermedir ve doğrudur.
- b) Önermedir ve yanlıştır; çünkü $7 = 2 \cdot 3 + 1$ tek sayıdır. Yanlış bir cümle de önermedir; önerme olmak için doğru olmak gerekmez.
- c) Önerme değildir. x ’in ne olduğu söylenmeden bu cümlemin doğru mu yanlış mı olduğuna karar verilemez: $x = 2$ için doğru, $x = 5$ için yanlıştır. Böyle cümleleri bölümün sonunda “açık önerme” adıyla ayrıca inceleyeceğiz.
- d) Önermedir ve doğrudur. Bu, klasik bir teoremdir; ispatını bölüm sonundaki alıştırmalarda vereceğiz. Burada önemli olan şudur: ispatı henüz bilmesek bile cümlemin doğru ya da yanlış olduğu kesindir.
- e) Önermedir. Bu cümlemin doğru mu yanlış mı olduğu bugün bilinmemektedir (Goldbach sanısı); ama bir cümlemin önerme olması için doğruluk değerini bizim bilmemiz gerekmez, yalnızca değer var ve tek olması gerekir. (“2’den büyük” koşulu gereklidir: 2 çift sayıdır ama iki asal sayının toplamı değildir, çünkü en küçük asal sayı 2’dir ve iki asalın toplamı en az 4’tür.)

1.2 Bağlaçlar: Ve, Veya, Değil

Elimizde p ve q önermeleri olsun. Bunlardan “ve”, “veya”, “değil” sözcükleriyle yeni önermeler kurabiliriz. Yeni önermenin doğruluk değeri, yalnızca p ile q ’nın doğruluk değerlerine bağlıdır; aşağıdaki üç tanım bu bağıllığı kesinleştirir.

Tanım 1.2 (Ve Bağlacı). p ve q önermeler olsun. “ p ve q ” önermesi $p \wedge q$ ile gösterilir; buna p ile q ’nın **ve bağlacıyla** (conjunction) bağlanması denir. $p \wedge q$ önermesi yalnızca p ve q ’nın **ikisi de doğru** olduğunda doğrudur; öteki her durumda yanlıştır.

Yani “ve”, iki koşulun birden sağlanmasını ister; biri bile bozulursa $p \wedge q$ yanlış olur.

Tanım 1.3 (Veya Bağlacı). p ve q önermeler olsun. “ p veya q ” önermesi $p \vee q$ ile gösterilir; buna p ile q ’nın **veya bağlacıyla** (disjunction) bağlanması denir. $p \vee q$ önermesi, p ve q ’dan **en az biri doğru** olduğunda doğrudur; yalnızca ikisi de yanlış olduğunda yanlıştır.

Yani “veya”, iki koşuldan birinin sağlanmasıyla yetinir; ikisi birden sağlanırsa da doğrudur.

⚠ Matematikte veya kapsayıcıdır

Günlük dilde “çay veya kahve” çoğu zaman “ikisinden yalnız biri” demektir. Matematikte **veya** her zaman kapsayıcıdır: $p \vee q$, “ p doğru, q doğru ya da ikisi de doğru” durumlarının hepsinde doğrudur. “İkisinden yalnız biri” demek istediğimizde bunu açıkça “ya p ya da q ” diye söyleriz; bu, ayrı bir önermedir ve $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ biçiminde yazılır. Örneğin “6, 2’ye veya 3’e bölünür” önermesi doğrudur; 6’nın ikisine de bölünmesi bunu bozmaz.

Tanım 1.4 (Değil (Olumsuzlama)). p bir önerme olsun. “ p değil” önermesi $\neg p$ ile gösterilir; buna p ’nin **olumsuzu** (negation) denir. $\neg p$, p yanlış olduğunda doğru, p doğru olduğunda yanlıştır.

Yani olumsuzlama doğruluk değerini tersine çevirir; p ile $\neg p$ ’den her zaman tam biri doğrudur.

Bir önermeyi olumsuzlarken cümleyi sözcük sözcük değil, anlamca tersine çevirmek gerekir. “7 bir çift sayıdır” önermesinin olumsuzu “7 bir çift sayı değildir”, yani “7 tek sayıdır” önermesidir. Bileşik önermelerin nasıl olumsuzlanacağını birazdan De Morgan kurallarıyla göreceğiz.

Örnek 1.2 (Bağlaçlarla Kurulan Önermelerin Değerleri). p : “3 asal sayıdır” ve q : “4 asal sayıdır” olsun. $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg q$, $\neg p \vee q$ ve $\neg(p \wedge q)$ önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

Çözüm.

Önce parçaların değerlerini belirleyelim. 3’ün 1 ve kendisinden başka böleni yoktur; p doğrudur. $4 = 2 \cdot 2$ olduğundan 4 asal değildir; q yanlıştır.

$p \wedge q$: ikisi de doğru değil (q yanlış), bu yüzden **yanlıştır**.

$p \vee q$: en az biri doğru (p doğru), bu yüzden **doğrudur**.

$\neg q$: q yanlış olduğundan **doğrudur**.

$\neg p \vee q$: $\neg p$ yanlış (p doğru) ve q yanlış; ikisi de yanlış olduğundan **yanlıştır**.

$\neg(p \wedge q)$: $p \wedge q$ yanlış olduğundan olumsuzu **doğrudur**.

■

1.3 Gerektirme

Matematikteki teoremlerin büyük çoğunluğu “eğer ... ise ...” biçimindedir: “Eğer bir fonksiyon türevlenebilirse sürekli” Bu biçimdeki önermelere gerektirme diyeceğiz. Gerektirmenin doğruluk kuralı ilk bakışta şaşırtıcıdır; bu yüzden onu özellikle dikkatle tanımlıyoruz.

Tanım 1.5 (Gerektirme). p ve q önermeler olsun. “ p ise q ” (eğer p ise q) önermesi $p \Rightarrow q$ ile gösterilir ve buna **gerektirme** (implication) denir; “ p , q ’yu gerektirir” diye okunur. p ’ye gerektirmenin **hipotezi** (öncülü), q ’ya **sonucu** (hükmü) denir. $p \Rightarrow q$ önermesi **yalnızca p doğru ve q yanlış olduğunda yanlıştır**; öteki üç durumda doğrudur.

Yani gerektirme bir söz gibidir: “ p olursa q olacak.” Bu söz yalnızca p gerçekleşip de q gerçekleşmediğinde bozulmuş sayılır; p hiç gerçekleşmediyse söz bozulmamıştır.

i Hipotez yanlışsa gerektirme doğrudur

“Eğer $1 = 2$ ise $3 = 4$ ” önermesi doğrudur; çünkü hipotez $1 = 2$ yanlıştır ve tanıma göre hipotezi yanlış olan her gerektirme doğrudur. “Eğer $1 = 2$ ise $3 = 3$ ” de doğrudur. Bu bir keyfî seçim gibi görünebilir, ama matematiğin her yerinde işe yarar: “Her $x \in \emptyset$ için $x \in A$ ” gibi cümlelerin doğru sayılması ve boş kümenin her kümenin alt kümesi olması tam bu kuraldan çıkar. Bunu bir sonraki bölümde kullanacağız.

Gerektirmenin doğruluk kuralı, aslında onu “değil” ve “veya” ile yazmamıza izin verir. Bu gözlem, sonraki bölümlerde “ $x \in A$ ise $x \in B$ ” biçimindeki cümleleri küme işlemlerine çevirirken sürekli karşımıza çıkacaktır.

Önerme 1.1 (Gerektirmenin Veya ile Yazılışı). p ve q önermeler olsun. $p \Rightarrow q$ ile $\neg p \vee q$ önermeleri, p ve q ’nun her doğruluk değeri için aynı doğruluk değerini alır.

İspat.

p ve q için dört olası durum vardır. Her birinde iki önermenin değerini hesaplayalım.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
D	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D

$\neg p$ sütunu Tanım 1.4 ile, $\neg p \vee q$ sütunu Tanım 1.3 ile (“en az biri doğruysa doğru”) doldurulur. $p \Rightarrow q$ sütunu Tanım 1.5 ile doldurulur: yalnızca ikinci satırda (p doğru, q yanlış) yanlış. Son iki sütun satır satır aynıdır; istenen budur.

■

İspatın özü: $p \Rightarrow q$ de $\neg p \vee q$ da yalnızca “ p doğru ve q yanlış” durumunda yanlıştır.

“ p ise q ” cümlesi matematik metinlerinde birkaç farklı biçimde söylenir. Bunları tanımak gerekir; çünkü “gerekli” ile “yeterli” sözcükleri sık sık birbirine karıştırılır.

Tanım 1.6 (Gerekli ve Yeterli Koşul). $p \Rightarrow q$ gerektirmesi aşağıdaki cümlelerin her biriyle aynı anlama gelir:

- “ p ise q .”
- “ p , q için **yeterlidir**” (p suffices for q , sufficient condition).
- “ p yalnızca q ise” (p only if q); yani p ’nin doğru olabilmesi için q ’nin doğru olması şarttır.
- “ q , p için **gereklidir**” (necessary condition).

Buna karşılık $q \Rightarrow p$ gerektirmesi “ q ise p ” ya da “ p , q için **gereklidir**” diye söylenir.

Yani yeterli koşul okun **başında**, gerekli koşul okun **ucunda** durur: $p \Rightarrow q$ doğruysa p ’nin olması q için yeter, q ’nin olması ise p için şarttır.

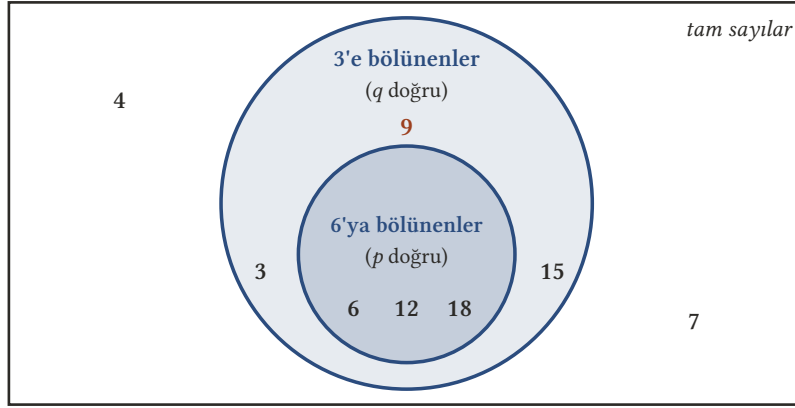
Örnek 1.3 (Gerekli mi, Yeterli mi). n bir tam sayı olsun. “ n , 6’ya bölünüyorsa n , 3’e bölünür” önermesini gerekli ve yeterli koşul diliyle söyleyiniz. 3’e bölünmek, 6’ya bölünmek için yeterli midir?

Çözüm.

p : “ n , 6’ya bölünür” ve q : “ n , 3’e bölünür” olsun. Verilen önerme $p \Rightarrow q$ ’dur ve doğrudur: $n = 6k$ ise $n = 3 \cdot (2k)$ olduğundan n , 3’e bölünür.

Tanıma göre bu şöyle de söylenir: “6’ya bölünmek, 3’e bölünmek için yeterlidir” ve “3’e bölünmek, 6’ya bölünmek için gereklidir”. İkincisi şu demektir: 6’ya bölünen her sayı zorunlu olarak 3’e bölünür; 3’e bölünmeyen bir sayı 6’ya da bölünmez.

3’e bölünmek 6’ya bölünmek için yeterli **değildir**: $n = 9$ sayısı 3’e bölünür ama 6’ya bölünmez. Yani $q \Rightarrow p$ yanlıştır. Gerektirmenin bir yönünün doğru olması öteki yönü hakkında hiçbir şey söylemez; bunu bir sonraki kesimde ayrıca vurgulayacağız.



$p \rightarrow q$ doğru: p bölgesi q bölgesinin içinde.

$q \rightarrow p$ yanlış: 9 sayısı q bölgesinde ama p bölgesinde değil.

Şekil 1.1: Gerektirmenin küme diliyle görünüşü. Dıştaki bölge q 'nin doğru olduğu tam sayıları (3'e bölünenler), içteki bölge p 'nin doğru olduğu tam sayıları (6'ya bölünenler) toplar. $p \Rightarrow q$ doğrudur, çünkü p bölgesi q bölgesinin içinde kalır; 6'ya bölünen her sayı 3'e de bölünür. Karşıt yön $q \Rightarrow p$ ise yanlıştır: 9 sayısı 3'e bölünür ama 6'ya bölünmez, yani q bölgesinde olup p bölgesinin dışındadır.

■

1.4 Karşıt ve Ters-Karşıt

Bir gerektirme verildiğinde ondan iki yeni gerektirme üretilebilir: okun yönünü çevirmek ve her iki tarafı olumsuzlayıp okun yönünü çevirmek. İkisi görünüşte benzerdir, ama biri özgün gerektirmeyle aynı şeyi söyler, öteki bambaşka bir şey söyler. Bu ayrım, ispat yazmanın temelidir.

Tanım 1.7 (Karşıt). $p \Rightarrow q$ bir gerektirme olsun. $q \Rightarrow p$ gerektirmesine $p \Rightarrow q$ 'nin **karşıtı** (converse) denir.

Yani karşıt, hipotez ile sonucun yerini değiştirir: “ p ise q ” yerine “ q ise p ”.

Tanım 1.8 (Ters-Karşıt). $p \Rightarrow q$ bir gerektirme olsun. $\neg q \Rightarrow \neg p$ gerektirmesine $p \Rightarrow q$ 'nin **ters-karşıtı** ya da **kontrapozitif** (contrapositive) denir.

Yani ters-karşıt hem yer değiştirir hem olumsuzlar: “ p ise q ” yerine “ q değilse p değil”.

Şimdi asıl önemli soruya geliyoruz: bu iki yeni gerektirme, özgün gerektirmeyle aynı doğruluk değerine sahip midir? Aşağıdaki teorem, ters-karşıt için cevabın “her zaman evet”, karşıt için “hayır” olduğunu söyler.

Teorem 1.1 (Ters-Karşıt Gerektirmeye Denktir, Karşıt Denk Değildir). p ve q önermeler olsun.

i) $p \Rightarrow q$ ile ters-karşıtı $\neg q \Rightarrow \neg p$, p ve q 'nin her doğruluk değeri için aynı doğruluk değerini alır.

ii) $p \Rightarrow q$ ile karşıtı $q \Rightarrow p$, bazı doğruluk değerleri için farklı değer alır; yani karşıt, gerektirmeden bağımsız bir önermedir.

İspat.

Dört durumun tamamını bir tabloda inceleyelim.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$q \Rightarrow p$
D	D	Y	Y	D	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D	D	Y
Y	Y	D	D	D	D	D

$\neg q \Rightarrow \neg p$ sütununu doldururken **Tanım 1.5'**yi hipotez $\neg q$ ve sonuç $\neg p$ için uyguluyoruz: bu gerektirme yalnızca $\neg q$ doğru ve $\neg p$ yanlış olduğunda, yani q yanlış ve p doğru olduğunda (ikinci satır) yanlıştır. $q \Rightarrow p$ sütunu ise yalnızca q doğru ve p yanlış olduğunda (üçüncü satır) yanlıştır.

(i) $p \Rightarrow q$ ile $\neg q \Rightarrow \neg p$ sütunları dört satırda da aynıdır: ikisi de yalnızca ikinci satırda yanlıştır.

(ii) $p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ sütunları ikinci ve üçüncü satırda farklıdır. Örneğin p doğru, q yanlışken $p \Rightarrow q$ yanlış, $q \Rightarrow p$ doğrudur. Demek ki bir gerektirmenin doğru olması karşıtının doğru olmasını da, yanlış olmasını da gerektirmez.

■

İspatın özü: gerektirme de ters-karşıtı da yalnızca “ p doğru, q yanlış” durumunda bozulur; karşıt ise “ q doğru, p yanlış” durumunda bozulur, bu farklı bir durumdur.

Teoremin (i) kısmı bir ispat yöntemi verir: $p \Rightarrow q$ 'yi ispatlamak istediğimizde, bunun yerine $\neg q \Rightarrow \neg p$ 'yi ispatlayabiliriz. Buna **ters-karşıtla ispat** denir ve bazen doğrudan ispattan çok daha kolaydır. Aşağıdaki örnek hem bunu hem de karşıt ile ters-karşıt arasındaki farkı sayılarla gösterir.

Örnek 1.4 (Karşıt ile Ters-Karşıt Farklı Şeylerdir). x bir gerçel sayı olsun; p : “ $x > 2$ ” ve q : “ $x^2 > 4$ ” alalım. $p \Rightarrow q$ gerektirmesini, karşıtını ve ters-karşıtını yazınız; her birinin doğru mu yanlış mı olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.

Gerektirme $p \Rightarrow q$: “ $x > 2$ ise $x^2 > 4$ ”. Bu doğrudur: $x > 2$ olsun. $x > 2 > 0$ olduğundan x pozitiftir; eşitsizliğin iki tarafını pozitif x ile çarparsak $x \cdot x > 2 \cdot x$, yani $x^2 > 2x$ olur. Öte yandan $x > 2$ eşitsizliğini 2 ile çarparsak $2x > 4$ olur. İkisini birleştirince $x^2 > 2x > 4$, yani $x^2 > 4$ elde ederiz.

Karşıt $q \Rightarrow p$: “ $x^2 > 4$ ise $x > 2$ ”. Bu **yanlıştır**: $x = -3$ için $x^2 = 9 > 4$ olduğundan hipotez doğrudur, ama $-3 > 2$ olmadığından sonuç yanlıştır. Hipotezi doğru, sonucu yanlış yapan tek bir sayı gerektirmeyi çürütmeye yeter.

Ters-karşıt $\neg q \Rightarrow \neg p$: “ $x^2 \leq 4$ ise $x \leq 2$ ”. Bu **doğrudur**; **Teorem 1.1'**e göre gerektirmeyle aynı doğruluk değerine sahiptir, gerektirme doğru olduğundan o da doğrudur. Doğrudan da görebiliriz: $x^2 \leq 4$ olsun ve $x \leq 2$ olmadığını, yani $x > 2$ olduğunu varsayalım; o zaman yukarıdaki hesapla $x^2 > 4$ olur, bu $x^2 \leq 4$ ile çelişir. Demek ki $x \leq 2$.

Sonuç: aynı p ve q için gerektirme ile ters-karşıt doğru, karşıt yanlıştır. Karşıt ile ters-karşıt farklı önermelerdir.

■

⚠ Karşıt ile ters-karşıt karıştırılmasın

“ p ise q ” ispatlandığında “ q ise p ” ispatlanmış olmaz; onu ayrıca ispatlamak ya da bir karşı örneklerle çürütmek gerekir. Buna karşılık “ q değilse p değil” ayrıca ispatlanmaz; o, “ p ise q ” ile aynı önermedir. Bir gerektirmeyi ters-karşıtıyla ispatlarken hipotez ile sonucun ikisini de olumsuzladığınızdan ve okun yönünü çevirdiğinizden emin olun; yalnızca yön çevirmek karşıtı verir, o da başka bir önermedir.

1.5 Denklik ve Doğruluk Tabloları

Bir gerektirme ile karşıtı ikisi birden doğruysa p ve q birbirini gerektirir; bu durumda ikisi “aynı şeyi söyler”. Matematikteki tanımların ve pek çok teoremin biçimi budur.

Tanım 1.9 (Denklik). p ve q önermeler olsun. “ p ise q ” ve “ q ise p ” önermelerinin ikisini birden söylemenin kısa yolu “ p ancak ve ancak q ” (p if and only if q , kısaca iff) cümlesidir; bu cümle $p \Leftrightarrow q$ ile gösterilir ve buna p ile q ’nin **denkliği** (equivalence) denir:

$$p \Leftrightarrow q \text{ demek } (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \text{ demektir.}$$

$p \Leftrightarrow q$ yalnızca $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ ikisi birden doğruyken doğrudur; bu da tam olarak p ile q ’nin ikisi de doğru ya da ikisi de yanlışken, yani **aynı doğruluk değerine sahip olduklarında** gerçekleşir.

Yani $p \Leftrightarrow q$ doğruysa p ile q birbirinin yerine kullanılabilir; biri doğru olduğunda öteki de doğru, biri yanlış olduğunda öteki de yanlıştır.

Tanımdaki son cümleyi gerekçelendirelim. p ile q aynı değerdeyse “ p doğru, q yanlış” durumu da “ q doğru, p yanlış” durumu da gerçekleşmez; bu yüzden $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ ikisi de doğrudur. p ile q farklı değerdeyse ya p doğru q yanlıştır (o zaman $p \Rightarrow q$ yanlış) ya da q doğru p yanlıştır (o zaman $q \Rightarrow p$ yanlış); iki gerektirmeden biri bozulur ve $p \Leftrightarrow q$ yanlış olur.

Bu bölümde şimdiye kadar yaptığımız her denetleme aynı biçimdeydi: bütün olası doğruluk değerlerini bir çizelgeye yazıp sonucu satır satır hesaplamak. Bu çizelgeye ad verelim ve beş temel bağlacı tek tabloda toplayalım.

Tanım 1.10 (Doğruluk Tablosu). Bir ya da birkaç önermeden bağlaçlarla kurulmuş bir bileşik önermenin, bileşenlerin her olası doğruluk değeri için aldığı değeri gösteren çizelgeye **doğruluk tablosu** (truth table) denir. n bileşen için tabloda 2^n satır bulunur. Beş temel bağlacın doğruluk tablosu şudur:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
D	D	Y	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	Y	Y
Y	D	D	Y	D	D	Y
Y	Y	D	Y	Y	D	D

İki bileşik önerme, doğruluk tablolarının son sütunları satır satır aynıysa **mantıkça denktir**; bu, aralarındaki denkliğin her satırda doğru olması demektir.

Yani doğruluk tablosu, “bu iki önerme aynı şeyi mi söylüyor?” sorusunu düşünmeden, sayarak cevaplandırmanın yoludur.

Tabloyu okurken şu satırlara özellikle bakın: $p \wedge q$ yalnızca ilk satırda doğrudur, $p \vee q$ yalnızca son satırda yanlıştır, $p \Rightarrow q$ yalnızca ikinci satırda yanlıştır, $p \Leftrightarrow q$ ise p ile q ’nin aynı olduğu birinci ve dördüncü satırlarda doğrudur.

Sık kullanılan birkaç denklik vardır; bunları bir kez ispatlayıp sonra serbestçe kullanacağız. Özellikle “ve”nin ve “veya”nın olumsuzlanmasını söyleyen De Morgan kuralları, sonraki bölümde birleşim ve kesişimin tümleyenini hesaplarken aynen karşımıza çıkacaktır.

Önerme 1.2 (Temel Mantık Denklikleri). p ve q önermeler olsun. Aşağıdaki denklikler p ve q ’nin her doğruluk değeri için doğrudur:

- i) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (çift olumsuzlama);
- ii) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (De Morgan kuralı);
- iii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (De Morgan kuralı);
- iv) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$;
- v) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$;
- vi) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

İspat.

Bir denkliğin her durumda doğru olması, iki tarafın her satırda aynı değeri alması demektir ([Tanım 1.10](#)). Bu yüzden her madde için iki tarafın sütunlarını karşılaştırmak yeterlidir.

(i) p doğruysa $\neg p$ yanlış, $\neg(\neg p)$ doğrudur; p yanlışsa $\neg p$ doğru, $\neg(\neg p)$ yanlıştır. İki durumda da $\neg(\neg p)$ ile p aynı değerdedir.

(ii) ve (iii) için tek tablo kuralım.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
D	D	Y	Y	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	D	D	D	Y	Y
Y	D	D	Y	Y	D	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	Y	D	D	Y	D	D

$\neg(p \wedge q)$ ile $\neg p \vee \neg q$ sütunları aynıdır: ikisi de yalnızca ilk satırda yanlıştır. Bu (ii)'yi verir. $\neg(p \vee q)$ ile $\neg p \wedge \neg q$ sütunları da aynıdır: ikisi de yalnızca son satırda doğrudur. Bu (iii)'ü verir.

(iv) [Önerme 1.1](#)'da ispatlandı.

(v) Denklikleri zincirleyerek gösterelim; her adımda bir tarafı, ona denk olduğuna bildiğimiz bir ifadeyle değiştiriyoruz, bu doğruluk değerini değiştirmez:

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Birinci adım (iv), ikinci adım (iii) (burada $\neg p$ ve q önermelerine uygulandı), üçüncü adım (i) ile gerekçelenir.

(vi) [Teorem 1.1](#)'in (i) kısmıdır. Denklikleri zincirleyerek de görülebilir:

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg(\neg q) \vee \neg p \Leftrightarrow q \vee \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q).$$

Birinci adım (iv), ikinci adım (i), üçüncü adım “veya”nın iki tarafının yer değiştirmesi ([Tanım 1.3](#)'daki kural iki bileşene aynı biçimde bakar), dördüncü adım yine (iv) ile gerekçelenir.

■

İspatın özü: “ve”yi olumsuzlamak “veya” verir, “veya”yı olumsuzlamak “ve” verir; gerektirmeyi olumsuzlamak ise “hipotez doğru ve sonuç yanlış” verir.

💡 Bir gerektirmeyi çürütmek için tek karşı örnek yeter

Beşinci madde (v) şunu söyler: “ p ise q ” önermesinin yanlış olması, p 'nin doğru ve q 'nın yanlış olduğu bir durumun var olması demektir. Bu yüzden “ $x^2 > 4$ ise $x > 2$ ” önermesini çürütmek için $x = -3$ örneği yeterliydi. Bir gerektirmeyi ispatlamak içinse bütün durumları kapsayan bir akıl yürütme gerekir; örnekler ne kadar çok olursa olsun ispat yerine geçmez.

Bir denklik ispatlamak için tanım gereği iki gerektirme ispatlanır; bunlardan birini ters-karşıtıyla ispatlamak çoğu zaman işi kolaylaştırır.

Örnek 1.5 (Bir Tam Sayı ile Karesinin Çiftliği). n bir tam sayı olsun. n çifttir ancak ve ancak n^2 çifttir. Bunu ispatlayınız.

Çözüm.

p : “ n çifttir” ve q : “ n^2 çifttir” olsun. [Tanım 1.9](#)'e göre $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ ikisini de ispatlamalıyız.

$p \Rightarrow q$. n çift olsun; o zaman bir k tam sayısı için $n = 2k$ yazılır. Buradan $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ olur ve $2k^2$ bir tam sayı olduğundan n^2 çifttir.

$q \Rightarrow p$. Bu yönü doğrudan göstermek zordur; çünkü “ n^2 çift” bilgisinden n hakkında hemen bir şey çıkmaz. Ters-karşıtıını ispatlayalım: $\neg p \Rightarrow \neg q$, yani “ n tekse n^2 tektir”. n tek olsun; bir k tam sayısı için $n = 2k + 1$ yazılır. Buradan

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

olur ve $2k^2 + 2k$ bir tam sayı olduğundan n^2 tektir. Teorem 1.1'e göre $\neg p \Rightarrow \neg q$ ile $q \Rightarrow p$ aynı doğruluk değerine sahiptir; ilkinin ispatladığımıza göre ikincisi de doğrudur. İki yön de doğru olduğundan $p \Leftrightarrow q$ doğrudur. ■

1.6 Niceleyiciler

" $x + 1 = 3$ " cümlesinin önerme olmadığını gördük; x belirlenmeden doğruluk değeri yoktur. Böyle bir cümleyi önermeye çevirmenin iki yolu vardır: x 'e belirli bir değer vermek ya da "her x için" / "bir x vardır ki" demek. İkinci yol, matematiğin neredeyse bütün tanımlarında kullanılır.

Tanım 1.11 (Açık Önerme). X bir küme olsun. x değişkenine bağlı olan ve x yerine X 'in her belirli elemanı konduğunda bir önermeye dönüşen $p(x)$ ifadesine X üzerinde bir **açık önerme** (open sentence, predicate) denir. X 'e açık önermenin **evreni** (domain) denir.

Yani açık önerme, boşluğu doldurulmayı bekleyen bir cümledir; boşluğa X 'ten bir eleman yazınca doğru ya da yanlış bir önerme çıkar. Örneğin $p(x)$: " $x + 1 = 3$ ", $\mathbb{R}$ üzerinde bir açık önermedir; $p(2)$ doğru, $p(5)$ yanlıştır.

Tanım 1.12 (Her ve Vardır Niceleyicileri). $p(x)$, X üzerinde bir açık önerme olsun.

- "**Her** $x \in X$ için $p(x)$ " cümlesi $\forall x \in X, p(x)$ ile gösterilir; $\forall$ sembolüne **evrensel niceleyici** (universal quantifier, "for all / for each") denir. Bu önerme, X 'in **her** elemanı a için $p(a)$ doğru olduğunda doğrudur; $p(a)$ 'nın yanlış olduğu **en az bir** $a \in X$ varsa yanlıştır.
- " $p(x)$ olacak biçimde bir $x \in X$ **vardır**" cümlesi $\exists x \in X, p(x)$ ile gösterilir; $\exists$ sembolüne **varlıksal niceleyici** (existential quantifier, "there exists") denir. Bu önerme, $p(a)$ 'nın doğru olduğu **en az bir** $a \in X$ olduğunda doğrudur; X 'in **hiçbir** elemanı için $p(a)$ doğru değilse yanlıştır.

Evren açıkça belliyse kısaca $\forall x, p(x)$ ve $\exists x, p(x)$ yazılır.

Yani $\forall$ "istisnasız hepsi", $\exists$ "en az biri" demektir; $\forall$ 'ı bozmak için tek bir istisna, $\exists$ 'ı sağlamak için tek bir örnek yeter.

i Boş evren üzerinde niceleyiciler

$X = \emptyset$ ise $\forall x \in X, p(x)$ önermesi, $p(x)$ ne olursa olsun **doğrudur**; çünkü yanlış olması için p 'yi bozan bir eleman gerekir, oysa $\emptyset$ 'nin elemanı yoktur. Aynı nedenle $\exists x \in X, p(x)$ önermesi **yanlıştır**; doğru olması için örnek olacak bir eleman gerekir. Bu, "hipotez yanlışsa gerektirme doğrudur" kuralının niceleyicilerdeki karşılığıdır ve bir sonraki bölümde $\emptyset \subseteq A$ olduğunu gösterirken kullanılacaktır.

Örnek 1.6 (Niceleyicili Önergelerin Doğruluk Değerleri). Aşağıdaki önergelerin doğru mu yanlış mı olduğunu gerekçesiyle belirleyiniz.

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$.
- $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.

Çözüm.

- Doğrudur. $x \geq 0$ ise $x^2 = x \cdot x$ iki negatif olmayan sayının çarpımıdır, dolayısıyla $x^2 \geq 0$. $x < 0$ ise $-x > 0$ ve $x^2 = (-x)(-x) > 0$. Her gerçel sayı bu iki durumdan birine girer; istisna yoktur.
- Yanlıştır. (a)'ya göre her gerçel sayının karesi 0'dan küçük değildir; oysa $-1 < 0$. Demek ki $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan hiçbir gerçel sayı yoktur.
- Doğrudur. Tek bir örnek yeter: $n = 1$ için $1^2 = 1$. ($n = 0$ da bir örnektir; "vardır" için birden çok örnek olması sorun değildir.)

- d)** Doğrudur. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $n = 0$ ise $0 \geq 0$ doğrudur. $n \geq 1$ ise eşitsizliğin iki tarafını $n \geq 1 > 0$ ile çarparak $n \cdot n \geq n \cdot 1$, yani $n^2 \geq n$ buluruz. Her doğal sayı bu iki durumdan birine girer.
- e)** Yanlıştır. $x = 0$ için $x^2 = 0$ olur ve $0 > 0$ yanlıştır. “Her x için” önermesini çürütmek için bu tek istisna yeter; (a)’daki “ $\geq$ ” işaretinin “ $>$ ” olması bütün önermeyi bozmuştur.

■

Niceleyicilerin en çok hata yapılan yanı olumsuzlanmalarıdır. “Her öğrenci sınavı geçti” cümlesinin olumsuzu “Hiçbir öğrenci sınavı geçmedi” değil, “En az bir öğrenci sınavı geçemedi” cümlesidir. Aşağıdaki teorem bunu kesinleştirir; topolojide “açık değildir”, “sürekli değildir”, “yığılma noktası değildir” gibi cümlelerin hepsi bu teoremle açılır.

Teorem 1.2 (Niceleyicilerin Olumsuzlanması). $p(x)$, X üzerinde bir açık önerme olsun.

- i) $\neg (\forall x \in X, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X, \neg p(x)$.
 ii) $\neg (\exists x \in X, p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X, \neg p(x)$.
 iii) $\forall x \in X, p(x) \Leftrightarrow \neg (\exists x \in X, \neg p(x))$ ve $\exists x \in X, p(x) \Leftrightarrow \neg (\forall x \in X, \neg p(x))$.

İspat.

Her denklik için iki tarafın aynı durumlarda doğru olduğunu gösteriyoruz.

(i) Sol taraf, [Tanım 1.4](#)’e göre, $\forall x \in X, p(x)$ önermesinin yanlış olması demektir. [Tanım 1.12](#)’e göre bu önerme tam olarak, $p(a)$ ’nın yanlış olduğu en az bir $a \in X$ bulunduğu yanlıştır. “ $p(a)$ yanlış” ile “ $\neg p(a)$ doğru” aynı şeydir ([Tanım 1.4](#)). Demek ki sol taraf, $\neg p(a)$ ’nın doğru olduğu en az bir $a \in X$ bulunması demektir; bu da yine [Tanım 1.12](#)’e göre $\exists x \in X, \neg p(x)$ önermesinin doğru olması demektir. Her adım “ancak ve ancak” biçiminde olduğundan iki taraf her durumda aynı değeri alır.

(ii) Sol taraf, $\exists x \in X, p(x)$ önermesinin yanlış olması demektir. [Tanım 1.12](#)’e göre bu önerme tam olarak, X ’in hiçbir elemanı için p doğru olmadığında yanlıştır; yani her $a \in X$ için $p(a)$ yanlış, başka deyişle her $a \in X$ için $\neg p(a)$ doğru olduğunda. Bu ise $\forall x \in X, \neg p(x)$ önermesinin doğru olması demektir. Yine her adım iki yönlü olduğundan iki taraf aynı değeri alır.

(iii) Önce ikinci denkliği gösterelim. (i) maddesi her açık önerme için geçerlidir; onu p yerine $\neg p$ açık önermesine uygulayalım:

$$\neg (\forall x \in X, \neg p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X, \neg \neg p(x) \Leftrightarrow \exists x \in X, p(x);$$

son adımda [Önerme 1.2](#)’in (i) maddesi ($\neg \neg p(a) \Leftrightarrow p(a)$, her a için) kullanıldı. İki ucu yer değiştirerek okursak bu, (iii)’teki ikinci denkliktir. Birinci denklik için aynı işlemi (ii) ile yapalım; (ii)’yi $\neg p$ açık önermesine uygularsak

$$\neg (\exists x \in X, \neg p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X, \neg \neg p(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, p(x)$$

elde ederiz; son adım yine çift olumsuzlama kuralıdır. Bu da, uçları yer değiştirerek okununca, (iii)’teki birinci denkliktir.

■

İspatın özü: “her” önermesini bozmak için bir istisna yeter, bu yüzden olumsuzu bir “vardır”dır; “vardır” önermesini bozmak için hiçbir örneğin olmaması gerekir, bu yüzden olumsuzu bir “her”dir.

🔍 Olumsuzlama tarifi

Niceleyicilerle yazılmış bir önermeyi olumsuzlamak için soldan sağa ilerleyin: her $\forall$ ’ı $\exists$ yapın, her $\exists$ ’ı $\forall$ yapın, en içteki açık önermeyi olumsuzlayın. Örneğin

$$\neg (\forall x \in X, \exists y \in Y, p(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \in X, \forall y \in Y, \neg p(x, y).$$

Bu, [Teorem 1.2](#)’nin önce dıştaki, sonra içteki niceleyiciye uygulanmasıdır. İçteki önerme bir gerektirme ise [Önerme 1.2](#)’in (v) maddesi kullanılır: $\neg(p \Rightarrow q)$ yerine $p \wedge \neg q$ yazılır.

Örnek 1.7 (Niceleyicili Önergeleri Olumsuzlama). Aşağıdaki önergelerin olumsuzlarını, önünde $\neg$ bulunmayacak biçimde yazınız ve hangisinin doğru olduğunu belirleyiniz.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

- b) Her $x \in A$ için $x \in B$. (Burada A ve B verilmiş iki kümedir.)
 c) Her $x \in \mathbb{R}$ için bir $y \in \mathbb{R}$ vardır ki $y > x$.
 d) $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 2 \Rightarrow x^2 > 4)$.

Çözüm.

- a) Teoremin (i) maddesiyle olumsuz: $\exists x \in \mathbb{R}, \neg(x^2 \geq 0)$, yani $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$. Özgün önerme doğrudur (Örnek 1.6), dolayısıyla olumsuzu yanlıştır: karesi negatif olan gerçel sayı yoktur.
 b) Olumsuz: “Bir $x \in A$ vardır ki $x \notin B$.” Burada $x \notin B, \neg(x \in B)$ demektir. Bir sonraki bölümde “her $x \in A$ için $x \in B$ ” cümlesi “ A, B ’nin alt kümesidir” diye adlandırılacak; bu örnek, alt küme olmamanın “ A ’da olup B ’de olmayan bir eleman vardır” demek olduğunu söyler. Doğruluk değeri A ve B ’ye bağlıdır.
 c) Önerme $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ biçimindedir. Tarife göre olumsuz: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \leq x$; sözle: “Bir $x \in \mathbb{R}$ vardır ki her $y \in \mathbb{R}$ için $y \leq x$ ”, yani “gerçel sayıların en büyüğü vardır”. Özgün önerme doğrudur: verilen x için $y = x + 1$ alınırsa $y > x$ olur. Dolayısıyla olumsuzu yanlıştır.
 d) Tarife göre: $\exists x \in \mathbb{R}, \neg(x > 2 \Rightarrow x^2 > 4)$; gerektirmenin olumsuzu için (v) maddesiyle $\exists x \in \mathbb{R}, (x > 2 \wedge x^2 \leq 4)$. Sözle: “2’den büyük olup karesi 4’ü aşmayan bir gerçel sayı vardır.” Örnek 1.4’nda özgün gerektirmenin her x için doğru olduğunu gösterdik; dolayısıyla olumsuz yanlıştır.

Son olarak, iki niceleyicinin sırasının önemli olduğunu görelim. “Her x için bir y vardır” ile “bir y vardır ki her x için” aynı şey değildir: birincisinde y, x ’e bağlı olarak seçilebilir; ikincisinde tek bir y bütün x ’ler için iş görmelidir.

Örnek 1.8 (Niceleyicilerin Sırası). Aşağıdaki iki önermenin doğruluk değerlerini belirleyiniz:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.
 b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$.

Çözüm.

- a) Doğrudur. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ verilsin; $y = x + 1$ seçelim. $1 > 0$ olduğundan $y = x + 1 > x$ ’tir. y ’nin x ’e bağlı olarak seçilmesine izin vardır; çünkü $\exists y, \forall x$ ’in içindedir.
 b) Yanlıştır. Olumsuzunu ispatlayalım; tarife göre olumsuz $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \leq x$ ’tir. Herhangi bir $y \in \mathbb{R}$ verilsin; $x = y + 1$ seçelim. O zaman $y < y + 1 = x$, dolayısıyla $y \leq x$ olur. Olumsuz doğru olduğundan (b) yanlıştır: bütün gerçel sayılardan büyük tek bir gerçel sayı yoktur.
 İki önerme yalnızca niceleyicilerin sırasıyla ayrılır, ama biri doğru öteki yanlıştır. Bu yüzden bir tanımı okurken “hangisi önce geliyor, hangisi hangisine bağlı seçilebiliyor” sorusu hep sorulmalıdır.

i Aynı türden niceleyicilerin sırası değişebilir

$\forall x, \forall y$ ile $\forall y, \forall x$ aynı şeyi söyler; $\exists x, \exists y$ ile $\exists y, \exists x$ de öyle. Sıra yalnızca bir $\forall$ ile bir $\exists$ yer değiştirdiğinde önem kazanır. Ayrıca $\exists y, \forall x, p(x, y)$ doğruysa $\forall x, \exists y, p(x, y)$ de doğrudur: bütün x ’ler için iş gören tek y , her x için ayrı ayrı da iş görür. Ters, örnekte gördüğümüz gibi, doğru olmak zorunda değildir.

1.7 Alıştırmalar

- Alıştırma 1.1 (Bölüm Alıştırmaları).** a) p : “12, 3’e bölünür” ve q : “12 asal sayıdır” olsun. $p \wedge q, p \vee q, p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p$ ve $p \Leftrightarrow q$ önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.
 b) p, q, r önermeler olsun. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ önermesinin p, q, r ’nin her doğruluk değeri için doğru olduğunu gösteriniz.
 c) “Bir tam sayı 4’e bölünüyorsa çifttir” gerektirmesinin karıştını ve ters-karıştını yazınız; üç önermeden hangilerinin doğru olduğunu belirleyiniz.
 d) n bir tam sayı olsun. “ $3n + 1$ çiftse n tek” önermesini ispatlayınız.
 e) Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirleyiniz: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$; $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)$.

f) “Her $\varepsilon > 0$ için bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq 1$ ve $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ” önermesinin olumsuzunu, önünde $\neg$ bulunmayacak biçimde yazınız.

g) p, q, r önermeler olsun. $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow r)$ denkleğinin her durumda doğru olduğunu, temel denklikleri zincirleyerek gösteriniz.

h) $\sqrt{2}$ ’nin rasyonel bir sayı olmadığını ispatlayınız. (Örnek 1.5’yi kullanınız.)

Çözüm.

a) $12 = 3 \cdot 4$ olduğundan p doğrudur; 12 ’nin 2 gibi böleni olduğundan q yanlıştır. Doğruluk tablosunun “ p doğru, q yanlış” satırına bakalım: $p \wedge q$ yanlış; $p \vee q$ doğru; $p \Rightarrow q$ yanlış (hipotez doğru, sonuç yanlış); $\neg p \Rightarrow q$ doğru (hipotez $\neg p$ yanlış); $\neg q \Rightarrow \neg p$ yanlış (hipotez $\neg q$ doğru, sonuç $\neg p$ yanlış; zaten $p \Rightarrow q$ ile aynı değerdedir); $p \Leftrightarrow q$ yanlış (p ile q farklı değerde).

b) Önerme bir gerektirmedir; Tanım 1.5’ye göre yanlış olması için hipotezi $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ doğru ve sonucu $p \Rightarrow r$ yanlış olmalıdır. Sonucun yanlış olduğunu varsayalım: o zaman p doğru ve r yanlıştır. Şimdi q ’ya bakalım. q doğruysa $q \Rightarrow r$ gerektirmesi, hipotezi doğru sonucu yanlış olduğundan, yanlıştır. q yanlışsa $p \Rightarrow q$ gerektirmesi, hipotezi doğru sonucu yanlış olduğundan, yanlıştır. İki durumda da $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ ’nin bir bileşeni yanlış, dolayısıyla kendisi yanlıştır. Demek ki “hipotez doğru, sonuç yanlış” durumu hiçbir zaman gerçekleşmez; önerme sekiz durumun hepsinde doğrudur. (Bu, gerektirmenin geçişli olduğunu söyler: p ’den q ’ya, q ’dan r ’ye gidilebiliyorsa p ’den r ’ye gidilebilir.)

c) p : “ n , 4’e bölünür”, q : “ n çifttir”. Gerektirme $p \Rightarrow q$ doğrudur: $n = 4k$ ise $n = 2(2k)$ çifttir. Karşıt $q \Rightarrow p$: “ n çiftse 4’e bölünür”; yanlıştır, çünkü $n = 2$ çifttir ama 4’e bölünmez. Ters-karşıt $\neg q \Rightarrow \neg p$: “ n tekse 4’e bölünmez”; Teorem 1.1’e göre gerektirmeyle aynı değerdedir, dolayısıyla doğrudur. Doğrudan da görülür: n tekse 2’ye bile bölünmez, 4’e hiç bölünmez.

d) Ters-karşıtı ispatlayalım: “ n çiftse $3n + 1$ tektir”. n çift olsun; $n = 2k$ yazılır. $3n + 1 = 6k + 1 = 2(3k) + 1$ olur ve $3k$ tam sayı olduğundan $3n + 1$ tektir. Ters-karşıt doğru olduğundan Teorem 1.1’e göre özgün gerektirme de doğrudur.

e) Birincisi doğrudur: verilen x için $y = -x$ alınır, $x + (-x) = 0$. İkincisi yanlıştır: olumsuz $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$ ’dır ve doğrudur, çünkü verilen y için $x = 1 - y$ alınırsa $x + y = 1 \neq 0$ olur. Üçüncüsü doğrudur: $x < y$ olan herhangi iki gerçel sayı verilsin; $z = \frac{x+y}{2}$ alalım. $x < y$ olduğundan $2x = x + x < x + y$, yani $x < \frac{x+y}{2} = z$; benzer biçimde $x + y < y + y = 2y$, yani $z < y$. Dolayısıyla $x < z < y$. Hipotezin $(x < y)$ yanlış olduğu çiftlerde gerektirme kendiliğinden doğrudur.

f) Önerme $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq 1 \wedge \frac{1}{n} < \varepsilon)$ biçimindedir. Tarife göre niceleyiciler çevrilir ve içteki “ve” De Morgan kuralıyla (Önerme 1.2, (ii)) olumsuzlanır:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n < 1 \vee \frac{1}{n} \geq \varepsilon \right).$$

Sözle: “Öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki her doğal sayı n için ya $n < 1$ ’dir ya da $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ ’dur.” $n < 1$ olan tek doğal sayı $n = 0$ ’dır ve onun için ilk seçenek zaten doğrudur; $\frac{1}{n}$ ifadesi yalnızca $n \geq 1$ için okunur. Bu yüzden olumsuz daha kısa olarak şöyle de söylenir: “Öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki $n \geq 1$ olan her doğal sayı için $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ ’dur.”

Özgün önerme doğrudur: $\varepsilon > 0$ verilsin; $\frac{1}{\varepsilon}$ sayısından büyük bir $n \geq 1$ doğal sayısı seçilirse $n > \frac{1}{\varepsilon}$, yani $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olur. (Her gerçel sayıdan büyük bir doğal sayı bulunabildiğini burada kullanıyoruz.) Dolayısıyla olumsuz yanlıştır.

g) Her adımda Önerme 1.2’in bir maddesini uyguluyoruz:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (q \vee r) &\Leftrightarrow \neg p \vee (q \vee r) & (\text{iv}) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee r & (\text{"veya"} \text{ için parantezlerin yeri değişmez: her iki taraf da yalnızca üçü de yanlışken yanlıştır}) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg(\neg q)) \vee r & (\text{i}) \\ &\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \vee r & (\text{ii}), p \text{ ve } \neg q \text{ için} \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \Rightarrow r & (\text{iv}), \text{hipotez } p \wedge \neg q \text{ için.} \end{aligned}$$

Denklikler zincirlendiğinden ilk ifade ile son ifade her durumda aynı doğruluk değerini alır. (Bu denklik, “ p ise q veya r ” biçimindeki bir teoremi ispatlarken “ p doğru ve q yanlış olsun, r ’yi gösterelim” diye başlamanıza izin verir.)

h) İspatlamak istediğimiz önerme p : “ $\sqrt{2}$ rasyonel değildir”. Bunun yerine $\neg p$ ’nin yanlış olduğunu göstereceğiz; [Tanım 1.4](#)’e göre $\neg p$ yanlışsa p doğrudur. $\neg p$ doğru olsun, yani $\sqrt{2}$ rasyonel olsun. O zaman $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ olacak biçimde a, b tam sayıları vardır ve $b \neq 0$ ’dır. Pay ile paydanın ortak çarpanlarını sadeleştirerek a ile b ’nin ikisinin birden çift olmadığını varsayabiliriz; çünkü ikisi de çiftse ikisini de 2’ye bölerek yeniden yazarız ve bu işlem sonlu adımda biter ($| b |$ her adımda küçülür).

İki tarafın karesini alırsak $2 = \frac{a^2}{b^2}$, yani $a^2 = 2b^2$ olur. b^2 bir tam sayı olduğundan a^2 çifttir. [Örnek 1.5](#)’ye göre “ n^2 çiftse n çifttir”; dolayısıyla a çifttir, bir c tam sayısı için $a = 2c$ yazılır. Bunu yerine koyarsak $4c^2 = 2b^2$, yani $b^2 = 2c^2$ olur; b^2 çifttir ve yine [Örnek 1.5](#)’ye göre b çifttir. Böylece a ile b ’nin ikisi de çift çıktı; bu, ikisinin birden çift olmadığı varsayımıyla çelişir.

Demek ki $\neg p$ doğru olamaz; $\neg p$ yanlıştır ve p doğrudur: $\sqrt{2}$ rasyonel değildir. (Bu, [Örnek 1.1](#)’nin (d) şıkında doğruluğunu kullandığımız önermedir.)

■

Artık cümleleri kesin biçimde kurabildiğimize göre, matematiğin nesnelerini tanımlamaya başlayabiliriz: [Kümeler ve Küme İşlemleri](#).

2. Kümeler ve Küme İşlemleri

Önermeler Mantığı ve Niceleyiciler bölümünde önermeleri “ve”, “veya”, “değil” bağlaçlarıyla birleştirmeyi, gerektirme ve denkliği, bir gerektirmenin karşıtını ve ters-karşıtını öğrendik. Orada kurduğumuz dil, bu bölümde matematiğin en temel nesnesi olan **küme** için kullanılacak: bir kümenin tanımı “ $x \in A$ ” biçimindeki önermelerle yapılır ve kümeler hakkındaki her iddia sonunda böyle önermeler arasındaki bir bağıntıya indirgenir.

Bu bölümde önce küme, eleman, eşitlik ve alt küme kavramlarını kesin biçimde tanımlayacağız. Ardından boş küme ve kuvvet kümesi gelecek. Sonra iki kümeden yeni kümeler üreten işlemleri (birleşim, kesişim, fark, tümleyen) tanımlayıp bu işlemlerin birbiriyle nasıl uyduğunu gösteren kuralları ispatlayacağız; De Morgan kuralları bunların en önemlisidir.

Bölümün son kısmı bir yöntem üzerinedir: iki kümenin eşit olduğunu göstermenin en güvenilir yolu, bir kümenin her elemanının ötekinde de olduğunu iki yönde göstermektir. Bu “eleman yöntemi”, kitabın geri kalanında açık kümeler, kapanışlar ve ters görüntülerle ilgili hemen her ispatın iskeletini oluşturacaktır.

2.1 Küme ve Eleman

Modern matematikte “küme” (set) ve “elemanı olmak” (element of) kavramları tanımlanmadan, temel kavramlar olarak kabul edilir. Sezgisel olarak bir küme, nesnelerden oluşan bir topluluktur; kümeler $A, B, C, \dots$ gibi büyük harflerle gösterilir.

Tanım 2.1 (Eleman). A bir küme olsun. x nesnesi, A kümesini oluşturan nesnelerden biriye x ’e A ’nın bir **elemanı** denir ve bu

$$x \in A \quad \text{ya da} \quad A \ni x$$

ile gösterilir. x ’in A ’nın elemanı olmaması, yani $\neg(x \in A)$ önermesi, $x \notin A$ ile gösterilir.

Yani $x \in A$ bir önermedir: ya doğrudur ya yanlıştır ve $x \notin A$ onun değildir.

Tanım 2.2 (Kümelerin Eşitliği). İki A ve B kümesi tam olarak aynı elemanlara sahipse bu kümelere **eşit** denir ve $A = B$ yazılır. $\neg(A = B)$ önermesi $A \neq B$ ile gösterilir.

Yani bir kümeyi belirleyen tek şey elemanlarıdır; elemanların yazılış sırası ya da bir elemanın kaç kez yazıldığı önemsizdir: $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 3\}$.

Tanım 2.3 (Alt Küme). A ve B iki küme olsun. Her x için

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

gerektirmesi doğruysa A ’ya B ’nin bir **alt kümesi** (subset) denir ve $A \subseteq B$ ya da $B \supseteq A$ yazılır. Bu durum “ A, B tarafından kapsanır” diye de okunur.

Yani $A \subseteq B$ demek, A ’nın hiçbir elemanının B ’nin dışında kalmaması demektir.

Tanım 2.4 (Öz Alt Küme). $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise, yani A, B ’nin alt kümesi olduğu hâlde B ’ye eşit değilse, A ’ya B ’nin bir **öz alt kümesi** (proper subset) denir ve $A \subset B$ yazılır.

Yani $A \subset B$ ise B ’de A ’da bulunmayan en az bir eleman vardır.

i Kapsama sembolleri

Bazı kitaplarda alt küme için $A \subset B$ yazılır ve bu sembol eşitliğe izin verir; öz alt küme ayrıca belirtilir. Bu kitapta karışıklığı önlemek için eşitliğe izin veren kapsama için her zaman $\subseteq$, öz alt küme için $\subsetneq$ kullanacağız.

Küme eşitliği “aynı elemanlara sahip olmak” diye tanımlandı; ama iki kümenin aynı elemanlara sahip olduğunu doğrudan denetlemek çoğu zaman güçtür. Aşağıdaki önerme eşitliği iki kapsamaya böler ve bu bölümün sonunda göreceğimiz eleman yönteminin temelidir.

Önerme 2.1 (Eşitlik İki Yönlü Kapsamadır). A ve B iki küme olsun. O zaman

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A).$$

İspat.

($\Rightarrow$) $A = B$ olsun. Tanım gereği A ve B tam olarak aynı elemanlara sahiptir. Özel olarak A 'nın her elemanı B 'nin de elemanıdır; yani $x \in A \Rightarrow x \in B$, dolayısıyla $A \subseteq B$. Aynı biçimde B 'nin her elemanı A 'nın da elemanıdır; yani $x \in B \Rightarrow x \in A$, dolayısıyla $B \subseteq A$.

($\Leftarrow$) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olsun. Olmayana ergi yöntemiyle $A \neq B$ olduğunu varsayalım. Eşitlik tanımına göre bu, A ile B 'nin aynı elemanlara sahip olmaması demektir; öyleyse iki durumdan biri gerçekleşir: ya A 'nın B 'de olmayan bir elemanı vardır ya da B 'nin A 'da olmayan bir elemanı vardır. Birinci durumda $x \in A$ ve $x \notin B$ olan bir x vardır; bu, $A \subseteq B$ varsayımıyla çelişir. İkinci durumda $x \in B$ ve $x \notin A$ olan bir x vardır; bu da $B \subseteq A$ varsayımıyla çelişir. Her iki durum da çelişki verdiği için $A \neq B$ olamaz; yani $A = B$.

■

İspatın özü: eşitlik, iki yöndeki kapsamanın birlikte doğru olmasından başka bir şey değildir.

Tanım 2.5 (Boş Küme). Hiç elemanı olmayan kümeye **boş küme** (empty set) denir ve $\emptyset$ ya da $\{ \}$ ile gösterilir.

Yani her x için $x \in \emptyset$ önermesi yanlıştır. Eşitlik tanımına göre “hiç elemanı olmayan” yalnızca bir küme vardır; bu yüzden “boş küme” diyoruz.

⚠ Boş küme ile boş kümeyi içeren küme aynı değildir

$\emptyset$ kümesinin hiç elemanı yoktur; $\{\emptyset\}$ kümesinin ise tam bir elemanı vardır, o da $\emptyset$ 'dir. Dolayısıyla $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Benzer biçimde $\emptyset \in \{\emptyset\}$ doğru, $\emptyset \in \emptyset$ yanlıştır.

Alt küme bağıntısının üç temel özelliği vardır. Bunlar basittir ama ileride sürekli kullanılacağı için ispatlarını tam olarak yazalım; özellikle birincisi, önceki bölümdeki “öncülü yanlış gerektirme doğrudur” kuralının ilk somut uygulamasıdır.

Önerme 2.2 (Alt Küme Bağıntısının Temel Özellikleri). A , B ve C kümeler olsun.

- (i) $\emptyset \subseteq A$.
- (ii) $A \subseteq A$.
- (iii) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$; yani “ $\subseteq$ ” bağıntısı geçişlidir.

İspat.

(i) Göstermemiz gereken, her x için $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ gerektirmesinin doğru olduğudur. Boş kümenin hiç elemanı olmadığından $x \in \emptyset$ önermesi her x için yanlıştır. Bir gerektirme yalnızca öncülü doğru, sonucu yanlış olduğunda yanlıştır; öncül hiçbir zaman doğru olmadığından gerektirme her x için doğrudur. Dolayısıyla $\emptyset \subseteq A$.

(ii) Her x için $x \in A \Rightarrow x \in A$ gerektirmesi, $p \Rightarrow p$ biçiminde olduğundan her zaman doğrudur. Dolayısıyla $A \subseteq A$.

(iii) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ olsun; $x \in A$ alalım. $A \subseteq B$ olduğundan $x \in B$; $B \subseteq C$ olduğundan $x \in C$. Böylece $x \in A \Rightarrow x \in C$ gösterildi; yani $A \subseteq C$.

■

Tanım 2.6 (Kuvvet Kümesi). A bir küme olsun. A 'nın bütün alt kümelerinin oluşturduğu topluluk bir kümedir; bu kümeye A 'nın **kuvvet kümesi** (power set) denir ve $\mathcal{P}(A)$ ile gösterilir. Yani

$$B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

Yani kuvvet kümesinin elemanları sayılar ya da noktalar değil, kümelerdir; $\mathcal{P}(A)$ “kümelerin kümesi”dir. **Önerme 2.2**'in (i) ve (ii) maddelerine göre her A kümesi için $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ ve $A \in \mathcal{P}(A)$ olur; yani kuvvet kümesi hiçbir zaman boş değildir.

Örnek 2.1 (Üç Elemanlı Kümenin Kuvvet Kümesi). $A = \{a, b, c\}$ olsun. $\mathcal{P}(A)$ kümesini yazınız.

Çözüm.

A 'nın alt kümelerini eleman sayısına göre sıralayalım. Sıfır elemanlı tek alt küme $\emptyset$ 'dir. Bir elemanlı alt kümeler $\{a\}, \{b\}, \{c\}$; iki elemanlı alt kümeler $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$; üç elemanlı tek alt küme A 'nın kendisidir. Dolayısıyla

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}.$$

Toplam $8 = 2^3$ alt küme vardır. Genel olarak n elemanlı bir kümenin 2^n alt kümesi olur; çünkü bir alt küme kurarken her elemanı “al” ya da “alma” diye iki biçimde seçebiliriz.

■

2.2 Küme Kurucu Gösterim ve Sayı Kümeleri

Bir kümeyi elemanlarını tek tek listeleyerek yazmak, elemanlar sonsuz çoklukta olduğunda mümkün değildir. Bunun yerine bir kümeyi, elemanlarını belirleyen bir özellik ile tanımlarız.

Tanım 2.7 (Küme Kurucu Gösterim). A bir küme ve p , A 'nın her elemanının ya sahip olduğu ya da olmadığı bir özellik olsun. A 'nın p özelliğine sahip elemanlarının tümü A 'nın bir alt kümesidir ve bu alt küme

$$\{x \in A : p(x)\}$$

ile gösterilir. Bu gösterim “ A 'nın $p(x)$ özelliğini sağlayan x elemanlarının kümesi” diye okunur.

Yani iki nokta üst üstenin solu elemanların nereden alındığını, sağı hangi koşulu sağlaması gerektiğini söyler; bazı kitaplarda iki nokta yerine düşey çizgi kullanılır: $\{x \in A \mid p(x)\}$. Örneğin

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ çift sayıdır}\}$$

yazılışı “ A , x çift tam sayı olacak biçimdeki bütün x 'lerin kümesidir” diye okunur ve $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ kümesini verir.

Bu kitap boyunca aşağıdaki sayı kümelerini kullanacağız. Gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'yi, sıralama ve dört işlemiyle birlikte bilindiği gibi kabul ediyoruz.

i Standart sayı kümeleri

- $\mathbb{Z}$: bütün pozitif ve negatif tam sayılar ile sıfırın kümesi, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$: doğal sayılar kümesi. Bu kitapta $0 \in \mathbb{N}$ kabul edilir.
- $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$: pozitif tam sayılar kümesi. Bazı yerlerde $\mathbb{N}^+$ ile de gösterilir.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ ve } q \in \mathbb{N}^*\}$: rasyonel sayılar kümesi.
- $\mathbb{R}$: gerçel sayılar kümesi.

Bu kümeler arasında $\mathbb{N}^* \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ kapsamaları vardır.

Gerçek sayıların en çok kullanacağımız alt kümeleri aralıklardır. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{(kapalı aralık),} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(açık aralık),} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, && [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ (yarı açık aralıklar) .}
\end{aligned}$$

Açık uç için bazı kitaplarda ters köşeli ayraç kullanılır: $(a, b) =]a, b[$ ve $(a, b] =]a, b]$. Sınırsız aralıklar da aynı biçimde tanımlanır; örneğin $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ ve $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$. Burada ∞ bir sayı değil, “sınır yok” anlamına gelen bir simgedir; bu yüzden ∞ tarafındaki uç her zaman açıktır.

2.3 Birleşim ve Kesişim

İki kümeden yeni küme üretmenin en temel iki yolu, elemanlarını bir araya toplamak ve ortak elemanlarını almaktır.

Tanım 2.8 (Birleşim ve Kesişim). A ve B iki küme olsun.

A ile B 'nin **birleşimi** (union), A 'ya veya B 'ye ait olan bütün elemanların kümesidir ve $A \cup B$ ile gösterilir:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}.$$

A ile B 'nin **kesişimi** (intersection), hem A 'ya hem B 'ye ait olan elemanların kümesidir ve $A \cap B$ ile gösterilir:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}.$$

Yani $x \in A \cup B$ önermesi $(x \in A) \vee (x \in B)$ önermesiyle, $x \in A \cap B$ önermesi $(x \in A) \wedge (x \in B)$ önermesiyle aynıdır; birleşim “veya” bağlacının, kesişim “ve” bağlacının küme dilindeki karşılığıdır.

⚠ Birleşimdeki veya kapsayıcıdır

Birleşim tanımındaki “veya”, önceki bölümdeki $\vee$ bağlacıdır: x her iki kümeye birden ait olsa da $x \in A \cup B$ doğrudur. Günlük dildeki “ya A ya B ” biçimindeki dışlayıcı anlam burada geçerli değildir. Dolayısıyla $A \cap B$ kümesinin elemanları da $A \cup B$ kümesinin elemanlarıdır.

Örnek 2.2 (Aralıkların Birleşimi ve Kesişimi). $A = (-3, -1]$ ve $B = [-2, 1]$ olsun. $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini bulunuz.

Çözüm.

Her iki küme de $\mathbb{R}$ 'nin alt kümesidir; sayı doğrusunda A , -3 'ten (hariç) -1 'e (dâhil) kadar; B , -2 'den (dâhil) 1 'e (dâhil) kadar uzanır.

Birleşim: bir x gerçel sayısı $A \cup B$ kümesindedir ancak ve ancak $-3 < x \leq -1$ veya $-2 \leq x \leq 1$ ise. $-3 < x \leq -1$ olan her x zaten $-3 < x \leq 1$ sağlar; $-2 \leq x \leq 1$ olan her x de $-3 < x \leq 1$ sağlar. Tersine $-3 < x \leq 1$ olsun: $x \leq -1$ ise $x \in A$, $x > -1$ ise $-2 \leq -1 < x \leq 1$ olduğundan $x \in B$. Dolayısıyla

$$A \cup B = (-3, 1],$$

yani -3 ucu açık, 1 ucu kapalı bir aralık.

Kesişim: $x \in A \cap B$ olması için $-3 < x \leq -1$ ve $-2 \leq x \leq 1$ birlikte sağlanmalıdır. İki alt sınırın büyüğü -2 (dâhil), iki üst sınırın küçüğü -1 (dâhil) olduğundan bu koşullar $-2 \leq x \leq -1$ koşuluna denktir. Dolayısıyla

$$A \cap B = [-2, -1].$$

■

Örnek 2.3 (Boş Küme ile Birleşim ve Kesişim). Her A kümesi için $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cap \emptyset = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Birinci eşitlik: $x \in A \cup \emptyset$ olsun. Tanım gereği $x \in A$ veya $x \in \emptyset$; ikincisi hiçbir x için doğru olmadığından $x \in A$ olmak zorundadır. Böylece $A \cup \emptyset \subseteq A$. Tersine $x \in A$ ise “ $x \in A$ veya $x \in \emptyset$ ” önermesi doğrudur (ilk bileşeni doğru), yani $x \in A \cup \emptyset$; böylece $A \subseteq A \cup \emptyset$. **Önerme 2.1**’ya göre $A \cup \emptyset = A$. İkinci eşitlik: $x \in A \cap \emptyset$ olsaydı $x \in A$ ve $x \in \emptyset$ olurdu; ama $x \in \emptyset$ hiçbir x için doğru değildir. Öyleyse $A \cap \emptyset$ kümesinin hiç elemanı yoktur; yani $A \cap \emptyset = \emptyset$.

■

Tanım 2.9 (Ayrık Kümeler). $A \cap B = \emptyset$ ise, yani A ile B ’nin ortak hiçbir elemanı yoksa, A ve B kümelerine **ayrık** (disjoint) kümeler denir.

Yani ayrık iki kümeden birinin hiçbir elemanı ötekinde bulunmaz. Örneğin $[-3, -1]$ ile $(-1, 5]$ ayrıktır; $(-3, -1]$ ile $[-2, 1]$ ise ayrık değildir, çünkü kesişimleri $[-2, -1] \neq \emptyset$.

Birleşim ve kesişimin, sayılardaki toplama ve çarpmaya benzeyen cebirsel özellikleri vardır. Bu özelliklerin hepsi, tanımdaki “veya” ve “ve” bağlaçlarının önceki bölümde gördüğümüz mantık kurallarından gelir. Sonraki bölümlerde ispatları kısaltmak için bunları bir kez tam olarak ispatlıyoruz.

Önerme 2.3 (Birleşim ve Kesişimin Temel Özellikleri). A, B, C ve D kümeler olsun.

- (1) Her A ve B için $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$; aynı biçimde $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.
- (2) $A \subseteq C$ ve $B \subseteq D$ ise $A \cup B \subseteq C \cup D$ ve $A \cap B \subseteq C \cap D$.
- (3) Her iki işlem de

- **idempotenttir:** $A \cup A = A = A \cap A$;
- **birleşmelidir:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ve $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
- **değişmelidir:** $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$.

Ayrıca kesişim birleşim üzerine, birleşim de kesişim üzerine **dağılır**:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

İspat.

Bütün maddelerde şu ilkeyi kullanacağız: iki küme, elemanı olma koşulları mantıkça denk olan önermelerle verilmişse eşittir; çünkü o zaman tam olarak aynı elemanlara sahiptirler.

(1) $x \in A \cap B$ olsun. Tanım gereği $x \in A$ ve $x \in B$; özel olarak $x \in A$. Böylece $A \cap B \subseteq A$. Şimdi $x \in A$ olsun. O zaman “ $x \in A$ veya $x \in B$ ” önermesi doğrudur, yani $x \in A \cup B$. Böylece $A \subseteq A \cup B$. B için aynı akıl yürütme, “ve” ile “veya” bağlaçlarının değişmeli olmasıyla, $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ verir.

(2) $A \subseteq C$ ve $B \subseteq D$ olsun. Önce birleşim: $x \in A \cup B$ alalım. O zaman $x \in A$ veya $x \in B$. $x \in A$ ise $A \subseteq C$ olduğundan $x \in C$; $x \in B$ ise $B \subseteq D$ olduğundan $x \in D$. Her iki durumda da $x \in C$ veya $x \in D$, yani $x \in C \cup D$. Böylece $A \cup B \subseteq C \cup D$. Şimdi kesişim: $x \in A \cap B$ alalım. O zaman $x \in A$ ve $x \in B$; kapsamalardan $x \in C$ ve $x \in D$, yani $x \in C \cap D$. Böylece $A \cap B \subseteq C \cap D$.

(3) İdempotenslik: $x \in A \cup A \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in A) \Leftrightarrow x \in A$; çünkü $p \vee p \Leftrightarrow p$ bir mantık kuralıdır. Aynı biçimde $x \in A \cap A \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in A) \Leftrightarrow x \in A$; çünkü $p \wedge p \Leftrightarrow p$. Dolayısıyla $A \cup A = A = A \cap A$.

Birleşmelilik: p, q, r sırasıyla $x \in A, x \in B, x \in C$ önermeleri olsun. O zaman

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap C;$$

ortadaki denklik “veya” bağlacının birleşme kuralıdır. Kesişim için aynı zincir “ve” bağlacının birleşme kuralı $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$ ile yazılır.

Değişmelilik: $x \in A \cup B \Leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \Leftrightarrow x \in B \cup A$ ve $x \in A \cap B \Leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \Leftrightarrow x \in B \cap A$; çünkü $\vee$ ve $\wedge$ değişmelidir.

Dağılıma: Önce iki mantık kuralını hatırlayalım: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ve $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Birincisi şöyle görülür: sol taraf, p doğru ve q ile r ’den en az biri doğru olduğunda doğrudur; bu da tam olarak “ p ve q ” ile “ p ve r ” önermelerinden en az birinin doğru olması demektir. İkincisi için: p doğruysa iki taraf da doğrudur; p yanlışsa sol taraf $q \wedge r$ ’ye, sağ taraf da $q \wedge r$ ’ye indirgenir. Her iki kural doğruluk tablosuyla da denetlenebilir. Bunlarla

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ve

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

elde edilir. Her iki zincirde de sol ve sağ uçtaki kümeler aynı elemanlara sahip olduğundan eşittirler.

■

İspatın özü: birleşim ve kesişimin her cebirsel kuralı, “veya” ve “ve” bağlaçlarının aynı adlı mantık kuralıdır.

Birleşimlilik sayesinde $A \cup B \cup C$ ve $A \cap B \cap C$ yazarken ayrıca kullanmak gerekmez; hangi sırayla hesaplanırsa hesaplanırsın sonuç aynıdır.

Alt küme bağıntısı, birleşim ve kesişimle iki ayrı biçimde ifade edilebilir. Bu, ileride “ $A \subseteq B$ ” göstermek yerine daha kolay olan “ $A \cap B = A$ ” ya da “ $A \cup B = B$ ” eşitliğini göstermemize izin verecektir.

Teorem 2.1 (Alt Küme Olmanın Denk Koşulları). A ve B kümeler olsun. Aşağıdaki üç önerme birbirine denktir:

- (i) $A \subseteq B$;
- (ii) $A \cap B = A$;
- (iii) $A \cup B = B$.

İspat.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) zincirini ispatlayacağız; bu zincir üç önermenin de birbirine denk olduğunu verir; çünkü zincirdeki herhangi bir önermeden başlayıp okları izleyerek öteki ikisine ulaşılır. İspat boyunca [Önerme 2.3](#)’ün maddelerini kullanacağız.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $A \subseteq B$ olsun. $A \subseteq A$ ve $A \subseteq B$ olduğundan (2) maddesi $A \cap A \subseteq A \cap B$ verir; idempotentlikle $A \cap A = A$, yani $A \subseteq A \cap B$. Öte yandan (1) maddesine göre $A \cap B \subseteq A$. İki kapsama birlikte, [Önerme 2.1](#)’ya göre $A \cap B = A$ verir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $A \cap B = A$ olsun. (1) maddesine göre $A \cap B \subseteq B$; dolayısıyla $A = A \cap B \subseteq B$. Şimdi $A \subseteq B$ ve $B \subseteq B$ olduğundan (2) maddesi $A \cup B \subseteq B \cup B$ verir; idempotentlikle $B \cup B = B$, yani $A \cup B \subseteq B$. Öte yandan (1) maddesine göre $B \subseteq A \cup B$. İki kapsama birlikte $A \cup B = B$ verir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $A \cup B = B$ olsun. (1) maddesine göre $A \subseteq A \cup B$; varsayımla $A \cup B = B$ olduğundan $A \subseteq B$. Aynı sonuç eleman diliyle de görülebilir: $x \in A$ ise “ $x \in A$ veya $x \in B$ ” doğrudur, yani $x \in A \cup B = B$; dolayısıyla $x \in B$.

■

İspatın özü: $A \subseteq B$ iken A ’nın B ile kesişimi A ’yı küçültmez, B ile birleşimi B ’yi büyütmez.

2.4 Küme Farkı ve Tümleyen

Birleşim ve kesişim “veya” ile “ve” bağlaçlarının karşılığıydı; şimdi “değil” bağlacının karşılığını tanımlayacağız.

Tanım 2.10 (Küme Farkı). A ve B iki küme olsun. A ’nın B ’de bulunmayan elemanlarından oluşan kümeye A ile B ’nin **farkı** (difference) denir ve $A \setminus B$ ile gösterilir:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}.$$

Bu kümeye bazen B ’nin A ’ya göre **tümleyeni** (complement of B relative to A) de denir. Bazı kitaplarda $A \setminus B$ yerine $A - B$ yazılır.

Yani $A \setminus B$, A ’dan B ’nin elemanlarını “çıkararak” elde edilir; B ’nin A ’da olmayan elemanları hesaba katılmaz. Özel olarak $A \setminus B \subseteq A$ her zaman doğrudur.

Çoğu zaman bütün kümeler sabit bir X kümesinin alt kümeleri olarak düşünülür; örneğin bu kitapta X bir topolojik uzay olacak ve bütün açık, kapalı kümeler X ’in alt kümeleri olacaktır. Bu durumda X ’e **evrensel küme** denir ve fark işlemi sadeleşir.

Tanım 2.11 (Tümleyen). X bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. A ’nın X ’e göre tümleyeni $X \setminus A$ kümesine kısaca A ’nın **tümleyeni** (complement) denir ve A^c ile gösterilir:

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

$X \setminus A$ ile A^c aynı kümeyi gösterir; hangi X 'e göre tümleyen alındığı bağlamdan anlaşılmadığında $X \setminus A$ yazılışı tercih edilir.

Yani A^c , evrensel kümede A 'nın dışında kalan her şeydir. Tümleyen alt kümeyi evrensel kümeye “tamamlar”: A ile A^c birlikte X 'i verir ve ortak elemanları yoktur; bunu birazdan ispatlayacağız. Tümleyenin en temel üç özelliği, “değil” bağlacının kurallarından doğrudan gelir.

Önerme 2.4 (Tümleyenin Temel Özellikleri). X bir küme, $A, B \subseteq X$ olsun.

- (1) Her $x \in X$ için $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$.
- (2) $(A^c)^c = A$; yani $X \setminus (X \setminus A) = A$.
- (3) $A \setminus B = A \cap B^c = \{x \in X : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$.

İspat.

(1) $x \in X$ olsun. Tümleyen tanımına göre $x \in A^c \Leftrightarrow (x \in X \text{ ve } x \notin A)$; $x \in X$ zaten doğru olduğundan bu, $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$ demektir. İki tarafın değilini alırsak, $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ kuralıyla, $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$ elde edilir.

(2) $x \in (A^c)^c$ olsun. Tanım gereği $x \in X$ ve $x \notin A^c$; (1) maddesine göre $x \in A$. Böylece $(A^c)^c \subseteq A$. Tersine $x \in A$ olsun. $A \subseteq X$ olduğundan $x \in X$; (1) maddesine göre $x \notin A^c$; dolayısıyla $x \in X \setminus A^c = (A^c)^c$. Böylece $A \subseteq (A^c)^c$. **Önerme 2.1**'ya göre $(A^c)^c = A$.

(3) $x \in A \setminus B$ olsun. Tanım gereği $x \in A$ ve $x \notin B$. $A \subseteq X$ olduğundan $x \in X$; öyleyse $x \in X$ ve $x \notin B$, yani $x \in B^c$. Dolayısıyla $x \in A$ ve $x \in B^c$, yani $x \in A \cap B^c$. Tersine $x \in A \cap B^c$ olsun. O zaman $x \in A$ ve $x \in B^c$; ikincisi $x \notin B$ verir. Dolayısıyla $x \in A$ ve $x \notin B$, yani $x \in A \setminus B$. İki kapsama eşitliği verir.

■

Bu önermenin (3) maddesi çok kullanışlıdır: fark işlemini kesişim ve tümleyene çevirir, böylece birleşim ve kesişim için ispatladığımız kurallar farkı içeren eşitliklerde de kullanılabilir.

Örnek 2.4 (Aralıkların Farkı). $A = [-3, -1]$ ve $B = (-1, 5]$ olsun. $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini bulunuz.

Çözüm.

$x \in A$ olsun; o zaman $x \leq -1$. B 'nin her elemanı -1 'den büyük olduğundan $x \notin B$. Yani A 'nın hiçbir elemanı B 'de değildir: A 'nın her elemanı $A \setminus B$ kümesindedir, dolayısıyla $A \subseteq A \setminus B$. Öte yandan $A \setminus B \subseteq A$ her zaman doğrudur. Böylece

$$A \setminus B = A = [-3, -1].$$

Aynı biçimde $x \in B$ ise $x > -1$, dolayısıyla $x \notin A$; bu da $B \setminus A = B = (-1, 5]$ verir. Sonuç şaşırtıcı değildir: A ile B ayrıktır ($A \cap B = \emptyset$) ve ayrık kümelerde fark almak hiçbir şeyi çıkarmaz. Kesişimin boş olduğunu görmek için $x \in A \cap B$ olsaydı hem $x \leq -1$ hem $x > -1$ olacağını, bunun ise imkânsız olduğunu söylemek yeter.

■

Şimdi bu bölümün en önemli kurallarına geliyoruz. Önceki bölümde “ p veya q ” önermesinin değilinin “ p değil ve q değil” olduğunu, “ p ve q ” önermesinin değilinin “ p değil veya q değil” olduğunu görmüştük. Fark işlemi “değil” bağlacının küme karşılığı olduğundan bu kurallar kümelerle taşınır; sonuç, birleşimi kesişime, kesişimi birleşime çeviren De Morgan kurallarıdır.

Teorem 2.2 (De Morgan Kuralları). A, B ve C herhangi kümeler olsun. O zaman

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

İspat.

Her iki eşitliği de iki yönlü kapsamayla göstereceğiz. İspatın anahtarı, önceki bölümdeki mantık kurallarının eleman diline çevrilmiş hâlidir:

$$x \notin B \cup C \Leftrightarrow \neg ((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow (x \notin B) \text{ ve } (x \notin C),$$

$$x \notin B \cap C \Leftrightarrow \neg ((x \in B) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow (x \notin B) \text{ veya } (x \notin C).$$

Birinci eşitlik. $x \in A \setminus (B \cup C)$ olsun. Fark tanımına göre $x \in A$ ve $x \notin B \cup C$. Yukarıdaki ilk kurala göre $x \notin B$ ve $x \notin C$. Öyleyse hem “ $x \in A$ ve $x \notin B$ ” hem “ $x \in A$ ve $x \notin C$ ” doğrudur; yani $x \in A \setminus B$ ve $x \in A \setminus C$, dolayısıyla $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Böylece

$$A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Ters kapsama için $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ olsun. O zaman $x \in A \setminus B$ ve $x \in A \setminus C$; yani $x \in A$, $x \notin B$ ve $x \notin C$. İlk kurala göre $x \notin B$ ve $x \notin C$ birlikte $x \notin B \cup C$ demektir. Dolayısıyla $x \in A$ ve $x \notin B \cup C$, yani $x \in A \setminus (B \cup C)$. Böylece

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C).$$

İki kapsama Önerme 2.1’ya göre birinci eşitliği verir.

İkinci eşitlik. $x \in A \setminus (B \cap C)$ olsun. O zaman $x \in A$ ve $x \notin B \cap C$; ikinci kurala göre $x \notin B$ veya $x \notin C$. Öyleyse “ $x \in A$ ve $(x \notin B \text{ veya } x \notin C)$ ” doğrudur; “ve” bağlacının “veya” üzerine dağılma kuralıyla bu, “ $(x \in A \text{ ve } x \notin B)$ veya $(x \in A \text{ ve } x \notin C)$ ” demektir. Yani $x \in A \setminus B$ veya $x \in A \setminus C$, dolayısıyla $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Böylece

$$A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Ters kapsama için $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ olsun. O zaman $x \in A \setminus B$ veya $x \in A \setminus C$; yani “ $(x \in A \text{ ve } x \notin B)$ veya $(x \in A \text{ ve } x \notin C)$ ”. Dağılma kuralını tersine uygularsak “ $x \in A$ ve $(x \notin B \text{ veya } x \notin C)$ ” elde ederiz. İkinci kurala göre $x \notin B$ veya $x \notin C$ olması $x \notin B \cap C$ demektir. Dolayısıyla $x \in A$ ve $x \notin B \cap C$, yani $x \in A \setminus (B \cap C)$. Böylece

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C).$$

İki kapsama ikinci eşitliği verir.

■

İspatın özü: “birleşimde olmamak” her ikisinde de olmamak, “kesişimde olmamak” en az birinde olmamaktır; fark işlemi bu “olmamak”ları A ’nın içine taşır.

De Morgan kuralları en çok evrensel bir küme içinde, tümleyen diliyle kullanılır.

Sonuç 2.1 (Tümleyen için De Morgan Kuralları). X bir küme ve $A, B \in \mathcal{P}(X)$ olsun. O zaman

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

İspat.

Teorem 2.2’i X, A, B kümelerine uygulayalım; yani teoremdaki A yerine X, B yerine A, C yerine B alalım. Birinci kural

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

verir. Tümleyen tanımına göre sol taraf $(A \cup B)^c$, sağ taraf $A^c \cap B^c$ ’dir; bu birinci eşitliktir. İkinci kural

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

verir; bu da $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ demektir.

■

Yani birleşimin tümleyeni tümleyenlerin kesişimi, kesişimin tümleyeni tümleyenlerin birleşimidir. Topolojide açık kümelerin tümleyenleri kapalı kümelerdir; De Morgan kuralları, açık kümelerle ilgili her özelliği kapalı kümelerle taşımamızı sağlayacak.

Tümleyenle ilgili sık kullanılan beş eşitliği bir önermede topluyoruz. Bunların bir kısmı fark işlemini birleşimle, bir kısmı kapsamay kesim ve birleşimle ilişkilendirir.

Önerme 2.5 (Tümleyenin Özellikleri). X bir küme ve $A, B \in \mathcal{P}(X)$ olsun. O zaman

- (1) $A \cup A^c = X$ ve $A \cap A^c = \emptyset$;
- (2) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$;
- (3) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ ve $A \cup B = (B \setminus A) \cup A$;
- (4) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c \Leftrightarrow B \subseteq A^c$;
- (5) $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A$.

İspat.

(1) Önce $A \cup A^c = X$. $A \subseteq X$ ve $A^c \subseteq X$ olduğundan **Önerme 2.3**'ün (2) maddesiyle $A \cup A^c \subseteq X \cup X = X$. Tersine $x \in X$ olsun. $x \in A$ önermesi ya doğru ya yanlıştır. Doğruysa $x \in A \cup A^c$. Yanlıştır $x \notin A$; $x \in X$ olduğundan $x \in A^c$, dolayısıyla yine $x \in A \cup A^c$. Böylece $X \subseteq A \cup A^c$ ve eşitlik elde edilir. Şimdi $A \cap A^c = \emptyset$. Bir $x \in A \cap A^c$ olsaydı $x \in A$ ve $x \in A^c$ olurdu; ikincisi $x \notin A$ demektir. $x \in A$ ile $x \notin A$ aynı anda doğru olamaz. Öyleyse $A \cap A^c$ kümesinin hiç elemanı yoktur; yani $A \cap A^c = \emptyset$.

(2) $A \subseteq X$ olduğundan **Teorem 2.1**'a göre $A \cap X = A$. (1) maddesinden $X = B \cup B^c$. Dağılma kuralı ve **Önerme 2.4**'ün (3) maddesiyle

$$A = A \cap X = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

Birleşimin değişmeli olmasıyla $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

(3) (2) maddesini A ve B 'nin rolleri değişmiş olarak yazarsak $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ elde ederiz. O zaman birleşimlilik ve değişimlilikle

$$A \cup B = A \cup ((B \setminus A) \cup (B \cap A)) = (A \cup (A \cap B)) \cup (B \setminus A).$$

$A \cap B \subseteq A$ olduğundan **Teorem 2.1**'a göre $A \cup (A \cap B) = A$. Dolayısıyla $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup A$. İlk eşitlik için A ile B 'nin rollerini değiştirelim: $B \cup A = (A \setminus B) \cup B$; sol taraf değişimlilikle $A \cup B$ 'dir.

(4) Önce $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$ denkleğini gösterelim.

($\Rightarrow$) $A \cap B = \emptyset$ olsun ve olmayana ergi için $A \not\subseteq B^c$ olduğunu varsayalım. O zaman A 'nın B^c 'de olmayan en az bir a elemanı vardır: $a \in A$ ve $a \notin B^c$. **Önerme 2.4**'ün (1) maddesine göre $a \notin B^c$ olması $a \in B$ demektir. Öyleyse $a \in A$ ve $a \in B$, yani $a \in A \cap B = \emptyset$; bu bir çelişkidir, çünkü boş kümenin elemanı yoktur. Dolayısıyla $A \subseteq B^c$.

($\Leftarrow$) $A \subseteq B^c$ olsun. $B \subseteq B$ ile birlikte **Önerme 2.3**'ün (2) maddesi $A \cap B \subseteq B^c \cap B$ verir. (1) maddesine göre $B^c \cap B = B \cap B^c = \emptyset$; dolayısıyla $A \cap B \subseteq \emptyset$. Öte yandan $\emptyset \subseteq A \cap B$ her zaman doğrudur. İki kapsama $A \cap B = \emptyset$ verir.

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A^c$ denkleği için kesişimin değişmeli olduğunu kullanalım: $A \cap B = \emptyset$ ile $B \cap A = \emptyset$ aynı önermedir ve az önce ispatlanan denklik A ile B 'nin rolleri değişmiş olarak $B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A^c$ verir.

(5) Önce $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subseteq B$ denkleğini gösterelim.

($\Rightarrow$) $A \cup B = X$ olsun ve $x \in A^c$ alalım. $A^c \subseteq X = A \cup B$ olduğundan $x \in A$ veya $x \in B$. Ama $x \in A^c$ olması $x \notin A$ demektir; öyleyse $x \in B$. Böylece $A^c \subseteq B$.

($\Leftarrow$) $A^c \subseteq B$ olsun. $A \subseteq A$ ile birlikte **Önerme 2.3**'ün (2) maddesi $A \cup A^c \subseteq A \cup B$ verir; (1) maddesine göre sol taraf X 'tir, yani $X \subseteq A \cup B$. Öte yandan $A \subseteq X$ ve $B \subseteq X$ olduğundan $A \cup B \subseteq X \cup X = X$. İki kapsama $A \cup B = X$ verir.

$A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subseteq A$ denkleği, birleşimin değişmeli olmasıyla, ispatlanan denkleğin A ile B 'nin rolleri değişmiş hâlidir.

■

Önermenin (5) maddesi (4) maddesinden De Morgan ile de çıkarılabilir. $A \cup B \subseteq X$ olduğundan $A \cup B = X$ olması, X 'in $A \cup B$ dışında hiç elemanı olmaması, yani $(A \cup B)^c = \emptyset$ olması demektir; **Sonuç 2.1**'e göre bu, $A^c \cap B^c = \emptyset$ demektir; (4) maddesine göre bu, $A^c \subseteq (B^c)^c = B$ ile denktir. Bu, aynı sonucun bazen birkaç yoldan elde edilebileceğinin iyi bir örneğidir.

2.5 Eleman Yöntemiyle Küme Eşitliği İspatları

Bu bölümde iki tür ispat gördük. Birincisi **cebirsal yöntem**: bilinen eşitlikleri (dağılma, De Morgan, $A \cup A^c = X$ gibi) art arda uygulayarak bir kümeyi adım adım ötekine dönüştürmek; **Önerme 2.5**'nin (2) maddesinin ispatı böyleydi. İkincisi **eleman yöntemi**: $A = B$ göstermek için **Önerme 2.1**'ya dayanarak

- rastgele bir $x \in A$ alıp $x \in B$ olduğunu göstermek ($A \subseteq B$), sonra
- rastgele bir $x \in B$ alıp $x \in A$ olduğunu göstermek ($B \subseteq A$);

Teorem 2.2'in ispatı böyleydi. Eleman yöntemi her zaman işler, çünkü doğrudan tanıma dayanır; yeni bir kavramla ilk karşılaşıldığında başvurulacak yöntem budur. Aşağıdaki örnekler bu yöntemi daha önce cebirsel olarak ispatladığımız eşitlikler üzerinde uygular; iki yöntemi karşılaştırmak için ikisini de görmek yararlıdır.

Örnek 2.5 (Bir Kümeyi Fark ve Kesişime Ayırmak). X boş olmayan bir küme ve $A, B \in \mathcal{P}(X)$ olsun. Eleman yöntemiyle

$$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

($\subseteq$) $x \in B$ olsun. $x \in A$ önermesi ya doğru ya yanlıştır.

- $x \in A$ ise $x \in B$ ve $x \in A$, yani $x \in B \cap A$.
- $x \notin A$ ise $x \in B$ ve $x \notin A$, yani $x \in B \setminus A$.

Her iki durumda da $x \in B \setminus A$ veya $x \in B \cap A$; dolayısıyla $x \in (B \setminus A) \cup (B \cap A)$. Böylece $B \subseteq (B \setminus A) \cup (B \cap A)$.

($\supseteq$) $x \in (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ olsun. O zaman $x \in B \setminus A$ veya $x \in B \cap A$. Birinci durumda fark tanımına göre $x \in B$ (ve $x \notin A$); ikinci durumda kesişim tanımına göre $x \in B$ (ve $x \in A$). Her iki durumda da $x \in B$. Böylece $(B \setminus A) \cup (B \cap A) \subseteq B$.

İki kapsama eşitliği verir. Aynı eşitliğin cebirsel ispatı, $B \setminus A = B \cap A^c$ yazılıp dağılma kuralı uygulanarak elde edilir:

$$(B \setminus A) \cup (B \cap A) = (B \cap A^c) \cup (B \cap A) = B \cap (A^c \cup A) = B \cap X = B.$$

■

Örnek 2.6 (Birleşimi Ayrık Parçalara Ayırmak). X boş olmayan bir küme ve $A, B \in \mathcal{P}(X)$ olsun. Eleman yöntemiyle

$$A \cup B = (B \setminus A) \cup A$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

($\subseteq$) $x \in A \cup B$ olsun; yani $x \in A$ veya $x \in B$.

- $x \in A$ ise x , sağ taraftaki birleşimin ikinci parçasındadır: $x \in (B \setminus A) \cup A$.
- $x \notin A$ ise, $x \in A$ veya $x \in B$ olduğundan, $x \in B$ olmak zorundadır. O zaman $x \in B$ ve $x \notin A$, yani $x \in B \setminus A$; dolayısıyla $x \in (B \setminus A) \cup A$.

Böylece $A \cup B \subseteq (B \setminus A) \cup A$.

($\supseteq$) $x \in (B \setminus A) \cup A$ olsun. $x \in B \setminus A$ ise $x \in B$, dolayısıyla $x \in A \cup B$. $x \in A$ ise doğrudan $x \in A \cup B$. Böylece $(B \setminus A) \cup A \subseteq A \cup B$.

İki kapsama eşitliği verir. Bu ayrışımın önemli bir özelliği, parçalarının ayrık olmasıdır: $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$, çünkü $B \setminus A$ 'nın hiçbir elemanı A 'da değildir. Yani her birleşim, ayrık iki kümenin birleşimi olarak yazılabilir.

■

Eleman yöntemi yalnızca eşitlikler için değil, kapsamalar arasındaki denklikler için de kullanılır.

Örnek 2.7 (Kesişimle ve Birleşimle Kapsama Kuralları). X boş olmayan bir küme ve $A, B, C \subseteq X$ olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız.

- $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ ve } A \subseteq C)$.
- $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C \text{ ve } B \subseteq C)$.

Çözüm.

(a) $(\Rightarrow) A \subseteq B \cap C$ olsun. **Önerme 2.3**'ün (1) maddesine göre $B \cap C \subseteq B$ ve $B \cap C \subseteq C$. Kapsamanın geçişliliğiyle (**Önerme 2.2**) $A \subseteq B \cap C \subseteq B$ ve $A \subseteq B \cap C \subseteq C$; yani $A \subseteq B$ ve $A \subseteq C$.

$(\Leftarrow) A \subseteq B$ ve $A \subseteq C$ olsun. İki kapsamanın “kesişimini alalım”: **Önerme 2.3**'ün (2) maddesine göre $A \cap A \subseteq B \cap C$; idempotentlikle $A \cap A = A$, dolayısıyla $A \subseteq B \cap C$. Eleman diliyle: $x \in A$ ise iki varsayımdan $x \in B$ ve $x \in C$, yani $x \in B \cap C$.

(b) $(\Rightarrow) A \cup B \subseteq C$ olsun. (1) maddesine göre $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$; geçişlilikle $A \subseteq C$ ve $B \subseteq C$.

$(\Leftarrow) A \subseteq C$ ve $B \subseteq C$ olsun. (2) maddesine göre $A \cup B \subseteq C \cup C = C$. Eleman diliyle: $x \in A \cup B$ ise $x \in A$ veya $x \in B$; birinci durumda $A \subseteq C$, ikinci durumda $B \subseteq C$ olduğundan her iki durumda da $x \in C$.

■

Yani bir küme, iki kümenin kesişiminin içindedir ancak ve ancak her ikisinin de içindeyse; iki kümenin birleşimi bir kümenin içindedir ancak ve ancak her ikisi de onun içindeyse. Bu iki kural, sonraki bölümde sonsuz çoklukta kümenin kesişim ve birleşimine genelleştirilecektir.

2.6 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (Kümeler ve Küme İşlemleri). Aşağıdaki alıştırmalarda X boş olmayan bir küme ve $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ 'tir.

- $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ ve $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ kümelerini yazınız.
- $A = (-1, 3]$ ve $B = [0, 5)$ olsun. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini bulunuz.
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.
- $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ olduğunu gösteriniz.
- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ olduğunu gösteriniz.
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$ olduğunu gösteriniz.
- $A \subseteq B$ ise $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ olduğunu gösteriniz. Karşıtı doğru mudur?

Çözüm.

(a) Boş kümenin tek alt kümesi kendisidir; dolayısıyla $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. $\{1, 2\}$ kümesinin alt kümeleri $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$ 'dir; dolayısıyla $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Son olarak $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ tek elemanlı bir kümedir; alt kümeleri $\emptyset$ ve $\{\emptyset\}$ 'dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; bu küme iki elemanlıdır.

(b) $x \in A \cup B$ olması $-1 < x \leq 3$ veya $0 \leq x < 5$ demektir; bu iki koşulun birleşimi $-1 < x < 5$ verir ($x \leq 3$ ise birinci, $x > 3$ ise $0 \leq 3 < x < 5$ ile ikinci koşul sağlanır). Dolayısıyla $A \cup B = (-1, 5)$. Kesişim için iki koşul birlikte sağlanmalıdır: alt sınırların büyüğü 0 (dâhil), üst sınırların küçüğü 3 (dâhil); $A \cap B = [0, 3]$. Fark $A \setminus B$, A 'nın B 'de olmayan elemanlarıdır: $-1 < x \leq 3$ ve $x < 0$ (çünkü $x \leq 3 < 5$ olduğundan $x \notin B$ ancak $x < 0$ ile mümkündür); $A \setminus B = (-1, 0)$. Benzer biçimde $B \setminus A$: $0 \leq x < 5$ ve $x > 3$ (çünkü $x \geq 0 > -1$ olduğundan $x \notin A$ ancak $x > 3$ ile mümkündür); $B \setminus A = (3, 5)$.

(c) $x \in A \setminus B$ olsun; yani $x \in A$ ve $x \notin B$. $x \notin B$ olduğundan “ $x \in A$ ve $x \in B$ ” yanlıştır, yani $x \notin A \cap B$. Dolayısıyla $x \in A$ ve $x \notin A \cap B$, yani $x \in A \setminus (A \cap B)$. Tersine $x \in A \setminus (A \cap B)$ olsun; yani $x \in A$ ve $x \notin A \cap B$. $x \notin A \cap B$ olması, De Morgan kuralıyla, $x \notin A$ veya $x \notin B$ demektir; $x \in A$ olduğundan birinci seçenek olamaz, öyleyse $x \notin B$. Dolayısıyla $x \in A$ ve $x \notin B$, yani $x \in A \setminus B$. İki kapsama eşitliği verir.

(d) Cebirsel yöntemle: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap (A \cap B^c)^c$ (**Önerme 2.4**'ün (3) maddesi iki kez). **Sonuç 2.1**'e göre $(A \cap B^c)^c = A^c \cup (B^c)^c = A^c \cup B$. Dağılıma kuralıyla

$$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B;$$

burada $A \cap A^c = \emptyset$ için **Önerme 2.5**'ün (1) maddesi, $\emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$ için **Örnek 2.3** kullanıldı.

(e) $x \in (A \setminus B) \setminus C$ olsun; yani $x \in A \setminus B$ ve $x \notin C$, açık yazılışla $x \in A$, $x \notin B$ ve $x \notin C$. $x \notin B$ ve $x \notin C$ birlikte, De Morgan kuralıyla, $x \notin B \cup C$ demektir. Dolayısıyla $x \in A$ ve $x \notin B \cup C$, yani $x \in A \setminus (B \cup C)$. Tersine $x \in A \setminus (B \cup C)$ olsun; yani $x \in A$ ve $x \notin B \cup C$. İkincisi $x \notin B$ ve $x \notin C$ demektir. $x \in A$ ve $x \notin B$ olduğundan $x \in A \setminus B$; buna $x \notin C$ eklenince $x \in (A \setminus B) \setminus C$. İki kapsama eşitliği verir.

(f) $(\Rightarrow)$ $A \subseteq B$ olsun ve $x \in B^c$ alalım; yani $x \in X$ ve $x \notin B$. $x \in A$ olsaydı $A \subseteq B$ gereği $x \in B$ olurdu; bu, $x \notin B$ ile çelişir. Öyleyse $x \notin A$ ve $x \in X$, yani $x \in A^c$. Böylece $B^c \subseteq A^c$. $(\Leftarrow)$ $B^c \subseteq A^c$ olsun. İspatlanan yönü B^c ve A^c kümelerine uygularsak $(A^c)^c \subseteq (B^c)^c$ elde ederiz; [Önerme 2.4](#)'in (2) maddesine göre bu, $A \subseteq B$ demektir. Bu denklik, kapsamanın tümleyen alınca yön değiştirdiğini söyler; önceki bölümdeki ters-karşıt kuralının küme karşılığıdır: $x \in A \Rightarrow x \in B$ gerektirmesi ile ters-karşıtı $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ aynı anda doğrudur.

(g) $A \subseteq B$ olsun ve $C \in \mathcal{P}(A)$ alalım; yani $C \subseteq A$. Geçişlilikle $C \subseteq A \subseteq B$, yani $C \subseteq B$, dolayısıyla $C \in \mathcal{P}(B)$. Böylece $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Karşıtı da doğrudur: $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ olsun. $A \in \mathcal{P}(A)$ olduğundan $A \in \mathcal{P}(B)$, yani $A \subseteq B$. Dolayısıyla $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

■

Bu bölümde iki kümeyle yapılan işlemleri inceledik; bir sonraki bölümde aynı işlemler sonsuz çoklukta kümeden oluşan ailelere genişletiliyor ve kümelerden sıralı çiftler kurmayı öğreniyoruz: [İndisli Aileler ve Kartezyen Çarpım](#).

3. İndisli Aileler ve Kartezyen Çarpım

Kümeler ve Küme İşlemleri bölümünde iki kümenin birleşimini, kesişimini, farkını ve tümleyenini tanımladık; bu işlemlerin temel kurallarını gördük. Ancak topolojide çoğu zaman iki değil, sonsuz tane kümeyle çalışırız: bir topolojiyi tanımlarken “açık kümelerin **her** birleşimi açıktır” diyeceğiz ve buradaki birleşim, kaç tane küme olduğuna bakılmaksızın alınacaktır. Bu yüzden önce “keyfi sayıda” kümenin birleşimini ve kesişimini tanımlamamız gerekir.

Bu bölümde önce **indisli aile** kavramını ve keyfi birleşim ile kesişimi tanımlayacağız. Sonra iki küme için bilinen De Morgan ve dağılma kurallarının keyfi ailelere nasıl genelleştiğini tam ispatlarıyla göreceğiz; tümleyenle ilgili sık kullanılan özdeşlikleri toplayacağız. Bölümün ikinci yarısında ise **kartezyen çarpım** $A \times B$ kavramını tanımlayıp temel özelliklerini ispatlayacağız. Kartezyen çarpım, bir sonraki bölümde fonksiyon kavramını kurmak için gereken yapı taşıdır.

Bölüm boyunca bütün kümeler sabit bir **evrensel küme** X 'in alt kümeleridir; $A \subseteq X$ için tümleyen $A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ yazımlarının ikisini de kullanacağız, ikisi aynı kümedir.

3.1 İndisli Aileler

İki kümenin birleşimi $A \cup B$, üç kümenin birleşimi $A \cup B \cup C$ diye yazılabilir. Ama elimizde $A_1, A_2, A_3, \dots$ diye sonsuz tane küme varsa, hatta kümeler doğal sayılarla bile numaralanamıyorsa, birleşimi nasıl yazacağız? Çözüm, her kümeye bir “etiket” (indis) vermek ve etiketlerin kümesi üzerinden konuşmaktır.

Tanım 3.1 (İndisli Aile). I boş olmayan bir küme olsun ve her $\alpha \in I$ için bir A_α kümesi verilmiş olsun. Bu kümelerin topluluğuna I ile **indislenmiş küme ailesi** (indexed family of sets) ya da kısaca **indisli aile** denir ve

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \quad \text{ya da} \quad \{A_\alpha : \alpha \in I\}$$

ile gösterilir. I kümesine **indis kümesi** (index set), her $\alpha \in I$ elemanına bir **indis** denir.

Yani indisli aile, her elemanı I 'dan alınan bir etiketle adlandırılmış bir kümeler topluluğudur; etiket α verildiğinde hangi kümeden söz ettiğimiz (A_α) bellidir.

En sık karşılaşılan indis kümesi pozitif doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ 'dir; bu durumda aile bir küme **dizisidir**: $A_1, A_2, A_3, \dots$. Ancak indis kümesi herhangi bir küme olabilir: örneğin $I = \mathbb{R}$ alıp her $r \in \mathbb{R}$ için $A_r = [r, r + 1]$ koyarsak, gerçel sayılarla indislenmiş bir aralık ailesi elde ederiz. Aileyi tek bir harfle, örneğin $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ diye göstermek de yaygındır.

Tanım 3.2 (Keyfi Birleşim ve Kesişim). $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bir indisli aile olsun.

(1) Ailenin **birleşimi** (union), A_α kümelerinden **en az birine** ait olan bütün elemanların kümesidir:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

(2) Ailenin **kesişimi** (intersection), A_α kümelerinin **hepsine** ait olan bütün elemanların kümesidir:

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

Yani bir x elemanı birleşimde olmak için ailedeki kümelerden yalnızca birinde bulunmak zorundadır, kesişimde olmak içinse ailedeki her kümede bulunmak zorundadır. Bunu iki üyelik koşulu olarak akılda tutmak yararlıdır:

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow \text{en az bir } \alpha \in I \text{ için } x \in A_\alpha, \quad x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow \text{her } \alpha \in I \text{ için } x \in A_\alpha.$$

Birleşimdeki “en az bir α ” koşulunu, o indise ad vererek “ $x \in A_{\alpha_0}$ olacak biçimde bir $\alpha_0 \in I$ vardır” diye de yazarız; ispatlarda bu α_0 ’ı seçip onunla çalışacağız.

Gösterimle ilgili birkaç uzlaşma:

- Aile $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ ile gösteriliyorsa birleşim ve kesişim kısaca $\bigcup \mathcal{A}$ ve $\bigcap \mathcal{A}$ diye yazılır.
- $I = \mathbb{N}^+$ ise $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ yerine $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ yerine $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ yazılır; ikisi aynı kümedir.
- $I = \{1, 2\}$ ise $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2$ ve $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2$ olur; çünkü “en az bir $\alpha \in \{1, 2\}$ için $x \in A_\alpha$ ” demek “ $x \in A_1$ veya $x \in A_2$ ” demektir, “her $\alpha \in \{1, 2\}$ için $x \in A_\alpha$ ” demek de “ $x \in A_1$ ve $x \in A_2$ ” demektir. Dolayısıyla keyfi birleşim ve kesişim, önceki bölümdeki iki kümelik işlemleri gerçekten genelleştirir.

İndis kümesi neden boş alınmadı

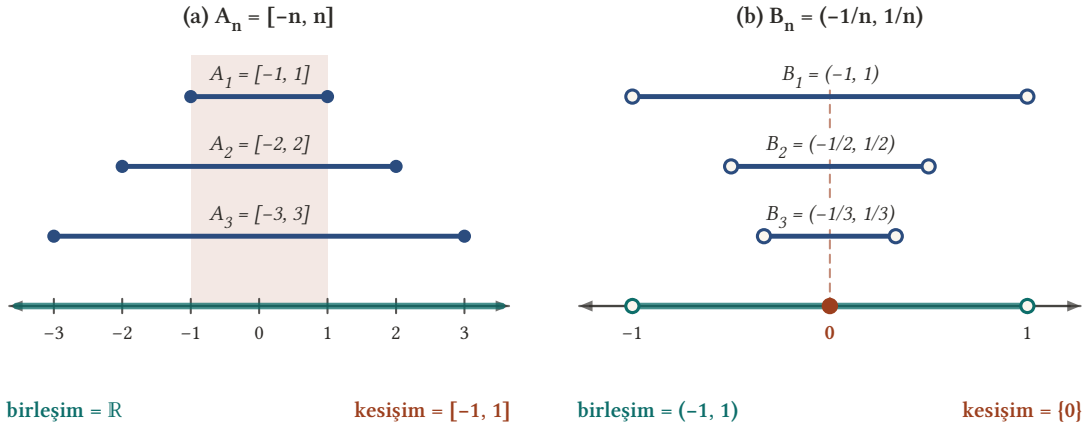
$I = \emptyset$ olsaydı hiçbir α olmayacağından “ $\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha$ ” koşulu hiçbir x için sağlanmaz, birleşim boş küme olurdu; “ $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ ” koşulu ise her x için boş yere sağlanır, kesişim de bütün evrensel küme X olurdu. Bu uzlaşmalar bazı kitaplarda kullanılır; biz karışıklığı önlemek için bu bölüm boyunca $I \neq \emptyset$ varsayacağız.

Somut bir örnekle başlayalım.

Örnek 3.1 (Aralık Aileleri). Aşağıdaki ailelerin birleşimini ve kesişimini bulalım.

(a) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $A_n = [-n, n]$.

(b) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $B_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.



Şekil 3.1: İki iç içe aralık ailesi. Solda $A_n = [-n, n]$ aralıkları n büyüdükçe genişler: her gerçel sayı yeterince büyük bir n için bir A_n 'ye düşer, bu yüzden birleşim $\mathbb{R}$ 'dir; her aralığın ortak parçası ise en dar olan $A_1 = [-1, 1]$ 'dir. Sağda $B_n = (-1/n, 1/n)$ aralıkları daralır: birleşim en geniş olan $(-1, 1)$, kesişim ise yalnızca 0 noktasıdır; sıfırdan farklı her sayı yeterince büyük n için dışarıda kalır.

Çözüm.

(a) Önce $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$ olduğunu gösterelim. Her $A_n \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan birleşim de $\mathbb{R}$ 'nin alt kümesidir. Tersine $x \in \mathbb{R}$ olsun. $|x| \leq n$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}^+$ vardır; çünkü her gerçel sayıdan büyük bir pozitif doğal sayı vardır (örneğin n olarak $|x|$ 'ten büyük ilk doğal sayıyı alabiliriz). O zaman $-n \leq x \leq n$, yani $x \in A_n$; dolayısıyla x birleşimdedir. Böylece $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$.

Şimdi $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 1]$ olduğunu gösterelim. $x \in [-1, 1]$ ise her $n \geq 1$ için $-n \leq -1 \leq x \leq 1 \leq n$, yani x her A_n 'dedir; bu yüzden x kesişimdedir. Tersine x kesişimde ise özel olarak $x \in A_1 = [-1, 1]$ 'dir. Böylece kesişim tam olarak $[-1, 1]$ 'dir.

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (-1, 1)$: Her $n \geq 1$ için $\frac{1}{n} \leq 1$ olduğundan $B_n \subseteq B_1 = (-1, 1)$, yani birleşim $(-1, 1)$ 'in içindedir; öte yandan B_1 birleşimin bir parçasıdır, bu yüzden $(-1, 1)$ birleşimin içindedir. İki kapsama birlikte eşitliği verir.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{0\}$: 0 her B_n 'de olduğundan $\{0\}$ kesişimin içindedir. Tersine $x \neq 0$ olsun. $\frac{1}{n} \leq |x|$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}^+$ vardır (çünkü $\frac{1}{|x|}$ 'ten büyük bir doğal sayı vardır). O zaman $x \notin (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = B_n$, yani x kesişimde değildir. Böylece kesişimde 0'dan başka eleman yoktur.

■

Bu örnek önemli bir noktayı gösterir: sonsuz tane açık aralığın kesişimi $\{0\}$ gibi bir tek nokta olabilir. Topolojide “sonlu kesişim” ile “keyfi kesişim” arasındaki ayrımın kaynağı budur.

3.1.1 Birleşimde ve kesişimde olmama

De Morgan kurallarını ispatlamak için, bir elemanın birleşimde ya da kesişimde **olmamasının** ne anlama geldiğini açıkça yazmalıyız. Bu, **Önermeler Mantığı ve Niceleyiciler** bölümünde gördüğümüz niceleyici olumsuzlama kurallarının doğrudan bir uygulamasıdır: “vardır”ın olumsuzu “hiçbiri için değil (her biri için değil)”, “her”in olumsuzu “en az biri için değil”dir.

Lemma 3.1 (Birleşimde ve Kesişimde Olmama). $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bir indisli aile olsun. Her x için:

- (1) $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow$ her $\alpha \in I$ için $x \notin A_\alpha$.
- (2) $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow$ en az bir $\alpha \in I$ için $x \notin A_\alpha$.

İspat.

(1) Tanım gereği $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ önermesi “ $\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha$ ” önermesiyle aynıdır. Bu yüzden $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ önermesi onun olumsuzudur:

$$\neg \left(\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha \right).$$

Bir “vardır” önermesinin olumsuzu, iç önermenin olumsuzunun her indis için doğru olmasıdır: $\neg(\exists \alpha, p(\alpha)) \Leftrightarrow \forall \alpha, \neg p(\alpha)$. Burada $\neg(x \in A_\alpha)$ tam olarak $x \notin A_\alpha$ demektir. Dolayısıyla

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha.$$

(2) Aynı biçimde $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ önermesi “ $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ ” ile aynıdır; olumsuzu $\neg(\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha)$ 'dır. Bir “her” önermesinin olumsuzu, iç önermenin en az bir indis için yanlış olmasıdır: $\neg(\forall \alpha, p(\alpha)) \Leftrightarrow \exists \alpha, \neg p(\alpha)$. Böylece

$$x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in I, x \notin A_\alpha.$$

■

Yani birleşimin dışında kalmak için **hiçbir** A_α 'da olmamak gerekir; kesişimin dışında kalmak içinse **tek bir** A_α 'nın dışında olmak yeter.

3.2 Genel De Morgan Kuralları

İki küme için $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ve $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ olduğunu biliyoruz. Topolojide kapalı kümeleri açık kümelerin tümleyenleri olarak tanımlayacağız; “keyfi birleşimin tümleyeni” ile “keyfi kesişimin tümleyeni”ni birbirine bağlayan aşağıdaki kurallar, açık kümelerin özelliklerini kapalı kümelere aktarmamızı sağlayacak. Bu yüzden bu teorem kitabın en çok kullanılan araçlarından biridir.

Teorem 3.1 (Genel De Morgan Kuralları). X bir küme, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X 'in alt kümelerinden oluşan bir indisli aile olsun (her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \subseteq X$). O zaman

- (1) $X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$, yani $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$;
- (2) $X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$, yani $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

İspat.

İki kümenin eşit olduğunu göstermek için, bir x elemanının birinde olmasının ötekinde olmasıyla denk olduğunu gösteririz.

(1) x herhangi bir eleman olsun. Fark kümesinin tanımına göre

$$x \in X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \Leftrightarrow x \in X \text{ ve } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Lemma 3.1'nin (1) maddesine göre $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ koşulu “her $\alpha \in I$ için $x \notin A_\alpha$ ” ile denktir. Böylece sağ taraf

$$x \in X \text{ ve } (\forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha)$$

olur. “ $x \in X$ ” koşulu α 'ya bağlı değildir ve $I \neq \emptyset$ 'dir; bu yüzden bu koşulu niceleyicinin içine alabiliriz: yukarıdaki önerme

$$\forall \alpha \in I, (x \in X \text{ ve } x \notin A_\alpha)$$

ile denktir. (Gerçekten, $x \in X$ doğruysa iki önerme de “ $\forall \alpha, x \notin A_\alpha$ ”ya indirgenir; $x \in X$ yalnızsa ilki yanlıştır, ikincisi de I 'da en az bir indis olduğundan yanlıştır.) Fark kümesinin tanımına göre “ $x \in X$ ve $x \notin A_\alpha$ ” demek $x \in X \setminus A_\alpha$ demektir. Dolayısıyla son önerme “her $\alpha \in I$ için $x \in X \setminus A_\alpha$ ” olur; bu da kesişimin tanımı gereği $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ demektir. Zincirdeki her adım bir denklik olduğundan

$$x \in X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

ve iki küme eşittir.

(2) Yine x herhangi bir eleman olsun. Fark kümesinin tanımına göre

$$x \in X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \Leftrightarrow x \in X \text{ ve } x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Lemma 3.1'nin (2) maddesine göre $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ koşulu “en az bir $\alpha \in I$ için $x \notin A_\alpha$ ” ile denktir. Böylece sağ taraf

$$x \in X \text{ ve } (\exists \alpha \in I, x \notin A_\alpha)$$

olur. “ $x \in X$ ” koşulu α 'ya bağlı olmadığından bu önerme

$$\exists \alpha \in I, (x \in X \text{ ve } x \notin A_\alpha)$$

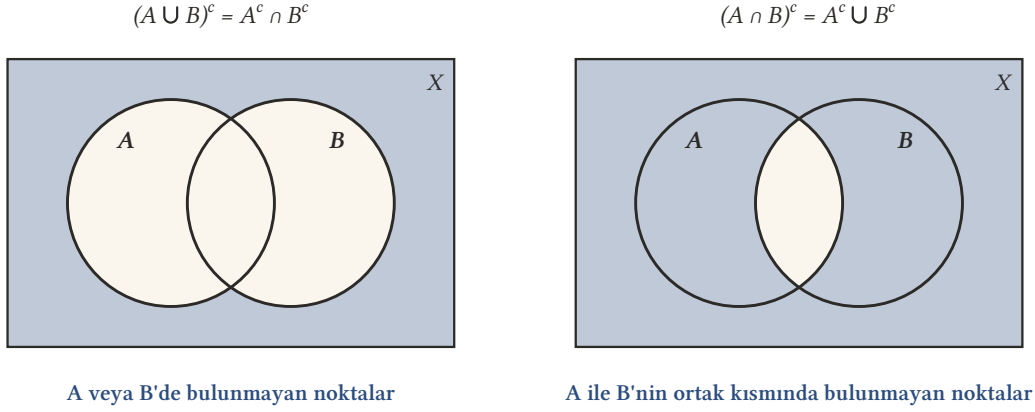
ile denktir. (Gerçekten, $x \in X$ doğruysa iki önerme de “ $\exists \alpha, x \notin A_\alpha$ ”ya indirgenir; $x \in X$ yalnızsa ikisi de yanlıştır.) “ $x \in X$ ve $x \notin A_\alpha$ ” demek $x \in X \setminus A_\alpha$ demektir; bu yüzden son önerme “en az bir $\alpha \in I$ için $x \in X \setminus A_\alpha$ ” olur, bu da birleşimin tanımı gereği $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ demektir. Her adım denklik olduğundan iki küme eşittir. ■

İspatın özü: tümleyen almak “değil” eklemektir, “değil” ise “vardır” ile “her”i birbirine çevirir; birleşim “vardır”, kesişim “her” demek olduğundan tümleyen ikisini yer değiştirir.

Genel kural elimizdeyken iki kümelik De Morgan kuralları özel bir durum olarak çıkar.

Sonuç 3.1 (İki Küme İçin De Morgan Kuralları). $A, B \subseteq X$ olsun. O zaman

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{ve} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$



Şekil 3.2: İki küme için De Morgan kuralları. Dikdörtgen evrensel küme X 'i, daireler A ve B 'yi gösterir; taralı bölge tümleyendir. Solda $(A \cup B)^c$: iki dairenin de dışında kalan noktalar, yani hem A^c hem B^c 'de olanlar, $A^c \cap B^c$. Sağda $(A \cap B)^c$: yalnızca mercek bölgesi taralı değildir; geriye A 'nın ya da B 'nin dışında olan noktalar, yani $A^c \cup B^c$ kalır.

İspat.

$I = \{1, 2\}$, $A_1 = A$ ve $A_2 = B$ alalım. Yukarıda gördüğümüz gibi $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 = A \cup B$ ve $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c = A_1^c \cap A_2^c = A^c \cap B^c$ 'dir. Teorem 3.1'in (1) maddesi bu aile için

$$(A \cup B)^c = \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c = A^c \cap B^c$$

verir. Aynı aile için Teorem 3.1'in (2) maddesi

$$(A \cap B)^c = \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c = A^c \cup B^c$$

verir.

■

3.3 Genel Dağılma Kuralları

İki küme için $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dağılma kurallarını biliyoruz. Kesişimin keyfi birleşim üzerine, birleşimin de keyfi kesişim üzerine dağıldığını görmek, ileride örneğin alt uzay topolojisinin gerçekten topoloji olduğunu ispatlarken gerekecek.

Teorem 3.2 (Genel Dağılma Kuralları). B bir küme, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bir indisli aile olsun. O zaman

- (1) $B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$;
- (2) $B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$.

İspat.

(1) x herhangi bir eleman olsun. Kesişimin ve keyfi birleşimin tanımlarına göre

$$x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \Leftrightarrow x \in B \text{ ve } (\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha) .$$

" $x \in B$ " koşulu α 'ya bağlı olmadığından bu önerme " $\exists \alpha \in I, (x \in B \text{ ve } x \in A_\alpha)$ " ile denktir: $x \in B$ yanlışsa iki önerme de yanlıştır; $x \in B$ doğruysa ikisi de " $\exists \alpha \in I, x \in A_\alpha$ "ya indirgenir. " $x \in B$ ve $x \in A_\alpha$ " ise $x \in B \cap A_\alpha$ demektir. Böylece son önerme "en az bir $\alpha \in I$ için $x \in B \cap A_\alpha$ ", yani $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$ olur. Her adım denklik olduğundan iki küme eşittir.

(2) x herhangi bir eleman olsun. Birleşimin ve keyfi kesişimin tanımlarına göre

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \Leftrightarrow x \in B \text{ veya } (\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha).$$

Bu önerme “ $\forall \alpha \in I, (x \in B \text{ veya } x \in A_\alpha)$ ” ile denktir: $x \in B$ doğruysa her iki önerme de doğrudur (ikincisinde her α için “veya”nın ilk parçası sağlanır); $x \in B$ yanlışsa ikisi de “ $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ ”ya indirgenir. “ $x \in B$ veya $x \in A_\alpha$ ” ise $x \in B \cup A_\alpha$ demektir. Böylece son önerme “her $\alpha \in I$ için $x \in B \cup A_\alpha$ ”, yani $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$ olur. Her adım denklik olduğundan iki küme eşittir.

■

$I = \{1, 2\}$ alındığında (1) maddesi $B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, (2) maddesi $B \cup (A_1 \cap A_2) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2)$ olur; yani iki kümelik dağılma kuralları bu teoremin özel halidir. Aşağıda dağılma kuralını kullandığımız her yerde bu özel hali kastedeceğiz.

3.4 Kapsama, Birleşim ve Kesişim

Bir kümenin bir kesişimin içinde kalması ya da bir birleşimi içermesi, ailedeki her kümeyle ayrı ayrı karşılaştırmaya indirgenebilir. Bu basit gözlem, ileride “bir kümeyi içeren en küçük kapalı küme” gibi ifadelerle çalışırken sürekli kullanılacak.

Teorem 3.3 (Kapsama ile Birleşim ve Kesişim). X bir küme, $A, B, C \subseteq X$ ve $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X 'in alt kümelerinden oluşan indisli aileler olsun.

- (1) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ ve $A \subseteq C$.
- (2) $B \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow$ her $\alpha \in I$ için $B \subseteq A_\alpha$.
- (3) $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \subseteq A \Leftrightarrow$ her $\alpha \in I$ için $C_\alpha \subseteq A$.

Özel olarak $I = \mathbb{N}^+$ için $B \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olması her n için $B \subseteq A_n$ olmasıyla, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq A$ olması her n için $C_n \subseteq A$ olmasıyla denktir.

İspat.

(1) $(\Rightarrow)$ $A \subseteq B \cap C$ olsun. Kesişimdeki her eleman hem B 'de hem C 'de olduğundan $B \cap C \subseteq B$ ve $B \cap C \subseteq C$ 'dir. Kapsama geçişi olduğundan $A \subseteq B \cap C \subseteq B$ ve $A \subseteq B \cap C \subseteq C$, yani $A \subseteq B$ ve $A \subseteq C$.
 $(\Leftarrow)$ $A \subseteq B$ ve $A \subseteq C$ olsun. $x \in A$ alalım. İlk kapsamadan $x \in B$, ikincisinden $x \in C$; dolayısıyla $x \in B \cap C$. x keyfi olduğundan $A \subseteq B \cap C$.

(2) $(\Rightarrow)$ $B \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ olsun ve bir $\alpha \in I$ sabitleyelim. $x \in B$ alalım. Varsayıma göre $x \in \bigcap_{\beta \in I} A_\beta$ 'dir, yani x her A_β 'dadır; özel olarak $x \in A_\alpha$. x keyfi olduğundan $B \subseteq A_\alpha$. α da keyfi olduğundan bu her indis için doğrudur.

$(\Leftarrow)$ Her $\alpha \in I$ için $B \subseteq A_\alpha$ olsun. $x \in B$ alalım. Her $\alpha \in I$ için $B \subseteq A_\alpha$ olduğundan $x \in A_\alpha$ 'dır; yani x ailedeki her kümedir, kesişimin tanımı gereği $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Böylece $B \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

(3) $(\Rightarrow)$ $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \subseteq A$ olsun ve bir $\alpha \in I$ sabitleyelim. $x \in C_\alpha$ alalım. x ailedeki kümelere birine ait olduğundan birleşimin tanımı gereği $x \in \bigcup_{\beta \in I} C_\beta$, varsayımdan da $x \in A$. Böylece $C_\alpha \subseteq A$; α keyfi olduğundan bu her indis için doğrudur.

$(\Leftarrow)$ Her $\alpha \in I$ için $C_\alpha \subseteq A$ olsun. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ alalım. Birleşimin tanımı gereği $x \in C_{\alpha_0}$ olacak biçimde bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Varsayımdan $C_{\alpha_0} \subseteq A$, dolayısıyla $x \in A$. Böylece $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \subseteq A$.

■

Yani $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, bütün A_α 'ların içinde kalan **en büyük** kümedir; $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ ise bütün C_α 'ları içeren **en küçük** kümedir. Bu bakış açısı, “kapalı, A 'yı içeren en küçük kapalı kümedir” gibi ifadeleri anlamayı kolaylaştırır.

3.5 Tümleyenle İlgili Özdeşlikler

Aşağıdaki özdeşlikler, bir kümeyi başka bir kümeye göre parçalara ayırmamıza ve “ayrık olma” ile “kapsama” arasında geçiş yapmamıza yarar. Hepsisi ileride, özellikle kapalı kümelerle ve ayırma aksiyomlarıyla çalışırken düşünmeden kullanılacak kadar temeldir; bu yüzden her birini dikkatle ispatlıyoruz.

Önerme 3.1 (Tümleyen Özdeşlikleri). $A, B \subseteq X$ olsun. O zaman

- (1) $A \cup A^c = X$ ve $A \cap A^c = \emptyset$;
 (2) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$;
 (3) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ ve $A \cup B = (B \setminus A) \cup A$;
 (4) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c \Leftrightarrow B \subseteq A^c$;
 (5) $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A$.

İspat.

İspat boyunca fark ile tümleyen arasındaki şu bağı kullanacağız: $A \setminus B = A \cap B^c$. Gerçekten, $x \in A \setminus B$ demek “ $x \in A$ ve $x \notin B$ ” demektir; $A \subseteq X$ olduğundan $x \in X$ ’tir ve “ $x \in X$ ve $x \notin B$ ” tam olarak $x \in B^c$ demektir; yani koşul “ $x \in A$ ve $x \in B^c$ ”, başka deyişle $x \in A \cap B^c$ ile denktir. Ayrıca $(B^c)^c = B$ eşitliğini kullanacağız: $x \in (B^c)^c$ demek “ $x \in X$ ve $x \notin B^c$ ” demektir. $x \in X$ iken $x \in B^c$ olması $x \notin B$ olmasıyla denktir; bu yüzden $x \in X$ iken $x \notin B^c$ olması $x \in B$ olmasıyla denktir. Öte yandan $x \in B$ ise $B \subseteq X$ olduğundan $x \in X$ de sağlanır. Böylece $x \in (B^c)^c \Leftrightarrow x \in B$, yani $(B^c)^c = B$.

(1) Önce $A \cup A^c = X$. $A \subseteq X$ ve $A^c \subseteq X$ olduğundan $A \cup A^c \subseteq X$ ’tir. Tersine $x \in X$ olsun. Ya $x \in A$ ’dır ya da $x \notin A$ ’dır. İlk durumda $x \in A \cup A^c$. İkinci durumda “ $x \in X$ ve $x \notin A$ ” sağlandığından tümleyenin tanımı gereği $x \in A^c$, dolayısıyla yine $x \in A \cup A^c$. Böylece $X \subseteq A \cup A^c$ ve eşitlik sağlanır. Şimdi $A \cap A^c = \emptyset$. Bir $x \in A \cap A^c$ olsaydı hem $x \in A$ hem de $(x \in A^c$ olduğundan) $x \notin A$ olurdu; bir önerme ile olumsuzu aynı anda doğru olamaz. Bu yüzden $A \cap A^c$ kümesinin hiç elemanı yoktur, yani $A \cap A^c = \emptyset$.

(2) $A \subseteq X$ olduğundan $A = A \cap X$ ’tir. (1) maddesine göre $X = B \cup B^c$ ’dir. Dağılıma kuralına (Teorem 3.2, $I = \{1, 2\}$) göre

$$A = A \cap X = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

Son olarak $A \cap B^c = A \setminus B$ olduğundan $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

(3) (2) maddesini A için kullanırsak

$$A \cup B = ((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \cup B = (A \setminus B) \cup ((A \cap B) \cup B),$$

burada ikinci eşitlik birleşimin birleşme özelliğinden gelir. $A \cap B \subseteq B$ olduğundan $(A \cap B) \cup B = B$ ’dir: B ’nin bir alt kümesini B ’ye eklemek B ’yi değiştirmez. Böylece $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. İkinci eşitlik için A ile B ’nin rollerini değiştirelim: az önce ispatlanan eşitlik $B \cup A = (B \setminus A) \cup A$ verir; $A \cup B = B \cup A$ olduğundan $A \cup B = (B \setminus A) \cup A$.

(4) Önce $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$ olduğunu gösterelim.

($\Rightarrow$) $A \cap B = \emptyset$ olsun ve $x \in A$ alalım. $x \notin B^c$ olduğunu varsayalım. $x \in X$ olduğundan (çünkü $A \subseteq X$) $x \notin B^c$ olması $x \in B$ demektir. O zaman $x \in A$ ve $x \in B$, yani $x \in A \cap B = \emptyset$; bu bir çelişkidir, çünkü boş kümenin elemanı yoktur. Dolayısıyla $x \in B^c$. x keyfi olduğundan $A \subseteq B^c$.

($\Leftarrow$) $A \subseteq B^c$ olsun. $A \cap B \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım ve bir $x \in A \cap B$ alalım. $x \in A \subseteq B^c$ olduğundan $x \in B^c$, yani $x \notin B$; ama $x \in A \cap B$ olduğundan $x \in B$. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $A \cap B = \emptyset$.

Şimdi $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A^c$. $A \cap B = B \cap A$ olduğundan $A \cap B = \emptyset$ koşulu $B \cap A = \emptyset$ koşuluyla aynıdır. Az önce ispatlanan denkliği A ile B ’nin rolleri değişmiş olarak uygularsak $B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A^c$ elde ederiz. Üç koşul da birbirine denktir.

(5) Önce $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subseteq B$. $C \subseteq X$ olan bir küme için $C = X \Leftrightarrow C^c = \emptyset$ olduğunu gözleyelim: $C^c = X \setminus C$ kümesinin boş olması, X ’in her elemanının C ’de olması, yani $X \subseteq C$ demektir; $C \subseteq X$ zaten sağlandığından bu $C = X$ ile denktir. Bunu $C = A \cup B$ için kullanalım ve Sonuç 3.1’yi uygulayalım:

$$A \cup B = X \Leftrightarrow (A \cup B)^c = \emptyset \Leftrightarrow A^c \cap B^c = \emptyset.$$

Şimdi (4) maddesini A^c ve B^c kümelerine uygulayalım: $A^c \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A^c \subseteq (B^c)^c$. $(B^c)^c = B$ olduğundan $A^c \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A^c \subseteq B$. Denklikleri birleştirince $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subseteq B$.

$B^c \subseteq A$ için $A \cup B = B \cup A$ olduğundan $A \cup B = X$ koşulu $B \cup A = X$ ile aynıdır; az önce ispatlanan denklik roller değişmiş olarak $B \cup A = X \Leftrightarrow B^c \subseteq A$ verir. Üç koşul da denktir.

■

Burada (2) maddesi bir kümeyi “ B ’nin dışında kalan kısmı” ile “ B ’nin içinde kalan kısmı”na ayırır; (4) maddesi “iki küme ayrıktır” demenin “biri ötekinin tümleyeninin içindedir” demekle aynı şey olduğunu söyler; (5) ise (4)’ün tümleyen alınmış hâlidir.

3.6 Kartezyen Çarpım

Kartezyen çarpım, küme kuramının en önemli yapılarından biridir: düzlemi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olarak kurmamızı, bağlantıları ve fonksiyonları küme olarak tanımlamamızı, ileride de iki topolojik uzaydan çarpım uzayı üretmemizi sağlar. Önce yapı taşını, sıralı ikiliyi tanımlayalım.

Tanım 3.3 (Sıralı İkili). a ve b herhangi iki nesne olsun. Birinci bileşeni a , ikinci bileşeni b olan **sıralı ikili** (ordered pair) (a, b) ile gösterilir ve şu kuralla belirlenir:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d.$$

Yani sıralı ikilide bileşenlerin **sırası önemlidir**: $a \neq b$ ise $(a, b) \neq (b, a)$ 'dır, oysa küme olarak $\{a, b\} = \{b, a\}$ 'dır. Ayrıca (a, a) geçerli bir sıralı ikilidir; iki bileşenin farklı olması gerekmez.

Tanım 3.4 (Kartezyen Çarpım). A ve B (birbirinden farklı ya da değil) iki küme olsun. A ile B 'nin **kartezyen çarpımı** (Cartesian product) $A \times B$, birinci bileşeni A 'dan, ikinci bileşeni B 'den alınan bütün sıralı ikililerin kümesidir:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}.$$

Yani $A \times B$ 'nin bir elemanı, A 'dan bir eleman ile B 'den bir elemanın sırayla yan yana konmasıyla elde edilir. Üyelik koşulu şudur: $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B$.

Örnek 3.2 (Kartezyen Çarpım Örnekleri). (a) $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{3, 4, 5\}$ olsun. $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini yazalım.

(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi nedir?

(c) $[1, 3] \times [0, 2]$ kümesi düzlemde neye karşılık gelir?

Çözüm.

(a) Birinci bileşen için 2, ikinci bileşen için 3 seçenek vardır; her seçim bir sıralı ikili verir:

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

Rolleri değiştirince

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}.$$

Bu iki küme farklıdır: örneğin $(1, 3) \in A \times B$ ama $(1, 3) \notin B \times A$, çünkü $1 \notin B$. Her iki kümenin de $2 \cdot 3 = 6$ elemanı vardır; genel olarak A 'nın m , B 'nin n elemanı varsa $A \times B$ 'nin mn elemanı vardır.

(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, bütün gerçel sayı ikililerinin kümesidir; bu küme $\mathbb{R}^2$ ile gösterilir ve koordinat düzlemi olarak düşünülür. (x, y) ikilisi, apsisi x ordinatı y olan noktadır.

(c) $(x, y) \in [1, 3] \times [0, 2]$ olması $1 \leq x \leq 3$ ve $0 \leq y \leq 2$ demektir. Bu koşulu sağlayan noktalar, düzlemde köşeleri $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ ve $(1, 2)$ olan dolu dikdörtgeni oluşturur. Genel olarak iki aralığın kartezyen çarpımı düzlemde bir dikdörtgendir.

■

3.6.1 Boş çarpım

Kartezyen çarpımın ne zaman boş olduğunu bilmek, ileride çarpım uzayında “boş olmayan açık küme” ararken gerekecek. Cevap beklendiği gibidir: çarpanlardan biri boşsa çarpım boştur, ikisi de boş değilse çarpım da boş değildir.

Önerme 3.2 (Boş Çarpım). A ve B iki küme olsun. O zaman

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ veya } B = \emptyset.$$

İspat.

İki önermenin denk olması, olumsuzlarının denk olmasıyla aynı şeydir: $p \Leftrightarrow q$ ile $\neg p \Leftrightarrow \neg q$ birlikte doğru ya da birlikte yanlıştır. Bu yüzden iddiayı olumsuz biçimde ispatlayacağız. Sol tarafın olumsuzu $A \times B \neq \emptyset$

$\emptyset$ 'dir. Sağ tarafın olumsuzu ise, önermeler için De Morgan kuralına $(\neg(q \vee r) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg r)$ göre " $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ "dır. Göstereceğimiz denklik:

$$A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \text{ ve } B \neq \emptyset.$$

$(\Rightarrow)$ $A \times B \neq \emptyset$ olsun. O zaman $A \times B$ 'nin en az bir elemanı vardır; bu eleman bir sıralı ikilidir, ona (a, b) diyelim. Kartezyen çarpımın tanımına göre $a \in A$ ve $b \in B$ 'dir. A 'nın bir elemanı olduğundan $A \neq \emptyset$, B 'nin bir elemanı olduğundan $B \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olsun. O zaman bir $a \in A$ ve bir $b \in B$ seçebiliriz. Tanım gereği $(a, b) \in A \times B$ 'dir; böylece $A \times B$ 'nin bir elemanı vardır, yani $A \times B \neq \emptyset$.

İki yön birlikte olumsuz önermelerin denkleğini, dolayısıyla iddiayı verir.

■

3.6.2 Çarpım ve kapsama

Bir çarpımın başka bir çarpımın içinde olması, bileşenlerin ayrı ayrı içinde olmasına indirgenebilir; ancak bunun için küçük çarpımın boş olmaması gerekir.

Önerme 3.3 (Çarpımların Kapsaması). A, B, C, D kümeler ve $C \times D \neq \emptyset$ olsun. O zaman

$$C \times D \subseteq A \times B \Leftrightarrow C \subseteq A \text{ ve } D \subseteq B.$$

İspat.

$(\Leftarrow)$ $C \subseteq A$ ve $D \subseteq B$ olsun. $(c, d) \in C \times D$ alalım; tanım gereği $c \in C$ ve $d \in D$ 'dir. Kapsamalardan $c \in A$ ve $d \in B$, dolayısıyla $(c, d) \in A \times B$. Böylece $C \times D \subseteq A \times B$. (Bu yön için $C \times D \neq \emptyset$ varsayımına gerek yoktur.)

$(\Rightarrow)$ $C \times D \subseteq A \times B$ olsun. $C \times D \neq \emptyset$ olduğundan **Önerme 3.2**'e göre $C \neq \emptyset$ ve $D \neq \emptyset$ 'dir. Bir $d_0 \in D$ seçip sabitleyelim. Şimdi herhangi bir $c \in C$ alalım. $(c, d_0) \in C \times D$ 'dir, varsayımdan $(c, d_0) \in A \times B$; tanım gereği $c \in A$. c keyfi olduğundan $C \subseteq A$. Benzer biçimde bir $c_0 \in C$ seçip sabitleyelim ve herhangi bir $d \in D$ alalım. $(c_0, d) \in C \times D \subseteq A \times B$ olduğundan $d \in B$; d keyfi olduğundan $D \subseteq B$.

■

⚠ Boş olmama koşulu gereklidir

$C = \emptyset$, $D = \{1\}$ ve $A = B = \emptyset$ alalım. **Önerme 3.2**'e göre $C \times D = \emptyset$ ve $A \times B = \emptyset$; boş küme her kümenin alt kümesi olduğundan $C \times D \subseteq A \times B$ sağlanır. Ama $D \subseteq B$ yanlıştır, çünkü $1 \in D$ ve $1 \notin B$. Demek ki $C \times D = \emptyset$ iken $C \times D \subseteq A \times B$ kapsaması bileşenler hakkında hiçbir şey söylemez.

Kartezyen çarpım değişmeli değildir; **Örnek 3.2**'de $A \times B \neq B \times A$ olduğunu gördük. Çarpımın sırasının önemsiz olduğu tek durum iki çarpanın aynı olmasıdır.

Önerme 3.4 (Çarpımın Sırası). A ve B boş olmayan iki küme olsun. O zaman

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B.$$

İspat.

$(\Leftarrow)$ $A = B$ ise $A \times B$ ile $B \times A$ aynı iki kümenin aynı sırayla çarpımıdır, dolayısıyla eşittirler.

$(\Rightarrow)$ $A \times B = B \times A$ olsun. $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olduğundan **Önerme 3.2**'e göre $A \times B \neq \emptyset$ 'dir. Eşitlik özel olarak $A \times B \subseteq B \times A$ kapsamasını verir; sol taraf boş olmadığından **Önerme 3.3**'ü ($C = A$, $D = B$ ile) uygulayabiliriz: $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$. İki kapsama birlikte $A = B$ verir.

■

Boş olmama varsayımı burada da gereklidir: $A = \emptyset$ ve $B = \{1\}$ için $A \times B = \emptyset = B \times A$ olduğu hâlde $A \neq B$ 'dir.

3.6.3 Çarpımın birleşim, kesişim ve farkla ilişkisi

Çarpım işlemi, ikinci çarpandaki birleşim, kesişim ve fark işlemleri üzerine dağılır. Bu kurallar ileride çarpım topolojisinde açık kümeleri “dikdörtgenlerin birleşimi” olarak yazarken gerekecek.

Teorem 3.4 (Çarpımın Dağılıma Kuralları). A, B, C kümeler olsun. O zaman

$$(1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$

$$(2) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

$$(3) A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

İspat.

Her üç eşitlikte de iki taraf sıralı ikililerden oluşan kümelerdir; bu yüzden keyfi bir (x, y) sıralı ikilisi için üyelik koşullarının denk olduğunu göstereceğiz.

(1) Kartezyen çarpımın ve birleşimin tanımlarına göre

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (y \in B \text{ veya } y \in C).$$

Önergelerde “ve”nin “veya” üzerine dağılıma kuralına $(p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ göre sağ taraf

$$(x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } y \in C)$$

ile denktir. İlk parantez $(x, y) \in A \times B$, ikincisi $(x, y) \in A \times C$ demektir; ikisinin “veya” ile bağlanması da $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ demektir. Her adım denklik olduğundan iki küme eşittir.

(2) Kartezyen çarpımın ve kesişimin tanımlarına göre

$$(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \in C.$$

Öte yandan

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ ve } y \in C).$$

“Ve” bağlacı birleşmeli ve değişmelidir, bir önermeyi kendisiyle “ve” ile bağlamak da onu değiştirmez $(p \wedge p \Leftrightarrow p)$; bu yüzden sağdaki koşul “ $x \in A$ ve $y \in B$ ve $y \in C$ ” ile denktir. İki üyelik koşulu aynı olduğundan kümeler eşittir.

(3) Kartezyen çarpımın ve farkın tanımlarına göre

$$(x, y) \in A \times (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \notin C.$$

Öte yandan

$$(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \text{ ve } (x, y) \notin A \times C.$$

Burada $(x, y) \in A \times B$ demek “ $x \in A$ ve $y \in B$ ” demektir. $(x, y) \notin A \times C$ ise “ $x \in A$ ve $y \in C$ ” önermesinin olumsuzudur; De Morgan kuralına göre bu, “ $x \notin A$ veya $y \notin C$ ” demektir. Böylece sağ taraf

$$x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } (x \notin A \text{ veya } y \notin C)$$

olur. Bu koşulun ilk parçası $x \in A$ ’yı gerektirdiğinden parantezdeki “ $x \notin A$ ” seçeneği hiçbir zaman gerçekleşemez; yani $x \in A$ sağlanırken “ $x \notin A$ veya $y \notin C$ ” tam olarak “ $y \notin C$ ” ile denktir. (Genel olarak $p \wedge (\neg p \vee r) \Leftrightarrow p \wedge r$: p doğruyken $\neg p \vee r$ ile r aynı doğruluk değerini alır.) Dolayısıyla koşul “ $x \in A$ ve $y \in B$ ve $y \notin C$ ” olur; bu da sol tarafın koşuludur. İki küme eşittir. ■

Aynı kurallar birinci çarpım için de geçerlidir: $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$ ve benzerleri; bunlardan biri alıştırmalarda ispatlanmaktadır. Ayrıca (1) ve (2) keyfi ailelere de genelleşir: $A \times \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \times B_\alpha)$ ve $A \times \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \times B_\alpha)$; bu da alıştırmalardadır.

3.6.4 Sonlu çarpımlar

İkiden çok kümenin çarpımı, ikili çarpımın tekrarlanmasıyla tanımlanır.

Tanım 3.5 (Sonlu Kartezyen Çarpım). $A_1, A_2, \dots, A_n$ kümeler olsun ($n \geq 2$). Bu kümelerin **kartezyen çarpımı** tümevarımla tanımlanır: $n = 2$ için $A_1 \times A_2$ zaten tanımlıdır ve $n \geq 3$ için

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

Bu kümenin $((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ biçimindeki elemanı kısaca $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ diye yazılır ve **sıralı n -li** (n -tuple) diye adlandırılır. Bütün çarpanlar aynı A kümesiye çarpım A^n ile gösterilir.

Yani $A_1 \times \cdots \times A_n$, birinci bileşeni A_1 'den, ikinci bileşeni A_2 'den, ..., n -inci bileşeni A_n 'den alınan sıralı n -lilerin kümesidir. Sıralı n -liler için de sıralı ikilidekine benzer bir eşitlik kuralı vardır:

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \text{her } i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } a_i = b_i.$$

Bunu n üzerinde tümevarımla görelim. $n = 2$ için bu tam olarak sıralı ikilinin eşitlik kuralıdır. Kuralın $n - 1$ için doğru olduğunu varsayalım ($n \geq 3$). Tanım gereği $(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ ve $(b_1, \dots, b_n) = ((b_1, \dots, b_{n-1}), b_n)$ birer sıralı ikilidir; sıralı ikilinin kuralına göre bunlar ancak ve ancak $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (b_1, \dots, b_{n-1})$ ve $a_n = b_n$ ise eşittir. Tümevarım varsayımına göre ilk koşul "her $i \leq n - 1$ için $a_i = b_i$ " demektir; $a_n = b_n$ koşuluyla birleşince "her $i \leq n$ için $a_i = b_i$ " elde edilir. Örneğin $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üç boyutlu uzaydır.

3.7 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (Alıştırmalar). (a) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $A_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$ olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kümelerini bulunuz.
 (b) $A, B \subseteq X$ olsun. $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ ve $A \cup B = (B \setminus A) \cup A$ olduğunu gösteriniz.
 (c) A herhangi bir küme, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ herhangi bir indisli aile olsun (A_α 'ların A 'nın alt kümesi olması gerekmez). Görel De Morgan kurallarını ispatlayınız:

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha) \quad \text{ve} \quad A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

(d) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$ olduğunu gösteriniz.
 (e) A bir küme, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bir indisli aile olsun. $A \times \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \times B_\alpha)$ ve $A \times \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \times B_\alpha)$ olduğunu gösteriniz.
 (f) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ olduğunu gösteriniz.
 (g) $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ ise $A \times C \subseteq B \times D$ olduğunu gösteriniz. Karşınının genel olarak doğru olmadığını bir örnekle gösteriniz.

Çözüm.

(a) Önce $A_1 = [0, 0] = \{0\}$ olduğunu gözleyelim. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1)$ olduğunu gösterelim. Her n için $1 - \frac{1}{n} < 1$ olduğundan $A_n \subseteq [0, 1)$; dolayısıyla birleşim $[0, 1)$ 'in içindedir. Tersine $x \in [0, 1)$ olsun. $1 - x > 0$ olduğundan $\frac{1}{1-x} \leq 1 - x$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}^+$ vardır ($\frac{1}{1-x}$ 'ten büyük bir doğal sayı seçmek yeter). O zaman $x \leq 1 - \frac{1}{n}$ ve $x \geq 0$, yani $x \in A_n$; böylece x birleşimdedir. İki kapsama eşitliği verir. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$: Her n için $0 \in A_n$ olduğundan 0 kesişimdedir. Tersine kesişimdeki her eleman özel olarak $A_1 = \{0\}$ 'dadır, yani 0 'a eşittir. Böylece kesişim $\{0\}$ 'dir.

(b) İlk eşitlik: $B \setminus A = B \cap A^c$ olduğundan (bkz. **Önerme 3.1**'nin ispatının başı) dağılma kuralı ve **Önerme 3.1**'nin (1) maddesiyle

$$(B \setminus A) \cup (B \cap A) = (B \cap A^c) \cup (B \cap A) = B \cap (A^c \cup A) = B \cap X = B.$$

Son eşitlik $B \subseteq X$ olmasından gelir. İkinci eşitlik: ilk eşitliği B yerine yazıp birleşimin birleşme ve değişme özelliklerini kullanalım:

$$A \cup B = A \cup ((B \setminus A) \cup (B \cap A)) = (A \cup (B \cap A)) \cup (B \setminus A).$$

$B \cap A \subseteq A$ olduğundan $A \cup (B \cap A) = A$ 'dır. Böylece $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup A$.

(c) **Teorem 3.1**'in ispatı, X 'in A_α 'ları içermesini hiçbir yerde kullanmadı; aynı adımları X yerine A ile tekrarlayalım. Birinci eşitlik için x keyfi olsun:

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (\forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha),$$

burada ikinci denklik [Lemma 3.1](#)'nin (1) maddesidir. $x \in A$ koşulu α 'ya bağlı olmadığından ve $I \neq \emptyset$ olduğundan bu, " $\forall \alpha \in I, (x \in A \text{ ve } x \notin A_\alpha)$ " ile, yani "her $\alpha \in I$ için $x \in A \setminus A_\alpha$ " ile denktir; bu da $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha)$ demektir.

İkinci eşitlik için yine x keyfi olsun:

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (\exists \alpha \in I, x \notin A_\alpha),$$

burada ikinci denklik [Lemma 3.1](#)'nin (2) maddesidir. $x \in A$ koşulu α 'ya bağlı olmadığından bu, " $\exists \alpha \in I, (x \in A \text{ ve } x \notin A_\alpha)$ " ile, yani "en az bir $\alpha \in I$ için $x \in A \setminus A_\alpha$ " ile denktir; bu da $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha)$ demektir.

(d) (x, y) keyfi bir sıralı ikili olsun. Tanımlara göre

$$(x, y) \in (B \cup C) \times A \Leftrightarrow (x \in B \text{ veya } x \in C) \text{ ve } y \in A.$$

"Ve"nin "veya" üzerine dağılmasıyla bu, " $(x \in B \text{ ve } y \in A)$ veya $(x \in C \text{ ve } y \in A)$ " ile denktir; ilk parantez $(x, y) \in B \times A$, ikincisi $(x, y) \in C \times A$ demektir. Dolayısıyla koşul $(x, y) \in (B \times A) \cup (C \times A)$ ile denktir ve kümeler eşittir.

(e) Birinci eşitlik: (x, y) keyfi olsun.

$$(x, y) \in A \times \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (\exists \alpha \in I, y \in B_\alpha).$$

$x \in A$ koşulu α 'ya bağlı olmadığından bu, " $\exists \alpha \in I, (x \in A \text{ ve } y \in B_\alpha)$ " ile denktir ([Teorem 3.2](#)'nin ispatındaki gerekçeyle: $x \in A$ yanlışsa ikisi de yanlış, doğruysa ikisi de " $\exists \alpha, y \in B_\alpha$ "dır). Parantezdeki koşul $(x, y) \in A \times B_\alpha$ demektir; böylece koşul "en az bir α için $(x, y) \in A \times B_\alpha$ ", yani $(x, y) \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \times B_\alpha)$ olur.

İkinci eşitlik:

$$(x, y) \in A \times \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } (\forall \alpha \in I, y \in B_\alpha).$$

$I \neq \emptyset$ olduğundan bu, " $\forall \alpha \in I, (x \in A \text{ ve } y \in B_\alpha)$ " ile denktir ($x \in A$ doğruysa ikisi de " $\forall \alpha, y \in B_\alpha$ "ya indirgenir; yanlışsa ilki yanlıştır, ikincisi de I 'da bir indis olduğundan yanlıştır). Parantezdeki koşul $(x, y) \in A \times B_\alpha$ demektir; böylece koşul "her α için $(x, y) \in A \times B_\alpha$ ", yani $(x, y) \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \times B_\alpha)$ olur.

(f) (x, y) keyfi olsun. Tanımlara göre

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ ve } (x \in C \text{ ve } y \in D).$$

"Ve" bağlacı birleşmeli ve değişmeli olduğundan bu koşul " $(x \in A \text{ ve } x \in C) \text{ ve } (y \in B \text{ ve } y \in D)$ " ile, yani " $x \in A \cap C \text{ ve } y \in B \cap D$ " ile denktir; bu da $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ demektir. Kümeler eşittir.

(g) $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ olsun. $(a, c) \in A \times C$ alalım; $a \in A \subseteq B$ ve $c \in C \subseteq D$ olduğundan $(a, c) \in B \times D$. Böylece $A \times C \subseteq B \times D$. Karşıt için $A = \emptyset, C = \{1\}, B = D = \emptyset$ alalım: $A \times C = \emptyset \subseteq \emptyset = B \times D$ sağlanır ama $C \subseteq D$ yanlıştır. $A \times C \neq \emptyset$ olduğunda ise karşıt da doğrudur ([Önerme 3.3](#)). ■

Kartezyen çarpımı tanımladığımıza göre artık fonksiyonları, $A \times B$ 'nin özel alt kümeleri olarak kesin biçimde kurabiliriz: [Fonksiyonlar ve Bileşke](#).

4. Fonksiyonlar ve Bileşke

İndisli Aileler ve Kartezyen Çarpım bölümünde iki kümenin kartezyen çarpımını, yani sıralı ikililerin kümesini kurduk. Bu bölümde o yapının üzerine matematiğin en çok kullanılan kavramını, **fonksiyon** kavramını yerleştireceğiz. Fonksiyonu “bir formül” olarak değil, kartezyen çarpımın belirli bir koşulu sağlayan bir alt kümesi olarak tanımlayacağız. Bu bakış ilk anda fazla soyut görünebilir; ama ilerideki bölümlerde sürekli fonksiyonları, homeomorfizmaları ve ters görüntüleri incelerken bize sağlam bir zemin verecek.

Önce **atama kuralı** kavramını, sonra bir kuralın **tanım kümesini** ve **görüntü kümesini** tanımlayacağız. Ardından fonksiyonu, “bir atama kuralı ile bir değer kümesi” olarak tanımlayıp $f : A \rightarrow B$ gösterimini, $f(a)$ değerini, iki fonksiyonun ne zaman eşit olduğunu ve bir fonksiyonun bir alt kümeye **kısıtlamasını** göreceğiz. Her kümenin **birim fonksiyonu** ve kartezyen çarpımın **izdüşümleri**, topolojide tekrar tekrar karşımıza çıkacak iki temel örnektir.

Bölümün ikinci yarısında iki somut soru üzerinde çalışacağız: bir formülle verilen fonksiyonun **en geniş tanım kümesi** nedir ve **görüntüsü** tam olarak hangi kümedir? Son olarak iki fonksiyonu arka arkaya uygulayarak elde edilen **bileşke** fonksiyonu tanımlayacak, parçalı tanımlı fonksiyonların bileşkesini hesaplayacak ve bileşkenin **birleşme özelliğini** ispatlayacağız.

4.1 Atama Kuralı

Bir fonksiyon, sezgisel olarak, bir kümenin her elemanına başka bir kümeden bir eleman “atar”. Bu atamayı kesin bir dille söylemenin yolu, hangi elemanın hangi elemana gittiğini sıralı ikililerle kaydetmektir: c elemanına d atanıyorsa (c, d) ikilisini yazarız. Bu ikililerin kümesi, kartezyen çarpımın bir alt kümesidir. Tek koşul, bir elemana iki farklı şeyin atanmamasıdır.

Tanım 4.1 (Atama Kuralı). C ve D iki küme olsun. Kartezyen çarpım $C \times D$ kümesinin bir r alt kümesine, C kümesinin her elemanı r kümesine ait **en çok bir** sıralı ikilinin birinci bileşeni olarak görünüyorsa **atama kuralı** (rule of assignment) denir.

Başka bir deyişle, $r \subseteq C \times D$ alt kümesi şu koşulu sağlıyorsa bir atama kuralıdır:

$$(c, d) \in r \text{ ve } (c, d') \in r \Rightarrow d = d'.$$

Yani bir atama kuralı, “aynı c için iki farklı d yazılmamış” bir sıralı ikili listesidir. Her $c \in C$ için bir ikili yazılması gerekmez; koşul yalnızca yazılan ikililerin çelişmemesidir.

Bir atama kuralında birinci bileşen olarak görünen elemanlar ile ikinci bileşen olarak görünen elemanlar iki doğal küme oluşturur.

Tanım 4.2 (Bir Kuralın Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi). $r \subseteq C \times D$ bir atama kuralı olsun. r kuralının elemanlarının bütün birinci bileşenlerinden oluşan C alt kümesine r kuralının **tanım kümesi** (domain), elemanlarının bütün ikinci bileşenlerinden oluşan D alt kümesine r kuralının **görüntü kümesi** (image set) denir:

$$\text{tanım}(r) = \{c \in C : \text{bir } d \in D \text{ için } (c, d) \in r\},$$

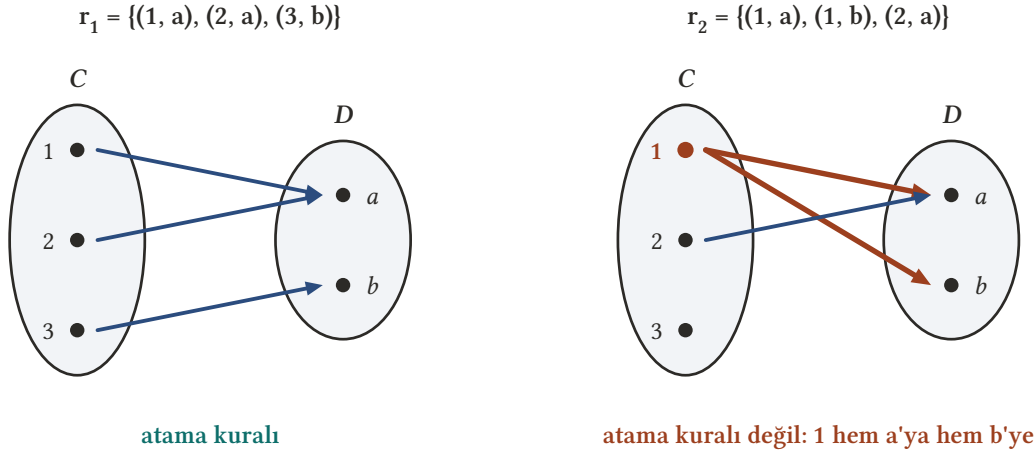
$$\text{görüntü}(r) = \{d \in D : \text{bir } c \in C \text{ için } (c, d) \in r\}.$$

Yani tanım kümesi “kendisine bir şey atanan” elemanların, görüntü kümesi ise “en az bir elemana atanan” elemanların kümesidir.

Kavramı küçük kümeler üzerinde görelim.

Örnek 4.1 (Atama Kuralı Olan ve Olmayan Alt Kümeler). $C = \{1, 2, 3\}$ ve $D = \{a, b\}$ olsun. $C \times D$ kümesinin aşağıdaki alt kümelerinden hangileri atama kuralıdır? Atama kuralı olanların tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

$$r_1 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}, \quad r_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}, \quad r_3 = \{(2, b)\}.$$



Şekil 4.1: $C = \{1, 2, 3\}$ ile $D = \{a, b\}$ arasında iki ok şeması. Solda r_1 bir atama kuralıdır: her elemandan en fazla bir ok çıkar; a 'ya iki okun gelmesi koşulu bozmaz. Sağda r_2 atama kuralı değildir, çünkü 1 elemanından hem a 'ya hem b 'ye ok çıkar; koşul yalnızca birinci bileşenleri kısıtlar.

Çözüm.

r_1 bir atama kuralıdır: birinci bileşeni 1 olan tek ikili $(1, a)$, birinci bileşeni 2 olan tek ikili $(2, a)$, birinci bileşeni 3 olan tek ikili $(3, b)$ olduğundan Tanım 4.1'ndaki koşul sağlanır. Tanım kümesi $\{1, 2, 3\} = C$, görüntü kümesi $\{a, b\} = D$ olur. a elemanının iki farklı elemana atanmış olması bir sorun değildir; koşul yalnızca birinci bileşenlerle ilgilidir.

r_2 bir atama kuralı değildir: $(1, a) \in r_2$ ve $(1, b) \in r_2$ olduğu hâlde $a \neq b$ olduğundan koşul bozulur. Yani 1 elemanına hem a hem b atanmıştır.

r_3 bir atama kuralıdır: tek elemanı olduğundan koşulu bozan bir çift bulunamaz. Tanım kümesi $\{2\}$, görüntü kümesi $\{b\}$ olur. Bu örnek, tanım kümesinin C kümesinin tamamı olmak zorunda olmadığını gösterir.

■

4.2 Fonksiyon

Bir atama kuralı, hangi elemanın nereye gittiğini söyler; ama gidilen elemanların hangi kümenin içinde düşünüldüğünü söylemez. Örneğin $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ kuralının ikinci bileşenlerini $\mathbb{R}$ içinde de, yalnızca negatif olmayan gerçel sayılar içinde de düşünebiliriz. Fonksiyon kavramı bu seçimi de kayda geçirir.

Tanım 4.3 (Fonksiyon). Bir **fonksiyon** (function) f , bir r atama kuralı ile r kuralının görüntü kümesini içeren bir B kümesinden oluşur. r kuralının tanım kümesi A 'ya f fonksiyonunun da **tanım kümesi**, r kuralının görüntü kümesine f fonksiyonunun da **görüntü kümesi** denir; B kümesine ise f fonksiyonunun **değer kümesi** (range) denir.

Tanım kümesi A , değer kümesi B olan bir f fonksiyonu

$$f : A \rightarrow B$$

biçiminde gösterilir ve “ f , A 'dan B 'ye bir fonksiyondur” ya da “ f , A 'yı B içine gönderir” diye okunur. Fonksiyon yerine **dönüşüm** (mapping) sözü de kullanılır.

Yani bir fonksiyon “kural artı değer kümesi” ikilisidir: kural her elemanın nereye gittiğini, değer kümesi ise bu gidilen yerlerin hangi kümenin içinde sayıldığını söyler. Değer kümesi görüntü kümesinden büyük olabilir; tek koşul görüntü kümesini içermesidir.

⚠ Görüntü kümesi ile değer kümesi aynı şey değildir

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonunda değer kümesi B , görüntü kümesini içeren, bizim seçtiğimiz kümedir. Görüntü kümesi ise gerçekten “değer olarak alınan” elemanların kümesidir ve B ’nin bir alt kümesidir. Bazı kitaplarda “değer kümesi” sözü görüntü kümesi anlamında kullanılır; bu kitapta değer kümesi her zaman B ’yi, görüntü kümesi her zaman $\{f(a) : a \in A\}$ kümesini gösterecektir.

Fonksiyonlarla çalışırken sıralı ikililer yerine “ a ’ya atanan eleman” dilini kullanmak daha rahattır. Bu dili kesinleştirelim.

Tanım 4.4 (Fonksiyonun Bir Noktadaki Değeri). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonunu belirleyen kuralın a elemanına atadığı B kümesinin tek elemanı $f(a)$ ile gösterilir; buna f fonksiyonunun a **noktasındaki değeri** ya da a elemanının f **altındaki görüntüsü** denir.

Başka bir deyişle, r kuralı f fonksiyonunun kuralıysa $f(a)$, $(a, f(a)) \in r$ olacak biçimdeki tek B elemanıdır.

Yani $f(a)$, kuralda birinci bileşeni a olan tek ikilinin ikinci bileşenidir. Böyle bir ikilinin var olması a ’nın tanım kümesinde olmasından, tek olması ise r ’nin bir atama kuralı olmasından gelir. Bu tanımla f fonksiyonunun kuralı

$$r = \{(a, f(a)) : a \in A\}$$

biçiminde yazılabilir; çünkü r kümesinin her elemanı, birinci bileşeni bir $a \in A$ olan bir ikilidir ve ikinci bileşeni $f(a)$ olmak zorundadır; tersine her $a \in A$ için $(a, f(a)) \in r$ olur.

Uygulamada bir fonksiyonu sıralı ikililerle değil, bir formülle veririz. İki gösterimin aynı şeyi söylediğini bir örnekte görelim.

Örnek 4.2 (Bir Kuralı Formül Olarak Yazmak). Kuralı $\{(x, x^3 + 1) : x \in \mathbb{R}\}$ ve değer kümesi $\mathbb{R}$ olan f fonksiyonunu ele alalım. Kuralın tanım kümesi, birinci bileşenlerin kümesi, $\mathbb{R}$ ’dir; her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^3 + 1$ olur. Bu yüzden aynı fonksiyon kısaca

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 1$$

diye yazılır. Bundan sonra fonksiyonları çoğunlukla bu ikinci biçimde vereceğiz; ama arka planda her zaman bir sıralı ikili kümesi ve bir değer kümesi olduğunu unutmayacağız.

4.2.1 Fonksiyonların Eşitliği

Fonksiyonlar kümelerle tanımlandığından iki fonksiyonun ne zaman eşit olduğu sorusunun kesin bir cevabı vardır. Bu cevap, iki fonksiyonun eşit olduğunu göstermek istediğimiz her yerde, özellikle bileşke ile ilgili ispatlarda kullanılacaktır.

Önerme 4.1 (Fonksiyonların Eşitliği). $f : A \rightarrow B$ ve $g : A' \rightarrow B'$ iki fonksiyon olsun. $f = g$ olması için gerek ve yeter koşul şudur: $A = A'$, $B = B'$ ve her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$.

İspat.

f fonksiyonunun kuralı $r_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$, g fonksiyonunun kuralı $r_g = \{(x, g(x)) : x \in A'\}$ olsun. Tanım gereği $f = g$ olması, $r_f = r_g$ ve $B = B'$ olması demektir.

Önce $f = g$ olsun. O zaman $B = B'$ ve $r_f = r_g$ olur. Aynı kuralın tanım kümesi tek olduğundan $A = A'$ olur. Bir $x \in A$ alalım. $(x, f(x)) \in r_f = r_g$ olduğundan $(x, f(x))$ ikilisi g kuralının bir elemanıdır; Tanım 4.4’ne göre $g(x)$, birinci bileşeni x olan tek ikilinin ikinci bileşenidir, bu yüzden $f(x) = g(x)$ olur. Şimdi $A = A'$, $B = B'$ ve her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ olsun. O zaman

$$r_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} = \{(x, g(x)) : x \in A'\} = r_g$$

olur; çünkü iki kümenin elemanları birebir aynı ikililerdir. Kurallar ve değer kümeleri aynı olduğundan $f = g$ olur. ■

İspatın özü: fonksiyon “kural artı değer kümesi” olduğundan eşitlik, kuralların (yani tanım kümelerinin ve bütün değerlerin) ve değer kümelerinin eşitliğinden ibarettir.

4.2.2 Kısıtlama

Bir fonksiyonu tanım kümesinin yalnızca bir parçasında düşünmek sık sık gerekir; örneğin bir alt uzay üzerindeki sürekliliği incelerken bunu yapacağız.

Tanım 4.5 (Kısıtlama). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $A_0 \subseteq A$ olsun. Kuralı

$$\{(a, f(a)) : a \in A_0\}$$

olan A_0 'dan B 'ye fonksiyona f fonksiyonunun A_0 **kümesine kısıtlaması** (restriction) denir ve $f|_{A_0}$ ile gösterilir; “ f 'nin A_0 'a kısıtlanması” diye okunur.

Yani $f|_{A_0}$, f ile aynı işi yapan ama yalnızca A_0 elemanlarında tanımlı olan fonksiyondur: her $a \in A_0$ için $f|_{A_0}(a) = f(a)$ ve $f|_{A_0} : A_0 \rightarrow B$. $A_0 \neq A$ olduğunda $f|_{A_0} \neq f$ olur; çünkü iki fonksiyonun tanım kümeleri farklıdır: A kümesinde A_0 'a ait olmayan bir a vardır ve $(a, f(a))$ ikilisi f kuralına aittir, ama $f|_{A_0}$ kuralına ait değildir.

Aşağıdaki örnek, aynı formülle verilen dört farklı fonksiyonu karşılaştırır ve tanım kümesinin de değer kümesinin de fonksiyonun bir parçası olduğunu gösterir.

Örnek 4.3 (Aynı Formül, Dört Farklı Fonksiyon). $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ negatif olmayan gerçel sayıların kümesi olsun. Aşağıdaki fonksiyonları ele alalım:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2; \quad g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2;$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, h(x) = x^2; \quad k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, k(x) = x^2.$$

Bu dört fonksiyonun birbirinden farklı olduğunu gösteriniz ve g ile f arasındaki ilişkiyi belirtiniz.

Çözüm.

$g \neq f$ olur; çünkü kuralları $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinin farklı alt kümeleridir: $(-1, 1)$ ikilisi f kuralına aittir, ama $-1 \notin \mathbb{R}_+$ olduğundan g kuralına ait değildir. Öte yandan g kuralı $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}_+\} = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}_+\}$ olduğundan, **Tanım 4.5**'ya göre g , f fonksiyonunun $\mathbb{R}_+$ kümesine kısıtlamasıdır: $g = f|_{\mathbb{R}_+}$. $h \neq f$ olur; kuralları aynı küme olmasına karşın h için belirtilen değer kümesi $\mathbb{R}_+$, f için belirtilen değer kümesi $\mathbb{R}$ 'den farklıdır. **Önerme 4.1**'ne göre değer kümeleri farklı olan iki fonksiyon eşit olamaz. k fonksiyonu bunların hepsinden farklıdır: tanım kümesi $\mathbb{R}_+$ olduğundan f ve h fonksiyonlarından, değer kümesi $\mathbb{R}_+$ olduğundan f ve g fonksiyonlarından ayrılır. Ayrıca $k = h|_{\mathbb{R}_+}$ olduğuna dikkat ediniz.

Dört fonksiyonun da görüntü kümesi aynıdır: $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 : x \in \mathbb{R}_+\} = \mathbb{R}_+$. Bu yüzden onları birbirinden ayıran, görüntü kümesi değil, tanım kümesi ve değer kümesidir.

■

4.2.3 Birim Fonksiyon ve İzdüşümler

Şimdi her kümede hazır bulunan iki basit fonksiyon türünü tanımlıyoruz. İkisi de **Çarpım Topolojisi** ve **Alt Uzay Topolojisi** bölümlerinde temel araç olacaktır.

Tanım 4.6 (Birim Fonksiyon ve İçerme Fonksiyonu). X bir küme olsun. Her elemanı kendisine gönderen

$$I_X : X \rightarrow X, \quad I_X(x) = x$$

fonksiyonuna X kümesinin **birim fonksiyonu** (identity map) denir.

$A \subseteq X$ ise her $a \in A$ elemanını yine kendisine, ama bu kez X 'in bir elemanı olarak gönderen

$$I_A : A \rightarrow X, \quad I_A(a) = a$$

fonksiyonuna A 'nın X içine **içerme fonksiyonu** (inclusion map) denir.

Yani birim fonksiyon “hiçbir şey yapmayan” fonksiyondur; içermeye fonksiyonu ise A ’nın elemanlarını değiştirmeden, onları daha büyük X kümesinin elemanları olarak görür. İçermeye fonksiyonu tam olarak birim fonksiyonun A ’ya kısıtlamasıdır: $I_A = I_X|_A$; çünkü ikisinin de kuralı $\{(a, a) : a \in A\}$ ve değer kümesi X ’tir. $A = X$ olduğunda içermeye fonksiyonu birim fonksiyona dönüşür.

Tanım 4.7 (İzdüşüm Fonksiyonları). X ve Y iki küme olsun. Sıralı ikilinin bileşenlerini veren

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X, \quad \pi_1(x, y) = x$$

ve

$$\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y, \quad \pi_2(x, y) = y$$

fonksiyonlarına $X \times Y$ kartezyen çarpımının **izdüşümleri** (projections) denir; π_1 birinci, π_2 ikinci izdüşümdür.

Yani π_1 bir ikilinin birinci bileşenini “okur”, π_2 ikinci bileşenini. Bunların gerçekten fonksiyon olduğuna dikkat edelim: π_1 kuralı $\{((x, y), x) : (x, y) \in X \times Y\}$ kümesidir ve bir (x, y) ikilisinin birinci bileşeni tek olduğundan bu bir atama kuralıdır. Düzlemde $X = Y = \mathbb{R}$ alınırsa $\pi_1(x, y) = x$ noktayı x eksenine, $\pi_2(x, y) = y$ noktayı y eksenine dik olarak izdüşürür; ad buradan gelir. X ve Y boş değilse π_1 fonksiyonunun görüntü kümesi X ’in tamamıdır; çünkü herhangi bir $y_0 \in Y$ seçildiğinde her $x \in X$ için $\pi_1(x, y_0) = x$ olur.

4.3 En Geniş Tanım Kümesi ve Görüntü

Bir fonksiyon çoğu zaman yalnızca bir formülle, tanım kümesi belirtilmeden verilir: “ $g(x) = \sqrt{3x - 6}$ fonksiyonu”. Böyle bir yazımda tanım kümesi olarak, formülün gerçel bir sayı verdiği bütün $x \in \mathbb{R}$ sayılarının kümesi anlaşılır. Bu kümeye formülün **en geniş tanım kümesi** (largest possible domain) denir. Değer kümesi ise aksi söylenmedikçe $\mathbb{R}$ alınır.

Görüntü kümesini bulmak bir küme eşitliği ispatıdır; iki kapsamayı da göstermek gerekir. Bir y sayısının görüntüde olduğunu göstermenin yolu, tanım kümesinde $g(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir x **bulmaktır**. Bu x ’i bulmak için $g(x) = y$ denklemini x için çözeriz; ama çözümü ispata yazarken bulduğumuz x ’in gerçekten tanım kümesinde olduğunu ve gerçekten $g(x) = y$ sağladığını ayrıca denetleriz.

Örnek 4.4 (Bir Karekök Fonksiyonunun En Geniş Tanım Kümesi ve Görüntüsü). $g(x) = \sqrt{3x - 6}$ formülüyle verilen fonksiyonun en geniş tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm.

Tanım kümesi. Karekök yalnızca negatif olmayan sayılar için gerçel bir sayı verir. Bu yüzden $\sqrt{3x - 6}$ ifadesinin anlamlı olması için gerek ve yeter koşul

$$3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$$

olmasıdır. Dolayısıyla en geniş tanım kümesi $[2, \infty)$ kümesidir ve $g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olur.

Görüntü kümesi. Görüntü kümesinin $[0, \infty)$ olduğunu, yani

$$\{g(x) : x \in [2, \infty)\} = [0, \infty)$$

eşitliğini iddia ediyoruz. İki kapsamayı ayrı ayrı gösterelim.

($\subseteq$) $x \in [2, \infty)$ olsun. Karekök hiçbir zaman negatif değer almadığından $g(x) = \sqrt{3x - 6} \geq 0$, yani $g(x) \in [0, \infty)$ olur.

($\supseteq$) $y \in [0, \infty)$ olsun; yani $y \geq 0$. Bu y ’yi değer olarak alan bir x bulmalıyız. Bunun için $g(x) = y$ denklemini çözelim: $y \geq 0$ olduğundan

$$\sqrt{3x - 6} = y \Leftrightarrow 3x - 6 = y^2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 + 6}{3}.$$

Şimdi $x := \frac{y^2 + 6}{3}$ diyelim ve iki şeyi denetleyelim.

Birincisi, x tanım kümesindedir: $y \geq 0$ olduğundan $y^2 \geq 0$, bu yüzden $y^2 + 6 \geq 6$ ve $x = \frac{y^2 + 6}{3} \geq \frac{6}{3} = 2$ olur; yani $x \in [2, \infty)$.
İkincisi, $g(x) = y$ olur:

$$g(x) = \sqrt{3 \cdot \frac{y^2 + 6}{3} - 6} = \sqrt{y^2 + 6 - 6} = \sqrt{y^2} = |y| = y;$$

son eşitlikte $y \geq 0$ kullanıldı. Böylece y , tanım kümesindeki x noktasının görüntüsüdür; yani y görüntü kümesindedir.

İki kapsama birlikte görüntü $(g) = [0, \infty)$ verir.

■

Çözümün özü: görüntüde olmasını beklediğimiz her y için $g(x) = y$ denklemini çözüp bulduğumuz x 'in tanım kümesinde kaldığını ve denklemin gerçekten sağladığını gösterdik; ters yönde ise formülün asla dışarı çıkmadığını gördük.

Aynı yöntemi bir rasyonel fonksiyonda uygulayalım. Bu kez formülü yeniden yazmak, görüntünün ne olması gerektiğini tahmin etmemize yardım edecek.

Örnek 4.5 (Bir Rasyonel Fonksiyonun Görüntüsü). $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm.

Önce formülü yeniden yazalım. Payda $x - 3$ olduğundan payı $x - 3$ cinsinden ifade edelim:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \frac{(x-3)+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}.$$

Bu yazım, f değerlerinin “1 artı sıfırdan farklı bir sayı” olduğunu gösterir; bu yüzden görüntünün $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ olduğunu iddia ediyoruz. İki kapsamayı gösterelim.

$(\subseteq) x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ olsun. $x - 3 \neq 0$ olduğundan $\frac{5}{x-3} \neq 0$ olur; bu yüzden $f(x) = 1 + \frac{5}{x-3} \neq 1$, yani $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ olur.

$(\supseteq) y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ olsun; yani $y \neq 1$. $f(x) = y$ denklemini x için çözelim. $x \neq 3$ için

$$\frac{x+2}{x-3} = y \Leftrightarrow x+2 = xy-3y \Leftrightarrow xy-x = 3y+2 \Leftrightarrow x(y-1) = 3y+2 \Leftrightarrow x = \frac{3y+2}{y-1};$$

son adımda $y - 1 \neq 0$ olduğundan bölme yapılabilir. Şimdi $x := \frac{3y+2}{y-1}$ diyelim ve iki şeyi denetleyelim.

Birincisi, x tanım kümesindedir, yani $x \neq 3$: Tersini varsayalım, $x = 3$ olsun. O zaman $\frac{3y+2}{y-1} = 3$, yani $3y+2 = 3(y-1) = 3y-3$ olur; iki taraftan $3y$ çıkarınca $2 = -3$ elde edilir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x \neq 3$ ve $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ olur.

İkincisi, $f(x) = y$ olur. Pay ve paydayı ayrı ayrı hesaplayalım:

$$x+2 = \frac{3y+2}{y-1} + 2 = \frac{3y+2+2(y-1)}{y-1} = \frac{5y}{y-1},$$

$$x-3 = \frac{3y+2}{y-1} - 3 = \frac{3y+2-3(y-1)}{y-1} = \frac{5}{y-1}.$$

Bu yüzden

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \frac{\frac{5y}{y-1}}{\frac{5}{y-1}} = \frac{5y}{y-1} \cdot \frac{y-1}{5} = y.$$

Böylece y , tanım kümesindeki x noktasının görüntüsüdür.

İki kapsama birlikte görüntü $(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ verir.

■

🔍 Görüntüyü bulmanın iki adımı

Bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun görüntüsünün bir G kümesi olduğunu göstermek için (1) her $x \in A$ için $f(x) \in G$ olduğunu, (2) her $y \in G$ için $f(x) = y$ olacak biçimde bir $x \in A$ bulunduğunu gösteririz. İkinci adımda x 'i bulmak için denklem çözeriz; ama ispat, bulunan x 'in A 'da olduğunu ve $f(x) = y$ sağladığını doğrulamakla tamamlanır.

4.4 Bileşke

Bir fonksiyonun çıktısını başka bir fonksiyona girdi olarak vermek, yeni bir fonksiyon üretir. Sürekli fonksiyonların bileşkesinin sürekli olması, homeomorfizmaların bileşkesinin homeomorfizma olması gibi ilerde kanıtlayacağımız pek çok sonuç bu işleme dayanır.

Tanım 4.8 (Bileşke). $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonlar olsun. f ile g 'nin **bileşkesi** (composite) $g \circ f$, her $a \in A$ için

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

eşitliğiyle tanımlanan $g \circ f : A \rightarrow C$ fonksiyonudur.

Sıralı ikililerle söylersek $g \circ f$, kuralı

$$\{(a, c) \in A \times C : \text{bir } b \in B \text{ için } f(a) = b \text{ ve } g(b) = c\}$$

olan ve değer kümesi C olan fonksiyondur. $g \circ f$ yalnızca f 'nin değer kümesi g 'nin tanım kümesine eşit olduğunda tanımlıdır.

Yani $g \circ f$, “önce f , sonra g ” demektir: a önce f ile B 'deki $f(a)$ noktasına, sonra g ile C 'deki $g(f(a))$ noktasına gider. Gösterimde sağdaki fonksiyon önce uygulanır; bunun nedeni $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ yazımında a 'ya en yakın harfin f olmasıdır.

Bu kuralın gerçekten bir atama kuralı olduğunu ve tanım kümesinin A olduğunu görelim. (a, c) ve (a, c') ikilileri kuralda olsun. Kuralın tanımına göre $c = g(b)$ olacak biçimde bir b vardır ve $b = f(a)$ olmak zorundadır, çünkü f bir fonksiyondur; aynı nedenle $c' = g(f(a))$ olur. Böylece $c = g(f(a)) = c'$ elde edilir ve kural bir atama kuralıdır. Ayrıca her $a \in A$ için $f(a) \in B$ olduğundan $g(f(a))$ tanımlıdır ve $(a, g(f(a)))$ ikilisi kurala aittir; bu yüzden kuralın tanım kümesi A 'nın tamamıdır.

i Bileşkenin tanımlı olma koşulu

Tanımda f 'nin değer kümesinin g 'nin tanım kümesiyle aynı olması istenir. Uygulamada f 'nin yalnızca görüntü kümesinin g 'nin tanım kümesi içinde kaldığı durumlarla da karşılaşılır; o zaman f 'nin değer kümesi, görüntüyü içerecek biçimde g 'nin tanım kümesi olarak yeniden seçilir ve bileşke alınır. Bu kitapta $g \circ f$ yazdığımızda bu düzenlemenin yapılmış olduğunu varsayacağız.

Örnek 4.6 (Bileşke Hesabı ve Sıranın Önemi). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{x-1}$ olsun. $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz ve karşılaştırınız.

Çözüm.

f 'nin değer kümesi $\mathbb{R}$, g 'nin tanım kümesi $\mathbb{R}$ olduğundan $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlıdır. Her $x \in \mathbb{R}$ için, önce f sonra g uygulanarak,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = e^{(x^2+1)-1} = e^{x^2}$$

bulunur. Aynı biçimde g 'nin değer kümesi f 'nin tanım kümesine eşit olduğundan $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de tanımlıdır ve

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{x-1}) = (e^{x-1})^2 + 1 = e^{2x-2} + 1$$

olur. İki fonksiyon farklıdır: örneğin $x = 1$ noktasında $(g \circ f)(1) = e^1 = e$, ama $(f \circ g)(1) = e^0 + 1 = 2$ olur. **Önerme 4.1**'ne göre bir noktada bile farklı değer alan iki fonksiyon eşit değildir; yani $g \circ f \neq f \circ g$. ■

⚠ Bileşke sıraya bağlıdır

Genel olarak $g \circ f \neq f \circ g$ olur; hatta biri tanımlıyken öteki tanımlı olmayabilir. Örneğin $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ için $g \circ f$ tanımlıdır, ama $C \neq A$ ise $f \circ g$ tanımlı değildir. Bu yüzden bileşke yazarken sıraya her zaman dikkat edilir.

Tanım kümesi parçalara ayrılarak verilen fonksiyonlarda bileşke hesabı biraz daha dikkat ister: ilk fonksiyonun çıktısının ikinci fonksiyonun hangi parçasına düştüğünü ayrıca belirlemek gerekir.

Örnek 4.7 (Parçalı Tanımlı Fonksiyonların Bileşkesi). $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonları

$$f(n) = \begin{cases} n+2, & n \text{ çift} \\ 2n+1, & n \text{ tek} \end{cases} \quad g(n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ çift} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm.

Önce g 'nin gerçekten $\mathbb{Z}$ 'ye giden bir fonksiyon olduğuna dikkat edelim: n tek ise $n+1$ çifttir, bu yüzden $\frac{n+1}{2}$ bir tam sayıdır.

$g \circ f$ hesabı. $g \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ve $(g \circ f)(n) = g(f(n))$. g 'nin hangi parçasının kullanılacağı $f(n)$ 'nin tek mi çift mi olduğuna bağlıdır; bu yüzden n 'ye göre iki durum inceleriz.

n çift ise $f(n) = n+2$ olur ve bu sayı çifttir (çift sayıya 2 eklenmiştir). g 'nin “çift” parçası uygulanır: $g(n+2) = 2(n+2) = 2n+4$.

n tek ise $f(n) = 2n+1$ olur ve bu sayı tektir. g 'nin “tek” parçası uygulanır: $g(2n+1) = \frac{(2n+1)+1}{2} = \frac{2n+2}{2} = n+1$.

Dolayısıyla

$$(g \circ f)(n) = \begin{cases} 2n+4, & n \text{ çift} \\ n+1, & n \text{ tek.} \end{cases}$$

$f \circ g$ hesabı. $f \circ g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ve $(f \circ g)(n) = f(g(n))$. Şimdi f 'nin hangi parçasının kullanılacağı $g(n)$ 'nin tek mi çift mi olduğuna bağlıdır.

n çift ise $g(n) = 2n$ çifttir; f 'nin “çift” parçası uygulanır: $f(2n) = 2n+2$.

n tek ise $g(n) = \frac{n+1}{2}$ olur; ama bu sayının tek mi çift mi olduğu n 'ye bağlıdır. Tek bir n sayısı 4'e bölündüğünde ya 1 ya 3 kalanını verir; iki durumu ayıralım.

$n = 4m+1$ ($m \in \mathbb{Z}$) ise $g(n) = \frac{4m+2}{2} = 2m+1$ tektir; f 'nin “tek” parçası uygulanır: $f(2m+1) = 2(2m+1)+1 = 4m+3 = n+2$.

$n = 4m+3$ ($m \in \mathbb{Z}$) ise $g(n) = \frac{4m+4}{2} = 2m+2$ çifttir; f 'nin “çift” parçası uygulanır: $f(2m+2) = 2m+4 = \frac{n+1}{2} + 2 = \frac{n+5}{2}$.

Dolayısıyla

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} 2n+2, & n \text{ çift} \\ n+2, & n = 4m+1 \text{ biçiminde} \\ \frac{n+5}{2}, & n = 4m+3 \text{ biçiminde.} \end{cases}$$

Birkaç değerle sağlama yapalım: $n = 3$ için $g(3) = 2$, $f(2) = 4$ ve formül $\frac{3+5}{2} = 4$ verir; $n = 5$ için $g(5) = 3$, $f(3) = 7$ ve formül $5 + 2 = 7$ verir. Ayrıca $n = 0$ için $(g \circ f)(0) = 4$ ve $(f \circ g)(0) = 2$ olduğundan $g \circ f \neq f \circ g$ olur.

■

4.4.1 Birleşme Özelliği ve Birim Fonksiyon

Üç fonksiyonu arka arkaya uygularken parantezleri nasıl koyduğumuzun önemi var mıdır? Önemi yoksa $h \circ g \circ f$ yazımını parantezsiz kullanabiliriz. Aşağıdaki teorem bunun güvenli olduğunu söyler; ileride homeomorfizmaların bir grup oluşturduğunu görürken de bu teorem kullanılır.

Teorem 4.1 (Bileşkenin Birleşme Özelliği). $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ ve $h : C \rightarrow D$ fonksiyonlar olsun. O zaman

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

olur.

İspat.

Önce iki tarafın da tanımlı olduğunu ve aynı tanım kümesiyle aynı değer kümesine sahip olduğunu görelim. $g \circ f : A \rightarrow C$ tanımlıdır, çünkü f 'nin değer kümesi B , g 'nin tanım kümesidir; h 'nin tanım kümesi C olduğundan $h \circ (g \circ f) : A \rightarrow D$ tanımlıdır. Benzer biçimde $h \circ g : B \rightarrow D$ tanımlıdır ve f 'nin değer kümesi B olduğundan $(h \circ g) \circ f : A \rightarrow D$ tanımlıdır. Böylece iki fonksiyonun da tanım kümesi A , değer kümesi D 'dir.

Şimdi [Önerme 4.1](#)'ne göre geriye her $a \in A$ için iki fonksiyonun aynı değeri aldığını göstermek kalır. Bir $a \in A$ alalım. Bileşke tanımını iki kez uygulayarak

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

ve yine bileşke tanımını iki kez uygulayarak

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

elde ederiz. İki sonuç aynı D elemanıdır. a keyfi olduğundan iki fonksiyon her noktada aynı değeri alır; tanım ve değer kümeleri de aynı olduğundan [Önerme 4.1](#)'ne göre eşittirler.

■

İspatın özü: parantezler nereye konursa konsun, her iki taraf da a elemanını “önce f , sonra g , sonra h ” sırasıyla $h(g(f(a)))$ noktasına götürür. Bu teorem sayesinde $h \circ g \circ f$ yazımı parantezsiz kullanılır. Birim fonksiyon, bileşke işleminde sayılardaki 1'in çarpmada oynadığı rolü oynar; kısıtlama ise içermeye fonksiyonuyla bileşke olarak yazılabilir.

Önerme 4.2 (Birim Fonksiyon, İçerme ve Bileşke). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

(a) $f \circ I_A = f$ ve $I_B \circ f = f$ olur.

(b) $A_0 \subseteq A$ ve $I_{A_0} : A_0 \rightarrow A$ içerme fonksiyonu ise $f|_{A_0} = f \circ I_{A_0}$ olur.

İspat.

(a) $I_A : A \rightarrow A$ fonksiyonunun değer kümesi A , f 'nin tanım kümesidir; bu yüzden $f \circ I_A : A \rightarrow B$ tanımlıdır ve f ile aynı tanım kümesine ve değer kümesine sahiptir. Her $a \in A$ için, bileşke tanımı ve $I_A(a) = a$ olması nedeniyle,

$$(f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a)$$

olur. [Önerme 4.1](#)'ne göre $f \circ I_A = f$ olur. Benzer biçimde f 'nin değer kümesi B , I_B 'nin tanım kümesidir; bu yüzden $I_B \circ f : A \rightarrow B$ tanımlıdır ve her $a \in A$ için

$$(I_B \circ f)(a) = I_B(f(a)) = f(a)$$

olur; çünkü I_B her elemanı kendisine gönderir. Yine [Önerme 4.1](#)'ne göre $I_B \circ f = f$ olur.

(b) $I_{A_0} : A_0 \rightarrow A$ fonksiyonunun değer kümesi A , f 'nin tanım kümesidir; bu yüzden $f \circ I_{A_0} : A_0 \rightarrow B$ tanımlıdır. **Tanım 4.5'**ya göre $f|_{A_0} : A_0 \rightarrow B$ olduğundan iki fonksiyonun tanım kümesi de değer kümesi de aynıdır. Her $a \in A_0$ için

$$(f \circ I_{A_0})(a) = f(I_{A_0}(a)) = f(a) = f|_{A_0}(a)$$

olur; ortadaki eşitlik $I_{A_0}(a) = a$ olmasından, sondaki eşitlik kısıtlamanın tanımından gelir. **Önerme 4.1'**ne göre $f|_{A_0} = f \circ I_{A_0}$ olur.

■

Bu önermenin (b) şıkkı, kısıtlamanın aslında yeni bir kavram olmadığını, içme fonksiyonuyla bileşkeden ibaret olduğunu söyler. **Alt Uzak Topoloji** bölümünde sürekli bir fonksiyonun kısıtlamasının sürekli olduğunu göstermek için tam olarak bu yazımı kullanacağız.

4.5 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (Fonksiyonlar ve Bileşke Alıştırmaları). (a) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ kümesi bir atama kuralı mıdır? $r' = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$ kümesi bir atama kuralı mıdır? Atama kuralı olanın tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

(b) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ formülünün en geniş tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

(d) **Örnek 4.7'**deki f fonksiyonu için $f \circ f$ fonksiyonunu bulunuz.

(e) $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $s(x) = (x, x^2)$ olsun. $\pi_1 \circ s$ ve $\pi_2 \circ s$ fonksiyonlarını bulunuz.

(f) $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ fonksiyonlar ve $A_0 \subseteq A$ olsun. $(g \circ f)|_{A_0} = g \circ (f|_{A_0})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

(a) r bir atama kuralı değildir: $(1, 1) \in r$ ve $(1, -1) \in r$ olduğu hâlde $1 \neq -1$ 'dir; yani 1 elemanına iki farklı sayı atanmıştır. r' ise bir atama kuralıdır: $(x, y) \in r'$ ve $(x, y') \in r'$ ise $y = x^2 = y'$ olur. Tanım kümesi, her $x \in \mathbb{R}$ için $(x, x^2) \in r'$ olduğundan, $\mathbb{R}$ 'dir. Görüntü kümesi $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$ olur; bir kare hiçbir zaman negatif değildir ve $y \geq 0$ ise $y = (\sqrt{y})^2$ olduğundan $(\sqrt{y}, y) \in r'$ olur.

(b) Formülün anlamlı olması için karekökün içi negatif olmamalı ve payda sıfır olmamalıdır: $x - 1 \geq 0$ ve $\sqrt{x-1} \neq 0$, yani $x - 1 > 0$, yani $x > 1$. En geniş tanım kümesi $(1, \infty)$ kümesidir. Görüntünün $(0, \infty)$ olduğunu gösterelim. $x > 1$ ise $\sqrt{x-1} > 0$, bu yüzden $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 0$ olur; bu $\subseteq$ kapsamıdır. Tersine $y > 0$ olsun. $h(x) = y$ denklemi $\sqrt{x-1} = \frac{1}{y}$, yani $x = 1 + \frac{1}{y^2}$ verir. $x := 1 + \frac{1}{y^2}$ diyelim. $\frac{1}{y^2} > 0$ olduğundan $x > 1$, yani x tanım kümesindedir. Ayrıca $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1/y^2}} = \frac{1}{1/y} = y$ olur; burada $y > 0$ olduğundan $\sqrt{1/y^2} = 1/y$ alındı. Dolayısıyla görüntü kümesi $(0, \infty)$ olur.

(c) Formülü yeniden yazalım: $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$. $x \neq -1$ için $\frac{3}{x+1} \neq 0$ olduğundan $f(x) \neq 2$ olur; yani görüntü $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ içindedir. Tersine $y \neq 2$ olsun. $\frac{2x-1}{x+1} = y$ denklemi $2x - 1 = xy + y$, yani $x(2 - y) = y + 1$, yani $x = \frac{y+1}{2-y}$ verir; $y \neq 2$ olduğundan bölme yapılabilir. $x := \frac{y+1}{2-y}$ diyelim. $x = -1$ olsaydı $y + 1 = -(2 - y) = y - 2$, yani $1 = -2$ olurdu; çelişki.

Dolayısıyla $x \neq -1$ ve x tanım kümesindedir. Ayrıca $x + 1 = \frac{y+1+2-y}{2-y} = \frac{3}{2-y}$ ve $2x - 1 = \frac{2y+2-2+y}{2-y} = \frac{3y}{2-y}$ olduğundan $f(x) = \frac{3y}{2-y} \cdot \frac{2-y}{3} = y$ olur. Görüntü kümesi $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ 'dir.

(d) n çift ise $f(n) = n + 2$ çifttir; bu yüzden $f(f(n)) = (n + 2) + 2 = n + 4$ olur. n tek ise $f(n) = 2n + 1$ tektir; bu yüzden $f(f(n)) = 2(2n + 1) + 1 = 4n + 3$ olur. Dolayısıyla

$$(f \circ f)(n) = \begin{cases} n + 4, & n \text{ çift} \\ 4n + 3, & n \text{ tek.} \end{cases}$$

(e) s 'nin değer kümesi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, izdüşümlerin tanım kümesidir; bu yüzden iki bileşke de tanımlıdır ve tanım kümeleri $\mathbb{R}$ 'dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $(\pi_1 \circ s)(x) = \pi_1(x, x^2) = x$ ve $(\pi_2 \circ s)(x) = \pi_2(x, x^2) = x^2$ olur. Yani $\pi_1 \circ s = I_{\mathbb{R}}$ birim fonksiyondur ve $\pi_2 \circ s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kare alma fonksiyonudur; bu [Örnek 4.3](#)'ndeki f fonksiyonudur.

(f) İki tarafın da tanım kümesi A_0 , değer kümesi C 'dir: $(g \circ f) \upharpoonright_{A_0}$, A 'dan C 'ye giden $g \circ f$ fonksiyonunun A_0 'a kısıtlamasıdır; $f \upharpoonright_{A_0} : A_0 \rightarrow B$ olduğundan ve g 'nin tanım kümesi B olduğundan $g \circ (f \upharpoonright_{A_0}) : A_0 \rightarrow C$ tanımlıdır. Her $a \in A_0$ için, kısıtlama tanımı ve bileşke tanımı sırayla uygulanarak,

$$(g \circ f) \upharpoonright_{A_0} (a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f \upharpoonright_{A_0} (a)) = (g \circ (f \upharpoonright_{A_0})) (a)$$

olur; üçüncü eşitlik $a \in A_0$ için $f \upharpoonright_{A_0} (a) = f(a)$ olmasından gelir. [Önerme 4.1](#)'ne göre iki fonksiyon eşittir.

■

Bir fonksiyonun farklı noktaları farklı noktalara götürüp götürmediği, değer kümesinin tamamını doldurup doldurmadığı ve hangi koşulda tersinin alınabileceği bir sonraki bölümün konusudur: [Birebir ve Örtten Fonksiyonlar](#), [Ters Fonksiyon](#), [Görüntü ve Ters Görüntü](#).

5. Birebir ve Örten Fonksiyonlar, Ters Fonksiyon, Görüntü ve Ters Görüntü

Fonksiyonlar ve Bileşke bölümünde fonksiyonun ne olduğunu ve iki fonksiyonun bileşkesini öğrendik. Bir fonksiyon, tanım kümesinin her elemanını değer kümesinden tam olarak bir elemana gönderir; ama bu tanım, değer kümesindeki bir elemana kaç tane elemanın gönderildiği hakkında hiçbir şey söylemez. Bazı fonksiyonlar farklı elemanları hep farklı yerlere gönderir, bazıları değer kümesindeki her elemana ulaşır, bazıları ise ikisini birden yapar. Bu bölümde önce bu üç davranışı adlandıracağız: **birebir**, **örten** ve **birebir örten** fonksiyonlar. Birebir örten bir fonksiyonun “geri alınabildiğini”, yani bir **ters fonksiyonu** olduğunu göreceğiz ve ters fonksiyonu tanımdan uğraşmadan bulmanın pratik bir yolunu ispatlayacağız. Bölümün ikinci yarısında bir fonksiyonu tek tek noktalara değil, kümelerle uygulamayı öğreneceğiz. Bir A_0 alt kümesinin bütün elemanlarının gittiği yerlerin kümesine A_0 ’ın **görüntüsü**, değer kümesindeki bir B_0 alt kümesine düşen bütün noktaların kümesine ise B_0 ’ın **ters görüntüsü** diyeceğiz. Ters görüntü, topolojinin ana kavramı olan sürekliliğin tanımında doğrudan kullanılır; bu yüzden ters görüntünün birleşim, kesişim ve tümleyenle nasıl uyum içinde olduğunu şimdiden ayrıntılı biçimde ispatlayacağız. Görüntünün ise bu işlemlerden yalnızca birleşimle uyumlu olduğunu, kesişimde yalnızca bir kapsamanın geçerli kaldığını örneklerle göreceğiz.

Bölüm boyunca $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $A_0 \subseteq A$ ve $B_0 \subseteq B$ alt kümeler olacak. Bütün ispatlar, **Kümeler ve Küme İşlemleri** bölümünde öğrendiğimiz iki kümenin eşitliğini iki yönlü kapsamayla gösterme yöntemine dayanır.

5.1 Birebir ve Örten Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun davranışını iki soruyla ölçeriz: Farklı girdiler farklı çıktılara mı gider? Değer kümesindeki her elemana ulaşıyor mu? Bu iki sorunun cevabı, aşağıdaki iki kavramı verir.

Tanım 5.1 (Birebir, Örten ve Birebir Örten Fonksiyon). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

(i) A ’nın her farklı iki elemanının f altındaki görüntüleri de farklıysa, f ’ye **birebir** (injective, one-to-one) fonksiyon denir. Biçimsel olarak f birebirdir demek, her $a, a' \in A$ için

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

olması demektir.

(ii) B ’nin her elemanı, A ’nın en az bir elemanının f altındaki görüntüsüyse, f ’ye **örten** (surjective, onto) fonksiyon denir; bu durumda “ f , A ’yı B ’nin üzerine örter” de denir. Biçimsel olarak f örtendir demek, her $b \in B$ için $b = f(a)$ olacak biçimde en az bir $a \in A$ bulunması demektir:

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

(iii) f hem birebir hem örtense f ’ye **birebir örten** (bijective) fonksiyon ya da A ile B arasında bir **eşleme** (one-to-one correspondence) denir.

Yani birebir fonksiyon iki farklı girdiyi asla aynı yere göndermez; örten fonksiyon değer kümesinde hiçbir elemanı boşta bırakmaz; birebir örten fonksiyon ise A ’nın elemanlarıyla B ’nin elemanlarını tam tamına eşleştirir.

Birebirliğin tanımdaki biçimi, “farklı girdiler farklı çıktılara gider” cümlesinin ters-karşıtıdır: “ $a \neq a'$ ise $f(a) \neq f(a')$ ” gerektirmesinin ters-karşıtı “ $f(a) = f(a')$ ise $a = a'$ ” gerektirmesidir ve **Önrmeler Mantığı ve Niceleyiciler** bölümünde gördüğümüz gibi bir gerektirme ile ters-karşıtı aynı anlama gelir. Uygulamada hep bu ikinci biçim kullanılır: $f(a) = f(a')$ eşitliğinden yola çıkılır ve $a = a'$ olduğu gösterilir. Bir fonksiyonun birebir *olmadığını* göstermek için ise $a \neq a'$ olduğu hâlde $f(a) = f(a')$ olan tek bir çift bulmak yeter.

i Birebirlik kurala, örttenlik değer kümesine bağlıdır

Bir fonksiyonun birebir olup olmadığı yalnızca fonksiyonun kuralına bağlıdır: kural farklı girdileri farklı çıktılara gönderiyorsa, değer kümesi olarak hangi küme seçilirse seçilsin fonksiyon birebirdir. Örttenlik ise kuralın yanı sıra değer kümesine de bağlıdır: aynı kuralla verilen bir fonksiyon, değer kümesi büyütülürse örttenliğini kaybedebilir, küçültülürse örtten hâle gelebilir. Aşağıdaki örnek bu farkı dört fonksiyon üzerinde gösterir.

Fonksiyonlar ve Bileşke bölümündeki kısıtlama kavramını hatırlayalım: $f : A \rightarrow B$ ve $A_0 \subseteq A$ ise $f|_{A_0} : A_0 \rightarrow B$, her $x \in A_0$ için $f|_{A_0}(x) = f(x)$ kuralıyla tanımlanan fonksiyondur. Yani kısıtlama, aynı kuralı daha küçük bir kümede uygulamaktır.

Örnek 5.1 (Kare Fonksiyonunun Dört Sürümü). $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ negatif olmayan gerçel sayıların kümesi olsun. Aynı $x \mapsto x^2$ kuralıyla verilen şu dört fonksiyonu ele alalım:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty).$$

Burada $g = f|_{[0, \infty)}$ fonksiyonu f 'nin tanım kümesinin kısıtlanmasıyla, h fonksiyonu f 'nin değer kümesinin değiştirilmesiyle, k fonksiyonu ise ikisinin birden yapılmasıyla elde edilmiştir. Bu dört fonksiyondan hangileri birebir, hangileri örttendir?

Çözüm.

f ne birebir ne örttendir. $-1 \neq 1$ olduğu hâlde $f(-1) = 1 = f(1)$ olduğundan f birebir değildir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ olduğundan -1 sayısı hiçbir x için $f(x)$ 'e eşit olamaz; bu yüzden f örtten de değildir.

g birebirdir ama örtten değildir. $x, y \in [0, \infty)$ ve $g(x) = g(y)$ olsun. O zaman $x^2 = y^2$, yani $(x - y)(x + y) = 0$ olur. İki durum vardır: $x + y = 0$ ise, $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olduğundan $x = y = 0$; $x + y \neq 0$ ise $x - y = 0$, yani $x = y$. Her iki durumda da $x = y$ bulunur; bu yüzden g birebirdir. Öte yandan g 'nin değer kümesi hâlâ $\mathbb{R}$ 'dir ve -1 sayısına yine ulaşamaz; bu yüzden g örtten değildir.

h örttendir ama birebir değildir. $y \in [0, \infty)$ verilsin. $y \geq 0$ olduğundan $\sqrt{y}$ tanımlıdır ve $h(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ olur; bu yüzden değer kümesindeki her y 'ye ulaşılır ve h örttendir. Ama $h(-1) = h(1)$ olduğundan h birebir değildir: değer kümesini değiştirmek kuralı değiştirmez, dolayısıyla birebirliği etkilemez.

k hem birebir hem örttendir. k 'nin kuralı ve tanım kümesi g ile aynıdır; birebirlik yalnızca bunlara bağlı olduğundan k de birebirdir. k 'nin kuralı ve değer kümesi h ile aynıdır ve h 'nin örttenliğini gösterirken bulduğumuz $\sqrt{y}$ sayısı $[0, \infty)$ kümesindedir; bu yüzden k de örttendir. Dolayısıyla k birebir örttendir. İleride göreceğimiz gibi k 'nin bir ters fonksiyonu vardır ve bu ters fonksiyon karekök fonksiyonudur.

■

Aynı düşüncüyü, birebir olmayan bir fonksiyonu kısıtlayarak birebir yapmak için de kullanırız.

Örnek 5.2 (Sinüs Fonksiyonunun Birebir Kısıtlaması). $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu birebir midir? Değilse f 'nin birebir olan bir kısıtlamasını bulunuz.

Çözüm.

f birebir değildir, çünkü $0 \neq \pi$ olduğu hâlde

$$f(0) = \sin 0 = 0 = \sin \pi = f(\pi)$$

olur.

$A_0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alalım ve $f|_{A_0}$ kısıtlamasının birebir olduğunu gösterelim. Analizden bildiğimiz gibi sinüs fonksiyonu A_0 aralığında kesin artandır: A_0 içinde $x < y$ ise $\sin x < \sin y$ olur. Şimdi $x, y \in A_0$ ve $\sin x = \sin y$ olsun. $x < y$ olsaydı $\sin x < \sin y$ olurdu; $y < x$ olsaydı $\sin y < \sin x$ olurdu. İkisi de eşitlikle çelişir; bu yüzden $x = y$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $f|_{A_0}$ birebirdir. Tanım kümesini bu aralığa küçültmekle kuralı değiştirmedik; birebir olmayan bir fonksiyondan, yalnızca tanım kümesini daraltarak birebir bir fonksiyon elde ettik.

■

Kesirli bir fonksiyonun birebir örten olduğunu göstermek için de aynı iki adımı izleriz: önce $f(x_1) = f(x_2)$ eşitliğinden $x_1 = x_2$ çıkarılır, sonra verilen her y için $f(x) = y$ denklemi x için çözülür.

Örnek 5.3 (Kesirli Bir Fonksiyonun Birebir Örtenliği). $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

kuralıyla verilsin. f 'nin birebir örten olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Fonksiyonun iyi tanımlı olduğu. Önce f 'nin gerçekten $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesine gittiğini görelim. $x \neq 3$ olduğundan payda sıfır olmaz. Bir x için $f(x) = 1$ olsaydı $x+2 = x-3$, yani $2 = -3$ olurdu; bu imkânsızdır. Bu yüzden her $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ için $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ olur.

Birebirlik. $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. O zaman

$$\frac{x_1+2}{x_1-3} = \frac{x_2+2}{x_2-3}$$

olur. Paydalar sıfırdan farklı olduğundan içler dışlar çarpımı yapabiliriz:

$$(x_1+2)(x_2-3) = (x_2+2)(x_1-3) \Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2 - 6 = x_1x_2 - 3x_2 + 2x_1 - 6.$$

İki taraftan x_1x_2 ve -6 terimlerini sadeleştirirsek $-3x_1 + 2x_2 = 2x_1 - 3x_2$, buradan $5x_2 = 5x_1$ ve $x_1 = x_2$ bulunur. Bu yüzden f birebirdir.

Örtenlik. $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ verilsin. $f(x) = y$ olacak bir $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ arıyoruz. $y \neq 1$ olduğundan

$$x = \frac{3y+2}{y-1}$$

sayısı tanımlıdır. İki şeyi kontrol etmeliyiz. Birincisi, $x \neq 3$ olmalıdır: $\frac{3y+2}{y-1} = 3$ olsaydı $3y+2 = 3y-3$, yani $2 = -3$ olurdu; bu imkânsızdır. Bu yüzden $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. İkincisi, $f(x) = y$ olmalıdır:

$$f(x) = \frac{\frac{3y+2}{y-1} + 2}{\frac{3y+2}{y-1} - 3} = \frac{(3y+2) + 2(y-1)}{(3y+2) - 3(y-1)} = \frac{5y}{5} = y.$$

Burada ikinci eşitlikte pay ve paydayı $y-1 \neq 0$ ile çarptık. Böylece her $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ için $f(x) = y$ olan bir $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ bulduk; f örtendir.

f hem birebir hem örten olduğundan birebir örtendir.

■

5.2 Ters Fonksiyon

Birebir örten bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu A 'nın elemanlarıyla B 'nin elemanlarını tam tamına eşleştirir. O hâlde eşleştirmeyi ters yönde okuyabiliriz: B 'nin her elemanına, ona eşlenen A elemanını gönderen bir fonksiyon vardır.

Tanım 5.2 (Ters Fonksiyon). $f : A \rightarrow B$ birebir örten olsun. Her $b \in B$ için $f(a) = b$ eşitliğini sağlayan **tek** $a \in A$ elemanını $f^{-1}(b)$ ile gösterelim. Böylece tanımlanan

$$f^{-1} : B \rightarrow A, \quad f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

fonksiyonuna f 'nin **ters fonksiyonu** (inverse) denir.

Yani f^{-1} , f 'nin oklarını tersine çevirir: f hangi a 'yı b 'ye gönderiyorsa f^{-1} o b 'yi geri a 'ya gönderir. Bu tanımın gerçekten bir fonksiyon verdiğini iki adımda görürüz. $b \in B$ verilsin. f örten olduğundan $f(a) = b$ olan en az bir $a \in A$ vardır; f birebir olduğundan böyle bir a **yalnızca bir tanedir** (çünkü $f(a) = b = f(a')$ ise birebirlikten $a = a'$). Dolayısıyla $f^{-1}(b)$ tam olarak bir elemanı gösterir ve f^{-1} bir fonksiyondur. Örtenlik olmasaydı bazı b 'lere değer atanamazdı; birebirlik olmasaydı bazı b 'lere birden çok değer atay olurdu.

Tanımdan hemen çıkan iki eşitlik, ters fonksiyonla çalışırken sürekli kullanılır: her $a \in A$ için $f^{-1}(f(a)) = a$ ve her $b \in B$ için $f(f^{-1}(b)) = b$. Gerçekten, $f(a) = b$ dersek tanım gereği $f^{-1}(b) = a$, yani $f^{-1}(f(a)) = a$ olur; ikinci eşitlik için $a = f^{-1}(b)$ dersek tanım gereği $f(a) = b$, yani $f(f^{-1}(b)) = b$ olur. **Fonksiyonlar ve Bileşke** bölümündeki bileşke ve birim fonksiyon gösterimiyle bu iki eşitlik $f^{-1} \circ f = I_A$ ve $f \circ f^{-1} = I_B$ biçiminde yazılır; burada $I_A : A \rightarrow A$, $I_A(a) = a$ ve $I_B : B \rightarrow B$, $I_B(b) = b$ birim fonksiyonlardır.

Ters fonksiyonun kendisi de birebir örtendir ve onun tersi, başladığımız fonksiyondur. Bu, “tersini almak” işleminin geri alınabilir olduğunu söyler.

Önerme 5.1 (Ters Fonksiyon da Birebir Örtendir). $f : A \rightarrow B$ birebir örten ise $f^{-1} : B \rightarrow A$ da birebir örtendir ve $(f^{-1})^{-1} = f$ olur.

İspat.

f^{-1} birebirdir. $b, b' \in B$ ve $f^{-1}(b) = f^{-1}(b')$ olsun. İki tarafa f uygularsak $f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(b'))$ olur. Yukarıda gördüğümüz $f(f^{-1}(b)) = b$ eşitliği gereği sol taraf b , sağ taraf b' eder; bu yüzden $b = b'$. Dolayısıyla f^{-1} birebirdir.

f^{-1} örtendir. $a \in A$ verilsin. $b = f(a)$ diyelim; $b \in B$ olur. Tanım gereği $f^{-1}(b) = a$, yani a elemanı f^{-1} altında b 'nin görüntüsüdür. A 'nın her elemanı için böyle bir b bulunduğundan f^{-1} örtendir. $(f^{-1})^{-1} = f$. f^{-1} birebir örten olduğundan tersi tanımlıdır ve **Tanım 5.2'**a göre $a \in A$ için $(f^{-1})^{-1}(a)$, $f^{-1}(b) = a$ eşitliğini sağlayan tek $b \in B$ elemanıdır. $f^{-1}(b) = a$ ise tanım gereği $f(a) = b$; bu yüzden bu tek eleman $f(a)$ 'dır. Böylece her $a \in A$ için $(f^{-1})^{-1}(a) = f(a)$, yani $(f^{-1})^{-1} = f$ bulunur.

■

Ters fonksiyonu tanımdan hareketle bulmak, her b için $f(a) = b$ denklemini çözmeyi gerektirir. Uygulamada çoğu zaman tersin ne olması gerektiğini tahmin eder, sonra tahminimizin doğru olduğunu iki eşitliği kontrol ederek gösteririz. Aşağıdaki lemma bu yöntemin geçerli olduğunu, üstelik f 'nin birebir örten olduğunu ayrıca ispatlamaya gerek kalmadığını söyler.

Lemma 5.1 (Sol ve Sağ Ters Varsa Fonksiyon Birebir Örtendir). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Her $a \in A$ için $g(f(a)) = a$ ve her $b \in B$ için $f(h(b)) = b$ olacak biçimde $g : B \rightarrow A$ ve $h : B \rightarrow A$ fonksiyonları varsa, f birebir örtendir ve $g = h = f^{-1}$ olur.

İspat.

f birebirdir. $a, a' \in A$ ve $f(a) = f(a')$ olsun. İki tarafa g uygularsak $g(f(a)) = g(f(a'))$ olur. Varsayım gereği $g(f(a)) = a$ ve $g(f(a')) = a'$ olduğundan $a = a'$ bulunur.

f örtendir. $b \in B$ verilsin. $a = h(b)$ alalım; h 'nin değer kümesi A olduğundan $a \in A$ 'dır. Varsayım gereği $f(a) = f(h(b)) = b$ olur. Böylece her $b \in B$ için $f(a) = b$ olan bir $a \in A$ bulduk.

f birebir ve örten olduğundan birebir örtendir; dolayısıyla f^{-1} tanımlıdır.

$g = f^{-1}$. $b \in B$ verilsin ve $a = f^{-1}(b)$ diyelim; ters fonksiyonun tanımı gereği $f(a) = b$ olur. O zaman

$$g(b) = g(f(a)) = a = f^{-1}(b)$$

olur; burada ilk eşitlik $b = f(a)$ olmasından, ikincisi g hakkındaki varsayımdan gelir. b keyfî olduğundan $g = f^{-1}$.

$h = f^{-1}$. $b \in B$ verilsin. Varsayım gereği $f(h(b)) = b$ 'dir; yani $h(b)$, f altında b 'ye giden bir elemandır. f birebir olduğundan b 'ye giden eleman tektir ve tanım gereği bu eleman $f^{-1}(b)$ 'dir. Bu yüzden $h(b) = f^{-1}(b)$; b keyfî olduğundan $h = f^{-1}$.

Sonuç olarak $g = f^{-1} = h$.

■

İspatın özü: soldan ters, birebirliği; sağdan ters, örtenliği verir; birebir örten bir fonksiyonun tersi tek olduğundan ikisi de f^{-1} 'e eşit olmak zorundadır.

Lemma'yı **Örnek 5.3** üzerinde deneyelim. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ için $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $g(y) = \frac{3y+2}{y-1}$ alalım; örtenlik adımımda $g(y) \neq 3$ ve $f(g(y)) = y$ olduğunu zaten gösterdik. Aynı hesap ters yönde de çalışır: $x \neq 3$ için

$$g(f(x)) = \frac{3 \cdot \frac{x+2}{x-3} + 2}{\frac{x+2}{x-3} - 1} = \frac{3(x+2) + 2(x-3)}{(x+2) - (x-3)} = \frac{5x}{5} = x.$$

O hâlde g hem sol hem sağ terstir ve Lemma 5.1'e göre f birebir örten, $f^{-1} = g$ 'dir. Benzer biçimde Örnek 5.1'ndaki $k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $k(x) = x^2$ için $s(y) = \sqrt{y}$ alınırsa her $y \geq 0$ için $k(s(y)) = (\sqrt{y})^2 = y$ ve her $x \geq 0$ için $s(k(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x$ olur; bu yüzden k^{-1} karekök fonksiyonudur. Aynı s fonksiyonu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ için sol ters **olamaz**, çünkü $s(f(-1)) = 1 \neq -1$; bu da f 'nin birebir olmadığını bir kez daha gösterir.

5.3 Görüntü ve Ters Görüntü

Şimdiye kadar fonksiyonu tek tek noktalara uyguladık. Fonksiyonu bir alt kümenin bütün noktalarına birden uygulamak da doğaldır: $A_0 \subseteq A$ ise A_0 'ın elemanlarının gittiği yerleri toplayabiliriz; $B_0 \subseteq B$ ise B_0 'a düşen bütün noktaları toplayabiliriz.

Tanım 5.3 (Görüntü ve Ters Görüntü). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

(i) $A_0 \subseteq A$ ise

$$f(A_0) = \{f(a) : a \in A_0\} = \{b \in B : \text{en az bir } a \in A_0 \text{ için } f(a) = b\}$$

kümesine A_0 'ın f altındaki **görüntüsü** (image) denir.

(ii) $B_0 \subseteq B$ ise

$$f^{-1}(B_0) = \{a \in A : f(a) \in B_0\}$$

kümesine B_0 'ın f altındaki **ters görüntüsü** (preimage, inverse image) denir.

Yani $f(A_0)$, A_0 'daki noktaların gittiği yerlerin kümesi; $f^{-1}(B_0)$ ise B_0 'a giden noktaların kümesidir. Her iki tanımı da elemanlar düzeyinde şu iki denklekle kullanırız:

$$b \in f(A_0) \Leftrightarrow \exists a \in A_0 : f(a) = b, \quad a \in f^{-1}(B_0) \Leftrightarrow f(a) \in B_0.$$

Görüntü B 'nin, ters görüntü A 'nın bir alt kümesidir: $f(A_0) \subseteq B$ ve $f^{-1}(B_0) \subseteq A$. Özel olarak $f(A)$, f 'nin aldığı bütün değerlerin kümesidir ve f 'nin örten olması tam olarak $f(A) = B$ olması demektir. Gerçekten, $f(A) \subseteq B$ her zaman doğrudur; $B \subseteq f(A)$ olması ise B 'nin her elemanının A 'nın en az bir elemanının görüntüsü olması, yani örtenlik tanımının kendisidir.

⚠ Ters görüntü için ters fonksiyon gerekmez

$f^{-1}(B_0)$ gösterimi f 'nin birebir örten olmasını **gerekletirmez**; f herhangi bir fonksiyon olabilir. Burada f^{-1} tek başına bir fonksiyon değildir; $f^{-1}(B_0)$ yalnızca “ f altında B_0 'a giden noktaların kümesi” anlamına gelen tek parça bir gösterimdir. Ayrıca A 'nın görüntüsü B_0 'a düşen hiçbir noktası olmayabilir; bu durumda $f^{-1}(B_0) = \emptyset$ olur. Örneğin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ için $f^{-1}([-3, -1]) = \emptyset$ 'dir, çünkü hiçbir kare negatif değildir.

f birebir örten olduğunda ise $f^{-1}(B_0)$ yazılışının iki anlamı vardır: B_0 'ın f altındaki ters görüntüsü ve B_0 'ın $f^{-1} : B \rightarrow A$ fonksiyonu altındaki görüntüsü. Bu iki anlamın çakıştığını göstermek, gösterimin belirsizlik yaratmadığını garanti eder.

Önerme 5.2 (Birebir Örten Fonksiyonda İki Anlam Çakışır). $f : A \rightarrow B$ birebir örten ve $B_0 \subseteq B$ olsun. B_0 'ın f altındaki ters görüntüsü ile B_0 'ın f^{-1} fonksiyonu altındaki görüntüsü aynı kümedir:

$$\{a \in A : f(a) \in B_0\} = \{f^{-1}(b) : b \in B_0\}.$$

İspat.

Sol kümeye P , sağ kümeye Q diyelim.

$P \subseteq Q$. $a \in P$ olsun; yani $f(a) \in B_0$. $b = f(a)$ dersek $b \in B_0$ ve ters fonksiyonun tanımı gereği $f^{-1}(b) = a$ olur. Bu yüzden a , B_0 'ın bir elemanının f^{-1} altındaki görüntüsüdür: $a \in Q$.

$Q \subseteq P$. $a \in Q$ olsun; yani bir $b \in B_0$ için $a = f^{-1}(b)$. Ters fonksiyonun tanımı gereği $f(a) = b \in B_0$ olur; bu yüzden $a \in P$.

İki yönlü kapsama eşitliği verir.

■

Görüntü ve ters görüntüyü somut bir fonksiyonda hesaplayalım. Bir görüntü kümesini bulmak her zaman iki yönlü kapsama gerektirir: önce A_0 'daki her noktanın görüntüsünün aday kümeye düştüğü, sonra aday kümedeki her noktanın gerçekten bir görüntü olduğu gösterilir. Ters görüntü ise doğrudan tanımdaki denklik zinciriyle bulunur.

Örnek 5.4 (Bir Parabolde Görüntü ve Ters Görüntü). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3$ olsun. Şu kümeleri bulunuz:

a) $f([0, 2])$; b) $f^{-1}([1, 7])$; c) $f([-1, 3])$.

Çözüm.

a) $f([0, 2]) = [3, 7]$. İki kapsama gösterilecek.

$f([0, 2]) \subseteq [3, 7]$: $x \in [0, 2]$ olsun. $0 \leq x \leq 2$ olduğundan ve kare alma $[0, \infty)$ üzerinde artan olduğundan $0 \leq x^2 \leq 4$, buradan $3 \leq x^2 + 3 \leq 7$, yani $f(x) \in [3, 7]$ olur.

$[3, 7] \subseteq f([0, 2])$: $y \in [3, 7]$ olsun. $f(x) = y$ olan bir $x \in [0, 2]$ bulmalıyız. $y - 3 \geq 0$ olduğundan $x = \sqrt{y - 3}$ tanımlıdır ve $x \geq 0$ 'dır. $3 \leq y \leq 7$ olduğundan $0 \leq y - 3 \leq 4$ ve karekök artan olduğundan $0 \leq \sqrt{y - 3} \leq 2$, yani $x \in [0, 2]$ olur. Ayrıca $f(x) = (\sqrt{y - 3})^2 + 3 = y - 3 + 3 = y$. Bu yüzden $y \in f([0, 2])$.

b) $f^{-1}([1, 7]) = [-2, 2]$. Ters görüntünün tanımını kullanarak

$$x \in f^{-1}([1, 7]) \Leftrightarrow f(x) \in [1, 7] \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 3 \leq 7 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 \leq 4$$

yazarız. $x^2 \geq 0$ her zaman doğru olduğundan soldaki $-2 \leq x^2$ koşulu otomatik sağlanır ve geriye $x^2 \leq 4$ kalır. $x^2 \leq 4$ ise $|x| \leq 2$, yani $-2 \leq x \leq 2$ ile aynı şeydir. Bu yüzden $x \in f^{-1}([1, 7]) \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$, yani $f^{-1}([1, 7]) = [-2, 2]$. Değer kümesindeki $[1, 3]$ parçasına hiçbir nokta gitmediğine dikkat edin; ters görüntü bundan etkilenmez.

c) $f([-1, 3]) = [3, 12]$. Yine iki kapsama gösterilecek.

$f([-1, 3]) \subseteq [3, 12]$: $x \in [-1, 3]$ olsun. Her x için $x^2 \geq 0$ 'dır. Öte yandan $-1 \leq x \leq 3$ ise $|x| \leq 3$ olur (çünkü $x \geq 0$ ise $|x| = x \leq 3$, $x < 0$ ise $|x| = -x \leq 1 \leq 3$); bu yüzden $x^2 = |x|^2 \leq 9$. Dolayısıyla $0 \leq x^2 \leq 9$ ve $3 \leq f(x) \leq 12$.

$[3, 12] \subseteq f([-1, 3])$: $y \in [3, 12]$ olsun. $x = \sqrt{y - 3}$ alalım. $0 \leq y - 3 \leq 9$ olduğundan $0 \leq x \leq 3$, yani $x \in [0, 3] \subseteq [-1, 3]$ olur ve $f(x) = y - 3 + 3 = y$. Bu yüzden $y \in f([-1, 3])$.

■

Görüntü ile ters görüntüyü art arda uygulayınca başladığımız kümeye geri dönmeyi bekleyebiliriz; ama bu genel olarak doğru değildir. Aşağıdaki örnek iki yönde de ne olduğunu gösterir.

Örnek 5.5 (Görüntünün Ters Görüntüsü ve Ters Görüntünün Görüntüsü). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2$ olsun. $f^{-1}(f([0, 1]))$ ve $f(f^{-1}([0, 5]))$ kümelerini bulunuz.

Çözüm.

$f([0, 1]) = [2, 5]$. $x \in [0, 1]$ ise $0 \leq x^2 \leq 1$, dolayısıyla $2 \leq 3x^2 + 2 \leq 5$; bu $f([0, 1]) \subseteq [2, 5]$ verir. Tersine $y \in [2, 5]$ ise $x = \sqrt{(y - 2)/3}$ alalım: $0 \leq (y - 2)/3 \leq 1$ olduğundan $x \in [0, 1]$ ve $f(x) = 3 \cdot \frac{y-2}{3} + 2 = y$ olur; bu $[2, 5] \subseteq f([0, 1])$ verir.

$f^{-1}([2, 5]) = [-1, 1]$. Tanım gereği

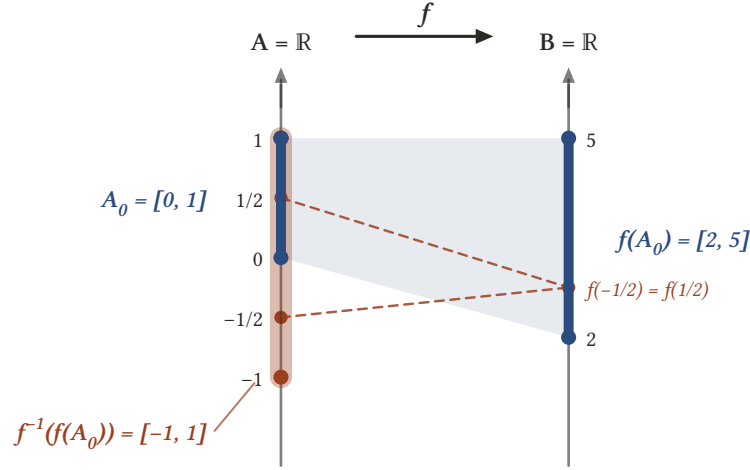
$$x \in f^{-1}([2, 5]) \Leftrightarrow 2 \leq 3x^2 + 2 \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1].$$

Böylece $f^{-1}(f([0, 1])) = f^{-1}([2, 5]) = [-1, 1]$ bulunur. Başladığımız $[0, 1]$ kümesi $[-1, 1]$ 'in içindedir ama ona eşit değildir: $-\frac{1}{2} \notin [0, 1]$ olduğu hâlde $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \in f([0, 1])$ olduğundan $-\frac{1}{2}$ ters görüntüye girer. Sebep, f 'nin birebir olmamasıdır.

$f^{-1}([0, 5]) = [-1, 1]$. $x \in f^{-1}([0, 5]) \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2 + 2 \leq 5$; soldaki eşitsizlik her x için doğrudur, sağdaki $x^2 \leq 1$ ile aynıdır. Bu yüzden $f^{-1}([0, 5]) = [-1, 1]$.

$f([-1, 1]) = [2, 5]$. $x \in [-1, 1]$ ise $0 \leq x^2 \leq 1$, dolayısıyla $f(x) \in [2, 5]$; tersi için yukarıdaki $x = \sqrt{(y - 2)/3} \in [0, 1] \subseteq [-1, 1]$ seçimi işe yarar.

Böylece $f(f^{-1}([0, 5])) = f([-1, 1]) = [2, 5]$ bulunur. Bu küme başladığımız $[0, 5]$ kümesinin içindedir ama ona eşit değildir: $[0, 2]$ parçasına f hiç ulaşmaz. Sebep, f 'nin örten olmamasıdır.



Şekil 5.1: $f(x) = 3x^2 + 2$ için görüntü ile ters görüntünün art arda uygulanması. $A_0 = [0, 1]$ kümesinin görüntüsü $f(A_0) = [2, 5]$ 'tir; bu aralığın ters görüntüsü ise $[-1, 1]$, yani A_0 'dan daha büyük bir kümedir. Sebep f 'nin birebir olmamasıdır: $-1/2 \notin A_0$ olduğu hâlde $f(-1/2) = f(1/2) \in f(A_0)$ olduğundan $-1/2$ ters görüntüye girer. Genel olarak yalnızca $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$ kapsaması geçerlidir.

■

5.4 Ters Görüntünün Küme İşlemleriyle Uyumunu

Ters görüntü alma işlemi, B 'nin alt kümeleri üzerinde son derece iyi davranır: kapsamayı, birleşimi, kesişimi, farkı ve tümleyeni korur. Bu özellikler ileride sürekli fonksiyonlarla çalışırken sürekli kullanılacak; örneğin açık kümelerin ters görüntülerinin kesişimi ve birleşimi hakkında konuşurken bu teoreme dayanacağız. Bütün ispatlar, $a \in f^{-1}(B_0) \Leftrightarrow f(a) \in B_0$ denkleğini bir zincir hâlinde uygulamaktan ibarettir.

Teorem 5.1 (Ters Görüntü Küme İşlemlerini Korum). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $B_1, B_2 \subseteq B$ olsun. O zaman:

- (i) $B_1 \subseteq B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.
- (ii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- (iii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- (iv) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
- (v) $f^{-1}(B \setminus B_1) = A \setminus f^{-1}(B_1)$; yani ters görüntü tümleyeni tümleyene götürür.
- (vi) $f^{-1}(B) = A$ ve $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

İspat.

(i) $B_1 \subseteq B_2$ olsun ve $a \in f^{-1}(B_1)$ alalım. Tanım gereği $f(a) \in B_1$ 'dir. $B_1 \subseteq B_2$ olduğundan $f(a) \in B_2$, yani yine tanım gereği $a \in f^{-1}(B_2)$.

(ii) Her $a \in A$ için

$$\begin{aligned}
 a \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \cup B_2 && \text{(ters görüntü tanımı)} \\
 &\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \text{ veya } f(a) \in B_2 && \text{(birleşim tanımı)} \\
 &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \text{ veya } a \in f^{-1}(B_2) && \text{(ters görüntü tanımı, iki kez)} \\
 &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) && \text{(birleşim tanımı)}
 \end{aligned}$$

olur. İki kümenin elemanları tam olarak aynı olduğundan kümeler eşittir.

(iii) Aynı zincirde “veya” yerine “ve”, birleşim yerine kesişim gelir:

$$\begin{aligned}
a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \cap B_2 \\
&\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \text{ ve } f(a) \in B_2 \\
&\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \text{ ve } a \in f^{-1}(B_2) \\
&\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).
\end{aligned}$$

İlk ve üçüncü denklik ters görüntü tanımından, ikinci ve dördüncü denklik kesişim tanımından gelir.

(iv) $B_1 \setminus B_2 = \{b \in B_1 : b \notin B_2\}$ olduğunu hatırlayalım. Her $a \in A$ için

$$\begin{aligned}
a \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \setminus B_2 \\
&\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \text{ ve } f(a) \notin B_2 \\
&\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \text{ ve } a \notin f^{-1}(B_2) \\
&\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).
\end{aligned}$$

Üçüncü denklikte “ $f(a) \notin B_2 \Leftrightarrow a \notin f^{-1}(B_2)$ ” adımı, “ $f(a) \in B_2 \Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_2)$ ” denkleğinin iki tarafının olumsuzlanmasıdır.

(v) Önce $f^{-1}(B) = A$ olduğunu görelim: her $a \in A$ için $f(a) \in B$ ’dir, çünkü f ’nin değer kümesi B ’dir; bu yüzden her $a \in A$ aynı zamanda $f^{-1}(B)$ ’nin elemanıdır ve $f^{-1}(B) \subseteq A$ zaten tanımdan gelir. Şimdi (iv)’ü B ve B_1 kümelerine (yani oradaki ilk küme yerine B , ikinci küme yerine B_1 olarak) uygularsak

$$f^{-1}(B \setminus B_1) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B_1) = A \setminus f^{-1}(B_1)$$

bulunur.

(vi) $f^{-1}(B) = A$ eşitliği (v)’in ispatında gösterildi. $f^{-1}(\emptyset)$ için: bir $a \in A$ bu kümede olsaydı $f(a) \in \emptyset$ olurdu; boş kümenin elemanı olmadığından bu imkânsızdır. Bu yüzden $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

■

İspatın özü: ters görüntünün tanımı bir *denklik*dir (“ $a \in f^{-1}(B_0) \Leftrightarrow f(a) \in B_0$ ”), bu yüzden küme işlemlerinin tanımlarıyla birleşince her adım iki yönde de geçerli kalır.

i Sonlu olmayan aileler için de doğrudur

Teoremin (ii) ve (iii) maddeleri yalnızca iki küme için değil, **İndisli Aileler ve Kartezyen Çarpım** bölümündeki anlamda herhangi bir $\{B_i\}_{i \in I}$ ailesi için de doğrudur:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

İspatı, “veya” yerine “en az bir $i \in I$ için”, “ve” yerine “her $i \in I$ için” gelecek biçimde aynı zinciri yazmaktan ibarettir; her iki eşitliğin tam ispatı alıştırılarda verilmiştir. Topolojide açık kümelerin keyfi birleşimleriyle çalışacağımız için bu genel biçim önemlidir.

5.5 Görüntünün Küme İşlemleriyle Uyumu

Görüntü alma işlemi ters görüntü kadar iyi davranmaz: kapsamayı ve birleşimi korur, ama kesişimde yalnızca bir yönlü kapsama kalır ve fark korunmaz. Bunun nedeni görüntü tanımındaki “en az bir $a \in A_0$ için” niceleyicisidir; bir denklik zinciri kurulurken “vardır” niceleyicisi “ve” bağlacıyla uyumlu değildir. Aşağıdaki teorem neyin doğru kaldığını, ardından gelen örnek neyin bozulduğunu gösterir.

Teorem 5.2 (Görüntü Birleşimi Korur, Kesişimde Kapsama Verir). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $A_1, A_2 \subseteq A$ olsun. O zaman:

- (i) $A_1 \subseteq A_2$ ise $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.
- (ii) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- (iii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
- (iv) f birebir ise (iii)’teki kapsama eşitliktir: $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

İspat.

- (i) $A_1 \subseteq A_2$ olsun ve $b \in f(A_1)$ alalım. Görüntü tanımı gereği $f(a) = b$ olan bir $a \in A_1$ vardır. $A_1 \subseteq A_2$ olduğundan $a \in A_2$ 'dir; bu yüzden $b = f(a)$, A_2 'nin bir elemanının görüntüsüdür, yani $b \in f(A_2)$.
(ii) Her $b \in B$ için

$$\begin{aligned} b \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists a \in A_1 \cup A_2 : f(a) = b \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in A_1 : f(a) = b) \text{ veya } (\exists a \in A_2 : f(a) = b) \\ &\Leftrightarrow b \in f(A_1) \text{ veya } b \in f(A_2) \\ &\Leftrightarrow b \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

İkinci denkleğin gerekçesi şudur: $f(a) = b$ olan bir a , $A_1 \cup A_2$ içindedir ancak ve ancak bu a , A_1 'de ya da A_2 'dedir; "vardır" niceleyicisi "veya" bağlacının üzerinden geçer, çünkü bir elemanın iki kümeden birinde bulunması, iki kümeden birinde bulunan bir eleman olması demektir. Öteki denklikler görüntü ve birleşim tanımlarıdır.

- (iii) $b \in f(A_1 \cap A_2)$ olsun. Görüntü tanımı gereği $f(a) = b$ olan bir $a \in A_1 \cap A_2$ vardır. Kesişim tanımı gereği $a \in A_1$ ve $a \in A_2$ 'dir. $a \in A_1$ ve $f(a) = b$ olduğundan $b \in f(A_1)$; $a \in A_2$ ve $f(a) = b$ olduğundan $b \in f(A_2)$. Bu yüzden $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Bu ispatın neden tersine çevrilemediğine dikkat edin: $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$ ise A_1 'de bir a_1 ve A_2 'de bir a_2 ile $f(a_1) = b = f(a_2)$ olur, ama a_1 ile a_2 'nin aynı eleman olması gerekmez; dolayısıyla $A_1 \cap A_2$ içinde b 'ye giden bir eleman bulunmayabilir.

- (iv) f birebir olsun. (iii)'e göre $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ zaten doğrudur; ters kapsamayı göstermeliyiz. $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$ olsun. $b \in f(A_1)$ olduğundan $f(a_1) = b$ olan bir $a_1 \in A_1$, $b \in f(A_2)$ olduğundan $f(a_2) = b$ olan bir $a_2 \in A_2$ vardır. O zaman $f(a_1) = f(a_2)$ olur ve f birebir olduğundan $a_1 = a_2$. Bu ortak eleman hem A_1 'de hem A_2 'de, yani $A_1 \cap A_2$ 'dedir ve görüntüsü b 'dir. Bu yüzden $b \in f(A_1 \cap A_2)$. Böylece $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$ ve iki kapsama birlikte eşitliği verir.

■

İspatın özü: birleşimde "vardır" ile "veya" uyumludur; kesişimde "vardır" ile "ve" uyumlu değildir ve ancak birebirlik iki farklı tanığı tek elemana indirir.

Kesişim ve fark için eşitliğin gerçekten bozulabildiğini görelim. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olsun.

- $A_1 = [-1, 0]$ ve $A_2 = [0, 1]$ alalım. $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ olduğundan $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$ 'dir. Öte yandan $f(A_1) = [0, 1]$ ve $f(A_2) = [0, 1]$ olduğundan $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$. Dolayısıyla $f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$; kapsama öz kapsamadır. Sorun, $f(-1) = f(1)$ olmasıdır: 1 sayısına A_1 'den -1 , A_2 'den 1 gider, ama kesişimden giden yoktur.
- $A_1 = [-1, 1]$ ve $A_2 = [0, 1]$ alalım. $A_1 \setminus A_2 = [-1, 0)$ olduğundan $f(A_1 \setminus A_2) = (0, 1]$ 'dir. Öte yandan $f(A_1) = [0, 1] = f(A_2)$ olduğundan $f(A_1) \setminus f(A_2) = \emptyset$. Bu yüzden görüntü, farkı korumaz. Fark için her zaman geçerli olan tek şey $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$ kapsamasıdır: $b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ ise $f(a) = b$ olan bir $a \in A_1$ vardır ve bu a , A_2 'de olamaz (olsaydı $b \in f(A_2)$ olurdu); bu yüzden $a \in A_1 \setminus A_2$ ve $b \in f(A_1 \setminus A_2)$. Örneğimiz bu kapsamın eşitlik olmak zorunda olmadığını gösterir.

🔗 Hangi işlem hangi tarafta güvenli?

Ters görüntü f^{-1} için birleşim, kesişim, fark ve tümleyen sorunsuzca içeri alınır. Görüntü f için yalnızca birleşim içeri alınır; kesişimde $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ kapsamı vardır ve eşitlik için birebirlik gerekir. Bir ispatta $f(A_1 \cap A_2)$ ile $f(A_1) \cap f(A_2)$ 'yi birbirinin yerine kullanmadan önce f 'nin birebir olduğundan emin olun.

5.6 Görüntü ile Ters Görüntünün Art Arda Uygulanması

Örnek 5.5'da $f^{-1}(f(A_0))$ kümesinin A_0 'dan büyük, $f(f^{-1}(B_0))$ kümesinin B_0 'dan küçük çıkabildiğini gördük. Genel durumda tam olarak bu kadar söylenebilir; kapsamaların yönü her zaman aynıdır ve eşitlik, birebirlik ile örtenliğe bağlıdır.

Teorem 5.3 (Görüntünün Ters Görüntüsü ve Ters Görüntünün Görüntüsü). $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon, $A_0 \subseteq A$ ve $B_0 \subseteq B$ olsun. O zaman:

- (i) $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$; f birebir ise $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$.

(ii) $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$; f örten ise $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$.

İspat.

(i) **Kapsama.** $a \in A_0$ olsun. Görüntü tanımı gereği $f(a) \in f(A_0)$ 'dır, çünkü $f(a)$, A_0 'ın bir elemanının görüntüsüdür. Ters görüntü tanımı gereği $f(a) \in f(A_0)$ olması tam olarak $a \in f^{-1}(f(A_0))$ demektir. Bu yüzden $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$.

(i) **Birebirlikte eşitlik.** f birebir olsun; ters kapsamayı gösterelim. $a \in f^{-1}(f(A_0))$ olsun. Ters görüntü tanımı gereği $f(a) \in f(A_0)$ 'dır; görüntü tanımı gereği $f(a_0) = f(a)$ olan bir $a_0 \in A_0$ vardır. f birebir olduğundan $a = a_0$, dolayısıyla $a \in A_0$. Bu yüzden $f^{-1}(f(A_0)) \subseteq A_0$ ve iki kapsama birlikte $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$ verir.

(ii) **Kapsama.** $b \in f(f^{-1}(B_0))$ olsun. Görüntü tanımı gereği $f(a) = b$ olan bir $a \in f^{-1}(B_0)$ vardır. Ters görüntü tanımı gereği $a \in f^{-1}(B_0)$ olması $f(a) \in B_0$ demektir; $f(a) = b$ olduğundan $b \in B_0$. Bu yüzden $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$.

(ii) **Örtenlikte eşitlik.** f örten olsun; ters kapsamayı gösterelim. $b \in B_0$ olsun. f örten olduğundan $f(a) = b$ olan bir $a \in A$ vardır. $f(a) = b \in B_0$ olduğundan ters görüntü tanımı gereği $a \in f^{-1}(B_0)$ 'dir. O zaman $b = f(a)$, $f^{-1}(B_0)$ 'ın bir elemanının görüntüsüdür, yani $b \in f(f^{-1}(B_0))$. Bu yüzden $B_0 \subseteq f(f^{-1}(B_0))$ ve iki kapsama birlikte eşitliği verir.

■

İspatın özü: A_0 'ın elemanları tanım gereği $f(A_0)$ 'a gider, ama $f(A_0)$ 'a giden başka elemanlar da olabilir (birebirlik bunu engeller); $f^{-1}(B_0)$ 'ın görüntüsü tanım gereği B_0 'ın içindedir, ama B_0 'ın ulaşılmayan noktaları olabilir (örtenlik bunu engeller).

Örnek 5.5 bu teoremin iki koşulunun da gerekli olduğunu gösterir: $f(x) = 3x^2 + 2$ birebir olmadığından $f^{-1}(f([0, 1])) = [-1, 1] \neq [0, 1]$, örten olmadığından $f(f^{-1}([0, 5])) = [2, 5] \neq [0, 5]$ olmuştur. Teoremdaki koşulların yalnızca yeterli değil aynı zamanda gerekli olduğu, yani eşitliklerin her alt küme için sağlanmasının birebirliği ve örtenliği geri verdiği, alıştırılarda ispatlanmıştır.

5.7 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Birebirlik, Örtenlik, Görüntü ve Ters Görüntü Alıştırmaları). a) Birebir olmayan bir fonksiyon ve örten olmayan bir fonksiyon örneği veriniz; her birinin neden öyle olduğunu gösteriniz.

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ fonksiyonunun birebir örten olduğunu gösteriniz ve f^{-1} 'i bulunuz.

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$ için $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}([-1, 2])$ ve $f^{-1}((7, 12])$ kümelerini bulunuz.

d) $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $\{B_i\}_{i \in I}$, B 'nin alt kümelerinden oluşan bir aile olsun ($I \neq \emptyset$). $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ ve $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ olduğunu gösteriniz.

e) $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Her $A_0 \subseteq A$ için $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$ oluyorsa f 'nin birebir olduğunu gösteriniz.

f) $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Her $B_0 \subseteq B$ için $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ oluyorsa f 'nin örten olduğunu gösteriniz.

g) $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ birebir ise f 'nin birebir, $g \circ f$ örten ise g 'nin örten olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ birebir değildir: $-2 \neq 2$ olduğu hâlde $f(-2) = 2 = f(2)$. $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$ örten değildir: $g(n) = 0$ olması $n = -1$ gerektirir, ama $-1 \notin \mathbb{N}$; bu yüzden 0 sayısına hiçbir doğal sayı gitmez. (Burada $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ alınmıştır; $\mathbb{N}$ birden başlatılırsa aynı gerekçe 1 sayısı için geçerlidir.) İstenirse tek bir fonksiyon her iki özelliği de taşıyabilir: $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye ne birebir ne örten değildir (**Örnek 5.1**).

b) **İyi tanımlılık.** $x \neq 2$ olduğundan payda sıfır değildir. $f(x) = 3$ olsaydı $3x = 3x - 6$, yani $0 = -6$ olurdu; imkânsız. Bu yüzden $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Birebirlik. $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. İçler dışlar çarpımıyla $3x_1(x_2 - 2) = 3x_2(x_1 - 2)$, açarsak $3x_1x_2 - 6x_1 = 3x_1x_2 - 6x_2$, sadeleştirirsek $-6x_1 = -6x_2$, yani $x_1 = x_2$.

Örtenlik ve ters. $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ verilsin; $f(x) = y$ denklemini çözelim: $3x = y(x - 2)$, yani $3x - yx = -2y$, yani $x(3 - y) = -2y$. $y \neq 3$ olduğundan

$$x = \frac{-2y}{3-y} = \frac{2y}{y-3}$$

bulunur. $x \neq 2$ 'dir, çünkü $\frac{2y}{y-3} = 2$ olsaydı $2y = 2y - 6$, yani $0 = -6$ olurdu. Doğrulama:

$$f(x) = \frac{3 \cdot \frac{2y}{y-3}}{\frac{2y}{y-3} - 2} = \frac{6y}{2y - 2(y-3)} = \frac{6y}{6} = y.$$

Böylece f örtendir; birebir olduğundan birebir örtendir ve ters fonksiyonun tanımı gereği $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{-1}(y) = \frac{2y}{y-3}$ 'tür.

c) Üçü de $x \in f^{-1}(B_0) \Leftrightarrow x^2 + 3 \in B_0$ denkliğiyle bulunur.

$f^{-1}(\{3\})$: $x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bu yüzden $f^{-1}(\{3\}) = \{0\}$.

$f^{-1}([-1, 2])$: $-1 \leq x^2 + 3 \leq 2$ olması $x^2 \leq -1$ gerektirir; hiçbir gerçel sayının karesi negatif olmadığından bu koşulu sağlayan x yoktur. Bu yüzden $f^{-1}([-1, 2]) = \emptyset$.

$f^{-1}((7, 12])$: $7 < x^2 + 3 \leq 12 \Leftrightarrow 4 < x^2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 < |x| \leq 3$. $|x| > 2$ olması $x > 2$ ya da $x < -2$, $|x| \leq 3$ olması $-3 \leq x \leq 3$ demektir. İkisi birlikte $x \in [-3, -2) \cup (2, 3]$ verir. Bu yüzden $f^{-1}((7, 12]) = [-3, -2) \cup (2, 3]$.

d) Her $a \in A$ için

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(a) \in \bigcup_{i \in I} B_i && \text{(ters görüntü tanımı)} \\ &\Leftrightarrow \text{en az bir } i \in I \text{ için } f(a) \in B_i && \text{(ailenin birleşiminin tanımı)} \\ &\Leftrightarrow \text{en az bir } i \in I \text{ için } a \in f^{-1}(B_i) && \text{(ters görüntü tanımı)} \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) && \text{(ailenin birleşiminin tanımı)} \end{aligned}$$

olur. Her adım bir denklik olduğundan iki kümenin elemanları aynıdır ve kümeler eşittir.

Kesişim için aynı zincirde “en az bir $i \in I$ için” yerine “her $i \in I$ için” gelir:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(a) \in \bigcap_{i \in I} B_i && \text{(ters görüntü tanımı)} \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \in I \text{ için } f(a) \in B_i && \text{(ailenin kesişiminin tanımı)} \\ &\Leftrightarrow \text{her } i \in I \text{ için } a \in f^{-1}(B_i) && \text{(ters görüntü tanımı)} \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) && \text{(ailenin kesişiminin tanımı)} \end{aligned}$$

Üçüncü denklik, her sabit i için geçerli olan “ $f(a) \in B_i \Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_i)$ ” denkleğinin bütün i 'ler üzerinden aynı anda uygulanmasıdır.

e) Her $A_0 \subseteq A$ için $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$ olsun. $a, a' \in A$ ve $f(a) = f(a')$ alalım; $a = a'$ göstereceğiz. $A_0 = \{a\}$ seçelim. $f(\{a\}) = \{f(a)\}$ olduğundan ve $f(a') = f(a) \in \{f(a)\}$ olduğundan, ters görüntü tanımı gereği $a' \in f^{-1}(f(\{a\}))$. Varsayım gereği $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$; bu yüzden $a' \in \{a\}$, yani $a' = a$. Dolayısıyla f birebirdir.

f) Her $B_0 \subseteq B$ için $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ olsun. $b \in B$ verilsin; $f(a) = b$ olan bir $a \in A$ bulacağız. $B_0 = \{b\}$ seçelim. Varsayım gereği $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$; özel olarak $b \in f(f^{-1}(\{b\}))$. Görüntü tanımı gereği $f(a) = b$ olan bir $a \in f^{-1}(\{b\}) \subseteq A$ vardır. Bu, aradığımız elemandır; dolayısıyla f örtendir. Bu şık ile bir önceki şık, Teorem 5.3'deki koşulların gerekli de olduğunu gösterir.

g) $g \circ f$ birebir ise f birebirdir. $a, a' \in A$ ve $f(a) = f(a')$ olsun. İki tarafa g uygularsak $g(f(a)) = g(f(a'))$, yani $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ olur. $g \circ f$ birebir olduğundan $a = a'$. Dolayısıyla f birebirdir. $g \circ f$ örtten ise g örtendir. $c \in C$ verilsin. $g \circ f$ örtten olduğundan $(g \circ f)(a) = c$ olan bir $a \in A$ vardır. $b = f(a)$ dersek $b \in B$ ve $g(b) = g(f(a)) = c$ olur. Böylece C 'nin her elemanına g altında ulaşılır; g örtendir.

■

Böylece mantık ve küme kuramından ihtiyaç duyacağımız araçlar tamamlandı; artık bu araçlarla kitabın asıl konusuna geçebiliriz: **Topoloji Tanımı ve İlk Örnekler**.

6. Topoloji Tanımı ve İlk Örnekler

Önceki bölümlerde mantık, küme, indisli aile ve fonksiyon dilini kurduk; son olarak [Birebir ve Örtten Fonksiyonlar](#), [Ters Fonksiyon](#), [Görüntü ve Ters Görüntü](#) bölümünde görüntü ve ters görüntü kavramlarını inceledik. Bu hazırlık, artık asıl konuya başlamak için yeterli: bu bölümde bir küme üzerinde **topolojinin** ne olduğunu tanımlıyoruz.

Topoloji, bir X kümesinin bazı alt kümelerini “açık” diye seçip bu seçime üç basit kural koymaktan ibarettir. Kurallar o kadar sadedir ki çoğu örnekte doğrulamak birkaç satır alır; ama aynı sadelik, alışılmadık pek çok yapıyı da kapsamamıza izin verir. Bu bölümde tanımı verdikten sonra en küçük örneklerle çalışacağız: üç ve dört elemanlı kümeler üzerinde hangi ailelerin topoloji olduğunu, olmayanlarda hangi kuralın bozulduğunu tek tek göreceğiz. Sonra iki uç örneği (en kaba ve ayrık topoloji) ve gerçel sayılar üzerinde “0 içeren kümeler” ile “0 içermeyen kümeler” topolojilerini inceleyeceğiz.

Bölüm boyunca amaç şudur: bir aile verildiğinde onun topoloji olup olmadığına **kendi başınıza** karar verebilmek. Bunun için her aksiyomun ne dediğini ve nasıl denetlendiğini adım adım yazacağız.

6.1 Topoloji Tanımı

Bir X kümesinin bütün alt kümelerinin kümesine kuvvet kümesi diyor ve $\mathcal{P}(X)$ ile gösteriyorduk. Bir $A \subseteq X$ alt kümesinin X içindeki tümleyeni $A^c = X \setminus A$ kümesidir; bu bölümde iki gösterimi de aynı anlamda kullanacağız. Topoloji, $\mathcal{P}(X)$ içinden seçilmiş bir alt ailedir; yani elemanları X 'in alt kümeleri olan bir kümedir.

Tanım 6.1 (Topoloji). X boş olmayan bir küme ve $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, X 'in alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa τ ailesine X üzerinde bir **topoloji** (topology on X) denir:

(T1) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$.

(T2) $O_1 \in \tau$ ve $O_2 \in \tau$ ise $O_1 \cap O_2 \in \tau$. Yani τ 'nın herhangi iki elemanının kesişimi yine τ 'nın elemanıdır.

(T3) I herhangi bir indis kümesi olsun. Her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau$ ise

$$\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau.$$

Yani τ 'dan alınan herhangi bir ailenin (sonlu ya da sonsuz, hatta sayılamaz sayıda elemanlı) birleşimi yine τ 'nın elemanıdır.

Yani topoloji, boş kümeyi ve X 'in kendisini içeren, iki elemanın kesişimi ve **istenildiği kadar** elemanın birleşimi yine kendi içinde kalan bir alt küme ailesidir.

Üç koşulu ayrı ayrı okuyalım.

- (T1) ailenin iki “zorunlu üyesini” söyler: en küçük alt küme $\emptyset$ ve en büyük alt küme X her topolojide bulunur. Bu koşul, τ 'nın boş olmadığını da garanti eder.
- (T2) yalnızca **iki** kümenin kesişiminden söz eder. Birazdan göreceğimiz gibi bu, sonlu sayıda kümenin kesişimi için de yeterlidir; ama sonsuz sayıda kümenin kesişimi hakkında tanım hiçbir şey söylemez.
- (T3) ise birleşim için hiçbir sınır koymaz: I indis kümesi tek elemanlı, sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz olabilir. $I = \emptyset$ alınırsa boş ailenin birleşimi $\emptyset$ olur; bu da zaten (T1) ile τ 'dadır.

(T2) ile (T3) arasındaki bu fark (kesişimde “iki”, birleşimde “istediğin kadar”) topolojinin en önemli özelliğidir; ilerideki bölümlerde bunun neden böyle olması gerektiğini örneklerle göreceğiz.

Bir aileyi denetlerken işi kısaltan basit bir gözlem vardır.

i Denetimde boş küme ve X 'i atlayabilirsiniz

(T2) ve (T3) koşullarını denetlerken $\emptyset$ ve X kümelerini hesaba katmak gerekmez; yalnızca τ 'nın $\emptyset$ ve X 'ten farklı elemanlarına bakmak yeter. Gerekçesi şudur: her $O \subseteq X$ için

$$\emptyset \cap O = \emptyset, \quad X \cap O = O, \quad \emptyset \cup O = O, \quad X \cup O = X$$

olduğundan, kesişime giren iki kümeden biri $\emptyset$ ya da X ise sonuç ya $\emptyset$, ya X , ya da öteki kümedir; bunların üçü de zaten τ 'dadır. Birleşim için de aynı şey geçerlidir; üstelik (T3)'teki gibi kalabalık bir ailede bile: ailedeki $\emptyset$ üyeleri birleşimi değiştirmez, ailede X varsa birleşim X 'tir. Bu yüzden $\emptyset$ ve X üyelerini aileden çıkarıp geri kalanın birleşimine bakmak yeter. Aynı nedenle bir kümenin kendisiyle kesişimi ve birleşimi de ($O \cap O = O$, $O \cup O = O$) denetlenmeye değmez.

(T2) yalnızca iki küme için yazılmıştır; ama pratikte “sonlu sayıda açık kümenin kesişimi açıktır” biçiminde kullanırız. Bu geçişin neden meşru olduğunu bir kez ispatlayalım.

Önerme 6.1 (Sonlu Kesişim Özelliği). τ , X üzerinde bir topoloji ve $n \geq 1$ bir doğal sayı olsun. $O_1, O_2, \dots, O_n \in \tau$ ise

$$O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \tau.$$

İspat.

n üzerinden tümevarım yapıyoruz.

$n = 1$ için ifade “ $O_1 \in \tau$ ise $O_1 \in \tau$ ” der; bu doğrudur. $n = 2$ için ifade tam olarak (T2) koşuludur.

Şimdi ifadenin $n = k$ için doğru olduğunu varsayalım ve $O_1, \dots, O_k, O_{k+1} \in \tau$ olsun. Kesişim birleşmeli olduğundan

$$O_1 \cap \dots \cap O_k \cap O_{k+1} = (O_1 \cap \dots \cap O_k) \cap O_{k+1}$$

yazabiliriz. Parantez içindeki küme, tümevarım varsayımına göre τ 'nın elemanıdır; O_{k+1} de τ 'nin elemanıdır. O hâlde (T2) gereği bu iki kümenin kesişimi τ 'dadır. Böylece ifade $n = k + 1$ için de doğrudur ve tümevarım tamamlanır.

■

İspatın özü: (T2) koşulunu art arda uygulamak, kesişimi her seferinde bir küme büyütmemize izin verir; sonlu adımda istediğimiz yere varırız. Sonsuz bir kesişimde ise bu adımlar hiç bitmez; bu yüzden tümevarım sonsuz kesişimler hakkında bir şey söylemez.

6.2 Topolojik Uzay ve Açık Küme

Topoloji, üzerine kurulduğu kümeyle birlikte anlam kazanır; ikisini birlikte adlandırırız.

Tanım 6.2 (Topolojik Uzay). τ , X kümesi üzerinde bir topoloji ise (X, τ) ikilisine bir **topolojik uzay** (topological space) denir. τ 'nın elemanlarına (X, τ) uzayının **açık kümeleri** (open sets) denir; yani $O \subseteq X$ alt kümesi ancak ve ancak $O \in \tau$ ise açıktır.

Yani “topolojik uzay” demek, bir küme ile o kümenin hangi alt kümelerinin açık sayılacağına dair bir seçim demektir; aynı küme üzerinde farklı seçimler farklı uzaylar verir.

Bu dille (T1)–(T3) şöyle okunur: boş küme ve bütün uzay açıktır; iki açık kümenin kesişimi açıktır; herhangi sayıda açık kümenin birleşimi açıktır. Bundan sonra “ $O \in \tau$ ” ile “ O açıktır” ifadelerini birbirinin yerine kullanacağız. Tümevarıma açık olan kümelere **kapalı küme** denir; bu kavram bir sonraki bölümde ayrıntılı işlenecek, burada yalnızca adını kullanacağız.

6.3 İki Uç Örnek: En Kaba ve Ayrık Topoloji

Her küme üzerinde en az iki topoloji vardır; biri olabildiğince az, öteki olabildiğince çok açık küme içerir. Önce bunları doğrulayalım.

Örnek 6.1 (Yalnız Boş Küme ve X). $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. $\tau = \{\emptyset, X\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Çözüm.

(T1) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$; aile zaten yalnızca bu iki kümeden oluşuyor.

(T2) τ 'nin elemanları yalnız $\emptyset$ ve X olduğundan olası kesişimler $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \cap X = \emptyset$ ve $X \cap X = X$ 'tir; üçü de τ 'dadır.

(T3) $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$, τ 'dan alınmış herhangi bir aile olsun. Her O_α ya $\emptyset$ ya da X 'tir. Ailede en az bir X varsa birleşim X 'tir; hiç yoksa bütün üyeler $\emptyset$ 'dir ve birleşim $\emptyset$ 'dir. İki durumda da birleşim τ 'nin elemanıdır.

Üç koşul da sağlandığından τ bir topolojidir.

■

Örnek 6.2 (Bütün Alt Kümeler). $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. $\tau = \mathcal{P}(X)$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Çözüm.

(T1) $\emptyset \subseteq X$ ve $X \subseteq X$ olduğundan $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$.

(T2) $O_1, O_2 \subseteq X$ ise $O_1 \cap O_2 \subseteq O_1 \subseteq X$; bu yüzden $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{P}(X)$.

(T3) Her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \subseteq X$ olsun. Birleşimin bir elemanı x alalım; tanım gereği bir $\alpha \in I$ için $x \in O_\alpha$ olur ve $O_\alpha \subseteq X$ olduğundan $x \in X$ 'tir. Böylece $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \subseteq X$, yani birleşim $\mathcal{P}(X)$ 'in elemanıdır. O hâlde $\mathcal{P}(X)$ bir topolojidir. Kısacası: X 'in alt kümelerinin kesişimi ve birleşimi yine X 'in alt kümesidir, başka bir şey denetlenmesi gerekmez.

■

Bu iki topolojinin adı vardır.

Tanım 6.3 (Ayrık Topoloji ve En Kaba Topoloji). $X \neq \emptyset$ bir küme olsun.

- $\tau = \mathcal{P}(X)$ topolojisine X üzerindeki **ayrık topoloji** (discrete topology) denir.
- $\tau = \{\emptyset, X\}$ topolojisine X üzerindeki **en kaba topoloji** (indiskret topoloji, aşikâr topoloji; indiscrete topology, trivial topology) denir.

Yani ayrık topolojide her alt küme açıktır; en kaba topolojide ise yalnız iki küme açıktır, başka hiçbir alt küme açık değildir.

Bu iki topoloji gerçekten iki “uç”tur: X üzerindeki her topoloji ikisinin arasında kalır.

Önerme 6.2 (Her Topoloji İki Ucun Arasındadır). τ, X üzerinde herhangi bir topoloji olsun. O zaman

$$\{\emptyset, X\} \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X).$$

İspat.

İlk kapsama (T1) koşulunun kendisidir: $\emptyset$ ve X her topolojinin elemanıdır. İkinci kapsama ise topoloji tanımının ilk satırıdır: $\tau, \mathcal{P}(X)$ 'in bir alt ailesi olarak seçilmiştir.

■

Şimdi bu iki uzayda hangi kümelerin açık olduğunu açıkça yazalım.

Örnek 6.3 (Ayrık ve En Kaba Uzayda Açık Kümeler). $X \neq \emptyset$ olsun.

- $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayında X 'in **her** alt kümesi açıktır. Üstelik her alt kümenin tümleyeni de açık olduğundan her alt küme aynı zamanda kapalıdır: ayrık uzayda bütün alt kümeler hem açık hem kapalıdır.
- $(X, \{\emptyset, X\})$ en kaba uzayında açık olan yalnız $\emptyset$ ve X 'tir. Tümleyeni açık olan kümeler de yalnız $X^c = \emptyset$ ve $\emptyset^c = X$ olduğundan kapalı kümeler de yalnız $\emptyset$ ve X 'tir.

Çözüm.

- a) $A \subseteq X$ herhangi bir alt küme olsun. Tanım gereği $A \in \mathcal{P}(X)$, yani A açıktır. Tümlenyeni $A^c = X \setminus A$ da X 'in bir alt kümesidir, dolayısıyla o da $\mathcal{P}(X)$ 'in elemanıdır; yani A^c açıktır. Tümlenyeni açık olan küme kapalı olduğundan A kapalıdır. A keyfî seçildiğinden bu, her alt küme için doğrudur.
- b) Açık kümeler tanım gereği $\tau = \{\emptyset, X\}$ 'in elemanlarıdır; başka açık küme yoktur. Bir $F \subseteq X$ kümesinin kapalı olması için $F^c \in \tau$, yani $F^c = \emptyset$ ya da $F^c = X$ olmalıdır. Birincisi $F = X$, ikincisi $F = \emptyset$ demektir. O hâlde kapalı kümeler de yalnız $\emptyset$ ve X 'tir.

■

6.4 Üç Elemanlı Küme Üzerindeki Topolojiler

Küçük kümeler, aksiyomların ne yaptığını görmek için en iyi laboratuvardır. $X = \{a, b, c\}$ alalım ve $\emptyset$ ile X 'e bir ya da iki küme ekleyerek elde edilen aileleri inceleyelim. Önce, sık karşılaştığımız bir durumu genel olarak halledelim: $\emptyset$ ve X dışında **tek** bir küme içeren aile her zaman topolojidir.

Lemma 6.1 (Boş Küme ve X 'e Tek Küme Eklemek). $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq X$ herhangi bir alt küme olsun. O zaman $\tau = \{\emptyset, X, A\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

İspat.

(T1) sağlanır: $\emptyset$ ve X aileye baştan eklenmiştir.

(T2) için $O_1, O_2 \in \tau$ olsun. Biri $\emptyset$ ise kesişim $\emptyset$ 'dir; biri X ise kesişim öteki kümedir; ikisi de A ise kesişim $A \cap A = A$ 'dır. Üç durumda da sonuç $\emptyset, X$ ya da A 'dır, yani τ 'dadır.

(T3) için $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$, τ 'dan alınmış herhangi bir aile olsun. Her O_α üç kümeden biridir: $\emptyset, X$ ya da A . Ailede en az bir X varsa birleşim X 'tir. Yoksa her üye $\emptyset$ ya da A 'dır: ailede en az bir A varsa birleşim A , hiç yoksa (ya da $I = \emptyset$ ise) birleşim $\emptyset$ 'dir. Her durumda birleşim τ 'nın elemanıdır.

Böylece üç koşul da sağlanır. ($A = \emptyset$ ya da $A = X$ seçilirse aile $\{\emptyset, X\}$ olur; ispat bu durumu da kapsar.)

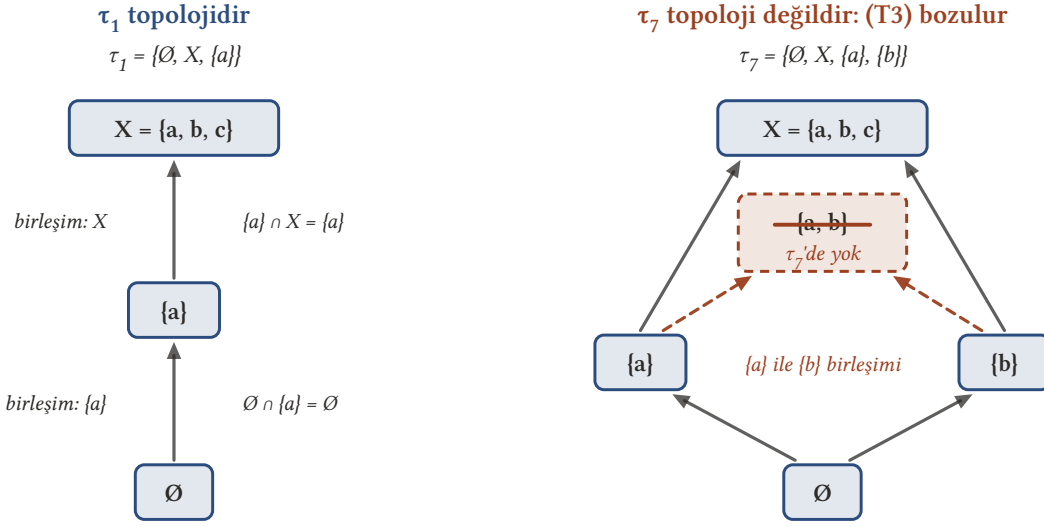
■

Örnek 6.4 (Üç Elemanlı Küme Üzerinde Dokuz Aile). $X = \{a, b, c\}$ olsun. Aşağıdaki altı aile X üzerinde birer topolojidir:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{\emptyset, X, \{a\}\}, & \tau_2 &= \{\emptyset, X, \{b\}\}, & \tau_3 &= \{\emptyset, X, \{c\}\}, \\ \tau_4 &= \{\emptyset, X, \{a, b\}\}, & \tau_5 &= \{\emptyset, X, \{a, c\}\}, & \tau_6 &= \{\emptyset, X, \{b, c\}\}.\end{aligned}$$

Buna karşılık şu üç aile topoloji **değildir**:

$$\tau_7 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}, \quad \tau_8 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}\}, \quad \tau_9 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}\}.$$



Şekil 6.1: $X = \{a, b, c\}$ üzerinde iki aile. Solda $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$: üyelerin ikişer ikişer kesişimleri ve birleşimleri yine ailede kalır, bu yüzden τ_1 bir topolojidir. Sağda $\tau_7 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$: kesişimler sorunsuzdur, ama $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ ailede yoktur; (T3) bozulur ve τ_7 topoloji değildir. Aileyi topoloji olmaktan çıkarmaya tek bir eksik birleşim yeter.

Çözüm.

Altı topoloji. $\tau_1, \dots, \tau_6$ ailelerinin her biri $\emptyset, X$ ve tek bir A kümesinden oluşur: sırasıyla $A = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$. **Lemma 6.1**'e göre bu biçimdeki her aile bir topolojidir. Örneğin τ_1 için somut olarak: $\{a\} \cap \{a\} = \{a\} \in \tau_1$ ve $\{a\} \cup \{a\} = \{a\} \in \tau_1$; $\emptyset$ ve X ile kesişim ve birleşimler ise yine $\emptyset, X$ ya da $\{a\}$ verir.

Üç aile neden topoloji değil? Üçünde de (T1) sağlanır ve (T2) de sağlanır; çünkü $\emptyset$ ve X dışındaki iki küme tek elemanlı ve farklı olduğundan kesişimleri $\emptyset$ 'dir, o da ailededir. Bozulan koşul (T3)'tür:

- τ_7 için $\{a\} \in \tau_7$ ve $\{b\} \in \tau_7$, ama $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_7$.
- τ_8 için $\{a\} \in \tau_8$ ve $\{c\} \in \tau_8$, ama $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \tau_8$.
- τ_9 için $\{b\} \in \tau_9$ ve $\{c\} \in \tau_9$, ama $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin \tau_9$.

Her birinde ailenin iki elemanının birleşimi ailede olmadığından (T3) sağlanmaz; dolayısıyla τ_7, τ_8 ve τ_9 topoloji değildir.

■

Bu örnekten çıkan ders şudur: bir aileyi topoloji yapmayan tek bir “kaçak” küme yeter. τ_7 'ye $\{a, b\}$ kümesini eklerseniz ne olur? Alıştırmalarda bunu göreceksiniz.

6.5 Dört Elemanlı Küme Üzerindeki Örnekler

Şimdi biraz daha kalabalık aileler alalım; denetim yöntemi aynı, yalnızca daha çok çift kontrol edilir.

Örnek 6.5 (Bir Aksiyomun Bozulduğu Aile). $X = \{a, b, c, d\}$ ve

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, d\}\}$$

olsun. τ_1, X üzerinde bir topoloji midir?

Çözüm.

Değildir. $\{a, b\} \in \tau_1$ ve $\{a, d\} \in \tau_1$; ama

$$\{a, b\} \cup \{a, d\} = \{a, b, d\} \notin \tau_1.$$

Yani τ_1 'in iki elemanın birleşimi τ_1 'de değildir; (T3) koşulu bozulur. Tek bir aksiomun bozulması yeter: τ_1 bir topoloji değildir.

Öteki iki koşula da bakalım: (T1) sağlanır ve (T2) de sağlanır, çünkü $\emptyset$ ve X dışındaki çiftlerin kesişimleri $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$, $\{a\} \cap \{a, d\} = \{a\}$ ve $\{a, b\} \cap \{a, d\} = \{a\}$ 'dır ve $\{a\} \in \tau_1$ 'dir. Sorun yalnızca birleşimdedir.

■

Örnek 6.6 (Zincir Biçiminde Bir Topoloji). $X = \{a, b, c, d\}$ ve

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

olsun. τ_2 , X üzerinde bir topolojidir.

Çözüm.

(T1) $\emptyset \in \tau_2$ ve $X \in \tau_2$.

(T2) Yukarıdaki nota göre yalnız $\emptyset$ ve X 'ten farklı elemanların, yani $\{a\}$, $\{a, b\}$ ve $\{a, b, c\}$ kümelerinin ikili kesişimlerine bakmak yeter:

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \tau_2, \quad \{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\} \in \tau_2, \quad \{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\} \in \tau_2.$$

Böylece (T2) sağlanır.

(T3) Aynı üç kümenin ikili birleşimleri:

$$\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau_2, \quad \{a\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\} \in \tau_2, \quad \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\} \in \tau_2.$$

(T3) herhangi bir indis kümesinden söz eder; ama τ_2 'den alınan bir aile, indisler ne kadar kalabalık olursa olsun, τ_2 'nin en çok beş farklı elemanından oluşur ve birleşim yalnızca bu farklı elemanlara bağlıdır. Sonlu sayıda kümenin birleşimi de ikili birleşimlerin art arda alınmasıyla elde edilir; örneğin:

$$\begin{aligned} \{a\} \cup \{a, b\} \cup \{a, b, c\} &= (\{a\} \cup \{a, b\}) \cup \{a, b, c\} \\ &= \{a, b, c\} \in \tau_2. \end{aligned}$$

Bu yüzden (T3) de sağlanır.

Üç koşul da sağlandığından τ_2 bir topolojidir.

■

Bu örnekte işi kolaylaştıran şey, τ_2 'nin elemanlarının bir **zincir** oluşturmasıdır:

$$\emptyset \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\} \subseteq X.$$

İç içe iki kümenin kesişimi küçük olanı, birleşimi büyük olanıdır; ikisi de zaten ailededir. Alıştırmalarda bunun genel olarak doğru olduğunu göstereceksiniz.

⚠ Sonlu bir ailede bile bütün çiftlere bakın

Sonlu bir aile için (T3) denetimi ikili birleşimlere indirgenebilir, ama **her** çift denetlenmelidir. **Örnek 6.5'**deki τ_1 ailesinde $\{a\} \cup \{a, b\}$ ve $\{a\} \cup \{a, d\}$ birleşimleri ailededir; sorun yalnızca $\{a, b\} \cup \{a, d\}$ çiftinde ortaya çıkar. Bir çifti atlamak yanlış sonuca götürür.

6.6 Gerçel Sayılar Üzerinde İki Topoloji

Şimdiye kadarki örneklerde küme sonluydu ve (T3) için sonsuz aileler hiç devreye girmedi. Gerçel sayılar kümesi üzerinde iki topoloji tanımlayarak sonsuz birleşimlerle nasıl baş edildiğini görelim. İlk örnekte açık kümeler “0’ı içeren” alt kümelerdir.

Örnek 6.7 (Sıfırı İçeren Kümelerin Topolojisi). $X = \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki aile $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir:

$$\tau_0 = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Yani τ_0 'ın elemanları, boş küme ile 0'ı içeren bütün alt kümelerdir.

Çözüm.

(T1) $\emptyset \in \tau_0$, çünkü boş kümeyi aileye açıkça ekledik. $0 \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R} \in \tau_0$.

(T2) $O_1, O_2 \in \tau_0$ olsun. İki durum vardır.

- $O_1 = \emptyset$ ya da $O_2 = \emptyset$ ise $O_1 \cap O_2 = \emptyset \in \tau_0$.
- İkisi de boş değilse tanım gereği $0 \in O_1$ ve $0 \in O_2$; bu yüzden $0 \in O_1 \cap O_2$ ve $O_1 \cap O_2 \in \tau_0$.

(T3) I herhangi bir indis kümesi ve her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau_0$ olsun. Yine iki durum vardır.

- Bütün O_α 'lar $\emptyset$ ise (ya da $I = \emptyset$ ise) birleşim $\emptyset$ 'dir ve $\emptyset \in \tau_0$.
- En az bir $\alpha_0 \in I$ için $O_{\alpha_0} \neq \emptyset$ ise tanım gereği $0 \in O_{\alpha_0}$, dolayısıyla $0 \in \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$; yani birleşim τ_0 'dadır.

Üç koşul da sağlandığından τ_0 bir topolojidir.

■

İspatın özü: 0'ı içirme özelliği kesişimde de birleşimde de korunur; boş küme ise ayrı bir kalemde halledilir. Bu topolojide $\{0\}$, $[-1, 2]$, $\mathbb{Q}$, $\{0\} \cup (3, 5)$ gibi birbirinden çok farklı kümeler açıktır; ama $(1, 2)$ aralığı açık değildir, çünkü 0'ı içermez. Bu örnek, “açık küme” sözünün alışılmış “açık aralık” sezgisinden bağımsız olduğunu gösterir: hangi kümelerin açık olduğuna topoloji karar verir.

İkinci örnekte rolü tersine çeviriyoruz: açık kümeler “0'ı içermeyen” alt kümelerdir.

Örnek 6.8 (Sıfırı İçermeyen Kümelerin Topolojisi). $X = \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki aile $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir:

$$\tilde{\tau}_0 = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin A\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

Yani $\tilde{\tau}_0$ 'ın elemanları, $\mathbb{R}$ 'nin kendisi ile 0'ı içermeyen bütün alt kümelerdir.

Çözüm.

(T1) Boş kümenin hiç elemanı yoktur, özellikle $0 \notin \emptyset$; bu yüzden $\emptyset \in \tilde{\tau}_0$. $\mathbb{R}$ 'yi aileye açıkça ekledik, dolayısıyla $\mathbb{R} \in \tilde{\tau}_0$.

(T2) $O_1, O_2 \in \tilde{\tau}_0$ olsun. İki durum vardır.

- $O_1 = \mathbb{R}$ ise $O_1 \cap O_2 = O_2 \in \tilde{\tau}_0$; benzer biçimde $O_2 = \mathbb{R}$ ise $O_1 \cap O_2 = O_1 \in \tilde{\tau}_0$.
- İkisi de $\mathbb{R}$ 'den farklıysa tanım gereği $0 \notin O_1$ ve $0 \notin O_2$. Kesişim O_1 'in alt kümesi olduğundan $0 \notin O_1 \cap O_2$; yani $O_1 \cap O_2 \in \tilde{\tau}_0$.

(T3) I herhangi bir indis kümesi ve her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tilde{\tau}_0$ olsun. Yine iki durum vardır.

- Bir $\alpha_0 \in I$ için $O_{\alpha_0} = \mathbb{R}$ ise birleşim $\mathbb{R}$ 'yi kapsar; birleşim zaten $\mathbb{R}$ 'nin alt kümesi olduğundan $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha = \mathbb{R} \in \tilde{\tau}_0$.
- Hiçbir O_α , $\mathbb{R}$ 'ye eşit değilse her α için $0 \notin O_\alpha$ 'dır. Birleşimin bir elemanı, en az bir O_α 'nın elemanı olmak zorundadır; 0 hiçbirinin elemanı olmadığından $0 \notin \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. Böylece birleşim $\tilde{\tau}_0$ 'dadır. ($I = \emptyset$ durumunda birleşim $\emptyset$ 'dir, o da ailededir.)

Üç koşul da sağlandığından $\tilde{\tau}_0$ bir topolojidir.

■

İspatın özü: 0'ı içermeme özelliği alt kümeye geçer (kesişim) ve birleşimde de korunur; $\mathbb{R}$ 'nin kendisi ayrı bir kalemde halledilir.

❓ Sıfırın özel bir yanı yok

Bu iki örnekte 0 sayısının ve $\mathbb{R}$ kümesinin hiçbir özel rolü yoktur. Herhangi bir $X \neq \emptyset$ kümesi ve sabit bir $p \in X$ noktası için “ p ’yi içeren alt kümeler ile $\emptyset$ ” ailesi ve “ p ’yi içermeyen alt kümeler ile X ” ailesi de birer topolojidir; ispat kelimesi kelimesine aynıdır. Alıştırmalarda bunu yazacaksınız.

Böylece aynı $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde dört farklı topoloji görmüş olduk: en kaba topoloji, ayrık topoloji, τ_0 ve $\tilde{\tau}_0$. Hangi kümelerin açık olduğu her birinde başka türdür; “topolojik uzay” derken kümeyle birlikte τ ’yu da söylememizin nedeni budur.

6.7 Alıştırmalar

Alıştırma 6.1 (Topoloji Tanımı ve İlk Örnekler Üzerine Alıştırmalar). a) $X = \{a, b, c\}$ olsun. $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin. Bu aile, **Örnek 6.4**’teki τ_7 ’ye hangi kümenin eklenmesiyle elde edilmiştir?

b) $X = \{a, b, c, d\}$ olsun. $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ailesi bir topoloji midir? Bozulan her aksiyomu belirtin.

c) $X = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin.

d) $\mathbb{Q}$ üzerinde ayrık topolojiyi, yani $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ ’yu alalım. $\mathbb{Z}$, $\{0\}$ ve $\{\sqrt{2}\}$ kümeleri bu uzayda açık mıdır, kapalı mıdır?

e) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $p \in X$ sabit bir nokta olsun. $\tau_p = \{A \subseteq X : p \in A\} \cup \{\emptyset\}$ ve $\tau^p = \{A \subseteq X : p \notin A\} \cup \{X\}$ ailelerinin X üzerinde birer topoloji olduğunu gösterin.

f) X bir küme ve $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = X$ iç içe alt kümeler olsun. $\tau = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin.

g) τ ve τ' , aynı X kümesi üzerinde iki topoloji olsun. $\tau \cap \tau'$ ailesinin de X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin. $\tau \cup \tau'$ için aynı şey doğru mudur?

Çözüm.

a) (T1) sağlanır. (T2) ve (T3) için $\emptyset$ ve X dışındaki kümelerle bakalım: $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. Kesişimler: $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$, $\{b\} \cap \{a, b\} = \{b\}$; üçü de τ ’dadır. Birleşimler: $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$, $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$, $\{b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$; üçü de τ ’dadır. Üç kümenin birden birleşimi de $\{a, b\}$ ’dir. O hâlde τ bir topolojidir. Bu aile, $\tau_7 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ ailesine eksik olan $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ kümesinin eklenmesiyle elde edilmiştir; τ_7 ’yi topoloji olmaktan alıkoyan tek eksik buydu.

b) Değildir. (T1) sağlanır. (T2) bozulur: $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau$. (T3) de bozulur: $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \notin \tau$. Tek bir aksiyomun bozulması zaten yeterdi; burada ikisi birden bozulmaktadır.

c) (T1) sağlanır. $\emptyset$ ve X dışındaki dört küme $\{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}$ ’dir; altı çift vardır. Kesişimler:

$$\begin{aligned} \{a\} \cap \{c, d\} &= \emptyset, & \{a\} \cap \{a, c, d\} &= \{a\}, & \{a\} \cap \{b, c, d, e\} &= \emptyset, \\ \{c, d\} \cap \{a, c, d\} &= \{c, d\}, & \{c, d\} \cap \{b, c, d, e\} &= \{c, d\}, & \{a, c, d\} \cap \{b, c, d, e\} &= \{c, d\}. \end{aligned}$$

Hepsi τ ’dadır; (T2) sağlanır. Birleşimler:

$$\begin{aligned} \{a\} \cup \{c, d\} &= \{a, c, d\}, & \{a\} \cup \{a, c, d\} &= \{a, c, d\}, & \{a\} \cup \{b, c, d, e\} &= X, \\ \{c, d\} \cup \{a, c, d\} &= \{a, c, d\}, & \{c, d\} \cup \{b, c, d, e\} &= \{b, c, d, e\}, & \{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e\} &= X. \end{aligned}$$

Hepsi τ ’dadır. Üç ya da dört kümenin birleşimi ikili birleşimlerin art arda alınmasıyla bulunur ve yine bu listede kalır; örneğin $\{a\} \cup \{c, d\} \cup \{b, c, d, e\} = \{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e\} = X$. Böylece (T3) sağlanır ve τ bir topolojidir.

d) **Örnek 6.3**’e göre ayrık uzayda $\mathbb{Q}$ ’nun her alt kümesi hem açık hem kapalıdır. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ olduğundan (her tam sayı $n = \frac{n}{1}$ biçiminde bir rasyonel sayıdır) $\mathbb{Z}$ hem açık hem kapalıdır. $0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$ olduğundan $\{0\} \subseteq \mathbb{Q}$ ve $\{0\}$ da hem açık hem kapalıdır. $\sqrt{2}$ ise rasyonel değildir; bu yüzden $\{\sqrt{2}\}$, $\mathbb{Q}$ ’nun bir alt kümesi bile değildir, dolayısıyla $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ ’nin elemanı olamaz. $\{\sqrt{2}\}$ bu uzayın bir alt kümesi olmadığından onun için “açık mı, kapalı mı” sorusu anlamsızdır; uzayın açık ya da kapalı bir kümesi değildir.

e) **Örnek 6.7**’deki ispatı $\mathbb{R}$ yerine X , 0 yerine p ile tekrarlıyoruz. (T1): $\emptyset$ aileye eklenmiştir; $p \in X$ olduğundan $X \in \tau_p$. (T2): $O_1, O_2 \in \tau_p$ olsun. Biri boşsa kesişim $\emptyset \in \tau_p$. İkisi de boş değilse $p \in O_1$

ve $p \in O_2$, dolayısıyla $p \in O_1 \cap O_2$ ve $O_1 \cap O_2 \in \tau_p$. (T3): her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau_p$ olsun. Hepsi boşsa birleşim $\emptyset \in \tau_p$. Bir α_0 için $O_{\alpha_0} \neq \emptyset$ ise $p \in O_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$, yani birleşim τ_p 'dedir. O hâlde τ_p bir topolojidir.

τ^p için [Örnek 6.8](#)'deki ispatı aynı değişiklikle tekrarlıyoruz. (T1): $p \notin \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in \tau^p$; X aileye eklenmiştir. (T2): $O_1, O_2 \in \tau^p$ olsun. Biri X ise kesişim öteki kümedir ve ailededir. İkisi de X 'ten farklıysa $p \notin O_1$; kesişim O_1 'in alt kümesi olduğundan $p \notin O_1 \cap O_2$ ve $O_1 \cap O_2 \in \tau^p$. (T3): her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau^p$ olsun. Bir $O_{\alpha_0} = X$ ise birleşim X 'tir ve ailededir. Hiçbiri X değilse her α için $p \notin O_\alpha$; p hiçbir üyede olmadığından birleşimde de yoktur, yani birleşim τ^p 'dedir. O hâlde τ^p de bir topolojidir.

f) (T1): $A_0 = \emptyset$ ve $A_n = X$ ailededir. (T2): $A_i, A_j \in \tau$ olsun; genelliği bozmadan $i \leq j$ alalım. Kümeler iç içe olduğundan $A_i \subseteq A_j$, dolayısıyla $A_i \cap A_j = A_i \in \tau$. (T3): $\{A_i\}_{i \in J}$, $J \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ boş olmayan bir alt aile olsun. J sonlu olduğundan en büyük elemanı m vardır ve her $i \in J$ için $A_i \subseteq A_m$ 'dir; bu yüzden $\bigcup_{i \in J} A_i = A_m \in \tau$. $J = \emptyset$ ise birleşim $\emptyset = A_0 \in \tau$. O hâlde τ bir topolojidir. [Örnek 6.6](#)'daki τ_2 bunun $n = 4$ hâlidir.

g) (T1): $\emptyset$ ve X hem τ 'da hem τ' 'de olduğundan $\tau \cap \tau'$ 'dedir. (T2): $O_1, O_2 \in \tau \cap \tau'$ olsun. $O_1, O_2 \in \tau$ olduğundan $O_1 \cap O_2 \in \tau$; $O_1, O_2 \in \tau'$ olduğundan $O_1 \cap O_2 \in \tau'$. Böylece $O_1 \cap O_2 \in \tau \cap \tau'$. (T3): her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau \cap \tau'$ olsun. Bütün O_α 'lar τ 'da olduğundan birleşim τ 'dadır; hepsi τ' 'de olduğundan birleşim τ' 'dedir. Dolayısıyla birleşim $\tau \cap \tau'$ 'dedir ve $\tau \cap \tau'$ bir topolojidir.

Birleşim için aynı şey doğru değildir. $X = \{a, b, c\}$ üzerinde $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ve $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ topolojilerini alalım. Birleşimleri $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\} = \tau_7$ 'dir ve [Örnek 6.4](#)'de bunun topoloji olmadığını gördük: $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ ailede değildir.

■

Bir sonraki bölümde açık kümelerin tümleyenlerini, yani kapalı kümeleri inceleyecek ve her küme üzerinde tanımlanabilen iki önemli topolojiyi tanıyacağız: [Açık ve Kapalı Kümeler](#); [Sonlu ve Sayılabilir Tümleyen Topolojileri](#).

7. Açık ve Kapalı Kümeler; Sonlu ve Sayılabilir Tümleyen Topolojileri

Topoloji Tanımı ve İlk Örnekler bölümünde bir X kümesi üzerinde topolojinin ne olduğunu öğrendik: X 'in alt kümelerinden oluşan, boş kümeyi ve X 'i içeren, iki üyesinin kesişimini ve istenildiği kadar üyesinin birleşimini yine içeren bir τ ailesi. Bu ailenin üyelerine “açık” diyoruz. Bu bölümde açık kümenin yanına onun ikizi olan **kapalı küme** kavramını koyuyoruz. İki kavram birbirinin karşıtı değildir: bir küme aynı anda hem açık hem kapalı olabilir, ikisi de olmayabilir. Bunu örneklerle göreceğiz.

Bölümün ikinci yarısında iki yeni ve önemli topoloji tanıyoruz: **sonlu tümleyen topolojisi** ve **sayılabilir tümleyen topolojisi**. Bunlar, ayrık ve en kaba topolojiden farklı olarak, hangi kümelerin açık olduğunu tümleyenin “küçüklüğü” ile ölçer. Her ikisinin de gerçekten topoloji olduğunu tam olarak ispatlayacağız ve $\mathbb{R}$ üzerinde hangi kümelerin açık, hangilerinin kapalı olduğunu tek tek inceleyeceğiz. Son olarak aynı küme üzerindeki iki topolojiyi karşılaştırmayı öğreneceğiz: biri ötekinden **daha ince** ya da **daha kaba** olabilir, ya da ikisi hiç karşılaştırılamayabilir. Bu dil, sonraki bölümlerde baz ve alt uzay topolojilerini incelerken sürekli kullanılacaktır.

7.1 Açık ve Kapalı Kümeler

Bir topoloji, hangi alt kümelerin “açık” sayılacağını söyler. Kapalı küme ise ayrıca seçilmez; tümleyeni açık olan kümeye kapalı denir. Bu bölümde $X \setminus A$ ile A^c aynı kümeyi, yani A 'nın X içindeki tümleyenini gösterir: $X \setminus A = A^c = \{x \in X : x \notin A\}$.

Tanım 7.1 (Açık Küme). (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $O \subseteq X$ alt kümesine, $O \in \tau$ ise **açık küme** (open set) denir.

Yani açık kümeler tam olarak topolojinin üyeleridir; bir kümenin açık olup olmadığını anlamak için tek yapılacak şey τ listesine bakmaktır.

Tanım 7.2 (Kapalı Küme). (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $F \subseteq X$ alt kümesine, tümleyeni açık ise, yani $X \setminus F \in \tau$ ise **kapalı küme** (closed set) denir.

Yani bir kümenin kapalı olup olmadığına karar vermek için tümleyenini alır ve tümleyeninin τ 'da olup olmadığına bakarız. Buna göre kapalı kümelerin listesi, açık kümelerin tümleyenlerinin listesidir.

⚠ Kapalı, açık olmamak demek değildir

Günlük dilde “açık değilse kapalıdır” deriz; topolojide bu yanlıştır. Bir alt küme için dört durum da mümkündür: hem açık hem kapalı, yalnız açık, yalnız kapalı, ne açık ne kapalı. Aşağıdaki örneklerde dördünü de göreceğiz. Bir kümenin açık olmadığını göstermek onun kapalı olduğunu göstermez; kapallılık için tümleyeninin açık olduğu ayrıca gösterilmelidir.

Tanımların hemen ardından gelen şu gözlem, açıklık ile kapallılık arasındaki ikiliği tek satırda özetler ve ileride sık sık kullanılacaktır.

Önerme 7.1 (Açıklık ve Kapallılık Tümleyenle Yer Değiştirir). (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. O zaman

1. A açıktır $\Leftrightarrow X \setminus A$ kapalıdır;
2. A kapalıdır $\Leftrightarrow X \setminus A$ açıktır.

İspat.

İkinci madde tam olarak kapalı küme tanımıdır (Tanım 7.2). Birinci madde için tümleyen tümleyeninin kümenin kendisi olduğunu kullanırız: $X \setminus (X \setminus A) = A$. Kapalı küme tanımına göre $X \setminus A$ kümesinin

kapalı olması, tümleyeninin, yani $X \setminus (X \setminus A) = A$ kümesinin açık olması demektir. Bu yüzden " $X \setminus A$ kapalı" ile " A açık" aynı şeyi söyler.

■

Şimdi dört durumun hepsini bir arada gösteren somut bir uzay inceleyelim.

Örnek 7.1 (Beş Noktalı Bir Uzayda Açık ve Kapalı Kümeler). $X = \{a, b, c, d, e\}$ ve

$$\tau = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\} \}$$

olsun. τ 'nın X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz, (X, τ) uzayının bütün kapalı kümelerini bulunuz ve hem açık hem kapalı olan, yalnız açık olan, yalnız kapalı olan ve ikisi de olmayan birer küme yazınız.

Çözüm.

τ bir topolojidir. (T1) koşulu sağlanır, çünkü $\emptyset$ ve X listede vardır. (T2) ve (T3) koşullarını denetlerken $\emptyset$ ve X 'i dışarıda bırakabiliriz; çünkü herhangi bir kümenin $\emptyset$ ile kesişimi $\emptyset$, X ile kesişimi kümenin kendisi, $\emptyset$ ile birleşimi kümenin kendisi, X ile birleşimi X 'tir ve bunların hepsi τ 'dadır. Geriye kalan dört kümenin ikili kesişimleri:

$$\begin{aligned} \{a\} \cap \{c, d\} &= \emptyset, & \{a\} \cap \{a, c, d\} &= \{a\}, & \{a\} \cap \{b, c, d, e\} &= \emptyset, \\ \{c, d\} \cap \{a, c, d\} &= \{c, d\}, & \{c, d\} \cap \{b, c, d, e\} &= \{c, d\}, & \{a, c, d\} \cap \{b, c, d, e\} &= \{c, d\}. \end{aligned}$$

Hepsi τ 'dadır; (T2) sağlanır. İkili birleşimler:

$$\begin{aligned} \{a\} \cup \{c, d\} &= \{a, c, d\}, & \{a\} \cup \{a, c, d\} &= \{a, c, d\}, & \{a\} \cup \{b, c, d, e\} &= X, \\ \{c, d\} \cup \{a, c, d\} &= \{a, c, d\}, & \{c, d\} \cup \{b, c, d, e\} &= \{b, c, d, e\}, & \{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e\} &= X. \end{aligned}$$

Hepsi τ 'dadır. τ sonlu bir aile olduğundan üç ya da daha çok üyesinin birleşimi, ikili birleşimler art arda alınarak elde edilir; ikili birleşimler τ 'da kaldığına göre her birleşim τ 'dadır. Böylece (T3) de sağlanır ve τ bir topolojidir.

Kapalı kümeler. Kapalı kümeler açık kümelerin tümleyenleridir; altı açık kümenin tümleyenlerini alalım:

$$\begin{aligned} X \setminus \emptyset &= X, & X \setminus X &= \emptyset, & X \setminus \{a\} &= \{b, c, d, e\}, \\ X \setminus \{c, d\} &= \{a, b, e\}, & X \setminus \{a, c, d\} &= \{b, e\}, & X \setminus \{b, c, d, e\} &= \{a\}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla (X, τ) uzayının kapalı kümeleri şunlardır:

$$X, \emptyset, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}.$$

Dört durum. İki listeyi karşılaştıralım.

- Hem açık hem kapalı olanlar: $\emptyset, X, \{a\}$ ve $\{b, c, d, e\}$. Örneğin $\{b, c, d, e\}$ kümesi τ 'da olduğundan açıktır; tümleyeni $\{a\}$ da τ 'da olduğundan kapalıdır.
- Yalnız açık olanlar: $\{c, d\}$ ve $\{a, c, d\}$. Örneğin $\{c, d\}$ açıktır ama tümleyeni $\{a, b, e\}$ listede yoktur; bu yüzden kapalı değildir.
- Yalnız kapalı olanlar: $\{a, b, e\}$ ve $\{b, e\}$. Örneğin $\{b, e\}$ kümesi τ 'da yoktur, açık değildir; tümleyeni $\{a, c, d\}$ ise τ 'dadır, bu yüzden $\{b, e\}$ kapalıdır.
- Ne açık ne kapalı olanlar: $\{a, b\}$ bunlardan biridir. $\{a, b\} \notin \tau$ olduğundan açık değildir; tümleyeni $\{c, d, e\}$ de τ 'da olmadığından kapalı değildir.

X 'in $2^5 = 32$ alt kümesi vardır. Bunların altısı açık, altısı kapalı, dördü hem açık hem kapalıdır; dolayısıyla açık ya da kapalı olan yalnızca $6 + 6 - 4 = 8$ alt küme vardır ve geri kalan 24 alt kümenin hiçbirisi ne açık ne kapalıdır. Yani "sıradan" bir alt kümenin ne açık ne kapalı olması olağandır.

■

İki uç topolojide durum çok daha basittir.

Örnek 7.2 (Ayrık ve En Kaba Topolojide Açık ve Kapalı Kümeler). $X \neq \emptyset$ olsun.

- a) Ayrık topolojide ($\tau = \mathcal{P}(X)$) X 'in her alt kümesi hem açık hem kapalıdır.
 b) En kaba topolojide ($\tau = \{\emptyset, X\}$) açık olan yalnızca $\emptyset$ ile X 'tir ve kapalı olan da yalnızca $\emptyset$ ile X 'tir.

Çözüm.

- a) $A \subseteq X$ herhangi bir alt küme olsun. $\mathcal{P}(X)$, X 'in bütün alt kümelerinden oluştuğundan $A \in \tau$; yani A açıktır. Tümleyeni $X \setminus A$ da X 'in bir alt kümesidir, bu yüzden $X \setminus A \in \tau$; yani A kapalıdır. Demek ki ayrık topolojide her alt küme hem açık hem kapalıdır.
 b) $\tau = \{\emptyset, X\}$ olduğundan açık kümeler yalnızca $\emptyset$ ve X 'tir. Bir $F \subseteq X$ kümesinin kapalı olması için $X \setminus F \in \{\emptyset, X\}$ olmalıdır. $X \setminus F = \emptyset$ ise $F = X$; $X \setminus F = X$ ise $F = \emptyset$. Dolayısıyla kapalı kümeler de yalnızca $\emptyset$ ve X 'tir. Bu topolojide $\emptyset$ ve X dışındaki her alt küme ne açık ne kapalıdır.

■

7.2 Kapalı Kümelerin Özellikleri

Topolojinin üç koşulu açık kümeler içindir: $\emptyset$ ve X açıktır, iki açık kümenin kesişimi açıktır, keyfi sayıda açık kümenin birleşimi açıktır. Kapalı kümeler açık kümelerin tümleyenleri olduğuna göre, De Morgan kuralları bu üç özelliği kapalı kümeler için “ters yüz eder”: birleşim ile kesişim yer değiştirir. Bu teoremi ispatlamamız gerekir, çünkü ileride bir kümenin kapalı olduğunu göstermek için çoğu zaman onu kapalı kümelerin kesişimi ya da sonlu birleşimi olarak yazacağız.

Teorem 7.1 (Kapalı Kümelerin Temel Özellikleri). (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

(K1) $\emptyset$ ve X kapalıdır.

(K2) Kapalı kümelerden oluşan boş olmayan herhangi bir $\{F_i\}_{i \in I}$ ailesinin kesişimi $\bigcap_{i \in I} F_i$ kapalıdır.

(K3) Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalıdır: $F_1, \dots, F_n$ kapalı ise $F_1 \cup \dots \cup F_n$ kapalıdır.

İspat.

(K1). $X \setminus \emptyset = X$ ve (T1) gereği $X \in \tau$; dolayısıyla $\emptyset$ 'in tümleyeni açıktır, yani $\emptyset$ kapalıdır. Benzer biçimde $X \setminus X = \emptyset \in \tau$; dolayısıyla X kapalıdır.

(K2). Her $i \in I$ için F_i kapalı olsun; tanım gereği her $X \setminus F_i$ açıktır. Kesişimin tümleyenini De Morgan kuralıyla yazalım:

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i).$$

Sağ taraf açık kümelerin bir birleşimidir; (T3) gereği açıktır. O halde $\bigcap_{i \in I} F_i$ kümesinin tümleyeni açıktır, yani bu kesişim kapalıdır.

(K3). Önce iki küme için gösterelim. F_1 ve F_2 kapalı olsun; $X \setminus F_1$ ve $X \setminus F_2$ açıktır. De Morgan kuralıyla

$$X \setminus (F_1 \cup F_2) = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2).$$

Sağ taraf iki açık kümenin kesişimidir; (T2) gereği açıktır. Dolayısıyla $F_1 \cup F_2$ kapalıdır.

Şimdi n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 1$ için söylenecek bir şey yoktur. $n - 1$ tane kapalı kümenin birleşiminin kapalı olduğunu varsayalım ve $F_1, \dots, F_n$ kapalı olsun. Birleşimi

$$F_1 \cup \dots \cup F_n = (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}) \cup F_n$$

biçiminde yazalım. Parantez içindeki küme tümevarım varsayımı gereği kapalıdır, F_n kapalıdır; iki kapalı kümenin birleşimi az önce gösterildiği gibi kapalıdır. Böylece $F_1 \cup \dots \cup F_n$ kapalıdır.

■

İspatın özü: kapalı kümelerin özellikleri, açık kümelerin özelliklerinin De Morgan kurallarıyla tümleyene aktarılmış hâlidir.

(K3)'te “sonlu” sözcüğü atılamaz: sonsuz sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalı olmak zorunda değildir. Bunun somut bir örneğini sonlu tümleyen topolojisini tanıdıktan sonra vereceğiz.

7.3 Sıfır Noktası Topolojileri

Sonlu ve sayılabilir tümleyen topolojilerine geçmeden önce, “bir kümenin açık olması belli bir noktayı içermesine bağlıdır” fikrine dayanan iki basit topoloji görelim. Bunlar hem topoloji koşullarını denetleme alıştırmaları hem de açık–kapalı ayrımının güzel örnekleridir.

Örnek 7.3 (Sıfırı İçeren Kümeler Topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\tau_0 = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

τ_0 ’ın üyeleri 0’ı içeren bütün alt kümeler ile boş kümedir.

(T1). $\emptyset \in \tau_0$ tanım gereğidir. $0 \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R} \in \tau_0$.

(T2). $O_1, O_2 \in \tau_0$ olsun. O_1 ya da O_2 boş küme ise $O_1 \cap O_2 = \emptyset \in \tau_0$. İkisi de boş değilse, τ_0 ’ın tanımı gereği $0 \in O_1$ ve $0 \in O_2$; bu yüzden $0 \in O_1 \cap O_2$ ve dolayısıyla $O_1 \cap O_2 \in \tau_0$.

(T3). I herhangi bir küme ve her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau_0$ olsun. Bütün O_α ’lar boş ise (ya da $I = \emptyset$ ise) birleşim $\emptyset$ ’dir ve $\emptyset \in \tau_0$. Aksi hâlde boş olmayan bir O_β vardır; τ_0 ’ın tanımı gereği $0 \in O_\beta$ ve $O_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ olduğundan $0 \in \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. Bu yüzden birleşim τ_0 ’dadır.

Üç koşul da sağlandığından $\tau_0, \mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir.

■

İspatta $\mathbb{R}$ ’nin hiçbir özelliğini kullanmadık; yalnızca 0’ın kümenin bir elemanı olmasını kullandık. Bu yüzden aynı ispat, 0’ı içeren herhangi bir X kümesi (örneğin $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) üzerinde $\tau_0 = \{A \subseteq X : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$ ailesinin de bir topoloji olduğunu gösterir. Bunu birazdan kullanacağız.

Şimdi 0’ı içermeyen kümelerden kurulan aileyi ele alalım.

Örnek 7.4 (Sıfırı İçermeyen Kümeler Topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\tilde{\tau}_0 = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin A\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\tilde{\tau}_0$ ’ın üyeleri 0’ı içermeyen bütün alt kümeler ile $\mathbb{R}$ ’nin kendisidir.

(T1). $0 \notin \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in \tilde{\tau}_0$. $\mathbb{R} \in \tilde{\tau}_0$ tanım gereğidir.

(T2). $O_1, O_2 \in \tilde{\tau}_0$ olsun. Biri $\mathbb{R}$ ise, örneğin $O_1 = \mathbb{R}$ ise, $O_1 \cap O_2 = O_2 \in \tilde{\tau}_0$. İkisi de $\mathbb{R}$ değilse $0 \notin O_1$ ’dir; $O_1 \cap O_2 \subseteq O_1$ olduğundan $0 \notin O_1 \cap O_2$ ve dolayısıyla $O_1 \cap O_2 \in \tilde{\tau}_0$.

(T3). I herhangi bir küme ve her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tilde{\tau}_0$ olsun. Bir $\beta \in I$ için $O_\beta = \mathbb{R}$ ise birleşim $\mathbb{R}$ ’dir ve $\mathbb{R} \in \tilde{\tau}_0$. Aksi hâlde her α için $0 \notin O_\alpha$ ’dır. 0 birleşimde olsaydı en az bir O_α ’da olurdu; bu mümkün olmadığından $0 \notin \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ ve birleşim $\tilde{\tau}_0$ ’dadır.

Böylece $\tilde{\tau}_0$ bir topolojidir.

■

Bu iki topoloji arasında sıkı bir bağ vardır: $(\mathbb{R}, \tau_0)$ uzayının kapalı kümeleri tam olarak $\tilde{\tau}_0$ ’ın üyeleridir. Bunu alıştırmalarda ispatlayacaksınız.

Örnek 7.5 (Doğal Sayılar Üzerinde Sıfır Topolojisi). $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ üzerinde $\tau_0 = \{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisini alalım. $(\mathbb{N}, \tau_0)$ uzayında

a) $\{1, 2, 3\}$ kümesi açık mıdır, kapalı mıdır?

b) $\{0, \frac{1}{2}\}$ kümesi açık mıdır, kapalı mıdır?

Çözüm.

Önce açık ve kapalı kümeleri betimleyelim. Tanım gereği $A \subseteq \mathbb{N}$ açıktır $\Leftrightarrow 0 \in A$ ya da $A = \emptyset$. Bir $B \subseteq \mathbb{N}$ kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus B$ açıktır $\Leftrightarrow 0 \in \mathbb{N} \setminus B$ ya da $\mathbb{N} \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow 0 \notin B$ ya da $B = \mathbb{N}$.

a) $0 \notin \{1, 2, 3\}$ ve $\{1, 2, 3\} \neq \emptyset$ olduğundan $\{1, 2, 3\}$ açık değildir. $0 \notin \{1, 2, 3\}$ olduğundan kapalı kümelerin betimine göre $\{1, 2, 3\}$ kapalıdır. Doğrudan görmek için tümleyenine bakalım: $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\} = \{0, 4, 5, 6, \dots\}$ kümesi 0’ı içerir, dolayısıyla açıktır. Sonuç: $\{1, 2, 3\}$ kapalıdır ama açık değildir.

b) Açıklık ve kapalılık yalnızca uzayın alt kümeleri için tanımlıdır. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan $\{0, \frac{1}{2}\} \not\subseteq \mathbb{N}$; bu küme $(\mathbb{N}, \tau_0)$ uzayının bir alt kümesi bile değildir. Dolayısıyla ne açıktır ne kapalıdır.

■

7.4 Sonlu Tümleyen Topolojisi

Şimdiye kadar gördüğümüz topolojilerde bir kümenin açık olması ya listede olmasına ya da belli bir noktayı içermesine bağlıydı. Yeni fikir şudur: bir küme, dışarıda bıraktığı nokta sayısı az ise açık olsun. “Az” sözcüğünü önce “sonlu”, sonra “sayılabilir” olarak yorumlayacağız.

Tanım 7.3 (Sonlu Tümleyen Topolojisi). X herhangi bir küme olsun.

$$\tau_{\text{sonlu}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$$

ailesine X üzerindeki **sonlu tümleyen topolojisi** (cofinite topology, finite complement topology) denir.

Yani sonlu tümleyen topolojisinde açık kümeler, boş küme ile tümleyeni sonlu olan kümelerdir; bir küme ancak X 'in “neredeyse tamamı” ise açıktır. X 'in kendisi de açıktır, çünkü tümleyeni $\emptyset$ sonludur.

Tanımda “topoloji” sözcüğünü kullandık; bunun hakkını vermek için üç koşulu denetlememiz gerekir. İspat De Morgan kurallarına ve sonlu kümelerle ilgili iki basit gerçeğe dayanır: iki sonlu kümenin birleşimi sonludur ve sonlu bir kümenin her alt kümesi sonludur.

Teorem 7.2 (Sonlu Tümleyen Ailesi Bir Topolojidir). X herhangi bir küme olsun. $\tau_{\text{sonlu}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

İspat.

Kısalık için $\tau = \tau_{\text{sonlu}}$ yazalım.

(T1). $\emptyset \in \tau$ tanım gereğidir. $X \setminus X = \emptyset$ sonlu bir küme olduğundan $X \in \tau$.

(T2). $O_1, O_2 \in \tau$ olsun. O_1 ya da O_2 boş ise $O_1 \cap O_2 = \emptyset \in \tau$. İkisi de boş değilse τ 'nın tanımı gereği $X \setminus O_1$ ve $X \setminus O_2$ sonludur. Göstermek istediğimiz $O_1 \cap O_2 \in \tau$, yani $X \setminus (O_1 \cap O_2)$ kümesinin sonlu olduğudur. De Morgan kuralıyla

$$X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2).$$

Sağ taraf iki sonlu kümenin birleşimidir ve iki sonlu kümenin birleşimi sonludur. Bu yüzden $X \setminus (O_1 \cap O_2)$ sonludur ve $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

(T3). I herhangi bir küme ve her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau$ olsun. $J = \{\alpha \in I : O_\alpha \neq \emptyset\}$ diyelim. Boş kümeler birleşime katkı yapmadığından

$$\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha.$$

$J = \emptyset$ ise birleşim $\emptyset$ 'dir ve $\emptyset \in \tau$. $J \neq \emptyset$ ise her $\alpha \in J$ için $X \setminus O_\alpha$ sonludur. De Morgan kuralıyla

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus O_\alpha).$$

Bir $\beta \in J$ seçelim. Kesişim, aileyi oluşturan her kümenin alt kümesidir; özel olarak

$$\bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus O_\alpha) \subseteq X \setminus O_\beta.$$

$X \setminus O_\beta$ sonludur ve sonlu bir kümenin alt kümesi sonludur; bu yüzden kesişim sonludur. Dolayısıyla $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ sonludur ve $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau$.

Üç koşul da sağlandığından τ_{sonlu} bir topolojidir.

■

İspatın özü: kesişimin tümleyeni tümleyenlerin birleşimi, birleşimin tümleyeni tümleyenlerin kesişimidir; iki sonlu kümenin birleşimi ve sonlu bir kümenin alt kümesi sonlu kalır.

i Sonlu kümelerde sonlu tümleyen topolojisi ayrık topolojidir

X sonlu ise X 'in her alt kümesinin tümleyeni de sonludur; bu yüzden her alt küme τ_{sonlu} 'dadır ve $\tau_{\text{sonlu}} = \mathcal{P}(X)$ olur. Sonlu tümleyen topolojisi ancak X sonsuz olduğunda yeni bir şey söyler.

Bu topolojide kapalı kümeleri tanımak da kolaydır ve örneklerde sürekli kullanacağımız için ayrı bir önerme olarak yazıyoruz.

Önerme 7.2 (Sonlu Tümleyen Topolojisinde Kapalı Kümeler). X üzerinde sonlu tümleyen topolojisi alınsın. Bir $B \subseteq X$ kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow B$ sonludur ya da $B = X$.

İspat.

Tanım gereği B kapalıdır $\Leftrightarrow X \setminus B$ açıktır. τ_{sonlu} 'nın tanımına göre $X \setminus B$ açıktır $\Leftrightarrow X \setminus (X \setminus B)$ sonludur ya da $X \setminus B = \emptyset$. $X \setminus (X \setminus B) = B$ olduğundan ilk seçenek " B sonludur" demektir; $X \setminus B = \emptyset$ ise $B = X$ demektir. Böylece B kapalıdır $\Leftrightarrow B$ sonludur ya da $B = X$.

■

Yani sonlu tümleyen topolojisinde kapalı kümeler, uzayın kendisi ile bütün sonlu alt kümelerdir. Şimdi $\mathbb{R}$ üzerinde somut kümeleri inceleyelim.

Örnek 7.6 (Reel Sayılarda Sonlu Tümleyen Topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu tümleyen topolojisi τ_{sonlu} alınsın. Aşağıdaki kümelerin açık olup olmadığını ve kapalı olup olmadığını belirleyiniz.

- a) $\mathbb{Q}$
- b) $\{0\}$
- c) $\mathbb{N}$
- d) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$

Çözüm.

Elimizdeki iki ölçüt şunlardır: $A \subseteq \mathbb{R}$ açıktır $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A$ sonludur ya da $A = \emptyset$; $B \subseteq \mathbb{R}$ kapalıdır $\Leftrightarrow B$ sonludur ya da $B = \mathbb{R}$ (Önerme 7.2).

a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrasyonel sayılar kümesidir ve sonsuzdur: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots$ sayılarının hepsi irrasyoneldir (bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $k\sqrt{2}$ rasyonel olsaydı $\sqrt{2} = (k\sqrt{2})/k$ de rasyonel olurdu) ve birbirinden farklıdır. Ayrıca $\mathbb{Q} \neq \emptyset$. Bu yüzden $\mathbb{Q}$ açık değildir. Öte yandan $\mathbb{Q}$ sonsuzdur ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$) ve $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$); bu yüzden $\mathbb{Q}$ kapalı da değildir. $\mathbb{Q}$ ne açık ne kapalıdır.

b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sonsuzdur ve $\{0\} \neq \emptyset$; bu yüzden $\{0\}$ açık değildir. $\{0\}$ sonlu bir küme olduğundan kapalıdır. $\{0\}$ kapalıdır ama açık değildir.

c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sonsuzdur; örneğin bütün negatif reel sayıları içerir. $\mathbb{N} \neq \emptyset$ olduğundan $\mathbb{N}$ açık değildir. $\mathbb{N}$ sonsuzdur ve $\mathbb{N} \neq \mathbb{R}$; bu yüzden $\mathbb{N}$ kapalı da değildir. $\mathbb{N}$ ne açık ne kapalıdır.

d) $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. Tümleyeni $\mathbb{R} \setminus A = \{1, 2, \dots, n\}$ sonludur; bu yüzden A açıktır. A sonsuzdur (örneğin bütün negatif sayıları içerir) ve $A \neq \mathbb{R}$ ($1 \notin A$); bu yüzden A kapalı değildir. A açıktır ama kapalı değildir.

$$A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$$

açık, kapalı değil

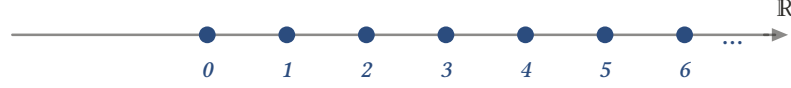


tümleyen $\mathbb{R} \setminus A = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu $\rightarrow A$ açık

A sonsuz ve $A \neq \mathbb{R} \rightarrow A$ kapalı değil

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

ne açık ne kapalı



tümleyen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sonsuz $\rightarrow \mathbb{N}$ açık değil; $\mathbb{N}$ sonsuz ve $\mathbb{N} \neq \mathbb{R} \rightarrow$ kapalı değil

Şekil 7.1: $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu tümleyen topolojisinde iki küme. Üstte $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$: doğrunun tamamı alınmış, yalnızca n tane nokta çıkarılmıştır; tümleyeni sonlu olduğundan A açıktır, ama sonsuz ve $\mathbb{R}$ 'den farklı olduğundan kapalı değildir. Altta $\mathbb{N}$: sayılabilir sonsuz nokta işaretlidir; tümleyeni sonsuz olduğundan açık değil, kendisi sonsuz ve $\mathbb{R}$ 'den farklı olduğundan kapalı da değildir. Bu topolojide açıklık, dışarıda kalan noktaların *sonlu* olmasına bağlıdır.

■

Bu örnek, (K3)'teki "sonlu" sözcüğünün neden gerekli olduğunu da gösterir.

⚠ Sonsuz sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalı olmayabilir

$\mathbb{R}$ üzerinde sonlu tümleyen topolojisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\}$ kümesi sonlu, dolayısıyla kapalıdır. Ama bunların birleşimi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$ kapalı değildir (Örnek 7.6, c şıkkı). Benzer biçimde her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R} \setminus \{n\}$ açıktır (tümleyeni tek noktadır), ama kesişimleri $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus \{n\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ açık değildir; çünkü tümleyeni $\mathbb{N}$ sonsuzdur ve küme boş değildir. Topolojide açık kümelerin yalnızca **sonlu** kesişimi, kapalı kümelerin yalnızca **sonlu** birleşimi güvencelidir.

7.5 Sayılabilir Tümleyen Topolojisi

Sonlu tümleyen topolojisinde "az nokta dışarıda kalıyor" demek "sonlu sayıda nokta dışarıda kalıyor" demektir. Şimdi "az" sözcüğünü genişletip "sayılabilir çoklukta" diyeceğiz. Önce sayılabilirlikle ilgili kullanacağımız gerçekleri hatırlayalım.

i Hatırlatma: sayılabilir kümeler

Bir A kümesi, sonlu ise ya da A ile $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ arasında birebir örten bir fonksiyon varsa **sayılabilir** (countable) denir; sayılabilir olmayan kümeye **sayılamaz** denir. Örneğin $\{1\}$ ve $\{0, 1, \dots, n\}$ sonludur, dolayısıyla sayılabilir; $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sayılabilir; $\mathbb{R}$, irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ve boş olmayan her açık aralık sayılamazdır. Bu bölümde şu üç gerçeği kullanacağız:

- Her sonlu küme sayılabilir (tanım gereği).
- Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi sayılabilir: kümenin elemanları $a_1, a_2, a_3, \dots$ diye sıralanmışsa alt kümenin elemanları bu sırada atlanarak sıralanır.
- İki sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir: elemanlar $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ diye dönüşümlü sıralanır, tekrar edenler atılır.

Bu gerçeklerin ayrıntılı ispatları küme kuramında yapılır; burada yalnızca sonuçlarını kullanıyoruz.

Tanım 7.4 (Sayılabilir Tümleyen Topolojisi). X herhangi bir küme olsun.

$$\tau_{\text{say}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$$

ailesine X üzerindeki **sayılabilir tümleyen topolojisi** (cocountable topology, countable complement topology) denir.

Yani sayılabilir tümleyen topolojisinde açık kümeler, boş küme ile tümleyeni sayılabilir olan kümelerdir; bir küme dışarıda en çok sayılabilir çoklukta nokta bırakıyorsa açıktır.

i Sayılabilir kümelerde sayılabilir tümleyen topolojisi ayrık topolojidir

X sayılabilir ise her alt kümesinin tümleyeni de X 'in bir alt kümesi olarak sayılabilir; bu yüzden her alt küme açıktır ve $\tau_{\text{say}} = \mathcal{P}(X)$ olur. Sayılabilir tümleyen topolojisi ancak X sayılamaz olduğunda, örneğin $X = \mathbb{R}$ için, yeni bir topoloji verir.

Sonlu tümleyen topolojisinin ispatını sayılabilir kümelerle taşıyabilmek için “iki sonlu kümenin birleşimi sonludur” yerine “iki sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir”, “sonlu kümenin alt kümesi sonludur” yerine “sayılabilir kümenin alt kümesi sayılabilir” gerçeklerini kullanmamız yeter.

Teorem 7.3 (Sayılabilir Tümleyen Ailesi Bir Topolojidir). X herhangi bir küme olsun. $\tau_{\text{say}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

İspat.

Kısalık için $\tau = \tau_{\text{say}}$ yazalım.

(T1). $\emptyset \in \tau$ tanım gereğidir. $X \setminus X = \emptyset$ sonlu, dolayısıyla sayılabilir olduğundan $X \in \tau$.

(T2). $O_1, O_2 \in \tau$ olsun. Biri boş ise kesişim $\emptyset \in \tau$. İkisi de boş değilse $X \setminus O_1$ ve $X \setminus O_2$ sayılabilir. De Morgan kuralıyla

$$X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$$

ve sağ taraf iki sayılabilir kümenin birleşimi olduğundan sayılabilir. Bu yüzden $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

(T3). I herhangi bir küme ve her $\alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau$ olsun. $J = \{\alpha \in I : O_\alpha \neq \emptyset\}$ diyelim; boş kümeler birleşimi değiştirmediklerinden $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha$. $J = \emptyset$ ise birleşim $\emptyset \in \tau$. $J \neq \emptyset$ ise bir $\beta \in J$ seçelim; $X \setminus O_\beta$ sayılabilir. De Morgan kuralıyla

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus O_\alpha) \subseteq X \setminus O_\beta.$$

Sayılabilir bir kümenin alt kümesi sayılabilir olduğundan sol taraf sayılabilir. Dolayısıyla $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau$.

Üç koşul da sağlandığından τ_{say} bir topolojidir.

■

İspatın özü: sonlu tümleyen ispatının aynısı; “sonlu” sözcüğünün her geçtiği yerde “sayılabilir” yazılır ve sayılabilir kümelerin aynı iki kapanış özelliğine sahip olduğu kullanılır.

Önerme 7.3 (Sayılabilir Tümleyen Topolojisinde Kapalı Kümeler). X üzerinde sayılabilir tümleyen topolojisi alınsın. Bir $B \subseteq X$ kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow B$ sayılabilir ya da $B = X$.

İspat.

B kapalıdır $\Leftrightarrow X \setminus B$ açıktır $\Leftrightarrow X \setminus (X \setminus B) = B$ sayılabilir ya da $X \setminus B = \emptyset$, yani $B = X$. Bu, Önerme 7.2 ispatının kelimesi kelimesine aynısıdır; yalnızca “sonlu” yerine “sayılabilir” yazılmıştır.

■

Örnek 7.7 (Reel Sayılarda Sayılabilir Tümleyen Topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerinde sayılabilir tümleyen topolojisi alınsın. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ve $[0, 1]$ kümelerinin açık olup olmadığını ve kapalı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

Ölçütler: A açıktır $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A$ sayılabilir ya da $A = \emptyset$; B kapalıdır $\Leftrightarrow B$ sayılabilir ya da $B = \mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sayılamazdır: sayılabilir olsaydı $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ iki sayılabilir kümenin birleşimi olarak sayılabilir olurdu; oysa $\mathbb{R}$ sayılamazdır. $\mathbb{Q} \neq \emptyset$ olduğundan $\mathbb{Q}$ açık değildir. $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan kapalıdır.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tümleyeni $\mathbb{Q}$ sayılabilir; bu yüzden $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ açıktır. Kendisi sayılamazdır ve $\mathbb{R}$ 'ye eşit değildir; bu yüzden kapalı değildir.

$[0, 1]$. $[0, 1]$ aralığı $(0, 1)$ açık aralığı içerdiğinden sayılamazdır ve $\mathbb{R}$ 'ye eşit değildir; kapalı değildir. Tümleyeni $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, $(1, 2)$ aralığı içerdiğinden sayılamazdır ve $[0, 1] \neq \emptyset$; bu yüzden $[0, 1]$ açık da değildir. $[0, 1]$ ne açık ne kapalıdır.

Sonlu tümleyen topolojisiyle karşılaştırmak: orada $\mathbb{Q}$ ne açık ne kapalıydı, burada kapalıdır. Aynı küme, farklı topolojilerde farklı davranır.

■

7.6 Daha İnce ve Daha Kaba Topolojiler

Aynı X kümesi üzerinde birden çok topoloji tanımladık: en kaba topoloji, ayrık topoloji, sonlu tümleyen, sayılabilir tümleyen. Bunları birbirleriyle karşılaştırmanın doğal yolu, hangi topolojinin daha çok açık küme içerdiğine bakmaktır.

Tanım 7.5 (Daha İnce, Daha Kaba ve Karşılaştırılabilir Topolojiler). τ ve τ' , aynı X kümesi üzerinde iki topoloji olsun.

1. $\tau' \supseteq \tau$ ise τ' topolojisi τ 'dan **daha incedir** (finer) denir; bu durumda τ 'nın τ' 'den **daha kaba** (coarser) olduğu da söylenir.

2. $\tau' \supsetneq \tau$ ise, yani τ' topolojisi τ 'yu içeriyor ama ona eşit değilse, τ' topolojisi τ 'dan **kesin daha incedir** (strictly finer), τ ise τ' 'den **kesin daha kabadır** denir.

3. $\tau' \supseteq \tau$ ya da $\tau \supseteq \tau'$ ise τ ile τ' **karşılaştırılabilir** (comparable) denir.

Yani daha ince topoloji daha çok açık kümeye sahip olandır; “ince” sözcüğü, kümenin daha küçük açık parçalara bölünebildiğini, “kaba” sözcüğü daha az parçaya ayrılabilmediğini anlatır. Bir topolojinin bir başkasından daha ince olduğunu göstermek için kabanın her açık kümesinin incede de açık olduğunu göstermek yeter.

İki topolojinin karşılaştırılabilir olması gerekmez; küçük bir örnek bunu hemen gösterir.

Örnek 7.8 (Karşılaştırılamayan İki Topoloji). $X = \{a, b, c\}$ üzerinde $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ve $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ topolojilerinin karşılaştırılabilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Önce τ_1 'in topoloji olduğunu görelim. $\emptyset$ ve X listededir; (T1) sağlanır. Üyelerin ikili kesişimleri $\{a\} \cap \emptyset = \emptyset$, $\{a\} \cap X = \{a\}$, $\emptyset \cap X = \emptyset$ ve ikili birleşimleri $\{a\} \cup \emptyset = \{a\}$, $\{a\} \cup X = X$, $\emptyset \cup X = X$ olup hepsi τ_1 'dedir; aile sonlu olduğundan her birleşim ikili birleşimlerle elde edilir. Böylece (T2) ve (T3) sağlanır. τ_2 için aynı hesap a yerine b ile yapılır. Şimdi $\{a\} \in \tau_1$ ama $\{a\} \notin \tau_2$; bu yüzden $\tau_1 \not\subseteq \tau_2$. Benzer biçimde $\{b\} \in \tau_2$ ama $\{b\} \notin \tau_1$; bu yüzden $\tau_2 \not\subseteq \tau_1$. Hiçbiri ötekini içermediğinden τ_1 ile τ_2 karşılaştırılabilir değildir.

Öte yandan iki uç topoloji her topolojiyle karşılaştırılabilir: her topoloji en kaba topolojiden daha ince, ayrık topolojiden daha kabadır.

Önerme 7.4 (En Kaba ve En İnce Topolojiler). X bir küme ve τ , X üzerinde herhangi bir topoloji olsun. O zaman

$$\{\emptyset, X\} \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Yani en kaba topoloji X üzerindeki her topolojiden daha kaba, ayrık topoloji her topolojiden daha incedir.

İspat.

(T1) koşulu gereği $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$; bu yüzden $\{\emptyset, X\} \subseteq \tau$. Öte yandan bir topoloji, tanımı gereği X 'in alt kümelerinden oluşan bir ailedir, yani $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Sonlu ve sayılabilir tümleyen topolojilerini karşılaştırmak için de tek bir gözlem yeter: her sonlu küme sayılabilir. Bu yüzden tümleyeni sonlu olan her küme, tümleyeni sayılabilir olan kümelerden biridir. İncelik ne zaman kesin olur sorusunu da tam olarak yanıtlayabiliriz.

Teorem 7.4 (Sayılabilir Tümleyen Topolojisi Sonlu Tümleyen Topolojisinden Daha İncedir). X herhangi bir küme olsun. X üzerindeki sonlu tümleyen ve sayılabilir tümleyen topolojileri karşılaştırılabilir ve

$$\tau_{\text{sonlu}} \subseteq \tau_{\text{say}},$$

yani $\tau_{\text{say}}, \tau_{\text{sonlu}}$ 'dan daha incedir. Üstelik X sonlu ise iki topoloji eşittir; X sonsuz ise τ_{say} kesin daha incedir.

İspat.

Kapsama. $A \in \tau_{\text{sonlu}}$ olsun. $A = \emptyset$ ise $A \in \tau_{\text{say}}$, çünkü $\emptyset$ tanım gereği τ_{say} 'dadır. $A \neq \emptyset$ ise $X \setminus A$ sonludur; her sonlu küme sayılabilir olduğundan $X \setminus A$ sayılabilir ve dolayısıyla $A \in \tau_{\text{say}}$. Böylece $\tau_{\text{sonlu}} \subseteq \tau_{\text{say}}$; iki topoloji karşılaştırılabilir ve τ_{say} daha incedir.

X sonlu ise eşitlik. Yukarıdaki notlarda gördüğümüz gibi X sonluysa $\tau_{\text{sonlu}} = \mathcal{P}(X)$; X sonlu olduğundan sayılabilir ve $\tau_{\text{say}} = \mathcal{P}(X)$. Dolayısıyla $\tau_{\text{sonlu}} = \tau_{\text{say}}$.

X sonsuz ise kesin incelik. τ_{say} 'da olup τ_{sonlu} 'da olmayan bir küme bulmalıyız. Bir $x_0 \in X$ seçelim. X sonsuz olduğundan $X \setminus \{x_0\}$ de sonsuzdur ve sonsuz bir kümeden birbirinden farklı $x_1, x_2, x_3, \dots$ elemanları seçilebilir. $C = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ diyelim; $C, \mathbb{Z}^+$ ile birebir örten eşlenebildiğinden ($k \mapsto x_k$) sayılabilir ve sonsuzdur, ayrıca $x_0 \notin C$. $A = X \setminus C$ kümesine bakalım:

- $X \setminus A = C$ sayılabilir olduğundan $A \in \tau_{\text{say}}$.
- $x_0 \in A$ olduğundan $A \neq \emptyset$; $X \setminus A = C$ sonsuz olduğundan A 'nın tümleyeni sonlu değildir. Dolayısıyla $A \notin \tau_{\text{sonlu}}$.

Böylece $\tau_{\text{sonlu}} \subsetneq \tau_{\text{say}}$; τ_{say} kesin daha incedir.

İspatın özü: sonlu tümleyen daima sayılabilir tümleyendir, ama sonsuz bir kümede sayılabilir sonsuz bir tümleyen seçilerek ters yön bozulur.

Bölümde gördüğümüz dört topolojiyi tek bir zincirde toplayabiliriz. X herhangi bir küme ise

$$\{\emptyset, X\} \subseteq \tau_{\text{sonlu}} \subseteq \tau_{\text{say}} \subseteq \mathcal{P}(X);$$

soldan sağa doğru topolojiler incelik. İlk ve son kapsama **Önerme 7.4**, ortadaki kapsama **Teorem 7.4** gereğidir. $X = \mathbb{R}$ için dört topoloji de birbirinden farklıdır: $\{0\}$ kümesi $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 'de açıkken τ_{say} 'da açık değildir; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ kümesi τ_{say} 'da açıkken τ_{sonlu} 'da açık değildir; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesi τ_{sonlu} 'da açıkken en kaba topolojide açık değildir.

ya da $B = \mathbb{R} \Leftrightarrow B \in \tilde{\tau}_0$. Yani τ_0 'ın kapalı kümeleri tam olarak $\tilde{\tau}_0$ 'ın üyeleridir. (Aynı akıl yürütme $\tilde{\tau}_0$ 'ın kapalı kümelerinin de tam olarak τ_0 'ın üyeleri olduğunu gösterir.)

f) X sayılabilir olsun. Herhangi bir $A \subseteq X$ için $X \setminus A \subseteq X$; sayılabilir bir kümenin alt kümesi sayılabilir olduğundan $X \setminus A$ sayılabilirdir ve $A \in \tau_{\text{say}}$. Böylece $\mathcal{P}(X) \subseteq \tau_{\text{say}}$; ters kapsama her topoloji için geçerlidir. Dolayısıyla $\tau_{\text{say}} = \mathcal{P}(X)$. X sonlu ise aynı akıl yürütme “sayılabilir” yerine “sonlu” ile yapılır: her $A \subseteq X$ için $X \setminus A$, sonlu bir kümenin alt kümesi olarak sonludur, bu yüzden $A \in \tau_{\text{sonlu}}$ ve $\tau_{\text{sonlu}} = \mathcal{P}(X)$.

g) $A \setminus F = A \cap (X \setminus F)$ yazalım. A açıktır; F kapalı olduğundan $X \setminus F$ açıktır; iki açık kümenin kesişimi (T2) gereği açıktır. Dolayısıyla $A \setminus F$ açıktır. Benzer biçimde $F \setminus A = F \cap (X \setminus A)$; F kapalıdır ve A açık olduğundan $X \setminus A$ kapalıdır (**Önerme 7.1**); iki kapalı kümenin kesişimi (K2) gereği kapalıdır (**Teorem 7.1**). Dolayısıyla $F \setminus A$ kapalıdır.

■

Bir topolojiyi bütün açık kümelerini listeleterek vermek çoğu zaman olanaksızdır; bir sonraki bölümde topolojiyi daha küçük bir “üretici” aileden kurmayı öğreneceğiz: **Baz ve Alt Baz**.

8. Baz ve Alt Baz

Açık ve Kapalı Kümeler; Sonlu ve Sayılabilir Tümlleyen Topolojileri bölümünde bir topolojiyi vermek için açık kümelerin tamamını tek tek saydık ya da “tümlayeni sonlu olan kümeler” gibi bir kuralla tarif ettik. Ancak çoğu topolojide açık kümeler o kadar çoktur ki hepsini bir arada görmek mümkün değildir. Gerçek sayı doğrusunu düşünelim: açık kümelerin hepsini betimlemek zordur, ama “açık aralıklar” gibi küçük ve iyi anlaşılan bir aile bütün açık kümeleri üretmeye yeter.

Bu bölümde işte bu fikri kesinleştireceğiz. Bir **baz**, topolojinin tamamını üretmeye yeten küçük bir küme ailesidir; her açık küme baz elemanlarının birleşimi olarak yazılır. Önce bazın sağlaması gereken iki koşulu tanımlayacak, sonra bir bazdan bir topoloji üretmenin iki yolunu göreceğiz ve bunun gerçekten bir topoloji olduğunu adım adım ispatlayacağız. Ardından ters yönde gideceğiz: verilmiş bir topolojinin hangi ailelerin bazı olduğunu tanıyacağız ve iki topolojiyi bazları üzerinden karşılaştıracacağız.

Bölümün ikinci yarısı uygulamadır: gerçek sayılarda standart topolojiyi açık aralıklar bazıyla kuracak, açık ışınların açık ve kapalı aralıkların kapalı olduğunu göstereceğiz; yarı açık aralıkların ürettiği **alt limit topolojisi**ni tanımlayıp bunun standart topolojiden daha ince olduğunu kanıtlayacağız. Son olarak bazdan bir adım daha geride duran **alt baz** kavramını tanıtacağız.

8.1 Baz Tanımı

Bir X kümesi üzerinde topoloji kurmak istiyoruz, ama açık kümelerin hepsini yazmak yerine yalnızca “yapı taşlarını” vermek istiyoruz. Bu yapı taşlarının iki şeyi sağlaması gerekir: her noktayı örtmeleri ve iki yapı taşının kesişiminin yine yapı taşlarıyla doldurulabilmesi.

Tanım 8.1 (Baz). X bir küme olsun. X 'in alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{B}$ ailesi aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa $\mathcal{B}$ 'ye X üzerinde bir topoloji için **baz** (basis) denir; $\mathcal{B}$ 'nin elemanlarına **baz elemanı** adı verilir.

(B1) Her $x \in X$ için $x \in B$ olacak biçimde en az bir $B \in \mathcal{B}$ baz elemanı vardır.

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ ise $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak biçimde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ baz elemanı vardır.

Yani baz elemanları X 'in her noktasını örter ve iki baz elemanının ortak bir noktası varsa o noktanın çevresi, kesişimin içine sığan üçüncü bir baz elemanı ile doldurulabilir.

(B1) koşulu, $\mathcal{B}$ 'nin bütün elemanlarının birleşiminin X 'e eşit olması demektir: $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$. (B2) koşulu ise kesişimin kendisinin bir baz elemanı olmasını **istemeyi**; yalnızca kesişimin her noktasının, kesişimin içinde kalan bir baz elemanına sahip olmasını ister. Örneklerde bu farkı göreceğiz.

Örnek 8.1 (Düzlemde Açık Daireler). $X = \mathbb{R}^2$ olsun ve $\mathcal{B}$, düzlemdeki bütün açık dairelerin (sınır çemberi dışarıda bırakılmış dairesel bölgelerin) ailesi olsun; yani

$$\mathcal{B} = \{B(c, r) : c \in \mathbb{R}^2, r > 0\}, \quad B(c, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(c, y) < r\}.$$

Burada d , düzlemdeki alışılmış uzaklıktır. $\mathcal{B}$, bir topoloji için bazdır.

İspat.

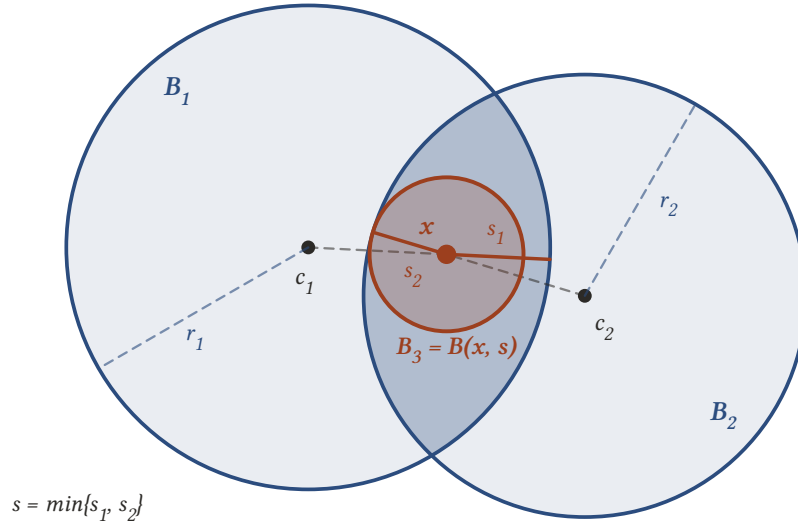
(B1): $x \in \mathbb{R}^2$ verilsin. $d(x, x) = 0 < 1$ olduğundan $x \in B(x, 1)$; bu daire $\mathcal{B}$ 'nin bir elemanıdır.

(B2): $x \in B(c_1, r_1) \cap B(c_2, r_2)$ olsun. x birinci dairenin içinde olduğundan $d(x, c_1) < r_1$; bu yüzden $s_1 = r_1 - d(x, c_1)$ sayısı pozitifdir. Aynı biçimde $s_2 = r_2 - d(x, c_2) > 0$. $s = \min\{s_1, s_2\}$ diyelim ve $B_3 = B(x, s)$ alalım. $d(x, x) = 0 < s$ olduğundan $x \in B_3$.

Şimdi $B_3 \subseteq B(c_1, r_1)$ olduğunu gösterelim. $y \in B_3$ ise $d(x, y) < s \leq s_1$. Üçgen eşitsizliğine göre

$$d(c_1, y) \leq d(c_1, x) + d(x, y) < d(c_1, x) + s_1 = d(c_1, x) + r_1 - d(x, c_1) = r_1.$$

Bu yüzden $y \in B(c_1, r_1)$. Aynı hesap $s \leq s_2$ ile yapılırsa $y \in B(c_2, r_2)$ çıkar. Böylece $x \in B_3 \subseteq B(c_1, r_1) \cap B(c_2, r_2)$ ve (B2) sağlanır.



Şekil 8.1: Düzlemde açık daireler bazı için (B2) koşulu. x noktası $B_1 \cap B_2$ kesişimindedir; x 'in birinci dairenin sınırına uzaklığı $s_1 = r_1 - d(x, c_1)$, ikincisine uzaklığı $s_2 = r_2 - d(x, c_2)$ 'dir. Bu ikisinin küçüğünü yarıçap alan $B_3 = B(x, s)$ dairesi x 'i içerir ve kesişimin tamamen içinde kalır.

■

Bu örnekte iki dairenin kesişimi genellikle bir daire değildir; (B2) yine de sağlanır, çünkü kesişimin her noktası için kesişime sığan küçük bir daire bulunur. İspatın özü: noktanın her iki dairenin sınırına olan uzaklıklarının küçüğünü yarıçap almak.

Örnek 8.2 (Düzlemde Açık Dikdörtgenler). $X = \mathbb{R}^2$ olsun ve $\mathcal{B}'$, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan bütün açık dikdörtgenlerin (dikdörtgen içlerinin) ailesi olsun:

$$\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\}.$$

Burada $(a, b) \times (c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$ 'dir. $\mathcal{B}'$, bir topoloji için bazdır.

İspat.

(B1): $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. $(x, y) \in (x-1, x+1) \times (y-1, y+1)$ ve bu küme $\mathcal{B}'$ 'nin elemanıdır.

(B2): $B_1 = (a_1, b_1) \times (c_1, d_1)$ ve $B_2 = (a_2, b_2) \times (c_2, d_2)$ iki baz elemanı ve $(x, y) \in B_1 \cap B_2$ olsun. Bir noktanın her iki dikdörtgende olması, birinci koordinatının hem (a_1, b_1) hem (a_2, b_2) aralığında, ikinci koordinatının hem (c_1, d_1) hem (c_2, d_2) aralığında olması demektir. Bu yüzden

$$B_1 \cap B_2 = (\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}) \times (\max\{c_1, c_2\}, \min\{d_1, d_2\}).$$

(x, y) bu kesişimde olduğundan $\max\{a_1, a_2\} < x < \min\{b_1, b_2\}$ ve $\max\{c_1, c_2\} < y < \min\{d_1, d_2\}$; yani kesişim boş değildir ve kenarları eksenlere paralel bir açık dikdörtgendir. O hâlde $B_3 = B_1 \cap B_2$ almak yeter: $B_3 \in \mathcal{B}'$, $(x, y) \in B_3$ ve $B_3 = B_1 \cap B_2$ olduğundan $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

■

Dikdörtgenlerde durum dairelerden daha rahattır: iki baz elemanının kesişimi (boş değilse) yine bir baz elemanıdır. Bu, (B2)'nin sağlanmasının en kolay yoludur.

8.2 Bazın Ürettiği Topoloji

Bir baz elimizde olduğunda açık kümeleri şöyle tarif ederiz: bir küme, her noktasının çevresinde o kümeye sığan bir baz elemanı varsa açıktır.

Tanım 8.2 (Bazın Ürettiği Topoloji). $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topoloji için baz olsun. Bir $U \subseteq X$ alt kümesi, her $x \in U$ için

$$x \in B \subseteq U$$

olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ baz elemanı bulunuyorsa X 'te **açık** sayılır. Bu biçimde açık olan bütün alt kümelerin ailesine $\mathcal{B}$ 'nin **ürettiği topoloji** (topology generated by $\mathcal{B}$) denir ve $\tau_{\mathcal{B}}$ ile gösterilir.

Yani U 'nun açık olması için U 'nun her noktası, U 'nun içinde kalan bir baz elemanına sahip olmalıdır. Tanımdan hemen şu çıkar: **her baz elemanı, ürettiği topolojide açıktır**. Gerçekten $B \in \mathcal{B}$ ve $x \in B$ ise $x \in B \subseteq B$; aranan baz elemanı olarak B 'nin kendisi alınır. Böylece $\mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. “Ürettiği topoloji” adını hak etmesi için $\tau_{\mathcal{B}}$ 'nin topoloji aksiyomlarını sağladığını göstermemiz gerekir. Topoloji tanımındaki aksiyomları hatırlayalım: (T1) $\emptyset$ ve X açıktır; (T2) sonlu sayıda açık kümenin kesişimi açıktır; (T3) herhangi bir açık küme ailesinin birleşimi açıktır.

Teorem 8.1 (Bazın Ürettiği Aile Bir Topolojidir). $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topoloji için baz olsun. O zaman $\tau_{\mathcal{B}}$, X üzerinde bir topolojidir.

İspat.

(T1): $U = \emptyset$ için açıklık koşulu “her $x \in \emptyset$ için ...” diye başlar; $\emptyset$ 'nin elemanı olmadığından koşul boş yere (denetlenecek nokta bulunmadığından) sağlanır. Bu yüzden $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$. $U = X$ için $x \in X$ alalım; (B1) gereği $x \in B$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır ve $B \subseteq X$ her zaman doğrudur. Bu yüzden $X \in \tau_{\mathcal{B}}$.

(T3): $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$, $\tau_{\mathcal{B}}$ 'nin elemanlarından oluşan bir indisli aile olsun ve

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_{\alpha}$$

diyelim. $x \in U$ verilsin. Birleşimin tanımı gereği $x \in U_{\alpha}$ olacak biçimde bir $\alpha \in J$ indisi vardır. U_{α} açık olduğundan $x \in B \subseteq U_{\alpha}$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. $U_{\alpha} \subseteq U$ olduğundan $x \in B \subseteq U$. x keyfi olduğundan U , açıklık tanımını sağlar; yani $U \in \tau_{\mathcal{B}}$.

(T2): Önce iki kümenin kesişimini ele alalım. $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$ ve $x \in U_1 \cap U_2$ olsun. U_1 açık olduğundan $x \in B_1 \subseteq U_1$ olacak biçimde bir $B_1 \in \mathcal{B}$ seçilir; U_2 açık olduğundan $x \in B_2 \subseteq U_2$ olacak biçimde bir $B_2 \in \mathcal{B}$ seçilir. Şimdi $x \in B_1 \cap B_2$ 'dir; (B2) koşulu tam burada devreye girer ve $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak biçimde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ verir. $B_1 \subseteq U_1$ ve $B_2 \subseteq U_2$ olduğundan $B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$; bu yüzden $x \in B_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. Böylece $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Sonlu sayıda kümenin kesişimi için n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 1$ için gösterilecek bir şey yoktur: $U_1 \in \tau_{\mathcal{B}}$. $n - 1$ tane açık kümenin kesişiminin açık olduğunu varsayalım ve $U_1, \dots, U_n \in \tau_{\mathcal{B}}$ alalım. **Kesişim**

$$U_1 \cap \dots \cap U_n = (U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n$$

biçiminde yazılır. Tümevarım varsayımına göre $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$ açıktır; az önce ispatlanan iki küme durumuna göre bunun U_n ile kesişimi de açıktır. Bu yüzden $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Üç aksiyom da sağlandığından $\tau_{\mathcal{B}}$ bir topolojidir. ■

İspatın özü: (B1) aksiyomu X 'in açıklığını, (B2) aksiyomu kesişimlerin açıklığını sağlar; birleşimler ise tanımdan kendiliğinden açıktır.

Şimdi en basit bazı inceleyelim: tek noktalı kümeler.

Örnek 8.3 (Tek Noktalı Kümeler ve Ayrık Topoloji). X herhangi bir küme olsun. Tek noktalı alt kümelerin ailesi

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$$

X üzerinde bir topoloji için bazdır ve ürettiği topoloji X üzerindeki ayrık topolojidir; yani $\tau_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}(X)$.

İspat.

(B1): $x \in X$ için $x \in \{x\} \in \mathcal{B}$.

(B2): $B_1 = \{x_1\}$, $B_2 = \{x_2\}$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ olsun. $x \in \{x_1\}$ olması $x = x_1$, $x \in \{x_2\}$ olması $x = x_2$ demektir; bu yüzden $x_1 = x_2 = x$ ve $B_1 \cap B_2 = \{x\}$. $B_3 = \{x\}$ alınırsa $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ sağlanır.

Ürettiği topoloji: $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zaten doğrudur, çünkü $\tau_{\mathcal{B}}$ 'nin elemanları X 'in alt kümeleridir. Tersine $U \subseteq X$ herhangi bir alt küme ve $x \in U$ olsun. $B_x = \{x\}$ alalım; $x \in B_x$ ve $x \in U$ olduğundan $B_x \subseteq U$. Bu yüzden U açıklık tanımını sağlar: $U \in \tau_{\mathcal{B}}$. Böylece X 'in her alt kümesi açıktır, yani $\tau_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}(X)$.

■

8.3 Açık Kümeler Baz Elemanlarının Birleşimidir

Bazın ürettiği topolojiyi “her noktada bir baz elemanı bulunur” diye tanımladık. Aynı topolojiyi başka bir yoldan da tarif edebiliriz: açık kümeler tam olarak baz elemanlarının birleşimleridir. Bu ikinci tarif, bazın adını açıklar.

Lemma 8.1 (Açık Kümeler Baz Elemanlarının Birleşimleridir). X bir küme ve $\mathcal{B}$, X üzerinde bir topoloji için baz olsun. O zaman $\tau_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ 'nin elemanlarından oluşan bütün birleşimlerin ailesine eşittir. Yani

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

İspat.

İki kapsamayı ayrı ayrı gösterelim.

Her birleşim açıktır. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ herhangi bir alt aile olsun. Her baz elemanı $\tau_{\mathcal{B}}$ 'de açık olduğundan $\mathcal{A}$ 'nın elemanları da açıktır. $\tau_{\mathcal{B}}$ bir topoloji olduğundan (T3) gereği bunların birleşimi $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$ de açıktır. ($\mathcal{A} = \emptyset$ alınırsa birleşim $\emptyset$ 'dir; o da açıktır.)

Her açık küme bir birleşimdir. $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ olsun. Açıklık tanımı gereği her $x \in U$ için $x \in B_x \subseteq U$ olacak biçimde bir $B_x \in \mathcal{B}$ seçebiliriz. İddia:

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Her $B_x \subseteq U$ olduğundan sağ taraf U 'nun içindedir. Tersine $x \in U$ ise $x \in B_x$ olduğundan x sağ taraftadır. İki kapsama birlikte eşitliği verir. Bu yüzden U , baz elemanlarının bir birleşimidir.

■

i Baz sözcüğü lineer cebirdekinden farklı çalışır

Lemma 8.1 her açık kümenin baz elemanlarının birleşimi olarak yazılabildiğini söyler; ama bu yazılış **tek değildir**. Örneğin gerçel sayı doğrusunda açık aralıklar bazını alırsak

$$(0, 2) = (0, 1, 5) \cup (0, 5, 2) = \bigcup_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n} \right)$$

gibi sayısız farklı gösterim vardır. Lineer cebirde ise bir vektörün baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılışı tektir. Topolojideki “baz” yalnızca “her şeyi üreten aile” anlamındadır; biriciklik içermez.

Böylece bir bazdan ürettiği topolojiye gitmenin iki yolunu gördük: ya “her noktada bir baz elemanı” ölçütünü, ya da “baz elemanlarının birleşimleri” tarifini kullanırız. Bazen ters yöne gitmek gerekir: elimizde bir topoloji vardır ve onu üreten bir baz ararız. Aşağıdaki lemma bunun bir yolunu verir.

Lemma 8.2 (Açık Kümelerden Oluşan Bir Ailenin Baz Olma Ölçütü). (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{C}$, X 'in açık kümelerinden oluşan bir aile olsun. Her açık $U \subseteq X$ kümesi ve her $x \in U$ için

$$x \in C \subseteq U$$

olacak biçimde bir $C \in \mathcal{C}$ bulunduğunu varsayalım. O zaman $\mathcal{C}$, X üzerinde bir topoloji için bazdır ve ürettiği topoloji τ 'ya eşittir.

İspat.

Önce $\mathcal{C}$ 'nin baz koşullarını sağladığını, sonra ürettiği topolojinin τ olduğunu gösterelim.

(B1): $x \in X$ verilsin. X 'in kendisi açıktır ve $x \in X$; bu yüzden varsayım gereği $x \in C \subseteq X$ olacak biçimde bir $C \in \mathcal{C}$ vardır.

(B2): $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ve $x \in C_1 \cap C_2$ olsun. C_1 ve C_2 açık olduğundan (T2) gereği $C_1 \cap C_2$ de açıktır. O hâlde varsayım $U = C_1 \cap C_2$ açık kümesine ve x noktasına uygulanır: $x \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$ olacak biçimde bir $C_3 \in \mathcal{C}$ vardır.

Ürettiği topoloji τ' 'dur. $\mathcal{C}$ 'nin ürettiği topolojiye τ' diyelim; $\tau = \tau'$ göstereceğiz.

$\tau \subseteq \tau'$: $U \in \tau$ ve $x \in U$ olsun. Varsayım gereği $x \in C \subseteq U$ olacak biçimde bir $C \in \mathcal{C}$ vardır. Bu, tam olarak U 'nın τ' 'deki açıklık koşuludur; bu yüzden $U \in \tau'$.

$\tau' \subseteq \tau$: $W \in \tau'$ olsun. [Lemma 8.1](#)'e göre W , $\mathcal{C}$ 'nin elemanlarının bir birleşimidir. $\mathcal{C}$ 'nin her elemanı τ 'da açıktır ve τ bir topolojidir; (T3) gereği bunların birleşimi olan W de τ 'dadır.

■

Bu lemmanın koşulu aslında yalnızca yeterli değil, gereklidir de. Aşağıdaki biçim, bir açık küme ailesinin baz olup olmadığını denetlemenin standart yoludur.

Lemma 8.3 (Baz Olma Ölçütü). (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. $\mathcal{B}$ 'nin τ için baz olması (yani baz koşullarını sağlayıp $\tau_{\mathcal{B}} = \tau$ olması) için gerek ve yeter koşul şudur: her açık U kümesi ve her $x \in U$ için $x \in B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır.

İspat.

Yeterlik: Koşul sağlanıyorsa [Lemma 8.2](#) doğrudan $\mathcal{B}$ 'nin baz olduğunu ve ürettiği topolojinin τ olduğunu verir.

Gereklik: $\mathcal{B}, \tau$ için baz olsun; yani $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$. $U \in \tau$ ve $x \in U$ alalım. $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ olduğundan [Tanım 8.2](#) gereği $x \in B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. İstenen tam olarak budur.

■

Örnek 8.3'ye bu ölçütle yeniden bakalım: ayrık topolojide her $U \subseteq X$ açıktır ve $x \in U$ için $x \in \{x\} \subseteq U$ sağlanır; bu yüzden tek noktalı kümeler ayrık topolojinin bazıdır. Ölçüt, baz koşullarını tek tek denetleme zahmetinden kurtarır.

Ölçütün bir sonucu daha vardır: **her topoloji kendisinin bir bazıdır.** Gerçekten $\mathcal{B} = \tau$ alınırsa $U \in \tau$ ve $x \in U$ için $B = U$ seçmek yeter. Bu gözlem, aşağıdaki karşılaştırma lemmasını verilmiş herhangi bir topolojiye uygularken işe yarar.

8.4 Bazlarla Topolojileri Karşılaştırma

Aynı küme üzerinde iki topoloji τ ve τ' verilsin. $\tau \subseteq \tau'$ ise τ' 'ye τ 'dan **daha ince**, τ' 'ya τ 'den **daha kaba** denir. İki topolojiden biri ötekini kapsıyorsa topolojiler **karşılaştırılabilir**dir. Topolojiler bazlarla verilmişse “hangisi daha ince?” sorusunu doğrudan bazlar üzerinden yanıtlamak isteriz. Ölçüt şudur: daha ince topolojinin baz elemanları, öteki topolojinin her baz elemanının içine her noktada sığabilmelidir.

Lemma 8.4 (Bazlarla İncelik Karşılaştırması). $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}'$, X üzerinde sırasıyla τ ve τ' topolojilerinin bazları olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) τ', τ 'dan daha incedir; yani $\tau \subseteq \tau'$.

(ii) Her $x \in X$ ve x 'i içeren her $B \in \mathcal{B}$ için $x \in B' \subseteq B$ olacak biçimde bir $B' \in \mathcal{B}'$ vardır.

İspat.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $U \in \tau$ olsun; $U \in \tau'$ göstereceğiz. $x \in U$ alalım. $\mathcal{B}, \tau$ 'nın bazı olduğundan $x \in B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. (ii) gereği $x \in B' \subseteq B$ olacak biçimde bir $B' \in \mathcal{B}'$ vardır. Bu yüzden $x \in B' \subseteq U$. x keyfi olduğundan $U, \mathcal{B}'$ 'nin ürettiği topolojinin açıklık koşulunu sağlar; yani $U \in \tau'$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $x \in X$ ve $x \in B \in \mathcal{B}$ olsun. Baz elemanları ürettikleri topolojide açık olduğundan $B \in \tau$; (i) gereği $\tau \subseteq \tau'$ olduğundan $B \in \tau'$. $\mathcal{B}', \tau'$ 'nin bazı olduğundan [Lemma 8.3](#)'ne göre $x \in B' \subseteq B$ olacak biçimde bir $B' \in \mathcal{B}'$ vardır.

■

İspatın özü: “daha ince” olmak, ötekinin her açık kümesini üretebilmektir; bunun için ötekinin baz elemanlarını üretebilmek yeter.

💡 Ölçütü akılda tutmanın yolu

Daha ince topolojinin baz elemanları “daha küçük”tür: τ' 'nin τ 'dan ince olması, τ 'nın her baz elemanının her noktasında τ' 'den bir baz elemanın içeri sığması demektir. Düzlemde daireler ve dikdörtgenleri düşünün: her dairenin her noktasına bir dikdörtgen, her dikdörtgenin her noktasına bir daire sığar; bu yüzden **Örnek 8.1** ve **Örnek 8.2** bazları aynı topolojiyi üretir.

8.5 Uygulamalar

8.5.1 Açıklık Ölçütü

Bir kümenin açık olduğunu göstermenin en sık kullanılan yolu şudur: her noktasının çevresinde kümeye sığan bir açık küme bulmak. Bu, baz tanımındaki fikrin topolojinin kendisine uygulanmış hâlidir.

Örnek 8.4 (Her Noktada Açık Komşuluk Bulunuyorsa Küme Açıktır). (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $x \in U \subseteq A$ olacak biçimde bir açık U kümesi bulunduğunu varsayalım. O zaman A , X 'te açıktır.

Çözüm.

Her $x \in A$ için varsayımdaki açık kümelerden birini seçip U_x diyelim: U_x açık, $x \in U_x$ ve $U_x \subseteq A$. Her $U_x \subseteq A$ olduğundan birleşim de A 'nın içindedir:

$$\bigcup_{x \in A} U_x \subseteq A. \quad (1)$$

Öte yandan her $x \in A$ için $\{x\} \subseteq U_x$ olduğundan

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x. \quad (2)$$

(1) ve (2) birlikte $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ verir. Her U_x açık olduğundan (T3) gereği birleşimleri açıktır. Bu yüzden A açıktır.

■

Bu sonucun tersi de doğrudur: A açıksa her $x \in A$ için $U = A$ alınabilir. Dolayısıyla bir küme, ancak her noktasının çevresinde kümeye sığan bir açık küme varsa açıktır.

8.5.2 Gerçel Sayılarda Standart Topoloji

Gerçel sayı doğrusunda “açık” denince akla açık aralıklar gelir. Bu bölümün diliyle: açık aralıklar bir bazdır ve ürettikleri topoloji doğrunun standart topolojisidir. Önce baz koşullarını denetleyelim.

Lemma 8.5 (Açık Aralıklar Bazdır). *Açık aralıkların ailesi*

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji için bazdır.

İspat.

(B1): $x \in \mathbb{R}$ için $x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}$.

(B2): $x \in (a, b) \cap (c, d)$ olsun. $a < x < b$ ve $c < x < d$ olduğundan $\max\{a, c\} < x < \min\{b, d\}$. $e = \max\{a, c\}$ ve $f = \min\{b, d\}$ diyelim; $e < x < f$ olduğundan $e < f$ ve $(e, f) \in \mathcal{B}$. Bir z sayısı için $e < z < f$ olması, $a < z, c < z, z < b$ ve $z < d$ olması demektir; yani $(e, f) = (a, b) \cap (c, d)$. O hâlde $B_3 = (e, f)$ alınırsa $x \in B_3 \subseteq (a, b) \cap (c, d)$.

■

Tanım 8.3 (Gerçel Sayılarda Standart Topoloji). Açık aralıklar bazı $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde ürettiği topolojiye $\mathbb{R}$ 'nin **standart topolojisi** (standard topology) denir ve τ_{std} ile gösterilir.

Yani $U \subseteq \mathbb{R}$, ancak ve ancak her $x \in U$ için $x \in (a, b) \subseteq U$ olacak biçimde bir açık aralık varsa standart topolojide açıktır. Bundan sonra $\mathbb{R}$ üzerinde başka bir topoloji söylenmedikçe standart topoloji kastedilir. Standart topolojide tanıdık kümelerin açık ya da kapalı olduğunu şimdi kesin olarak gösterebiliriz. Açık kümeleri baz tanımıyla, kapalı kümeleri tümleyenlerinin açıklığıyla ele alacağız.

Örnek 8.5 (Standart Topolojide Işıklar, Kapalı Aralıklar ve Sonlu Kümeler). $\mathbb{R}$ standart topolojiyle verilsin.

- a) $a \in \mathbb{R}$ için (a, ∞) ve $(-\infty, a)$ ışıkları açıktır.
- b) $a < b$ için $[a, b]$ kapalı aralığı kapalıdır.
- c) $\mathbb{R}$ 'nin her sonlu alt kümesi kapalıdır.

Çözüm.

a) Önce (a, ∞) ışığını ele alalım. $x \in (a, \infty)$ olsun; yani $x > a$. $\varepsilon = x - a > 0$ diyelim ve

$$B = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (a, 2x - a)$$

aralığını alalım. B bir baz elemanıdır ve $x \in B$. Ayrıca $y \in B$ ise $y > a$ olduğundan $y \in (a, \infty)$; yani $B \subseteq (a, \infty)$. x keyfi olduğundan (a, ∞) açıktır.

$(-\infty, a)$ için aynı yol izlenir. $x \in (-\infty, a)$ olsun; yani $x < a$. $\varepsilon = a - x > 0$ diyelim ve $B = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (2x - a, a)$ alalım. $x \in B$ ve $y \in B$ ise $y < a$ olduğundan $B \subseteq (-\infty, a)$. Bu yüzden $(-\infty, a)$ açıktır.

Aynı sonuca [Lemma 8.1](#) ile de ulaşılabilir: ışını baz elemanlarının birleşimi olarak yazmak yeter. Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için $(a + n, a + n + 2)$ açık aralığını alalım. Bu aralıkların hepsi (a, ∞) 'un içindedir. Tersine $x > a$ ise $n = \lfloor x - a \rfloor$ (yani $x - a$ 'nın tam kısmı) için $a + n \leq x < a + n + 1$ olur; $n \geq 1$ ise $x \in (a + n - 1, a + n + 1)$, $n = 0$ ise $x \in (a, a + 2)$. Böylece

$$(a, \infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (a + n, a + n + 2)$$

ve (a, ∞) , açık kümelerin birleşimi olarak açıktır. Benzer biçimde $(-\infty, a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (a - n - 2, a - n)$.

b) $[a, b]$ 'nin tümleyeninin açık olduğunu göstereceğiz. Bir y sayısının $[a, b]$ 'de olmaması $y < a$ ya da $y > b$ olması demektir; bu yüzden

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty).$$

Sağ taraftaki iki ışın (a) gereği açıktır; (T3) gereği birleşimleri de açıktır. Tümleyeni açık olan küme kapalıdır; bu yüzden $[a, b]$ kapalıdır.

c) $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu bir alt küme olsun. Elemanları küçükten büyüğe sıralayıp adlandırabiliriz: $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Bir y sayısının F 'de olmaması, y 'nin ya a_1 'den küçük, ya a_n 'den büyük, ya da ardışık iki eleman arasında olması demektir:

$$\mathbb{R} \setminus F = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \dots \cup (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, \infty).$$

Sağ taraftaki ışınlar (a) gereği, açık aralıklar ise baz elemanı oldukları için açıktır. Birleşimleri (T3) gereği açıktır. Bu yüzden $\mathbb{R} \setminus F$ açık, F kapalıdır. ($F = \emptyset$ ise tümleyeni $\mathbb{R}$ açıktır; $\emptyset$ de kapalıdır.)

■

Standart topolojiyi, [Açık ve Kapalı Kümeler](#); [Sonlu ve Sayılabilir Tümleyen Topolojileri](#) bölümünde tanımlanan sonlu tümleyen topolojisiyle karşılaştıralım. Bu, [Lemma 8.4](#)'nün tipik bir kullanımıdır.

Örnek 8.6 (Standart Topoloji Sonlu Tümleyen Topolojisinden Daha İncedir). $\mathbb{R}$ üzerinde τ_{std} standart topoloji ve

$$\tau_{\text{sonlu}} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus A \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$$

sonlu tümleyen topolojisi olsun. $\tau_{\text{sonlu}} \subsetneq \tau_{\text{std}}$ 'dir; yani standart topoloji, sonlu tümleyen topolojisinden kesinlikle daha incedir.

Çözüm.

$\tau_{\text{sonlu}} \subseteq \tau_{\text{std}}$: **Lemma 8.4'**nü uygulayalım. Her topoloji kendisinin bazı olduğundan τ_{sonlu} için baz olarak $\mathcal{B} = \tau_{\text{sonlu}}$ 'nin kendisini, τ_{std} için baz olarak açık aralıkları alalım. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \in B \in \tau_{\text{sonlu}}$ olsun. $B \neq \emptyset$ olduğundan $\mathbb{R} \setminus B$ sonludur; $\mathbb{R} \setminus B = \{a_1, \dots, a_n\}$ diyelim ($n = 0$ olabilir). $x \in B$ olduğundan x , bu noktaların hiçbirine eşit değildir; bu yüzden

$$\delta = \min\{|x - a_1|, \dots, |x - a_n|\}$$

sayısı pozitiftir ($n = 0$ ise $\delta = 1$ alalım). $B' = (x - \delta, x + \delta)$ açık aralığı x 'i içerir ve a_i 'lerin hiçbirini içermeyiz, çünkü her a_i için $|x - a_i| \geq \delta$. Bu yüzden $B' \subseteq B$. **Lemma 8.4'**nün (ii) koşulu sağlandığından $\tau_{\text{sonlu}} \subseteq \tau_{\text{std}}$.

Eşit değildir: $(0, 1)$ aralığı standart topolojide açıktır. Ama $\mathbb{R} \setminus (0, 1) = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ sonsuz bir kümedir ve $(0, 1) \neq \emptyset$; bu yüzden $(0, 1) \notin \tau_{\text{sonlu}}$. Böylece $\tau_{\text{sonlu}} \neq \tau_{\text{std}}$.

■

8.5.3 Alt Limit Topolojisi

Açık aralıkların yerine sol ucu kapalı, sağ ucu açık aralıkları alırsak $\mathbb{R}$ üzerinde yeni ve önemli bir topoloji elde ederiz. Önce bunların baz olduğunu gösterelim.

Örnek 8.7 (Yarı Açık Aralıklar Bazdır).

$$\mathcal{C} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji için bazdır.

Çözüm.

(B1): $x \in \mathbb{R}$ olsun ve $B = [x, x + 1)$ alalım. $x \leq x < x + 1$ olduğundan $x \in B$ ve $B \in \mathcal{C}$.

(B2): $[a, b), [c, d) \in \mathcal{C}$ ve $x \in [a, b) \cap [c, d)$ olsun. O zaman $a \leq x < b$ ve $c \leq x < d$. $e = \max\{a, c\}$ ve $f = \min\{b, d\}$ diyelim; $e \leq x < f$ olduğundan $e < f$ ve $[e, f) \in \mathcal{C}$. Ayrıca $x \in [e, f)$.

Şimdi $[e, f) \subseteq [a, b) \cap [c, d)$ olduğunu gösterelim. $z \in [e, f)$ ise $e \leq z < f$. $e \geq a$ ve $f \leq b$ olduğundan $a \leq z < b$, yani $z \in [a, b)$; $e \geq c$ ve $f \leq d$ olduğundan $c \leq z < d$, yani $z \in [c, d)$. Bu yüzden z kesişimdedir.

Böylece $B_3 = [e, f)$ alınırsa $x \in B_3 \subseteq [a, b) \cap [c, d)$ ve (B2) sağlanır.

■

Tanım 8.4 (Alt Limit Topolojisi). $\mathcal{C} = \{[a, b) : a < b\}$ bazının $\mathbb{R}$ üzerinde ürettiği topolojiye **alt limit topolojisi** (lower limit topology) denir ve τ_ℓ ile gösterilir. $\mathbb{R}$ bu topolojiyle donatıldığında $\mathbb{R}_\ell$ yazılır.

Yani $U \subseteq \mathbb{R}$, ancak ve ancak her $x \in U$ için $x \in [a, b) \subseteq U$ olacak biçimde bir yarı açık aralık varsa $\mathbb{R}_\ell$ 'de açıktır. Adı, her noktanın “alt (sol) ucundan” kapatılmış aralıklarla çevrenmesinden gelir.

Alt limit topolojisi ile standart topoloji arasındaki ilişki, bazlarla karşılaştırma ölçütünün en güzel örneklerinden biridir.

Örnek 8.8 (Alt Limit Topolojisi Standart Topolojiden Kesinlikle Daha İncedir). $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau_{\text{std}} \subsetneq \tau_\ell$ 'dir; yani her standart açık küme $\mathbb{R}_\ell$ 'de de açıktır, ama tersi doğru değildir.

Çözüm.

$\tau_{\text{std}} \subseteq \tau_\ell$: **Lemma 8.4'**nü $\mathcal{B} = \{(a, b)\}$ ve $\mathcal{B}' = \{[a, b)\}$ bazlarına uygulayalım. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \in (a, b)$ olsun. $B' = [x, b)$ alalım; $x < b$ olduğundan bu bir baz elemanıdır ve $x \in B'$. $z \in [x, b)$ ise $a < x \leq z < b$ olduğundan $z \in (a, b)$; yani $B' \subseteq (a, b)$. Ölçütün (ii) koşulu sağlandığından $\tau_{\text{std}} \subseteq \tau_\ell$.

İspat.

(B1): $x \in X$ olsun. $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ olduğundan $x \in S$ olacak biçimde bir $S \in \mathcal{S}$ vardır. S , tek elemanlı bir kesişim ($n = 1$) olarak $\mathcal{B}$ 'nin elemanıdır.

(B2): $B_1 = S_1 \cap \dots \cap S_n$ ve $B_2 = S'_1 \cap \dots \cap S'_m$ iki baz elemanı ve $x \in B_1 \cap B_2$ olsun. Kesişim

$$B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \dots \cap S_n \cap S'_1 \cap \dots \cap S'_m$$

S 'nin $n + m$ elemanının kesişimidir; bu yüzden kendisi de $\mathcal{B}$ 'nin elemanıdır. $B_3 = B_1 \cap B_2$ alınırsa $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ sağlanır.

Böylece $\mathcal{B}$ bir bazdır ve Teorem 8.1 gereği $\tau_{\mathcal{B}}$ bir topolojidir. Lemma 8.1'e göre $\tau_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ 'nin elemanlarının bütün birleşimlerinin ailesidir; bu da tam olarak $\tau_{\mathcal{S}}$ 'nin tanımıdır. Bu yüzden $\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{B}}$.

■

Alt baz kavramı, kurulacak topolojiyi çok az veriyle tarif etmeye yarar. Aşağıdaki örnek, gerçel sayılarda standart topolojinin yalnızca ışınlarla üretilebildiğini gösterir.

Örnek 8.9 (Açık Işınlar Standart Topolojinin Alt Bazıdır).

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir alt bazdır ve ürettiği topoloji standart topolojidir.

Çözüm.

Alt bazdır: Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in (x - 1, \infty) \in \mathcal{S}$; bu yüzden $\mathcal{S}$ 'nin birleşimi $\mathbb{R}$ 'dir.

Sonlu kesişimler: Aynı yöndeki ışınların kesişimi yine aynı yönde bir ışındır: $(a, \infty) \cap (a', \infty) = (\max\{a, a'\}, \infty)$ ve $(-\infty, b) \cap (-\infty, b') = (-\infty, \min\{b, b'\})$. Zıt yöndeki iki ışının kesişimi $(a, \infty) \cap (-\infty, b)$ ise $a < b$ olduğunda (a, b) açık aralığı, $a \geq b$ olduğunda $\emptyset$ 'dir. Bu yüzden sonlu kesişimlerin ailesi $\mathcal{B}$, açık ışınlardan, açık aralıklardan ve $\emptyset$ 'den oluşur.

$\tau_{\mathcal{S}} \subseteq \tau_{\text{std}}$: $\mathcal{B}$ 'nin her elemanı standart topolojide açıktır: açık aralıklar baz elemanı olduğu için, ışınlar Örnek 8.5 (a) gereği, $\emptyset$ ise (T1) gereği. $\tau_{\mathcal{S}}$ 'nin elemanları bunların birleşimleri olduğundan (T3) gereği standart topolojide açıktır.

$\tau_{\text{std}} \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$: Standart topolojinin her baz elemanı (a, b) , $\mathcal{B}$ 'nin elemanıdır; dolayısıyla $\tau_{\mathcal{S}}$ 'de açıktır.

Lemma 8.4'nün (ii) koşulu $B' = (a, b)$ seçimiyle sağlanır ve $\tau_{\text{std}} \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$ çıkar.

Böylece $\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\text{std}}$.

■

Alt baz fikri sonraki bölümlerde iki kez daha karşımıza çıkacak: Sıra Topolojisi bölümünde açık ışınlar sıralı bir kümenin topolojisi için alt baz olacak; Çarpım Topolojisi bölümünde ise izdüşümlerin ters görüntüleri çarpım topolojisinin alt bazını oluşturacak.

8.7 Alıştırmalar

Alıştırma 8.1 (Baz ve Alt Baz Alıştırmaları). a) $X = \{1, 2, 3\}$ ve $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ olsun. $\mathcal{B}$ bir topoloji için baz mıdır? $\mathcal{B}' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$ için aynı soruyu yanıtlayın ve baz ise ürettiği topolojiyi yazın.

b) Kapalı aralıkların ailesi $\{[a, b] : a < b\}$ 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji için baz olmadığını gösterin.

c) Uçları rasyonel olan açık aralıkların ailesi $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ 'nin standart topolojinin bir bazı olduğunu gösterin.

d) $\mathbb{R}$ üzerinde sol ışınların ailesi $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ 'nin bir topoloji için baz olduğunu gösterin; ürettiği topolojiye τ_{sol} diyelim. Standart topolojinin τ_{sol} 'dan kesinlikle daha ince olduğunu gösterin.

e) $\mathbb{R}_{\ell}$ 'de $[a, b)$ kümesinin hem açık hem kapalı olduğunu gösterin.

f) $X = \{1, 2, 3\}$ üzerinde $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ ailesini alt baz olarak alın. Ürettiği topolojiyi yazın.

Çözüm.

a) $\mathcal{B}$ için (B1) sağlanır: $1, 2 \in \{1, 2\}$ ve $3 \in \{2, 3\}$. Ama (B2) sağlanmaz: $2 \in \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$, oysa $\mathcal{B}$ 'de 2'yi içeren ve $\{2\}$ 'nin içinde kalan bir eleman yoktur. Bu yüzden $\mathcal{B}$ baz değildir.

$\mathcal{B}'$ için (B1) yine sağlanır. (B2): $\mathcal{B}'$ 'nin iki elemanının kesişimi ya elemanlardan biridir ya da $\{2\}$ 'dir; her durumda kesişim $\mathcal{B}'$ 'nin bir elemanıdır ve B_3 olarak kesişimin kendisi alınabilir. Bu yüzden $\mathcal{B}'$ bazdır. [Lemma 8.1](#)'e göre ürettiği topoloji, elemanlarının bütün birleşimleridir:

$$\tau_{\mathcal{B}'} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}.$$

b) (B1) sağlanır: $x \in [x, x+1]$. (B2)'nin bozulduğunu görmek için $[0, 1]$ ve $[1, 2]$ kapalı aralıklarını alalım; kesişimleri $\{1\}$ 'dir ve 1 bu kesişimdedir. Bir $[a, b]$ kapalı aralığı ($a < b$) $\{1\}$ 'in içinde kalamaz, çünkü en az iki farklı nokta içerir. Bu yüzden $1 \in B_3 \subseteq [0, 1] \cap [1, 2]$ olacak bir baz elemanı yoktur ve aile baz değildir.

c) $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ 'nin her elemanı bir açık aralık olduğundan standart topolojide açıktır. [Lemma 8.3](#)'nü kullanalım: U standart topolojide açık ve $x \in U$ olsun. Açık aralıklar standart topolojinin bazı olduğundan $x \in (a, b) \subseteq U$ olacak biçimde $a < b$ gerçel sayıları vardır. Rasyonel sayılar gerçel sayılarda yoğundur: $a < x$ olduğundan $a < p < x$ olacak bir $p \in \mathbb{Q}$, $x < b$ olduğundan $x < q < b$ olacak bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır. O zaman $x \in (p, q) \subseteq (a, b) \subseteq U$ ve $(p, q) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$. Ölçüt sağlandığından $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}$ standart topolojinin bazıdır.

d) (B1): $x \in (-\infty, x+1)$. (B2): $(-\infty, a) \cap (-\infty, b) = (-\infty, \min\{a, b\})$ yine bir sol ışındır; B_3 olarak kesişimin kendisi alınır. Bu yüzden sol ışınlar bazdır.

$\tau_{\text{sol}} \subseteq \tau_{\text{std}}$: [Lemma 8.4](#) ile: $x \in (-\infty, a)$ ise $B' = (x-1, a)$ açık aralığı x 'i içerir ve $(-\infty, a)$ 'nın içindedir.

Eşit değildir: $(0, 1)$ standart topolojide açıktır. τ_{sol} 'da açık olsaydı, $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ noktası için $\frac{1}{2} \in (-\infty, a) \subseteq (0, 1)$ olacak bir sol ışın bulunurdu; ama her sol ışın -1 gibi negatif sayılar içerir ve bunlar $(0, 1)$ 'de değildir. Bu yüzden $(0, 1) \notin \tau_{\text{sol}}$ ve $\tau_{\text{sol}} \subsetneq \tau_{\text{std}}$.

e) $[a, b)$ bir baz elemanı olduğundan $\mathbb{R}_{\ell}$ 'de açıktır. Kapalı olduğunu görmek için tümleyeninin açık olduğunu gösterelim:

$$\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty).$$

$(-\infty, a) = \bigcup_{n \geq 1} [a-n, a)$ ve $[b, \infty) = \bigcup_{n \geq 1} [b, b+n)$ yazılışları, bu iki kümenin $\mathbb{R}_{\ell}$ 'nin baz elemanlarının birleşimi olduğunu, dolayısıyla [Lemma 8.1](#) gereği açık olduğunu gösterir. Birleşimleri de açıktır. Tümleyeni açık olan $[a, b)$ kapalıdır.

f) $\mathcal{S}$ 'nin birleşimi X olduğundan $\mathcal{S}$ bir alt bazdır. Sonlu kesişimler: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ ve $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$. Bu üç kümenin ailesi (a) şıkkındaki $\mathcal{B}'$ bazıdır; ürettiği topoloji

$$\tau_{\mathcal{S}} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}.$$

(a) şıkkında baz olmayan $\mathcal{S}$ ailesi, alt baz olarak bir topoloji üretir; eksik olan $\{2\}$ kümesi sonlu kesişim adımıyla kendiliğinden eklenir.

■

Baz ve alt baz kavramlarını sıralı kümelerle uygulayarak açık aralıklardan ve ışınlardan yeni topolojiler kuracağız: [Sıra Topolojisi](#).

9. Sıra Topolojisi

Baz ve Alt Baz bölümünde bir topolojiyi bütün açık kümeleri tek tek sayarak değil, daha küçük bir aile olan bir **baz** vererek tanımlamayı öğrendik: bazın elemanlarının birleşimleri açık kümeleri verir. Gerçek sayılarda açık aralıkların bir baz oluşturduğunu ve ürettikleri topolojiye standart topoloji dendiğini gördük. Bu bölümde aynı düşünceyi çok daha genel bir ortama taşıyoruz.

Gerçek sayılarda açık aralık (a, b) kümesini tanımlarken kullandığımız tek şey, sayıları karşılaştırmamızı sağlayan $<$ sıralamasıdır. O hâlde üzerinde bir sıralama bulunan herhangi bir kümede de aralıklardan söz edebiliriz ve bu aralıklarla bir topoloji kurabiliriz. Bu topolojiye **sıra topolojisi** denir. Bölümde önce tam sıralı kümede aralıkları tanımlayacak, sonra aralıklardan oluşan ailenin gerçekten bir baz olduğunu bütün durumlarıyla kontrol edeceğiz.

Ardından üç temel örneğe bakacağız: gerçel sayılarda sıra topolojisi tam olarak standart topolojidir; düzlemde sözlük sırası bambaşka ve şaşırtıcı bir topoloji verir; pozitif tam sayılarda ise sıra topolojisi ayrık topolojidir. Bölümün sonunda ışınları tanımlayacak, açık ışınların açık küme olduğunu ve sıra topolojisi için bir alt baz oluşturduğunu ispatlayacağız.

9.1 Tam Sıralı Kümeler ve Aralıklar

Sıra topolojisini kurmak için elimizde bir küme ve o küme üzerinde “hangisi önce gelir” sorusunu her çift için yanıtlayan bir bağıntı olmalıdır. Bu bağıntının sağlaması gereken koşulları açıkça yazalım.

Tanım 9.1 (Tam Sıralı Küme). X bir küme ve $<$, X üzerinde bir bağıntı olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa $<$ bağıntısına X üzerinde bir **tam sıralama** (simple order, linear order) ve $(X, <)$ ikilisine bir **tam sıralı küme** denir:

(S1) Her $x, y \in X$ için $x < y$, $x = y$, $y < x$ ifadelerinden en az biri doğrudur.

(S2) Hiçbir $x \in X$ için $x < x$ doğru değildir.

(S3) Her $x, y, z \in X$ için $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ olur.

$x < y$ yerine $y > x$ da yazılır. $x < y$ veya $x = y$ olduğunu kısaca $x \leq y$ ile gösteririz.

Yani tam sıralı bir kümede herhangi iki farklı eleman alındığında biri ötekinden kesinlikle küçüktür; kararsız kalınan hiçbir çift yoktur. (S2) ile (S3) birlikte alındığında, $x < y$ ve $y < x$ ifadelerinin aynı anda doğru olamayacağı da çıkar: ikisi birden doğru olsaydı (S3) gereği $x < x$ olurdu, bu ise (S2) ile çelişir. Dolayısıyla (S1)’deki üç ifadeden **tam olarak biri** doğrudur.

Tanıdık örnekler $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri üzerindeki alışılmış $<$ sıralamasıdır. Tam sıralı bir kümede iki elemanın büyüğüne ve küçüğüne her zaman karar verilebildiği için, $a, c \in X$ verildiğinde $\max\{a, c\}$ ve $\min\{a, c\}$ elemanları anlamlıdır; bunlar sırasıyla a ile c ’nin büyük ve küçük olanıdır (eşitlerse ortak değerdir).

Bazı sıralı kümelerin bir “başı” ya da “sonu” vardır, bazılarının yoktur. Bu ayrım sıra topolojisinin tanımında önemli olacak.

Tanım 9.2 (En Küçük ve En Büyük Eleman). $(X, <)$ tam sıralı bir küme olsun. Her $x \in X$ için $a_0 \leq x$ oluyorsa $a_0 \in X$ elemanına X ’in **en küçük elemanı** (smallest element) denir. Her $x \in X$ için $x \leq b_0$ oluyorsa $b_0 \in X$ elemanına X ’in **en büyük elemanı** (largest element) denir.

Yani en küçük eleman, kümedeki her elemanın önünde ya da ona eşit olan elemandır; en büyük eleman ise her elemanın ardında ya da ona eşit olandır. Bir kümenin en küçük elemanı varsa tektir: a_0 ve a'_0 ikisi de en küçükse $a_0 \leq a'_0$ ve $a'_0 \leq a_0$ olur. $a_0 \neq a'_0$ olsaydı bu iki ifade $a_0 < a'_0$ ve $a'_0 < a_0$ biçimini alırdı; yukarıda gördüğümüz gibi bu ikisi aynı anda doğru olamaz. O hâlde $a_0 = a'_0$. Aynı şey en büyük eleman için de geçerlidir. Örneğin $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin en küçük elemanı 1’dir ama en büyük elemanı yoktur; $\mathbb{R}$ ’nin ne en küçük ne en büyük elemanı vardır; $[0, 1]$ aralığının en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1’dir.

Artık aralıkları tanımlayabiliriz. Tanım, gerçel sayılardaki aralık tanımının kelimesi kelimesine aynısıdır; tek fark, $<$ bağıntısının artık herhangi bir tam sıralama olmasıdır.

Tanım 9.3 (Tam Sıralı Kümede Aralıklar). $(X, <)$ tam sıralı bir küme ve $a, b \in X$, $a < b$ olsun. Aşağıdaki dört alt kümeye a ve b 'nin belirlediği **aralıklar** (intervals) denir:

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in X : a \leq x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}.$$

Birinci türden kümeye X 'te **açık aralık** (open interval), sonuncusuna X 'te **kapalı aralık** (closed interval), ikinci ve üçüncü türden kümelere ise **yarı açık aralık** (half-open interval) denir.

Yani (a, b) aralığı, a ile b 'nin “arasında kalan” elemanların kümesidir; köşeli parantez uç noktanın kümeye dahil olduğunu, yuvarlak parantez ise dahil olmadığını gösterir. Dikkat edilirse tanımda $a < b$ istenir; böylece $[a, b]$ her zaman en az iki eleman (a ve b) içerir. Açık aralık (a, b) ise boş olabilir: $X = \mathbb{Z}^+$ kümesinde $(2, 3) = \emptyset$ olur, çünkü 2 ile 3 arasında hiçbir pozitif tam sayı yoktur.

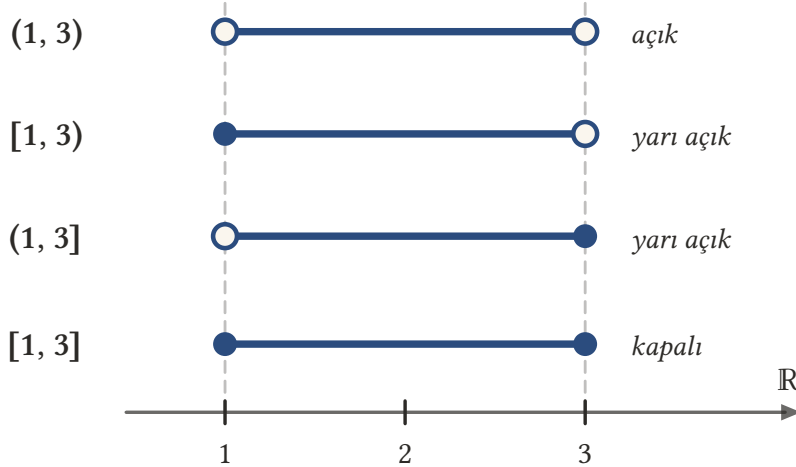
Buradaki “açık” sözcüğü şimdilik yalnızca bir addır; henüz X üzerinde bir topoloji yoktur, dolayısıyla “açık küme” kavramı da yoktur. Ancak bu adlandırma bir beklenti yaratır: X üzerine bir topoloji koyduğumuzda açık aralıkların gerçekten açık küme olması gerekir. Sıra topolojisi tam olarak bu beklentiye karşılayacak biçimde tanımlanır.

Örnek 9.1 (Çeşitli Kümelerde Aralıklar). Aşağıdaki aralıkları eleman eleman yazınız.

a) $X = \mathbb{R}$ (alışılmış sıralama) için $(1, 3)$, $[1, 3)$, $(1, 3]$, $[1, 3]$.

b) $X = \mathbb{Z}^+$ (alışılmış sıralama) için $(1, 4)$, $[1, 4)$, $(1, 2)$, $[3, 4]$.

c) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi $a < b < c < d$ sıralamasıyla verilsin; (a, d) , $[a, c)$, (b, c) .



Şekil 9.1: Gerçel sayılarda uç noktaları 1 ve 3 olan dört aralık. Dolu nokta uç noktanın kümeye dahil olduğunu, içi boş nokta dahil olmadığını gösterir: $(1, 3)$ iki ucu da almaz, $[1, 3)$ yalnızca 1'i, $(1, 3]$ yalnızca 3'ü, $[1, 3]$ ise ikisini de alır. Uçlar dışında dört küme aynıdır; fark yalnızca köşeli ve yuvarlak parantezin gösterdiği iki noktadadır.

Çözüm.

a) Gerçel sayılarda aralıklar alışılmış aralıklardır: $(1, 3)$ kümesi 1 ile 3 arasındaki, uçları içermeyen bütün gerçel sayılardır; $[1, 3)$ buna 1'i ekler, $(1, 3]$ ise 3'ü ekler; $[1, 3]$ ikisini de içerir. Bu kümelerin hiçbirisi sonlu değildir; örneğin 1,5, 2, $\frac{5}{2}$ sayılarının hepsi dördünde de vardır.

b) $\mathbb{Z}^+$ kümesinde 1 ile 4 arasında kalan pozitif tam sayılar 2 ve 3'tür. Bu yüzden $(1, 4) = \{2, 3\}$ ve $[1, 4) = \{1, 2, 3\}$ olur. 1 ile 2 arasında hiçbir pozitif tam sayı olmadığından $(1, 2) = \emptyset$; son olarak $[3, 4] = \{3, 4\}$.

c) a ile d arasında kalan elemanlar b ve c 'dir, dolayısıyla $(a, d) = \{b, c\}$. $[a, c)$ aralığı a 'yı içerir, c 'yi içermez: $[a, c) = \{a, b\}$. b ile c arasında eleman yoktur: $(b, c) = \emptyset$.

■

9.2 Sıra Topolojisinin Bazı

Amacımız, tam sıralı bir küme üzerinde açık aralıkların açık küme olduğu bir topoloji kurmaktır. İlk akla gelen, “bütün açık aralıkların ailesi bir baz olsun” demektir. Gerçek sayılarda bu yeterlidir. Ama X 'in bir en küçük elemanı a_0 varsa bir sorun çıkar: hiçbir açık aralık a_0 'ı içermez, çünkü $a < a_0$ olacak bir a yoktur. Oysa bir bazın elemanları X 'in her noktasını örtmelidir. Bu boşluğu, a_0 'ı içeren $[a_0, b)$ biçimindeki yarı açık aralıkları baza ekleyerek kapatırız. En büyük eleman için de aynı şey $(a, b_0]$ biçimindeki aralıklarla yapılır.

Tanım 9.4 (Sıra Topolojisi). $(X, <)$ birden fazla elemanı olan tam sıralı bir küme olsun. $\mathcal{B}$, aşağıdaki türlerden bütün kümelerin ailesi olsun:

- (1) X 'teki bütün açık aralıklar (a, b) ;
- (2) a_0 , X 'in en küçük elemanı (varsa) olmak üzere $[a_0, b)$ biçimindeki bütün aralıklar;
- (3) b_0 , X 'in en büyük elemanı (varsa) olmak üzere $(a, b_0]$ biçimindeki bütün aralıklar.

$\mathcal{B}$ ailesi X üzerinde bir topoloji için bazdır. $\mathcal{B}$ 'nin ürettiği topolojiye X üzerindeki **sıra topolojisi** (order topology) denir.

Yani sıra topolojisinde bir küme, açık aralıkların ve (varsa) en küçük ya da en büyük elemanı içeren yarı açık aralıkların birleşimi olarak yazılabiliyorsa açıktır. X 'in en küçük elemanı yoksa (2) türünden hiçbir küme yoktur; en büyük elemanı yoksa (3) türünden hiçbir küme yoktur. Bu durumda $\mathcal{B}$ yalnızca açık aralıklardan oluşur.

i Neden birden fazla eleman istendi

X tek elemanlı olsaydı $a < b$ olacak hiçbir çift bulunmaz, dolayısıyla hiç aralık olmazdı; $\mathcal{B} = \emptyset$ olur ve bu aile X 'in tek noktasını örtemezdi. Birden fazla eleman koşulu, aşağıdaki teoremin ispatında da tam bu noktada kullanılacak.

Tanımda “ $\mathcal{B}$ bir bazdır” dendi; bunu ispatlamak zorundayız. **Baz ve Alt Baz** bölümünde bir $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesinin baz olması için iki koşul verilmişti:

(B1) Her $x \in X$ için $x \in B$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır.

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ ise $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak biçimde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır.

(B2) koşulunu kontrol etmenin en temiz yolu, iki baz elemanının kesişiminin ya boş ya da yine bir baz elemanı olduğunu göstermektir. Bunu önce bir lemma olarak kanıtlayalım. Lemmada tekrar tekrar kullanacağımız basit bir gözlem şudur: tam sıralı bir kümede

$$a < x \text{ ve } c < x \Leftrightarrow \max\{a, c\} < x, \quad x < b \text{ ve } x < d \Leftrightarrow x < \min\{b, d\}.$$

Gerçekten, x hem a 'dan hem c 'den büyükse ikisinin büyüğünden de büyüktür; tersine x , a ile c 'nin büyüğünden büyükse (S3) gereği her ikisinden de büyüktür. İkinci denklik aynı biçimde görülür.

Lemma 9.1 (İki Baz Elemanının Kesişimi). $(X, <)$ birden fazla elemanı olan tam sıralı bir küme ve $\mathcal{B}$, Tanım 9.4'ndeki aile olsun. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ise $B_1 \cap B_2$ ya boş kümedir ya da $\mathcal{B}$ 'nin bir elemanıdır.

İspat.

B_1 ve B_2 kümelerinin her biri (1), (2), (3) türlerinden biridir. Sıra önemli olmadığından $(B_1 \cap B_2) = (B_2 \cap B_1)$ altı durum vardır. Durumlarda a_0 daima X 'in en küçük, b_0 daima en büyük elemanını gösterir; bu türden kümeler ancak ilgili eleman varsa söz konusudur.

Durum 1: $B_1 = (a, b)$, $B_2 = (c, d)$. Bir x elemanı her iki kümede de olsun. Bu, $a < x$, $c < x$, $x < b$ ve $x < d$ demektir. Yukarıdaki gözlem gereği bu dört eşitsizlik $\max\{a, c\} < x < \min\{b, d\}$ ile denktir. Dolayısıyla

$$(a, b) \cap (c, d) = \{x \in X : \max\{a, c\} < x < \min\{b, d\}\}.$$

$\max\{a, c\} < \min\{b, d\}$ ise bu küme $(\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$ açık aralıktır, yani (1) türünden bir baz elemanıdır. $\max\{a, c\} \geq \min\{b, d\}$ ise $\max\{a, c\} < x < \min\{b, d\}$ olacak hiçbir x yoktur ((S3) gereği böyle bir x için $\max\{a, c\} < \min\{b, d\}$ olurdu), dolayısıyla kesişim boştur.

Durum 2: $B_1 = (a, b)$, $B_2 = [a_0, c)$. a_0 en küçük eleman olduğundan $a_0 \leq a$; bu yüzden $a < x$ ise $a_0 < x$, dolayısıyla $a_0 \leq x$ olur. Yani “ $a < x$ ve $a_0 \leq x$ ” koşulu “ $a < x$ ” ile denktir. Sağ taraf için gözlemi kullanırsak

$$(a, b) \cap [a_0, c) = \{x \in X : a < x < \min\{b, c\}\}.$$

$a < \min\{b, c\}$ ise bu, $(a, \min\{b, c\})$ açık aralıktır; değilse Durum 1’deki gerekçeyle boş kümedir.

Durum 3: $B_1 = (a, b)$, $B_2 = (c, b_0]$. b_0 en büyük eleman olduğundan $b \leq b_0$; bu yüzden $x < b$ ise $x < b_0$, dolayısıyla $x \leq b_0$ olur. Yani “ $x < b$ ve $x \leq b_0$ ” koşulu “ $x < b$ ” ile denktir. Sol taraf için gözlemi kullanırsak

$$(a, b) \cap (c, b_0] = \{x \in X : \max\{a, c\} < x < b\}.$$

$\max\{a, c\} < b$ ise bu, $(\max\{a, c\}, b)$ açık aralıktır; değilse boş kümedir.

Durum 4: $B_1 = [a_0, b)$, $B_2 = [a_0, c)$. Sol koşul iki kümede de aynıdır: $a_0 \leq x$. Sağ koşullar gözlem gereği $x < \min\{b, c\}$ ile birleşir:

$$[a_0, b) \cap [a_0, c) = [a_0, \min\{b, c\}).$$

$a_0 < b$ ve $a_0 < c$ olduğundan $a_0 < \min\{b, c\}$; dolayısıyla bu küme (2) türünden bir baz elemanıdır. (Bu durumda kesişim hiçbir zaman boş değildir; a_0 ’ı içerir.)

Durum 5: $B_1 = [a_0, b)$, $B_2 = (c, b_0]$. Durum 2’deki gibi “ $a_0 \leq x$ ve $c < x$ ” koşulu “ $c < x$ ” ile, Durum 3’teki gibi “ $x < b$ ve $x \leq b_0$ ” koşulu “ $x < b$ ” ile denktir. Böylece

$$[a_0, b) \cap (c, b_0] = \{x \in X : c < x < b\}.$$

$c < b$ ise bu (c, b) açık aralıktır; değilse boş kümedir.

Durum 6: $B_1 = (a, b_0]$, $B_2 = (c, b_0]$. Sağ koşul iki kümede de aynıdır: $x \leq b_0$. Sol koşullar $\max\{a, c\} < x$ ile birleşir:

$$(a, b_0] \cap (c, b_0] = (\max\{a, c\}, b_0].$$

$a < b_0$ ve $c < b_0$ olduğundan $\max\{a, c\} < b_0$; dolayısıyla bu küme (3) türünden bir baz elemanıdır ve b_0 ’ı içerdiğinden boş değildir.

Altı durumun hepsinde $B_1 \cap B_2$ ya boştur ya da $\mathcal{B}$ ’nin bir elemanıdır.

■

İspatın özü: iki aralığın kesişimi, sol uç koşullarının güçlüsü ile sağ uç koşullarının güçlüsünün belirlediği aralıktır; en küçük elemanla ilgili koşul her sol koşuldan, en büyük elemanla ilgili koşul her sağ koşuldan zayıf olduğundan tanımda olmayan bir tür, örneğin $[a_0, b_0]$ kapalı aralığı, hiçbir zaman ortaya çıkmaz. Şimdi asıl teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 9.1 (Aralıklar Ailesi Bir Bazdır). $(X, <)$ birden fazla elemanı olan tam sıralı bir küme olsun. Tanım 9.4’ndeki $\mathcal{B}$ ailesi X üzerinde bir topoloji için bazdır.

İspat.

(B1) koşulu. $x \in X$ herhangi bir eleman olsun; x ’i içeren bir baz elemanı bulmalıyız. Üç durum vardır. x , X ’in en küçük elemanı olsun, yani $x = a_0$. X ’in birden fazla elemanı olduğundan x ’ten farklı bir $y \in X$ vardır. a_0 en küçük eleman ve $y \neq a_0$ olduğundan $a_0 < y$ olur. O hâlde $[a_0, y)$ aralığı tanımlıdır, (2) türünden bir baz elemanıdır ve $a_0 \leq a_0 < y$ olduğundan $x = a_0$ elemanını içerir.

x , X ’in en büyük elemanı olsun, yani $x = b_0$. Yine x ’ten farklı bir $y \in X$ vardır ve b_0 en büyük eleman olduğundan $y < b_0$ olur. $(y, b_0]$ aralığı (3) türünden bir baz elemanıdır ve $y < b_0 \leq b_0$ olduğundan $x = b_0$ elemanını içerir.

x ne en küçük ne en büyük eleman olsun. x en küçük eleman olmadığından “her y için $x \leq y$ ” ifadesi yanlış; yani $x \leq y$ olmayan bir y vardır. (S1) gereği bu y için $y < x$ olur; buna a diyelim. Benzer biçimde

x en büyük eleman olmadığından $x < b$ olacak bir $b \in X$ vardır. Böylece $a < x < b$, yani $x \in (a, b)$ olur; (a, b) ise (1) türünden bir baz elemanıdır. (X 'in en küçük elemanı hiç yoksa her x bu üçüncü durumdur; ispat aynen geçerlidir.)

Her durumda x 'i içeren bir baz elemanı bulduk.

(B2) koşulu. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ olsun. Kesişim x 'i içerdiğinden boş değildir. [Lemma 9.1](#)'e göre boş olmayan bir kesişim $\mathcal{B}$ 'nin bir elemanıdır. O hâlde $B_3 = B_1 \cap B_2$ seçersek $B_3 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olur.

İki koşul da sağlandığından $\mathcal{B}$ bir bazdır.

■

Böylece [Tanım 9.4](#) tutarlıdır: $\mathcal{B}$ gerçekten bir baz olduğundan ürettiği aile bir topolojidir. Bu topolojide $\mathcal{B}$ 'nin her elemanı, özel olarak her açık aralık, açık bir kümedir; adlandırmadan doğan beklenti karşılanmıştır.

9.3 Gerçel Sayılar Üzerindeki Standart Topoloji

Sıra topolojisinin en önemli örneği gerçel sayılardır. Yeni bir şey elde etmeyiz; tam tersine, tanıdık standart topolojinin bir sıra topolojisi olduğunu görürüz.

Örnek 9.2 (Gerçel Sayılarda Sıra Topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış $<$ sıralamasından elde edilen sıra topolojisi, $\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisidir.

Çözüm.

$\mathbb{R}$ 'nin en küçük elemanı yoktur: her $x \in \mathbb{R}$ için $x - 1 < x$ olur. En büyük elemanı da yoktur: $x < x + 1$. Bu yüzden $\mathcal{B}$ ailesinde (2) ve (3) türünden hiçbir küme yoktur; $\mathcal{B}$ yalnızca $a < b$ gerçel sayıları için (a, b) açık aralıklarından oluşur.

[Baz ve Alt Baz](#) bölümünde $\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisi tam olarak bu aile, yani bütün açık aralıklar ailesi, baz alınarak tanımlanmıştı. İki topoloji aynı bazdan üretildiğinden aynıdır.

■

9.4 Düzlemde Sözlük Sırası Topolojisi

Sıra topolojisinin gücü, gerçel sayılara hiç benzemeyen kümelerde de çalışmasıdır. Düzlemi bir tam sıralı kümeye çevirmenin bir yolu, noktaları sözlükteki kelimeler gibi karşılaştırmaktır: önce ilk harfe (ilk bileşene) bakılır, eşitse ikinciye geçilir.

Tanım 9.5 (Sözlük Sırası). $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinin elemanlarını, aralık gösterimiyle karışmaması için, (x, y) yerine $x \times y$ biçiminde yazalım. $x_1 \times y_1$ ve $x_2 \times y_2$ elemanları için

$$x_1 \times y_1 \prec x_2 \times y_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ veya } (x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2)$$

olarak tanımlanan $\prec$ bağıntısına $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde **sözlük sırası** (dictionary order) denir.

Yani iki noktayı karşılaştırırken önce birinci bileşenlere bakılır; birinci bileşeni küçük olan nokta küçüktür; birinci bileşenler eşitse ikinci bileşeni küçük olan nokta küçüktür. Geometrik olarak: soldaki dikey doğru üzerindeki her nokta, sağdaki dikey doğru üzerindeki her noktadan küçüktür; aynı dikey doğru üzerinde ise aşağıdaki nokta küçüktür.

$\prec$ bağıntısının bir tam sıralama olduğunu kontrol edelim. (S1): $x_1 \neq x_2$ ise $x_1 < x_2$ ya da $x_2 < x_1$ 'dir ve buna göre noktalardan biri ötekinden küçüktür; $x_1 = x_2$ ise $y_1 < y_2$, $y_1 = y_2$ ya da $y_2 < y_1$ 'dir ve bunlar sırasıyla $\prec, =, \succ$ durumlarını verir. (S2): $x \times y \prec x \times y$ olsaydı $x < x$ ya da $y < y$ olurdu; ikisi de yanlıştır. (S3): $x_1 \times y_1 \prec x_2 \times y_2 \prec x_3 \times y_3$ olsun. $x_1 < x_2$ ya da $x_2 < x_3$ ise $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ zincirinde en az bir yerde kesin eşitsizlik olduğundan $x_1 < x_3$, dolayısıyla ilk nokta üçüncüden küçüktür. Her ikisi de olmuyorsa $x_1 = x_2 = x_3$ ve $y_1 < y_2 < y_3$, yine ilk nokta üçüncüden küçüktür.

Örnek 9.3 (Düzlemde Sözlük Sırası Topolojisi). $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesini sözlük sırasıyla düşünelim. Bu tam sıralı kümenin ne en küçük ne en büyük elemanı vardır; dolayısıyla sıra topolojisinin bazı yalnızca

$$(a \times b, c \times d) = \{x \times y : a \times b \prec x \times y \prec c \times d\}$$

biçimindeki açık aralıklardan oluşur. Bu aralıklar iki türdür: $a < c$ olanlar ve $a = c, b < d$ olanlar. Her iki türü de düzlemde betimleyelim.

Çözüm.

Önce en küçük ve en büyük elemanın olmadığını görelim. Herhangi bir $x \times y$ için $(x-1) \times y \prec x \times y$ olur, çünkü $x-1 < x$; dolayısıyla hiçbir nokta en küçük değildir. Aynı biçimde $x \times y \prec (x+1) \times y$ olduğundan hiçbir nokta en büyük değildir. O hâlde Tanım 9.4'ndeki (2) ve (3) türünden küme yoktur ve baz, $a \times b \prec c \times d$ olmak üzere $(a \times b, c \times d)$ açık aralıklarından oluşur. $a \times b \prec c \times d$ koşulu tanım gereği ya $a < c$ ya da $a = c$ ve $b < d$ demektir.

$a < c$ durumu. $x \times y$ noktasının $a \times b$ ile $c \times d$ arasında olması için üç seçenek vardır:

- $a < x < c$: bu durumda y ne olursa olsun $a \times b \prec x \times y \prec c \times d$ olur. Yani a ile c arasındaki bütün dikey doğrular tümüyle aralığın içindedir.
- $x = a$: $a \times b \prec a \times y$ için $b < y$ gerekir ve yeter; $a \times y \prec c \times d$ ise $a < c$ olduğundan otomatik sağlanır. Yani $x = a$ doğrusunun $a \times b$ noktasının üstünde kalan kısmı aralıktadır, nokta kendisi değildir.
- $x = c$: benzer biçimde $y < d$ gerekir ve yeter. Yani $x = c$ doğrusunun $c \times d$ noktasının altında kalan kısmı aralıktadır.

$x < a$ ya da $x > c$ olan noktalar aralıkta değildir. Sonuç olarak

$$(a \times b, c \times d) = (\{a\} \times (b, +\infty)) \cup ((a, c) \times \mathbb{R}) \cup (\{c\} \times (-\infty, d)).$$

Bu küme şeklindeki gibi “üstü açık bir yarım doğru, aralarında bir dikey şerit, altı açık bir yarım doğru” görünümündedir.

$a = c, b < d$ durumu. $a \times b \prec x \times y \prec a \times d$ olması için $x = a$ olmak zorundadır: $x < a$ olsaydı $x \times y \prec a \times b$, $x > a$ olsaydı $a \times d \prec x \times y$ olurdu. $x = a$ için ise koşul $b < y < d$ olur. Yani

$$(a \times b, a \times d) = \{a\} \times (b, d),$$

tek bir dikey doğru üzerinde, uçları dışarıda bırakılmış bir doğru parçasıdır.

Bu ikinci tür aralıklar, sözlük sırası topolojisinin standart düzlem topolojisinden çok farklı olduğunu gösterir: dikey açık doğru parçası $\{a\} \times (b, d)$ bu topolojide açık bir kümedir; oysa düzlemin alışılmış topolojisinde hiçbir doğru parçası açık değildir, çünkü bir doğru parçası hiçbir açık daireyi içeremez.

■

9.5 Pozitif Tam Sayılar Üzerindeki Sıra Topolojisi

Gerçel sayılarda sıra topolojisi tanıdık standart topolojiyi verdi. Sıralı kümenin “seyrek” olduğu durumlarda ise sıra topolojisi mümkün olan en ince topolojiye, yani ayrık topolojiye dönüşür. Bunu pozitif tam sayılarda ispatlayalım; en küçük elemanın bulunduğu bir örnek olduğu için (2) türünden baz elemanlarının ne işe yaradığını da gösterir.

Önerme 9.1 (Pozitif Tam Sayılarda Sıra Topolojisi Ayrıktır). $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesi alışılmış sıralamayla tam sıralı bir kümedir ve en küçük elemanı 1'dir. $\mathbb{Z}^+$ üzerindeki sıra topolojisi ayrık topolojidir; yani $\mathbb{Z}^+$ 'nin her alt kümesi açıktır.

İspat.

Bir topolojide bütün tek noktalı kümeler açıksa o topoloji ayrık topolojidir: her tek noktalı küme açıksa, herhangi bir $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ alt kümesi $A = \bigcup_{n \in A} \{n\}$ biçiminde açık kümelerin birleşimi olur ve (T3) gereği açıktır. O hâlde her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\{n\}$ kümesinin sıra topolojisinde açık olduğunu göstermek yeter. Bunun için $\{n\}$ 'nin bir baz elemanı olduğunu göstereceğiz; baz elemanları ürettikleri topolojide açıktır.

$n > 1$ durumu. $n-1$ ve $n+1$ sayıları pozitif tam sayıdır ($n \geq 2$ olduğundan $n-1 \geq 1$) ve $n-1 < n+1$. Dolayısıyla $(n-1, n+1)$ açık aralığı tanımlıdır ve (1) türünden bir baz elemanıdır. Bu aralık, $n-1 < x < n+1$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayılardan oluşur; $n-1$ ile $n+1$ arasındaki tek tam sayı n 'dir. O hâlde

$$\{n\} = (n-1, n+1) \in \mathcal{B}.$$

$n = 1$ durumu. $1, \mathbb{Z}^+$ 'nin en küçük elemanıdır ve $1 < 2$. Dolayısıyla $[1, 2)$ aralığı (2) türünden bir baz elemanıdır. $1 \leq x < 2$ koşulunu sağlayan tek pozitif tam sayı 1'dir. O hâlde

$$\{1\} = [1, 2) \in \mathcal{B}.$$

Her iki durumda $\{n\}$ bir baz elemanı, dolayısıyla açık bir kümedir. Yukarıda açıklandığı gibi bu, her alt kümenin açık olması demektir; sıra topolojisi $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$ 'ya, yani ayrık topolojiye eşittir.

■

İspatın özü: her tam sayının hemen solundaki ve sağındaki tam sayı arasında ondan başka tam sayı yoktur, bu yüzden her nokta tek başına bir açık aralıktır.

⚠ Belirleyici olan küme değil, sıralamadır

Aynı kümeyi farklı sıralamalarla donatmak farklı sıra topolojileri verebilir; ayrıca ayrık topolojinin çıkması kümenin sayılabilir olmasına değil, sıralamanın seyrek olmasına bağlıdır. Örneğin $\mathbb{Q}$ sayılabilir olmasına karşın alışımlı sıralamayla sıra topolojisi ayrık değildir: $\mathbb{Q}$ 'nun en küçük ve en büyük elemanı olmadığından baz yalnızca açık aralıklardan oluşur ve bir $q \in \mathbb{Q}$ noktasını içeren her açık aralık (a, b) , $a < q < b$ olduğundan q 'dan başka rasyonel sayılar da içerir (örneğin $\frac{a+q}{2}$). Dolayısıyla $q \in B \subseteq \{q\}$ olacak bir baz elemanı B yoktur; $\{q\}$ açık değildir.

9.6 Işınlr

Aralıkların iki ucu vardır. Tek ucu olan, öteki yönde “sonsuz giden” kümeler de doğal olarak ortaya çıkar; gerçel sayılarda $(0, +\infty)$ gibi. Bunlar sıra topolojisinin daha küçük bir üreteç ailesini, bir alt bazını verecek.

Tanım 9.6 (Işınlr). $(X, <)$ tam sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Aşağıdaki dört alt kümeye a 'nın belirlediği **ışınlar** (rays) denir:

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x \in X : x > a\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \in X : x < a\}, \\ [a, +\infty) &= \{x \in X : x \geq a\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in X : x \leq a\}. \end{aligned}$$

İlk iki türden kümelere **açık ışın** (open ray), son iki türden kümelere **kapalı ışın** (closed ray) denir.

Yani $(a, +\infty)$, a 'dan kesinlikle büyük olan bütün elemanların; $(-\infty, a)$, a 'dan kesinlikle küçük olan bütün elemanların kümesidir; köşeli parantezli biçimler a 'nın kendisini de içerir. Buradaki $+\infty$ ve $-\infty$ sembolleri X 'in elemanı değildir; yalnızca “bu yönde uç yok” anlamına gelen bir gösterimdir. Aralıklardan farklı olarak ışınlar her $a \in X$ için tanımlıdır; ancak boş olabilirler: a en büyük elemansa $(a, +\infty) = \emptyset$, a en küçük elemansa $(-\infty, a) = \emptyset$ olur.

Adlandırma yine bir beklenti yaratır: açık ışınlar sıra topolojisinde açık küme olmalıdır. Öyle olduklarını ispatlayalım. Işınlar tanım gereği baz elemanı değildir; bu yüzden ya bir baz elemanına eşit olduklarını ya da baz elemanlarının birleşimi olduklarını göstermek gerekir.

Önerme 9.2 (Açık Işınlar Açık Kümelerdir). $(X, <)$ birden fazla elemanı olan tam sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. $(a, +\infty)$ ve $(-\infty, a)$ ışınları X üzerindeki sıra topolojisinde açık kümelerdir.

İspat.

Önce $(a, +\infty)$ ışını ele alalım. X 'in en büyük elemanının olup olmamasına göre iki durum vardır.

X 'in en büyük elemanı b_0 olsun. $a = b_0$ ise a 'dan büyük eleman yoktur; $(a, +\infty) = \emptyset$ olur ve boş küme (T1) gereği her topolojide açıktır. $a \neq b_0$ ise b_0 en büyük eleman olduğundan $a < b_0$ ve $(a, b_0]$ aralığı tanımlıdır; bu, (3) türünden bir baz elemanıdır. İddia ediyoruz ki $(a, +\infty) = (a, b_0]$. Gerçekten, $x \in (a, +\infty)$ ise $a < x$ 'tir ve b_0 en büyük eleman olduğundan $x \leq b_0$ 'dır; yani $x \in (a, b_0]$. Tersine $x \in (a, b_0]$ ise $a < x$, yani $x \in (a, +\infty)$. Böylece $(a, +\infty)$ bir baz elemanına eşittir ve açıktır.

X 'in en büyük elemanı olmasın. Bu durumda

$$(a, +\infty) = \bigcup_{x \in X, x > a} (a, x)$$

olduğunu gösterelim. Sağ taraftaki her (a, x) kümesi $a < x$ için tanımlı bir açık aralık, yani bir baz elemanıdır; bu yüzden eşitlik ispatlanınca $(a, +\infty)$ açık kümelerin birleşimi olarak açık olur. En büyük eleman olmadığından a 'dan büyük en az bir eleman vardır; yani birleşim boş bir aile üzerinden alınmıyor. $\supseteq$: y , birleşimdeki bir (a, x) kümesinde olsun. O zaman $a < y$, yani $y \in (a, +\infty)$.

$\subseteq$: $y \in (a, +\infty)$ olsun, yani $a < y$. X 'in en büyük elemanı olmadığından y en büyük eleman değildir; dolayısıyla $y < z$ olacak bir $z \in X$ vardır. O hâlde $a < y < z$, yani $y \in (a, z)$ ve $a < z$ olduğundan (a, z) birleşimdeki kümelerden biridir. Böylece y birleşimdedir.

Her iki durumda $(a, +\infty)$ açıktır.

Şimdi $(-\infty, a)$ ışığını ele alalım; aynı akıl yürütme yönler ters çevrilerek işler.

X 'in en küçük elemanı a_0 olsun. $a = a_0$ ise $(-\infty, a) = \emptyset$, açıktır. $a \neq a_0$ ise $a_0 < a$ ve $[a_0, a)$ aralığı (2) türünden bir baz elemanıdır. $x \in (-\infty, a)$ ise $x < a$ ve $a_0 \leq x$ (çünkü a_0 en küçüktür), yani $x \in [a_0, a)$; tersine $x \in [a_0, a)$ ise $x < a$, yani $x \in (-\infty, a)$. Dolayısıyla $(-\infty, a) = [a_0, a)$ bir baz elemanıdır ve açıktır.

X 'in en küçük elemanı olmasın. Bu durumda

$$(-\infty, a) = \bigcup_{x \in X, x < a} (x, a)$$

olur: $y \in (x, a)$ ise $y < a$; tersine $y < a$ ise y en küçük eleman olmadığından $z < y$ olacak bir z vardır ve $y \in (z, a)$ ile $z < a$ sağlanır. Sağ taraf baz elemanlarının birleşimi olduğundan $(-\infty, a)$ açıktır.

■

İspatın özü: en büyük eleman varsa açık ışın zaten bir baz elemanıdır; yoksa ışın, sağ ucu giderek uzaklaşan açık aralıkların birleşimidir.

Kapalı ışınlar da adlarına uygun davranır: $[a, +\infty)$ kümesinin tümleyeni $(-\infty, a)$ açık ışındır, dolayısıyla $[a, +\infty)$ kapalıdır; aynı biçimde $(-\infty, a]$ de kapalıdır. Bunun ayrıntısı alıştırılmalarda istenmektedir.

Açık ışınlar yalnızca açık olmakla kalmaz; sıra topolojisini tek başlarına üretirler. **Baz ve Alt Baz** bölümünden hatırlayalım: birleşimi X olan bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesine bir **alt baz** denir; $\mathcal{S}$ 'nin elemanlarının sonlu kesişimleri bir baz oluşturur ve bu bazın ürettiği topolojiye $\mathcal{S}$ 'nin ürettiği topoloji denir. Bir $\mathcal{S}$ ailesinin belli bir τ topolojisi için alt baz olması, $\mathcal{S}$ 'nin ürettiği topolojinin τ 'ya eşit olması demektir. Bu tür bir eşitlik iki kapsama ile gösterilir; aşağıdaki teorem bunun tipik bir örneğidir.

Teorem 9.2 (Açık Işınlar Sıra Topolojisi İçin Alt Bazdır). $(X, <)$ birden fazla elemanı olan tam sıralı bir küme, τ bu küme üzerindeki sıra topolojisi ve $\mathcal{S}$, X 'teki bütün açık ışınların ailesi olsun. $\mathcal{S}$, τ için bir alt bazdır; yani $\mathcal{S}$ 'nin ürettiği topoloji τ 'ya eşittir.

İspat.

$\mathcal{S}$ 'nin ürettiği topolojiyi $\tau_{\mathcal{S}}$ ile gösterelim. Üç şey göstereceğiz: $\mathcal{S}$ 'nin birleşimi X 'tir (böylece $\mathcal{S}$ gerçekten bir alt bazdır), $\tau_{\mathcal{S}} \subseteq \tau$ ve $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$.

$\mathcal{S}$ 'nin birleşimi X 'tir. $x \in X$ olsun. X 'in birden fazla elemanı olduğundan x 'ten farklı bir y vardır ve (S1) gereği ya $y < x$ ya da $x < y$ 'dir. $y < x$ ise $x \in (y, +\infty)$; $x < y$ ise $x \in (-\infty, y)$. Her iki durumda x bir açık ışının içindedir. Dolayısıyla $\bigcup \mathcal{S} = X$.

$\tau_{\mathcal{S}} \subseteq \tau$. $\tau_{\mathcal{S}}$ 'nin bir elemanı, açık ışınların sonlu kesişimlerinin birleşimidir. **Önerme 9.2'e** göre her açık ışın τ 'da açıktır. Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi (T2) gereği, açık kümelerin herhangi bir birleşimi (T3) gereği τ 'da açıktır. O hâlde $\tau_{\mathcal{S}}$ 'nin her elemanı τ 'dadır.

$\tau \subseteq \tau_{\mathcal{S}}$. τ 'nın her elemanı, $\mathcal{B}$ bazının elemanlarının birleşimidir. $\tau_{\mathcal{S}}$ birleşim altında kapalı olduğundan, $\mathcal{B}$ 'nin her elemanının $\tau_{\mathcal{S}}$ 'de olduğunu göstermek yeter. Bunun için her baz elemanının açık ışınların sonlu bir kesişimi olduğunu, yani $\tau_{\mathcal{S}}$ 'nin bazında bulunduğunu görelim. Üç tür vardır.

(1) türü, (a, b) : $a < x < b$ koşulu " $x > a$ ve $x < b$ " demektir; dolayısıyla

$$(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b),$$

iki açık ışının kesişimidir.

(2) türü, $[a_0, b)$: a_0 en küçük eleman olduğundan her $x \in X$ için $a_0 \leq x$ koşulu kendiliğinden sağlanır. Bu yüzden $a_0 \leq x < b$ koşulu $x < b$ koşuluna denktir:

$$[a_0, b) = (-\infty, b).$$

Yani bu baz elemanı zaten bir açık ışıktır (tek elemanlı bir kesişimdir).

(3) türü, $(a, b_0]$: b_0 en büyük eleman olduğundan $x \leq b_0$ her zaman doğrudur; $a < x \leq b_0$ koşulu $a < x$ koşuluna denktir:

$$(a, b_0] = (a, +\infty).$$

Bu da bir açık ışıktır.

Böylece $\mathcal{B}$ 'nin her elemanı τ_S 'dedir; τ 'nın her elemanı bunların birleşimi olduğundan $\tau \subseteq \tau_S$.

İki kapsama birlikte $\tau_S = \tau$ verir; yani açık ışıklar sıra topolojisi için bir alt bazdır.

■

İspatın özü: açık ışıklar açık olduğundan ürettikleri topoloji sıra topolojisinden daha ince olamaz; her açık aralık iki ışığın kesişimi olduğundan daha kaba da olamaz.

❓ Baz mı, alt baz mı

Açık ışıklar bir alt bazdır ama genelde bir baz değildir. Örneğin $\mathbb{R}$ 'de $(0, +\infty)$ ve $(-\infty, 1)$ ışıklarının kesişimi $(0, 1)$ aralığıdır; $\frac{1}{2}$ noktasını içeren ve $(0, 1)$ 'in içinde kalan hiçbir açık ışık yoktur, çünkü her açık ışık sınırsızdır. Dolayısıyla (B2) koşulu sağlanmaz. Alt baz kavramının değeri tam buradadır: baz koşullarını sağlamayan, çok daha küçük bir aileyle bile topolojinin tamamı üretilebilir.

9.7 Alıştırmalar

- Alıştırma 9.1 (Sıra Topolojisi Alıştırmaları).** a) $\mathbb{Z}^+$ kümesinde $(2, 5)$, $[1, 4)$ ve $(3, +\infty)$ kümelerini eleman eleman yazınız. $(2, 5)$ ve $[1, 4)$ kümelerini Tanım 9.4'ndeki türlerden hangisine girdiğini belirtiniz. b) $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi alışılmış sıralamayla verilsin. $\mathbb{Z}$ üzerindeki sıra topolojisinin ayrık topoloji olduğunu gösteriniz. $\mathbb{Z}^+$ ile karşılaştırınız: ispatta hangi baz türleri kullanılıyor? c) $(X, <)$ birden fazla elemanı olan tam sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Kapalı ışıklar $[a, +\infty)$ ve $(-\infty, a]$ kümelerinin sıra topolojisinde kapalı olduğunu gösteriniz. d) $(X, <)$ birden fazla elemanı olan tam sıralı bir küme ve $a < b$ olsun. Kapalı aralık $[a, b]$ kümesinin sıra topolojisinde kapalı olduğunu gösteriniz. e) $X = \{1, 2, 3\}$ kümesi alışılmış sıralamayla verilsin. Tanım 9.4'ndeki $\mathcal{B}$ ailesinin bütün elemanlarını yazınız ve X üzerindeki sıra topolojisini belirleyiniz. f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sözlük sırası topolojisiyle verilsin. Dikey doğru $\{a\} \times \mathbb{R}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz. Yatay açık doğru parçası $(a, c) \times \{b\}$ kümesinin $(a < c)$ açık olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

- a) $2 < x < 5$ olan pozitif tam sayılar 3 ve 4'tür: $(2, 5) = \{3, 4\}$; bu bir açık aralık, yani (1) türünden bir baz elemanıdır. $1 \leq x < 4$ olanlar 1, 2, 3'tür: $[1, 4) = \{1, 2, 3\}$; 1 en küçük eleman olduğundan bu, (2) türünden bir baz elemanıdır. $x > 3$ olanlar 4, 5, 6, ... sayılarıdır: $(3, +\infty) = \{4, 5, 6, \dots\}$; bu bir açık ışıktır. b) $\mathbb{Z}$ 'nin en küçük elemanı yoktur ($n - 1 < n$) ve en büyük elemanı yoktur ($n < n + 1$); bu yüzden baz yalnızca açık aralıklardan oluşur. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n - 1$ ve $n + 1$ tam sayıdır, $n - 1 < n + 1$ ve $n - 1 < x < n + 1$ koşulunu sağlayan tek tam sayı n 'dir. Dolayısıyla $\{n\} = (n - 1, n + 1)$ bir baz elemanı, yani açık bir kümedir. Her $A \subseteq \mathbb{Z}$ alt kümesi $A = \bigcup_{n \in A} \{n\}$ biçiminde açık kümelerin birleşimi olduğundan açıktır; topoloji $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, yani ayrık topolojidir. $\mathbb{Z}^+$ 'dan farkı, $n = 1$ için (2) türünden $[1, 2)$ baz elemanına ihtiyaç duyulmasıydı; $\mathbb{Z}$ 'de en küçük eleman olmadığından yalnızca (1) türü kullanılır. c) Bir kümenin kapalı olması, tümleyeninin açık olması demektir. $[a, +\infty)$ kümesinin tümleyeni, $x \geq a$ olmayan, yani (S1) gereği $x < a$ olan elemanların kümesidir:

$$X \setminus [a, +\infty) = (-\infty, a).$$

Önerme 9.2'e göre $(-\infty, a)$ açıktır; dolayısıyla $[a, +\infty)$ kapalıdır. Aynı biçimde $X \setminus (-\infty, a] = \{x \in X : x > a\} = (a, +\infty)$ açık olduğundan $(-\infty, a]$ kapalıdır.

d) $[a, b]$ kümesinin tümleyenini bulalım. $x \notin [a, b]$ olması, “ $a \leq x$ ve $x \leq b$ ” ifadesinin yanlış olması, yani $x < a$ veya $b < x$ olması demektir. O hâlde

$$X \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

Önerme 9.2’e göre iki açık ışın da açıktır ve iki açık kümenin birleşimi (T3) gereği açıktır. Tümleyeni açık olduğundan $[a, b]$ kapalıdır.

e) X ’in en küçük elemanı 1, en büyük elemanı 3’tür. Açık aralıklar: $a < b$ çiftleri $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ ’tür ve $(1, 2) = \emptyset$, $(1, 3) = \{2\}$, $(2, 3) = \emptyset$. (2) türü: $[1, 2) = \{1\}$, $[1, 3) = \{1, 2\}$. (3) türü: $(1, 3] = \{2, 3\}$, $[2, 3] = \{3\}$. Böylece

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}.$$

Bütün tek noktalı kümeler $\mathcal{B}$ ’de olduğundan her alt küme baz elemanlarının birleşimidir; sıra topolojisi $\mathcal{P}(X)$, yani ayrık topolojidir. (Aynı akıl yürütme her sonlu tam sıralı küme için geçerlidir: her elemanın hemen öncesi ve hemen sonrası vardır.)

f) *Dikey doğru açıktır.* **Örnek 9.3’ne** göre her $b < d$ için $\{a\} \times (b, d) = (a \times b, a \times d)$ bir baz elemanı, dolayısıyla açıktır. Dikey doğru bu kümelerin birleşimidir:

$$\{a\} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{a\} \times (-n, n),$$

çünkü her $y \in \mathbb{R}$ için $|y| < n$ olacak bir pozitif tam sayı n vardır. Açık kümelerin birleşimi olduğundan $\{a\} \times \mathbb{R}$ açıktır.

Yatay doğru parçası açık değildir. $U = (a, c) \times \{b\}$ olsun ve U ’nun açık olduğunu varsayalım. $x_0 = \frac{a+c}{2}$ alalım; $x_0 \times b \in U$. U açık olduğundan, bazın tanımı gereği $x_0 \times b \in B \subseteq U$ olacak bir baz elemanı $B = (p \times q, r \times s)$ vardır. $x_0 \times b \in B$ olduğundan $p \times q \prec x_0 \times b \prec r \times s$, dolayısıyla $p \leq x_0 \leq r$. Şimdi B ’nin x_0 dikey doğrusu üzerinde b ’den farklı bir nokta içerdiğini gösterelim; bu nokta U ’da olamayacağından $B \subseteq U$ ile çelişir.

- $p < x_0 < r$ ise her y için $x_0 \times y \in B$; özel olarak $x_0 \times (b+1) \in B$.
- $p = x_0 < r$ ise $x_0 \times y \in B$ olması için $q < y$ yeter; $x_0 \times b \in B$ olduğundan $q < b$, dolayısıyla $x_0 \times (b+1) \in B$.
- $p < x_0 = r$ ise $x_0 \times y \in B$ olması için $y < s$ yeter; $b < s$ olduğundan $x_0 \times (b-1) \in B$.
- $p = x_0 = r$ ise $B = \{x_0\} \times (q, s)$ ve $q < b < s$; b ile s arasında bir y seçilirse $x_0 \times y \in B$ ve $y \neq b$.

Her durumda B , $x_0 \times y$ biçiminde ve $y \neq b$ olan bir nokta içerir; bu nokta U ’da değildir, çünkü U ’nun bütün noktalarının ikinci bileşeni b ’dir. Bu $B \subseteq U$ ile çelişir. O hâlde U açık değildir.

■

Sıra topolojisi tek bir kümenin sıralamasından üretildi. Bir sonraki bölümde iki topolojik uzayın kartezyen çarpımı üzerine, her iki uzayın açık kümelerini kullanarak doğal bir topoloji kuracağız: **Çarpım Topolojisi**.

10. Çarpım Topolojisi

Sıra Topolojisi bölümünde, sıralı bir küme üzerinde açık aralıklardan yola çıkarak bir topoloji kurduk. Bu bölümde başka bir doğal kurma işlemine geçiyoruz: elimizde iki topolojik uzay X ve Y varsa, **İndisli Aileler ve Kartezyen Çarpım** bölümünde tanımladığımız $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ kartezyen çarpımı üzerinde bir topoloji tanımlamanın standart bir yolu vardır. Buna **çarpım topolojisi** (product topology) denir.

Fikir basittir. X 'in açık bir U kümesiyle Y 'nin açık bir V kümesini alıp $U \times V$ “dikdörtgenini” kurarız. Düzlemde $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ için bu, iki açık aralığın çarpımı olan açık bir dikdörtgendir. Bütün bu dikdörtgenlerin ailesi bir baz oluşturur; çarpım topolojisi bu bazın ürettiği topolojidir. Bu bölümde önce bu ailenin gerçekten bir baz olduğunu ispatlayacak, sonra X ve Y 'nin bazlarından $X \times Y$ için daha küçük bir baz kurmayı öğreneceğiz. Böylece düzlemin alışılmış topolojisinin, açık dikdörtgenlerin ürettiği topolojiden başka bir şey olmadığını göreceğiz.

Bölümün ikinci yarısında **izdüşüm** (projection) fonksiyonlarını tanımlıyoruz: $\pi_1(x, y) = x$ ve $\pi_2(x, y) = y$. Açık kümelerin izdüşüm altındaki ters görüntüleri “dikey” ve “yatay” şeritlerdir; iki şeridin kesişimi bir dikdörtgendir. Bu gözlem, çarpım topolojisini daha az ve daha basit kümeyle, yani bir alt bazla betimlememizi sağlar. Bölüm boyunca **Baz ve Alt Baz** bölümündeki kavramları sık sık kullanacağız; önce onları kısaca hatırlayalım.

i Hatırlatma: baz, bazın ürettiği topoloji ve alt baz

Baz ve Alt Baz bölümünden şunları kullanacağız.

- Bir X kümesi üzerinde $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesine **baz** denir; bunun için iki koşul gerekir. **(B1)** Her $x \in X$ için $x \in B$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. **(B2)** $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ ise $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak biçimde bir $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır.
- $\mathcal{B}$ 'nin **ürettiği topoloji**: $U \subseteq X$ kümesi açıktır ancak ve ancak her $x \in U$ için $x \in B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. Buna denk olarak, açık kümeler tam olarak baz elemanlarının (keyfi) birleşimleridir. Özel olarak her baz elemanı açıktır.
- **Baz ölçütü**: (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{C}$ ise X 'in açık kümelerinden oluşan bir aile olsun. Her açık $U \subseteq X$ ve her $x \in U$ için $x \in C \subseteq U$ olacak biçimde bir $C \in \mathcal{C}$ varsa $\mathcal{C}, \tau$ topolojisi için bir bazdır.
- **Alt baz**: birleşimi X 'e eşit olan bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesi. $\mathcal{S}$ 'nin ürettiği topoloji, $\mathcal{S}$ elemanlarının sonlu kesişimlerinin bütün birleşimlerinden oluşan ailedir; bu ailenin gerçekten bir topoloji olduğu o bölümde ispatlanmıştır.

10.1 Çarpım Topolojisinin Tanımı

X ve Y topolojik uzaylar olsun. Kurmak istediğimiz baz, X 'in bir açık kümesiyle Y 'nin bir açık kümesinin çarpımı olan bütün kümelerden oluşur:

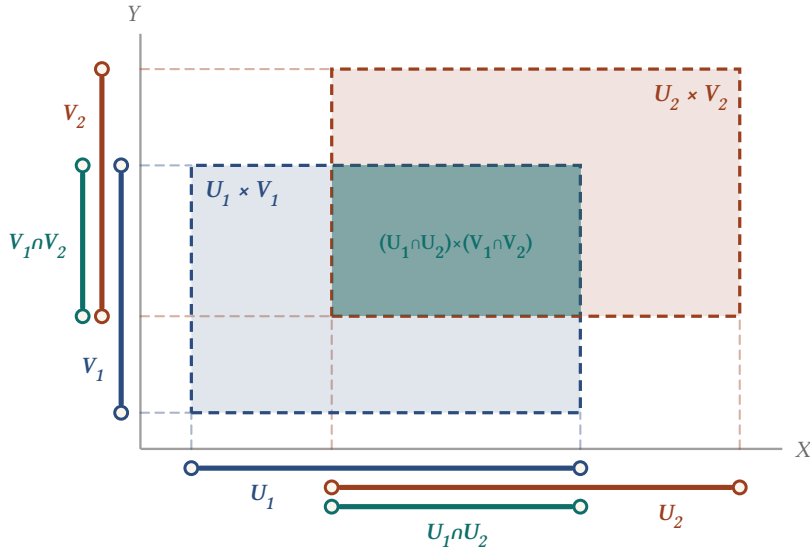
$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \subseteq X \text{ açık}, V \subseteq Y \text{ açık}\}.$$

Bir topolojiyi “bu bazın ürettiği topoloji” diye tanımlayabilmemiz için önce $\mathcal{B}$ 'nin gerçekten baz koşullarını sağladığını göstermemiz gerekir. Ana gözlem şudur: iki dikdörtgenin kesişimi yine bir dikdörtgendir.

Lemma 10.1 (Açık Dikdörtgenler Bir Bazdır). X ve Y topolojik uzaylar olsun. $U \subseteq X$ açık ve $V \subseteq Y$ açık olmak üzere $U \times V$ biçimindeki bütün kümelerin ailesi $\mathcal{B}$, $X \times Y$ kümesi üzerinde bir bazdır. Üstelik $U_1, U_2 \subseteq X$ ve $V_1, V_2 \subseteq Y$ herhangi kümeler olmak üzere

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

eşitliği geçerlidir.



Şekil 10.1: İki açık dikdörtgenin kesişimi yine bir açık dikdörtgendir. $U_1 \times V_1$ ve $U_2 \times V_2$ dikdörtgenlerinin ortak bölgesi, yatay eksendeki $U_1 \cap U_2$ ile dikey eksendeki $V_1 \cap V_2$ aralıklarının çarpımıdır. Bir nokta iki dikdörtgende de bulunuyorsa birinci bileşeni iki U 'da, ikinci bileşeni iki V 'de birden yer alır; baz koşulu (B2) tam olarak bu gözleme dayanır.

İspat.

Önce kesişim eşitliğini gösterelim. Bir (a, b) sıralı ikilisi alalım. Kartezyen çarpımın tanımı gereği $(a, b) \in U_1 \times V_1$ olması, $a \in U_1$ ve $b \in V_1$ olması demektir; aynı biçimde $(a, b) \in U_2 \times V_2$ olması $a \in U_2$ ve $b \in V_2$ demektir. Bu yüzden

$$(a, b) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \Leftrightarrow a \in U_1, a \in U_2, b \in V_1, b \in V_2 \Leftrightarrow a \in U_1 \cap U_2 \text{ ve } b \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow (a, b) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

İki kümenin elemanları aynı olduğundan kümeler eşittir.

Şimdi baz koşullarını denetleyelim.

(B1) Topoloji aksiyomu (T1) gereği X, X' 'te açık ve Y, Y' 'de açıktır. Bu yüzden $X \times Y \in \mathcal{B}$. Her $(x, y) \in X \times Y$ noktası bu baz elemanının içindedir; yani (B1) sağlanır.

(B2) $B_1 = U_1 \times V_1$ ve $B_2 = U_2 \times V_2$ iki baz elemanı, $(x, y) \in B_1 \cap B_2$ olsun. Az önce ispatladığımız eşitlik gereği

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

U_1 ve U_2 kümeleri X 'te açık olduğundan, aksiyom (T2) gereği $U_1 \cap U_2$ de X 'te açıktır; aynı gerekçeyle $V_1 \cap V_2$ kümesi Y 'de açıktır. Bu yüzden $B_3 := (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ kümesi $\mathcal{B}$ 'nin bir elemanıdır. $B_3 = B_1 \cap B_2$ olduğundan $(x, y) \in B_3$ ve $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ sağlanır; yani (B2) de doğrudur.

Her iki koşul sağlandığından $\mathcal{B}$ bir bazdır.

■

İspatın özü: iki açık dikdörtgenin kesişimi yalnızca bir dikdörtgenin içinde kalmakla kalmaz, kendisi de açık bir dikdörtgendir. Artık tanımı verebiliriz.

Tanım 10.1 (Çarpım Topolojisi). X ve Y topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$ üzerindeki **çarpım topolojisi** (product topology), $U \subseteq X$ açık ve $V \subseteq Y$ açık olmak üzere $U \times V$ biçimindeki bütün kümelerin ailesi $\mathcal{B}'$ 'yi baz kabul eden topolojidir. $X \times Y$ kümesi bu topolojiyle birlikte X ve Y 'nin **çarpım uzayı** olarak adlandırılır.

Yani $W \subseteq X \times Y$ kümesi çarpım topolojisinde açıktır ancak ve ancak W 'nin her (x, y) noktası için $(x, y) \in U \times V \subseteq W$ olacak biçimde X 'te açık bir U ve Y 'de açık bir V vardır. Buna denk olarak, $X \times Y$ 'nin açık kümeleri tam olarak $U \times V$ biçimindeki kümelerin birleşimleridir.

Tanımdan hemen çıkan iki gözlemi not edelim. Birincisi, her baz elemanı açık olduğundan, $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ açık olduğunda $U \times V$ kümesi $X \times Y$ 'de açıktır. İkincisi, $X \times Y$ 'nin kendisi ve boş küme bazdadır; çünkü $X \times Y \in \mathcal{B}$ ve $\emptyset = \emptyset \times Y \in \mathcal{B}$.

Somut bir örnekle başlayalım.

Örnek 10.1 (Sonlu Bir Çarpım Uzayı). $X = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde $\tau_X = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$ topolojisini, $Y = \{a, b\}$ kümesi üzerinde de en kaba topoloji $\tau_Y = \{\emptyset, Y\}$ 'yi alalım. $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisinin bazını ve bütün açık kümelerini bulunuz. $\{(1, a)\}$ kümesi açık mıdır?

Çözüm.

$X \times Y$ kümesinin altı elemanı vardır: $(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)$. Baz elemanları $U \in \tau_X$ ve $V \in \tau_Y$ olmak üzere $U \times V$ kümeleridir. $V = \emptyset$ ise $U \times V = \emptyset$; $V = Y$ ise dört seçenek çıkar:

$$\emptyset \times Y = \emptyset, \quad \{1\} \times Y = \{(1, a), (1, b)\}, \quad \{1, 2\} \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}, \quad X \times Y.$$

Dolayısıyla $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\} \times Y, \{1, 2\} \times Y, X \times Y\}$. Açık kümeler baz elemanlarının birleşimleridir. Bu dört küme iç içe olduğundan ($\emptyset \subseteq \{1\} \times Y \subseteq \{1, 2\} \times Y \subseteq X \times Y$) herhangi birkaçının birleşimi yine içlerinden en büyüğüne eşittir. Bu yüzden çarpım topolojisi tam olarak

$$\tau = \{\emptyset, \{1\} \times Y, \{1, 2\} \times Y, X \times Y\}$$

ailesidir; dört açık küme vardır.

$\{(1, a)\}$ kümesi açık değildir: $(1, a)$ noktasını içeren her baz elemanı $U \times Y$ biçimindedir ve $1 \in U$ olduğundan $(1, b)$ noktasını da içerir. Bu yüzden $(1, a) \in U \times V \subseteq \{(1, a)\}$ olacak biçimde bir baz elemanı yoktur. Sezgisel olarak Y 'nin topolojisi a ile b 'yi birbirinden ayıramadığı için çarpım uzayı da $(1, a)$ ile $(1, b)$ 'yi ayıramaz.

■

⚠ Her açık küme bir diktörtgen değildir

Çarpım topolojisinin açık kümeleri $U \times V$ biçimindeki kümelerin **birleşimleridir**; tek bir $U \times V$ olmak zorunda değildirler. Örneğin $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki açık birim daire $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ açıktır (bu bölümün alıştırmalarında gösterilecek) ama bir çarpım değildir. Gerçekten $D = U \times V$ olsaydı, $(9/10, 0) \in D$ olduğundan $9/10 \in U$, $(0, 9/10) \in D$ olduğundan $9/10 \in V$ olurdu; o zaman $(9/10, 9/10) \in U \times V = D$ gerekirdi. Oysa $(9/10)^2 + (9/10)^2 = 162/100 > 1$; çelişki.

10.2 Bazlardan Baz

Çarpım topolojisinin tanımındaki baz, X ve Y 'nin **bütün** açık kümelerinin çarpımlarından oluşur; bu genellikle çok büyük bir ailedir. Uygulamada X ve Y 'nin topolojileri çoğu zaman bir bazla verilir: örneğin $\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisi açık aralıklarla verilir. Şu soru doğaldır: yalnızca baz elemanlarının çarpımlarını alsak yine bir baz elde eder miyiz? Aşağıdaki teorem evet der. Bu sayede $\mathbb{R}^2$ için açık aralıkların çarpımı olan diktörtgenler yeterli olacaktır.

Teorem 10.1 (Bazlardan Çarpım Bazı Kurma). $\mathcal{B}$, X 'in topolojisi için bir baz ve $\mathcal{C}$, Y 'nin topolojisi için bir baz olsun. O zaman

$$\mathcal{D} = \{B \times C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

ailesi, $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi için bir bazdır.

İspat.

Hatırlatmadaki baz ölçütünü uygulayacağız. Bunun için iki şey gerekir: $\mathcal{D}$ 'nin elemanlarının $X \times Y$ 'de açık olması ve her açık kümenin her noktasının, o kümenin içinde kalan bir $\mathcal{D}$ elemanına düşmesi.

Önce $\mathcal{D}$ 'nin elemanları açıktır: $B \in \mathcal{B}$ olsun. Baz elemanları ürettikleri topolojide açık olduğundan B , X 'te açıktır; aynı gerekçeyle $C \in \mathcal{C}$ kümesi Y 'de açıktır. Bu yüzden $B \times C$ çarpım topolojisinin bir baz elemanıdır, dolayısıyla $X \times Y$ 'de açıktır.

Şimdi $X \times Y$ 'nin açık bir W kümesi ve bir $(x, y) \in W$ noktası verilsin. Çarpım topolojisinin tanımı gereği $(x, y) \in U \times V \subseteq W$ olacak biçimde X 'te açık bir U ve Y 'de açık bir V vardır. $(x, y) \in U \times V$ olduğundan $x \in U$ ve $y \in V$ 'dir.

$\mathcal{B}$, X 'in topolojisi için bir baz ve U , x 'i içeren açık bir küme olduğundan, bazın ürettiği topolojinin tanımı gereği $x \in B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ seçebiliriz. Aynı biçimde $\mathcal{C}$, Y için bir baz ve V , y 'yi içeren açık bir küme olduğundan $y \in C \subseteq V$ olacak biçimde bir $C \in \mathcal{C}$ seçebiliriz.

$x \in B$ ve $y \in C$ olduğundan $(x, y) \in B \times C$ 'dir. Ayrıca $B \subseteq U$ ve $C \subseteq V$ olduğundan $B \times C \subseteq U \times V$ 'dir; çünkü $(a, b) \in B \times C$ ise $a \in B \subseteq U$ ve $b \in C \subseteq V$, dolayısıyla $(a, b) \in U \times V$. Böylece

$$(x, y) \in B \times C \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Bu, $\mathcal{D}$ ailesinin baz ölçütünün koşulunu sağladığını gösterir: her açık W ve her $(x, y) \in W$ için $(x, y) \in D \subseteq W$ olacak biçimde bir $D = B \times C \in \mathcal{D}$ vardır. Bu yüzden $\mathcal{D}$, $X \times Y$ 'nin çarpım topolojisi için bir bazdır.

■

İspatın özü: bir açık dikdörtgen $U \times V$ 'nin içindeki her noktayı, U 'nin içinde bir $\mathcal{B}$ elemanı ve V 'nin içinde bir $\mathcal{C}$ elemanı sıkıştırıp daha küçük bir dikdörtgen $B \times C$ elde ederiz.

10.3 Düzlemin Standart Topolojisi

$\mathbb{R}$ üzerinde standart bir topolojimiz var: [Sıra Topolojisi](#) bölümünde gördüğümüz gibi bu, $\mathbb{R}$ 'nin alışılmış sıralamasından gelen sıra topolojisidir ve $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralıkları onun için bir bazdır. Bu topolojinin kendisiyle çarpımı, düzlemin alışılmış topolojisini verir.

Örnek 10.2 (Düzlemin Standart Topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojinin kendisiyle çarpımına $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ üzerindeki **standart topoloji** denir. Şunu gösteriniz:

$$\mathcal{D} = \{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$$

ailesi $\mathbb{R}^2$ 'nin standart topolojisi için bir bazdır.

Çözüm.

Tanım gereği $\mathbb{R}^2$ 'nin standart topolojisinin bazı, U ve V , $\mathbb{R}$ 'de açık olmak üzere bütün $U \times V$ kümelerinden oluşur. Bu aile çok büyüktür; çünkü $\mathbb{R}$ 'nin bir açık kümesi sonsuz sayıda aralığın birleşimi olabilir. [Teorem 10.1](#) çok daha küçük bir ailenin yeterli olduğunu söyler.

$\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ açık aralıklar ailesi $\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisi için bir bazdır. Teoremden hem $X = \mathbb{R}$ hem de $Y = \mathbb{R}$ için bu bazı alalım: $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Teorem gereği

$$\{B \times C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\} = \{(a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\} = \mathcal{D}$$

ailesi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 'nin çarpım topolojisi, yani $\mathbb{R}^2$ 'nin standart topolojisi için bir bazdır.

Her $(a, b) \times (c, d)$ kümesi, köşeleri (a, c) , (b, c) , (b, d) , (a, d) olan dikdörtgenin kenarları hariç içidir; çünkü $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ olması $a < x < b$ ve $c < y < d$ demektir. Sonuç olarak $\mathbb{R}^2$ 'nin standart topolojisi, [Baz ve Alt Baz](#) bölümünde düzlemdeki açık dikdörtgenlerin ürettiği topoloji olarak incelediğimiz topolojinin ta kendisidir.

■

Bu örnek, çarpım topolojisinin tanımını ilk bakışta soyut kılan büyük bazın aslında zararsız olduğunu gösterir: düzlemde bir kümenin açık olup olmadığını anlamak için her noktasının etrafına açık bir dikdörtgen sığdırabilmek yeterlidir.

10.4 İzdüşümler

Çarpım uzayı $X \times Y$ ile çarpanları X ve Y arasında iki doğal fonksiyon vardır: bir noktanın birinci ve ikinci bileşenini veren fonksiyonlar.

Tanım 10.2 (İzdüşüm Fonksiyonları). X ve Y topolojik uzaylar olsun.

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X, \quad \pi_1(x, y) = x$$

ve

$$\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y, \quad \pi_2(x, y) = y$$

fonksiyonlarına sırasıyla $X \times Y$ 'nin **birinci çarpana izdüşümü** ve **ikinci çarpana izdüşümü** (projections onto the first and second factors) denir.

Yani π_1 bir noktanın birinci koordinatını, π_2 ikinci koordinatını verir; düzlemde $\pi_1, (x, y)$ noktasını yatay eksene, π_2 ise dikey eksene dik olarak yansıtır.

İzdüşümlerin bizi ilgilendiren özellikleri şunlardır: çarpanlar boş değilse izdüşümler örtendir ve açık bir kümenin izdüşüm altındaki ters görüntüsü bir “şerit”tir. Bu şeritler bir sonraki teoremin yapı taşlarıdır.

Önerme 10.1 (İzdüşümlerin Temel Özellikleri). X ve Y topolojik uzaylar olsun.

1. $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ ise π_1 ve π_2 örtendir.
2. Her $U \subseteq X$ ve her $V \subseteq Y$ için

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y \quad \text{ve} \quad \pi_2^{-1}(V) = X \times V.$$

Özel olarak U, X 'te açık ise $\pi_1^{-1}(U)$ kümesi $X \times Y$ 'de açıktır; V, Y 'de açık ise $\pi_2^{-1}(V)$ kümesi $X \times Y$ 'de açıktır.

3. Her $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ için

$$\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = U \times V.$$

İspat.

1. π_1 'in örten olduğunu gösterelim. Bir $x \in X$ verilsin. $Y \neq \emptyset$ olduğundan bir $y_0 \in Y$ elemanı seçebiliriz. O zaman $(x, y_0) \in X \times Y$ ve tanım gereği $\pi_1(x, y_0) = x$ 'tir. Yani X 'in her elemanı π_1 'in görüntüsündedir; π_1 örtendir. Aynı biçimde, bir $y \in Y$ verildiğinde $X \neq \emptyset$ olduğundan bir $x_0 \in X$ seçilir ve $\pi_2(x_0, y) = y$ olur; bu yüzden π_2 de örtendir.
2. Ters görüntünün tanımını hatırlayalım: $\pi_1^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y : \pi_1(x, y) \in U\}$. Bir $(x, y) \in X \times Y$ noktası için

$$(x, y) \in \pi_1^{-1}(U) \Leftrightarrow \pi_1(x, y) \in U \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow (x, y) \in U \times Y;$$

son denklekte $y \in Y$ koşulunun zaten sağlandığını kullandık. Bu yüzden $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$. Aynı biçimde

$$(x, y) \in \pi_2^{-1}(V) \Leftrightarrow \pi_2(x, y) \in V \Leftrightarrow y \in V \Leftrightarrow (x, y) \in X \times V,$$

yani $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$.

Şimdi U, X 'te açık olsun. Y kümesi (T1) gereği Y 'de açık olduğundan $U \times Y$ çarpım topolojisinin bir baz elemanıdır; baz elemanları açık olduğundan $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ kümesi $X \times Y$ 'de açıktır. Aynı gerekçeyle V, Y 'de açık ise $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ kümesi de $X \times Y$ 'de açıktır.

3. Madde 2 ve [Lemma 10.1](#)'daki kesişim eşitliği gereği

$$\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = (U \cap X) \times (Y \cap V) = U \times V;$$

burada $U \subseteq X$ olduğundan $U \cap X = U$ ve $V \subseteq Y$ olduğundan $Y \cap V = V$ olduğunu kullandık.

■

Düzlemde düşünürsek: $U \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık iken $\pi_1^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}$ sonsuz uzunlukta dikey bir şerit, V açık bir aralık iken $\pi_2^{-1}(V) = \mathbb{R} \times V$ yatay bir şerittir. İki şeridin kesiştiği yer tam olarak $U \times V$

dikdörtgenidir. Demek ki çarpım topolojisinin her baz elemanı, izdüşüm ters görüntülerinden iki tanesinin kesişimi olarak yazılabilir. Bu gözlem bizi bir sonraki teoreme götürür.

i Boş çarpan durumu

X ya da Y boş kümeysse $X \times Y$ de boştur; o zaman $X \times Y$ üzerindeki tek topoloji $\{\emptyset\}$ 'dir ve izdüşümlerle ilgili bütün tartışma boş kümeden ibaret kalır. Bu yüzden izdüşümler için "örten" derken çarpanların boş olmadığını varsayıyoruz. Aşağıdaki teorem ise boş durumda da doğrudur; ispatı boş durumu ayrıca ele almayı gerektirmez.

10.5 Çarpım Topolojisinin Alt Bazı

Bir topolojiyi bazla vermek yerine alt bazla vermek, onu daha az ve daha basit kümeyle betimlemek demektir: sonlu kesişimleri alma işini topolojiye bırakırız. Çarpım topolojisi için en doğal alt baz, izdüşümlerin açık kümeler üzerindeki ters görüntüleridir; çünkü az önce gördüğümüz gibi her baz elemanı $U \times V$, iki ters görüntünün kesişimidir.

Teorem 10.2 (İzdüşüm Ters Görüntüleri Bir Alt Bazdır). X ve Y topolojik uzaylar olsun.

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \subseteq X \text{ açık}\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \subseteq Y \text{ açık}\}$$

ailesi, $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi için bir alt bazdır.

İspat.

τ , $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisini; τ' ise $\mathcal{S}$ 'nin ürettiği topolojiyi gösterebiliriz. Göstermemiz gereken şey $\tau' = \tau$ eşitliğidir; bunu iki kapsama olarak ispatlayacağız. Önce $\mathcal{S}$ 'nin gerçekten bir alt baz olduğunu, yani birleşiminin $X \times Y$ olduğunu görelim: X , X 'te açık olduğundan $\pi_1^{-1}(X) = X \times Y$ kümesi $\mathcal{S}$ 'nin bir elemanıdır (Önerme 10.1, madde 2); bu yüzden $\mathcal{S}$ 'nin birleşimi $X \times Y$ 'ye eşittir ve τ' tanımlıdır.

$\tau' \subseteq \tau$. $\mathcal{S}$ 'nin her elemanı τ 'ya aittir: U , X 'te açık ise $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ ve V , Y 'de açık ise $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ kümeleri Önerme 10.1 gereği $X \times Y$ 'de açıktır. Şimdi τ' 'nin bir elemanını alalım; alt bazın ürettiği topolojinin tanımı gereği bu, $\mathcal{S}$ 'nin elemanlarının sonlu kesişimlerinin bir birleşimidir. Bu sonlu kesişimlerin her biri τ 'dadır; çünkü kesişilen kümeler τ 'da ve τ , aksiyom (T2) gereği sonlu kesişim altında kapalıdır (ikiden çok küme için aksiyom art arda uygulanır). Bunların birleşimi de τ 'dadır; çünkü τ , aksiyom (T3) gereği keyfi birleşim altında kapalıdır. Böylece τ' 'nin her elemanı τ 'ya aittir; yani $\tau' \subseteq \tau$. $\tau \subseteq \tau'$. Önce τ 'nin baz elemanlarının τ' 'de olduğunu görelim. $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ açık olmak üzere bir $U \times V$ baz elemanı alalım. Önerme 10.1, madde 3 gereği

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

Sağ taraf, $\mathcal{S}$ 'nin iki elemanının kesişimidir; yani $\mathcal{S}$ elemanlarının sonlu bir kesişimidir. Alt bazın ürettiği topoloji bütün bu sonlu kesişimleri (tek elemanlı birleşim olarak) içerdüğünden $U \times V \in \tau'$ olur.

Şimdi τ' 'nin herhangi bir W elemanını alalım. Bazın ürettiği topolojinin tanımı gereği W , baz elemanlarının bir birleşimidir: $W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$ olacak biçimde açık $U_i \subseteq X$ ve $V_i \subseteq Y$ kümeleri vardır. Az önce gösterdiğimiz gibi her $U_i \times V_i$ kümesi τ' 'ye aittir. τ' bir topoloji olduğundan keyfi birleşim altında kapalıdır; bu yüzden $W \in \tau'$. Böylece $\tau \subseteq \tau'$.

İki kapsama birlikte $\tau = \tau'$ verir; yani $\mathcal{S}$ 'nin ürettiği topoloji çarpım topolojisinin ta kendisidir. Bu da $\mathcal{S}$ 'nin çarpım topolojisi için bir alt baz olması demektir.

■

İspatın özü: şeritler açıktır, dolayısıyla şeritlerden üretilen topoloji çarpım topolojisinden daha ince olamaz; öte yandan her dikdörtgen iki şeridin kesişimi olduğundan çarpım topolojisinin bütün açık kümeleri şeritlerden üretilebilir.

⚠ Alt baz, baz olmak zorunda değildir

$\mathcal{S}$ ailesi genel olarak bir baz **değildir**. $\mathbb{R}^2$ 'de $(0, 1) \times (0, 1)$ açık dikdörtgenini ve içindeki $(1/2, 1/2)$ noktasını düşünelim. $\mathcal{S}$ 'nin her elemanı ya $U \times \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{R} \times V$ biçimindedir. $(1/2, 1/2)$ noktasını içeren bir $U \times \mathbb{R}$ şeridi $(1/2, 5)$ noktasını da içerir; $\mathbb{R} \times V$ şeridi ise $(5, 1/2)$ noktasını içerir. Bu noktaların hiçbirisi $(0, 1) \times (0, 1)$ 'de değildir. Bu yüzden $(1/2, 1/2)$ noktasını içerip $(0, 1) \times (0, 1)$ 'in içinde kalan bir $\mathcal{S}$ elemanı yoktur; oysa bir baz için bu gerekirdi. Alt bazın gücü tam da burada: sonlu kesişimler alınmadan önce bu kümeler dikdörtgenleri yakalayamaz, kesişimler alındıktan sonra yakalar.

10.6 Alıştırmalar

- Alıştırma 10.1 (Çarpım Topolojisi Üzerine Alıştırmalar).** a) $X = \{1, 2\}$ üzerinde $\tau_X = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ topolojisi, $Y = \{a, b\}$ üzerinde ayrık topoloji verilsin. $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisinin bazını ve bütün açık kümelerini bulunuz. $\{(2, a)\}$ kümesi açık mıdır?
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ kümesinin (sağ yarı düzlem) $\mathbb{R}^2$ 'nin standart topolojisinde açık olduğunu gösteriniz.
c) Açık birim daire $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ 'nin standart topolojisinde açık olduğunu gösteriniz.
d) Köşegen $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ 'nin standart topolojisinde kapalı olduğunu gösteriniz.
e) X ve Y ayrık topolojiye sahipse $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisinin de ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.
f) $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ kapalı kümelerse $A \times B$ kümesinin $X \times Y$ 'de kapalı olduğunu gösteriniz.
g) $W \subseteq X \times Y$ açık ise $\pi_1(W)$ kümesinin X 'te ve $\pi_2(W)$ kümesinin Y 'de açık olduğunu gösteriniz. (Yani izdüşümler açık kümeleri açık kümelere götürür.)

Çözüm.

a) $X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$. Y üzerindeki ayrık topolojide $\emptyset, \{a\}, \{b\}, Y$ kümeleri açıktır. Boş olmayan baz elemanları $U \in \{\{1\}, X\}$ ve $V \in \{\{a\}, \{b\}, Y\}$ olmak üzere $U \times V$ kümeleridir:

$$\{(1, a)\}, \{(1, b)\}, \{(1, a), (1, b)\}, \{(1, a), (2, a)\}, \{(1, b), (2, b)\}, X \times Y.$$

Açık kümeler bunların birleşimleridir. $\{(1, a)\}$ ve $\{(1, b)\}$ ayrı ayrı açık olduğundan, 1'i birinci bileşen olarak taşıyan noktaların her alt kümesi açıktır; $(2, a)$ ve $(2, b)$ noktaları ise yalnızca sırasıyla $\{(1, a), (2, a)\}, \{(1, b), (2, b)\}$ ve $X \times Y$ baz elemanlarında bulunur. Birleşimleri tek tek yazarsak açık kümeler şunlardır:

$$\emptyset, \{(1, a)\}, \{(1, b)\}, \{(1, a), (1, b)\}, \{(1, a), (2, a)\}, \{(1, b), (2, b)\}, \{(1, a), (1, b), (2, a)\}, \{(1, a), (1, b), (2, b)\}, X \times Y.$$

Toplam dokuz açık küme vardır. $\{(2, a)\}$ açık değildir: $(2, a)$ noktasını içeren bir baz elemanı $U \times V$ 'de $2 \in U$ olmalıdır, τ_X 'te 2'yi içeren tek açık küme X olduğundan $U = X$ 'tir; o zaman $(1, a) \in U \times V$ olur. Yani $(2, a) \in U \times V \subseteq \{(2, a)\}$ olacak biçimde bir baz elemanı yoktur.

b) $A = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 'dir; çünkü $(x, y) \in A$ olması $x \in (0, \infty)$ ve $y \in \mathbb{R}$ olması demektir. $(0, \infty)$ kümesi $\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisinde açıktır (her $x > 0$ için $x \in (0, 2x) \subseteq (0, \infty)$ olduğundan) ve $\mathbb{R}$ açıktır. Bu yüzden $A = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ çarpım topolojisinin bir baz elemanıdır, dolayısıyla açıktır. Başka bir deyişle $A = \pi_1^{-1}((0, \infty))$ bir alt baz elemanıdır.

c) Her $(x_0, y_0) \in D$ noktası için $(x_0, y_0) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq D$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ bulmak yeterlidir; çünkü o zaman **Örnek 10.2**'deki baz elemanları D 'nin her noktasının etrafına sığar ve D açık olur.

$(x_0, y_0) \in D$ olsun ve $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ diyelim; $r_0 < 1$ 'dir. $\delta = (1 - r_0)/2 > 0$ seçelim. Bir $(x, y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ noktası alalım. O zaman $|x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta$ olduğundan

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} = \sqrt{2}\delta < 2\delta = 1 - r_0.$$

Üçgen eşitsizliği gereği (x, y) noktasının başlangıç noktasına uzaklığı, (x_0, y_0) 'ın uzaklığı ile iki nokta arasındaki uzaklığın toplamını aşmaz:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r_0 + (1 - r_0) = 1.$$

Bu yüzden $(x, y) \in D$. Böylece D 'nin her noktası, D 'nin içinde kalan açık bir dikdörtgene aittir; D açıktır.

d) Tümlenyeni $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta = \{(a, b) : a \neq b\}$ kümesinin açık olduğunu göstereceğiz. $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ olsun; $a \neq b$ olduğundan $\varepsilon = |a - b|/2 > 0$ 'dır. $R = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ dikdörtgenini alalım. $|a - a| = 0 < \varepsilon$ ve $|b - b| = 0 < \varepsilon$ olduğundan $(a, b) \in R$ 'dir. İddia: $R \cap \Delta = \emptyset$. Aksine $(x, x) \in R$ olsaydı $|a - x| < \varepsilon$ ve $|x - b| < \varepsilon$ olur, üçgen eşitsizliğiyle

$$|a - b| \leq |a - x| + |x - b| < 2\varepsilon = |a - b|$$

çelişkisi çıkardı. Bu yüzden $R \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Tümlenyenin her noktası, tümlenyenin içinde kalan bir baz elemanına ait olduğundan $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ açıktır; dolayısıyla Δ kapalıdır.

e) Bir $(x, y) \in X \times Y$ noktası alalım. Ayırık topolojide her alt küme açık olduğundan $\{x\}$, X 'te ve $\{y\}$, Y 'de açıktır. Bu yüzden $\{x\} \times \{y\} = \{(x, y)\}$ çarpım topolojisinin bir baz elemanıdır, dolayısıyla açıktır. Şimdi herhangi bir $W \subseteq X \times Y$ alalım; $W = \bigcup_{(x,y) \in W} \{(x, y)\}$ açık kümelerin birleşimi olduğundan (T3) gereği açıktır. Her alt küme açık olduğuna göre çarpım topolojisi ayırık topolojidir.

f) Önce bir küme eşitliği: $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$. Gerçekten, $(x, y) \in X \times Y$ noktası $A \times B$ 'de değildir ancak ve ancak " $x \in A$ ve $y \in B$ " yanlıştır, yani $x \notin A$ veya $y \notin B$ 'dir; ilk durum $(x, y) \in (X \setminus A) \times Y$, ikincisi $(x, y) \in X \times (Y \setminus B)$ demektir.

A kapalı olduğundan $X \setminus A$ açıktır ve Y açıktır; bu yüzden $(X \setminus A) \times Y$ bir baz elemanı, dolayısıyla açıktır. Aynı gerekçeyle $X \times (Y \setminus B)$ açıktır. İki açık kümenin birleşimi (T3) gereği açık olduğundan $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ açıktır; yani $A \times B$ kapalıdır.

g) W açık olduğundan baz elemanlarının birleşimidir: $W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$, burada her U_i , X 'te ve her V_i , Y 'de açıktır. $V_i = \emptyset$ olan indisler için $U_i \times V_i = \emptyset$ olduğundan bunları birleşimden atabiliriz; bu yüzden her $i \in I$ için $V_i \neq \emptyset$ varsayalım. İddia: $\pi_1(W) = \bigcup_{i \in I} U_i$.

$x \in \pi_1(W)$ ise $\pi_1(x, y) = x$ olan bir $(x, y) \in W$ vardır; (x, y) bir $U_i \times V_i$ 'ye aittir, dolayısıyla $x \in U_i$. Tersine $x \in U_i$ ise $V_i \neq \emptyset$ olduğundan bir $y \in V_i$ seçilir, $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq W$ ve $\pi_1(x, y) = x$ olur; yani $x \in \pi_1(W)$. Böylece $\pi_1(W) = \bigcup_{i \in I} U_i$, açık kümelerin birleşimi olarak (T3) gereği X 'te açıktır. $\pi_2(W) = \bigcup_{i \in I} V_i$ eşitliği de aynı biçimde gösterilir ($U_i = \emptyset$ olan terimler atılarak) ve $\pi_2(W)$, Y 'de açıktır.

■

Çarpım uzayı, verilen uzaylardan yeni uzay kurmanın ilk yoluydu; şimdi bir uzayın alt kümelerine, o uzaydan miras kalan doğal topolojiyi vereceğiz: **Alt Uzay Topolojisi**.

11. Alt Uzak Topolojisi

Çarpım Topolojisi bölümünde iki topolojik uzaydan yeni bir topolojik uzay kurduk. Bu bölümde ters yönde bir soru soruyoruz: elimizde bir (X, τ) topolojik uzayı ve onun bir $Y \subseteq X$ alt kümesi varsa, Y üzerinde X 'in topolojisinden “miras kalan” doğal bir topoloji var mıdır? Örneğin $[0, 1]$ aralığı gerçel doğrunun bir alt kümesidir; $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiyi kullanarak $[0, 1]$ üzerinde bir topoloji tanımlayabilir miyiz?

Cevap evet ve yöntem çok basittir: X 'in her açık kümesini Y ile kesiştiririz. Elde edilen kesişimlerin ailesi Y üzerinde bir topolojidir; buna **alt uzak topolojisi** (subspace topology) denir. Bu bölümde önce bu ailenin topoloji aksiyomlarını sağladığını doğrulayacak, sonra X 'in bir bazından Y 'nin bir bazını nasıl elde edeceğimizi göreceğiz. Ardından dikkat gerektiren bir ayrımı ele alacağız: bir kümenin “ Y 'de açık” olması ile “ X 'te açık” olması aynı şey değildir.

Bölümün ikinci yarısında alt uzak topolojisinin daha önce kurduğumuz iki topolojiyle ilişkisini inceleyeceğiz. Çarpım topolojisiyle ilişki beklendiği gibidir: $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ alt uzayları için $A \times B$ üzerinde çarpım topolojisi ile $X \times Y$ 'den miras kalan alt uzak topolojisi aynıdır. Sıra topolojisiyle ilişki ise beklenmedik bir biçimde bozulabilir: sıralı bir kümenin alt kümesi üzerinde sıra topolojisi ile alt uzak topolojisi bazen çakışır, bazen çakışmaz. Her iki durumu da somut örneklerle göreceğiz.

i Hatırlatma: topoloji aksiyomları, baz ölçütü, çarpım ve sıra topolojileri

Bu bölümde önceki bölümlerden şunları kullanacağız.

- **Topoloji Tanımı ve İlk Örnekler** bölümündeki tanıma göre X kümesi üzerinde bir $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesi üç aksiyomu sağlıyorsa topolojidir: **(T1)** $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$; **(T2)** τ 'nin iki (dolayısıyla sonlu sayıda) elemanının kesişimi τ 'dadır; **(T3)** τ 'nin herhangi bir alt ailesinin birleşimi τ 'dadır.
- **Baz ve Alt Baz** bölümündeki **baz ölçütü**: (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{C}$ ise X 'in açık kümelerinden oluşan bir aile olsun. Her açık $U \subseteq X$ ve her $x \in U$ için $x \in C \subseteq U$ olacak biçimde bir $C \in \mathcal{C}$ varsa $\mathcal{C}$, τ için bir bazdır. Ayrıca $\mathcal{B}$ bir bazsa, ürettiği topolojide açık kümeler tam olarak $\mathcal{B}$ 'nin elemanlarının birleşimleridir; özel olarak her baz elemanı açıktır.
- **Çarpım Topolojisi** bölümüne göre $X \times Y$ üzerindeki **çarpım topolojisi**, $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ açık olmak üzere bütün $U \times V$ kümelerinden oluşan bazın ürettiği topolojidir.
- **Sıra Topolojisi** bölümüne göre tam sıralı bir $(X, <)$ kümesinde **sıra topolojisinin** bazı üç tür kümeden oluşur: $a < b$ için açık aralıklar (a, b) ; X 'in en küçük elemanı a_0 varsa $[a_0, b)$ aralıkları; X 'in en büyük elemanı b_0 varsa $(a, b_0]$ aralıkları. Gerçel sayılar üzerindeki sıra topolojisi standart topolojidir; bazı açık aralıklardır.

11.1 Alt Uzak Topolojisinin Tanımı

(X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y 'nin kendi başına bir topolojik uzay olmasını, ama açık kümelerinin X 'in açık kümelerinden gelmesini istiyoruz. X 'in açık bir U kümesi genel olarak Y 'nin alt kümesi değildir; Y 'nin içinde kalan kısmı $Y \cap U$ kesişimidir. İşte bu kesişimleri Y 'nin açık kümeleri ilan edeceğiz.

Tanım 11.1 (Alt Uzak Topolojisi). (X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ bir alt küme olsun.

$$\tau_Y = \{ Y \cap U : U \in \tau \}$$

ailesine Y üzerindeki **alt uzak topolojisi** (subspace topology) denir. τ_Y topolojisiyle donatılmış Y kümesine X 'in bir **alt uzayı** (subspace) denir.

Yani Y 'nin açık kümeleri, X 'in açık kümelerinin Y ile bütün kesişimleridir: X 'te açık olan her kümeyi alır, Y 'nin dışında kalan parçasını atarız; geriye kalan, Y 'de açıktır. Bu tanım τ_Y 'nin bir aile olduğunu söyler;

onun gerçekten bir topoloji olduğunu, yani (T1)–(T3) aksiyomlarını sağladığını göstermemiz gerekir. Bu doğrulama olmadan “alt uzak topolojisi” adı yalnızca bir isimden ibaret kalır.

Teorem 11.1 (Alt Uzak Topolojisi Bir Topolojidir). (X, τ) bir topolojik uzak ve $Y \subseteq X$ olsun. $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ ailesi Y üzerinde bir topolojidir.

İspat.

Üç aksiyomu sırayla kontrol edeceğiz. Her adımda kullanacağımız tek şey, τ 'nın X üzerinde bir topoloji olması ve basit küme eşitlikleridir.

(T1) $\emptyset \in \tau_Y$ ve $Y \in \tau_Y$ olmalıdır. τ bir topoloji olduğundan (T1) gereği $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$. Şimdi

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \quad \text{ve} \quad Y = Y \cap X$$

yazabiliriz. Birinci eşitlik doğrudur, çünkü boş kümeyle kesişim boştur. İkinci eşitlik doğrudur, çünkü $Y \subseteq X$ olduğundan Y 'nin her elemanı X 'tedir; dolayısıyla $Y \cap X = Y$. Her iki küme de “ $Y \cap (\tau$ ’nın bir elemanı)” biçiminde olduğundan tanım gereği τ_Y ’ye aittir.

(T2) τ_Y ’nin iki elemanın kesişiminin τ_Y ’de olduğunu gösterelim. $W_1, W_2 \in \tau_Y$ olsun. Tanım gereği $W_1 = Y \cap U_1$ ve $W_2 = Y \cap U_2$ olacak biçimde $U_1, U_2 \in \tau$ vardır. Kesişim işleminin değişme ve birleşme özellikleri ile $Y \cap Y = Y$ eşitliğinden

$$W_1 \cap W_2 = (Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) = Y \cap (U_1 \cap U_2)$$

elde edilir. τ bir topoloji olduğundan (T2) gereği $U_1 \cap U_2 \in \tau$. O hâlde $W_1 \cap W_2, Y$ ile τ ’nın bir elemanının kesişimidir; yani $W_1 \cap W_2 \in \tau_Y$. Aynı akıl yürütme tümevarımla sonlu sayıda kümeye genişler: $U_1, \dots, U_n \in \tau$ için

$$(Y \cap U_1) \cap \dots \cap (Y \cap U_n) = Y \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n)$$

ve sağ taraftaki parantez τ ’dadır.

(T3) τ_Y ’nin herhangi bir alt ailesinin birleşiminin τ_Y ’de olduğunu gösterelim. $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}, \tau_Y$ ’nin elemanlarından oluşan bir aile olsun. Her $\alpha \in J$ için $W_\alpha = Y \cap U_\alpha$ olacak biçimde bir $U_\alpha \in \tau$ seçelim. İddia ediyoruz ki

$$\bigcup_{\alpha \in J} (Y \cap U_\alpha) = Y \cap \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right).$$

Bunu iki yönlü kapsama ile gösterelim. x sol taraftaki birleşimde olsun; o zaman bir α için $x \in Y \cap U_\alpha$, yani $x \in Y$ ve $x \in U_\alpha$. $x \in U_\alpha$ olduğundan x, U_α ’ların birleşimindedir; $x \in Y$ ile birlikte x sağ taraftadır. Tersine x sağ tarafta olsun; o zaman $x \in Y$ ve x, U_α ’ların birleşimindedir, yani bir α için $x \in U_\alpha$. Dolayısıyla $x \in Y \cap U_\alpha$ ve x sol taraftaki birleşimdedir.

τ bir topoloji olduğundan (T3) gereği $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$. Böylece $\bigcup_{\alpha \in J} W_\alpha, Y$ ile τ ’nın bir elemanının kesişimi olarak τ_Y ’ye aittir.

Üç aksiyom da sağlandığından τ_Y, Y üzerinde bir topolojidir.

■

İspatın özü: “ Y ile kesiştirme” işlemi kesişimle ve birleşimle uyumludur; bu yüzden τ ’nın aksiyomları doğrudan τ_Y ’ye aktarılır.

Tanımı birkaç basit durumda deneyelim. Bu örnekler hem tanımın nasıl işlediğini gösterir hem de ileride sık kullanacağımız iki gerçeği verir: ayrık uzayın her alt uzayı ayrıktır, en kaba topolojinin her alt uzayı en kaba topolojiyi taşır.

Örnek 11.1 (Alt Uzak Topolojisinin İlk Örnekleri). a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, X\}$ topolojisini alalım (τ bir topolojidir: $\emptyset$ ve X ailededir; elemanları $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq X$ biçiminde iç içe bir zincir oluşturduğundan, herhangi bir alt ailenin kesişimi o alt ailenin en küçük elemanı, birleşimi en büyük elemanıdır; ikisi de τ ’dadır). $Y = \{2, 4\}$ alt uzayının topolojisini bulalım.

b) (X, τ) ayrık topolojik uzak olsun, yani $\tau = \mathcal{P}(X)$. Her $Y \subseteq X$ için τ_Y ’nin Y üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösterelim.

c) (X, τ) en kaba topolojiyi taşıyın, yani $\tau = \{\emptyset, X\}$. Her $Y \subseteq X$ için $\tau_Y = \{\emptyset, Y\}$ olduğunu gösterelim.

d) $\mathbb{R}$ standart topolojiyle verilsin ve $Y = (0, 1)$ olsun. $(0, 1)$ aralığının bir alt kümesinin Y ’de açık olması ile $\mathbb{R}$ ’de açık olması aynı şey midir?

Çözüm.

a) τ_Y 'nin elemanlarını bulmak için τ 'nın her elemanını $Y = \{2, 4\}$ ile kesiştiririz:

$$Y \cap \emptyset = \emptyset, \quad Y \cap \{1\} = \emptyset, \quad Y \cap \{1, 2\} = \{2\}, \quad Y \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}, \quad Y \cap X = \{2, 4\}.$$

Dolayısıyla $\tau_Y = \{\emptyset, \{2\}, \{2, 4\}\}$. Farklı açık kümelerin Y ile kesişimlerinin çıkışabildiğine dikkat edin: $\{1\}$ ve $\emptyset$ aynı kesişimi, $\{1, 2\}$ ve $\{1, 2, 3\}$ aynı kesişimi verdi. $\{4\}$ kümesi Y 'de açık değildir, çünkü τ 'nın 4'ü içeren tek elemanı X 'tir ve $Y \cap X = \{2, 4\} \neq \{4\}$.

b) $W \subseteq Y$ herhangi bir alt küme olsun. $Y \subseteq X$ olduğundan $W \subseteq X$ 'tir ve ayrık topolojide her alt küme açık olduğundan $W \in \tau$. $W \subseteq Y$ olduğundan $Y \cap W = W$; yani W , Y ile τ 'nın bir elemanının kesişimidir ve $W \in \tau_Y$. Y 'nin her alt kümesi τ_Y 'de olduğuna göre $\tau_Y = \mathcal{P}(Y)$, yani Y üzerindeki ayrık topolojidir.

c) τ 'nin yalnızca iki elemanı vardır; kesişimler $Y \cap \emptyset = \emptyset$ ve $Y \cap X = Y$ 'dir. O hâlde $\tau_Y = \{\emptyset, Y\}$, yani Y üzerindeki en kaba topolojidir.

d) Evet. Bir $W \subseteq (0, 1)$ kümesi alalım. W , Y 'de açıksa $\mathbb{R}$ 'de açık bir U için $W = (0, 1) \cap U$ 'dur; $(0, 1)$ ve U ikisi de $\mathbb{R}$ 'de açık olduğundan (T2) gereği kesişimleri de $\mathbb{R}$ 'de açıktır. Tersine W , $\mathbb{R}$ 'de açıksa $W \subseteq (0, 1)$ olduğundan $W = (0, 1) \cap W$ yazılır ve bu, W 'nin Y 'de açık olduğunu gösterir. Bu iki yönlü uyumun nedeni $Y = (0, 1)$ 'in kendisinin $\mathbb{R}$ 'de açık olmasıdır; bunu birazdan genel olarak ispatlayacağız.

■

11.2 Alt Uzakın Bazı

Bir topolojiyi bütün açık kümelerini sıralayarak değil, bir bazını vererek tanımlamak çoğu zaman daha kolaydır. X 'in bir $\mathcal{B}$ bazı elimizdeyse Y alt uzayı için de hazır bir baz elde edebilir miyiz? Doğal aday, baz elemanlarının Y ile kesişimleridir. Aşağıdaki lemma bu adayın işe yaradığını söyler; örneğin $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesi üzerinde alt uzak topolojisini incelerken bütün açık kümelerle değil, yalnızca açık aralıklarla uğraşmamıza izin verir.

Lemma 11.1 (Alt Uzak Topolojisinin Bazı). (X, τ) bir topolojik uzak, $\mathcal{B}$ bu topoloji için bir baz ve $Y \subseteq X$ olsun. O zaman

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

ailesi, Y üzerindeki τ_Y alt uzak topolojisi için bir bazdır.

İspat.

Baz ölçütünü (Y, τ_Y) uzayında uygulayacağız. Bunun için iki şey göstermeliyiz: $\mathcal{B}_Y$ 'nin her elemanı Y 'de açıktır ve Y 'nin her açık kümesinin her noktası, o kümenin içinde kalan bir $\mathcal{B}_Y$ elemanına aittir.

$\mathcal{B}_Y$ 'nin elemanları Y 'de açıktır. $B \in \mathcal{B}$ olsun. Her baz elemanı ürettiği topolojide açık olduğundan $B \in \tau$. O hâlde $B \cap Y = Y \cap B$, Y ile τ 'nın bir elemanının kesişimidir; tanım gereği $B \cap Y \in \tau_Y$.

Baz ölçütünün ikinci koşulu. W , Y 'de açık bir küme ve $y \in W$ olsun. $W \in \tau_Y$ olduğundan X 'te açık bir U için $W = U \cap Y$ 'dir. $y \in W$ olduğundan $y \in U$ ve $y \in Y$. $\mathcal{B}$, X 'in topolojisi için bir baz ve U , X 'te açık olduğundan bazın ürettiği topolojinin tanımı gereği $y \in B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. Şimdi $y \in B$ ve $y \in Y$ olduğundan $y \in B \cap Y$; ayrıca $B \subseteq U$ olduğundan $B \cap Y \subseteq U \cap Y = W$. Böylece

$$y \in B \cap Y \subseteq W$$

ve $B \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ 'dir. İstenen tam olarak buydu.

Baz ölçütü gereği $\mathcal{B}_Y, \tau_Y$ için bir bazdır.

■

İspatın özü: X 'te y 'yi U 'nun içinde yakalayan baz elemanını Y ile kesiştirince, Y 'de y 'yi $U \cap Y$ 'nin içinde yakalayan bir küme elde edilir.

Bu lemmanın ilk sonucu, gerçel sayıların alt kümeleri için şudur: $Y \subseteq \mathbb{R}$ üzerindeki alt uzak topolojisinin bir bazı, $a < b$ gerçel sayıları için $(a, b) \cap Y$ biçimindeki kümelerden oluşur. Örneğin $\mathbb{Q}$ üzerindeki alt uzak topolojisinin bazı, $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ biçimindeki “rasyonel aralıklardır”.

11.3 “Y’de Açık” ile “X’te Açık”

Alt uzaylarla çalışırken aynı anda iki topolojik uzak vardır: (X, τ) ve (Y, τ_Y) . “Açık küme” dendiğinde hangi uzaydan söz edildiği belirtilmezse karışıklık çıkar. Bu yüzden dili netleştirelim.

Tanım 11.2 (Y’de Açık, X’te Açık). (X, τ) bir topolojik uzak ve $Y \subseteq X$ bir alt uzak olsun. Bir U kümesi τ_Y topolojisine aitse U ’ya **Y’de açık** (Y ’ye göre açık, open relative to Y) denir. Bir U kümesi τ topolojisine aitse U ’ya **X’te açık** denir.

Yani “ U , Y ’de açıktır” demek, X ’te açık bir V için $U = Y \cap V$ demektir; bu, özel olarak $U \subseteq Y$ olmasını gerektirir, çünkü Y ile bir kümenin kesişimi daima Y ’nin alt kümesidir. “ U , X ’te açıktır” demek ise U ’nun doğrudan τ ’nın bir elemanı olması demektir. Bu iki kavram genel olarak farklıdır; aşağıdaki örnek bunu gösterir.

⚠ Y’de açık olan küme X’te açık olmak zorunda değildir

Bir kümenin Y ’de açık olması, X ’in açık bir kümesiyle Y ’nin kesişimi olmasıdır. Bu kesişim X ’te açık olmayabilir. Aynı biçimde bir kümenin X ’te açık olması onun Y ’de açık olduğunu söylemez; küme Y ’nin alt kümesi bile olmayabilir. Hangi uzayda çalıştığınızı her zaman belirtin.

Örnek 11.2 (Y’de Açık Ama X’te Açık Olmayan Küme). $\mathbb{R}$ standart topolojiyle verilsin ve $Y = [0, 1]$ alt uzayını alalım. $U = [0, \frac{1}{2})$ kümesinin Y ’de açık olduğunu ama $\mathbb{R}$ ’de açık olmadığını gösterelim.

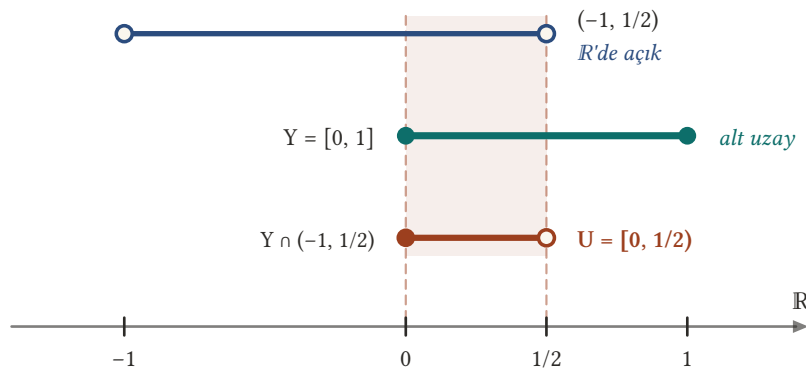
Çözüm.

U , Y ’de açıktır. $(-1, \frac{1}{2})$ açık aralığı $\mathbb{R}$ ’de açıktır ve

$$[0, 1] \cap (-1, \frac{1}{2}) = \left\{ x : 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } -1 < x < \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x : 0 \leq x < \frac{1}{2} \right\} = [0, \frac{1}{2}).$$

Gerçekten, $0 \leq x$ ve $-1 < x$ koşullarının ikisi birden “ $0 \leq x$ ” ile, $x \leq 1$ ve $x < \frac{1}{2}$ koşullarının ikisi birden “ $x < \frac{1}{2}$ ” ile denktir. Dolayısıyla U , Y ile $\mathbb{R}$ ’nin açık bir kümesinin kesişimidir; tanım gereği Y ’de açıktır.

U , $\mathbb{R}$ ’de açık değildir. $\mathbb{R}$ ’de açık bir küme, her noktasını içeren bir açık aralığı da içerir. $0 \in U$ noktasını ele alalım. 0 ’ı içeren herhangi bir (a, b) açık aralığında $a < 0 < b$ ’dir; $a < a/2 < 0$ olduğundan $a/2 \in (a, b)$, ama $a/2 < 0$ olduğundan $a/2 \notin U$. Yani 0 ’ı içeren hiçbir açık aralık U ’nun içinde kalmaz; U , $\mathbb{R}$ ’de açık değildir.



U, Y’de açık ama R’de açık değil

Şekil 11.1: $Y = [0, 1]$ alt uzayında $U = [0, 1/2)$ kümesi. Üstteki $(-1, 1/2)$ aralığı $\mathbb{R}$ ’de açıktır; Y ile kesişimi tanınmış şerit, yani 0 ’ı içeren ama $1/2$ ’yi içermeyen $U = [0, 1/2)$ kümesidir. Bu kesişim tanım gereği Y ’de açıktır; ancak 0 ’ı içeren her açık aralık 0 ’ın soluna, dolayısıyla U ’nun dışına taşıdığından U , $\mathbb{R}$ ’de açık değildir.

■

Bu örnekte sorun, $Y = [0, 1]$ ’in kendisinin $\mathbb{R}$ ’de açık olmamasıydı. **Örnek 11.1**’in (d) şıkında ise $Y = (0, 1)$ açıktı ve iki kavram çakıştı. Bu bir rastlantı değildir: Y , X ’te açıksa “Y’de açık” olmak “X’te açık” olmayı gerektirir. Bu küçük lemma pratikte çok kullanılır; örneğin bir açık kümenin içinde çalışırken açıklığı her seferinde iki uzayda ayrı ayrı kontrol etmek zorunda kalmayız.

Lemma 11.2 (Açık Alt Uzayda Açık Kümeler). Y , X topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. U , Y ’de açık ve Y , X ’te açık ise U , X ’te açıktır.

İspat.

U , Y ’de açık olduğundan alt uzay topolojisinin tanımı gereği X ’te açık bir V kümesi için $U = Y \cap V$ yazılır. Varsayım gereği Y de X ’te açıktır. Y ve V ikisi de X ’te açık olduğundan (T2) aksiyomu gereği kesişimleri $Y \cap V$ de X ’te açıktır. $U = Y \cap V$ olduğuna göre U , X ’te açıktır.

■

Lemmanın tersi de doğrudur: Y ’de açık olan her küme X ’te açıksa Y , X ’te açıktır; çünkü $Y = Y \cap X$ kümesi Y ’de açıktır. Bu iki gözlem birlikte alındığında “Y’de açıklık ile X’te açıklık çakışır” ifadesinin tam olarak Y ’nin X ’te açık olması durumunda geçerli olduğunu söyler.

11.4 Alt Uzay ile Çarpım Topolojisinin Uyumu

Elimizde artık uzaylardan yeni uzay üretmenin üç yolu var: sıra topolojisi, çarpım topolojisi ve alt uzay topolojisi. Doğal soru şudur: bu kurma işlemleri birbiriyle uyumlu mudur? Somut olarak, $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olsun. $A \times B$ kümesi üzerinde iki topoloji tanımlayabiliriz:

1. Önce A ’ya ve B ’ye alt uzay topolojilerini verir, sonra $A \times B$ üzerinde bu iki uzayın **çarpım topolojisini** kurarız.
2. Önce $X \times Y$ üzerinde çarpım topolojisini kurar, sonra $A \times B \subseteq X \times Y$ alt kümesine **alt uzay topolojisini** veririz.

Çarpım topolojisi için sonuç beklendiği gibidir: iki topoloji aynıdır. Yani “önce kısıtla sonra çarp” ile “önce çarp sonra kısıtla” aynı kapıya çıkar. İspatın anahtarı basit bir küme eşitliğidir: bir dikdörtgeni bir dikdörtgenle kesiştirmek, kenarları kesiştirmekle aynıdır.

Teorem 11.2 (Alt Uzay ile Çarpım Topolojisinin Uyumu). A , X topolojik uzayının bir alt uzayı ve B , Y topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. $A \times B$ üzerindeki çarpım topolojisi, $A \times B$ ’nin $X \times Y$ ’nin bir alt uzayı olarak devraldığı alt uzay topolojisiyle aynıdır.

İspat.

Bu ispatta X ’in topolojisini τ_X , Y ’nin topolojisini τ_Y ile gösterelim; burada Y bir alt uzay değil, kendi başına bir topolojik uzaydır. İki topolojinin de birer bazını bulacak ve bu bazların aynı aile olduğunu göstereceğiz. Aynı bazın ürettiği topoloji tektir (bazın ürettiği topoloji, bazın elemanlarının bütün birleşimlerinden oluşur); dolayısıyla bazlar aynıysa topolojiler de aynıdır.

Adım 1: Küme eşitliği. Her $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ için

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$$

olduğunu gösterelim. Bir (x, y) sıralı ikilisi sol taraftadır ancak ve ancak $(x, y) \in U \times V$ ve $(x, y) \in A \times B$; kartezyen çarpımın tanımı gereği bu, “ $x \in U$ ve $y \in V$ ve $x \in A$ ve $y \in B$ ” demektir. Koşulları yeniden gruplarsak “ $x \in U \cap A$ ve $y \in V \cap B$ ” elde ederiz; bu da tam olarak $(x, y) \in (U \cap A) \times (V \cap B)$ demektir. Her iki yön de aynı denklik zinciriyle görüldüğünden eşitlik ispatlanmıştır.

Adım 2: Alt uzay topolojisinin bazı. $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisinin bazı, U X ’te açık ve V Y ’de açık olmak üzere $U \times V$ kümelerinden oluşan

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

ailesidir. **Lemma 11.1**’a göre $A \times B$ üzerindeki alt uzay topolojisinin bir bazı, bu baz elemanlarının $A \times B$ ile kesişimleridir:

$$\mathcal{B}_{A \times B} = \{(U \times V) \cap (A \times B) : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}.$$

Adım 1'deki eşitliği kullanırsak

$$\mathcal{B}_{A \times B} = \{(U \cap A) \times (V \cap B) : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}.$$

Adım 3: Çarpım topolojisinin bazı A üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau_X\}$, B üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_B = \{V \cap B : V \in \tau_Y\}$ 'dir. $A \times B$ üzerindeki çarpım topolojisinin bazı, tanım gereği A 'da açık bir küme ile B 'de açık bir kümenin çarpımlarından oluşur:

$$\mathcal{C} = \{U' \times V' : U' \in \tau_A, V' \in \tau_B\}.$$

$U' \in \tau_A$ demek, bir $U \in \tau_X$ için $U' = U \cap A$ demektir; $V' \in \tau_B$ demek, bir $V \in \tau_Y$ için $V' = V \cap B$ demektir. O hâlde

$$\mathcal{C} = \{(U \cap A) \times (V \cap B) : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}.$$

Adım 4: Sonuç. Adım 2 ve Adım 3'teki aileler harfi harfine aynıdır: $\mathcal{B}_{A \times B} = \mathcal{C}$. Alt uzay topolojisi $\mathcal{B}_{A \times B}$ bazının ürettiği topoloji, çarpım topolojisi $\mathcal{C}$ bazının ürettiği topolojidir. Bazılar aynı olduğundan ürettikleri topolojiler de aynıdır.

■

İspatın özü: $(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$ eşitliği sayesinde iki topolojinin bazıları aynı kümelerden oluşur.

Bu teoremin somut bir yararı şudur: $[0, 1] \times [0, 1]$ birim karesi üzerinde çalışırken, onu düzlemin bir alt uzayı olarak mı yoksa iki $[0, 1]$ alt uzayının çarpımı olarak mı gördüğümüzün önemi yoktur; açık kümeler aynıdır.

11.5 Alt Uzay ile Sıra Topolojisinin Karşılaştırılması

Şimdi aynı soruyu sıra topolojisi için soralım. $(X, <)$ tam sıralı bir küme ve $Y \subseteq X$ olsun. X 'in sıralaması Y 'nin elemanlarını da karşılaştırır; bu yüzden Y kendi başına bir tam sıralı kümedir ve kendi sıra topolojisine sahiptir. Öte yandan X üzerinde sıra topolojisi verildiğinde Y , bu uzayın bir alt uzayıdır ve bir alt uzay topolojisi taşır. Y üzerindeki bu iki topoloji aynı mıdır?

Tanım 11.3 (Kısıtlanmış Sıralama ve Y Üzerindeki İki Topoloji). $(X, <)$ tam sıralı bir küme ve $Y \subseteq X$ olsun. $y_1, y_2 \in Y$ için " $y_1 <_Y y_2$ ancak ve ancak $y_1 < y_2$ " ile tanımlanan $<_Y$ bağıntısına $<$ sıralamasının Y 'ye kısıtlanması (restriction) denir. Y üzerinde iki topoloji vardır:

- $(Y, <_Y)$ tam sıralı kümesinin **sıra topolojisi**;
- X sıra topolojisiyle donatıldığında $Y \subseteq X$ alt kümesinin **alt uzay topolojisi**.

Yani Y 'nin elemanlarını X 'te nasıl karşılaştırıyorsak öyle karşılaştırmaya devam ederiz; başka bir sıralama icat etmeyiz. $<_Y$ gerçekten bir tam sıralamadır: tam sıralamanın üç koşulu (farklı iki elemandan biri ötekenden küçüktür; hiçbir eleman kendinden küçük değildir; $y_1 < y_2$ ve $y_2 < y_3$ ise $y_1 < y_3$) X 'in bütün elemanları için doğru olduğundan, özel olarak Y 'nin elemanları için de doğrudur. Ancak dikkat: Y 'nin en küçük ya da en büyük elemanı, X 'in olmasa bile var olabilir. Örneğin $\mathbb{R}$ 'nin en küçük elemanı yoktur ama $[0, 1]$ 'in vardır. Bu yüzden Y 'nin sıra topolojisinin bazında $[a_0, b]$ ve $(a, b_0]$ türünden kümeler ortaya çıkabilir; bu da iki topolojinin farklı olabilmesinin nedenidir.

Sonuç, çarpım topolojisindeki kadar temiz değildir: iki topoloji bazen çakışır, bazen çakışmaz. Önce çakıştıkları bir örnek görelim.

Örnek 11.3 (Kapalı Aralıkta Sıra ve Alt Uzay Topolojileri Çakışır). Gerçek doğrunun $Y = [0, 1]$ alt kümesini ele alalım. Y üzerindeki alt uzay topolojisi ile $(\mathbb{R}$ 'den kısıtlanan alışılmış sıralamaya göre) sıra topolojisinin aynı olduğunu gösterelim.

Çözüm.

İki topolojinin de bazını yazacak, sonra her bazın elemanlarının öteki topolojide açık olduğunu göstereceğiz. Bir topolojinin bazının her elemanı bir başka topolojide açıksa, baz elemanlarının bütün

birleşimleri de o topolojide açıktır ((T3) gereği); yani birinci topoloji ikincinin içindedir. Her iki yön için bu yapılmış topolojiler eşit olur.

Alt uzay topolojisinin bazı $\mathbb{R}$ 'nin standart topolojisinin bazı $a < b$ için (a, b) açık aralıklarıdır. Lemma 11.1'a göre Y 'nin alt uzay topolojisinin bazı $(a, b) \cap Y$ biçimindeki kümelerden oluşur. a ve b 'nin 0 ve 1'e göre konumuna bakarak böyle bir kümenin şu türlerden biri olduğunu görürüz:

- (1) $0 \leq a < b \leq 1$ ise $(a, b) \cap [0, 1] = (a, b)$; burada $a, b \in Y$ 'dir.
- (2) $a < 0 < b \leq 1$ ise $(a, b) \cap [0, 1] = [0, b)$; burada $b \in Y$ ve $0 < b$.
- (3) $0 \leq a < 1 < b$ ise $(a, b) \cap [0, 1] = (a, 1]$; burada $a \in Y$ ve $a < 1$.
- (4) $a < 0$ ve $1 < b$ ise $(a, b) \cap [0, 1] = [0, 1] = Y$.
- (5) $b \leq 0$ ya da $a \geq 1$ ise $(a, b) \cap [0, 1] = \emptyset$.

Gerçekten, $x \in (a, b) \cap [0, 1]$ koşulu dört eşitsizliğin birlikte sağlanmasıdır: $a < x$, $0 \leq x$, $x < b$, $x \leq 1$. Sol uçtaki iki koşula bakalım: $a \geq 0$ ise $a < x$ zaten $0 \leq x$ 'i gerektirir, geriye " $a < x$ " kalır; $a < 0$ ise $0 \leq x$ zaten $a < x$ 'i gerektirir, geriye " $0 \leq x$ " kalır. Sağ uca aynı biçimde $b \leq 1$ ise " $x < b$ ", $b > 1$ ise " $x \leq 1$ " kalır. Sol ve sağ uçtaki ikişer seçeneğin dört birleşimi, kesişim boş değilse (1)–(4) türlerini verir; aralığın tamamen $[0, 1]$ 'in dışında kalması ise (5) türüdür. Bu beş tür, (a, b) 'nin $[0, 1]$ 'e göre alabileceği bütün konumları kapsar.

Sıra topolojisinin bazı $Y = [0, 1]$ tam sıralı kümesinin en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1'dir. Dolayısıyla sıra topolojisinin bazı üç tür kümeden oluşur: $c, d \in Y$ ve $c < d$ için (c, d) açık aralıkları; $d \in Y$, $0 < d$ için $[0, d)$ aralıkları; $c \in Y$, $c < 1$ için $(c, 1]$ aralıkları. Burada aralıklar Y içinde alınmaktadır; örneğin (c, d) ile $\{y \in Y : c < y < d\}$ kümesi kastedilir. Y 'nin elemanları arasındaki sıralama $\mathbb{R}$ 'dekiyle aynı olduğundan bu küme, $\mathbb{R}$ 'deki (c, d) aralığının $[0, 1]$ ile kesişimidir. $0 \leq c < d \leq 1$ olduğundan $\mathbb{R}$ 'deki (c, d) aralığı zaten $[0, 1]$ 'in içindedir; yani Y 'deki (c, d) ile $\mathbb{R}$ 'deki (c, d) aynı kümedir. Aynı gerekçe $[0, d)$ ve $(c, 1]$ için de geçerlidir.

Alt uzay topolojisinin baz elemanları sıra topolojisinde açıktır. (1) türünden (a, b) kümesi, $a, b \in Y$ ve $a < b$ olduğundan sıra topolojisinin bir baz elemanıdır. (2) türünden $[0, b)$ kümesi, $b \in Y$ ve $0 < b$ olduğundan en küçük elemanı içeren türden bir baz elemanıdır. (3) türünden $(a, 1]$ kümesi, $a \in Y$ ve $a < 1$ olduğundan en büyük elemanı içeren türden bir baz elemanıdır. (4) türünden Y ve (5) türünden $\emptyset$ ise (T1) gereği her topolojide açıktır. Dolayısıyla alt uzay topolojisinin her baz elemanı sıra topolojisinde açıktır; alt uzay topolojisi sıra topolojisinin içindedir.

Sıra topolojisinin baz elemanları alt uzay topolojisinde açıktır. $c, d \in Y$, $c < d$ için $(c, d) = (c, d) \cap Y$, (1) türünden bir alt uzay baz elemanıdır. $d \in Y$, $0 < d$ için $[0, d) = (-1, d) \cap Y$; gerçekten $-1 < 0 < d \leq 1$ olduğundan bu, (2) türündedir. $c \in Y$, $c < 1$ için $(c, 1] = (c, 2) \cap Y$; $0 \leq c < 1 < 2$ olduğundan bu, (3) türündedir. Dolayısıyla sıra topolojisinin her baz elemanı alt uzay topolojisinde açıktır; sıra topolojisi alt uzay topolojisinin içindedir.

İki kapsama birlikte alındığında $[0, 1]$ üzerindeki alt uzay topolojisi ile sıra topolojisi aynıdır.

■

İspatın özü: $[0, 1]$ 'in en küçük ve en büyük elemanı vardır ve sıra topolojisinin bu elemanlar için eklediği $[0, d)$, $(c, 1]$ kümeleri, tam olarak 0'ın solundan ya da 1'in sağından taşan açık aralıkların $[0, 1]$ ile kesişimleridir.

Bu örnekte işleri yoluna koyan şey, $Y = [0, 1]$ 'in $\mathbb{R}$ içinde "boşluksuz" olmasıydı: Y 'nin iki elemanı arasındaki her gerçel sayı yine Y 'dedir. Bu özellik bozulduğunda iki topoloji ayrılabilir. Aşağıdaki örnek bunu gösterir.

Örnek 11.4 (Sıra ve Alt Uzay Topolojilerinin Çakışmadığı Bir Örnek). Gerçel doğrunun $Y = [0, 1) \cup \{2\}$ alt kümesini ele alalım. $\{2\}$ kümesinin Y üzerindeki alt uzay topolojisinde açık olduğunu, ama Y 'nin sıra topolojisinde açık olmadığını gösterelim. Sonuç olarak iki topoloji farklıdır; dahası sıra topolojisi alt uzay topolojisinden kesinlikle daha kabadır.

Çözüm.

$\{2\}$ alt uzay topolojisinde açıktır. $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ açık aralığı $\mathbb{R}$ 'de açıktır. Y 'nin bu aralıktaki elemanlarını bulalım: $[0, 1)$ 'in her elemanı 1'den küçük, dolayısıyla $\frac{3}{2}$ 'den küçüktür ve aralığa girmez; 2 ise $\frac{3}{2} < 2 < \frac{5}{2}$ olduğundan aralıktadır. O hâlde

$$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cap Y = \{2\}.$$

$\{2\}$, Y ile $\mathbb{R}$ 'nin açık bir kümesinin kesişimi olduğundan alt uzay topolojisinde açıktır.

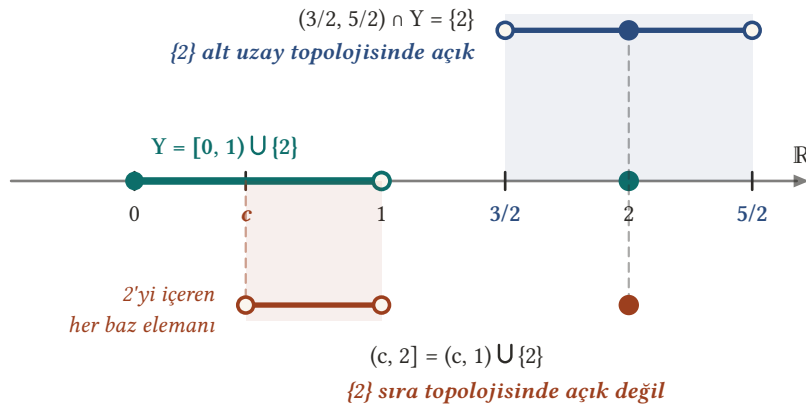
$\{2\}$ sıra topolojisinde açık değildir. $(Y, \leq_Y)$ tam sıralı kümesinin en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 2'dir (Y 'nin her elemanı 2'den küçük ya da 2'ye eşittir). Sıra topolojisinde 2'yi içeren baz elemanlarını belirleyelim. (c, d) türünden bir açık aralık 2'yi içeremez, çünkü $2 < d$ olacak bir $d \in Y$ yoktur. $[0, d)$ türünden bir aralık da 2'yi içeremez, çünkü yine $2 < d$ gerekir. Geriye en büyük elemanı içeren tür kalır: $c \in Y, c < 2$ için $(c, 2]$ aralıkları. Böyle bir c zorunlu olarak $[0, 1)$ 'dedir ve

$$(c, 2] = \{y \in Y : c < y \leq 2\} = (c, 1) \cup \{2\}.$$

$c < 1$ olduğundan $(c, 1)$ aralığı boş değildir; örneğin $\frac{c+1}{2}$ bu aralıktadır. Dolayısıyla 2'yi içeren her baz elemanı 2'den başka noktalar da içerir.

Şimdi $\{2\}$ 'nin sıra topolojisinde açık olduğunu varsayalım. Bazın ürettiği topolojinin tanımı gereği, $2 \in \{2\}$ noktası için $2 \in B \subseteq \{2\}$ olacak bir baz elemanı B vardır. Ama 2'yi içeren her baz elemanı $\frac{c+1}{2}$ gibi 2'den farklı bir nokta içerir, dolayısıyla $\{2\}$ 'nin alt kümesi olamaz. Bu çelişkidir; $\{2\}$ sıra topolojisinde açık değildir.

Sıra topolojisi daha kabardır. Sıra topolojisinin her baz elemanının alt uzak topolojisinde açık olduğunu gösterelim. $c, d \in Y, c < d$ için (c, d) aralığı $\mathbb{R}$ 'deki (c, d) açık aralığının Y ile kesişimidir, dolayısıyla alt uzak topolojisinde açıktır. $[0, d) = (-1, d) \cap Y$ ve $(c, 2] = (c, 3) \cap Y$ eşitlikleri de aynı sonucu verir. Baz elemanları alt uzak topolojisinde açık olduğundan (T3) gereği sıra topolojisinin her açık kümesi alt uzak topolojisinde açıktır. $\{2\}$ kümesi ise alt uzak topolojisinde açık olup sıra topolojisinde açık olmadığından iki topoloji eşit değildir: sıra topolojisi, alt uzak topolojisinden kesinlikle daha kabardır.



Şekil 11.2: $Y = [0, 1) \cup \{2\}$ üzerinde alt uzak topolojisi ile sıra topolojisi çakışmaz. Üstte $\mathbb{R}$ 'nin $(3/2, 5/2)$ açık aralığı Y 'yi yalnızca 2 noktasında keser; bu yüzden $\{2\}$ alt uzak topolojisinde açıktır. Altta sıra topolojisinde 2'yi içeren bir baz elemanı, $c \in [0, 1)$ için $(c, 2] = (c, 1) \cup \{2\}$, görülüyor: her böyle küme $[0, 1)$ 'den bir parça da taşır, dolayısıyla $\{2\}$ sıra topolojisinde açık değildir.

■

İspatın özü: alt uzak topolojisinde 2 noktası, $\mathbb{R}$ 'den gelen küçük bir aralıkla yalnız başına yakalanabilir; sıra topolojisi ise yalnızca Y 'nin kendi elemanlarıyla aralık kurabildiğinden 2'ye yaklaşan her aralık $[0, 1)$ 'den de bir parça taşımak zorundadır.

Bu iki örnek birlikte şu dersi verir: Y, X 'in içinde bir aralık gibi “dolu” duruyorsa sıra topolojisi ile alt uzak topolojisi uyur; Y 'de X 'e göre boşluklar varsa alt uzak topolojisi, komşularından kopuk noktaları tek başına yakalayabildiği için sıra topolojisinden daha ince olabilir. Sıralı bir kümenin alt kümesi üzerinde çalışırken hangi topolojinin kastedildiğini her zaman açıkça belirtmek gerekir. Çakışmayan ikinci bir örnek, $Y = (0, 1) \cup \{2\}$ kümesi, alıştırmaların (g) şıkında ele alınmaktadır.

11.6 Alıştırmalar

Alıştırma 11.1 (Alt Uzak Topolojisi Üzerine Alıştırmalar). Aşağıdaki alıştırmalarda $\mathbb{R}$ daima standart topolojiyle verilmiştir.

- a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ üzerindeki alt uzay topolojisinin ayrık topoloji olduğunu gösterin.
- b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ üzerindeki alt uzay topolojisinin ayrık topoloji olmadığını gösterin.
- c) Y, X 'in bir alt uzayı olsun. $F \subseteq Y$ kümesinin Y 'de kapalı olması için gerek ve yeter koşulun, X 'te kapalı bir C kümesi için $F = Y \cap C$ olması olduğunu gösterin. (Bir kümenin bir uzayda kapalı olması, tümleyeninin o uzayda açık olması demektir.)
- d) Y, X 'in bir alt uzayı olsun. F, Y 'de kapalı ve Y, X 'te kapalı ise F 'nin X 'te kapalı olduğunu gösterin.
- e) $Z \subseteq Y \subseteq X$ ve X bir topolojik uzay olsun. Z 'nin, X 'in alt uzayı olarak aldığı topoloji ile Y alt uzayının alt uzayı olarak aldığı topolojinin aynı olduğunu gösterin.
- f) Y, X 'in bir alt uzayı olsun. Y 'de açık olan her kümenin X 'te de açık olması için gerek ve yeter koşulun Y 'nin X 'te açık olması olduğunu gösterin.
- g) $Y = (0, 1) \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Y üzerindeki alt uzay topolojisi ile sıra topolojisinin farklı olduğunu gösterin.

Çözüm.

- a) $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ aralığı $\mathbb{R}$ 'de açıktır ve bu aralıktaki tek tam sayı n 'dir: bir $m \in \mathbb{Z}$ için $|m - n| < \frac{1}{2}$ ise $m - n$ mutlak değeri 1'den küçük bir tam sayıdır, yani 0'dır. O hâlde $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$ ve $\{n\}$ alt uzay topolojisinde açıktır. Şimdi herhangi bir $W \subseteq \mathbb{Z}$ alalım; $W = \bigcup_{n \in W} \{n\}$ açık kümelerin birleşimi olduğundan (T3) gereği açıktır. Her alt küme açık olduğuna göre topoloji ayrıktır.
- b) $\{0\}$ kümesinin $\mathbb{Q}$ 'da açık olmadığını gösterelim. Açık olsaydı Lemma 11.1'a göre $0 \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq \{0\}$ olacak bir (a, b) açık aralığı olurdu; yani $a < 0 < b$ ve (a, b) aralığında 0'dan başka rasyonel sayı bulunmazdı. Oysa $b > 0$ olduğundan Arşimet özelliği gereği $\frac{1}{n} < b$ olacak bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve $\frac{1}{n}, (0, b) \subseteq (a, b)$ aralığında 0'dan farklı bir rasyonel sayıdır. Bu çelişkidir; $\{0\}$ açık değildir, dolayısıyla topoloji ayrık değildir.
- c) *Gereklilik.* F, Y 'de kapalı olsun. O zaman $Y \setminus F, Y$ 'de açıktır; alt uzay topolojisinin tanımı gereği X 'te açık bir U için $Y \setminus F = Y \cap U$. $C = X \setminus U$ diyelim; C, X 'te kapalıdır. İddia: $F = Y \cap C$. $y \in Y$ olsun. $y \in F$ ise $y \notin Y \setminus F = Y \cap U$, dolayısıyla $y \notin U$ (çünkü $y \in Y$), yani $y \in C$ ve $y \in Y \cap C$. Tersine $y \in Y \cap C$ ise $y \notin U$, dolayısıyla $y \notin Y \setminus F = Y \cap U$; $y \in Y$ olduğundan $y \in F$.
Yeterlilik. X 'te kapalı bir C için $F = Y \cap C$ olsun. $U = X \setminus C, X$ 'te açıktır. $Y \setminus F = Y \setminus (Y \cap C) = \{y \in Y : y \notin C\} = Y \cap (X \setminus C) = Y \cap U$; bu küme Y 'de açıktır. Tümleyeni Y 'de açık olduğundan F, Y 'de kapalıdır.
- d) (c) şikkına göre X 'te kapalı bir C için $F = Y \cap C$ 'dir. Y ve C ikisi de X 'te kapalı olduğundan tümleyenleri $X \setminus Y$ ve $X \setminus C$ açıktır; De Morgan kuralına göre $X \setminus (Y \cap C) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus C)$ iki açık kümenin birleşimi olarak (T3) gereği açıktır. Tümleyeni açık olduğundan $F = Y \cap C, X$ 'te kapalıdır.
- e) τ, X 'in topolojisi olsun. Z 'nin doğrudan X 'ten aldığı topoloji $\{Z \cap U : U \in \tau\}$ 'dur. Y 'nin topolojisi $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$, Z 'nin Y 'den aldığı topoloji ise $\{Z \cap W : W \in \tau_Y\} = \{Z \cap (Y \cap U) : U \in \tau\}$ 'dur. $Z \subseteq Y$ olduğundan $Z \cap Y = Z$ ve kesişimin birleşme özelliğiyle $Z \cap (Y \cap U) = (Z \cap Y) \cap U = Z \cap U$. O hâlde iki aile eleman eleman aynıdır; topolojiler eşittir.
- f) *Gereklilik.* Y 'de açık her küme X 'te açık olsun. $Y = Y \cap X$ ve $X \in \tau$ olduğundan Y, Y 'de açıktır; varsayım gereği X 'te de açıktır. *Yeterlilik.* Y, X 'te açık olsun; Lemma 11.2 tam olarak Y 'de açık her kümenin X 'te açık olduğunu söyler.
- g) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cap Y = \{2\}$ olduğundan $\{2\}$ alt uzay topolojisinde açıktır. Y 'nin sıra topolojisinde ise 2 en büyük elemandır ve Y 'nin en küçük elemanı yoktur (her $y \in (0, 1)$ için $\frac{y}{2} \in Y$ ve $\frac{y}{2} < y$). 2'yi içeren baz elemanları yalnızca $c \in (0, 1)$ için $(c, 2] = (c, 1) \cup \{2\}$ kümeleridir; (c, d) türünden aralıklar $2 < d$ gerektirdiğinden 2'yi içerebilir, en küçük eleman olmadığından $[a_0, d)$ türünden küme yoktur. $(c, 1)$ boş olmadığından $(\frac{c+1}{2}, 1)$ içindedir) 2'yi içeren hiçbir baz elemanı $\{2\}$ 'nin içinde kalmaz; dolayısıyla $\{2\}$ sıra topolojisinde açık değildir. İki topoloji farklıdır.

■

Bu bölümle birlikte topolojik uzay kurmanın üç temel yolunu, sıra, çarpım ve alt uzay topolojilerini, tanımlarıyla, bazılarıyla ve birbirleriyle ilişkileriyle öğrenmiş olduk; kitabın ilk kısmı burada tamamlanıyor.